# Tema 4
# Representación de señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia

Diego Leonardo Valladares
Dpto. de Física - Univ. Nac. de San Luis

7 de octubre de 2024

**Resumen**

En este tema tratamos la representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas discretos utilizando la representación de Fourier. Estudiamos la representación de señales no periódicas y la respuesta de sistemas LTI a este tipo de señales, mediante la Transformada de Fourier en tiempo discreto.

## Índice



## 1. Introducción:

En este capítulo trataremos la representación en frecuencia de señales y sistemas discretos utilizando la representación de Fourier dada por la serie de Fourier discreta y la Transformada de Fourier en tiempo discreto (ver tabla). Utilizaremos lo aprendido al tratar la representación en frecuencia de señales y sistemas continuos; como veremos si bien existen numerosas similitudes entre el caso discreto y continuo, también existen importantes diferencias.

| Tipo de señal | Periódica | No periódica |
|---|---|---|
| **continua** | Serie de Fourier | Transformada de Fourier en tiempo continuo |
| **discreta** | Serie de Fourier en tiempo discreto | Transformada de Fourier en tiempo discreto |

De manera análoga al caso continuo, las señales exponenciales discretas del tipo $e^{j\omega n}$ son la base de la representación en frecuencia de señales y sistemas discretos, ya que casi todas las señales de interés pueden representarse como una combinación lineal de este tipo de señales. Además la forma particular que posee la respuesta de los sistemas LTI discretos a señales exponenciales complejas permite que podamos obtener la respuesta del sistema de manera simple, utilizando la representación del sistema en el dominio de la frecuencia.

Recordemos que la señal exponencial discreta del tipo $x[n] = e^{j\omega n}$ es un caso particular de la señal exponencial discreta más general $x[n] = z^n$ (donde $z$ es un complejo), con $|z| = 1$. Utilizaremos la forma general $z^n$ al tratar la representación de señales y sistemas discretos mediante la transformada Z.

## 2. La serie de Fourier para señales discretas

Recordemos que una señal discreta $x[n]$ es periódica si existe un entero positivo $N$ para el cual se cumple que $x[n] = x[n + N]$, relación válida para todo $n$. Definimos el periodo como el menor valor de $N$ para el cual se cumple la igualdad.

Recordemos dos importantes diferencias entre las exponenciales complejas discretas $e^{\omega n}$ y continuas $e^{j\omega t}$:

- Para que la señal exponencial compleja discreta sea periódica debe cumplirse que

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N},$$

  si la fracción $m/N$ es irreducible, $N$ es el periodo de la señal. Ya que en el desarrollo de Fourier de señales utilizaremos señales exponenciales discretas periódicas, escribiremos esta señal como:

$$x[n] = e^{j\,2\pi/N\,n}$$

  De esta forma, aseguramos que la exponencial discreta es periódica, de frecuencia $2\pi/N$ y periodo $N$.

- Definimos el conjunto de secuencias armónicamente relacionadas como

$$\phi_k[n] = e^{jk\,2\pi/N\,n} \quad k \in <N>$$

  es decir las frecuencias de las señales del conjunto son múltiplos de la frecuencia fundamental del conjunto, $\omega = 2\pi/N$. Una importante distinción entre el caso discreto y el continuo, es que en el caso continuo existen infinitas señales dentro de un conjunto de señales armónicamente relacionadas, mientras que en el caso discreto solo existen $N$ señales distintas dentro del conjunto de señales armónicamente relacionadas. Esto es lo que hemos denotado como $k \in <N>$, $k$ toma valores en un conjunto de $N$ enteros sucesivos.

➥ Se cumple la condición de periodicidad

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \qquad\qquad r \rightarrow \text{entero},$$

es decir que cuando k se cambia por un múltiplo entero de $N$, se genera una señal idéntica a la original.

De manera similar a lo que hicimos para señales periódicas continuas, deseamos encontrar la representación de una señal periódica discreta de periodo $N$, como una combinación lineal de las señales del conjunto de señales armónicamente relacionadas de frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/N$

$$\phi_k[n] = \left\{ e^{jk(2\pi/N)n} \right\}.$$

Es decir, la combinación lineal

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

Ya que las secuencias $\phi_k[n]$ son distintas solo sobre un rango de $N$ valores sucesivos de $k$, vemos que la suma solo debe extenderse sobre un conjunto de $N$ funciones $\phi_k[n]$. Por este motivo, en la suma, el índice $k$ debe variar sobre $N$ valores enteros sucesivos, empezando en cualquier valor de $k$. Indicaremos esto expresando los límites de la suma como $k =< N >$. La expansión obtenida de esta forma es la serie de Fourier para la señal discreta periódica.

**Serie de Fourier en tiempo discreto**

La serie de Fourier para una señal discreta periódica de periodo $N$, también denominada *serie de Fourier en tiempo discreto*, está dada por la siguiente expresión:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\,2\pi/N\,n}. \tag{1}$$

Donde $k$ puede tomar los valores $k = 0, 1, ..., N-1$ o $k = 3, 4, ..., N+2$; *es indistinto tomar cualquier conjunto de $N$ enteros, siendo $N$ el periodo de $x[n]$*. Esta es la *ecuación de síntesis* de $x[n]$.
Dada la señal $x[n]$ con periodo $N$, cuya serie de Fourier se desea hallar, los valores de $a_k$ están dados por la expresión

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega n} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\,2\pi/N\,n} \tag{2}$$

Ya que la señal es periódica, la suma se extiende sobre los valores de $x[n]$ en un periodo. Con la notación $n =< N >$ expresamos que el índice $n$ toma $N$ valores enteros sucesivos. Esta es la *ecuación de análisis* de $x[n]$.

Los coeficientes $a_k$ son los *coeficientes espectrales* que representan $x[n]$ en el dominio de la frecuencia. La ecuación de síntesis (ec. 1) expresa cómo se descompone la señal periódica $x[n]$ en componentes o modos de Fourier $e^{k\,2\pi/N\,n}$, siendo $a_k$ el peso con que cada componente ingresa en la composición de $x[n]$. Remarquemos que en la serie de Fourier que representa $x[n]$ de periodo $N$, sólo aparecen $N$ componentes de frecuencia cuyo valor es un múltiplo de la frecuencia fundamental de la señal, $\omega_0 = 2\pi/N$, Los coeficientes espectrales $a_k$ son en general números complejos, y de la misma manera que en el caso continuo, *la representación de* $|a_k|$ *vs.* $k\omega$ *es el espectro de amplitud de la señal y* $\angle a_k$ *vs.* $k\omega$ *es su espectro de fase.*

Expresemos la serie de Fourier tomando el rango de $k = 0, 1, .., N - 1$

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + ... + a_{N-1}\phi_{N-1}[n].$$

Está combinación tiene que ser igual a

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + ... + a_N\phi_N[n].$$

Como $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, entonces $a_0 = a_N$.

**Periodicidad de $\{a_k\}$**

Podemos ver que los coeficientes espectrales cumplen con la propiedad

$$a_k = a_{k+rN} \qquad\qquad r \rightarrow \text{ entero}$$

es decir *los coeficientes* $a_k$ *constituyen una secuencia periódica, de periodo* $N$*, el mismo periodo de la señal* $x[n]$.

La propiedad de periodicidad de los coeficientes $a_k$ debe interpretarse cuidadosamente: *el espectro de amplitud y el espectro de fase de una señal discreta periódica de periodo* $N$ *consta sólo de* $N$ *valores de* $|a_k|$ *o de* $\angle a_k$*, respectivamente.* Esto es así porque la suma de la serie (1) se realiza sobre el rango $k =< N >$. Es común en la representación de los espectros representar más de $N$ términos, a pesar de esto debe tenerse en cuenta que solo se necesita que $k$ posea un rango sobre $N$ enteros consecutivos para poder representar la señal mediante la serie.

