Tema 2
Respuesta de sistemas LTI en el dominio del tiempo

En este capítulo tratamos una de las propiedades fundamentales de los sistemas LTI. Mostraremos cómo conociendo la respuesta del sistema a la señal impulso, es posible predecir la respuesta del sistema a una señal de entrada entrada arbitraria. Es decir, conocemos lo que el sistema hace analizando la respuesta del sistema a la señal impulso, sin necesidad de conocer su relación entrada-salida. Además mostramos que las características de la respuesta al impulso, nos muestran cuales son las propiedades del sistema; si es o no causal, si tiene o no memoria y si es estable. Por último, mostramos la forma de especificar la relación entrada-salida de un sistema LTI causal, mediante ecuaciones en diferencias en el caso discreto y ecuaciones diferenciales en el caso continuo.

1. Respuesta de sistemas LTI discretos

Respuesta al impulso de un sistema discreto

Se define la señal *respuesta al impulso* $h[n]$ de un sistema discreto como la respuesta del sistema a la señal de entrada $\delta[n]$,

$$h[n] \equiv \mathcal{T}\left\{\delta[n]\right\} \tag{1}$$

cuando el sistema está en reposo inicial.

Veamos ejemplos de cómo calcular $h[n]$.

Ejemplo N^o 1. La relación entrada-salida del *acumulador discreto* es

$$y[n] \;=\; \sum_{k\;=\infty}^{n} x[k].$$

Para calcular $h[n]$, simplemente remplazamos en la relación entrada-salida la señal $x[n]$, por $\delta[n]$

$$h[n] = \mathcal{T}\{\delta[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

Concluimos que el sistema acumulador discreto posee como señal respuesta al impulso un escalón, $h[n] = u[n]$.

Ejemplo N^o 2. Calculemos la respuesta al impulso del sistema *promediador móvil no causal* especificado por la relación entrada-salida

$$y[n] = \frac{1}{7} \sum_{k=-3}^{k=3} x[n-k].$$

Para calcular $h[n]$ remplazamos $x[n]$ por $\delta[n]$ en la relación entrada salida

$$h[n] = \frac{1}{7} \sum_{k=-3}^{k=3} \delta[n-k].$$

Vemos que $h[n]$ es el pulso cuadrado discreto

$$h[n] = \frac{1}{7} \left\{1, 1, 1, \underline{1}, 1, 1, 1\right\}.$$

Queda como ejercicio probar que todo promediador móvil posee como respuesta al impulso un pulso cuadrado.

1.1. Convolución discreta

Propiedad selección discreta

Vimos anteriormente que una de las propiedades más importantes de la función impulso es

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \tag{2}$$

Esta propiedad se denomina *propiedad de selección*; nos dice que cualquier señal discreta puede expresarse como la combinación líneal de impulsos desplazados en el tiempo $\delta[n-k]$, donde los coeficientes de la combinación líneal son los valores $x[k]$. Así por ejemplo si $x[n]$ es la señal $u[n]$, aplicando (2) obtenemos

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$

Una interpretación útil de la expresión (2) puede obtenerse si pensamos al impulso $\delta[n-k]$ como una señal componente de $x[n]$. En este sentido, $x[k]$ mide cuanto de la señal componente $\delta[n-k]$ existe en la señal $x[n]$.

Veamos ahora de que manera podemos utilizar la expresión (2) y la definición de la función $h[n]$ para encontrar la respuesta de un sistema LTI a una entrada cualquiera $x[n]$.

La respuesta $y[n]$ a una entrada arbitraria $x[n]$ puede expresarse como

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = \mathcal{T}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \right\},$$

en donde hemos utilizado la expresión (2) para representar $x[n]$. Ya que el sistema es lineal podemos escribir que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{T}\left\{\delta[n-k]\right\},$$

y ya que es invariante en el tiempo

$$h[n-k] = \mathcal{T}\{\delta[n-k]\}.$$

Por lo que la salida $y[n]$ puede ser finalmente escrita como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Esta expresión recibe el nombre de *suma de convolución* y a la operación del miembro derecho se la denomina *convolución de* $x[n]$ *con* $h[n]$. Esta operación es un resultado muy importante de la teoría de sistemas.

Convolución discreta

La respuesta de un sistema LTI discreto se puede obtener como la convolución de la entrada $x[n]$ con su respuesta al impulso $h[n]$. La operación convolución se denota mediante el signo $*$, por lo que la salida del sistema se puede expresar como

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{3}$$

En la figura 1 se representa la definición de la respuesta al impulso y la relación (3).

