Tema 3
Representación de señales y sistemas continuos en el dominio de la frecuencia: la Transformada de Fourier continua

Diego Leonardo Valladares
Dpto. de Física - Univ. Nac. de San Luis

20 de octubre de 2021

En este tema tratamos la representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas continuos utilizando la representación de Fourier. Estudiamos la representación de señales no periódicas y la respuesta de sistemas LTI a este tipo de señales, mediante la Transformada de Fourier.

Índice

1. Introducción **1**

2. La serie de Fourier para señales periódicas continuas **2**

2.1. Espectros de amplitud, de fase y de potencia 5

2.2. Distintas formas de expansión para señales reales 6

2.3. Series de Fourier y sistemas LTI 10

1. Introducción

En los temas anteriores, estudiamos las señales como funciones de una variable ($x(t)$ o $x[n]$), analizamos las características de los sistemas LTI y obtuvimos sus respuestas, utilizando la respuesta al impulso ($h(t)$ o $h[n]$). Consideramos las señales como funciones de una variable que en general es el tiempo (no siempre). Hemos estudiado las señales y los sistemas en el *dominio del tiempo*. En este tema estudiaremos las señales y los sistemas LTI en el ***dominio de la frecuencia***.

Prestamos mucha atención a las señales exponenciales complejas de la forma $x(t) = e^{j\omega t}$ y $x[n] = e^{j\omega n}$. La importancia que poseen las señales exponenciales complejas se debe principalmente a dos motivos:

- casi todas las señales de interés pueden representarse como una combinación lineal de este tipo de señales.
- la forma particular que posee la respuesta de los sistemas LTI a señales exponenciales complejas nos permite obtener la respuesta del sistema de manera simple, lo que posibilita caracterizar los sistemas LTI mediante un método diferente de la respuesta al impulso.

La representación de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia se realiza mediante la *representación de Fourier*. Recibe este nombre en honor a Joseph Fourier (1768-1830), por sus estudios pioneros en señales periódicas y el desarrollo de lo que se conoce como *series de Fourier*.

Tabla 1

Tipo de señal	**Periódica**	**No periódica**
continua	Serie de Fourier	Transformada de Fourier
discreta	Serie de Fourier en tiempo discreto	Transformada de Fourier en tiempo discreto

Hay cuatro representaciones de Fourier distintas para las señales, dependiendo de si la señal es periódica o aperiódica, continua o discreta. En la tabla 1 se muestran estas cuatro representaciones. Para aplicar la representación de Fourier a los sistemas LTI, utilizaremos la ***Transformada de Fourier continuaT*** para obtener la representación en el dominio de la frecuencia de sistemas LTI continuos, y la ***Transformada de Fourier en tiempo discreto*** para el caso de sistemas discretos.

En este capítulo sólo trataremos la representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas continuos. Antes de continuar, aclaremos que realizaremos todo el desarrollo de la representación de Fourier utilizando exponenciales complejas. Si bien no especificamos unidades, las magnitudes están medidas en el sistema internacional; las magnitudes de tiempo como el periodo se miden en segundos y la frecuencia angular (la que llamaremos simplemente frecuencia) en rad/s. Los códigos de Matlab/Octave que realizan las figuras se encuentran disponibles en la página de la asignatura.

2. La serie de Fourier para señales periódicas continuas

Hemos visto que una señal es periódica si

$$x(t) = x(t+\tau) \quad \forall\, t$$

donde el menor valor de τ para el cual la relación se cumple es el periodo T de la señal y $\omega = 2\pi/T$ es su frecuencia. Tengamos en cuenta que el requisito establecido por la definición de señal periódica se debe cumplir para todo valor de t, es decir para $-\infty < t < \infty$.

Si una señal periódica cumple con ciertos requisitos que discutiremos posteriormente es posible probar que 3la señal puede representarse mediante una combinación lineal (superposición) de exponenciales complejas que forman un conjunto armónicamente relacionado, cuya frecuencia fundamental ω_0 es la frecuencia de la señal periódica. Dicha combinación lineal es la serie de Fourier.

Serie de Fourier

La siguiente expresión es la representación de una señal periódica $x(t)$ mediante la serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \; e^{jk\omega_0 t} \tag{1}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, siendo T el periodo de la señal periódica $x(t)$. Los coeficientes a_k se calculan mediante la expresión:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \; e^{-j\,k\omega_0\,t} \, dt. \tag{2}$$

Esta integral se evalúa sobre un periodo de la señal $x(t)$, usualmente entre 0 y T o entre $-T/2$ y $T/2$.