**Ejemplo N$^o$ 1.** Consideremos la señal $x[n] = sen(6\pi/5\, n)$. Esta señal tiene periodo $N = 5$, por lo que en principio esperaríamos encontrar $N = 5$ componentes en su expansión en Serie de Fourier (ver expresión 1). En este caso puede encontrarse el desarrollo en serie de Fourier utilizando la igualdad de Euler

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left\{e^{3\,2\pi/5\,n} - e^{-3\,2\pi/5\,n}\right\}.$$

Observe que en la expansión solo aparecen dos señales armónicamente relacionadas de frecuencia fundamental $\omega = 2\pi/5$ ($N = 5$). Estas señales tienen índice $k = 3$ y $k = -3$. Por tanto los coeficientes espectrales, tomando el rango $k = 0, 1, ..., 4$, son

$$a_0 = a_1 = a_4 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{2}j, \quad a_2 = \frac{1}{2}j,$$

donde hemos utilizado la condición de periodicidad de los coeficientes espectrales $a_k = a_{k+N}$, $a_2 = a_{-3+5}$. Por tanto, la serie puede escribirse como

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left\{e^{3\,2\pi/5\,n} - e^{2\,2\pi/5\,n}\right\}.$$

**Ejemplo N$^o$ 2.** El desarrollo en serie de Fourier de la señal de periodo $N = 10$,

$$x[n] = 1 + sen(\pi/5\, n) + 3cos(\pi/5\, n) + cos(2\pi/5\, n + \pi/2),$$

se puede obtener utilizando nuevamente la igualdad de Euler para cada señal armónica,

$$x[n] = 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j\right) e^{j\,(2\pi/10)\,n} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j\right) e^{-j\,(2\pi/10)\,n}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{j\pi/2}\, e^{j2\,(2\pi/10)\,n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\, e^{-j2\,(2\pi/10)\,n}.$$

Podemos identificar los coeficientes espectrales en la última expresión. Tomando el rango $k = 0, 1, .., 9$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j \\ a_9 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j \\ a_2 &= \frac{1}{2}\, e^{j\pi/2} \\ a_8 &= \frac{1}{2}\, e^{-j\pi/2} \\ a_k &= 0 \text{ para } \ 1 < k < 8 \end{aligned}$$

Los espectros de amplitud y fase se muestran en la figura 1

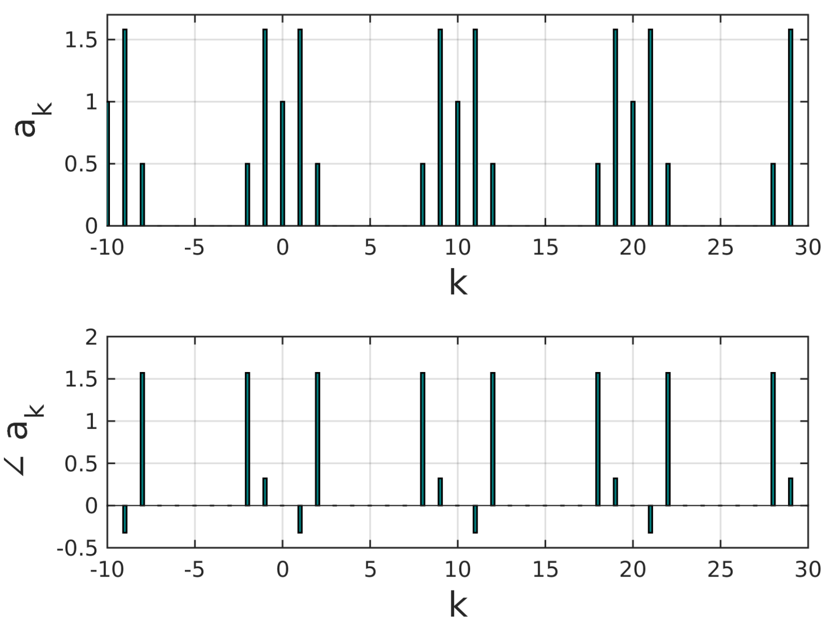


**Figura 1:** Figura del ejemplo 2.

Las propiedades de la serie de Fourier discreta son análogas a las de la serie continua y muchas son comunes a la Transformada de Fourier en tiempo discreto, por lo que las discutiremos en al tratar ese tema. Sólo exponemos aquí la relación de Parseval para señales discretas, ya que su semejanza es menos evidente:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

El miembro de la derecha de la igualdad es la potencia de la señal periódica. Por lo que de manera análoga al caso de una señal continua, esta relación nos permite calcular la potencia de la señal sumando el módulo al cuadrado de todos los coeficientes espectrales. El valor de $|a_k|^2$ nos dice cuanto de la potencia de la señal se encuentra en la señal exponencial discreta de frecuencia $\omega = k\,2\pi/N$. Esta es la razón por la que a la gráfica de $|a_k|^2$ vs. $k$ se le denomine *espectro de potencia* de la señal.

## 3. Series de Fourier y sistemas LTI

Al tratar cómo los sistemas LTI continuos responden a una exponencial compleja obtuvimos el siguiente resultado

$$y(t) = H(s)e^{st} \qquad \text{o} \qquad y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

donde $H(s)$ y $H(j\omega)$ son la función de transferencia y la función respuesta en frecuencia, respectivamente. Como veremos en el caso discreto podemos encontrar un resultado similar.

Encontremos cómo responde un sistema LTI discreto a la exponencial compleja $z^n$:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \end{aligned}$$

**Función de transferencia de un sistema LTI discreto**

Vemos que la respuesta del sistema LTI discreto a la señal exponencial $z^n$ es

$$y[n] = H(z)z^n$$

donde:

$$H[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \tag{3}$$

La respuesta del sistema es una señal idéntica que la exponencial de entrada multiplicada por una función que depende de las características del sistema ($h[n]$) y del valor de $z$. La función $H(z)$ (ec. 3) se denomina **función del sistema** o **función de transferencia**.

**Función respuesta en frecuencia de un sistema LTI discreto**

En caso que $z$ tenga módulo unidad ($z$ se puede escribir como $z = e^{j\omega}$), $H(e^{j\omega})$ recibe el nombre de **función respuesta en frecuencia** del sistema LTI discreto:

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

donde

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\omega} \tag{4}$$

$H(e^{j\omega})$ depende de las características del sistema a través de $h[n]$ y para un dado sistema, es función de la frecuencia de la señal de entrada $\omega$. Escribimos el argumento de la función respuesta en frecuencia como $e^{j\omega}$ solo para diferenciar esta función de la respuesta en frecuencia de un sistema LTI continuo, $H(j\omega)$.

Vemos que como en el caso continuo, *el sistema LTI tiene como respuesta una señal exponencial compleja de la misma frecuencia que la de entrada y cuya amplitud se encuentra multiplicada por la función respuesta en frecuencia evaluada a la frecuencia de la señal de entrada*. Este factor que multiplica la amplitud de la señal es un número complejo (en general su parte imaginaria no es nula).

A partir de la definición de la respuesta en frecuencia (ec. 4) podemos ver que $H(e^{j\omega})$ ***es una función continua de la frecuencia*** $\omega$ ***y que es periódica de periodo*** $2\pi$.

**Ejemplo N$^o$ 3.** Calculemos la respuesta en frecuencia del sistema LTI discreto cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Utilizando la expresión 4 calculamos $H(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

En la figura 2 se muestra el módulo y la fase de $H(e^{j\omega})$. Vemos que la respuesta en frecuencia es una función periódica de la frecuencia, de periodo $2\pi$.