La expresión (3) indica que *la salida de un sistema LTI discreto está completamente caracterizada por la respuesta al impulso* $h[n]$, en otras palabras, *si conocemos* $h[n]$ *podremos predecir la respuesta del sistema ante cualquier entrada* $x[n]$. Remarquemos que la únicas condiciones para que la salida del sistema pueda calcularse mediante la convolución son que sea lineal e invariante en el tiempo.

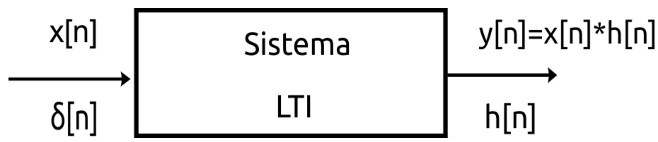

Figura 1: Respuesta de un LTI discreto obtenida mediante la convolución

Ejemplo N^o 3. Consideremos el sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n] = \delta[n - n_0]$, es decir un impulso desplazado. Si queremos encontrar la relación entrada-salida de este sistema sólo tenemos que utilizar la relación de convolución (3) con una entrada genérica $x[n]$

$$
\begin{aligned}
y[n] = x[n] * \delta[n - n_0] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - n_0 - k] \\
&= x[n - n_0]
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado el hecho de que el impulso es siempre nulo, salvo cuando se anula su argumento, es decir en este caso cuando $k = n - n_0$. Hemos hallado que este sistema posee la relación entrada-salida

$$y[n] = x[n - n_0]$$

Como dijimos, para $n_0 > 0$ el sistema se denomina retardo, en caso de $n_0 = 1$ se denomina *retardo unitario*. Podemos utilizar el resultado obtenido para sacar una conclusión más general.

Convolución con el impulso desplazado

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0] \tag{4}$$

Es decir, que siempre que realicemos la convolución de una señal con un impulso desplazado n_0, obtenemos la señal desplazada en el tiempo por n_0.

Ejemplo N^o 4. Consideremos el sistema LTI discreto cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

y encontremos la relación entrada-salida y la respuesta del sistema a la señal $x[n] = u[n]$, utilizando la suma de convolución. Expresemos primero $h[n]$ mediante impulsos:

$$h[n] = \delta[n + 1] + \delta[n - 1]$$

Para obtener la relación entrada salida del sistema con esta $h[n]$, basta utilizar la relación de convolución (3) con una señal genérica $x[n]$:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * x[n] = (\delta[n+1] + \delta[n-1]) * x[n] \\
&= \delta[n+1] * x[n] + \delta[n-1] * x[n] \\
&= x[n+1] + x[n-1],
\end{aligned}
$$

donde utilizando el resultado hallado en el ejemplo 3, hemos encontrado que la relación entrada-salida del sistema es

$$y[n] = x[n+1] + x[n-1]$$

Para el caso particular de la entrada $x[n] = u[n]$,

$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * u[n] = (\delta[n+1] + \delta[n-1]) * u[n] \\
&= \delta[n+1] * u[n] + \delta[n-1] * u[n] \\
&= u[n+1] + u[n-1],
\end{aligned}
$$

encontramos que la respuesta es

$$y[n] = u[n+1] + u[n-1]$$

Ejemplo N^o 5. Consideremos un sistema LTI discreto con la función impulso dada por

$$h[n] = u[n].$$

Queremos conocer cuál es la respuesta del sistema a la señal

$$x[n] = \alpha^n u[n] \;\; \text{con} \;\; 0 < \alpha < 1$$

La figura 2 muestra el comportamiento de $h[n]$ y de $x[n]$. Calculemos $y[n]$ utilizando la suma de convolución. Siendo $h[n] = u[n]$ y $x[n] = \alpha^n u[n]$ con $0 < \alpha < 1$, aplicando la ec. (3) obtenemos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] u[n-k]$$

El producto $u[k]u[n-k]$ es distinto de 0 si $0 < k < n$, por lo que obtenemos

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

si $n \geq 0$ y $y[n] = 0$ para $n < 0$. Para expresar $y[n]$ en todo el rango de n utilizamos la señal escalón,

$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u[n].$$

Remarquemos que la última expresión es la expresión correcta de la señal de salida, si no incluimos el escalón $u[n]$, la expresión no sería correcta.