La serie de Fourier (1) posee un significado preciso: *la expresión nos indica cómo se descompone una señal periódica en exponenciales complejas de diferente frecuencia (múltiplos de la frecuencia de la señal), siendo el coeficiente a_k una medida de la contribución de la exponencial compleja $e^{k\omega_0 t}$ de frecuencia $k\omega_0$ a la formación de la señal.*

Remarquemos que todas las exponenciales complejas de la expansión de la serie de Fourier forman el conjunto señales armónicamente relacionadas de frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$ siendo T el periodo de la señal representada $x(t)$. Cada una de las exponenciales complejas posee una frecuencia que es múltiplo de la frecuencia fundamental del conjunto ($\omega_k = k\omega_0$), y por tanto es periódica con periodo $T_k = T/k$.

Diremos que cada una de las exponenciales complejas es una ***componente*** de la señal y que cada coeficiente a_k mide cuánto de la componente de frecuencia $k\omega_0$ existe en la señal periódica. Los coeficientes a_k se denominan ***coeficientes espectrales*** de $x(t)$.

La expresión 1 se denomina ***ecuación de síntesis***, ya que podemos interpretar que mediante esta expresión se «sintetiza» (compone o construye) la señal $x(t)$ a partir de sus componentes. La expresión 2 se denomina ***ecuación de análisis*** ya que permite «analizar» la señal $x(t)$, en sentido de separar o considerar por separado sus partes.

Si bien daremos una definición más general al tratar transformadas de Fourier, se hace referencia al conjunto de los coeficientes espectrales a_k como el ***espectro*** de la señal. Usualmente se presenta el espectro mediante una representación gráfica, como veremos en la sección 2.1. El conjunto de coeficientes espectales a_k de una señal periódica $x(t)$ constituyen su ***representación en frecuencia***.

Para $k = 0$, el coeficiente espectral es

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) \, dt.$$

Vemos que a_0 es simplemente el valor medio de la señal y mide la magnitud de la componente continua (frecuencia $\omega = 0$) que existe en la señal.

Los términos correspondientes a $k = 1, -1$ tienen la misma frecuencia que la señal periódica y reciben el nombre de ***primer armónico*** o ***componente fundamental***. Los términos correspondientes a $k = -N, N$ se denominan ***armónico*** N.

Condiciones de Dirichlet

Las tres condiciones que debe cumplir una señal periódica para poder ser representada por la serie de Fourier se denominan condiciones de Dirichlet, las cuales nos indican que podemos asegurar que la señal periódica $x(t)$ puede representarse mediante la serie de Fourier (Ec. 1) si:

a)

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

b) $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito de t.

c) $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito de t y cada una de esta discontinuidades es finita.

Estas condiciones constituyen un conjunto de condiciones suficientes, no necesarias. En general todas las señales de interés en ingeniería cumplen con estas condiciones. Observemos que no se exige como condición la continuidad de $x(t)$. En los puntos de discontinuidad la serie converge al valor medio de los valores de la función a cada lado de la discontinuidad.

Ejemplo N° 1. Consideremos la señal

$$x(t) = sen(\omega_0 t).$$

Si bien podríamos aplicar la expresión 2 para encontrar los coeficientes espectrales, es más simple en este caso hacerlo utilizando la identidad de Euler. La señal se puede expresar como

$$x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$

Esta expresión es el desarrollo en serie de Fourier (ec. 1) de $x(t)$ ya que expresa la señal como una combinación lineal de exponenciales complejas; por lo cual podemos asegurar que los coeficientes espectrales de $x(t)$ son

$$a_1 = -\frac{1}{2}j, \;\; a_{-1} = +d\frac{1}{2}j, \;\; a_k = 0 \;\text{ para } k \neq \pm 1$$

En la figura 1 se representan los valores de los coeficientes espectrales de la señal, a_k vs. k (espectro de amplitud y espectro de fase). Observe que por ser una señal real, los coeficientes de la serie cumplen con la propiedad $a_k = a^*_{-k}$.

