Tema 7
Aplicación de la transformada Z en el análisis de señales y sistemas

Diego Leonardo Valladares
Dpto. de Física - Univ. Nac. de San Luis

17 de noviembre de 2021

Índice

1. La transformada Z

En este tema estudiaremos la transformada Z y su uso en el análisis de señales y sistemas. Podemos decir que la transformada Z es la versión de la transformada de Laplace para señales discretas. Por lo que al desarrollar del tema haremos usos de muchos conceptos que discutimos al estudiar la Transformada de Laplace.

La transformada de Laplace permite describir señales continuas en el dominio de la variable compleja s y transformar las ecuaciones diferenciales que describen la relación entrada salida de sistemas LTI en expresiones algebraicas, procedimientos que posibilitan simplificar enormemente el análisis de las señales y los sistemas. De forma análoga y con el mismo propósito, la transformada Z permite describir señales discretas en el dominio z y transformar las ecuaciones en diferencia en expresiones algebraicas.

Recordemos que al estudiar transformada de Fourier en tiempo discreto, introdujimos la señal exponencial compleja $x[n] = z^n$, donde z es un número complejo y n es un número entero. Si bien identificamos a n como el «tiempo discreto», no necesariamente es una variable que tenga relación con el tiempo. Vimos también que la señal exponencial compleja $x[n] = e^{j\omega n}$, es un caso particular de la secuencia z^n para $|z| = 1$ ($z = e^{j\omega}$).

También vimos que si la señal exponencial compleja es de la forma z^n, la respuesta del sistema LTI es

$$y[n] = \mathcal{T}\left\{z^n\right\} = H(z)z^n$$

donde

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

La función de variable compleja $H(z)$ se denomina *Función de Transferencia* o *Función del Sistema*. Veremos ahora que $H(z)$ es la transformada Z de la respuesta al impulso $h[n]$.

Transformada Z

Se define como la transformada Z de una señal $x[n]$ a la función de valor complejo $X(z)$, definida como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{1}$$

donde el argumento de $X(z)$ es un variable continua especificada por el número complejo z.

Usualmente expresamos la variable independiente compleja z en su forma polar como

$$z = re^{j\omega}$$

donde $r = |z|$ y $\omega = \angle(z)$.

Denotaremos la operación especificada por la expresión (1) mediante el operador $\mathcal{Z}$, así $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, y el par transformado Z mediante la notación

$$x[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X(z)$$

La transformada Z es una función en que tanto la variable independiente como la dependiente son números complejos, $z = re^{j\omega}$ y $X(z) = |X(z)|e^{j\angle(X(z))}$. Remarquemos que si bien la señal $x[n]$ es una función de variable discreta n, su transformada Z es una función de variable continua, la variable compleja z.

La expresión (1) es también denominada *Transformada Z bilateral*, para diferenciarla de la *Transformada Z unilateral* definida como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2}$$

La transformada Z unilateral cumple relaciones y tiene propiedades similares a la transformada de Laplace unilateral. En particular las transformadas Z unilateral y bilateral son idénticas para señales causales.

La existencia de la transformada $X(z)$ depende de que pueda ser evaluada la sumatoria que la define (expresión 1). En general, la convergencia de esta suma de infinitos términos para una señal en particular, ocurre para valores de z que definen una región en el plano complejo. Puede ocurrir que para una señal $x[n]$, la suma converga para todo z; también que no converga para ningún valor de z. Desarrollamos el tema de las condiciones de convergencia de $X(z)$ en un sección posterior.

2. Relación entre la transformadas Z y Fourier en tiempo discreto

Relación entre $X(z)$ y $X\left(e^{j\omega}\right)$

Cuando z posee módulo unidad, z puede escribirse como $z = e^{j\omega}$ para $0 \leq \omega < 2\pi$, por lo que

$$\mathcal{F}\left\{x[n]\right\} = X\left(z\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}. \tag{3}$$

Es decir que podemos obtener la transformada de Fourier de $x[n]$, evaluando la transformada Z en valores de z de la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, denominada *circunferencia unitaria*. Podemos visualizar esta evaluación como la curva (función de ω) que se obtiene como intersección del cilindro que contiene la circunferencia unitaria con las superficies que representan $X(z)$, (superficies $|X(z)|$ y $\angle X(z)$). La relación entre ambas transformadas se representa en la figura 1.

Remarquemos que podremos evaluar la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ sólo si la región de convergencia de $X(z)$ incluye a la circunferencia unitaria. En caso contrario, la transformada de Fourier en tiempo discreto no existe para esta señal, en sentido de que esta transformada no es una función de ω (función en el sentido usual).

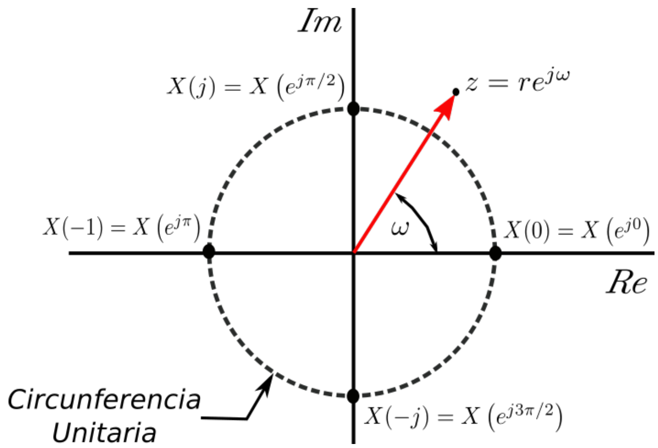

Figura 1: Representación de relación entre las transformadas de Fourier en tiempo discreto y Z, en el plano z

3. La región de convergencia

Zona de convergencia-ROC

Definiremos como *Región de Convergencia* (ROC) a la región del plano complejo que contiene los valores de z para los cuales la transformada Z existe, es decir para los cuales la sumatoria de la expresión (1) puede ser evaluada (converge). La representación de la ROC se realiza indicando los valores de z para los cuales la transformada converge con una zona sombreada en el plano complejo z.

Para obtener la condición de convergencia de la sumatoria que define la transformada $X(z)$ (ec. 1), observemos que si escribimos z en forma polar, $z = re^{j\omega}$,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right) e^{-j\omega n}. \end{aligned}$$

Vemos que **la transformada de Z de una señal es la transformada de Fourier en tiempo discreto de** $x[n]r^{-n}$, por lo que la existencia de $X(z)$ depende no solo de las características de $x[n]$, sino que también de r (módulo de z).

$$X(z) = \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\} \tag{4}$$

Condición de convergencia de la transformada Z

La transformada $X(z)$ de una señal $x[n]$ existe para aquellos valores de z para los cuales existe la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]r^{-n}$, siendo r el módulo de z. Recordando las condiciones de existencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto, lo anterior ocurre si se cumple

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n} < \infty \tag{5}$$

Observemos que la condición de convergencia de $X(z)$ para un valor particular de z solo depende del módulo de z ($r = |z|$), no de su fase ($\angle z$). Por lo que si existe $X(z)$ para un valor particular z_1, la transformada existe para todo valor de z que posea el mismo módulo de z_1. **Esta característica determina que las regiones de convergencia de la transformada Z sean regiones anulares centradas en el origen de coordenadas del plano z.** Este tipo de ROC está representada en la figura 2, donde los radios de las circunferencias r_1 y r_2 pueden tomar cualquier valor entre 0 e ∞. Comparemos esto con las regiones de convergencia tipo banda que posee la transformada de Laplace.

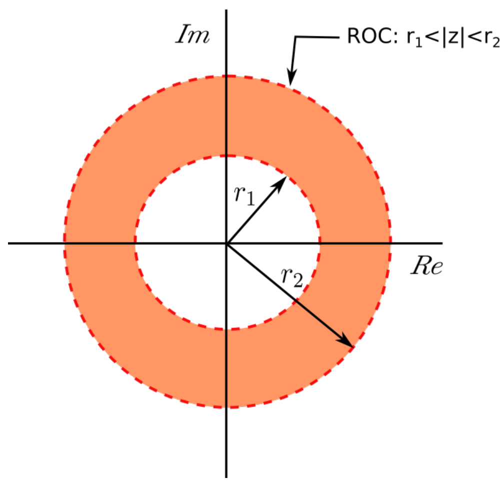

Figura 2: Representación de la ROC de la transformada Z.

Veamos algunos ejemplos sobre cómo obtener la transformada y su ROC usando la definición (ec. 1.