Consideremos un sistema LTI discreto al que entra una señal periódica de frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/N >$, cuyo desarrollo en serie de Fourier es

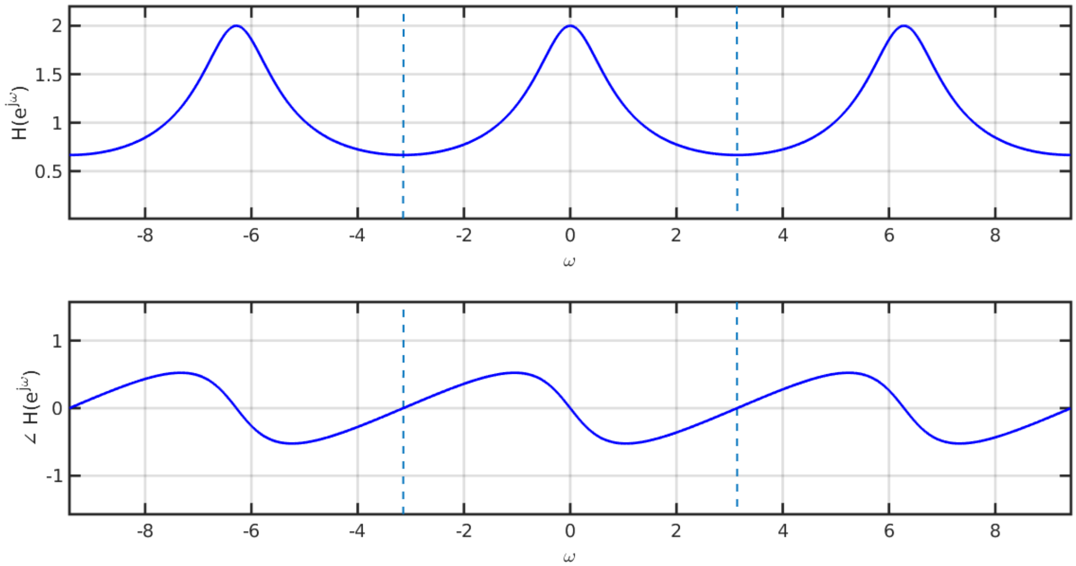


**Figura 2:** Figura del ejemplo 3.

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n},$$

dada la linealidad del sistema, la salida es también periódica, con el mismo desarrollo en serie de Fourier que la entrada salvo que los coeficientes espectrales de $y[n]$ son

$$\begin{aligned} y[n] &= T\{x[n]\} \\ &= T\left\{\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}\right\} \\ &= \sum_{k=<N>} a_k T\left\{e^{jk\omega_0 n}\right\} \end{aligned}$$

**Respuesta de un sistema LTI discreto a una señal periódica**

Utilizando la función respuesta en frecuencia para expresar la salida del sistema LTI a una señal exponencial discreta, podemos expresar la respuesta del sistema LTI discreto a la señal periódica como

$$y[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, H(e^{jk\omega_0}) \, e^{jk\omega_0 n}. \tag{5}$$

Vemos que la respuesta del sistema es una señal periódica con la misma frecuencia fundamental que la señal de entrada ($\omega_0$). La respuesta del sistema queda expresada como una combinación de exponenciales complejas, es decir una serie de Fourier, en la que cada coeficiente espectral de $y[n]$ es el producto $a_k \, H(e^{jk\omega_0})$. *El efecto del sistema LTI es modificar individualmente cada una de los coeficientes espectrales $a_k$ de la señal de entrada periódica, multiplicándolo por el valor de la función respuesta en frecuencia evaluada en la frecuencia $k\omega_0$.*

**Ejemplo N$^o$ 4.** Utilicemos la expresión 5 para hallar la respuesta del sistema descripto en el ejemplo 3, a la señal periódica

$$x[n] = cos\,(2\pi/3\,n) + sen\,(2\pi/4\,n)$$

Esta señal está formada por la suma de dos señales armónicas de periodos $N_1 = 3$ y $N_2 = 4$, por lo que el periodo de $x[n]$ es $N = 12$ y su frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/12$. La serie de Fourier de $x[n]$ está expresada por

$$x[n] = \sum_{k=0}^{11} a_k\, e^{j\,k\,2\pi/12\,n}$$

Para hallar los coeficientes espectrales de $x[n]$ expresamos la señal utilizando la identidad de Euler,

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2}e^{j\,2\pi/3\,n} + \frac{1}{2}e^{-j\,2\pi/3\,n} + \frac{1}{2j}e^{j\,2\pi/4\,n} + \frac{1}{2j}e^{-j\,2\pi/4\,n} \\ &= \frac{1}{2}e^{j\,4\,2\pi/12\,n} + \frac{1}{2}e^{-j\,4\,2\pi/12\,n} + \frac{1}{2j}e^{j\,3\,2\pi/12\,n} + \frac{1}{2j}e^{-j\,3\,2\pi/12\,n} \end{aligned}$$

La última expresión nos permite identificar los coeficientes espectrales,

$$\begin{aligned} &a_4 = 1/2, \quad a_{-4} = a_8 = 1/2, \quad a_3 = -j/2, \quad a_{-3} = a_9 = j/2, \\ &a_k = 0 \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, 2, 5, 6, 7. \end{aligned}$$

Utilizando la expresión 5, encontramos que la respuesta del sistema es

$$\begin{aligned} y[n] = &\frac{1}{2}H(e^{j\omega})\,|_{\omega=2\pi/3}\; e^{j2\pi/3n} + \frac{1}{2}H(e^{j\omega})\,|_{\omega=-2\pi/3}\; e^{-j2\pi/3n} \\ &- \frac{j}{2}H(e^{j\omega})\,|_{\omega=2\pi/4}\; e^{j2\pi/4n} + \frac{j}{2}H(e^{j\omega})\,|_{\omega=-2\pi/4}\; e^{-j2\pi/4n} \end{aligned}$$

Evaluando la respuesta en frecuencia a la frecuencia de cada componente, finalmente obtenemos la señal de salida,

$$\begin{aligned} y[n] = &\frac{1}{2}(0{,}71 - 0{,}25j)e^{j2\pi/3n} + \frac{1}{2}(0{,}71 + 0{,}25j)e^{-j2\pi/3n} \\ &- \frac{j}{2}(0{,}80 - 0{,}40j)e^{j2\pi/4n} + \frac{j}{2}(0{,}80 + 0{,}40j)e^{-j2\pi/4n} \end{aligned}$$

El siguiente es un ejemplo de código de Matlab/Octave que nos permite evaluar la $H(e^{j\omega})$ a las frecuencias de las componentes.

```
clear all, close all, clc;

w=[2*pi/3,-2*pi/3,2*pi/4,-2*pi/4];
H=zeros(size(w));
H=1./(1-1/2*exp(-j*w));
output_precision(2);
H
```

# 4. La transformada de Fourier en tiempo discreto

Un razonamiento análogo al que nos permitió obtener la transformada de Fourier de una señal continua no periódica a partir de la serie de Fourier, puede realizarse para una señal discreta no periódica. Describimos una señal discreta no periódica $x[n]$ mediante su «extensión periódica» $x_p[n]$ y luego tomamos el límite $N \to \infty$ en la serie de Fourier discreta de $x_p[n]$. Obtenemos la expresión de $x[n]$ como combinación de señales exponenciales complejas, que constituye la ecuación de síntesis del par transformada de Fourier en tiempo discreto.

**Transformada de Fourier en tiempo discreto**

La transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal $x[n]$ se define mediante la expresión:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{6}$$

La correspondiente transformada inversa se define mediante la expresión:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \tag{7}$$

Las ecuaciones (7) y (6) son la versión para señales discretas de las transformada de Fourier para señales continuas vista en el tema anterior, ambas constituyen la definición del par transformada de Fourier en tiempo discreto.

La expresión de la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ (ec. 6) es *la ecuación de análisis* y denotamos el operador que describe su expresión como $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$.

A diferencia del caso continuo, $X(e^{j\omega})$ está definida por una suma dada la naturaleza discreta de la señal $x[n]$. Mientras si comparamos $X(e^{j\omega})$ con la expresión de los coeficientes espectrales de la serie de Fourier en tiempo discreto (ec. 2), vemos que en este caso la suma se extiende sobre los infinitos valores de $n$.

***La transformada de Fourier en tiempo discreto*** $X(e^{j\omega})$ ***es una función continua de la frecuencia*** $\omega$. Tengamos en cuenta que la variable independiente en la expresión de la transformada de Fourier en tiempo discreto es estrictamente la frecuencia $\omega$, figura como su argumento $e^{j\omega}$ sólo por una cuestión relacionada con la notación para diferenciarla de la transformada de Fourier en tiempo continuo.

***La función*** $X(e^{j\omega})$ ***es periódica de periodo*** $2\pi$. Podemos ver esto a partir de su definición (ec. 6) y teniendo en cuenta que $e^{j\omega n}$ es una función periódica en la variable $\omega$ con dicho periodo.

La expresión 7 es la *transformada de Fourier inversa* o *ecuación de síntesis*, denotamos su operator como $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$.

***La transformada de Fourier inversa expresa a la señal*** $x[n]$ ***como una combinación lineal de exponenciales complejas o modos de Fourier infinitesimalmente separados en frecuencia***. Si comparamos esta expresión con la ecuación de síntesis de la serie de Fourier en tiempo discreto, donde la integral se extiende en el intervalo $(-\infty, \infty)$, vemos que en este caso se integra, ***sumando señales exponenciales complejas en cualquier intervalo continuo de frecuencias de extensión*** $2\pi$. Esto se debe a que el integrando es periódico: las exponenciales complejas discretas que difieren en frecuencia en un múltiplo entero de $2\pi$ son idénticas y $X(e^{j\omega})$ es una función periódica de periodo $2\pi$.