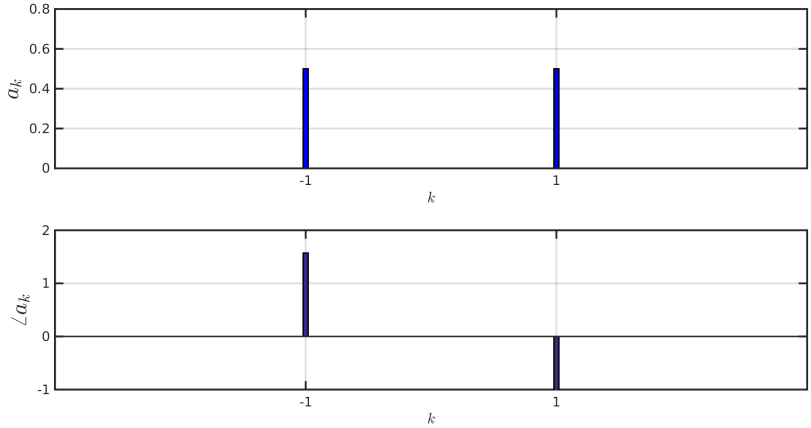

Figura 1: Espectro de la señal $x(t) = sen(\omega t)$

2.1. Espectros de amplitud, de fase y de potencia

Consideremos una señal periódica de frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$ y su representación en serie de Fourier dada por las expresiones 1 y 2. Por ser números complejos, podemos escribir cada coeficiente espectral como

$$a_k = |a_k| e^{j\angle a_k}$$

Espectro de una señal periódica

El ***espectro de frecuencias*** de una señal periódica es el conjunto de coeficientes espectrales a_k. El espectro de la señal se representa mediante gráficas que se denominan *espectro de amplitud*, *espectro de fase* y *espectro de potencia*.

Ya que en general a_k es un número complejo, la representación de a_k para cada valor de $k\omega_0$ (frecuencia de la componente k) se hace mediante dos gráficas. Una gráfica es el ***espectro de amplitud*** de la señal donde se representa $|a_k|$ en función de k. La segunda gráfica es la representación de $\angle a_k$ vs. k y se denomina ***espectro de fase*** de la señal. La representación alternativa de del espectro en función de f, donde es $f = \omega/(2\pi)$, recibe la misma denominación.

Aunque las señales periódicas no son señales de energía, tienen potencia finita, por tanto son señales de potencia. La serie Fourier proporciona una forma de encontrar cómo se distribuye la potencia de la señal entre las componentes de distintas frecuencias.

Identidad de Parseval

La distribución de potencia entre las diferentes componentes de una señal periódica se obtiene mediante la identidad de Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2. \tag{3}$$

Ya que el término de la izquierda de la igualdad es la potencia de la señal, la expresión nos indica que podemos calcular la potencia de una señal sumando los valores al cuadrado del espectro de amplitud de la señal, ($|a_k|^2$).

Teniendo en cuenta la identidad de Parseval, podemos decir que $|a_k|^2$ mide cuánto de la potencia de la señal se encuentra en la componente de frecuencia $k\omega_0$. Por este motivo, la representación de $|a_k|^2$ vs. k o $k\omega_0$, se denomina ***espectro de potencia*** de la señal. Vemos que la serie de Fourier no solo nos indica la frecuencia a las que se encuentran las componentes de la señal periódica, sino que nos informa también sobre la importancia de cada componente en la formación de la señal. En la práctica, las componentes de las señales se determinan utilizando un analizador de espectros.

Los espectros de señales periódicas son denominados ***espectros de frecuencia discreta o espectros de líneas***, ya que en la gráfica del espectro, la variable independiente $k\omega_0$ es una variable discreta. Esto es así ya que en la expansión de la serie de Fourier sólo aparecen componentes cuya frecuencia es múltiplo de la fundamental $\omega_k = k\omega_0$, por lo que las frecuencias a las que aparece cada línea del espectro es un múltiplo de la fundamental ($k2\pi/T$). Esta es una característica distintiva de una señal periódica: *su espectro de frecuencia es de frecuencia discreta.* Veremos en el tema siguiente que para señales no periódicas, el espectro no es un espectro de líneas, sino un espectro continuo.

