Tema 6
Aplicación de la transformada de Laplace en el análisis de señales y sistemas

Diego Leonardo Valladares
Dpto. de Física - Univ. Nac. de San Luis

18 de octubre de 2024

Índice

1. La transformada de Laplace

Hemos visto que la respuesta de un sistema LTI continuo a una señal exponencial compleja de la forma $x(t) = e^{j\omega t}$ es también una exponencial compleja de la misma frecuencia

$$y(t) = \mathcal{T}\{e^{j\omega t}\} = H\left(j\omega\right) e^{j\omega t}$$

donde

$$H\left(j\omega\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

$H\left(j\omega\right)$ es la Respuesta en Frecuencia del sistema, o lo que es lo mismo, la transformada de Fourier de $h(t)$.

También vimos que si la señal exponencial compleja es de la forma e^{st}, con s siendo un número complejo con parte real no nula ($s = \sigma + j\omega$), la respuesta del sistema es

$$y(t) = \mathcal{T}\{e^{st}\} = H(s)e^{st}$$

donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau.$$

$H(s)$ se denomina *Función de Transferencia del sistema.* $H(s)$ es la *transformada de Laplace* de la Respuesta al Impulso $h(t)$ del sistema.

Transformada de Laplace

Se define como la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ a

$$X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \tag{1}$$

Denotaremos la operación especificada por 1 mediante el operador $\mathcal{L}$, así $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, y el el par transformado de Laplace mediante la notación

$$x(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad X(s)$$

La transformada de Laplace es una función en que tanto la variable independiente como la dependiente son números complejos, $s = \sigma + j\omega$ y $X(s) = |X(s)|e^{j\angle(X(s))}$. En la figura1 se representa $|X(s)|$ vs. s, vemos que $|X(s)|$ es una función real de variable compleja que podemos visualizar como una superficie en un espacio de tres dimensiones. Lo mismo se puede decir de la función $\angle X(s)$.

Sobre las transformadas

La transformada de Laplace se aplica a señales y sistemas continuos. Su versión para señales y sistemas discretos es la transformada Z. Tanto la transformada de Laplace, como así también las otras transformadas que discutimos en el curso, son herramientas matemáticas que nos permiten analizar las señales y los sistemas con un nivel de profundidad y simplicidad que es difícil de alcanzar mediante el análisis en el dominio del tiempo. Si bien las operaciones matemáticas no aumentan su complejidad, en especial en lo que se refiere a las transformadas de Laplace y Z, el nivel de abstracción es mayor que en el análisis de Fourier.

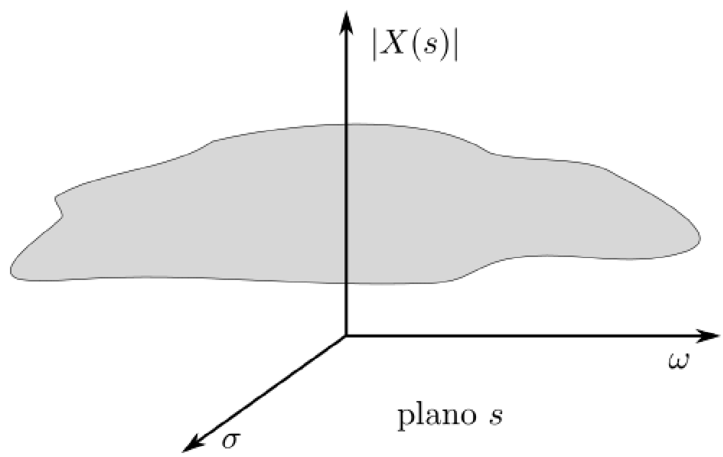

Figura 1

La existencia de la transformada de Laplace $X(s)$ depende de que pueda ser evaluada la integral impropia que la define (ec. 1), en general la evaluación de la integral podrá ser realizada dependiendo del valor de s. La condición que debe cumplir $x(t)$ para que exista $X(s)$ es discutida en la siguiente sección.

1.1. Relación entre la transformadas de Laplace y Fourier

Relación entre $X(s)$ y $X(j\omega)$

Cuando s posee parte real nula, $s = j\omega$, $X(s)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(s)\Big|_{s=j\omega} \quad (2)$$

es decir que podemos obtener la transformada de Fourier de $x(t)$, evaluando la transformada de Laplace en para valores de s en el eje $s = j\omega$. Podemos visualizar esta evaluación como la curva (funcion de ω) que se obtiene como intersección del plano que contiene al eje $j\omega$ con las superficies que representan $|X(s)|$ y $\angle X(s)$.

Para obtener la condición de convergencia de la integral impropia que define la transformada $x(s)$ (ec. 1), observemos que si s posee parte real y parte imaginaria no nulas,

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x(t)e^{-\sigma t}\Big)\, e^{-j\omega t} dt, \end{aligned}$$

de donde observamos que

$$X(s) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}.$$

La transformada de Laplace de una señal es la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$, por lo que la existencia de $X(s)$ depende no solo de las características de $x(t)$, sino que también de σ (parte real de s).

Condición de convergencia de $X(s)$

La transformada de Laplace $X(s)$ de una señal $x(t)$ converge, y por tanto existe, para aquellos valores de s para los cuales existe la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$, siendo $\sigma = Re\{s\}$. Recordando las condiciones de existencia de la transformada de Fourier, lo anterior ocurre si además de cumplir las dos primeras condiciones de Dirichlet sobre máximos, mínimos y discontinuidades, se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big|x(t)\, e^{-\sigma t}\Big| dt \, < \, \infty \tag{3}$$

Zona de convergencia-ROC

La zona de convergencia de la transformada de Laplace se abrevia usualmente como ROC, sigla de la frase en inglés *Región Of Convergence. La ROC consiste de todos aquellos valores de s para los cuales la transformada de Laplace existe.* La representación de la ROC se realiza indicando en el plano complejo o *plano s* con una zona sombreada, los valores de s para los cuales la transformada converge.

Ejemplo N^o 1. Consideremos la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$, donde a es real y positivo. Para evaluar $X(s)$ aplicamos su definición

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-st}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\
&= -\left.\frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{s+a} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \\
&= \frac{1}{s+a}
\end{aligned}
$$

La condición de convergencia de $X(s)$ se obtiene de la condición de existencia del límite

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}}{(s+a)} = 0
$$

Donde expresamos s como $s = \sigma + j\omega$. Este límite existe y es nulo, si se cumple que el factor $(\sigma + a) > 0$, de donde surge la condición de convergencia $\sigma > -a$. Esta es la condición que define la ROC como el semiplano $Re\,\{s\} > -a$.

Por ejemplo si $a = 0$, $x(t) = u(t)$, la transformada de Laplace es $L\{u(t)\} = 1/s$ y existe sólo para $\sigma > 0$.

Si bien hemos discutido el caso en que a es un número real positivo, a podría ser un número complejo con parte imaginaria no nula, en este caso la condición de convergencia es $Re\{s\} > Re\{-a\}$.

En este ejemplo vemos que la transformada de Laplace converge solo para ciertos valores de s, los que cumplen con la condición $Re\{s\} > -a$. Además vemos que si $a > 0$ podemos evaluar $X(s)$ en $\sigma = 0$ (todos los valores de s ubicados en el eje $s = j\omega$) por lo que obtenemos,

$$
\mathcal{F}\{x(t)\} = X(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}.
$$

Si la ROC no incluyera el eje $s = j\omega$, no podríamos evaluar la transformada $X(s)$ en $s = j\omega$ o lo que es lo mismo, la señal no tendría transformada de Fourier.

Ejemplo N^o 2. Consideremos ahora la señal $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, con a un número real positivo. La transformada de Laplace es

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)\, e^{-st}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} -e^{-(s+a)t}dt \\
&= \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{s+a} - \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \\
&= \frac{1}{s+a} \quad \text{si} \quad Re\{s\} < -a
\end{aligned}
$$

La condición de convergencia en este caso ($Re\{s\} < -a$) surge a partir de condición de existencia del límite

$$
\lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}}{(s+a)} = 0
$$

Como en el ejemplo anterior, si bien hemos discutido el caso en que a es un número real positivo, a podría ser un número complejo con parte imaginaria no nula, en este caso la condición de convergencia es $Re\{s\} < Re\{-a\}$.

En los ejemplos hemos encontrado las siguientes transformadas de Laplace (considerando a como real y positivo),

$$
e^{-at}u(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+a} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -a \tag{4}
$$

$$
-e^{-at}u(-t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+a} \qquad ROC:\ Re\{s\} < -a \tag{5}
$$

Vemos que ambas transformadas poseen la misma expresión algebraica de la transformada de Laplace, a pesar de ser señales distintas, sólo se distinguen por su zona de convergencia. Mientras que para la señal causal $e^{-at}u(t)$, la transformada converge si $Re\{s\} > -a$; para $-e^{-at}u(-t)$, lo hace si $Re\{s\} < -a$. De lo cual podemos concluir que ***es necesario indicar la zona de convergencia cada vez que informamos la transformada de Laplace de una señal***, ya que de otra manera no se encuentra totalmente especificada. En la figura 2 se representan las ROC's de las transformadas de los ejemplos 1 y 2, observemos que en ninguno de los dos casos la ROC incluye el eje $s = -a$, lo que hemos representado con líneas punteadas.