Ejemplo N^o 1. Consideremos la señal $x[n] = a^n u[n]$, donde a es real. Para evaluar $X(z)$ aplicamos su definición

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n \\
&= \underbrace{\frac{1}{1-az^{-1}}}_{\text{Potencias negativas de z}} \qquad \text{si} \quad \left|az^{-1}\right| < 1 \\
&= \underbrace{\frac{z}{z-a}}_{\text{Potencias positivas de z}}
\end{aligned}
$$

La condición de convergencia de $X(z)$ es $|az^{-1}| < 1$, la que define su ROC como la región del plano z que cumple la condición $|z| > |a|$. Esta región de convergencia se muestra en la figura 3 como la zona coloreada, para a real y de módulo mayor que uno.

La transformada $X(z)$ es racional ya que es el cociente de dos polinomios en z. En las dos lineas finales del desarrollo del cálculo están dos formas algebraicas en que se presentan las transformadas Z racionales, una en que los polinomio se presentan en potencias negativas de z y la otra en potencias positivas de z. Esta última es la que denominamos forma polo-zero. Además de la ROC, en la figura 3 se representa el polo en $z = a$ y el cero en $z = 0$ con misma convención de signos que utilizamos en el tema Transformada de Laplace.

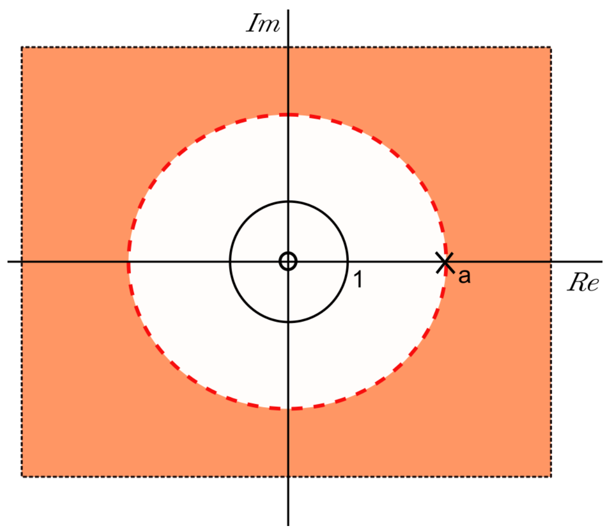

Figura 3: Representación de las ROCs del ejemplo 1

Si $a = 1$, $x[n] = u[n]$ y la transformada Z del escalón es

$$Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ROC\ |z| > 1.$$

Teniendo en cuenta la ROC de la $X(z)$ de $x[n] = a^n u[n]$, vemos que si $|a| < 1$, la ROC incluye la circunferencia unitaria. Esto implica que podremos evaluar la Transformada de Fourier de esta señal, es decir que esta tranformada existe, sólo si $|a| < 1$.

Ejemplo N^o 2. Consideremos la señal $x[n] = -a^n u[-n-1]$, donde a es real. Para evaluar $X(z)$ aplicamos su definición

$$
\begin{aligned}
X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1]\, z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(a^{-1}z\right)^{-n} \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^{n} \\
&= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} \qquad \text{si} \quad \left|a^{-1}z\right| < 1 \\
&= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}
\end{aligned}
$$

La condición de convergencia de $X(z)$ es $|a^{-1}z| < 1$, la que define su ROC como la región del plano z que cumple la condición $|z| < |a|$. Esta región de convergencia se muestra en la figura 4 para $|a| < 1$.

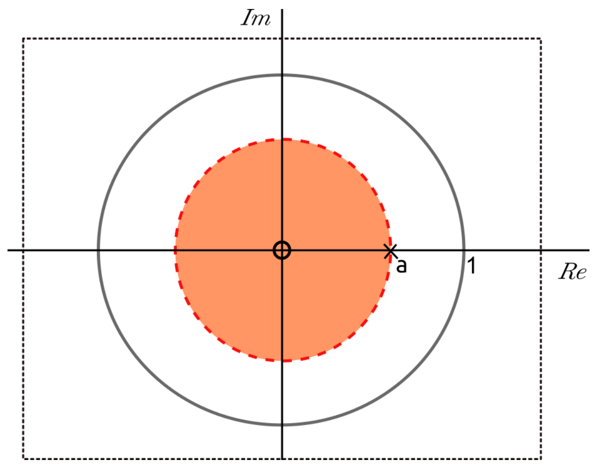

Figura 4: Representación de las ROCs del ejemplo 2

Si bien en ambos ejemplos hemos discutido el caso en que a es un número real, a podría ser un número complejo. Observemos que en este caso para que la ROC incluya la circunferencia unitaria, y por tanto exista la transformada de Fourier de la señal, se debe cumplir que $|a| > 1$.

En los ejemplos hemos encontrado las siguientes transformadas Z,

$$a^n u[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > |a| \tag{6}$$

$$-a^{n-1} u[n-1] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad ROC:\ |z| < |a| \tag{7}$$

Estas y otras transformadas de señales básicas se muestran en la tabla 1. Vemos que ambas transformadas Z poseen la misma expresión algebraica, a pesar de ser señales distintas, sólo se distinguen por su zona de convergencia. De lo cual podemos concluir que **es necesario indicar la zona de convergencia cada vez que informamos la transformada Z de una señal**, ya que de otra manera la señal asociada no se encuentra totalmente especificada. Observemos que en ninguno de los dos casos la ROC incluye la circunferencia $|z| = |a|$, que en el caso de la señal causal, la ROC es la región exterior al círculo de radio $|a|$, y para la señal no causal, el interior del círculo.

Ejemplo N^o 3. Consideremos la siguiente señal finita causal

$$x[n] = \{\underline{1}, 1, 2, 3, 5, 8\}$$

Calculamos su transformada $X(z)$ aplicando la definición,

$$\begin{aligned} X(z) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= 1z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} + 8z^{-5} \end{aligned}$$

Vemos que la transformada es un polinomio con un número finito de términos que son potencias negativas de z (más el término independiente que corresponde a z^0). La región de convergencia es todo el plano z excepto $z = 0$, donde $X(z)$ no está definida ya que diverge a infinito (posee un polo).

Si consideramos la señal finita no causal

$$x[n] = \{1, 2, \underline{5}, 7, 0, 1\},$$

su transformada Z es

$$\begin{aligned} X(z) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= z^2 + 2z^1 + 5z^0 + 7z^{-1} + 0z^{-2} + z^{-3} \end{aligned}$$

En este caso la transformada es un polinomio de un número finito de términos en potencias positivas y negativas de z, por lo que la región de convergencia es todo el plano z, excepto $z = 0$ y $z = \infty$, donde $X(z)$ no está definida (posee polos). Observemos que los valores de la señal para $n < 0$, corresponden con potencias positivas de z; los valores para $n > 0$, corresponden a potencias negativas de z.

4. Polos y ceros de $X(z)$

Cuando las señales son combinaciones lineales de señales exponenciales, o cuando obtenemos la Función de Transferencia de sistemas LTI especificados por ecuaciones en diferencia con coeficientes constantes, la transformada Z es una función racional de z, de la forma

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_m z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_n z^{-N}} \tag{8}$$

Los coeficientes b_k y a_k son constantes reales, M y N son enteros positivos. La transformada racional aparece escrita como **el cociente de dos polinomios en potencias negativas de z**. Dependiendo de los valores del orden del numerador z y del orden del denominador N, $X(z)$ se denomina función racional propia si $N > M$ e impropia si $N \leq M$.

De la misma manera que para transformadas de Laplace racionales, las raíces z_k del numerador se denominan *ceros* de $X(z)$. Las raíces p_k del denominador se denominan *polos* de $X(z)$. Los polos de $X(z)$ se encuentran fuera de la ROC, ya que por definición la transformada no existe para estos valores de z. Representamos los ceros y polos en el diagrama polo-ceros.

Veamos otras formas de expresar la tranformada Z racional que permiten distinguir más claramente los polos y ceros de la transformada.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_m z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_n z^{-N}} \\ &= \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + ... + b_m}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + ... + a_n} \\ &= z^{N-M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + ... + b_m}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + ... + a_n} \end{aligned}$$

La última línea del cálculo expresa a $X(z)$ como cociente de potencias positivas de z, observemos la diferencia con la forma de $X(z)$ expresada en potencias negativas de z dada en la ec. 8. Remarquemos que ambas

Factorizando tanto el numerador como el denominador, obtenemos la

$$X(z) = z^{N-M} \frac{b_0}{a_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)...(z - p_n)} \tag{9}$$

Escrita de esta forma, claramente distinguimos los polos y ceros no triviales. Se denomina cero o polo trivial al que se encuentra en $z = 0$ o en $z = \infty$.

