

Tema 3

Representación de señales y sistemas continuos en el dominio de la frecuencia: la Transformada de Fourier continua

Diego Leonardo Valladares
Dpto. de Física - Univ. Nac. de San Luis

20 de septiembre de 2023

En este tema tratamos la representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas continuos utilizando la representación de Fourier. Estudiamos la representación de señales no periódicas y la respuesta de sistemas LTI a este tipo de señales, mediante la Transformada de Fourier.

Índice

1. La Transformada de Fourier Continua	1
1.1. Interpretación de la Transformada de Fourier	5
1.2. Convergencia de la transformadas de Fourier	6
1.3. Algunos ejemplos de transformadas	7
2. Transformada de Fourier de señales periódicas	11
3. Propiedades de la Transformada de Fourier	13
3.1. Desplazamiento temporal y en frecuencias	14
3.2. Propiedad de conjugación	14
3.3. Propiedad de integración	15
4. La propiedad de convolución y la función respuesta en frecuencia	16
5. La propiedad de multiplicación y el transporte de señales	19
6. Sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales	24
7. Apéndice: el método de expansión en fracciones parciales	27

1. La Transformada de Fourier Continua

Hemos visto que una señal periódica continua de periodo T (frecuencia $\omega_0 = 2\pi/T$) puede descomponerse en exponenciales complejas mediante la serie de Fourier (reescribimos aquí las expresiones de la

ecuación de síntesis y análisis):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

Con la serie de Fourier hemos podido representar una señal periódica en el dominio de las frecuencias, esta representación toma su forma en el *espectro de una señal* a través de los coeficientes espectrales a_k . ¿Cómo podemos extender esta descripción al caso de una señal no periódica? Para responder, utilizaremos el siguiente procedimiento. Partiremos de la interpretación de una señal aperiódica como una señal periódica de periodo infinito ($T = \infty$). Teniendo esto presente, obtendremos la descripción en frecuencias de la señal aperiódica tomando el límite para $T \rightarrow \infty$, en la representación en frecuencias de una señal periódica (la serie de Fourier).

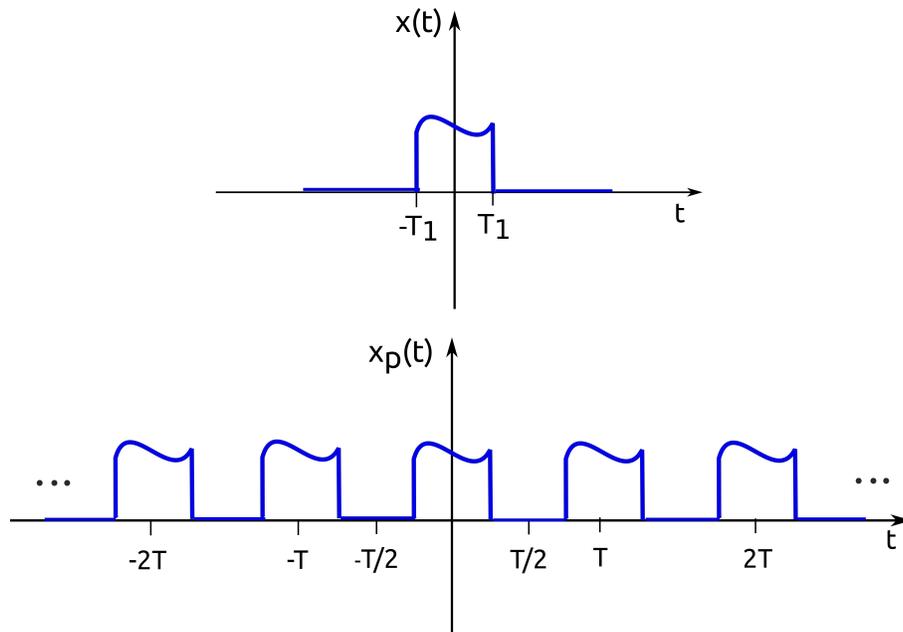


Figura 1: Señal no periódica $x(t)$ y señal periódica asociada $\tilde{x}(t)$

Consideremos una señal aperiódica $x(t)$ definida en el intervalo $[-T_1, T_1]$, es decir toma valores no nulos en ese intervalo y es 0 para $|t| > T_1$. Podemos definir la señal periódica asociada $\tilde{x}(t)$ repitiendo a $x(t)$ con un cierto periodo T ,

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2. \end{cases}$$

Esta definición se representa en la figura 1. Ya que $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica, podemos representarla mediante la serie de Fourier:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental de $\tilde{x}(t)$ y sus coeficientes espectrales están dados por

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \end{aligned}$$

Podemos pasar de la primera integral a la segunda, ya que en el intervalo definido por T , $x(t) = \tilde{x}(t)$. Definimos la función $X(j\omega)$ como

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Mediante la función $X(j\omega)$ podemos reescribir la ecuación de la serie de Fourier para $\tilde{x}(t)$ (ec. (3)) como:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

o lo que es lo mismo

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$

Interpretemos la sumatoria con ayuda de la gráfica mostrada en la figura 2. Podemos observar que estamos sumando áreas rectangulares de ancho ω_0 y alto $X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$, es decir cada término de la sumatoria es el área de un rectángulo.

Ahora transformemos la extensión periódica $\tilde{x}(t)$ en la señal aperiódica $x(t)$ tomando el límite $T \rightarrow \infty$, tengamos en cuenta que ya que $T = 2\pi/\omega_0$, esto es lo mismo que tomar el límite $\omega_0 \rightarrow 0$.

Si tomamos el límite $\omega_0 \rightarrow 0$ en la sumatoria de la última expresión, el miembro derecho de la igualdad $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ y en el miembro izquierdo, la suma se transforma en una integral, con lo que obtenemos la siguiente expresión.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Esta expresión es lo que buscábamos, la representación en el dominio de la frecuencia de la señal no periódica $x(t)$. Resumamos lo hallado en el siguiente cuadro y veamos luego su interpretación.

Transformada de Fourier continua

Definimos *Transformada de Fourier* o *Integral de Fourier* $X(j\omega)$ de una señal $x(t)$ mediante la expresión

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4)$$

y la *Transformada Inversa de Fourier* o *Antitransformada de Fourier* a

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (5)$$

Las expresiones 5 y 4 permiten realizar la representación de la señal aperiódica $x(t)$ en el dominio de las frecuencias. Ambas constituyen el par ecuación de síntesis y ecuación de análisis de una señal no periódica, con un significado análogo a las expresiones (1) y (2).

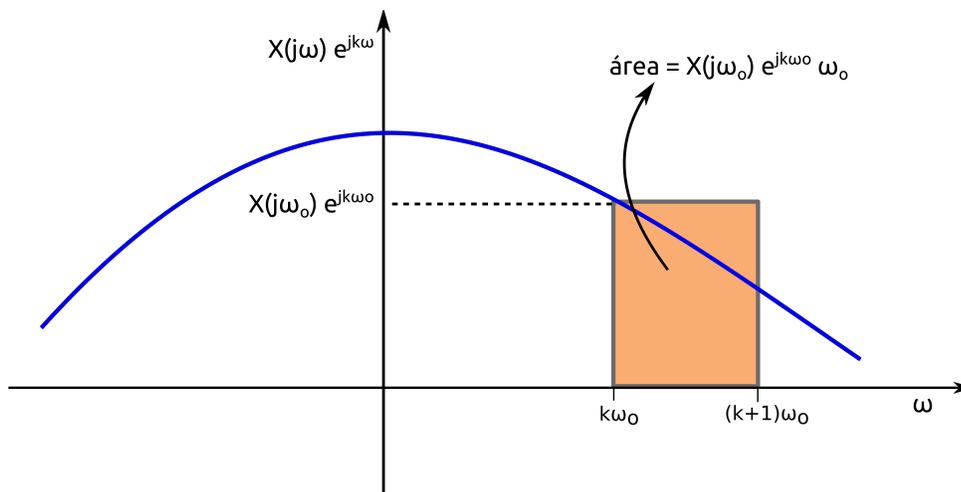


Figura 2: Transformación de la sumatoria en una integral (ver texto).

Tengamos en cuenta que la variable independiente en la expresión de la transformada de Fourier es estrictamente la frecuencia ω , sólo por una cuestión relacionada con la notación figura como argumento $j\omega$.

Vimos que para una señal periódica la expresión (2) da la amplitud a_k con que la exponencial compleja de frecuencia $k\omega_0$ interviene en la formación de la señal. Los coeficientes espectrales toman valores en el conjunto discreto de frecuencias $k\omega_0$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, por lo que en el caso de una señal periódica, obtenemos un espectro de líneas.