Ejemplo N^o 3. Obtengamos la transformada de Laplace de la señal $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$. Observando los resultados de los ejemplos 1 (ec. 4) y 2 (ec. 5) y teniendo en cuenta que la operación que define la transformada de Laplace es una operación lineal (ec. 1), obtenemos en un primer paso las transformadas de cada uno de los términos,

$$
x_1(t) = 3e^{-2t}u(t) \qquad \overset{L}{\longleftrightarrow} \qquad \frac{3}{s+2} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -2
$$

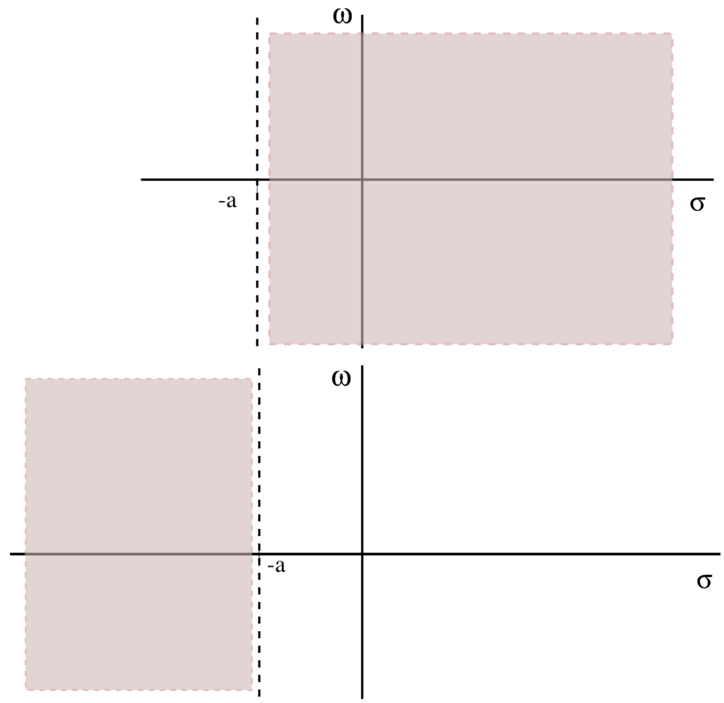

Figura 2: Representación de las ROCs de los ejemplos 1 y 2.

$$x_2(t) = 2e^{-t}u(t) \qquad \overset{L}{\longleftrightarrow} \qquad \frac{1}{s+1} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -1$$

Por lo que la transformada de la señal $x(t)$ es

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -1$$

Obtenemos la ROC como la intersección de cada una de las ROCs de las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ (ver figura 3), ya que en esa región la transformada de $x(t)$ converge para cualquier valor de s. En la última expresión de $X(s)$ hemos escrito la transformada de dos formas, expresándola como la suma de fracciones simples y luego, como el cociente de dos polinomios en s. Esta última forma se denomina expresión **polos-ceros** y la explicaremos a continuación.

2. Polos y ceros de $X(s)$

Cuando las señales son combinaciones lineales de exponenciales reales o complejas, o cuando obtenemos la Función de Transferencia de sistemas LTI especificados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, la transformada de Laplace $X(s)$ es una función racional de s, de la forma

$$X(s) = \frac{b_o s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n} = \frac{b_o}{a_o}\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)} \tag{6}$$

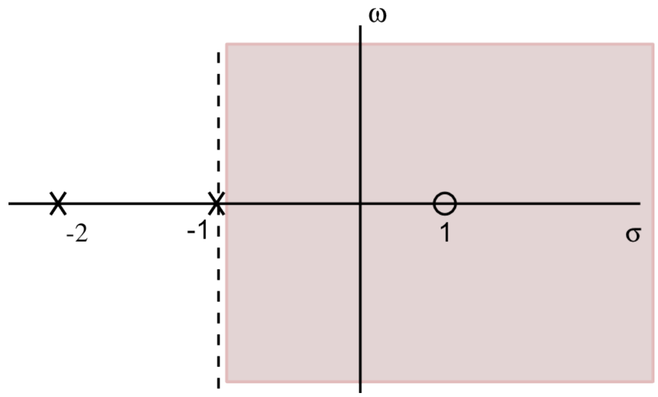

Figura 3: Representación de la ROC de la transformada del ejemplo 3

Los coeficientes b_k y a_k son constantes reales, m y n son enteros positivos. Dependiendo de los valores del orden del numerador m y del orden del denominador n, $X(s)$ es llamada una función racional propia si $n > m$ e impropia si $n \leq m$.

Las raíces del numerador, los valores z_k, se denominan *ceros* de $X(s)$. De manera análoga, las raíces p_k del denominador se denominan *polos* de $X(s)$. Los polos de $X(s)$ se encuentran fuera de la ROC, ya que por definición la transformada no existe para estos valores de s. Los ceros de la transformada pueden encontrarse fuera o dentro de la ROC. La forma de la $H(s)$

$$X(s) = \frac{b_o}{a_o} \frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)} \tag{7}$$

se denomina «forma polo-ceros».

Usualmente los ceros y polos se representan conjuntamente con la ROC de la transformada, utilizando el signo $\times$ para identificar los valores de s donde se encuentran los polos y $\circ$ para identificar los valores donde se encuentran los ceros. Por ejemplo, la transformada del ejemplo 3

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -1$$

tiene un cero en $s = 1$ y polos en $s = -1$ y $s = -2$. El diagrama de polos y ceros se encuentra representado en la figura 3.

Es importante notar que **salvo por el factor de escala b_o/a_o , $X(s)$ está completamente especificada por el diagrama de polos y ceros** (ver ec. 6). Esto significa que salvo un factor de escala, podemos obtener la forma algebraica de la transformada de Laplace $X(s)$ de una señal $x(t)$ por simple inspección de su diagrama de polos y ceros. Si además incluimos información sobre la ROC, podremos antitransformar y encontrar una señal $x'(t)$ que salvo por el mismo factor de escala, es idéntica a la señal $x(t)$.

Si el numerador de la transformada racional es de mayor orden que el denominador, la transformada crece sin límite para s tendiendo a infinito. En este caso, si el orden del numerador excede el orden del denominador por un factor k, diremos que $X(s)$ *tiene un polo de orden k en el infinito.*

Por el contrario, si el numerador es de menor orden que el denominador, la transformada tiende a cero para s tendiendo a infinito. En este caso, si el orden del denominador excede al del numerador por un factor k, $X(s)$ tiene k ceros en el infinito.

Ejemplo N^o 4. Puede mostrarse aplicando la definición que la señal

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

tiene transformada

$$\begin{aligned} X(s) &= 1 - \frac{4}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s-2)} \\ &= \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \qquad Re\{s\} > 2, \end{aligned}$$

donde la ROC está descripta por la región del plano s definida por $Re\{s\} > 2$. La ROC conjuntamente con el diagrama de polos y ceros se muestra en la figura 4. Podemos observar que existen dos polos, uno en $s = -1$ y otro en $s = 2$, además existen dos ceros ubicados en el mismo valor de s, $s = 1$. La $X(s)$ no tiene ni polos ni ceros en el infinito ya que su denominador tiene el mismo orden que el numerador.

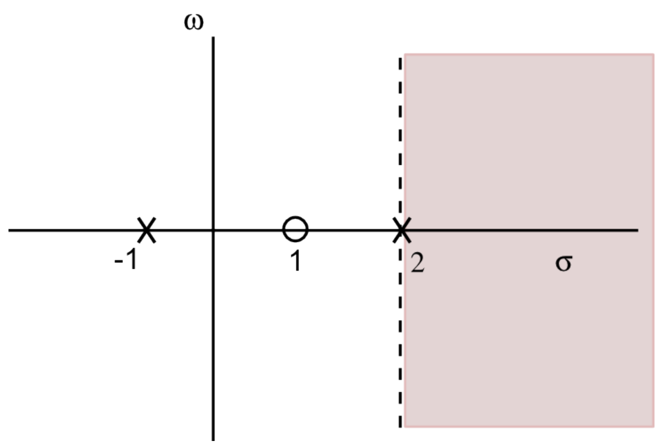

Figura 4

En el diagrama de polos y ceros del último ejemplo (figura 4), vemos que la ROC no incluye el eje $Re\{s\} = 0$, que es el eje donde $s = j\omega$. Ya que la transformada de Fourier de una señal puede obtenerse a partir de la evaluación de $X(s)$ en el eje $s = j\omega$, podemos concluir que esta señal no tiene transformada de Fourier (ver Ec. 2). Esto se debe a que término $1/3\, e^{2t}u(t)$ no posee transformada de Fourier.