Si en la expresión 9 distribuimos el factor z^{N-M} en cada uno de los factores del denominador y numerador, obtenemos

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0}\,\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})...(1-z_mz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})...(1-p_nz^{-1})} \tag{10}$$

Observando las expresiones 9 y 10, vemos que la transformada posee m ceros y n polos no triviales (siempre que no existan cancelaciones polo-cero). Pueden existir polos y ceros con multiplicidad mayor que uno, y pueden ser reales o complejos. Además, dependiendo de la relación entre el grado del denominador N y del numerador M, la transformada posee:

a) Si $N > M$, $N-M$ ceros en $z=0$ y $N-M$ polos en $z=\infty$.

b) Si $N < M$, $M-N$ ceros en $z=\infty$ y $M-N$ polos en $z=0$.

Para evitar confusiones, es importante que convengamos lo siguiente: **la referencia a los polos y ceros la realizaremos siempre con respecto a la transformada Z expresada como cociente de polinomios en potencias positivas de z (expresión 9**).

Ejemplo N^o 4. Obtengamos la transformada Z de la señal

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

Utilizando la tabla de transformadas vemos que las transformadas de los términos son

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad &\leftarrow z \rightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{1}{4}\,z^{-1}} \quad ROC:\ |z| > \frac{1}{4} \\
-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \quad &\leftarrow z \rightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}} \quad ROC:\ |z| < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que la transformada de la señal es

$$\begin{aligned}
X(Z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\
&= \frac{2-\frac{3}{4}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-1}} \\
&= \frac{z\left(z-\frac{3}{8}\right)}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

A partir de la expresión polo-cero determinamos que la transformada posee ceros en $z=0$ y $z=3/8$, y polos en $z=1/4$ y $z=1/2$. Realizando la intersección de las regiones de convergencia de los términos

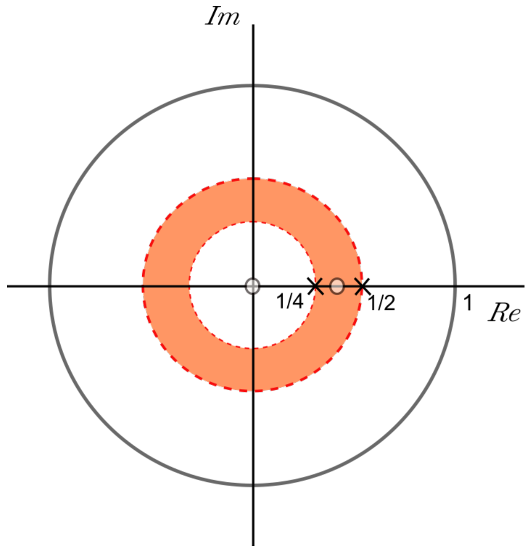

Figura 5: Representación de las ROCs del ejemplo 4

de la señal, determinamos que la ROC es la región anular $1/4 < |z| < 1/2$. El diagrama polo-cero y la ROC se representan en la figura 5.

El siguiente es el código de Matlab que obtiene los residuos de la expansión en fracciones parciales, los polos y realiza el diagrama polo-cero.

```
num=[2 -3/4];
den=[1 -3/4 1/8];
[r p k]=residuez(num, den);
zplane(num,den),
title('Diagrama␣polo-ceros'),
xlabel('Re(z)'),
ylabel('Im(z)');
```

Ejemplo N^o 5. Calculemos la transformada de la señal

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$$

Escribamos la señal utilizando la igualdad de Euler para remplazar al seno,

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{e^{j\pi/4n} - e^{-j\pi/4n}}{2j}\right)u[n] \\ &= -\frac{j}{2}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] + \frac{j}{2}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

Utilizando la tabla de transformadas vemos que las transformadas de los términos son

$$\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] \quad \leftarrow z \rightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\,z^{-1}} \quad ROC:\,|z| > \left|\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right|$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \quad \leftarrow z \rightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\,z^{-1}} \quad ROC:\,|z| > \left|\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right|$$

Por lo que la transformada de la señal es

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{-j/2}{1-\frac{1}{3}\,e^{\pi/4}\,z^{-1}} + \frac{j/2}{1-\frac{1}{3}\,e^{-\pi/4}\,z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{6}\sqrt{2}\,z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}\,e^{j\pi/4}\,z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\,e^{-j\pi/4}\,z^{-1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}\sqrt{2}\,z}{\left(z-\frac{1}{3}\,e^{j\pi/4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\,e^{-j\pi/4}\right)} \quad ROC:\,|z| > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vemos que la transformada posee polos en $z = \frac{1}{3}\,e^{\pm j\pi/4}$ (constituyen un par complejo y su conjugado) y un cero en $z = 0$. El diagrama de polos y ceros se muestra en la figura 6.

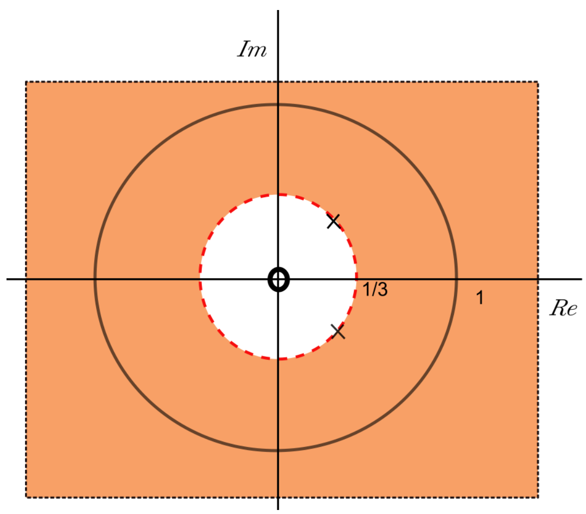

Figura 6: Representación de las ROCs del ejemplo 5

5. Propiedades de la ROC

La forma que posee la ROC de la transformada Z, esta directamente determinada por las características de la señal. En esta sección enunciaremos varias propiedades de la ROC, su demostraciones pueden obtenerse por la aplicación directa de la definición de la transformada a la señal en cuestión.

Propiedades de la ROC

1) La ROC de $X(Z)$ consiste en el plano z completo o en un semiplano del plano z con forma de región anular centrada en el origen del plano z, cuyos límites están dados por circunferencias centradas en dicho origen.
2) Para las transformadas racionales la ROC no contiene ningún polo. Además para este tipo de transformadas, la ROC está limitada por circunferencias que pasan por los polos o se extiende al infinito.
3) Si $x[n]$ es de duración finita, la ROC es el plano z completo, excepto posiblemente $z = 0$ y/o $z = \infty$. Observemos que si la señal $x[n]$ es de longigud finita y se extiende por ejemplo entre $n = N_1$ y N_2, la transformada $X(z)$ es

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}.$$

Al desaparecer los límites $\pm\infty$ de la sumatoria, desaparecen las restricciones de los valores de z para los cuales la sumatoria converge, salvo para los valores $z = 0$ y $z = \infty$ donde la transformada puede posee polos.
4) Si $x[n]$ es una señal de *lado derecho* o derecha, esto es $x[n] = 0$ para $n < n_1$, si existe $X(z)$, su ROC es de la forma

$$r_{max} < |z| \qquad \text{o} \qquad r_{max} < |z| < \infty$$

donde en caso de $X(z)$ racional, r_{max} es el mayor valor de los módulos de los polos de $X(z)$. Por tanto, la ROC es el exterior de un círculo en el plano z, cuyo radio es r_{max}.
5) Si $x(t)$ es una señal de *lado izquierdo* o izquierda, esto es $x[n] = 0$ para $n > n_2$, si existe $X(z)$, su ROC es de la forma

$$|z| < r_{min} \qquad \text{o} \qquad 0 < |z| < r_{min}$$

donde r_{min} es el menor valor de los módulos de los polos de $X(z)$. Por tanto, la ROC s el interior de un círculo en el plano z cuyo radio es r_{min}.
6) Si $[n]$ es una señal bilateral o lo que es lo mismo de duración infinita, si existe $X(z)$, su ROC es la región anular centrada en el origen definida por

$$r_1 < |z| < r_2$$

donde en caso de $X(z)$ racional r_1 y r_2 son los módulos de dos polos de $X(z)$. La ROC está limitada por dos circunferencias de radio r_1 y r_2 centradas en el origen.