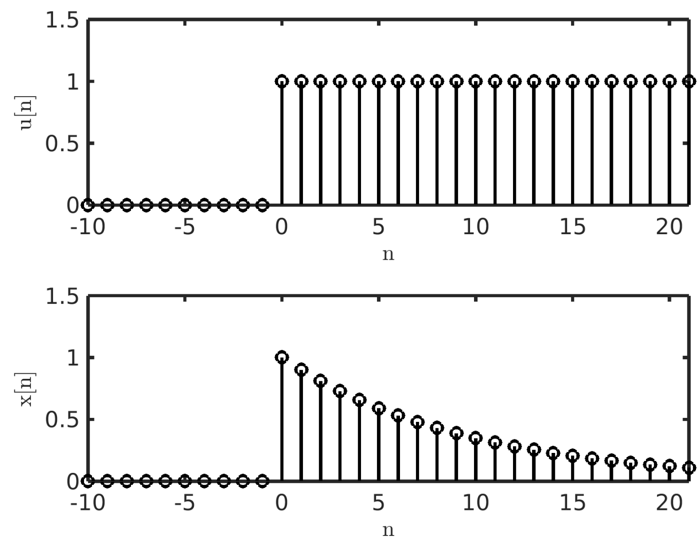

Figura 2: Señal y respuesta al impulso del sistema descripto en Ejemplo N^o 5

Después de ver ejemplos de cómo utilizar la suma de convolución para obtener la respuesta de un sistema, veamos un método útil para calcular la respuesta $y[n]$ con "lápiz y papel" en casos simples. Si bien existen buenos algoritmos de computadora para realizar la convolución de dos señales, este método nos ayuda a interpretar el significado de la expresión (3).

Para utilizar la expresión (3) debemos pensar que tanto la respuesta al impulso como la señal son funciones de k con n fijo. Una forma conveniente de realizar la convolución de $x[n]$ y $h[n]$ es utilizar gráficos de las funciones y seguir los siguientes pasos:

a) Realizamos gráficamente la inversión temporal de la respuesta al impulso para obtener $h[-k]$. Luego obtenemos $h[n-k]$ desplazando en el tiempo la función una cantidad n. Si n es positivo $h[-k]$ se desplaza a la derecha y si es negativo a la izquierda del origen de coordenadas.

b) Para cada k se multiplican los valores de $x[k]$ y $h[n-k]$, sumándose luego para todo valor de k, con n fijo. Así obtenemos el valor de $y[n]$.

c) Se repiten los pasos a) y b) con n variando desde $-\infty$ hasta ∞ para obtener la respuesta $y[n]$.

Ejemplo N^o 6. Resolución gráfica de la convolución.

Calculemos de manera gráfica el ejemplo anterior. La figura 2 muestra el comportamiento de $h[n]$ y de $x[n]$. En la figura 3 se muestra las señales $x[k]$ y $h[n-k]$ para un valor arbitrario $n<0$ y para $n>0$. A partir de esta figura podemos ver que el producto $x[k]h[n-k]$ es siempre 0 para $n<0$. Podemos concluir que $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$ es 0 para $n<0$.