Podemos afirmar que *si la ROC de una transformada de Laplace no contiene al eje $Re\{s\} = 0$, la señal correspondiente no posee transformada de Fourier.*

Ejemplo N^o 5. Consideremos la transformada racional

$$H(s) = \frac{2s^2+5s+12}{s^3+4s^2+14s+20} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -1$$

Su formato polo-cero es

$$X(s) = 2\frac{(s-(-1{,}25+2{,}11j))\,(s-(-1{,}25-2{,}11j))}{(s-(-2))\,(s-(-1+j3))\,(s-(-1-j3))}$$

Observemos que en este caso tanto los ceros como dos de los polos son complejos con parte imaginaria no nula. Su diagrama de polos y ceros se muestra en la figura **??**. La forma de $X(s)$ expresada como suma de fracciones simples es

$$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1-3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1+3j)}\right).$$

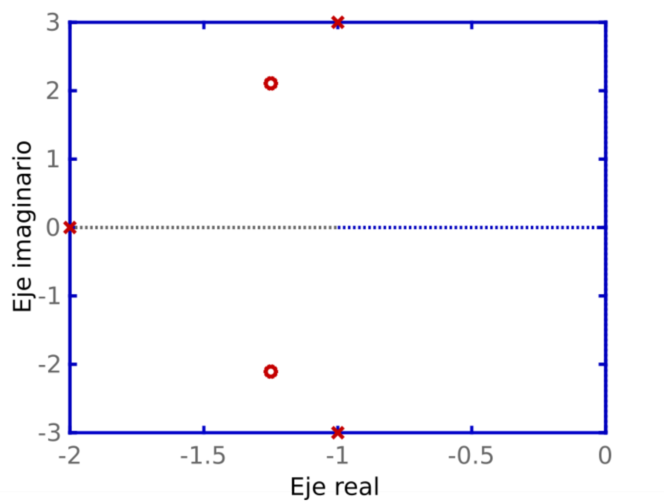

Figura 5

3. Propiedades de la ROC

La forma que posee la ROC de la transformada de Laplace, esta directamente determinada por las características de la señal. En esta sección enunciaremos varias propiedades de la ROC, su demostraciones pueden obtenerse por la aplicación directa de la definición de la transformada a la señal en cuestión.

Propiedades de la ROC

1) La ROC de $X(s)$ consiste en el plano s completo o en semiplanos del plano s cuyos límites están dados por líneas verticales paralelas al eje $Re\{s\} = 0$ o eje $s = j\omega$ del plano s.

2) Para las transformadas racionales la ROC no contiene ningún polo. Además para este tipo de transformadas, la ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito.

3) Si $x(t)$ es de duración finita y es absolutamente integrable, la ROC es el plano s completo.

4) Si $x(t)$ es una señal de *lado derecho* o derecha, esto es $x(t) = 0$ para $t < t_1$, si existe $X(s)$, su ROC es de la forma $Re\{s\} > \sigma_{max}$, donde σ_{max} es la parte real máxima de cualquiera de los polos de $X(s)$. Por tanto, la ROC es el semiplano infinito a la derecha de la línea vertical $Re\{s\} = \sigma_{max}$, de esta manera todos los polos quedan a la izquierda de la línea.

5) Si $x(t)$ es una señal de *lado izquierdo* o izquierda, esto es $x(t) = 0$ para $t > t_2$, si existe $X(s)$, su ROC es de la forma $Re\{s\} < \sigma_{min}$, donde σ_{min} es la parte real mínima de cualquiera de los polos de $X(s)$. Por tanto, la ROC es el semiplano infinito a la izquierda de la línea vertical $Re\{s\} = \sigma_{min}$, de esta manera todos los polos quedan a la derecha de la línea.

6) Si $x(t)$ es una señal bilateral o lo que es lo mismo de duración infinita, si existe $X(s)$, su ROC es un semiplano del plano s definido por $\sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2$, donde $\sigma_{1,2}$ son las partes reales de dos polos de $X(s)$. De esta manera, la ROC es una banda paralela al eje $s = j\omega$ limitada por las líneas verticales σ_1 y σ_2.

Ejemplo N^o 6. Obtengamos la transformada de la señal $x(t) = e^{-b|t|}$. Esta señal se puede escribir como:

$$x(t) = e^{bt}u(-t) + e^{-bt}u(t)$$

Utilizando los pares transformada que calculamos en los ejemplos 1 (ec. 4 y 2 (ec. 5), encontramos que las transformadas de cada término de $x(t)$ son

$$\begin{array}{cccc} e^{bt}u(-t) & \overset{L}{\longleftrightarrow} & \dfrac{-1}{s-b} & ROC:\ Re\{s\} < b \\ e^{-bt}u(t) & \overset{L}{\longleftrightarrow} & \dfrac{1}{s+b} & ROC:\ Re\{s\} > -b \end{array}$$

Si bien las transformadas individuales de cada término poseen una región de convergencia, la transformada de $x(t)$ no posee una región común si $b < 0$, por tanto en este caso la señal no posee transformada $X(s)$. Si $b > 0$, existe una región común a las ROC de cada término por tanto la transformada de $x(t)$ para $b > 0$ es

$$X(s) = \frac{-1}{s-b} + \frac{1}{s+b} = \frac{-2b}{(s-b)(s+b)} \qquad ROC: -b < Re\{s\} < b.$$

La ROC y el diagrama de polos y ceros de $X(s)$ se representa en la figura 6.

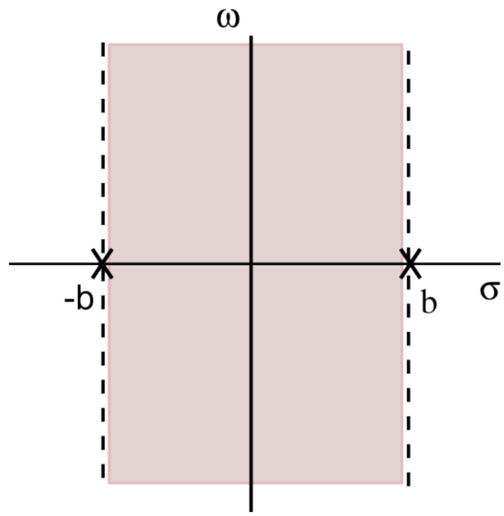

Figura 6

Observemos que si una señal $x(t)$ tiene transformada $X(s)$, necesariamente se encuentra dentro de una de las cuatro categorías enunciadas en las propiedades 3 a 6, por tanto **la ROC es el plano s completo (señales de longitud finita), o un semiplano izquierdo (señales izquierdas), o un semiplano derecho (señales derechas), o una sola franja (señales bilaterales)**.

4. La transformada inversa de Laplace

La operación de inversión de la transformada de Laplace para encontrar la señal $x(t)$ a partir de su transformada $X(s)$, es denominada *transformada inversa de Laplace* y denotada como $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$. La evaluación de la transformada inversa de Laplace involucra el cálculo de la integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Esta es una integral de línea en el plano complejo s, realizada sobre la recta $Re\{s\} = c$, donde la constante real c puede tener cualquier valor dentro de la ROC de $X(s)$.

No utilizaremos la expresión anterior para obtener una señal a partir de su transformada. Ya que trataremos solamente transformadas racionales, utilizaremos el método de expansión en fracciones parciales que permite simplificar la expresión de una transformada para luego, por simple inspección y la ayuda de una tabla de transformadas, obtener la transformada inversa. Es decir, expresaremos la transformada como

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \ ... \ + X_n(s)$$

donde los términos $X_i(s)$ son funciones de las cuales conocemos sus transformadas inversas $x_i(t)$; por lo que podremos expresar $x(t)$ como

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ ... \ + x_n(t)$$

En la tabla **??** se muestran las transformadas de señales básicas.

4.1. Expansión en fracciones parciales

Si $X(s)$ es una transformada racional de la forma

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

la técnica de expansión en fracciones parciales puede usarse para evaluar la transformada inversa.

Suponiendo $k = 1$, si $m < n$ distinguimos dos casos de aplicación del método:

a) Si todos los polos de $X(s)$ (ceros de $D(s)$) son distintos (polos simples), $X(s)$ puede expresarse como:

$$X(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \ ... \ + \frac{c_n}{s-p_n}$$

donde los coeficientes c_k están dados por la expresión:

$$c_k = ((s-p_k)X(s))\Big|_{s=p_k}$$

b) Si $D(s)$ tiene raíces múltiples, es decir contiene factores de la forma $(s-p_i)^r$, decimos que p_i es un polo múltiple de $X(s)$ con multiplicidad r. En este caso los términos correspondientes a p_i en la expansión de $X(s)$ poseen la forma:

$$\frac{\lambda_1}{(s-p_i)} + \frac{\lambda_2}{(s-p_i)^2} + \ ... \ + \frac{\lambda_r}{(s-p_i)^r}$$

donde los coeficientes λ_i asociados con un polo de multiplicidad r se obtienen mediante la expresión

$$\lambda_i = \frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\left[(s-p_i)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

Si $m \geq n$ deberemos operar para expresar $X(s)$ como

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

donde el polinomio $Q(s)$ tiene grado $m - n$ y el polinomio $R(s)$ posee un grado estrictamente menor que n. Para obtener la transformada inversa del término $\frac{R(s)}{D(s)}$ utilizaremos el método de expansión en fracciones parciales explicado anteriormente. Para obtener la transformada inversa de $Q(s)$, notemos que posee la forma

$$Q(s) = a_o + a_1 s^1 + a_2 s^2 + \ \dots \ + a_{m-n} s^{m-n},$$

por tanto podremos utilizar en la evaluación de su transformada inversa, el par transformada

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \qquad \overset{L}{\longleftrightarrow} \qquad s^k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos obtener el valor de los coeficientes de la expansión en fracciones parciales mediante la función $residue(b, a)$ de Matlab. Utilizamos esta función cuando aplicamos el método de expansión en fracciones parciales para obtener transformadas inversas de transformadas de Fourier en tiempo continuo. Mostraremos en los ejemplos cómo se utiliza esta función para obtener transformadas inversas de transformadas de Laplace.