El cociente $X(e^{j\omega})d\omega/(2\pi)$ nos indica la magnitud con que el modo de Fourier de frecuencia $\omega$ interviene en la formación de $x[n]$, es decir, $X(e^{j\omega})$ describe a la señal no periódica $x[n]$ en el dominio de la frecuencia. Al igual que en el caso continuo se hace referencia a la función $X(e^{j\omega})$ como el *espectro* de $x[n]$.

Si bien no existen condiciones de convergencia especiales para la ecuación que define la antitransformada (ec. 7) ya que la integración se realiza sobre un intevalo finito, sí existen para la suma infinita que define la transformada (ec. 6).

**Condiciones de convergencia**

Como en el caso de señales continuas, dos condiciones suficientes y alternativas que aseguran la existencia de la transformada $X(e^{j\omega})$ son:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{8}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \tag{9}$$

La última de estas expresiones se cumple si la señal es una señal de energía.

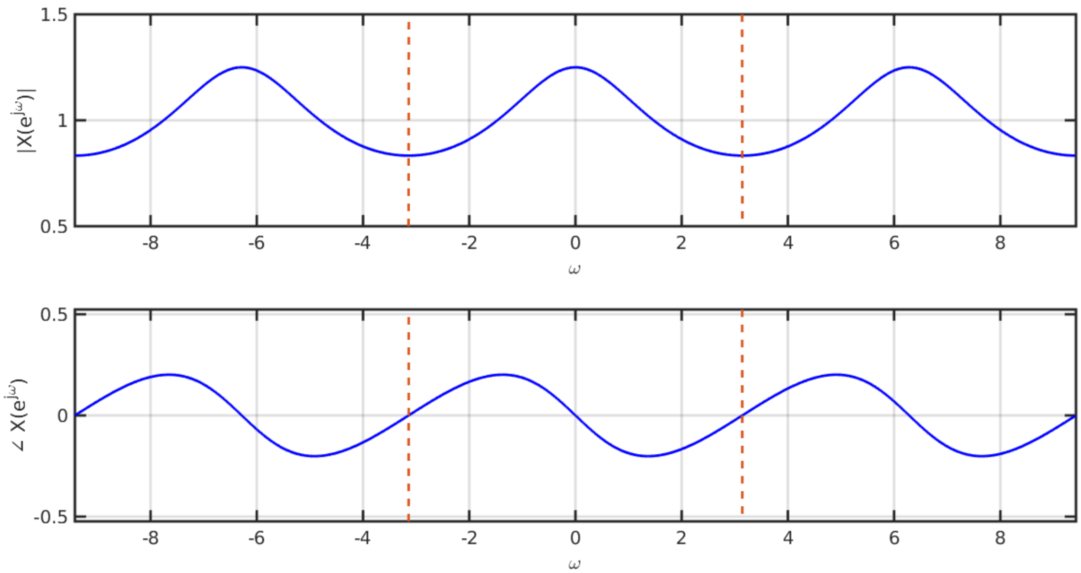


**Figura 3:** Transformada en tiempo discreto de la señal del ejemplo 5 con a=1/5. Con líneas punteadas se marca el intervalo $-\pi < \omega < \pi$s.

**Ejemplo N$^o$ 5.** Consideremos la señal

$$x[n] = a^n u[n]$$

En este caso

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a e^{-j\omega}\right]^n \\
&= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}
\end{aligned}
$$

El espectro de amplitud y fase se muestran en la figuras 3 y 4, para $a > 0$ y para $a < 0$ respectivamente. Observe que los espectros de magnitud y fase son periódicos con periodo $2\pi$ y cómo difieren según el signo de $a$. Cuando $a$ es positivo, predominan componentes de baja frecuencia. Mientras que cuando $a$ es negativo predominan componentes de alta frecuencia (cercanas a valores $\omega = \pm\pi$).

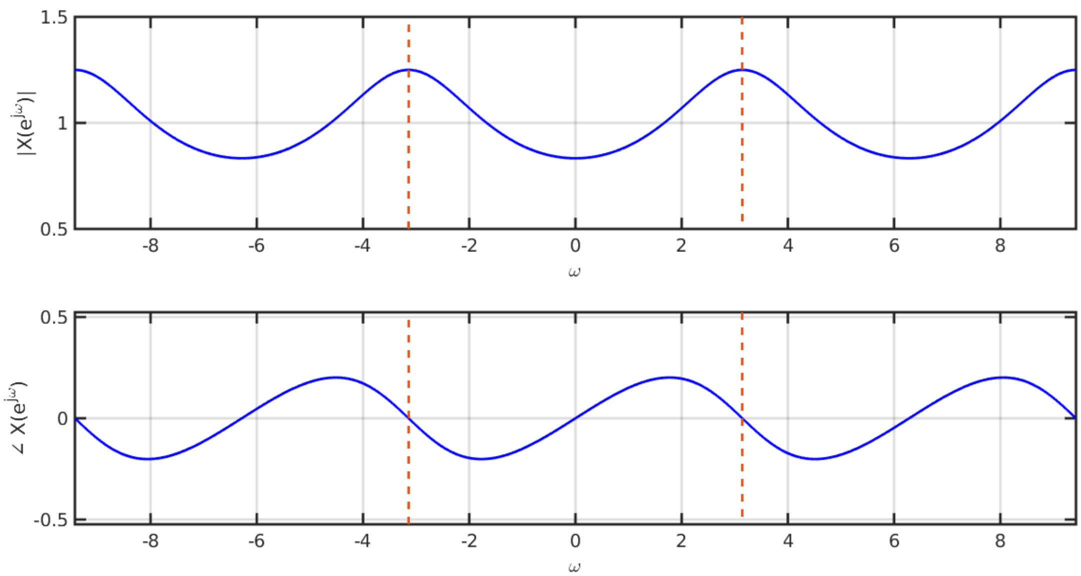


**Figura 4:** Transformada en tiempo discreto de la señal del ejemplo 5, con a=-1/2. Con líneas punteadas se marca el intervalo $-\pi < \omega < \pi$.

**Ejemplo N$^o$ 6.** Obtengamos la transformada de la señal

$$x[n] = a^{|n|}$$

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a e^{-j\omega}\right]^n + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a e^{j\omega}\right]^m \\
&= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} + \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} \\
&= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\, cos(\omega) + a^2}
\end{aligned}
$$

Observe que en este caso $X(e^{j\omega})$ es real. La representación de la señal y su espectro se muestran en la figura 5.

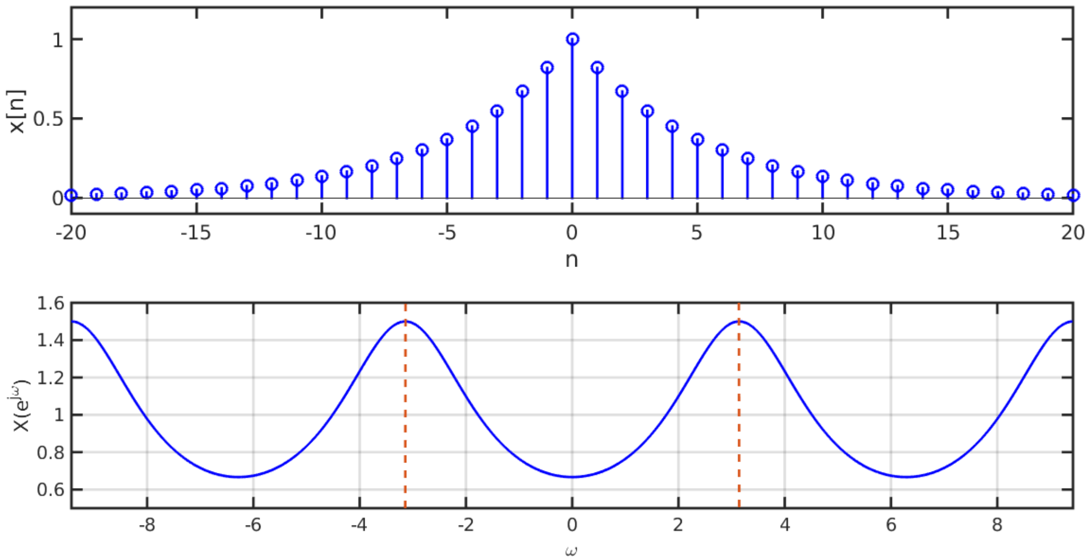


**Figura 5:** Transformada en tiempo discreto de la señal del ejemplo 6.
Con líneas punteadas se marca el intervalo $-\pi < \omega < \pi$.