Un ***espectro bilateral*** muestra la amplitud ($|a_k|$) y la fase ($\angle a_k$) de las componentes espectrales para frecuencias negativas y positivas. Un ***espectro unilateral*** representa los valores de los coeficientes espectrales sólo para frecuencias positivas. En este tipo de espectro, el espectro de amplitud representa $2|a_k|$ vs. $lk\omega$, salvo para la componente continua, para la que se representa $|a_0|$. Esto es así ya que la representación de espectros unilaterales se basa en la expansión para señales reales dada en la expresión (4), por lo que es sólo válida para este tipo de señales.

2.2. Distintas formas de expansión para señales reales

Analicemos cómo es el espectro en el caso de que $x(t)$ es una señal real. Ya que es real, se cumple que su valor es idéntico al de su conjugado, $x(t) = x^*(t)$. Por lo que, teniendo en cuenta (1), se debe cumplir que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t},$$

de donde podemos concluir lo siguiente.

Espectro de una señal real

Los coeficientes espectrales de una señal periódica real cumplen

$$a_k = a_{-k}^*.$$

Es decir los coeficientes espectrales k y $-k$, son uno el complejo conjugado del otro. Por esta razón, los espectros de señales reales periódicas tienen una característica propia, *el espectro de amplitud es una función par y el espectro de fase es una función impar*:

$$x(t) \quad \text{es real} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |a_k| & = |a_{-k}| \\ \angle a_k & = -\angle a_{-k} \end{cases}$$

Esta característica del espectro de señales reales permite escribir la serie de Fourier para señales reales de dos formas alternativas. La primera de ellas es la forma trigonométrica de expansión en funciones coseno, para obtenerla escribamos la expansión (1) como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

usando la relación entre los coeficientes de señales reales $a_{-k} = a_k^*$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

o lo que es lo mismo

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

Escribiendo $a_k = |a_k| e^{j\angle a_k}$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k| cos(k\omega_0 t + \angle a_k). \tag{4}$$

La otra forma alternativa de expresar (1) para señales reales periódicas, se obtiene si escribimos los coeficientes coeficientes espectrales en su forma rectangular

$$a_k = B_k + jC_k.$$

Remplazando esta última expresión en la expansión escrita en función de la parte real $Re\left\{a_k e^{j\omega_0 t}\right\}$, obtenemos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k cos(k\omega_0 t) - C_k sen(k\omega_0 t)\right) \tag{5}$$

Si bien las expresiones de la serie de Fourier para señales reales (expresiones 4 y 5) escritas como combinación de funciones trigonométricas son muy utilizadas, la expresión de la serie de Fourier en función de la expansión en exponenciales complejas (expresión 1) es de más fácil manejo al momento de realizar cálculos, por lo que es la que utilizamos.

Ejemplo N° 2. Consideremos la señal periódica $x(t)$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} cos(2\pi\, t) + cos(4\pi\, t) + \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,(6\pi\, t)$$

cuyo periodo es $T = 1$. Su frecuencia fundamental, definida como $\omega_0 = 2\pi/T$, es $\omega_0 = 2\pi$. Obtengamos la representación en serie de Fourier (ec. 1) de esta señal. Podríamos utilizar la expresión (2) para obtener los coeficientes espectrales. En ves de eso, lo haremos por simple inspección. Para ello, expresemos la señal mediante exponenciales complejas utilizando la relación de Euler,

$$\begin{aligned} x(t) = 1 &+ \frac{1}{4}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) \\ &+ \frac{1}{3j}\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right) \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la ec. (1), vemos que los únicos coeficientes espectrales no nulos son

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3j},$$

y la representación de la serie de Fourier de la señal es

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

Observemos que este conjunto de siete exponenciales pertenece al conjunto armonicamente relacionado con frecuencia fundamental $\omega = 2\pi$. En la figura 2 se muestra la señal $x(t)$ y su espectro.