Si bien mediante el método de expansión en fracciones parciales obtenemos fracciones simples, ya vimos en los ejemplos 1 y 2 que la misma expresión algebraica de una transformada $X(s)$ puede estar asociada con dos señales distintas. Para decidir finalmente a que señal corresponde deberemos realizar un análisis de la ROC de la transformada. Mostraremos como realizar esto mediante tres ejemplos.

Ejemplo N^o 7. Consideremos la transformada

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad ROC: \ Re\{s\} > -1$$

ya que el polinomio denominador posee menor orden que el numerador y no existen polos múltiples podremos expandir $X(s)$ en fracciones parciales de la forma

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

Los coeficientes A y B los obtenemos mediante

$$A = [(s+1)X(s)]\Big|_{s=-1} = 1,$$

$$B = [(s+2)X(s)]\Big|_{s=-2} = -1,$$

por lo que la transformada puede expresarse como

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

El código de Matlab para obtener la expansión de fracciones parciales de este ejemplo es

```
b = [1];
a = [1 3 2];
[r,p,k] = residue(b,a)
```

Recordemos que el vector r tiene los residuos, p tiene los polos y k los términos directos. El vector k contiene los coeficientes de un polinomio en s de la forma

$$k[1] + k[2]s + k[3]s^3 + ... + k[i]s^{i-1}$$

En el caso de este ejemplo, como el orden del numerador es menor que el orden del denominador, el vector k es un vector de elementos nulos. La transformada inversa de este polinomio en potencias positivas de s es la suma de un impulso $\delta(t)$ y derivadas de diferente orden del impulso.

Ya que los términos de la forma $1/(s+a)$ pueden estar asociados a señales de la forma $x(t) = e^{-at}u(t)$ o a $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ (vea los ejemplos 1 y 2), deberemos analizar la ROC de $X(s)$ para decidir a que señal corresponde la transformada. Ya que la ROC es el semiplano derecho definido por $Re\{s\} > -1$, la señal debe ser una señal derecha, por tanto la señal correspondiente a $X(s)$ es

$$x(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) u(t)$$

Ejemplo N^o 8. Consideremos la transformada $X(s)$ con la misma expresión del ejemplo anterior pero con la ROC definida por el semiplano izquierdo $Re\{s\} < -2$. La señal debe ser una señal izquierda, por tanto en este caso la señal es

$$x(t) = \left(-e^{-t} + e^{-2t}\right) u(-t)$$

Ejemplo N^o 9. Supongamos que la transformada es la misma que la de los ejemplos anteriores, pero ahora con la ROC definida por la franja $-2 < Re\{s\} < -1$. A partir de las propiedades sabemos que esta transformada tiene que corresponder a una señal bilateral (señal de longitud infinita). Ya que la ROC en este caso se encuentra a la izquierda del polo $s = -1$, el primer término de la expansión en fracciones parciales de $X(s)$ debe corresponder a una señal izquierda

$$-e^{-t}u(-t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+1} \quad Re\{s\} < -1$$

De manera similar, como la ROC de $X(s)$ se encuentra a la derecha del polo $s = -2$, la señal correspondiente al término $1/(s+2)$ debe ser una señal derecha, por tanto

$$e^{-2t}u(t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+2} \quad Re\{s\} > -2$$

Finalmente, la señal correspondiente a $X(s)$ es en este caso

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

5. Propiedades de la transformada de Laplace

De manera similar a la transformada de Fourier, existen varias propiedades de la transformada de Laplace que nos permiten evaluar las transformadas de muchas señales utilizando la tabla de transformadas básicas. Como veremos la aplicación de estas propiedades modifican también la región de convergencia de la transformada.

Las propiedades de la transformada de Laplace se muestran en la tabla **??**. Observemos que para cada propiedad, se especifica la ROC final que se obtiene. Explicamos el significado de cómo determinar la ROC en la aplicación de propiedades, analizando el caso particular de la propiedad de linealidad.

Consideremos los siguientes pares de transformadas de Laplace

$$x_1(t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad X_1(s) \quad \text{ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad X_2(s) \quad \text{ROC} = R_2$$

Propiedad de linealidad

La propiedad de linealidad de la transformada establece que

$$a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad a\,X_1(s) + b\,X_2(s) \quad \text{ROC} \supset R_1 \cap R_2$$

La notación ROC $\supset R_1 \cap R_2$ significa que la ROC incluye <u>al menos</u> a la intersección de los conjuntos R_1 y R_2. Usualmente tendremos que la ROC es el conjunto intersección, pero debemos tener presente que puede haber casos en que la ROC es mayor que el conjunto intersección.

Ejemplo N^o 10. En este ejemplo mostraremos como la ROC de una combinación lineal de señales puede extenderse más allá de la intersección de las señales componentes. Consideremos la señal cuya transformada es

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s)$$

donde las transformadas de cada uno de los términos de la combinación son

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \qquad ROC:\ Re\{s >\} - 1$$

Por la propiedad de linealidad

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}.$$

Si bien la región de intersección de las ROC's de $X_1(s)$ y $X_2(s)$ es $Re\{s > -1\}$, para determinar la ROC de $X(s)$, debemos extender el límite izquierdo hasta el polo en $s = -2$ ya que $X(s)$ tiene un polo en $s = -1$ que se cancela con un cero en ese mismo lugar, ocurre una **cancelación polo-cero**. Esto tiene como consecuencia que la ROC de $X(s)$ sea $Re\{s\} > -2$. Finalmente, la señal que corresponde a $X(s)$ es

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

Podemos resumir una regla general para determinar la ROC de una transformada racional, al aplicar las propiedades como la de linealidad, en los siguientes pasos:

a) Escribimos la transformada $X(s)$ su formato polo-cero. Esto nos permite determinar si existen cancelaciones polo-cero.

b) Realizamos la intersección de cada una de las ROC's de los términos (como $X_1(s)$ y $X_2(s)$ en el ejemplo. Si la intersección no es vacía, la operación nos permitirá determinar una región en el plano s.

c) Extendemos los límites derecho e izquierdo de la región hasta el polo más cercano de $X(s)$ o hasta $\pm\infty$, teniendo en cuenta las posibles cancelaciones polo-cero de la forma racional final de $X(s)$.

Ejemplo N^o 11. Consideremos una transformada como la del ejemplo anterior

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

donde las transformadas de cada uno de los términos de la combinación tienen la misma forma algebraica pero distintas ROC's,

$$X_1(s) = \frac{1}{s+3} \qquad ROC: \; Re\{s\} > -3$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \qquad ROC: \; -3 < Re\{s\} < -2.$$

Por la propiedad de linealidad

$$X(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+3)}(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}.$$

Siguiendo la regla enunciada para determinar la ROC de $X(s)$. En principio, la ROC's de $X_1(s)+X_2(s)$ es la región $(-3 < Re\{s\} < -2)$, pero extendemos el límite izquierdo hasta $-\infty$, ya que se produce la cancelación polo-cero en $s=-3$. Finalmente, la ROC de $X(s)$ es en este caso la región $Re\{s\} < -2$, y la señal es

$$x(t) = -e^{-2t}u(-t).$$

5.1. Teorema de valor inicial y valor final

Veamos ahora una propiedad importante de la transformada de Laplace. Considerando una señal $x(t)$ que es 0 para $t<0$ y no posee en $t=0$ ningún impulso u otra función singular, es posible calcular el valor inicial ($x(0^+)$) y el valor final ($x(\infty)$) haciendo uso de la transformada de Laplace, mediante el resultado de dos teoremas: el **teorema del valor inicial** que asegura

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s),$$

y el teorema del valor final que asegura

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s).$$

6. Análisis y caracterización de sistemas utilizando la transformada de Laplace

Una de las utilidades más importantes de la transformada de Laplace es que nos permite caracterizar el comportamiento de los sistemas LTI de manera simple. Sabemos que la respuesta de un sistema LTI puede calcularse como

$$y(t) = h(t) * x(t).$$

Si aplicamos la propiedad de convolución a la expresión anterior vemos que en el dominio s, la relación entre las transformadas de la respuesta y de la entrada está descripta por una simple multiplicación,

$$Y(s) = H(s)X(s),$$

donde $H(s)$ es la transformada de Laplace de la función respuesta al impulso, $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$.