**Ejemplo N$^o$ 7.** Obtengamos la transformada del pulso discreto definido por $p[n] = 1$ para $|n| \leq N_1$ y $p[n] = 0$ para $|n| > N_1$.

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{sen\left(\omega\left[N_1 + \frac{1}{2}\right]\right)}{sen(\omega/2)} \end{aligned}$$

Esta transformada de Fourier se muestra en la figura 6 para distintos valores de la duración del pulso, sólo se muestra la transformada en el intervalo $[-\pi, \pi)$. La función representada es la versión en tiempo discreto de la función seno cardinal, la cual representa la transformada de Fourier de un pulso continuo. En este caso la función es periódica de periodo $2\pi$, mientras que en el caso continuo la función seno cardinal no es periódica.

# 5. La transformada de Fourier para señales discretas periódicas

De la misma manera que el caso continuo, las señales discretas periódicas pueden incorporarse dentro del marco de descripción de la Transformada de Fourier en tiempo discreto. Para obtener la forma de la representación de una señal periódica, consideremos primero la transformada que consiste en el tren de impulsos periódico en frecuencias,

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + k2\pi).$$

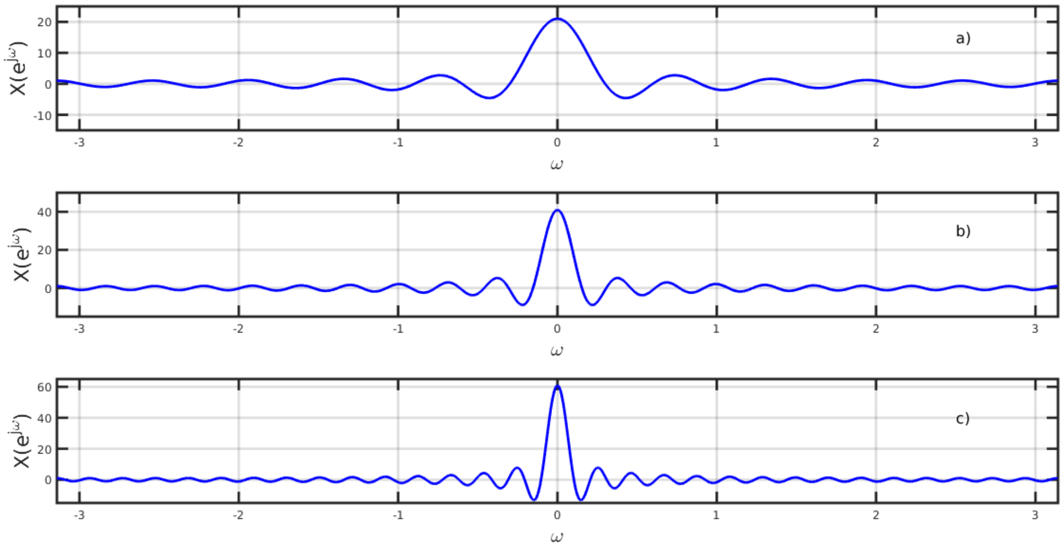


**Figura 6:** Transformada pulso cuadrado discreto definido en el ejemplo 7, para $N_1 = 10$ (a), $N_1 = 20$ (b) y $N_1 = 30$ (c).

Utilizando la ecuación de síntesis o transformada inversa (ec. 7) calculemos la señal asociada.

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+k2\pi)\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= e^{j\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

Observemos que en la segunda línea del cálculo, hemos fijado como intervalo de integración $(-\pi,\pi)$ y luego hemos utilizado la propiedad de selección del impulso. Con este cálculo hemos hallado el par transformada

**Transformada de la señal exponencial discreta**

$$
e^{j\omega_0 n} \quad \leftarrow \quad \mathcal{F} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+k2\pi)
$$

En el caso continuo, la transformada de una señal exponencial compleja es un impulso en frecuencias $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$. En el caso discreto, la transformada de $e^{j\omega_0 n}$ es un tren de impulsos ubicados a frecuencias múltiplos de $\omega_0$, $\omega = \omega_0 + 2\pi k$. $X(e^{j\omega})$ es una función periódica de periodo $2\pi$, tal como lo deben ser todas las transformadas de Fourier en tiempo discreto.

Utilizando la propiedad de linealidad del operador transformada, podemos obtener que en el caso de una secuencia periódica de periodo $N$ y cuyos coeficientes espectrales son $a_k$ con $k =< N >$, la transformada de Fourier es el tren de impulsos en frecuencias

**Transformada de una señal períodica discreta**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \tag{10}$$

**Ejemplo N$^o$ 8.** Consideremos la señal discreta armónica

$$x(t) = cos(2\pi/5n) = \frac{1}{2}e^{j2\pi/5n} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi/5n}$$

podemos identificar los coeficientes espectrales $a_1 = 1/2$ y $a_{-1} = 1/2$, siendo el periodo $N = 5$. A partir de la transformada de una señal exponencial compleja, podemos obtener la transformada para esta señal

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi/5 - 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi/5 - 2\pi k)$$

Está transformada puede especificarse solo en el rango $-\pi < \omega < \pi$ como

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - 2\pi/5) + \pi\delta(\omega + 2\pi/5),$$

teniendo siempre presente que $X(e^{j\omega})$ es una función periodica con periodo $2\pi$.

# 6. Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto

Existen varias propiedades de la transformada discreta que nos ayudan a comprender sus características en un caso concreto y pueden ser útiles al momento de tener que evaluar la transformada de una señal o su transformada inversa. Muchas tienen una gran similitud con su contraparte continua, por lo cual solo desarrollamos aquí las que tienen algún tipo de diferencia, necesitan alguna explicación en particular o aquellas propiedades que son propias de la transformada de Fourier en tiempo discreto. La tabla **??** resume las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

## 6.1. Acumulación

La versión para señales discretas de la propiedad de integración de la transformada continua es la propiedad de acumulación.

**Propiedad de acumulación**

La transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

es

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi k)$$

Compare está propiedad con la propiedad de integración en el caso continuo.

**Ejemplo N$^o$ 9.** Apliquemos la propiedad de acumulación para obtener la transformada de la función escalón discreta $u[n]$. Ya que

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

y que $\mathcal{F}\{\delta[n]\} = 1$, la transformada de $u[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi k)$$

## 6.2. Expansión en el tiempo

En el caso continuo la propiedad de expansión en el tiempo de la transformada establece que

$$x(at) \quad \leftarrow\mathcal{F}\rightarrow \quad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

La propiedad nos indica cómo se comporta la transformada frente a una expansión en el tiempo de la señal ($|a| < 1$) o frente a una compresión temporal ($|a| > 1$). Si quisieramos trasladar esta propiedad en forma directa al caso discreto, nos encontramos con una dificultad, la señal $x[an]$ puede tener un argumento no entero para $|a| < 1$, por lo que no es una señal discreta. Por otro lado la señal $x[2n]$ es solamente la evaluación de $x[n]$ en los valores pares de la variable temporal discreta $n$, lo cual no tiene ninguna relación con una expansión o compresión de la señal en el tiempo.

Existe una operación de algún modo análoga a la compresión/expansión temporal de la señal en el campo continuo. Consideremos la siguiente señal

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{si n es múltiplo de m, } n = km \\ 0, & \text{si n no es múltiplo de m, } n \neq km \end{cases}$$

con $k$ entero. En la figura 7 se muestra una secuencia $x[n]$ y su señal $x_{(3)}[n]$ asociada. Observe que podemos decir que $x_{(m)}[n]$ se obtiene a partir de $x[n]$ colocando $m-1$ ceros entre valores sucesivos de la señal original. Podemos pensar $x_{(m)}[n]$ como una expansión o desaceleración de la señal original.