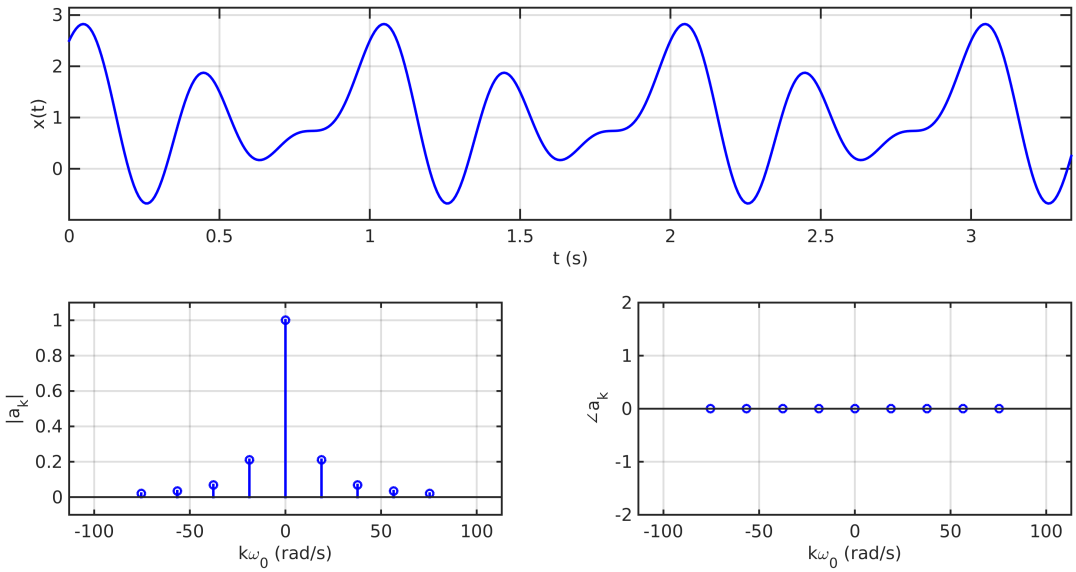

Figura 2: Figura del ejemplo 2

.

Ejemplo N° 3. Consideremos la señal **pulso cuadrado periódico**, definido en un periodo T por

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2, \end{cases}$$

cuya frecuencia es $\omega_0 = 2\pi/T$. Aplicando las expresión que da los coeficientes espectrales (ec. 1) obtenemos:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T1} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{2}{k\omega_0 T}\left\{\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right\} \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad de Euler, la expresión para los coeficientes a_k es

$$a_k = \frac{senk\omega_0 T_1}{k\pi} \quad k \neq 0$$

Donde hemos utilizado la igualdad $\omega_0 T = 2\pi$. Observemos que todos los coeficientes espectrales son reales. En la figura 3 se muestra el espectro de amplitud para distintas relaciones entre T_1 y T.

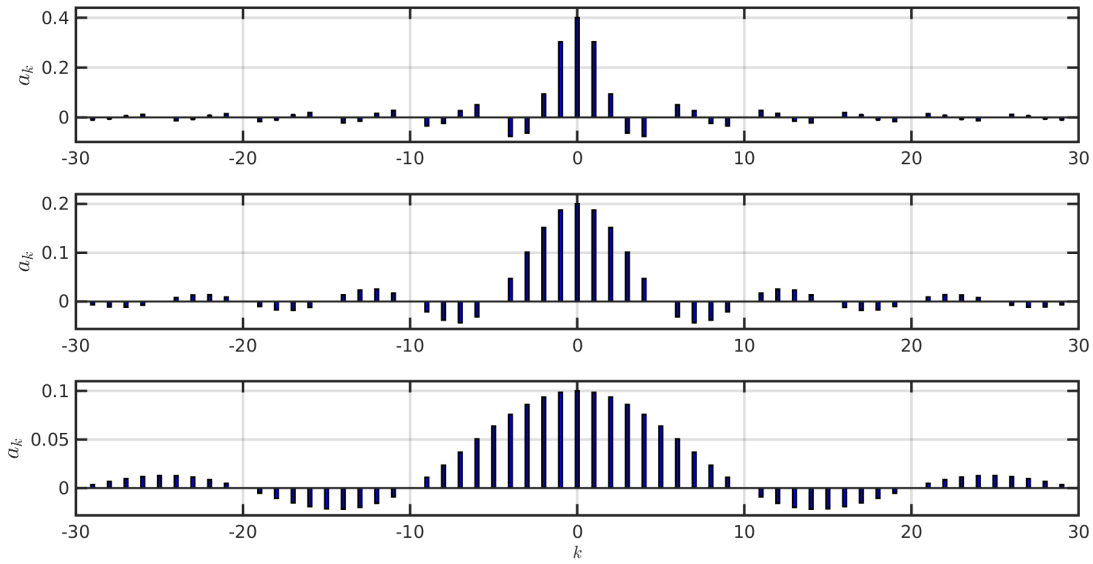

Figura 3: Espectro de la señal pulso cuadrado periódico: a) $T_1/T = 1/5$, b) $T_1/T = 1/10$, c) $T_1/T = 1/20$

Ejemplo N° 4. Para ver cómo converge la serie de Fourier hacia una dada función, veamos graficamente lo que sucede con la suma parcial de las distintas exponenciales complejas que son componentes de la serie de un pulso cuadrado, como el que se muestra en la figura 4. Es decir estamos aproximando al pulso cuadrado con $x_n(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$, para distintos valores de N. Los valores de a_k son los coeficientes espectrales de un pulso cuadrado que ya hemos calculado en el ejemplo 3.