Función de Transferencia

Se denomina *Función de Transferencia* o *Función del Sistema* a la transformada de Laplace de la Respuesta al Impulso de un sistema LTI,

$$H(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

La ROC de $H(s)$ está determinada por las características del sistema LTI.

La ROC de la transformada de la respuesta del sistema $Y(s)$ depende de las características de las regiones de convergencia de $H(s)$ y $X(s)$. Tal como lo indica la tabla de propiedades (tabla **??**), el producto de transformadas en la propiedad de convolución posee una ROC dada por $R_Y \supset R_X \cap R_H$. Como veremos, algunas de las propiedades de un sistema LTI pueden inferirse a partir de la forma de la región de convergencia de $H(s)$.

Si la ROC de $H(s)$ incluye el eje imaginario $s = j\omega$, la Función de Transferencia evaluada en $j\omega$ es la Función de Respuesta en Frecuencia del sistema.

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

Como cuando trabajamos con la transformada de Fourier aplicada a sistemas, podemos muchas veces calcular la respuesta de un sistema en el dominio transformado de Laplace (dominio s), $Y(s) = H(s)X(s)$, para luego antitransformar y obtener $x(t)$. Veremos que generalmente, la repuesta puede considerarse suma de dos términos: un término tiene su forma determinada por la señal de entrada y otro término determinado por el sistema. Al término determinado por el sistema se le denomina **respuesta transitoria**. Si el sistema es estable, la respuesta transitoria decaerá en amplitud hasta eventualmente hacerse despreciable en comparación con el otro término. La respuesta del sistema a tiempos en que la respuesta transitoria ha desaparecido, se le denomina **respuesta de estado estacionario**. La respuesta de estado estacionario permanece en tanto persista la señal de entrada.

6.1. Causalidad en sistemas LTI

Como primer caso de la relación entre las características de un sistema LTI y la ROC de su función de transferencia $H(s)$, analicemos el caso de un sistema causal. Un sistema es causal si su respuesta al impulso cumple que $h(t) = 0$ para $t < 0$. Esto nos permite inferir la ROC de $H(s)$.

ROC de un sistema LTI causal

Si consideramos que $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ y a partir de la propiedad de la ROC de una señal derecha, vemos que la región de convergencia de un sistema causal es un semiplano derecho en el plano s.

Incluimos en este caso la posibilidad de que la ROC sea todo el plano s, un ejemplo de esto último lo constituye el sistema causal que posee $h(t) = \delta(t - t_0)$, con $t_0 > 0$.

La afirmación inversa no es cierta, es decir no podemos afirmar que si la ROC de $H(s)$ es un semiplano derecho, el sistema es causal. Sin embargo, si $H(s)$ es racional, podemos determinar si el sistema es causal simplemente observando si la ROC de $H(s)$ es un semiplano derecho, es decir la afirmación inversa si $H(s)$ es racional.

ROC de un sistema LTI causal con $H(s)$ racional

Si el sistema es causal y su $H(s)$ es racional, la condición de causalidad es equivalente a la condición de que la ROC de $H(s)$ es un semiplano derecho, extendiéndose hacia la derecha de su polo con mayor parte real.

Ejemplo N^o 12. Consideremos un sistema cuya Función de Transferencia es

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \qquad ROC: \; Re\{s\} > -1$$

Ya que $H(s)$ es racional y constituye un semiplano derecho, podemos afirmar que el sistema LTI es causal.

Podemos confirmar el resultado viendo la antitransformada de $H(s)$,

$$h(t) = e^{-t}u(t) \qquad \overset{L}{\longleftrightarrow} \qquad ROC: \; H(s) = \frac{1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1.$$

Ejemplo N^o 13. Consideremos el sistema cuya Función de Transferencia es

$$H(s) = \frac{-2}{s^2 - 1} \qquad ROC: \; -1 < Re\{s\} < 1.$$

La ROC de $H(s)$ es racional y no es un semiplano derecho, por tanto podemos afirmar que el sistema LTI al que pertenece no es causal.

Podemos confirmar el resultado viendo la antitransformada de $H(s)$,

$$h(t) = e^{-|t|} \qquad \overset{L}{\longleftrightarrow} \qquad ROC: \; H(s) = \frac{-2}{s^2 - 1} \quad -1 < Re\{s\} < 1.$$

6.2. Estabilidad en un sistema LTI

También podemos relacionar la estabilidad de un sistema con la ROC de $H(s)$. Recordemos que un sistema es BIBO estable si la función respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

Cumpliendo esta condición podemos asegurar que el sistema posee una función respuesta en frecuencias con sentido físico, ya que $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ converge. Por tanto podemos asegurar la siguiente propiedad.

ROC de un sistema LTI estable

Un sistema LTI es estable sí y solo sí la ROC de la Función Transferencia del sistema incluye el eje $s = j\omega$, lo que nos permite realizar la evaluación

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}.$$

En caso de que la ROC de $H(s)$ no incluya el eje $s = j\omega$, no podemos evaluar la respuesta en frecuencia. Debemos entender esto como que el sistema no posee una respuesta en frecuencia que sea una función en sentido usual.

Ejemplo N^o 14. Consideremos un sistema LTI que posee la función de transferencia racional,

$$H(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s-2)}.$$

Si la ROC no está especificada, existen varios sistemas que podrían tener esta función de transferencia, la cual posee un cero en $s = 1$ y dos polos ubicados en $s = -1$ y $s = 2$. Expandiendo $H(s)$ en fracciones parciales obtenemos

$$H(s) = \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}$$

Si la ROC es $Re\{s\} > 2$ y por tanto el sistema es causal, su función respuesta al impulso es

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t)$$

Si la ROC de $H(s)$ es $-1 < Re\{s\} < 2$, la función respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

Además podemos afirmar que el sistema es estable.

Si la ROC es $Re\{s\} < -1$, podemos afirmar que el sistema no es estable, ni causal. En este caso, la función respuesta al impulso es

$$h(t) = -\left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$

Considerando la relación entre la ROC de $H(s)$ y las propiedades de causalidad y estabilidad anteriormente enunciadas, podemos finalmente asegurar que: un sistema LTI con función $H(s)$

racional es estable y causal, si y solo si todos los polos poseen parte real negativa.

Ejemplo N^o 15. Consideremos el sistema LTI cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1} \qquad ROC: \ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Como la ROC de $H(s)$ incluye al eje $j\omega$, el sistema es estable. Además, podríamos concluir que ya que la ROC de $H(s)$ es un semiplano derecho el sistema es causal. Pero no podemos realizar esta última afirmación sobre la causalidad ya que $H(s)$ no es racional, el numerador no es un polinomio en la variable s. Esto se confirma obteniendo $h(t)$ utilizando la tabla de transformadas y la propiedad de desplazamiento temporal

$$e^{-t}u(t) \leftarrow L \rightarrow \frac{1}{s+1} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$x(t - t_o) \leftarrow L \rightarrow e^{-st_o}X(s) \quad ROC = R$$

Por lo que podemos concluir que

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1).$$

Ya que $h(t) \neq 0$ si $t < 0$, el sistema no es causal.

7. Sistemas LTI causales caracterizados por ecuaciones diferenciales

Consideremos el sistema LTI causal cuya relación entrada-salida está descripta por una ecuación diferencial con coeficientes constantes de la forma general

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k},$$

recordemos que la condición de ser un sistema LTI y causal implica que el sistema está en reposo inicial, o lo que es lo mismmo, que las condiciones iniciales de la ecuación diferencial son todas nulas. Aplicando la propiedad de diferenciación en el tiempo, podemos encontrar la función de transferencia del sistema $H(s)$ mediante la expresión

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{8}$$

Vemos que esta es una función racional, con ceros en las raíces del polinomio

$$\sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

y polos en las raíces del polinomio

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k$$

Ya que los coeficientes a_k y b_k son números reales, los polos y ceros (raíces del numerador y denominador) son reales o si son complejos, aparecen en pares de un complejo y su conjugado. La forma polos-ceros de $H(s)$ es

$$H(s) = G\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

El factor G se denomina ganancia y corresponde con el cociente b_0/a_0 de la ecuación 7.

Es importante observar que la ecuación diferencial determina la función de transferencia del sistema, pero para especificar la ROC de $H(s)$ debemos imponer condiciones sobre la solución de la ecuación. Como el sistema es causal, la ROC de $H(s)$ es el semiplano derecho que se extiende a la derecha del polo con mayor parte real.