Ejemplo N^o 6. Veamos como es la transformada del impulso, señal que cumple con ser una señal finita. La transformada de $\delta[n]$ es

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} \\
&= 1 \qquad ROC: \forall z
\end{aligned}
$$

La ROC es todo el plano z. En caso del impulso desplazado $x[n] = \delta[n-1]$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} \\
&= z^{-1} \qquad ROC: \forall z - \{0\}
\end{aligned}
$$

La ROC es todo el plano z menos $z = 0$, ya que allí existe un polo. En caso del impulso desplazado $x[n] = \delta[n+1]$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} \\
&= z \qquad ROC: \forall z - \{\infty\}
\end{aligned}
$$

La ROC es todo el plano z menos el polo en $z = \infty$.

Ejemplo N^o 7. Consideremos la señal finita

$$
x[n] = a^n \left(u[n] - u[n-N]\right),
$$

con a real. La señal $x[n]$ es un pulso rectangular multiplicado por una exponencial. Calculamos su transformada como

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \left(u[n] - u[n-N]\right) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1 - \left(az^{-1}\right)^N}{1 - az^{-1}} \\
&= \frac{z^N}{z^N} \frac{1 - \left(az^{-1}\right)^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}
\end{aligned}
$$

Ya que la señal es finita y incluye sólo potencias negativas de z, podemos concluir que su ROC es todo el plano z menos $z = 0$, donde existe un polo. Podemos confundirnos pensando que posee un polo en $z = a$, pero esto no es así ya que se produce una cancelación polo-cero. Veamos un poco más detenidamente esto último.

La transformada posee ceros en las raíces del polinomio $z^N - a^N$. Las raíces de este polinomio se encuentran en

$$z_k = a\, e^{jk2\pi/N} \quad k = 0, 1.., N-1$$

Se produce una cancelación polo-cero en $z = a$, por lo que finalmente la transformada posee $N-1$ ceros en $z_k = a\, e^{jk2\pi/N} \quad k = 1.., N-1$ y un polo múltiple en $z = 0$. Podemos escribir la transformada factorizando los polinomios numerador y denominador con sus raíces,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\cancel{(z-a)} \prod_{k=1}^{N-1} \left(z - a\, e^{jk2\pi/N}\right)}{z^{N-1} \cancel{(z-a)}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{N-1} \left(z - a\, e^{j2k\pi/N}\right)}{z^{N-1}} \end{aligned}$$

El siguiente código de Matlab realiza el cálculo de residuos y diagrama polo-ceros de la transformada del ejemplo; el diagrama polo-ceros se muestra en la figura 7. Recomendamos ejecutar el código y prestar atención al resultado de los vectores r,p y k.

```
N=16;
a=1/2;
b=zeros(1,N+1);
b(1)=1;
b(N+1)=(-a)^N;
a=[1 -a];
[r p k]=residuez(b,a);
zplane(b,a),
title('Diagrama␣polo-ceros'),
xlabel('Re(z)'),
ylabel('Im(z)');
```

6. La transformada Z inversa

Como en el caso de la transformada de Laplace, existe una expresión formal para invertir la transformada Z y obtener la señal $x[n]$ a partir de su transformada $X(z)$. Denominamos esta operación *transformada Z inversa* y la denotamos como $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$. La expresión formal de la transformada Z inversa es

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz.$$

Esta es una integral de linea en el plano complejo z, que se realiza en cualquier camino cerrado que incluya el origen del plano z y recorrido en sentido contrario del movimiento de las agujas del reloj.

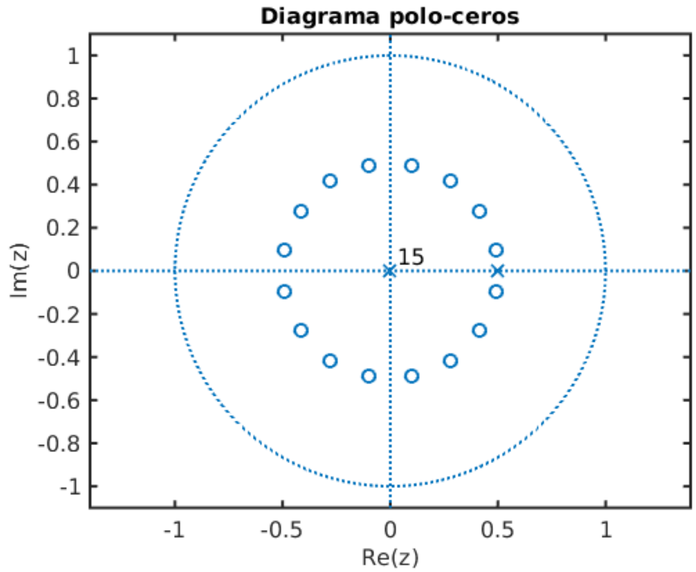

Figura 7: Representación de las ROCs del ejemplo 7

No utilizamos la expresión anterior para obtener una señal a partir de su transformada. Al igual que lo hicimos al discutir las otras transformadas, obtenemos la transformada Z inversa haciendo uso de la tabla de transformadas (1) y de la tabla de propiedades (2). Como en el caso de la transformada de Laplace, deberemos tener presente la especificación de la ROC de la transformada para determinar a qué señal corresponde. El uso de ambas tablas lo complementamos con el método de expansión en fracciones parciales, principalmente utilizando la función $residuez()$ de Matlab.

Todos los métodos para obtener la transformada Z inversa se basan en la linealidad de la operación $\mathcal{Z}\{X(z)\}$; la transformada

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) + \ ... \ + X_m(z)$$

se corresponde con la señal

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + \ ... \ + x_m[n].$$

Además de la utilización de las tablas, podemos obtener la transformada Z inversa interpretando la transformada Z como una serie de potencias (serie de Laurent) y obteniendo la transformada inversa por inspección. Discutiremos este método a continuación.

6.1. Obtención de la transformada Z inversa mediante expansión en serie de potencias

La expresión que define la transformada Z es una expansión en serie de potencias donde los valores de la señal $x[n]$ son los coeficientes de z^{-n},

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= ... + x[-2]z^2 + x[-1]z^1 + x[0]z^0 + x[-1]z^1 + x[2]z^{-2} + ...
\end{aligned}
$$

Se puede determinar la señal $x[n]$ a partir de $X(z)$ identificando el coeficiente de z^{-k} con el valor de la señal $x[k]$. Esto es posible hacerlo por simple inspección en algunos casos, o realizando primero la expansión en serie de $X(z)$, para luego identificar los coeficientes de las potencias de z. Si bien esto puede no proporcionar una forma matemática cerrada para la expresión de $x[n]$, el método es muy útil en caso de señales finitas, para las cuales $X(z)$ es un polinomio en z. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo N^o 8. Obtengamos la señal que corresponde a la transformada

$$X(z) = 5z^2 + 2 + 3z^{-1} + z^{-3} \quad ROC:\ 0 < |z| < \infty$$

Comparando $X(z)$ con la definición de la transformada (ec. 1), por simple inspección obtenemos

$$x[n] = \begin{cases} 5 & n = -2 \\ 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ 1 & n = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por lo que la señal es

$$x[n] = 5\delta[n+2] + 2 + 3\delta[n-1] + \delta[n-3]$$

Ejemplo N^o 9. Como ejemplo de uso de el método basado en serie de potencias, obtengamos la transformada inversa de la transformada

$$X(z) = \log\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) \quad ROC:\ |z| > \texttt{a}$$

Para ello consideramos la expansión en serie de potencias de $\log(1-r)$ que es

$$\log(1-r) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n \quad ROC:\ |r| < 1$$

Escribimos $X(z)$ como

$$X(z) = \log\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = -\log\left(1-az^{-1}\right) \quad ROC:\ |z|>|a| \quad o \quad \left|az^{-1}\right|<1$$

Utilizando la expansión de $\log(1-r)$, obtenemos

$$\begin{aligned} -\log\left(1-az^{-1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(az^{-1}\right)^{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a^{n}z^{-n} \qquad |z| > \mathtt{a} \end{aligned}$$

Por inspección de la última expresión, identificamos la señal $x[n]$ como

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{n}a^{n} & n\geq 1 \\ 0 & n\leq 0 \end{cases} \qquad \text{o} \qquad x[n] = \frac{1}{n}a^{n}u[n-1]$$

7. Propiedades de la transformada de Z

De manera similar a la transformada de Laplace, existen varias propiedades de la transformada Z que nos permiten evaluar las transformadas de muchas señales utilizando la tabla de transformadas básicas. En la aplicación de las propiedades debemos tener en cuenta la modificación de la región de convergencia de la transformada.