De manera análoga al caso de la serie de Fourier, mediante (5) representamos la señal $x(t)$ no periódica como combinación lineal de señales exponenciales complejas, la función $X(j\omega)/2\pi$ da el valor del «coeficiente espectral de la señal» a cada valor de ω ya que mide en que cantidad contribuye la exponencial compleja de frecuencia ω a la formación de la señal $x(t)$.

Espectro de la señal no periódica $x(t)$

El espectro de la señal no periódica está dado por $X(j\omega)$ y podemos obtenerlo mediante (4). La representación de la función $X(j\omega)$ vs. ω es la representación del espectro de la señal y es usual referirse a $X(j\omega)$ como *la descomposición en frecuencias* de $x(t)$. $X(j\omega)$ es en general un número complejo, por lo que la representación del espectro deberá hacerse tanto en amplitud como en fase. Ya que $X(j\omega)$ es función de la variable continua ω , a diferencia del espectro de una señal periódica, la representación espectral de una señal no periódica es un espectro continuo (función de variable independiente continua).

La operación «transformada de Fourier» de una señal está definida por la expresión (4) y la denotaremos mediante

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

o de manera alternativa, denotaremos el par señal-transformada mediante

$$x(t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow X(j\omega)$$

1.1. Interpretación de la Transformada de Fourier

Interpretamos el espectro dado por $X(j\omega)$ con ayuda de la expresión de la transformada inversa o ecuación de síntesis (5). Como dijimos el valor de $X(j\omega)$ mide el peso relativo que posee la componente de Fourier de frecuencia ω en la formación de la señal.

Podemos completar esta interpretación utilizando la denominada *Relación de Parseval*.

Relación de Parseval

La relación de Parseval para una señal no periódica expresa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (6)$$

El miembro izquierdo de la ecuación es la energía de la señal, por lo que la igualdad de Parseval nos permite calcular la energía de la señal mediante una integral en el campo de las frecuencias y lo que es más importante, posibilita interpretar la función

$$\rho(\omega) \equiv \frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi}$$

como una energía por unidad de frecuencia, es decir como la densidad de energía de la señal en el campo de las frecuencias. Por lo tanto, $\rho(\omega)d\omega$ da la energía de la señal concentrada en las componentes o modos de Fourier con frecuencias entre ω y $\omega + d\omega$, o en caso de un intervalo finito de frecuencias

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho(\omega)d\omega$$

da la energía de la señal concentrada en las componentes cuya frecuencia está entre ω_1 y ω_2 .

La interpretación de $\frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi}$ como una densidad de energía, motiva a que sea común utilizar una gráfica del espectro en la cual se representa $|X(j\omega)|^2$ vs. la frecuencia y se denomine este tipo de gráficas **espectro de energía** de la señal.

1.2. Convergencia de la transformadas de Fourier

Observemos que las ecuaciones (5) y (4) necesitan de condiciones de convergencia. Existen conjuntos de condiciones alternativas para la convergencia de la transformada de Fourier.

Si la señal $x(t)$ es una señal de energía (posee energía finita), se puede asegurar que $X(j\omega)$ existe (la ecuación 4 converge) y que la ecuación de síntesis converge a los valores de $x(t)$ para todo valor de t excepto en una discontinuidad, donde converge al valor promedio de los valores a ambos lados de la discontinuidad.

Además de la condición de convergencia anterior y de manera análoga al caso de la serie de Fourier para señales periódicas continuas, existen tres condiciones que de cumplirse (condiciones suficientes) aseguran que la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ existe, (condiciones de Dirichlet para señales no periódicas). Estas condiciones son:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty,$$

b) que $x(t)$ tenga un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito.

c) que $x(t)$ tenga un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito y que el valor de $x(t)$ en estas discontinuidades sea finito.

Enfaticemos el sentido de la implicaciones que hemos mencionado: si se cumplen las condiciones existe la transformada de Fourier de la señal y son válidas las ecuaciones (5) y (4). *Veremos que es posible y útil utilizar la representación de la transformada de Fourier para señales que no cumplen con las condiciones de convergencia, como por ejemplo señales periódicas o la señal escalón $u(t)$, si utilizamos funciones impulso $\delta(\omega)$ en la transformada.*

1.3. Algunos ejemplos de transformadas

Daremos en esta sección algunos ejemplos de transformadas que por sus características pueden obtenerse fácilmente a partir de la definición dada por la expresión 4 y que permiten remarcar algunos conceptos importantes.

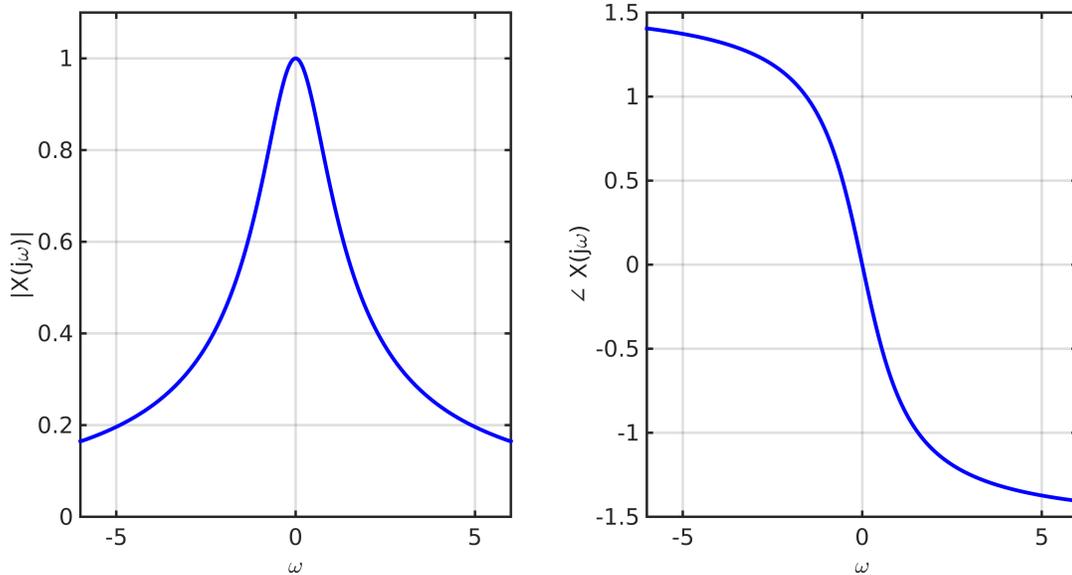


Figura 3: Transformada de Fourier de la señal del ejemplo 1 para $a = 1$.

Ejemplo N° 1. Calculemos la transformada de Fourier de la señal es $x(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$.

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} \quad a > 0.$$

Los espectros de amplitud y fase están dados por las funciones

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

y se hallan representados en la figura 3. Observe que la señal $x(t)$ es una función que a cada valor de t asigna un número real, mientras que su transformada es una función que asigna a cada valor de ω (número real), un número complejo.

Si interpretamos la transformada de la señal con la ecuación de síntesis (5) a partir de la gráfica de $X(j\omega)$, vemos que las componentes de Fourier ($e^{j\omega t}$) que poseen mayor peso relativo son las que tienen baja frecuencia, y que este peso disminuye a medida que la frecuencia se incrementa.

Ejemplo N° 2. Calculemos la transformada de Fourier de la señal $x(t) = e^{-a|t|}$ con $a > 0$.

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\
&= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

A diferencia del ejemplo 1, en este caso la transformada de Fourier es una función real. La señal y su transformada se representan en la figura 4. La distribución de peso de las componentes es similar al ejemplo 1, siendo dominantes las componentes de baja frecuencia.