Ejemplo N^o 16. Consideremos el sistema LTI causal y estable cuya relación entrada-salida está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{2d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t),$$

siendo nulas las condiciones iniciales. Aplicando la ec. 8 obtenemos la función de transferencia

$$H(s) = \frac{(s-1)}{2s^3 + 5s^2 + 11s + 15}$$

Podemos utilizar Matlab para obtener los polos y ceros de $H(s)$ y su correspondiente diagrama, mediante el siguiente código

```
b=[1 -1];
a=[1 5 11 15];
[z p G]=tf2zp(b,a)
Hsys=tf(b,a);
pzmap(Hsys)
axis([-4 1 -2.5 2.5]),;
omega=[-3:0.05:3];
figure;
H=freqs(b,a,omega);
plot(omega,abs(H));
```

El vector b y a contienen los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de $H(s)$, respectivamente. La función $tf2zp(b,a)$ obtiene los ceros (vector z), polos (vector p) y ganancia G de la función de transferencia racional $H(s)$, esta función sólo puede utilizarse para transformadas racionales propias. La función $tf(b,a)$ crea el objeto de Matlab «función de transferencia» ($Hsys$) del sistema con $H(s)$ racional; este objeto puede ser utilizado como argumento en funciones como $pzmap(Hsys)$ que realiza el diagrama de polos y ceros. La función $freqs(b,a,omega)$ obtiene la respuesta en frecuencia del sistema y realiza una gráfica evaluando la función en el vector de frecuencias $omega$.

Con los resultados de Matlab podemos construir $H(s)$ en su formato polo-cero,

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{(s-1)}{(s-(-1+2j))\,(s-(-1-2j))\,(s-(-3))} \\
&= \frac{(s-1)}{s^3+5s^2+11s+15} = \frac{-0{,}50}{s+3} + \frac{0{,}25}{s+(1{,}00-j2{,}00)} + \frac{0{,}25}{s+(1{,}00+j2{,}00)}
\end{aligned}
$$

con polos y ceros en

$$p_1 = -1+2j, \quad p_2 = -1-2j, \quad p_3 = -3, \quad z = -1.$$

El diagrama polo-cero que se obtiene con la función $pzmap(Hsys)$ se muestra en la figura 7. En la figura 8 se muestra la función respuesta en frecuencia de este sistema que se obtiene con $freqs(b,a,omega)$. El sistema LTI es causal (c.i. nulas) y estable, por lo que es correcto evaluar la respuesta en frecuencia.

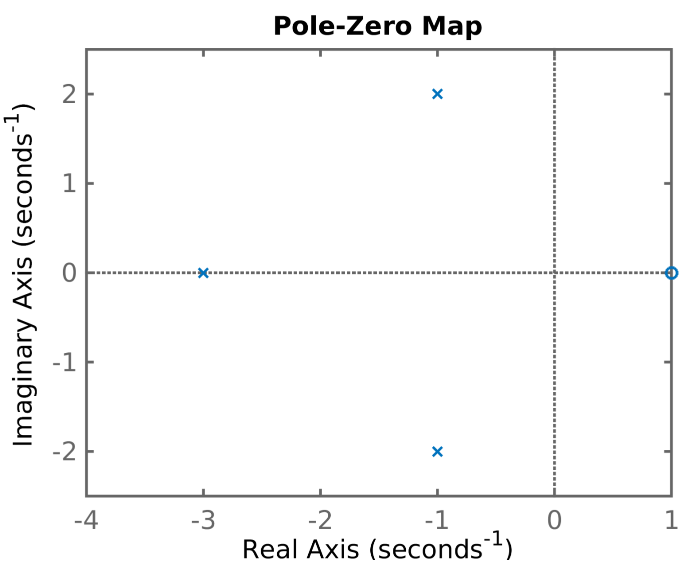

Figura 7

8. Modelo de polos y ceros de un sistema causal

El diagrama de polos y ceros de una señal da información completa de las características de una señal, tanto en el dominio del tiempo, como en el de la frecuencia. En esta sección describimos cómo podemos

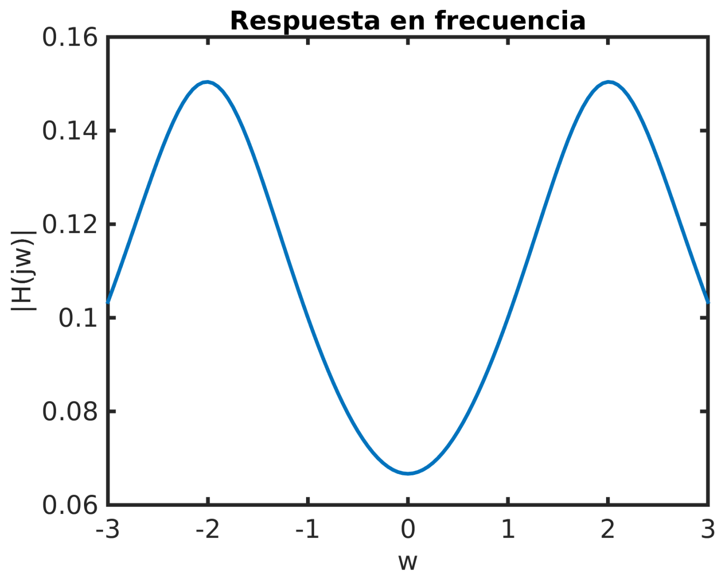

Figura 8

interpretar este diagrama para obtener esta información en caso de un sistema causal.

8.1. Interpretación en el dominio del tiempo

Hemos visto que una función de transferencia racional puede expandirse en fracciones parciales, lo cual nos permite encontrar la transformada inversa utilizando una tabla de transformadas. Cada uno de los términos de esta expansión está relacionado con un polo de la función $H(s)$. Por ejemplo, consideremos un sistema causal cuya la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \qquad ROC: \; Re\{s\} > -1$$

posee ceros en $z_1 = -1{,}25 + 2{,}11j$ y $z_2 = -1{,}25 - 2{,}11j$, y polos en $s = -2$, $s = -1 + j3$ y $s = -1 - j3$. $H(s)$ puede expresarse mediante fracciones parciales como

$$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + (1-3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + (1+3j)}\right).$$

Cada término tiene la siguiente transformada inversa

$$e^{-2t}u(t) \qquad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \qquad \frac{1}{s+2} \quad Re\{s\} > -2$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \qquad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \qquad \frac{1}{s + (1-3j)} \quad Re\{s\} > -1$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+(1+3j)} \quad Re\{s\} > -1$$

Por tanto la función respuesta al impulso del sistema es

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-2t}u(t) + e^{-(1-3j)t}u(t) + e^{-(1+3j)t}u(t) \\ &= e^{-2t}u(t) + e^{-t}cos(3t)u(t) \end{aligned}$$

Si comparamos la última expresión de $h(t)$ con la $H(s)$ vemos que el polo sobre el eje real ($s = -2$) corresponde con una componente exponencial decreciente y que el par de polos complejos conjugados corresponden a una señal sinusoidal modulada por una exponencial decreciente. Por tanto vemos que *los polos determinan la forma de las componentes en el dominio del tiempo.* Los ceros no aparecen explícitamente en la expansión en fracciones parciales pero determinan la contribución relativa de cada una de las componentes a $h(t)$.

Si el diagrama de polos y ceros representa la transformada de Laplace de una señal, podemos interpretar cada polo o par de polos de manera análoga. Cada polo o par de polos representará una componente de la señal en el dominio del tiempo.

En la figura 9 se resume mediante un esquema, la relación entre la posición de los polos y la forma de la componente asociada en el dominio del tiempo, válido para un sistema causal o una señal causal. Solo se muestra el plano s sobre el eje real. Los polos ubicados en el plano inferior corresponden a un par complejo conjugado. Las formas de las señales mostrada cerca de cada polo indicado por $\times$, es la forma de la señal asociada con el polo o con el par complejo conjugado:

a) Las componentes asociadas con polos a la izquierda del eje $s = j\omega$ decaen en el tiempo, está parte del plano se denomina plano izquierdo. Por el contrario, las componentes asociadas con polos a la derecha de este eje (plano derecho) crecen indefinidamente. Si el diagrama de polos y ceros está asociado a una función de transferencia, polos en el plano derecho indican que existen componentes de $h(t)$ que crecen en el tiempo. Si el sistema es causal (ROC=plano derecho) y existen polos con parte real positiva, el sistema es inestable. Como ya fue indicado, para que el sistema sea estable y causal todos los polos deben ubicarse en el plano izquierdo.

b) Los polos ubicados sobre el eje real $s = \sigma$ corresponden a componentes exponenciales no oscilatorias de la forma $e^{\sigma_o t}$, que son decrecientes si el polo se ubica en el plano izquierdo o creciente si se ubica en el plano derecho.

c) Un polo en el origen corresponde a una componente con la forma de la función escalón $u(t)$ ya que $1/s = \mathcal{L}\{u(t)\}$.

d) Los polos complejos conjugados que se encuentran en el plano s (fuera del eje $\omega = 0$) son asociados con señales sinusoidales moduladas por una exponencial. Un par de polos complejos conjugados de la forma $\sigma_o + j\omega_o$ y $\sigma_o - j\omega_o$ corresponden a la componente $e^{\sigma_o t}sen(\omega_o t + \theta)$. Si el polo se encuentra en el plano izquierdo ($\sigma_o < 0$) la exponencial es decreciente, mientras que si se encuentra en el plano derecho ($\sigma_o > 0$) es creciente. La parte imaginaria de los polos ω determina la frecuencia de la oscilación.

e) Polos complejos conjugados ubicados sobre el eje $s = j\omega$ corresponden a componentes sinusoidales que mantienen constante su amplitud.