Considerando la definición de $x_{(m)}[n]$ es posible demostrar la siguiente propiedad de la transformada.

**Expansión en el tiempo**

$$x_{(m)}[n] \quad \leftarrow\mathcal{F}\rightarrow \quad X\left(e^{jm\omega}\right)$$

Podemos ver en esta propiedad la relación inversa entre el dominio del tiempo y la frecuencia: si la señal se expande en el tiempo ($m > 1$), la transformada $X(e^{jm\omega})$ se comprime en frecuencias. En

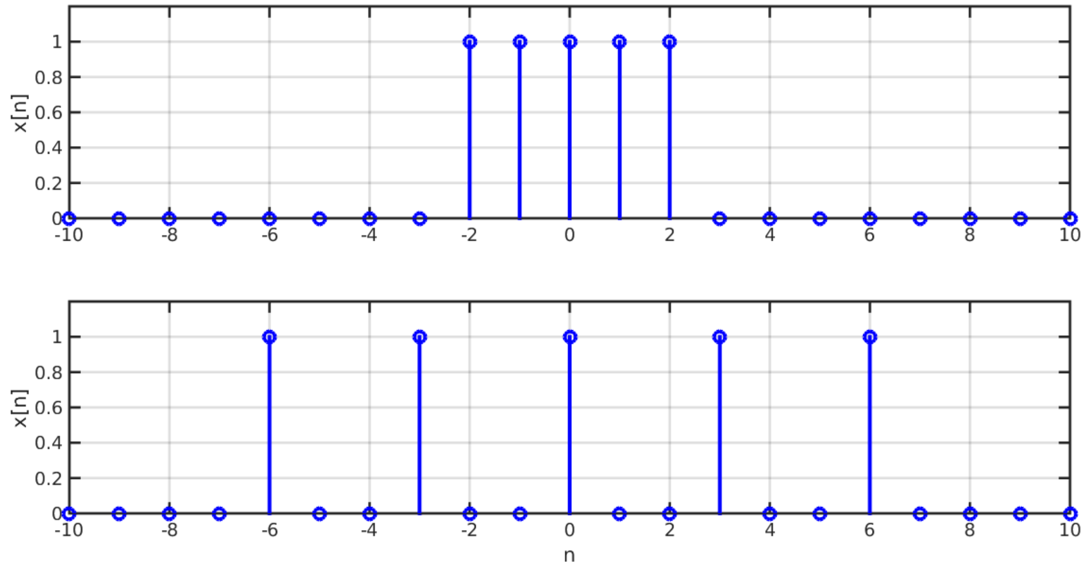


**Figura 7:** Señal obtenida a partir de una expansión temporal en tiempo discreto $x_3[n]$.

las figura 8 se ilustra esta relación inversa considerando los efectos que la expansión discreta tiene sobre el espectro de amplitud de un pulso cuadrado discreto. Observemos que $X(e^{jm\omega})$ es periódica con periodo $2\pi/m$.

**Ejemplo N$^o$ 10.** Veamos un ejemplo de cómo podemos utilizar las propiedades listadas en la tabla de propiedades (tabla **??**) para decidir sobre las características de una señal a partir de un análisis de su espectro.

Considere la señal $x[n]$ cuya transformada de Fourier se muestra en la figura 9. Veamos si a partir de las características de su transformada podemos decidir si la señal es real, es o no es periódica, es o no par y si es una señal de energía finita.

La transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de impulsos en frecuencia, por lo que por simple inspección de $X\left(e^{j\omega}\right)$ podemos concluir que $x[n]$ es aperiódica.

$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ es una función par y $\angle X(e^{j\omega})$ es una función impar, por tanto podemos asegurar que $x[n]$ es real.

$X\left(e^{j\omega}\right)$ no es real por tanto $x[n]$ no es par.

Utilizando la identidad de Parseval podemos asegurar que $x[n]$ es una señal de energía finita ya que la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

posee un valor finito.

## 6.3. Propiedad de convolución

En el caso de la transformada de Fourier continua vimos como la propiedad de convolución establece que la convolución de dos señales en el dominio del tiempo equivale a la multiplicación de sus espectros en el dominio de la frecuencia. También indicamos la importancia de esta propiedad para caracterizar sistemas LTI a través de su función respuesta en frecuencias $H(j\omega)$. En el caso de sistemas y señales discretos la propiedad es totalmente análoga.

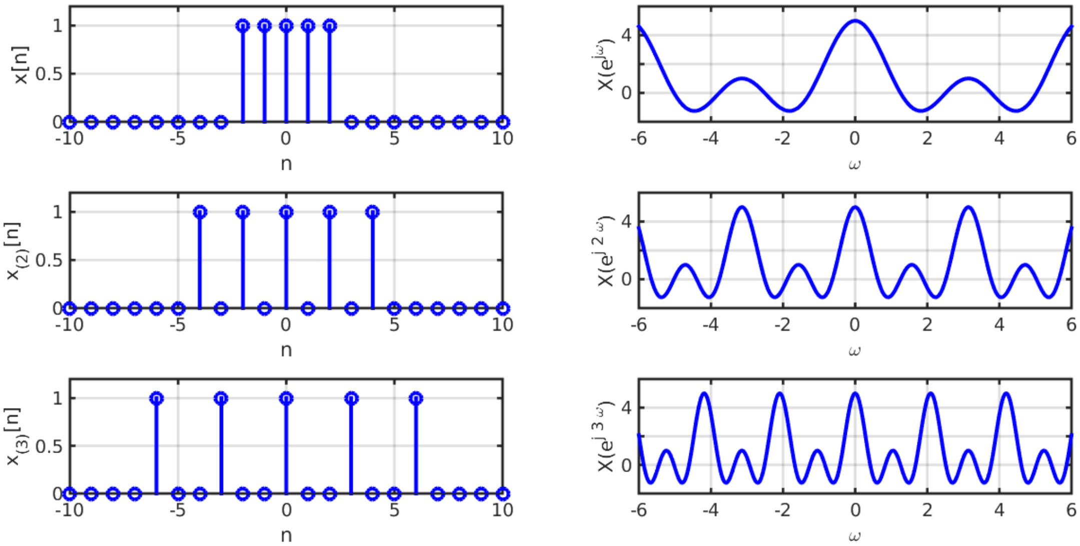


**Figura 8:** Propiedad de expansión temporal en tiempo discreto.

**Propiedad de convolución**

$$x_1[n] * x_2[n] \ \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \ X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}). \tag{11}$$

Si $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$ son la entrada, la respuesta al impulso y la respuesta de un sistema LTI discreto, aplicando esta propiedad obtenemos

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \tag{12}$$

donde la función $H(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de la función respuesta al impulso. Vemos que la *función respuesta en frecuencia* que hemos introducido al tratar la respuesta de sistemas LTI a señales periódicas (ec. 4) es la transformada de Fourier en tiempo discreto de la respuesta al impulso del sistema LTI,

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{h[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}.$$

Al igual que en el caso continuo, la expresión 12 mapea la convolución de dos señales en el dominio del tiempo a la simple operación algebraica de multiplicar sus transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia. Esto posee gran utilidad tanto para caracterizar sistemas LTI discretos como para el análisis de señales.