Observando la figura 4, vemos que la serie converge a la función en todos los puntos a medida que aumentamos N salvo en los puntos de discontinuidad ubicados en $\pm T_1$, donde la serie converge al valor medio de los valores del pulso a ambos lados de la discontinuidad.

También podemos observar cómo aparece un oscilación cada vez más comprimida hacia la discontinuidad y cuya amplitud no cambia a medida que aumentamos N. Este fenómeno se denomina ***"Fenómeno de Gibbs"***.

2.3. Series de Fourier y sistemas LTI

Como vimos la serie de Fourier posee gran utilidad ya que permite descomponer (analizar) una señal periódica en exponenciales complejas (Ec. 1). Además, la serie de Fourier posee otra utilidad relacionada a la caracterización de sistemas LTI. Para entender esto, comencemos realizando la siguiente pregunta: *¿cómo responden los sistemas LTI a las señales exponenciales complejas $x(t) = e^{st}$?* Para responder, utilicemos la integral de convolución para calcular la respuesta del sistema a esta señal:

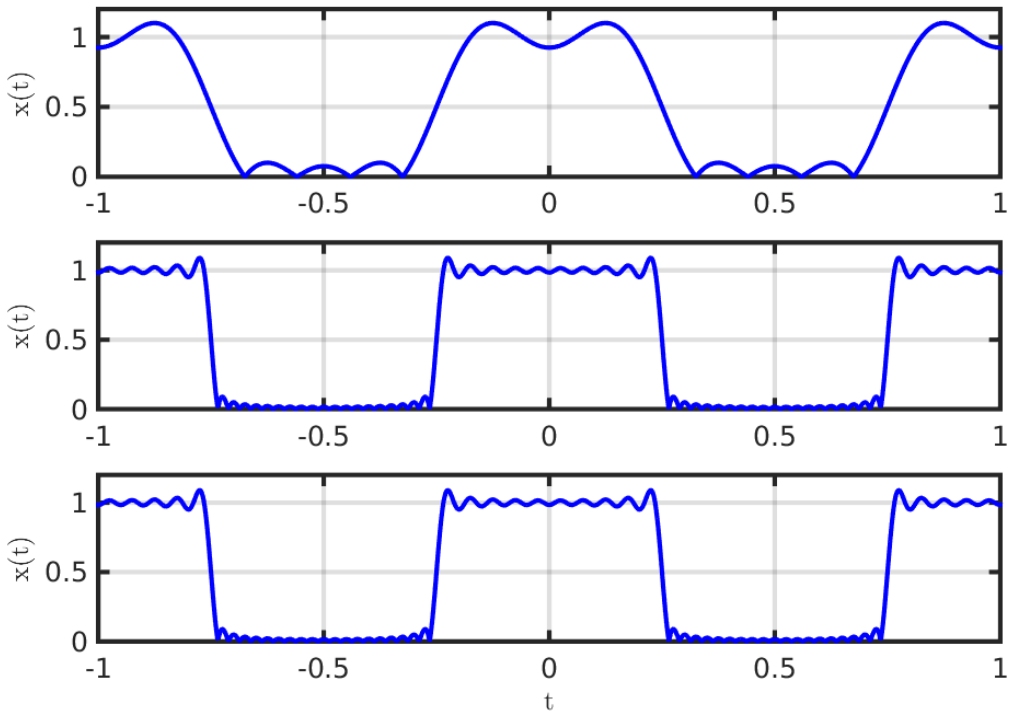

Figura 4: Aproximación de un pulso cuadrado periódico mediante la serie de Fourier (ec. 1) sumando un número finito de términos: a) $N = 3$, b) $N = 20$, c) $N = 100$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) e^{st}
\end{aligned}
$$

Podemos concluir lo siguiente.