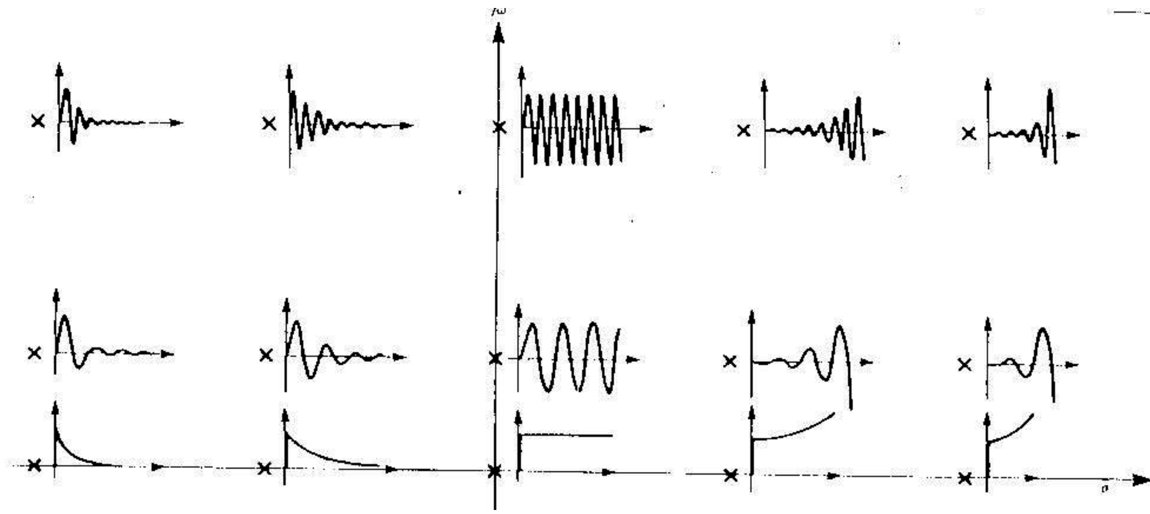

Figura 9

8.2. Interpretación en el dominio de la frecuencia

En caso de que el diagrama de polos y ceros corresponda a una función de transferencia, ya hemos visto que si la ROC incluye el eje $j\omega$, la evaluación de $H(s)$ en $s = j\omega$ da la función respuesta en frecuencia del sistema. Dicho de otra manera, si el diagrama de polos y ceros corresponde a la transformada de Laplace de una señal y la ROC incluye al eje $s = j\omega$, al evaluar $H(s = j\omega)$ estamos obteniendo el espectro de la señal, es decir la amplitud compleja de cada una de los modos de Fourier que componen la señal.

Para comprender cómo la posición de los polos y ceros determinan el espectro de una señal o la función respuesta en frecuencia de un sistema, consideremos la función

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \qquad Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$

la cual posee polos en $s_{1,2} = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ y un cero en $s = 0$. En la figura 10 se representa el diagrama de polos y ceros y la gráfica de $|H(s)|$.

La vecindad de los polos se caracteriza por valores altos de $H(s)$ y la vecindad de los ceros por valores bajos de esta magnitud. Un corte de la superficie que se muestra en la figura 10 en $\sigma = 0$, que corresponde al eje $s = j\omega$, nos permite inferir el comportamiento del módulo de la respuesta en frecuencias $H(j\omega)$ del sistema. Vemos que si los ceros de $H(s)$ se encuentra cerca del eje $s = j\omega$, $H(j\omega)$ decrece en las frecuencias cercanas al cero. Si el cero se encuentra sobre el eje imaginario, en $s = j\omega_o$, $H(j\omega)$ es cero en ω_o. Los polos que se encuentran cerca del eje imaginario tienden a incrementar $|H(j\omega)|$ en las frecuencias cercanas al polo.

Para finalizar esta sección y a manera de resumen, en la figura 11 se muestra como el diagrama de polos y ceros se relaciona con las características de la señal en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia.

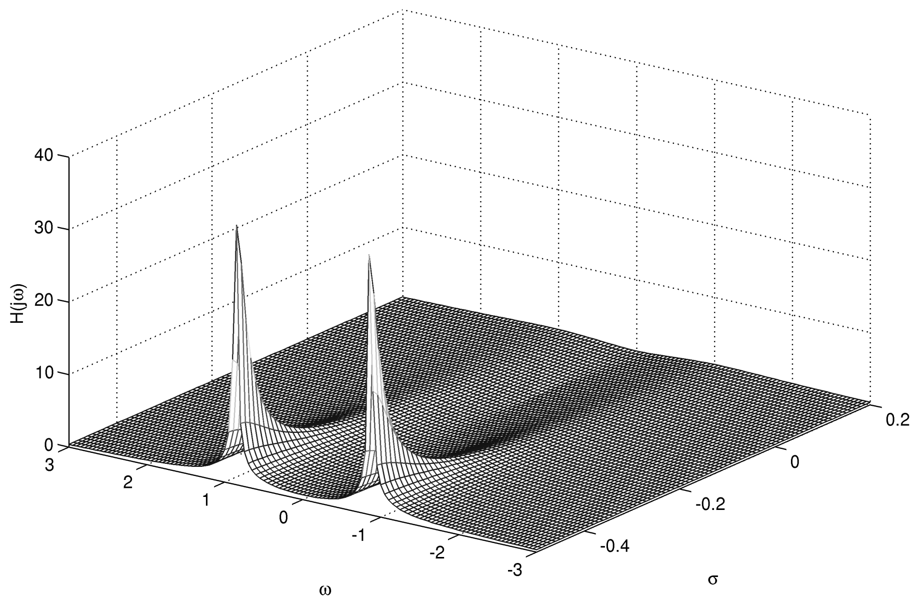

Figura 10

9. Sistemas equivalentes paralelo y serie

Para N sistemas conectados en serie, la función respuesta al impulso del sistema equivalente es

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * ... * h_N(t)$$

si aplicamos la propiedad de convolución de la transformada podemos obtener la función de transferencia equivalente

$$H_{serie}(s) = H_1(s)H_2(s)...H_N(s)$$

Si N sistemas se conectan en paralelo, de la función de respuesta al impulso del sistema equivalente es

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + ... + h_N(t)$$

y aplicamos la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace

$$H_{paralelo}(s) = H_1(s) + H_2(s) + ... + H_N(s)$$

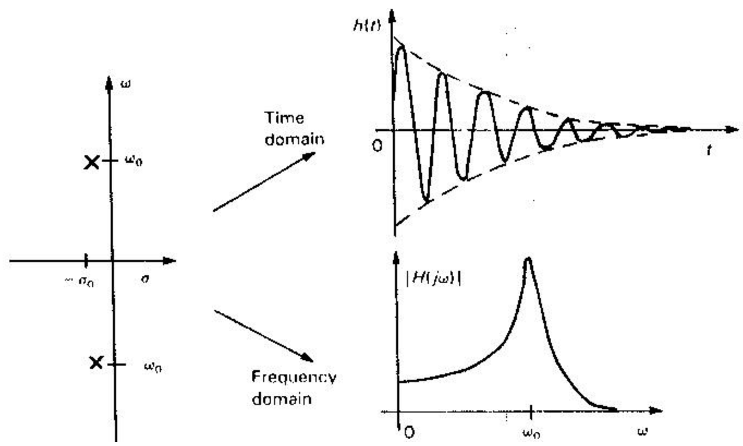

Figura 11

Ejemplo N^o 17. Consideremos el sistema LTI cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

La forma polo-cero de $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)}\frac{(s-2)}{(s+2)}\frac{1}{(s+3)}$$

A partir de esta expresión, podemos inferir que este sistema puede representarse como la conexión en serie de tres sistemas, cuyas funciones de transferencia son:

$$H_1(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad H_2(s) = \frac{s-2}{s+2}, \quad H_3(s) = \frac{1}{s+3}$$

El sistema también puede representarse como una conexión en paralelo, para ver esto realicemos la expansión en fracciones parciales de $H(s)$

$$H(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{12}{s+2} + \frac{10}{s+3}$$

Está última expresión indica que también podemos representar el sistema como la interconexión de tres sistemas en paralelo, cuyas funciones de transferencia son.

$$H_1(s) = \frac{3}{s+1}, \quad H_2(s) = -\frac{12}{s+2}, \quad H_3(s) = \frac{10}{s+3}$$

9.1. Función de transferencia de un sistema realimentado

La conexión que se muestra en la figura 12 recibe el nombre de sistema con realimentación positiva. Para calcular su función de transferencia observemos que

$$Y(s) = H_1(s)E(s),$$

siendo $E(s)$.

$$E(s) = X(s) + H_2(s)Y(s)$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)} X(s) \qquad \rightarrow \qquad H_{realimentado+} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}$$

Hemos obtenido la función de transferencia equivalente del sistema con realimentación positiva. Si en el sumador de la figura 12, la entrada de la rama de realimentación se multiplica por -1, el sistema se denomina sistema con realimentación negativa y la función de transferencia equivalente es

$$H_{realimentado-} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Ejemplo N^o 18. Consideremos el sistema LTI cuya ecuación diferencial asociada y función de transferencia son

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \qquad\qquad H(s) = \frac{1}{s+3}$$

Podemos identificar la función de transferencia $H(s)$ con la función de transferencia de un sistema con realimentación negativa si hacemos $H_1(s) = 1/s$ y $H_2(s) = 3$.