**Ejemplo N$^o$ 11.** Considere la función respuesta en frecuencia del filtro discreto paso bajas representada en la figura 10 a. Obtengamos su respuesta al impulso mediante la transformada inversa de $H(e^{j\omega})$

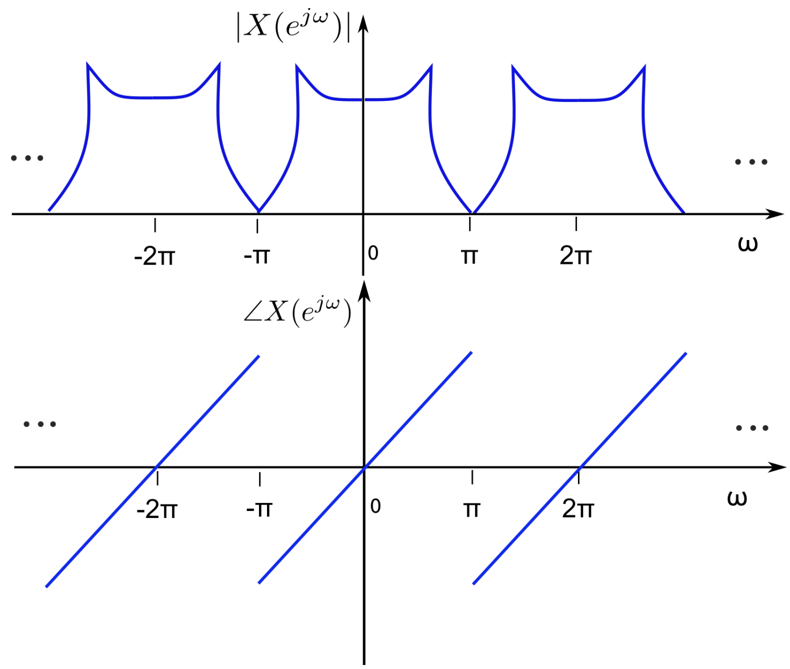


**Figura 9:** Espectro de una señal real (ejemplo 10).

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_c n}-e^{-j\omega_c n}}{jn} \\
&= \frac{sen(\omega_c n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

La respuesta al impulso $h[n]$ es un seno cardinal y se representa en la figura 10. Vemos a partir de las características de $h[n]$ que el sistema es no causal, esto es inconveniente en a una aplicación concreta que requiera procesar datos en tiempo real.

**Ejemplo N$^o$ 12.** Considere el sistema mostrado en la figura 11. Los sistemas LTI interconectados son filtros paso bajas con respuesta en frecuencias $H_{lp}(e^{j\omega})$ de ganancia unitaria y frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$. La respuesta $y[n]$ del sistema puede obtenerse siguiendo la siguiente secuencia de transformaciones de la señal de entrada.

$$w_1[n] = e^{j\pi n}x[n] \;\rightarrow\; W_1\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

$$w_2[n] = w_1[n] * h[n] \;\rightarrow\; W_2\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}(e^{j\omega})X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

$$w_3[n] = e^{j\pi n}w_2[n] \;\rightarrow W_3\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

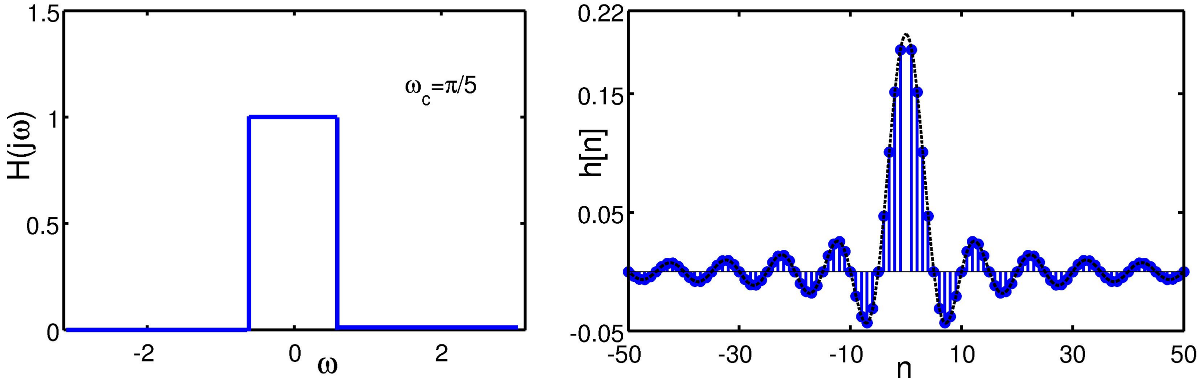


**Figura 10:** Respuesta en frecuencia (a) y respuesta al impulso (b) de un filtro pasa bajos discreto para $\omega_c = \pi/5$. Con color rojo se grafica la envolvente de $h[n]$.

$$w_4[n] = w_3[n] * h[n] \rightarrow W_4\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$Y(j\omega) = \left[H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) + H_{lp}\left(e^{j\omega}\right)\right] X\left(e^{j\omega}\right)$$

La respuesta en frecuencias equivalente del sistema completo es

$$H_{eq}\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) + H_{lp}\left(e^{j\omega}\right)$$

Ya que $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ es la respuesta en frecuencias de un filtro paso altas, el sistema total actua como un filtro que rechaza las frecuencias en los intervalos $(-3\pi/4, -\pi/4)$ y $(\pi/4, 3\pi/4)$, el filtro tiene lo que se conoce como *característica ideal supresora de banda*.

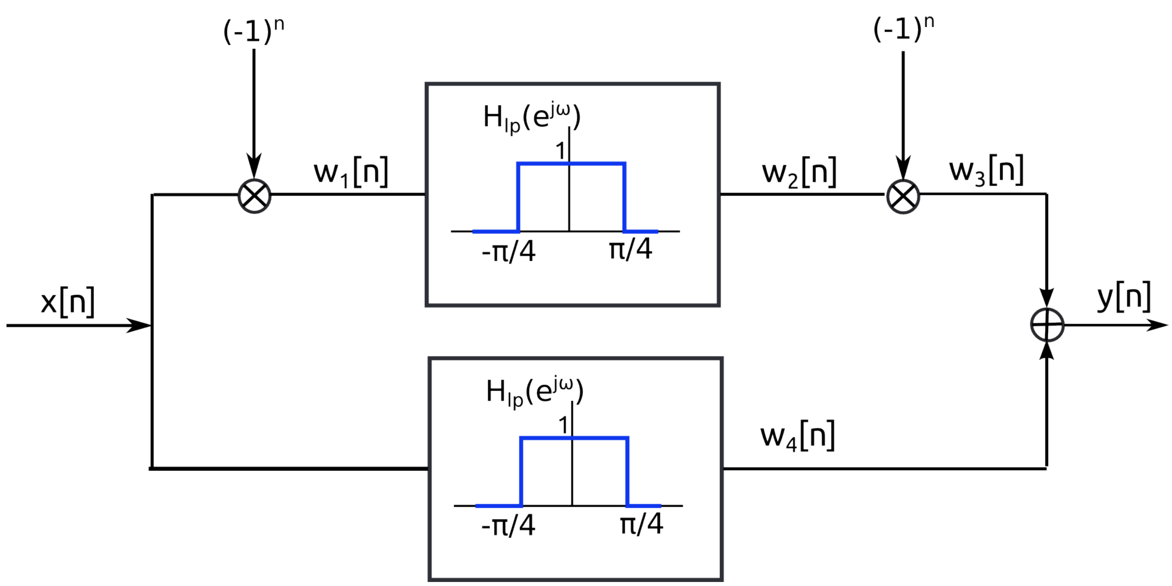


**Figura 11:** Filtro supresor de banda discreto descripto en el ejemplo **??**.

Si observamos las condiciones de convergencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto (ec. 8 y 9), vemos que para que para poder asegurar que existe la función respuesta en frecuencia de un sistema, $H\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\left\{h[n]\right\}$, es condición suficiente que su respuesta al impulso cumpla

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

Al igual que en el caso continuo, podemos asegurar que si el sistema es BIBO estable, su función respuesta al impulso es absolutamente sumable. Por tanto, la función respuesta en frecuencia siempre existe para sistemas BIBO estables.

## 6.4. Propiedad de multiplicación

En el tema anterior vimos que la transformada de Fourier continua de la multiplicación de dos señales es equivalente a la convolución en el dominio de la frecuencia de sus respectivos espectros. Además hicimos notar que esta propiedad tiene gran importancia en sistemas de comunicación ya que mediante la multiplicación de una señal por otra podemos efectuar la denominada *modulación de amplitud* de una señal. En el campo discreto existe una propiedad similar.

**Propiedad de multiplicación**

$$x_1[n]x_2[n] \quad \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \quad \frac{1}{2\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right) \otimes X_2\left(e^{j\omega}\right) \tag{13}$$

donde la operación $\otimes$ se denomina *convolución periódica* y se define mediante la siguiente expresión:

$$X_1\left(e^{j\omega}\right) \otimes X_2\left(e^{j\omega}\right) \equiv \int_{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right) X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$

A diferencia de operación convolución, en la convolución periódica la integral se evalúa en un intervalo finito, de longitud $2\pi$. La forma usual de la convolución, cuyo intervalo de integración es $(-\infty, \infty)$ se conoce a menudo como *convolución aperiódica* para distinguirla de la convolución periódica.