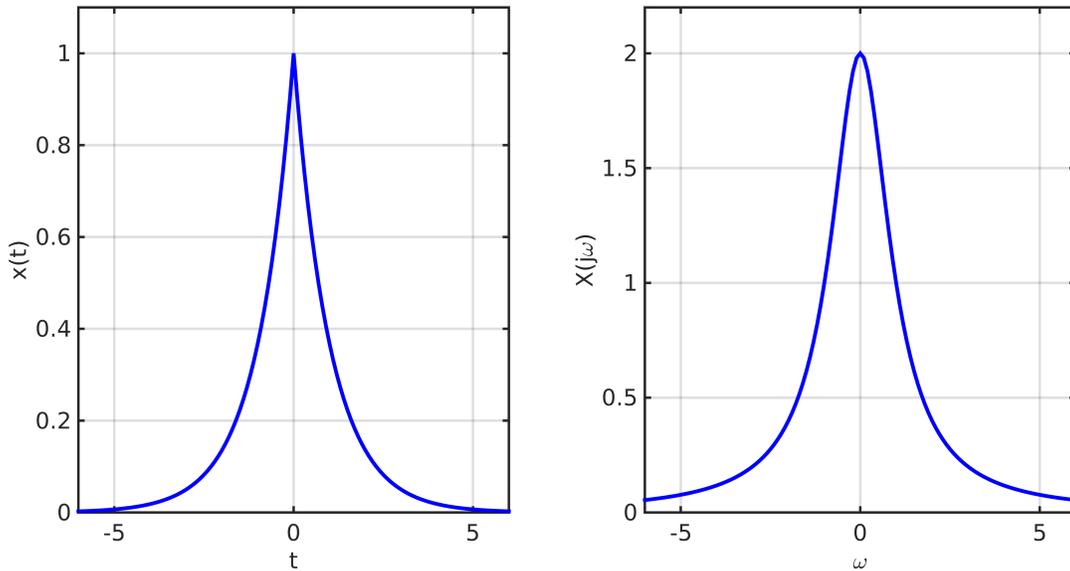


Figura 4: Transformada de Fourier de la señal del ejemplo 2 para $a=1.0$

Ejemplo N° 3. Calculemos la transformada de Fourier de la señal $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Observemos que la señal impulso $\delta(t)$ cumple con las condiciones de convergencia de la transformada de Fourier. Si observamos la expresión de la ecuación de síntesis o transformada inversa (expresión 5), podemos interpretar la transformada del impulso $\delta(t)$ diciendo que para “construir” el impulso intervienen exponenciales complejas de todas las frecuencias, combinadas con la misma ponderación $X(j\omega) = 1$.

Ejemplo N° 4. Calculemos la transformada de Fourier de la señal pulso definido por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

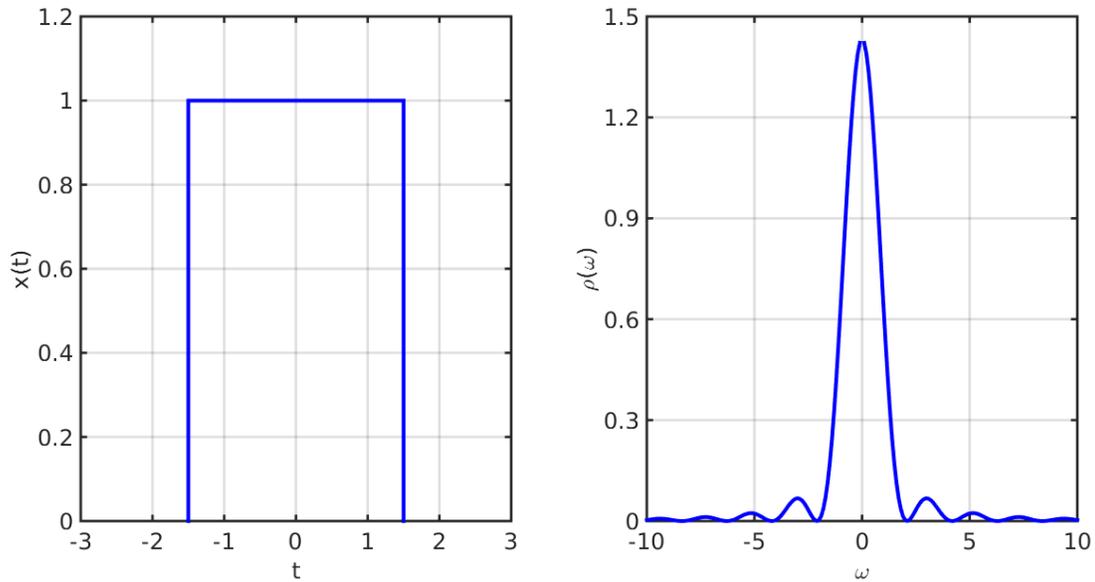


Figura 5: Señal y espectro de energía de correspondiente al ejemplo 4 para $T_1 = 1,5$.

Aplicando la expresión 4

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\text{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$

expresión válida para $\omega \neq 0$. Para $\omega = 0$, el cálculo da $X(j\omega) = 2T_1$, siendo $X(j\omega)$ una función continua en $\omega = 0$. La señal y su espectro de energía se representan en la figura 5. A partir de la gráfica del espectro de energía vemos que casi toda la energía de la señal está concentrada en las componentes de baja frecuencia dentro del *lóbulo central* de la transformada, esta es la zona en la gráfica de $\rho(\omega) = |X(j\omega)|^2/2\pi$ entre $\omega \in (-\pi/T_1, \pi/T_1)$.

Ejemplo N° 5. Consideremos la transformada definida por el pulso en frecuencias

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

y obtengamos su señal asociada. Utilizando la expresión 5

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t}$$

La señal y su transformada se representan en la figura 6, para $W = 5$. Vemos en este ejemplo otra propiedad importante de la transformada de Fourier. Al incrementar la extensión en frecuencias del pulso cuadrado en frecuencias (W en figura 6), disminuye la extensión en el tiempo del lóbulo central

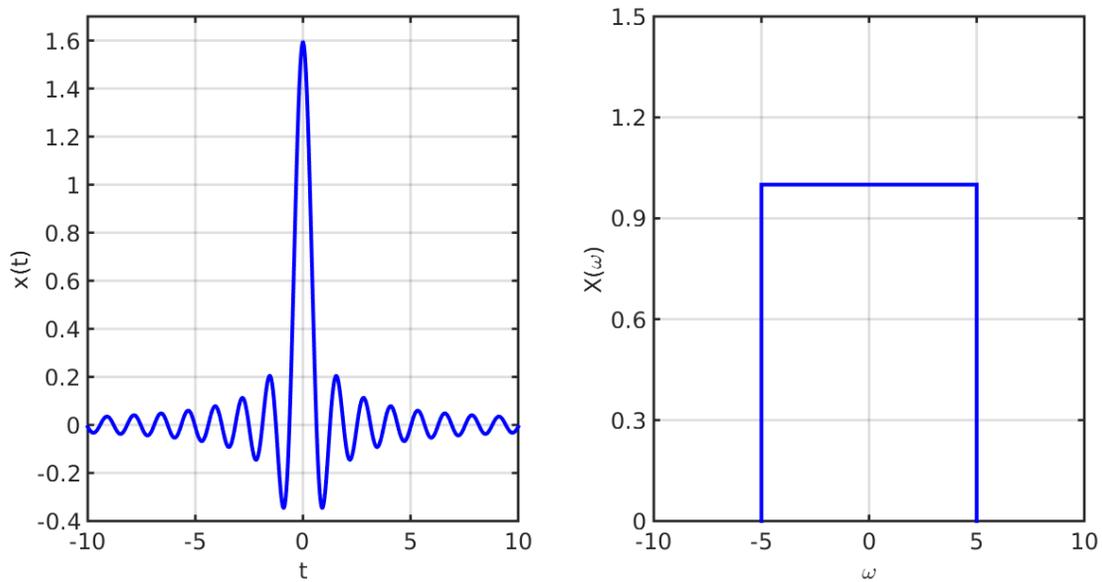


Figura 6: Transformada de Fourier de la señal del ejemplo 5 para $W = 5,0$.

de la señal $x(t)$ y aumenta el valor de su máximo en $t = 0$. Este es un ejemplo de la relación inversa que existe entre los dominios del tiempo y la frecuencia, cambios en un dominio producen cambios contrarios en el otro. En el límite $W \rightarrow \infty$, la señal $x(t)$ es el impulso $\delta(t)$.

Si comparamos los pares de transformadas de los ejemplos 4 y 5, vemos que ambos pares consisten en un pulso cuadrado y en una función de la forma $\text{sen}(a\theta)/b\theta$, pero que mientras en el ejemplo 4 la señal es el pulso cuadrado y la transformada es la función mencionada, en el ejemplo 5 se presenta la situación inversa. Esta simetría, entre los comportamientos de la señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia, es una propiedad importante de la transformada de Fourier que se denomina *dualidad*.