Sistemas LTI y Función de Transferencia

La respuesta de un sistema LTI a la exponencial compleja e^{st} es el producto de una función de s y la señal exponencial compleja,

$$y(t) = H(s)e^{st}. \tag{6}$$

Donde función $H(s)$ se define como

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{7}$$

A las función $H(s)$ (ec. 7) se le denomina **Función del Sistema** o **Función de Transferencia**. Observemos que $H(s)$ sólo depende de la variable compleja $s = \sigma + j\omega$, no del tiempo t, y que está relacionada exclusivamente con la función respuesta al impulso del sistema $h(t)$.
Podemos resumir la acción del sistema LTI como

$$y(t) = T\left\{e^{st}\right\} = H(s)e^{st}$$

Por está razón decimos que la exponencial compleja es *una autofunción del sistema LTI y $H(s)$ evaluada en s es el correspondiente autovalor del sistema.*

Lo que la expresión 6 nos indica (respuesta a la pregunta inicial) es que, *si la entrada a un sistema LTI es una señal exponencial compleja, la respuesta del sistema LTI es una exponencial compleja idéntica (con igual frecuencia) a la de entrada, multiplicada por un número complejo $H(s)$, es decir el sistema LTI sólo multiplica la exponencial compleja de entrada por un factor complejo.* Remarquemos que este factor complejo no cambia la frecuencia de la señal, sólo modifica su amplitud y desplaza la señal en el tiempo.

Esta característica de los sistemas LTI hace que si una señal arbitraria puede ser representada como combinación lineal de exponenciales complejas, como por ejemplo

$$x(t) = a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + a_3e^{s_3t} + ... + a_Ne^{s_Nt},$$

la respuesta del sistema es también una combinación lineal de estas exponenciales, en nuestro ejemplo

$$y(t) = a_1H(s_1)e^{s_1t} + a_2H(s_2)e^{s_2t} + a_3H(s_3)e^{s_3t} + ... + a_NH(s_N)e^{s_Nt}. \tag{8}$$

Ejemplo N° 5. Consideremos el sistema LTI cuya acción es:

$$y(t) = x(t-3)$$

Evaluemos primero cuanto vale $H(s)$ para este sistema.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 3) e^{-s\tau} d\tau = e^{-3s}$$

Consideremos la señal $x(t) = 3cos(2\pi t) + 5\,\mathrm{sen}\,(6\pi t)$ y evaluemos la respuesta del sistema utilizando este método. Es conveniente escribir $x(t)$ como combinación lineal de exponenciales complejas

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j2\pi t} + \frac{3}{2} e^{-j2\pi t} + \frac{5}{2j} e^{j6\pi t} - \frac{5}{2j} e^{-j6\pi t}$$

Veamos que a pesar de que la señal es real es posible escribirla como una combinación lineal de cuatro señales exponenciales complejas, cuyos valores de s son imaginarios puros: $s_1 = 2\pi$, $s_2 = -2\pi$, $s_3 = 6\pi$ y $s_4 = -6\pi$. Utilizando la expresión 6 en cada término para calcular la respuesta, obtenemos

$$y(t) = \frac{3}{2} H(2\pi) e^{j2\pi t} + \frac{3}{2} H(-2\pi) e^{-j2\pi t} + \frac{5}{2j} H(6\pi) e^{j6\pi t} - \frac{3}{2j} H(-6\pi) e^{-j6\pi t}.$$

Remplazando la expresión de la función de transferencia del sistema $H(s) = e^{-3s}$

$$y(t) = \frac{3}{2} e^{j2\pi(t-3)} + \frac{3}{2} e^{-j2\pi(t-3)} + \frac{5}{2j} e^{j6\pi(t-3)} - \frac{5}{2j} e^{-j6\pi(t-3)}$$

la cual utilizando la relación de Euler es:

$$y(t) = 3cos(2\pi(t-3)) + 5\,\mathrm{sen}\,(6\pi(t-3))$$

Si bien la respuesta en este ejemplo simple la podríamos obtener por simple inspección, veremos que en otros casos el método resulta ser verdaderamente útil y casi imprescindible para caracterizar la acción de los sistemas LTI.