Las propiedades de la transformada de Z se muestran en la tabla 2. Observemos que para cada propiedad, se especifica la ROC final que se obtiene. A continuación discutiremos sólo algunas de las propiedades.

Propiedad de linealidad

La propiedad de linealidad de la transformada establece que

$$a\,x[n] + b\,y[n] \quad \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \quad a\,X(z) + b\,Y(z) \quad ROC:\ R \supset R_X \cap R_Y$$

La notación ROC $\supset R_X \cap R_Y$ significa que la ROC incluye al menos a la intersección de las regiones R_X y R_Y. Usualmente tendremos que la ROC es el conjunto intersección, pero debemos tener presente que puede haber casos en que la ROC es mayor que el conjunto intersección. Vimos ejemplos de esto cuando tratamos la cancelación polo-cero en transformada de Laplace.

Desplazamiento en el tiempo

$$x[n-n_0] \quad \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \quad z^{-n_0}X(z) \qquad ROC:\ R_X \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

La notación que especifica la ROC indica que la región de convergencia de la transformada de $x[n-n_0]$ es la misma que la de $x[n]$ pero debemos tener en cuenta la posible supresión o adición de $z=0$ y $z=\infty$.

Ejemplo N^o 10. Para ver un ejemplo de aplicación de esta propiedad consideremos el caso del cálculo de la transformada de $u[n-1]$. La transformada del escalón es

$$u[n] \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad ROC:\ 1 < |z| < \infty$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$u[n-1] \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1} \qquad ROC:\ 1 < |z|$$

El desplazamiento de la señal introduce el factor z^{-1} en la transformada que elimina el ∞ de la ROC.

Dos casos particulares de esta propiedad son

$$x[n-1] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad z^{-1}\,X(z) \qquad ROC:\ R_X \cap \{0 < |z|\}$$

$$x[n+1] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad z\,X(z) \qquad ROC:\ R_X \cap \{|z| < \infty\}$$

Debido a estas relaciones, z^{-1} se denomina *operador retardo unitario* y z *operador avance unitario*. Observemos que en la transformada de Laplace, s^{-1} y s corresponden a la integración en el dominio del tiempo y a la diferenciación, respectivamente.

Multiplicación por z_0^n

$$z_0^n\,x[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad ROC:\ |z_0|\,R_X$$

De acuerdo con esta propiedad si $X(z)$ posee un polo en z_k, la transformada de $z_0^n\,x[n]$ posee un polo en $z_k\,z_0$ y la ROC se expande o contrae por un factor $|z_0|$.

Un caso especial es cuando z_0 posee módulo unidad, por lo que

$$e^{j\omega_0 n}\,x[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X\left(e^{-j\omega_0 n} z\right) \qquad ROC:\ R_X$$

En ese caso los polos y ceros de $X(z)$ son rotados un ángulo ω_0 y la ROC no cambia.

Inversión temporal

$$x[-n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad ROC:\ \frac{1}{R_x}$$

De acuerdo con esta propiedad un polo en z_k se mueve por la inversión temporal a $1/z_k$.

Acumulación

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n] \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{1-z^{-1}}\,X(z) \qquad ROC:\ R \supset R_X \cap \{|z| > 1\}$$

Convolución

$$x_1[n] * x_2[n] \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad X_1(Z)X_2(Z) \qquad ROC:\ R \supset\ R_1 \cap R_2$$

Esta relación es muy importante en el análisis y caracterización de sistemas LTI, como discutiremos a continuación.

8. Análisis y caracterización de sistemas utilizando la transformada Z

La transformada Z es una herramienta muy importante para analizar y diseñar sistemas LTI discretos. Veamos en esta sección y las siguientes cómo se utiliza la transformada Z con dicho objetivo.

Sabemos que la respuesta de un sistema LTI puede calcularse como

$$y[n] = h[n] * x[n].$$

Si aplicamos la propiedad de convolución de la transformada Z (ver tabla 2) a la expresión anterior vemos, que en el dominio z, la relación entre las transformadas de la respuesta y de la entrada está descripta por la multiplicación,

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

donde $H(z)$ es la transformada Z de la función respuesta al impulso, $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$.

Función de Transferencia o Función del Sistema

Se denomina *Función de Transferencia* o *Función del Sistema* a la transformada Z de la Respuesta al Impulso de un sistema LTI,

$$H(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

La región de convergencia de $H(z)$ está determinada por las características del sistema LTI.

La ROC de la transformada de la respuesta del sistema $Y(z)$ depende de las características de las regiones de convergencia de $H(z)$ y $X(z)$. Tal como lo indica la tabla de propiedades (tabla 2), el producto de transformadas en la propiedad de convolución posee una ROC dada al menos por la intersección de las regiones de convergencia de $H(z)$ y $X(z)$ ($R_Y \supset R_H \cap R_X$). Como veremos en la siguiente sección las características del sistema determinan cómo es la región de convergencia de la función de transferencia $H(z)$.

Relación entre $H(z)$ y $H(e^{j\omega})$

A partir de la relación entre las transformadas Z y de Fourier (ec. 3), concluimos que si la ROC de $H(z)$ incluye la circunferencia unitaria donde $z = e^{j\omega}$, la Función de Transferencia evaluada en $e^{j\omega}$ es la Función de Respuesta en Frecuencia del sistema LTI discreto.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \tag{11}$$

De la misma manera que cuando trabajamos con las otras transformadas aplicadas a sistemas, podemos muchas veces calcular la respuesta de un sistema en el dominio transformado Z (dominio z), $Y(z) = H(z)X(z)$, para luego calcular la transformada inversa de $Y(z)$ y obtener $y[n]$. También se utiliza la relación 16 para realizar identificación de sistemas, conocida $X(z)$ y $Y(z)$, la función de transferencia es $H(z) = Y(z)/X(z)$.

Antes de ver los ejemplos, veamos cómo calcular en el dominio transformado z, la respuesta al escalón. Ya que la respuesta al escalón es

$$s[n] = h[n] * u[n],$$

Aplicando la propiedad de convolución, la relación anterior se convierte en

$$S(z) = H(z)U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}\, H(z),$$

La región de convergencia de la transformada Z de la respuesta al escalón, $S(z)$, la obtenemos a partir de la intersección $ROC \supset R_H \cap \{1 < |z|\}$

Ejemplo N^o 11. Consideremos el sistema LTI cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad ROC:\ |z| > \frac{1}{4}$$

y calculemos la señal de salida $y[n]$ para la entrada

$$x[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > \frac{1}{2}$$

Primero calculamos $Y(z)$ como

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \frac{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \quad ROC:\ |z| > \frac{1}{2} \\ &= \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \end{aligned}$$

Utilizando Matlab (función $residuez()$) para hallar los residuos de la expansión en fracciones parciales, encontramos que $A = 13{,}33$ y $B = -9{,}33$. Luego, mediante la tabla de transformadas, realizamos la transformada inversa de cada una de las fracciones simples (teniendo en cuenta la ROC de $Y(z)$) y encontramos la señal se salida

$$y[n] = 13{,}33 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 9{,}33 \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

8.1. Causalidad en sistemas LTI

Veamos cómo se relacionan las características de un sistema LTI causal con su función de transferencia.

Un sistema es causal si su respuesta al impulso cumple que $h[n] = 0$ para $n < 0$. Esto nos permite inferir la ROC de $H(z)$.

ROC de un sistema LTI causal

Si consideramos que $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$ y a partir de la propiedad de la ROC de una señal derecha, vemos que la región de convergencia de un sistema causal es la región exterior al círculo de radio r_{max}, es decir

$$\text{sistema LTI causal} \quad \rightarrow \quad ROC: \; |z| > r_{max} \tag{12}$$

Incluimos en este caso la posibilidad de que la ROC sea todo el plano z.

Si $H(z)$ es racional, podemos realizar la afirmación inversa y determinar si el sistema es causal simplemente observando si la ROC de $H(z)$ es el exterior de un círculo. Además en este caso, la ROC es el exterior de un círculo que contiene todos los polos de $H(z)$ y r_{max} es el módulo del polo con mayor módulo (más alejado del origen del plano z).

Es importante tener en cuenta otra característica de la función de transferencia racional $H(z)$ de un sistema causal: si $H(z)$ es racional y considerando $H(z)$ escrita como cociente de polinomios en potencias positivas de z, para que el sistema sea causal, el orden del polinomio denominador debe ser mayor o igual que el orden del polinomio numerador.