Muchas veces aparece en el cálculo de las transformadas la función *seno cardinal* definida por

$$\text{sinc}(\theta) \equiv \frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta}.$$

En la figura 7 se representa la función seno cardinal, observe que los ceros de la función se encuentran en $\theta = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Utilizando está función las transformadas de los ejemplos 4 y 5 se pueden expresar como

$$2 \frac{\text{sen}(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

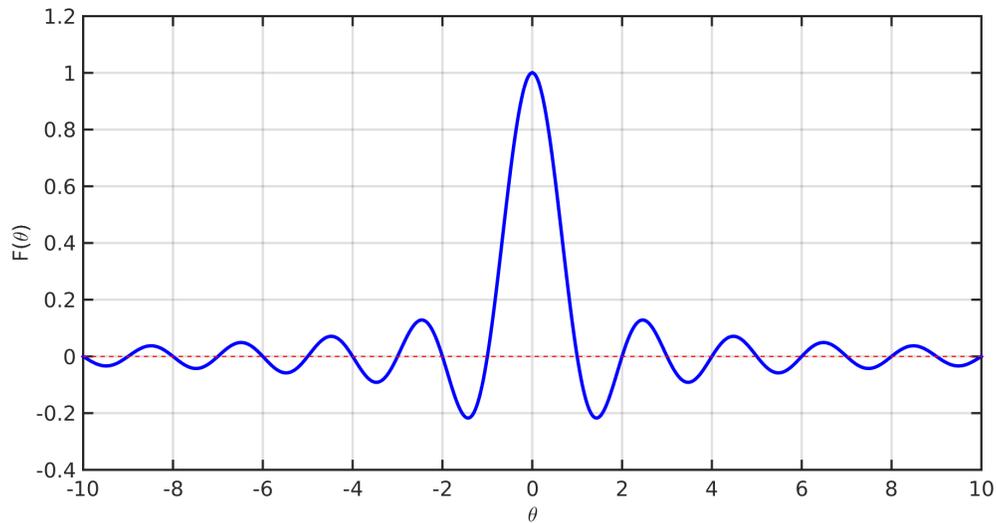


Figura 7: Función seno cardinal

2. Transformada de Fourier de señales periódicas

Si bien hemos presentado la transformada de Fourier en relación a señales aperiódicas, es posible aplicar esta herramienta a señales periódicas y de esta manera unificar la descripción en el dominio de la frecuencia de ambos tipos de señales. Las señales periódicas no son señales de energía y no cumplen la condición de ser absolutamente integrables (ver sec. 1.2), por lo que no es posible asegurar la convergencia de su transformada de Fourier (4). Veremos que necesitaremos de la función impulso en el dominio de la frecuencia $\delta(\omega)$ para poder expresar las transformadas de las señales periódicas.

Para deducir la expresión de la transformada de Fourier de señales periódicas, consideremos primero la transformada que consiste en un impulso en frecuencia, ubicado en la frecuencia ω_0 y de área 2π ,

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

La señal que se corresponde con esta transformada, la obtenemos mediante la ecuación de síntesis (ec. 5)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Vemos que un impulso continuo de área 2π ubicado en la frecuencia ω_0 posee como transformada inversa una señal exponencial compleja con esta frecuencia:

Transformada de una señal exponencial compleja

$$e^{j\omega_0 t} \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (7)$$

Teniendo en cuenta este resultado, consideremos el cálculo de la transformada de la señal periódica $x(t)$ cuya representación en serie de Fourier es

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{k\omega_0 t}$$

Considerando que la transformada de Fourier es una operación lineal, podemos calcular la transformada de la señal periódica $X(j\omega)$ como

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{k\omega_0 t} \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F} \{ e^{k\omega_0 t} \} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado 7, para obtener finalmente la transformada de la señal periódica $x(t)$ cuyos coeficientes espectrales son $\{a_k\}$,

Transformada de señal periódica

$$x(t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0). \quad (8)$$

Podemos concluir que *una señal periódica cuyos coeficientes espectrales son a_k , tiene como transformada un tren de impulsos en frecuencia localizados a frecuencias $k\omega_0$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, cuyas áreas son $2\pi a_k$. Si queremos obtener la transformada de una señal periódica deberemos primero obtener sus coeficientes espectrales a_k , para luego utilizando la expresión 8 obtener $X(j\omega)$.*

Apliquemos este resultado para obtener la transformada de Fourier de algunas señales periódicas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo N° 6. El pulso cuadrado periódico de duración $[-T_1, T_1]$ tiene coeficientes espectrales

$$a_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

por lo que su transformada es

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Ejemplo N° 7. El tren de impulsos periódico

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

puede expresarse como una serie de Fourier cuyos coeficientes espectrales son $a_k = 1/T$. Por lo tanto, su transformada de Fourier es

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

Vemos en este ejemplo que un tren de impulsos de periodo T tiene como transformada un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia, de periodo $2\pi/T$ (ver figura 8). Aparece nuevamente la relación inversa entre los dominios del tiempo y de la frecuencia, si aumentamos la separación entre los impulsos de la señal aumentando T , disminuye la separación entre los impulsos en frecuencia de la transformada.

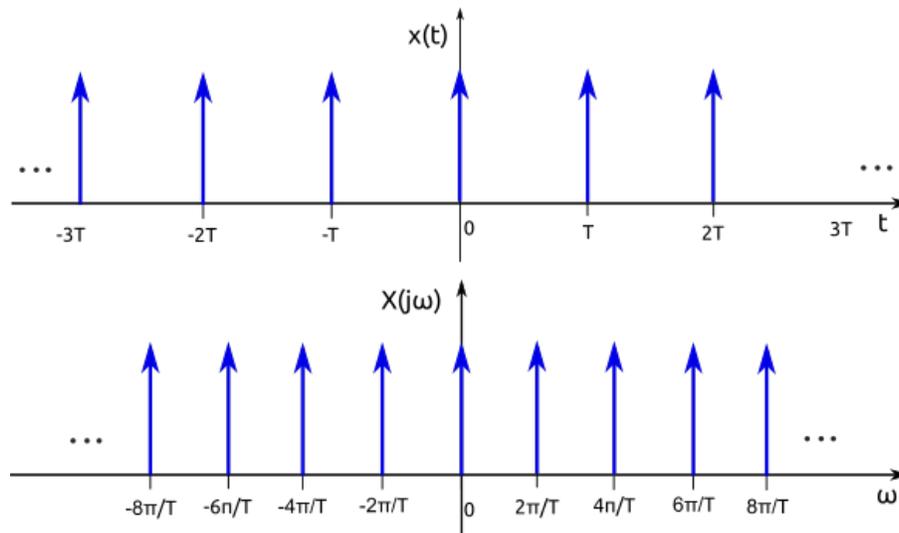


Figura 8: Transformada de un tren de impulsos periódico.

La tabla ?? contiene algunas transformadas de Fourier, como así también los coeficientes espectrales de la señal periódica correspondiente.

3. Propiedades de la Transformada de Fourier

Existen muchas propiedades de la Transformada de Fourier que resultan de gran utilidad cuando se calcula la transformada de una señal o cuando, a partir del conocimiento de la transformada, se intenta obtener la señal mediante la transformada inversa. Un resumen de estas propiedades se da en la tabla 1. Desarrollaremos algunas de estas propiedades, daremos ejemplos que aclaren sus usos y en particular trataremos de forma extensa y separada la *propiedad de convolución* y la *propiedad de multiplicación*, dada su importancia para caracterizar sistemas LTI y para el diseño de filtros.

3.1. Desplazamiento temporal y en frecuencias

Consideremos el caso de conocer la transformada $X(j\omega)$ de la señal $x(t)$ y calculemos la transformada $X'(j\omega)$ de la señal desplazada en el tiempo $x(t - t_0)$

$$\begin{aligned} X'(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega(t'+t_0)} dt' \\ &= e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \end{aligned}$$

Hemos utilizado el cambio de variables $t' = t - t_0$ para resolver la integral. Vemos finalmente que la transformada de $x(t - t_0)$ es la misma que la de $x(t)$ multiplicada por un factor de módulo unidad

Propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$x(t - t_0) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Una deducción análoga a la anterior permite obtener como cambia la señal cuando se produce un desplazamiento en frecuencia de la transformada

Propiedad de desplazamiento en frecuencias

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow X(j(\omega - \omega_0))$$

Vemos que si multiplicamos la señal por una señal exponencial compleja de frecuencia ω_0 , la transformada de la nueva señal es idéntica pero desplazada por ω_0 .

Observando la propiedad de desplazamiento en el tiempo y en frecuencia, vemos que los pares señal y transformada tienen simetría, la cual es otra consecuencia de la propiedad de dualidad ya citada. Lo mismo ocurre si comparamos las propiedades de diferenciación e integración.