Para $n \geq 0$

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

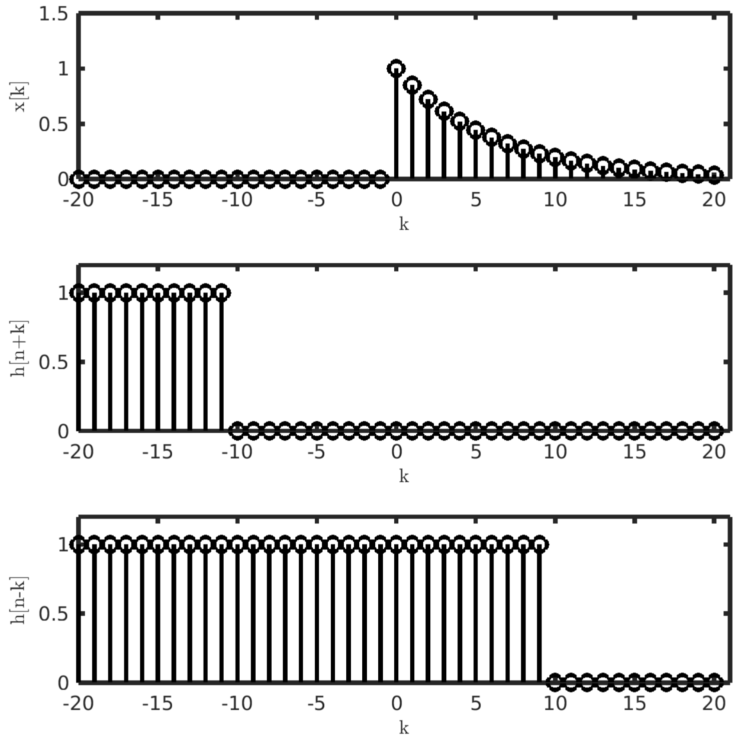

Figura 3: Desplazamiento de h[k] para obtener la convolución de forma gráfica.

Por lo que para $n \geq 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n}\alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

Utilizando la función escalón, podemos expresar la respuesta del sistema para cualquier n como

$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u[n],$$

la cual se representa en la figura 4.

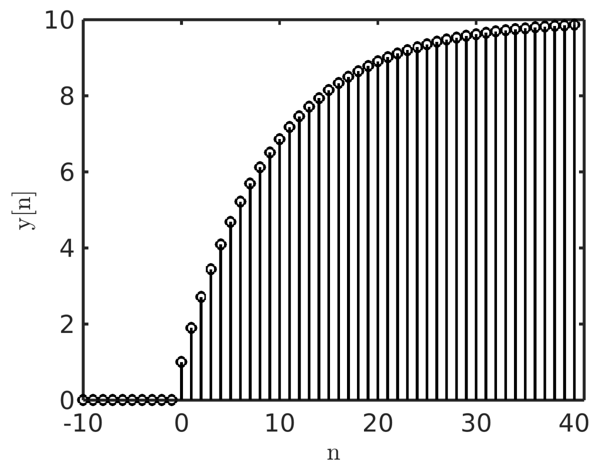

Figura 4: Señal resultado de la convolución descripta en ejemplo N^0 6

Se sugiere utilizar el código `dcondemo` de Matlab a fin de visualizar las operaciones que se realizan en la suma de convolución 2 para obtener la respuesta de un sistema LTI.

2. Respuesta de sistemas LTI continuos

Respuesta al impulso de un sistema continuo

Definimos la *respuesta al impulso* $h(t)$ para un sistema LTI continuo como

$$h(t) \equiv \mathcal{T}\left\{\delta(t)\right\} \tag{5}$$

cuando el sistema está en reposo inicial.

Antes de ver cómo utilizar la respuesta al impulso para obtener la salida de un sistema LTI continuo, veamos un ejemplo de cálculo de $h(t)$.

Ejemplo N^o 7. Obtengamos la respuesta al impulso del promediador móvil continuo causal

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t-\tau)d\tau.$$

Remplazando $x(t)$ por $\delta(t)$, obtenemos $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t-\tau) d\tau.$$

Vemos que la respuesta al impulso es el pulso cuadrado continuo

$$h(t) = u(t) - u(t-T)$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier promediador móvil continuo, la respuesta al impulso de estos sistema es siempre un pulso cuadrado. Compare este resultado con el correspondiente para el sistema promediador móvil discreto.

Ejemplo N^o 8. Calculemos la respuesta al impulso de un sistema LTI definido en un circuito RC, donde la entrada es la tensión en los extremos de la fuente ($x(t) = V_s(t)$) y la salida la tensión en los extremos del capacitor ($y(t) = V_c(t)$). La relación entrada salida de este sistema LTI es

$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_c(t) = \frac{1}{RC} V_s(t) \qquad \text{Cond. inicial } V_c(0) = 0$$

Observemos que en la relación entrada-salida, hemos especificado como condición inicial a $t = 0$ que el capacitor no está cargado o $V_c(0) = 0$, condición necesaria para que el sistema sea LTI (ver sección 6 para más información sobre este punto).

La solución de esta ecuación diferencial da la relación entrada-salida explícita del sistema. La expresión de la relación entrada-salida (solución de la ecuación diferencial) es:

$$V_c(t) = \frac{1}{RC} \left(\int_0^t V_s(\tau)\, e^{\tau/RC}\, d\tau \right) e^{-t/RC}$$

Para calcular la respuesta al impulso $h(t)$, remplazamos la entrada por un impulso y resolvemos la integral.

$$h(t) = \left(\int_0^t \delta(\tau)\, e^{\tau/RC}\, d\tau \right) e^{-t/RC}$$

Utilizando la definición operativa de la señal impulso continua, obtenemos que

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

Vemos que la respuesta al impulso es la curva de descarga del capacitor. Para realizar un análisis de unidades de la última expresión, tenga en cuenga que la señal impulso posee unidades de tensión.