Podemos justificar esta propiedad, observando cómo dependen las características de $h[n]$ del orden de los polinomios numerador y denominador. Si el orden del numerador es mayor al orden del denominador, al expresar $H(z)$ (racional) en términos de potencias de z y fracciones simples, aparecen términos en potencias positivas de z. Al tomar la transformada inversa para obtener $h[n]$, cada término z^{n_0} con $n_0 > 0$, se corresponde con un término proporcional al $\delta[n + n_0]$ en $h[n]$, y por tanto el sistema no es causal.

8.2. Estabilidad en un sistema LTI

También podemos relacionar la estabilidad de un sistema con la ROC de $H(z)$. Recordemos que un sistema es BIBO estable si la función respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

Esta es condición suficiente para que exista la transformada de Fourier en tiempo discreto. Por lo que teniendo en cuenta la relación entre las transformadas Z y de Fourier (ec. 3 y 16), podemos asegurar la siguiente propiedad.

ROC de $H(z)$ de un sistema LTI estable

Un sistema LTI es estable si la ROC de la Función Transferencia del sistema incluye la circunferencia unitaria donde $z = e^{j\omega}$, lo que nos permite realizar la evaluación

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}.$$

En caso de que la ROC de $H(z)$ no incluya la circunferencia $z = e^{j\omega}$, no podemos evaluar la respuesta en frecuencia del sistema, podemos concluir que el sistema no es estable.

Teniendo en cuenta cómo son las regiones de convergencia de sistemas estables y causales podemos afirmar lo siguiente.

Causalidad y estabilidad de un sistema LTI

Si el sistema LTI es causal y estable, y además posee $H(z)$ racional, todos los polos de $H(z)$ deben encontrarse dentro del círculo unitario del plano z, $|p_k| < 1$, $\forall k$.

9. Sistemas LTI causales caracterizados por ecuaciones en diferencias

Consideremos el sistema LTI causal cuya relación entrada-salida está descripta por una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de la forma general

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad + \quad \text{c.i.=nulas} \tag{13}$$

Recordemos que la condición de ser un sistema LTI y causal implica que el sistema está en reposo inicial, o lo que es lo mismo, que las condiciones iniciales de la ecuación en diferencias son todas nulas. También recordemos que los coeficientes a_k se denominan *coeficientes del lazo de realimentación* y los b_k, *coeficientes del lazo directo*.

Aplicando a la ecuación 13, la operación transformada Z a ambos miembros, teniendo en cuenta la linealidad de la operación y la propiedad de desplazamiento temporal (tabla 2), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$
$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Y finalmente,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{14}$$

Vemos que $H(z)$ es una función racional expresada como cociente de dos polinomios en potencias negativas de z, la que podemos transformar en su formato en potencias positivas

$$H(z) = z^{(N-M)} \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}. \tag{15}$$

Su formato polo-cero es,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}} \\ &= z^{N-M} \frac{b_0}{a_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)...(z - p_N)} \\ &= \frac{b_0}{a_0} \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})...(1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})...(1 - p_N z^{-1})} \end{aligned}$$

con ceros z_k en las raíces del polinomio numerador y polos p_k en las raíces del polinomio denominador. **Ya que los coeficientes a_k y b_k son números reales, los polos y ceros son reales o si son complejos, aparecen en pares de un complejo y su conjugado**.

El factor $G = b_0/a_0$ se denomina ganancia. Como antes, salvo por el factor G, la forma algebraica de $H(z)$ está totalmente determinada por la posición de sus polos y ceros. La región de convergencia de $H(z)$ debe determinarse a partir de las características (causalidad y estabilidad) del sistema LTI.

En el caso general cuya relación entrada-salida está dada por las expresiones 14 o 15 para $N > M$, el sistema posee M ceros no triviales determinados por los coeficientes b_k, N polos no triviales determinado por los coeficientes a_k, un cero trivial de orden $N - M$ en $z = 0$ y un polo de orden

$N-M$ en $z=\infty$. En este caso el sistema se denomina **«promediador móvil autoregresivo»** y es un filtro IIR.

Veamos algunos ejemplos de sistemas LTI causales descriptos por ecuaciones en diferencias.

9.1. Promediador móvil causal - Filtro de respuesta al impulso finita

Si el sistema LTI posee todos los coeficientes del lazo de realimentación nulos, salvo $a_0 = 1$, la relación entrada salida del sistema obtenida de la expresión 13 es

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

y la función de transferencia obtenida de la expresión 14 se reduce a

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}$$

Vemos que el sistema posee M ceros no triviales determinados por los coeficientes b_k y M polos en $z=0$ (polos triviales). También se dice que posee un polo trivial de orden M en $z=0$. Por esta razón al sistema se le denomina **sistema "todos ceros"** o por la forma de su relación entrada-salida, **«promediador móvil causal»**.

Ya que $H(z)$ es un polinomio con un número finito de términos en potencias negativas de z, la ROC de $H(z)$ es todo el plano z menos el $z=0$.

Es un filtro FIR, ya que su respuesta al impulso posee un número finito de términos que son

$$h[n] = \{\underline{b_0}, b_1, b_2, \ldots, b_M\}$$

La simple inspección de la respuesta al impulso permite determinar los coeficientes del lazo directo.

Ejemplo N^o 12. Como ejemplo de un sistema todos ceros, veamos el promediador móvil causal cuya relación entrada-salida es

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

Su respuesta al impulso es

$$h[n] = \left\{\underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

Utilizando la expresión 14 determinamos la función de transferencias

$$H(z) = \frac{1}{3}\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) = \frac{1}{3}\frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

El sistema posee un polo de orden 2 en $z = 0$ y dos ceros en $z_{12} = -0{,}5000 \pm 0{,}8660j$ (o en forma polar $z = e^{j\pm 2/3\,\pi}$) cuyo módulo es $|z_{12}| = 1$. El diagrama polo-cero se muestra en la figura 8.

La respuesta en frecuencia del sistema es

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right)$$

y se muestra en la figura 9. Observe que los valores nulos de la $H(e^{j\omega})$ se encuentran en $\omega = \pm 2/3\,\pi \approx \pm 2{,}09$, coincidiendo con la fase de ambos ceros z_{12}.

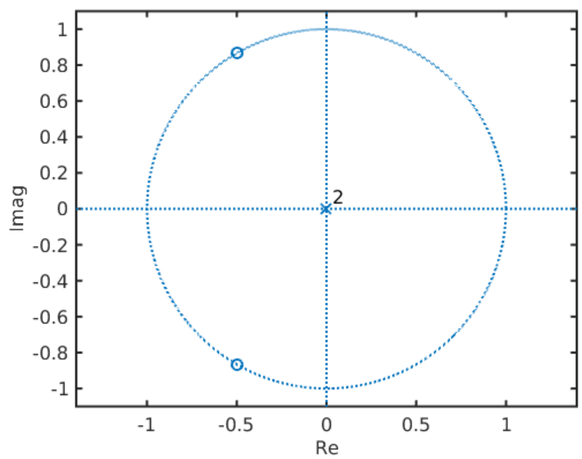

Figura 8: Representación del diagrama de polos y ceros del sistema del ejemplo 12

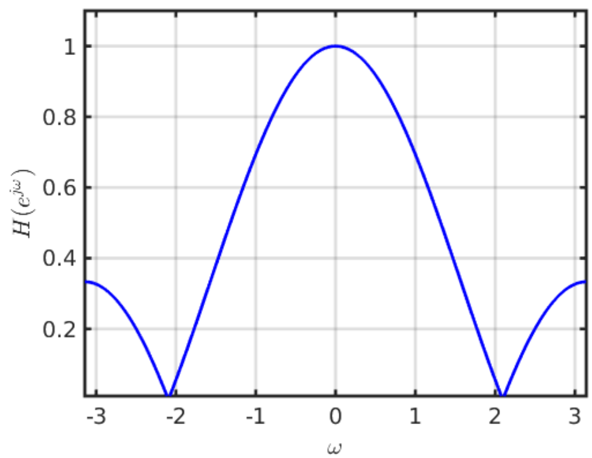

Figura 9: Respuesta en frecuencia del sistema del ejemplo 12

9.2. Filtro autoregresivo

Si el sistema LTI posee los coeficientes del lazo directo $b_k = 0$ para $k = 1..M$, la relación entrada salida del sistema obtenida mediante la expresión 13, para $a_0 = 1$, es

$$y[n] = b_0 x[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

y la función de transferencia (expresión 14) es

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = Z^N \frac{b_0}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$$

El sistema posee N ceros en $z = 0$, un polo de orden N en $z = \infty$ y N polos no triviales determinados por los coeficientes a_k. A este sistema se le denomina **sistema «todos polos»** o **«filtro autoregresivo»**.