3.2. Propiedad de conjugación

Es posible demostrar que el conjugado de una señal y su transformada cumplen la siguiente propiedad

Propiedad de conjugación

$$x^*(t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow X^*(-j\omega)$$

Esta propiedad nos permite sacar algunas conclusiones sobre las características de la transformada de una señal real. Si $x(t)$ es real se cumple que $x(t) = x^*(t)$ por tanto la transformada cumple

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

Esta propiedad se denomina «*simetría conjugada*» e implica que para una señal real $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$ y que $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$, es decir que el espectro de amplitud de una señal real es siempre una función par de ω , mientras que el espectro de fase es una función impar. Esto es análogo a la simetría de los coeficientes espectrales de una señal periódica real. Es posible demostrar que en caso de que la señal sea real y par, su transformada es una función real. Observe y compare los espectros de la señales tratadas en los ejemplos 1,2, 3 y 4.

3.3. Propiedad de integración

Propiedad de integración

La integral de una señal $x(t)$ posee el siguiente par transformada

$$\int_{-\infty}^t x(t)dt \quad \leftarrow \quad \mathcal{F} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Veamos en un ejemplo la aplicación de esta propiedad.

Ejemplo N° 8. Apliquemos la propiedad de integración para calcular la transformada de la función escalón $u(t)$. Para ello recordemos que la función escalón puede expresarse como

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau$$

y que $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$. Aplicando la propiedad de integración

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

obtenemos

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Ya que la transformada $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ Observemos que la señal $u(t)$ no es una señal de energía, ni cumple con las condiciones de Dirichlet. Hemos podido encontrar su transformada ya que utilizamos un impulso en frecuencias, $\delta(\omega)$.

4. La propiedad de convolución y la función respuesta en frecuencia

Propiedad de convolución

La propiedad de convolución establece que:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow X_3(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$$

La convolución de dos señales en el dominio del tiempo se corresponde con una multiplicación de sus transformadas en el dominio de la frecuencia.

La Respuesta en Frecuencia

La propiedad de convolución juega un papel muy importante en la caracterización de sistemas LTI. Aplicando esta propiedad, encontramos que

$$y(t) = h(t) * x(t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \quad (9)$$

donde

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

Así vemos que la transformada de Fourier de la Respuesta al Impulso es precisamente la Respuesta en Frecuencia del sistema.

Se puede demostrar la propiedad de convolución partiendo de expresión de la respuesta del sistema LTI $y(t)$ expresada como

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

utilizando la ecuación de síntesis para $x(t - \tau)$ y la propiedad de desplazamiento temporal, se puede expresar

$$x(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{X(j\omega)e^{-j\omega\tau}\} e^{j\omega t} d\omega.$$

Por lo que se puede expresar $y(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega$$

Podemos reconocer que esta es la ecuación de síntesis para $y(t)$, siendo el término entre llaves la función respuesta en frecuencias del sistema, por lo que

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

¿Cuándo es posible calcular la respuesta en frecuencias del sistema?

Dado que $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ podemos aplicar las condiciones de Dirichlet para asegurar que si la función respuesta al impulso es absolutamente sumable, esto es si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

y si se cumplen las otras dos condiciones restantes, la función respuesta en frecuencias existe, en el sentido de que es una función en el sentido usual.

Si bien las condiciones sobre el número de máximos, mínimos y discontinuidades son cumplidas por todas las señales $h(t)$ de sistemas LTI de interés práctico, la condición expresada en la última integral no es cumplida por todos los sistemas LTI. Solo los sistemas LTI BIBO estables cumplen con esta condición, por lo que podemos asegurar que *si el sistema es BIBO estable, existe su función respuesta en frecuencias $H(j\omega)$.*

Tanto la función respuesta al impulso $h(t)$ como la función respuesta en frecuencias $H(j\omega)$ caracterizan completamente a un sistema LTI. Veremos que existen importantes ventajas al caracterizar el sistema mediante $H(j\omega)$.

Si bien podremos expresar la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de sistemas no estables mediante funciones $\delta(\omega)$ (vea ejemplo 11); para caracterizar sistemas no estables en el dominio de la frecuencia, utilizaremos posteriormente otra herramienta de gran utilidad, la transformada de Laplace.

Ejemplo N° 9. Calculemos la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LTI denominado *filtro pasa bajos ideal*. El pasa bajos ideal posee una función respuesta en frecuencias descrita por

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

por lo que $h(t)$, calculada como la transformada inversa de $H(j\omega)$, es

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{senc} \left\{ \frac{\omega_c}{\pi} t \right\}.$$

En la figura 9 se representa la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso del filtro. Vemos que la función respuesta al impulso de un filtro pasa bajos tiene la forma de un seno cardinal, esto implica varias características del filtro en el dominio del tiempo que pueden ser inconvenientes en una

aplicación. Por un lado podemos observar que $h(t) \neq 0$ para $t < 0$ por tanto el filtro pasa bajos ideal es un sistema no causal. Además vemos que la respuesta al impulso tiene un comportamiento oscilatorio. Estas características pueden implicar que frente a una aplicación concreta descartemos aplicar un filtro que se aproxime en sus características al filtro pasa bajos ideal, en favor de un filtro no ideal que sea causal y cuya $h(t)$ no tenga oscilaciones.

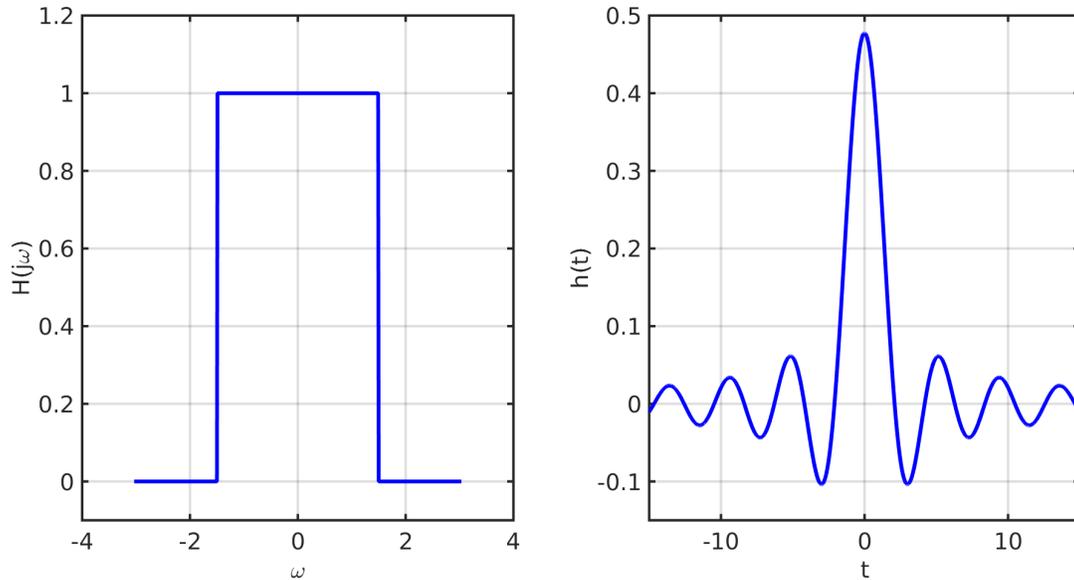


Figura 9: Respuesta en frecuencia y respuesta al impulso de un filtro pasa bajo con $\omega_c = 1,5$.

Ejemplo N° 10. Consideremos un sistema cuya función respuesta al impulso es $h(t) = e^{-at}u(t)$. Este sistema tiene una función respuesta en frecuencias (vea el resultado del ejemplo 1):

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{1}{a + j\omega}$$

Ya que

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

este sistema puede actuar como un filtro pasa bajos no ideal. En la figura 10 se representa la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso del filtro. Dada la forma que posee su función respuesta al impulso $h(t)$, el sistema es causal y no posee un comportamiento oscilatorio $h(t)$. Este sistema es precisamente un filtro pasa bajos implementado con un circuito RC serie cuya $h(t) = 1/RC e^{-t/RC}u(t)$.