10. La transformada unilateral de Laplace

Se define como *transformada unilateral de Laplace* de la señal x(t) a

$$X(s) \equiv \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt \tag{9}$$

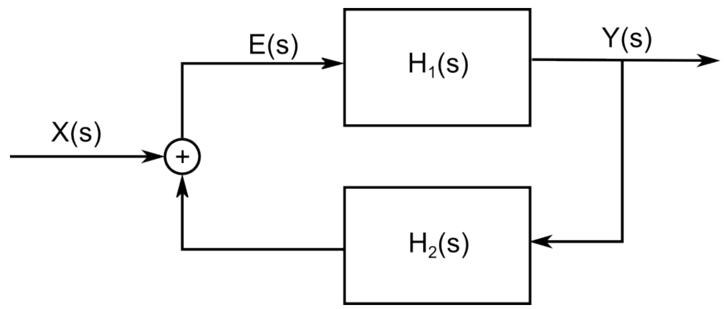

Figura 12

La diferencia de la transformada unilateral con la transformada de Laplace, es el límite inferior de la integral que define ambas transformadas. En este caso, el límite es elegido como $t = 0^-$ en vez de $-\infty$.

En algunos textos, el límite en la definición (9) es $t = 0$ o $t = 0^+$. La elección del límite en $t = 0^-$ permite que la señal incluya alguna función singular, como la $\delta(t)$ o sus derivadas, en $t = 0$. Si la señal $x(t)$ no tiene una singularidad en $t = 0$, todos estos límites inferiores son iguales, ya que no hay una contribución al área bajo la función $x(t)e^{-st}$. Esto ocurre aunque la señal $x(t)$ sea discontinua en $t = 0$.

Denotaremos la operación transformada unilateral de una señal como $X(s) = \mathcal{UL}\{x(t)\}$ o mediante

$$x(t) \quad \overset{UL}{\longleftrightarrow} \quad X(s)$$

En esta sección nos referiremos a la transformada de Laplace como transformada bilateral de Laplace para enfatizar su distinción con la transformada unilateral.

Ejemplo N^o 19. Consideremos las tres señales

$$x_1(t) = A, \qquad x_2(t) = \delta(t), \qquad x_3(t) = e^{j2t}$$

y calculemos sus transformadas unilaterales de Laplace. Aplicando la definición (9)

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= \int_{0^-}^{\infty} Ae^{-st}dt = \frac{A}{s} && ROC: \ Re\{s\} > 0 \\
X_2(s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 && ROC: \ \text{para todo s} \\
X_3(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{j2t}e^{-st}dt = \frac{1}{s-2j} && ROC: \ Re\{s\} > 0
\end{aligned}$$

Dada la similaridad de las definiciones de ambas transformadas de Laplace, es posible adaptar varios de los conceptos, propiedades y resultados obtenidos para la transformada bilateral al caso de la transformada unilateral. Por ejemplo, dado que la transformada unilateral de una señal $x(t)$ es idéntica a la transformada bilateral de la señal $x(t)$ si fijamos el valor $x(t) = 0$ para $t < 0$, es posible utilizar la propiedad de la región de convergencia de una señal derecha para demostrar que **la ROC de la transformada unilateral de cualquier señal $x(t)$ es siempre un plano derecho en el plano** s. Este plano está definido por $Re\{s\} > \sigma_{max}$, siendo σ_{max} la parte real de mayor valor de los polos de $X(s)$.

Además, dado que la transformadas bilateral y unilateral son idénticas para señales causales ($x(t) = 0$ para $t < 0$), podremos encontrar la señal correspondiente a una dada transformada unilateral $X(s)$ utilizando una tabla de transformadas bilaterales y sólo prestando atención a las señales correspondientes a ROC's que son semiplanos derechos.

La transformada unilateral es útil para calcular la respuesta de un sistema a una señal causal cuando el sistema está descripto por una ecuación diferencial con coeficientes constantes y con condiciones iniciales distintas de cero. La propiedad básica de la transformada unilateral que es útil en esta aplicación es la propiedad de diferenciación. Esta propiedad difiere de la correspondiente a la transformada bilateral.

10.1. Propiedad de diferenciación en el tiempo

Considerando una señal $x(t)$ cuya transformada unilateral es $X(s)$, determinemos la transformada unilateral de la señal $dx(t)/dt$. Para esto apliquemos la definición (9) e integremos por partes

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st} dt \\ &= sX(s) - x(0)\end{aligned}$$

donde hemos supuesto que $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$ y que es lo mismo evaluar la integral desde 0^- o desde 0. Por tanto la propiedad de diferenciación de la transformada unilateral es

$$\frac{dx(t)}{dt} \qquad \stackrel{UL}{\longleftrightarrow} \qquad sX(s) - x(0)$$

Si repetimos la aplicación de esta propiedad a las derivadas sucesivas de una señal obtenemos

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \qquad \stackrel{UL}{\longleftrightarrow} \qquad s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

donde $x'(0)$ es la derivada de la señal evaluada en $t = 0$. De manera más general

$$\frac{d^nx(t)}{dt} \qquad \stackrel{UL}{\longleftrightarrow} \qquad s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - ... - x^{(n-1)}(0)$$

La notación del último término $x^{(n-1)}(0)$ debe entenderse como la derivada de orden $n-1$ de la señal, evaluada en 0.

10.2. Solución de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada unilateral de Laplace

Como ya dijimos la utilidad más importante de la transformada unilateral de Laplace (para nosotros en este curso) es la obtención de una solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con *condiciones iniciales distintas cero*. Analicemos su aplicación en algunos ejemplos.

Ejemplo N^o 20. Consideremos un sistema descripto por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t).$$

En primer lugar, supongamos que el sistema es LTI causal y por tanto cumple con la condición de reposo inicial (si $x(t) = 0$ para $t < t_0$ entonces $y(t) = 0$ para $t < t_0$), o lo que es lo mismo podemos asegurar que las condiciones iniciales son todas nulas. La función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -1$$

Determinemos la respuesta a la entrada $x(t) = 2u(t)$. La transformada bilateral de la señal es $X(s) = 2/s$ con ROC dada por $Re\{s\} > 0$. La transformada bilateral de la respuesta es

$$\begin{aligned} Y(s) = H(s)X(s) &= \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \qquad ROC:\ Re\{s\} > 0. \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

Utilizando la tabla de transformadas, hallamos que

$$y(t) = \left[1 - e^{-t} + e^{-2t}\right] u(t)$$

Observemos que no hemos hecho uso de la transformada unilateral en la resolución de la ecuación diferencial, esto es así dado que el sistema cumple con la condición de reposo inicial y por tanto el sistema es causal. La condición de causalidad del sistema nos permite inferir la ROC de $H(s)$ como el semiplano derecho $Re\{s\} > -1$. Esto último determina la elección de la señal $y(t)$ que corresponde a la transformada $Y(s)$.

Ejemplo N^o 21. Consideremos el sistema descripto por la misma ecuación diferencial del ejemplo anterior pero ahora con condiciones iniciales $y(0) = 3$ y $y'(0) = -5$, con $x(t) = 2u(t)$. En este caso el sistema no cumple con la condición de reposo inicial (el sistema no es LTI causal), por lo que deberemos utilizar la transformada unilateral de Laplace para encontrar la solución de la ecuación diferencial. Aplicando la transformada unilateral a ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$$
\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = X(s)\\
&s^2Y(s) - s3 + 5 + 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = \frac{2}{s}
\end{aligned}
$$

Despejando $Y(s)$

$$
Y(s) = \frac{2/s + 3(s+3) - 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s}
$$

Expandiendo la última expresión en fracciones parciales obtenemos

$$
Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}
$$

$Y(s)$ es una transformada unilateral y por tanto la ROC debe ser el semiplano derecho $Re\{s\} > 0$, por lo que la señal $y(t)$ es

$$
y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t) \qquad \text{para } t > 0
$$

Si comparamos el resultado de este ejemplo con el correspondiente al ejemplo anterior, vemos que no se han modificado los polos por la introducción de condiciones iniciales no nulas y que la introducción de estas condiciones sólo ha producido la modificación de la constante que multiplica al término $e^{-2t}u(t)$. Esto es un resultado general, si introducimos condiciones iniciales distintas de cero en la ecuación diferencial, la señal de salida $y(t)$ posee las mismas señales componentes (la $Y(s)$ posee los mismos polos), sólo se modifican las amplitudes o coeficientes de cada una de las componentes.