Ya que el sistema es causal, la ROC de $H(z)$ es la región exterior al círculo de radio igual al módulo del polo de mayor módulo sin incluir $z = \infty$.

Ejemplo N^o 13. Como ejemplo de un filtro autoregresivo, veamos el sistema LTI cuya relación entrada-salida es

$$y[n] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} y[n-k] = x[n]$$

Utilizando la expresión 14 determinamos la función de transferencias

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}} = z^3 \frac{1}{z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}$$

El sistema posee un cero de orden 3 en $z = 0$ y tres polos dentro del círculo unitario cuyos valores son $p_1 = -0{,}7390$, $p_{23} = 0{,}1195 \pm 0{,}8138j$ ($|p_{23}| = 0{,}8226$). El diagrama polo-cero se muestra en la figura 10.

Ya que el sistema es causal, la región de convergencia la región exterior al círculo de radio $|p_{23} = 0{,}8226|$.

La respuesta en frecuencia del sistema es

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega} + \frac{1}{2}e^{-j3\omega}}$$

y se muestra en la figura 11.

10. Construcción de filtros discretos a partir de localización de polos y ceros

Si bien algunos conceptos sobre cómo diseñar un filtro a partir de la localización de los polos y ceros de su función de transferencia han aparecido anteriormente, discutamos en esta sección este diseño de forma más específica.

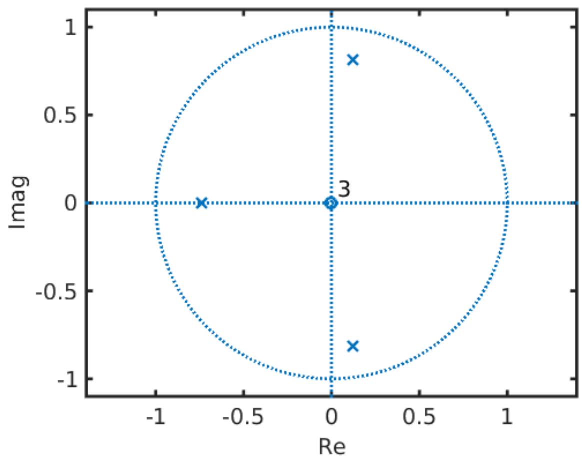

Figura 10: Representación del diagrama de polos y ceros del sistema del ejemplo 13

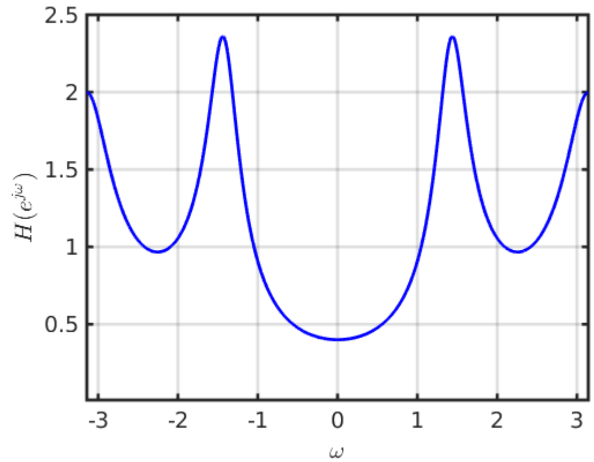

Figura 11: Respuesta en frecuencia del sistema del ejemplo 13

Cuando nos referimos a diseñar un filtro pensamos en darle a la respuesta en frecuencia (en este caso en tiempo discreto) una forma que se adapte a nuestros requerimientos, de tal manera que el filtro amplifique y/o atenúe componentes con frecuencia en los intervalos de frecuencia elegidos. En caso de tiempo discreto, optaremos por el intevalo de frecuencias centrado $(-\pi < \omega \leq \pi]$.

Ya que la relación entre la respuesta en frecuencia y la función de transferencia (ec. 16 que rescribimos aquí) es:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \tag{16}$$

Vemos que la posición de los polos y ceros de la $H(z)$ tiene una importante influencia sobre la forma de $H\left(e^{j\omega}\right)$.

Resumimos ciertas reglas básicas que debemos tener en cuenta para ubicar los polos y ceros dentro del plano z en los siguientes ítems.

a) Ubicamos polos cerca de las frecuencias que deseamos amplificar, por ejemplo si deseamos amplificar una componente de frecuencia ω_0, deberemos ubicar un polo cerca del círculo unitario, en una posición especificada por $p = re^{j\omega_0}$.
b) Ubicamos ceros cerca de las frecuencias a atenuar, por ejemplo si deseamos eliminar una componente de frecuencia ω_0, deberemos ubicar un cero en el círculo unitario, en una posición especificada por $z = e^{j\omega_0}$.
c) Para que el sistema sea estable y causal, el módulo de todos los polos debe ser menor que 1 y la ROC de $H(z)$ debe ser el exterior del círculo de radio igual al valor del módulo del polo con mayor módulo.
d) Por cada polo p_k debe existir su conjugado p_k^*, para que los coeficientes de la función de transferencia y de la relación entrada-salida del sistema, sean reales.
e) Considerando $H(z)$ escrita como cociente de polinomios en potencias positivas de z, para que el sistema sea causal, el grado del polinomio denominador debe ser mayor o igual al grado del polinomio numerador. Esta condición se logra muchas veces introduciendo polos triviales en $H(z)$.

Ejemplo N^o 14. Veamos en este ejemplo el sistema denominado «resonador digital». Este sistema amplifica la banda centrada en ω_0 (y en $-\omega_0$ en nuestra descripción). Supongamos que deseamos amplificar componentes en frecuencias dentro de un intervalo centrado en ω_0, ubicaríamos dos polos uno ubicado en $p = re^{j\omega_0}$ y otro en su conjugado $p^* = re^{-j\omega_0}$ y para que el sistema sea causal elejimos $r < 1$, por lo que la función de transferencia es

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z^2}{(z-p)\,(z-p^*)} \\ &= \frac{1}{(1-pz^{-1})\,(1-p^*z^{-1})} \\ &= \frac{1}{(1-2rcos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2})} \end{aligned}$$

Hemos incluido un cero de orden 2 en $z = 0$ para una mejor implementación en los algoritmos, pero no es estrictamente necesario. La relación entrada-salida del filtro es

$$y[n] - 2r\,cos(\omega_0)\,y[n-1] + r^2\;y[n-2] = x[n]$$

En la figuras 12 y 13 se muestra el diagrama de polo-cero y la respuesta en frecuencia del sistema para un resonador que amplifica componentes en un intervalo de frecuencias centrado en $\omega_0 = \pi/3$.

Ejemplo N^o 15. Veamos en este ejemplo el sistema denominado «filtro ranura». Este filtro elimina las componentes de frecuencias elegidas, para esto el sistema posee un cero en la circunferencia unitaria de su función de transferencia, a cada una de las frecuencias que se quiere eliminar. Por ejemplo si se desean eliminar las componentes de frecuencia $\pm\,\omega_0$, a función de transferencia tiene la siguiente forma.

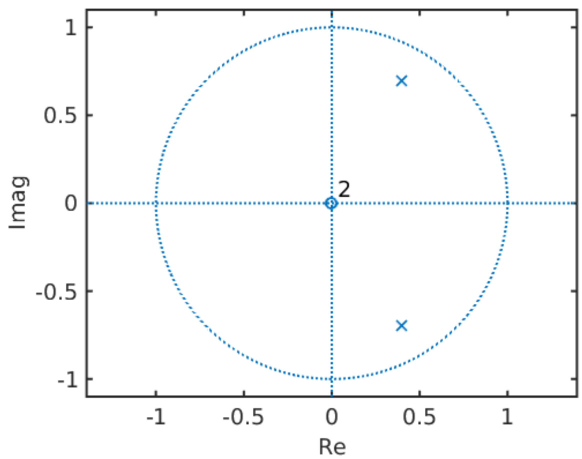

Figura 12: Representación del diagrama de polos y ceros del sistema del ejemplo 14

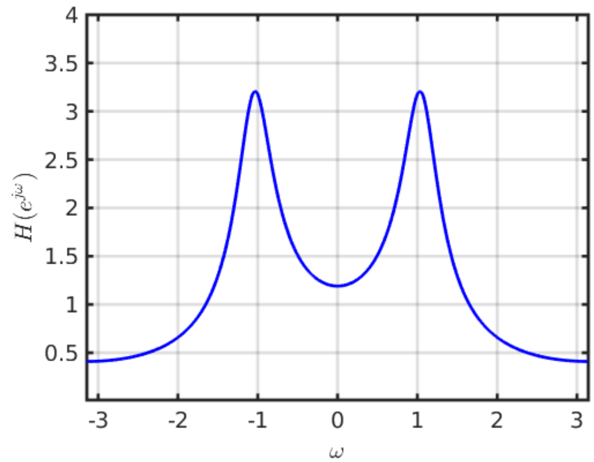

Figura 13: Respuesta en frecuencia del sistema del ejemplo 14

$$
\begin{aligned}
H(z) &= G\, z^{-2} \left(z - e^{j\omega_0}\right) \left(z - e^{-j\omega_0}\right) \\
&= G\, z^{-2} \left(z^2 - \left(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}\right) z + 1\right) \\
&= G \left(1 - 2\, cos(\omega_0)\, z^{-1} + z^{-2}\right)
\end{aligned}
$$

Además de los ceros en la circunferencia unitaria, introducimos el factor z^{-2} a fin de que el filtro sea un sistema causal.