Ejemplo N° 11. Como ya vimos, el integrador continuo es un sistema inestable, por lo que no posee una función respuesta en frecuencia. A pesar de esto y utilizando funciones $\delta(\omega)$ podemos representar

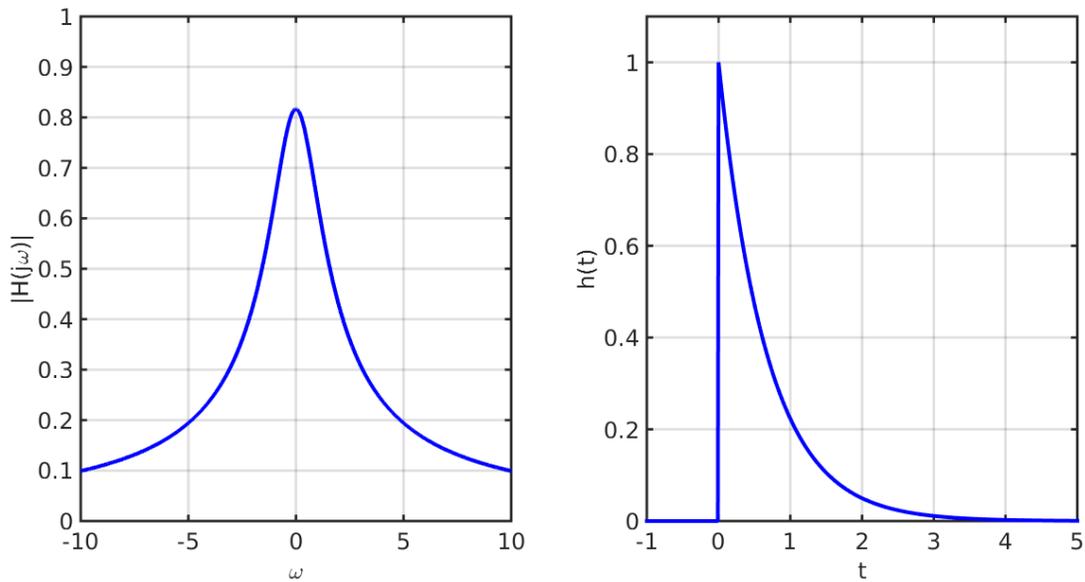


Figura 10: Respuesta en frecuencia y respuesta al impulso de un filtro pasa bajo no ideal causal con $a = 1,5$.

la transformada de Fourier de la $h(t)$ del integrador, la cual nos proporcionará una idea de cómo se comporta el sistema en el dominio de la frecuencia.

Ya que la función respuesta al impulso del integrador es la función escalón

$$h(t) = u(t)$$

la transformada de Fourier de $h(t)$ ($H(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$) es:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

en donde hemos utilizado el resultado del ejemplo 8.

5. La propiedad de multiplicación y el transporte de señales

Ya que la propiedad de convolución establece que una convolución en el dominio del tiempo corresponde con una multiplicación en el dominio de la frecuencia, podemos utilizar la propiedad de dualidad de la transformada para establecer que la multiplicación en el dominio del tiempo se debe corresponder con una convolución en el dominio de la frecuencia. Esto es así y puede demostrarse la siguiente propiedad.

Propiedad de multiplicación o modulación

$$r(t) = s(t)p(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)$$

Esta propiedad, que se denomina *propiedad de multiplicación* o *propiedad de modulación*, es de gran importancia en el diseño y análisis de sistemas de comunicación. Modulación es el proceso, o el resultado del proceso, de colocar la información contenida en una señal ($s(t)$), generalmente de baja frecuencia, sobre una señal de alta frecuencia denominada señal portadora ($r(t)$). Un propósito de la modulación es aprovechar mejor el canal de comunicación, posibilitando transmitir más información en forma simultánea y mejorando la resistencia contra posibles ruidos e interferencias (ver el ejemplo 12).

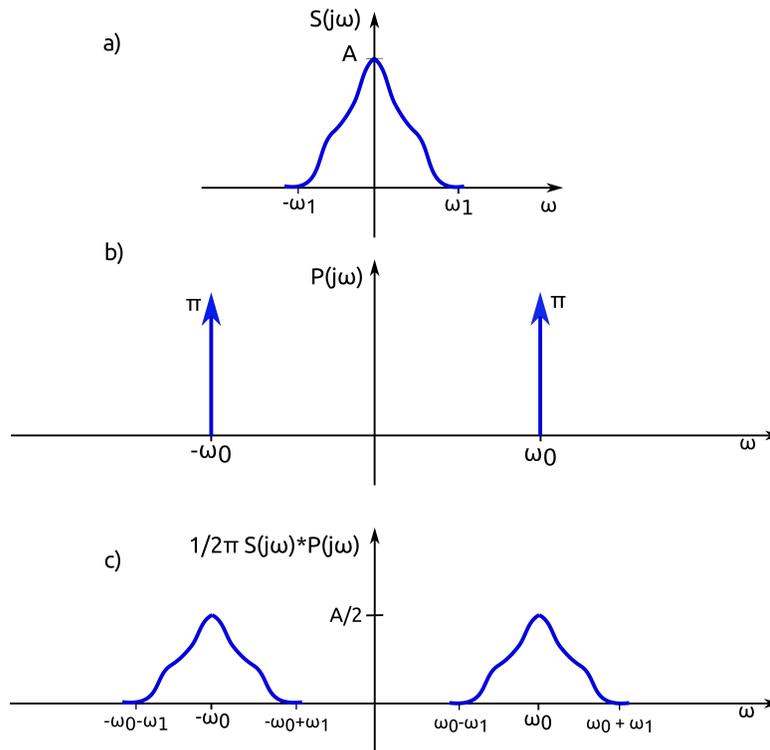


Figura 11: Proceso de modulación de una señal, ejemplo 12

Ejemplo N° 12. Consideremos la señal cuyo espectro se muestra en la figura 11 a. La forma que posee este espectro sólo hace referencia a una *señal cuyo espectro es de banda limitada*, es decir las componentes de la señal se encuentran en un intervalo limitado de frecuencias. Multipliquemos esta señal por la señal

$$p(t) = \cos(\omega_0 t)$$

y utilicemos la propiedad de multiplicación para obtener la señal resultante.

La transformada de la señal $p(t)$ es

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

y se muestra en la figura 11 b. Calculemos la transformada de la señal resultante

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta(\omega' - \omega_0) + \delta(\omega' + \omega_0)\} S(j(\omega - \omega')) d\omega' \\ &= \frac{1}{2} (S(j(\omega - \omega_0)) + S(j(\omega + \omega_0))) \end{aligned}$$

$R(j\omega)$ es mostrada en la figura 11 c. Para resolver la integral hemos utilizado el resultado de la convolución entre una transformada y un impulso desplazado, $X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X(j(\omega - \omega_0))$. Observemos que como resultado final del proceso, al multiplicarla por la señal $p(t)$, hemos desplazado la señal $s(t)$ a frecuencias más altas. A $p(t)$ se le denomina *onda portadora* y $s(t)$ es la señal que posee la información que queremos transmitir.

Imaginemos que el proceso de multiplicación de la señal del ejemplo 12 es parte de un sistema de comunicación y que necesitamos recuperar la señal original. Mostraremos este proceso en el siguiente ejemplo.

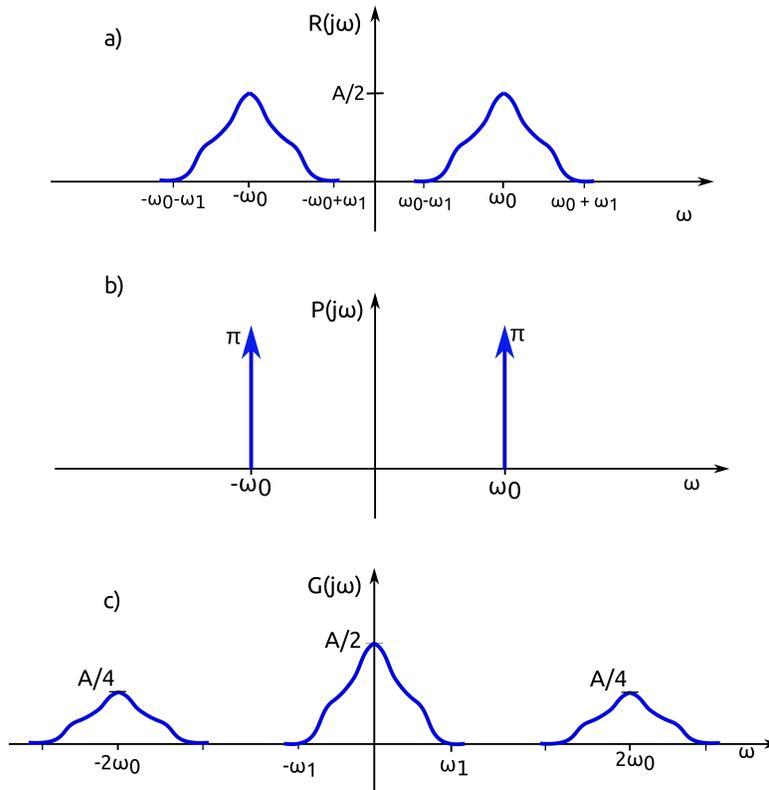


Figura 12: Figura correspondiente al ejemplo 13

Ejemplo N° 13. Consideremos la señal resultante del ejemplo 12, cuyo espectro se muestra en la figura 12 a. Obtengamos la señal $g(t)$ mediante el producto

$$g(t) = r(t)p(t)$$

donde $p(t) = \cos(\omega_0 t)$. Si realizamos la convolución en el dominio de las frecuencias