**Ejemplo N$^o$ 13.** Consideremos la señal $s[n]$ de banda limitada y obtengamos la transformada de la señal $r[n] = s[n]\cos[n]$.

$$r[n] = s[n]p[n] \leftarrow F \rightarrow R\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} S\left(e^{j\omega}\right) \otimes P\left(e^{j\omega}\right)$$

La transformada de $p[n]$ es

$$P\left(e^{j\omega}\right) = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\delta(\omega - \omega_0 + m2\pi) + \delta(\omega + \omega_0 + m2\pi)\right)$$

Para obtener la transformada de $r[n]$, debemos realizar la convolución periódica

$$
\begin{aligned}
R\left(e^{j\omega}\right) =& \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\omega-\omega_0-m2\pi)+\delta(\omega+\omega_0-m2\pi)\right)\otimes S\left(e^{j\omega}\right)\\
=&\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\theta-\omega_0-2\pi m)+\delta(\theta+\omega_0-2\pi m)\right)\right)S\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta\\
=&\frac{1}{2}\left(S\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)+S\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Al igual que el caso continuo, la modulación mediante una señal senoidal produce una señal cuya transformada consiste en dos replicas de la transformada de $x[n]$, centradas en $-\omega_0$ y $\omega_0$.

# 7. Sistemas LTI causales caracterizados por ecuaciones en diferencias

Hemos visto que la relación entrada-salida de un sistema LTI discreto causal puede estar especificada por una ecuación en diferencias de la forma

$$
\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]
$$

donde el máximo tiempo de retardo del lazo de realimentación ($N$) es el orden de la ecuación y las condiciones iniciales deben ser todas nulas, es decir el sistema está en reposo inicial. En esta sección utilizaremos las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto para obtener la respuesta en frecuencias del sistema descripto por una ecuación en diferencias.

Si aplicamos a ambos miembros de la ecuación anterior la transformada de Fourier y utilizamos las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}\\
\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left\{y[n-k]\right\} &= \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left\{x[n-k]\right\}\\
\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X\left(e^{j\omega}\right).
\end{aligned}
$$

Ya que por la relación de convolución (ec. 12) para un sistema LTI discreto, la función respuesta en frecuencia del sistema es

$$
H\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\left\{h[n]\right\} = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)},
$$

podemos escribir

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}} \tag{14}$$

Vemos que a partir de esta expresión es posible obtener $H\left(e^{j\omega}\right)$ por simple inspección de la ecuación en diferencias que describe la relación entrada-salida de un sistema LTI discreto causal.

Si comparamos la última ecuación con la ecuación que da la respuesta en frecuencia de un LTI continuo en función de los coeficientes de la ecuación diferencial asociada, vemos que ***en el caso continuo la respuesta en frecuencia es el cociente de dos polinomios en la variable*** $(j\omega)$***, mientras que en el caso discreto estos polinomios están en términos de la variable*** $e^{-j\omega}$.

**Ejemplo N$^o$ 14.** Considere el sistema LTI causal cuya ecuación en diferencias es

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

Mediante la ecuación 14 podemos obtener la función respuesta en frecuencias del sistema

$$H(e^{j\omega})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}.$$

Las raíces del polinomio denominador son $\rho_1=2$ y $\rho_2=4$. Aplicando el método de expansión en fracciones parciales obtenemos

$$H(e^{j\omega})=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Podemos reconocer por inspección en una tabla de transformadas la transformada inversa de cada término, por lo que la respuesta al impulso es

$$h[n]=\mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\}=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

# 8. Apéndice I: el método de expansión en fracciones parciales aplicado a señales discretas

En el apéndice del tema anterior describimos el método de expansión en fracciones parciales. El método fue aplicado para obtener una expresión más simple de una función racional, con el objeto de hallar su transformada de Fourier por medio de una tabla de transformadas. En el caso discreto existe un método similar con la misma utilidad.

En el caso discreto necesitaremos antitransformar expresiones como la respuesta en frecuencias de un sistema discreto

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k (e^{-j\omega})^k}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k (e^{-j\omega})^k} \tag{15}$$

En la expresión anterior hemos reescrito la expresión 14 a fin de dejar en claro la respuesta en frecuencia es una transformada racional que consiste en el cociente de dos polinomios en la variable $e^{-j\omega}$. A fin de presentar el método de expansión de fracciones parciales en este caso, denominaremos $v$ a esta variable, $v = e^{-j\omega}$. La expresión de la transformada nos queda de esta forma

$$H(v) = \frac{b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + \quad ... \quad + b_M v^M}{a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \quad ... \quad + a_N v^N} \tag{16}$$

Usualmente el término $a_0$ es 1, si este no fuera el caso, dividimos el numerador y denominador por $a_0$ para obtener una expresión racional de la forma

$$G(v) = \frac{d_0 + d_1 v + d_2 v^2 + \quad ... \quad + d_M v^M}{1 + f_1 v + f_2 v^2 + \quad ... \quad + f_N v^N}$$

Esta es la forma en que aparecen normalmente las transformadas racionales de señales discretas que debemos antitransformar (ver ejemplo 14). En caso de que el grado del polinomio denominador sea mayor que el del numerador, $N > M$, la factorización de $G(v)$ puede escribirse como

$$G(v) = \frac{d_0 + d_1 v + d_2 v^2 + \quad ... \quad + d_M v^M}{(1 - \rho_1^{-1} v)^{\sigma_1} (1 - \rho_2^{-1} v)^{\sigma_2} ... (1 - \rho_r^{-1} v)^{\sigma_r}}.$$

Las $\rho_i$ son las raíces del polinomio denominador de $G(v)$ y los valores de $\sigma_i$, sus respectivas multiplicidades. La forma de la expansión en fracciones parciales que obtenemos para este caso es

$$R(v) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{B_{i,k}}{(1 - \rho_i^{-1})^k}. \tag{17}$$

Cada uno de los coeficientes $B_{i,k}$ pueden obtenerse mediante la siguiente expresión

$$B_{i,k} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} (-\rho_i)^{\sigma_i - k} \left[ \frac{d^{\sigma_i - k}}{dv^{\sigma_i - k}} [(1 - \rho_i^{-1})^{\sigma_i} \, R(v)] \right] \Bigg|_{v=\rho_i}$$

Usualmente utilizaremos un programa de cálculo para obtener la expansión en fracciones parciales, como por ejemplo Matlab. En caso de Matlab, la función que obtiene la expansión en fracciones parciales adaptada para antitransformar transformadas de Fourier en tiempo discreto es `residuez(b,a)`, donde $b$ es un el vector que contiene los coeficientes del polinomio numerador y $a$ es un el vector que contiene los coeficientes del polinomio denominador, ambos ordenados en orden creciente en las potencias de $v$ de acuerdo a las expresiones 15 y 16. Tenga en cuenta que estamos haciendo referencia a los polinomios escritos en función de la variable $v = e^{-j\omega}$. En el ejemplo que sigue se muestra un código en que se aplica esta función.

**Ejemplo N$^o$ 15.** Veamos un ejemplo de aplicación del método a la función $H(e^{j\omega})$ dada en el ejemplo 14. En este caso la tranformada racional es la respuesta en frecuencia

$$H(v) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{8}v^2}.$$

Hemos realizado el remplazo $v = e^{-j\omega}$. Las raíces del polinomio denoninador son $\rho_1 = 2$ y $\rho_2 = 4$. La expansión en fracciones parciales es

$$H(v) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{2}v} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{4}v}$$

Los valores de los coeficientes son

$$B_{11} = \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) R(v) \right] \Bigg|_{v=2} = 4$$

$$B_{21} = \left[ \left( 1 - \frac{1}{4} \right) R(v) \right] \Bigg|_{v=4} = -2$$

Por lo tanto

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

donde hemos remplazado $v = e^{-j\omega}$; esta expresión puede antitransformarse para obtener $h[n]$ utilizando la tabla de transformadas.

El código de Matlab para obtener la expansión en fracciones parciales se muestra a continuación.

```
b=[2]
a=[1 -3/4 1/8]
[r p k]=residuez(b,a)
```

El vector $r$ contiene los residuos, el vector $p$ los polos de la expresión 17 (es decir los valores de $p_i = \rho_i^{-1}$, $i = 1..r$) y $k$ los términos directos.