La relación entrada-salida del filtro es

$$y[n] = G(x[n] - 2cos(\omega_0)x[n-1] + x[n-2])$$

El factor de ganancia G puede determinarse a partir del requerimiento de que $H(z)$ posea un valor elegido en algún valor de z. De la última relación podemos obtener la respuesta al impulso del filtro,

$$h[n] = G(\delta[n] - 2cos(\omega_0)\delta[n-1] + \delta[n-2])$$

Podemos ver que su respuesta al impulso corresponde a un sistema causal y es finita, por lo que es un filtro FIR.

En la figura 15 se muestra la respuesta en frecuencia equivalente de la conexión serie de dos filtros ranura, uno elimina la frecuencias $\omega_{12} = \pm\pi/3$ y el otro, las frecuencias $\omega_{23} = \pm 2\pi/3$. La ganancia G se ha fijado en ambos como la unidad. En la figura 14 se muestra el diagrama polo-cero de la función de transferencia equivalente de la conexión serie $H_{equiv}\left(e^{j\omega}\right)$.

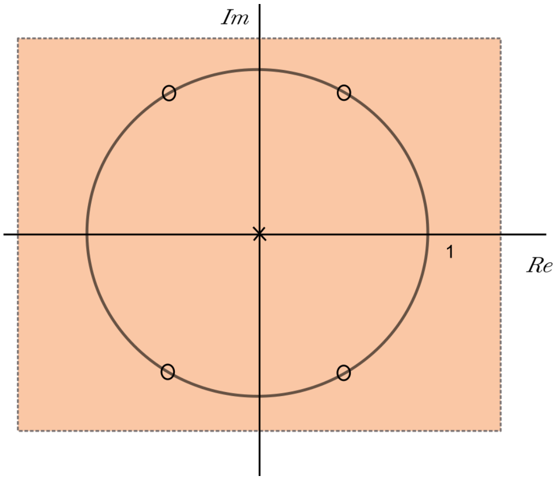

Figura 14: Representación del diagrama de polos y ceros del sistema del ejemplo 15

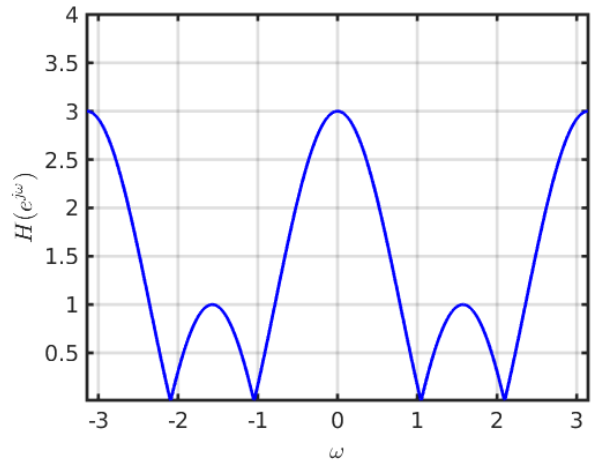

Figura 15: Respuesta en frecuencia del sistema del ejemplo 15

Ejemplo N^o 16. En este ejemplo vamos a tratar el filtro «promediador móvil causal» descripto por la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

A partir de esta ecuación en diferencias, podemos hallar la respuesta al impulso,

$$h[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$

Vemos que este filtro posee respuesta al impulso finita, es un FIR, con M valores no nulos idénticos,

$$h[n] = \left\{ \underline{\frac{1}{M}}, \frac{1}{M} \dots, \frac{1}{M} \right\}.$$

La función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} = \frac{1}{M}\,\frac{1-\left(z^{-1}\right)^M}{1-z^{-1}}$$

Hemos expresado $H(z)$ de forma compacta utilizando la expresión de una serie geométrica finita. También podemos expresarla como

$$H(z) = \frac{1}{M}\,\frac{1-\left(z^{-1}\right)^M}{1-z^{-1}} = \frac{1}{M}\,\frac{z^{-M}}{z^{-1}}\frac{z^M-1}{z-1}$$

Por lo que finalmente, la expresión de la función de transferencia en potencias positivas de z es

$$H(z) = \frac{1}{M}\;z^{-(M-1)}\;\frac{z^M-1}{z-1}$$

Vemos que el sistema posee un polo de orden $M-1$ en $z=0$ y un polo en $z=1$. Posee ceros en los valores de $z = re^{j\theta}$ que son raíces del polinomio z^M-1,

$$z^M = 1, \quad \Rightarrow \quad r^M e^{jM\theta} = 1, \quad r = 1,\, e^{jM\theta} = 1$$

Por lo que el argumento de la exponencial compleja $M\theta$ debe cumplir

$$M\theta = m\,2\pi, \rightarrow\; \theta = \frac{m}{M}\,2\pi,\; m = 0,\,1,\,...\,M-1$$

Por tanto, existen M ceros ubicados en $z = e^{jm/M\,2\pi}$ para los valores $m = 0,\,1,\,...\,M-1$. Vemos que existe un polo y un cero en $z=1$ que se cancelan.

El diagrama polo-cero para un promediador móvil con $M=6$ se muestra en la figura 16, donde vemos que aparecen los $M-1=5$ ceros en la circunferencia unitaria y la cancelación polo-zero en $z=1$.

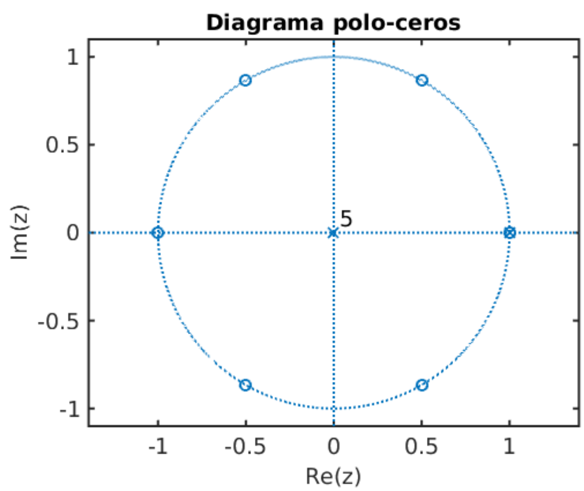

Figura 16: Representación del diagrama de polos y ceros del sistema del ejemplo 16

Tabla 1: Transformada Z de señales básicas

Señal	**Transformada**	**ROC**
$\delta[n]$	1	Toda z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>a$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<a$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>a$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<a$
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>a$
$cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\mathrm{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\mathrm{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$r^n\mathrm{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{r\mathrm{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$a^n\left(u[n]-u[n-N]\right)$	$\frac{1-a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>0$

Tabla 2: Propiedades de la Transformada Z

Señal	**Transformada**	**ROC**
$a\,x[n] + by[n]$	$a\,X(z) + b\,Y(z)$	$R \supset R_X \cap R_Y$
$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R \supset R_X$ excepto supresión o adición de $z=0$ y $z=\infty$
$z_0^n\,x[n]$	$X\left(z/z_0\right)$	$\lvert z_0\rvert\,R_X$
$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_X
$x[-n]$	$X\left(z^{-1}\right)$	R_X invertida = conjunto de valores de z si z^{-1} está en R_X
$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supset R_X \cap R_Y$
$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - z^{-1}\right)X(z)$	$R \supset R_X \cap \{\lvert z\rvert > 0\}$
$nx[n]$	$-z\,\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_X
$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R \supset R_X \cap \{\lvert z\rvert > 0\}$

Teorema del valor inicial:
Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} X(z) = x[0]$