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * P(j\omega)$$

Reemplazando las expresiones de $R(j\omega)$ y $P(j\omega)$, obtenemos

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1/2 \left[S(j(\omega + \omega_0)) + S(j(\omega - \omega_0)) \right] \right. \\ \left. * \left[\pi(\delta(j(\omega + \omega_0)) + \delta(j(\omega - \omega_0))) \right] \right\}$$

Realizando las operaciones, encontramos el espectro de $g(t)$ como la suma de tres réplicas desplazadas y escaladas de $S(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{1}{4} \left[S(j(\omega + \omega_0)) + 2S(j\omega) + S(j(\omega - \omega_0)) \right]$$

La transformada $G(j\omega)$ se muestra en la figura 12 c . Finalmente, si a la señal $g(t)$ la introducimos como entrada de un filtro pasa bajos ideal con frecuencia de corte adecuada $\omega_c = \omega_0$ y amplificamos la señal resultante por un factor 2, obtendremos nuevamente la señal original $s(t)$.

Ejemplo N° 14. Utilicemos la propiedad de modulación para desarrollar de manera esquemática un filtro pasa banda en el que sea posible sintonizar la frecuencia central de la banda en un valor deseado. Un esquema de este filtro es mostrado en la figura 13-a.

El filtro funciona de la siguiente forma. Una señal de entrada $x(t)$ cuyo espectro es $X(j\omega)$ (ver figura 13 b,c,d y e) se multiplica por la señal exponencial compleja $e^{j\omega_0 t}$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} x(t)$$

Esto produce el desplazamiento en frecuencias del espectro de $x(t)$

$$Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_0))$$

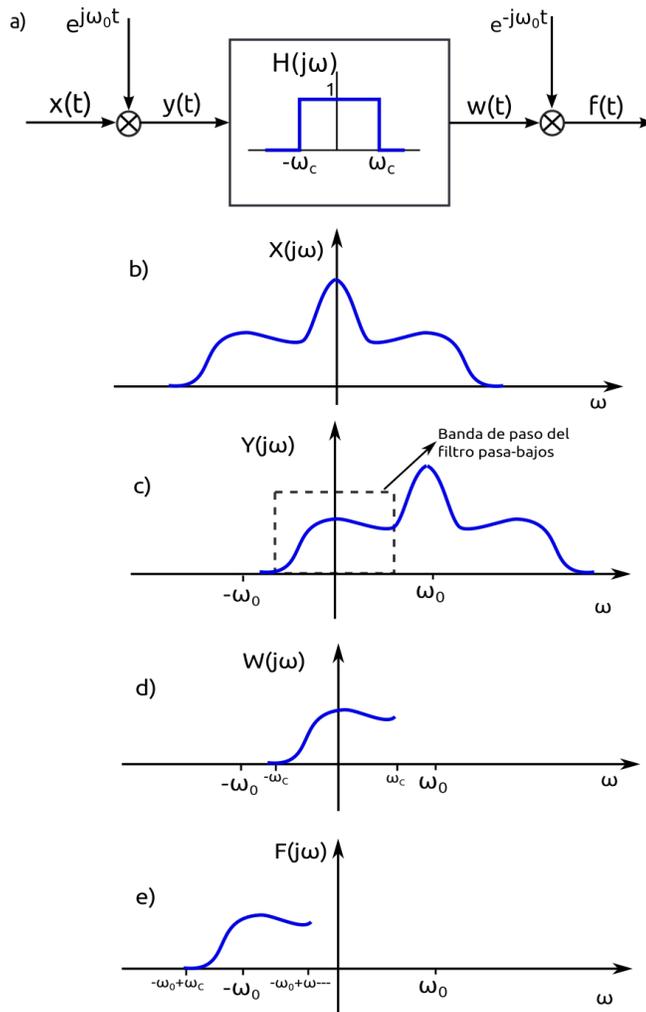


Figura 13: Conversión de un filtro pasa-bajos en un filtro pasa-banda, ejemplo 14

Luego la señal $y(t)$ se introduce en un filtro pasa bajos ideal de frecuencia de corte ω_c , obtiene la señal $w(t)$, cuyo espectro es

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= H(j\omega)Y(j\omega) \\ &= H(j\omega)X(j(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

La señal $w(t)$ se multiplica por una exponencial compleja

$$f(t) = e^{-j\omega_0 t} w(t).$$

Esta última operación desplaza el espectro de $w(t)$, por lo que el espectro de $f(t)$ es

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= W(j(\omega + \omega_0)) \\ &= H(j(\omega + \omega_0))X(j\omega) \end{aligned}$$

La función respuesta en frecuencias equivalente de todo el filtro pasa banda se representa en la 14 a. Este filtro posee un frecuencia central de banda ω_0 , la cual es posible ajustar cambiando la frecuencia de las exponenciales complejas $e^{\pm j\omega_0 t}$.

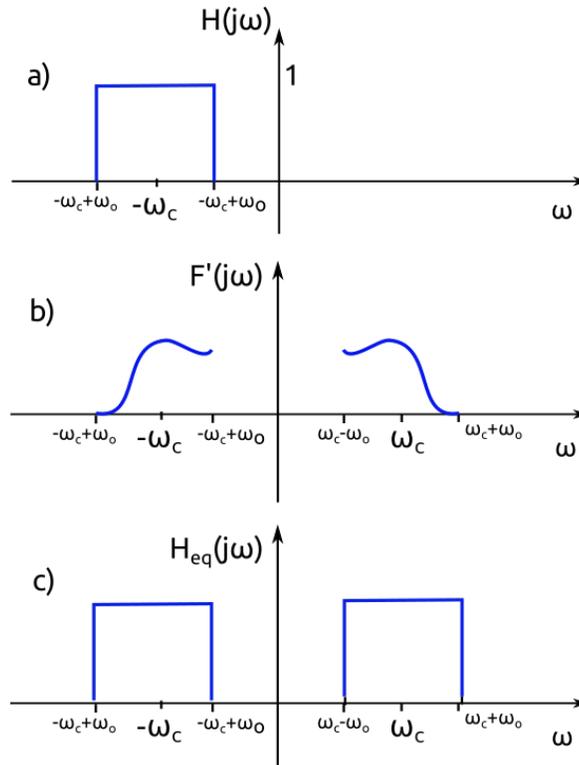


Figura 14: a) Respuesta en frecuencia del filtro pasa banda del ejemplo 14, b) espectro de la señal resultante de tomar $Re\{f(t)\}$, c) respuesta en frecuencia equivalente (ver texto).

Observemos que la señal $x(t)$ del ejemplo 14 es una señal real y que las señales $y(t)$, $w(t)$ y $f(t)$ son señales complejas. Una forma de obtener una señal real a la salida del filtro es tomar la parte real de $f(t)$. Podemos obtener la transformada de la señal $Re\{f(t)\}$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 Re\{f(t)\} &= \frac{1}{2} (f(t) + f(t)^*) \\
 \Rightarrow F'(j\omega) &= \mathcal{F}\{Re\{f(t)\}\} = \frac{1}{2} (F(j\omega) + F(-j\omega)^*)
 \end{aligned}$$

El espectro de $Re\{f(t)\}$ ($F'(j\omega)$) y el espectro del filtro equivalente que obtenemos al tomar $Re\{f(t)\}$ ($H_{eq}(j\omega)$) se muestra en la figura 14 b y c.

6. Sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales

Como ya hemos visto, existe una numerosa cantidad de sistemas LTI causales cuya relación entrada-salida está especificada por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y condiciones iniciales nulas. La forma general de esta ecuación es:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Veamos ahora cómo determinar la respuesta en frecuencias de este sistema. Supondremos que el sistema es estable, de tal manera de asegurarnos que existe la función respuesta en frecuencias. Aplicando la operación definida por la transformada de Fourier $\mathcal{F}\{.\}$ (ec. 4) y teniendo en cuenta la linealidad de esta operación, obtenemos

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

Si ahora utilizamos la propiedad de diferenciación de la transformada

$$Y(j\omega) \left[\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] = X(j\omega) \left[\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \right].$$

Como la función respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para un sistema LTI es el cociente de las transformadas de la respuesta $Y(j\omega)$ y de la entrada del sistema $X(j\omega)$ (ver expresiones 9 y 10), obtenemos finalmente

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI descrito por una ec. diferencial

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (11)$$

Observe que la función $H(j\omega)$ es una función racional, es decir, es una razón de dos polinomios. **Ambos numerador y denominador son polinomios en la variable $j\omega$, el orden del polinomio denominador coincide con el orden del sistema N .** Los coeficientes del polinomio del numerador son los coeficientes del miembro derecho de la ecuación diferencial (términos vinculados a la entrada $x(t)$) y los coeficientes del polinomio del denominador son los del miembro izquierdo (términos vinculados a la salida $y(t)$).