Función Respuesta en Frecuencia

Si s es un número imaginario puro ($s = j\omega$), la exponencial compleja es

$$x(t) = e^{j\omega t} \qquad \omega \text{ real}$$

En este caso la función de transferencia (expresión (7)) tienen la forma

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\,\omega\,t} dt$$

Las función $H(j\omega)$ recibe el nombre de **Función Respuesta en Frecuencia** del sistema LTI continuo. Si evaluamos la expresión 6 en $s = j\omega$, obtenemos

$$y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

Ante una entrada exponencial compleja de frecuencia ω, *el sistema LTI tiene como respuesta una señal exponencial compleja de la misma frecuencia que la de entrada y cuya amplitud se encuentra multiplicada por la Función Respuesta en Frecuencia evaluada a la frecuencia de la señal de entrada* (ver figura 5). Este factor que multiplica la amplitud de la señal es un número complejo (en general su parte imaginaria no es nula).

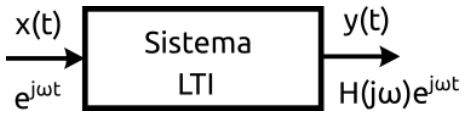

Figura 5: Respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja.

Veamos ahora de manera más general la utilidad de la función respuesta en frecuencia con relación a entradas periódicas a un sistema LTI. Consideremos un sistema LTI continuo cuya entrada es una señal periódica de frecuencia $\omega_0 = 2\pi/T$, cuyo desarrollo en serie de Fourier es

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

dada la linealidad del sistema, la salida es

$$y(t) = T\left\{x(t)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}.$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal periódica

Utilizando la Función Respuesta en Frecuencia podemos expresar la respuesta del sistema LTI como

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, H(jk\omega_0) \, e^{jk\omega_0 t}.$$

Vemos que la respuesta del sistema es una señal periódica que puede representarse con una serie de Fourier con componentes evaluadas a las mismas frecuencias que las correspondientes a la entrada. Cada coeficiente espectral de la salida es el producto $a_k \, H(jk\omega_0)$. ***El efecto del sistema LTI es modificar individualmente cada una de los coeficientes de Fourier de la señal de entrada periódica, multiplicándolo por el valor de la Función Respuesta en Frecuencia a la frecuencia correspondiente***.

Ejemplo N° 6. Consideremos un sistema LTI continuo cuya función respuesta al impulso es

$$h(t) = e^{-t} u(t),$$

y obtengamos la respuesta del sistema a la señal periódica tratada en el ejemplo 2

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

Para ello calculemos la función respuesta en frecuencias del sistema

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \, u(t) \, e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{1 + j\omega}. \end{aligned}$$

La respuesta del sistema es

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} b_k e^{j\,k\,2\pi\,t} = \sum_{k=-3}^{3} a_k H\left(j\,k\,2\pi\right) e^{j\,k\,2\pi\,t}$$

ya que $a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = 1/4$,$a_2 = a_{-2} = 1/2$ y $a_3 = a_{-3} = 1/3$, los coeficientes espectrales de $y(t)$ son

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 H(0) = 1, \\
b_{\pm 1} &= a_{\pm 1} H(\pm j\, 2\pi) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 \pm j2\pi} \right\}, \\
b_{\pm 2} &= a_{\pm 2} H(\pm j\, 4\pi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \pm j4\pi} \right\}, \\
b_{\pm 3} &= a_{\pm 3} H(\pm j\, 6\pi) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{1 \pm j6\pi} \right\}.
\end{aligned}
$$

Para terminar, veamos una propiedad importante de la función respuesta en frecuencia de sistemas LTI conectados en serie. Ya que podemos escribir que para un sistema LTI

$$
H(j\omega)\, e^{j\omega t} = T\left\{ e^{j\omega t} \right\},
$$

si tenemos un sistema en cascada compuesto por dos sistemas LTI en serie, la respuesta del sistema serie a una señal exponencial compleja es

$$
H_s(j\omega)\, e^{j\omega t} = T\left\{ e^{j\omega t} \right\},
$$

donde $H_s(j\omega) = H_1(j\omega) H_2(j\omega)$. Esta relación nos indica que *la respuesta en frecuencia de un sistema serie es la multiplicación de las funciones de respuesta en frecuencia de los sistemas componentes.*

Respuesta en Frecuencia de una conexión serie de sistemas LTI

Para un sistema serie de N componentes LTI, la función respuesta en frecuencias es

$$
H_s(j\omega) = \Pi_{i=1}^{N} H_i(j\omega)
$$

donde $H_i(j\omega)$ son las funciones de respuesta en frecuencia de los sistemas LTI componentes.