Hemos deducido una expresión (ec. 11) que permite obtener la respuesta en frecuencia de un sistema LTI causal mediante la simple inspección de la ecuación diferencial que describe su relación entrada-salida. Para estos sistemas podemos hallar simplemente su respuesta al impulso, primero calculamos $H(j\omega)$ mediante la expresión 11 y luego hallamos $h(t)$ calculando la transformada inversa $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$.

Ejemplo N° 15. Considere un sistema LTI causal descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

Utilizando la expresión 11 podemos obtener $H(j\omega)$,

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}.$$

Utilizando el método de expansión en fracciones parciales (vea el apéndice) obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}$$

Esta última expresión nos facilita obtener la respuesta al impulso $h(t)$ como la transformada inversa de la respuesta en frecuencias

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

El siguiente código de Matlab/Octave encuentra la expansión en fracciones parciales de la respuesta en frecuencia del ejemplo.

```
% Codigo que encuentra la expansion en fracciones parciales de X=N(jw)/D(jw),
% r es el vector de los coeficientes de la expansion (residuos),
% p es el de las raices del denominador (polos), y k de los terminos directos.

b = [1 2]; % raices del polinomio numerador en orden decreciente.
a = [1 4 3]; % raices del polinomio denominador en orden decreciente.
[r,p,k] = residue(b,a)
```

7. Apéndice: el método de expansión en fracciones parciales

Siempre que obtengamos la respuesta en frecuencias de un sistema LTI a partir de la ecuación diferencial asociada, obtendremos $H(j\omega)$ como la razón de dos polinomios en la variable $j\omega$. A partir de el conocimiento de esta función podemos obtener la función respuesta al impulso mediante

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(j\omega)\}$$

La tarea de evaluar la transformada inversa puede ser sencilla si $H(j\omega)$ está expresada como la suma de fracciones de la forma $A/(b - j\omega)$ ya que podremos utilizar en forma directa una tabla de transformadas. La tarea de expresar $H(j\omega)$ o cualquier transformada de Fourier racional (cociente de dos polinomios) como suma de este tipo de fracciones se puede lograr a través del método de expansión en fracciones parciales. Daremos aquí una breve noción del método; una descripción más completa puede encontrarse en textos de matemática. Matlab y Octave poseen la función *residue()* que permite hallar los coeficientes de la expansión en fracciones parciales.

Consideremos una función racional de la forma

$$G(\nu) = \frac{b_{n-1}\nu^{n-1} + b_{n-2}\nu^{n-2} + \dots + b_0}{a_n\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \dots + a_0}$$

La variable ν representa $j\omega$. Observe que el polinomio del denominador es de mayor grado que el polinomio del numerador, solo trataremos aquí este caso. Como primer paso del método, factorizamos el denominador, de manera que podamos escribir

$$G(\nu) = \frac{b_{n-1}\nu^{n-1} + b_{n-2}\nu^{n-2} + \dots + b_0}{(\nu - \rho_1)(\nu - \rho_2)\dots(\nu - \rho_n)}$$

Las ρ_i son las raíces del polinomio denominador de $G(\nu)$. Consideremos primero el caso en que todas estas raíces son distintas. Nuestra intención es poder escribir $G(\nu)$ como

$$G(\nu) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(\nu - \rho_i)}$$

Los valores de los A_i se pueden obtener mediante la expresión

$$A_i = [(\nu - \rho_i) G(\nu)] \Big|_{\nu=\rho_i}$$

Esta expresión solo es aplicable en el caso de raíces distintas. Un ejemplo de aplicación del método en este caso fue tratado en el ejemplo 15.

En caso de que existan raíces repetidas (multiplicidad >1), tanto la forma de la expansión como la expresión que permite calcular los A_i son distintas a las dadas. Considere el caso que el denominador tiene r raíces diferentes $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ con multiplicidades $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$. $G(\nu)$ tiene la forma

$$G(\nu) = \frac{b_{n-1}\nu^{n-1} + b_{n-2}\nu^{n-2} + \dots + b_0}{(\nu - \rho_1)^{\sigma_1}(\nu - \rho_2)^{\sigma_2}\dots(\nu - \rho_r)^{\sigma_r}}$$

En este caso $G(\nu)$ tiene una expansión en fracciones parciales de la forma

$$G(\nu) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{i,k}}{(\nu - \rho_i)^k}$$

donde las $A_{i,k}$ pueden obtenerse a partir de

$$A_{i,k} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{d\nu^{\sigma_i - k}} [(\nu - \rho_i)^{\sigma_i} G(\nu)] \right] \Bigg|_{\nu = \rho_i}$$

Veamos un ejemplo de aplicación del método en este último caso.

Ejemplo N° 16. Considere el sistema tratado en el ejemplo 15, cuya función de respuesta en frecuencias es

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}$$

Calculemos la respuesta del sistema a la señal

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \quad X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}.$$

Para esto, obtenemos la transformada de Fourier de la salida mediante

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) \\ &= \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{j\omega + 1} \right] \\ &= \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)} \end{aligned}$$

Vemos que en este caso $Y(j\omega)$ es una función polinómica cuyo denominador tiene una raíz simple ($\omega = 3j$) y una de multiplicidad 2 ($\omega = j$). Para obtener la respuesta del sistema $y(t)$, primero expresemos $Y(j\omega)$ en fracciones parciales

$$\begin{aligned}
Y(j\omega) &= \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \\
&= \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 3} \\
&= \frac{A_{11}}{(j\omega + 1)} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{(j\omega + 3)}
\end{aligned}$$

Hagamos el remplazo $\nu = j\omega$ y obtengamos las A_{ik} utilizando su expresión para el caso de raíces repetidas

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{1!} \frac{d}{d\nu} \left[(\nu + 1)^2 \frac{\nu + 2}{(\nu + 1)^2(\nu + 3)} \right] \Bigg|_{\nu=-1} = \frac{1}{4} \\
A_{12} &= \frac{1}{0!} \left[(\nu + 1)^2 \frac{\nu + 2}{(\nu + 1)^2(\nu + 3)} \right] \Bigg|_{\nu=-1} = \frac{1}{2} \\
A_{21} &= \frac{1}{0!} \left[(\nu + 3) \frac{\nu + 2}{(\nu + 1)^2(\nu + 3)} \right] \Bigg|_{\nu=-3} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Por lo que $Y(j\omega)$ es

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{(j\omega + 1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(j\omega + 3)}$$

Tomando la transformada inversa de $Y(j\omega)$ obtenemos $y(t)$

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t)$$

El siguiente código de Matlab/Octave encuentra la expansión en fracciones parciales de la respuesta en frecuencia del ejemplo.

```

% Codigo que encuentra la expansion en fracciones parciales de X=N(jw)/D(jw),
% r es el vector de los coeficientes de la expansion (residuos),
% p es el de las raices del denominador (polos), y k de los terminos directos.

```

```

b = [1 2]; % raices del polinomio numerador en orden decreciente.
a = [1 5 7 3]; % raices del polinomio denominador en orden decreciente.
[r,p,k] = residue(b,a)

```

Tabla 1: Propiedades de la Transformada de Fourier continua

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier
<i>Linealidad</i>	$a x(t) + by(t)$	$a X(j\omega) + b Y(j\omega)$
<i>Desplazamiento en el tiempo</i>	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
<i>Desplazamiento en frecuencias</i>	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
<i>Conjugación</i>	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
<i>Inversión en el tiempo</i>	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
<i>Convolución en el tiempo</i>	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
<i>Multiplicación en el tiempo</i>	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
<i>Escalamiento en tiempo y frecuencia</i>	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
<i>Diferenciación en el tiempo</i>	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
<i>Integración en el tiempo</i>	$\int_{-\infty}^t x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
<i>Señal real</i>	$x(t) = x^*(t)$	$ X(j\omega) = X(-j\omega) $ $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$