2.1. Convolución continua

Para ver cómo podemos obtener la respuesta de un sistema LTI continuo procedemos de manera similar al caso discreto.

Vimos en el tema anterior que una de las propiedades de la señal impulso continua es que cualquier señal continua $x(t)$ puede expresarse como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \tag{6}$$

La expresión anterior es análoga a (2) y nos indica cómo podemos representar la señal continua $x(t)$ como una combinación líneal de impulsos continuos desplazados en el tiempo $\delta(t-\tau)$, donde los coeficientes de la combinación líneal son los valores $x(\tau)$. El valor de $x(\tau)$ mide cuánto de la componente $\delta(t-\tau)$ existe en la señal $x(t)$.

Ya que estamos tratando de caracterizar un sistema continuo que cumple las propiedades de línealidad e invariancia temporal, podemos obtener la respuesta $y(t)$ a una entrada arbitraria $x(t)$, utilizando (6) de la siguiente manera

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \mathcal{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}.$$

Usando la propiedad de linealidad

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\Bigg\{\delta(t-\tau)\Bigg\}d\tau,$$

por la invariancia temporal del sistema

$$h(t-\tau) = \mathcal{T}\left\{\delta(t-\tau)\right\}.$$

Finalmente, la salida $y(t)$ puede expresarse como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

La expresión anterior define la operación convolución en el caso continuo y a su miembro derecho se le denomina *integral de convolución*. Este resultado es análogo al del caso disreto (ec. 3) y es un resultado importante de la teoría de sistemas LTI continuos.

Convolución continua

La respuesta $y(t)$ del sistema LTI continuo puede obtenerse como la convolución de la señal de entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso del sistema $h(t)$,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \tag{7}$$

Si bien denotaremos la operaciones convolución discreta y continua con el mismo símbolo $(*)$, el contexto indicará claramente a que operación nos referimos. En la figura (5) se representa la caracterización de un sistema LTI continuo mediante la operación convolución.

Figura 5: Respuesta de un LTI continuo obtenida mediante la convolución

Convolución de señales

Es conveniente aclarar que la operación convolución no está restringida a operar solamente con $h(t)$ o $h[n]$. Por el contrario, si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos señales, la operación convolución de $x_2(t)$ y $x_1(t)$ define una nueva señal $x_3(t)$ definida por

$$x_3(t) = x_2(t) * x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau, \tag{8}$$

para el caso continuo. En el caso discreto está definida por

$$x_3[n] = x_2[n] * x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k]x_1[n-k] \tag{9}$$

Para obtener la respuesta de un sistema LTI continuo mediante la operación convolución procederemos de manera análoga al caso discreto, como veremos en los siguientes ejemplos. Para comprender mejor el significado de la operación convolución, haremos el cálculo de forma analítica utilizando la expresión 7 y luego lo haremos de manera gráfica.

Ejemplo N^o 9. Calculemos mediante convolución, la respuesta del sistema LTI a $x(t)$, siendo

$$x(t) = e^{-at}u(t) \;\; \text{y} \;\; h(t) = u(t)$$

donde $a > 0$,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \left\{ \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \right\} u(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a} u(t)$$

Ejemplo N^o 10. Consideremos el mismo sistema y señal de entrada que las del ejemplo 9,

$$x(t) = e^{-at}u(t) \text{ y } h(t) = u(t)$$

donde $a > 0$. Para calcular la respuesta del sistema, apliquemos la expresión (7), visualizando la operación mediante gráficas. En la figura 6 representamos $x(\tau)$, $h(\tau)$ y $h(t-\tau)$ para $t < 0$ y $t > 0$. Podemos ver que para $t < 0$, el producto $x(\tau)h(t-\tau)$ es cero, por tanto $y(t) = 0$ para $t \leq 0$. Para $t > 0$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 < \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

Por tanto $y(t)$ para $t > 0$ es

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

Finalmente, para todo t la respuesta del sistema es

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t).$$

La cual se representa en la figura 7.

Se sugiere utilizar el código `ccondemo` de Matlab a fin de visualizar las operaciones que se realizan en la suma de convolución (2) para obtener la respuesta de un LTI.

3. Propiedades de la operación convolución

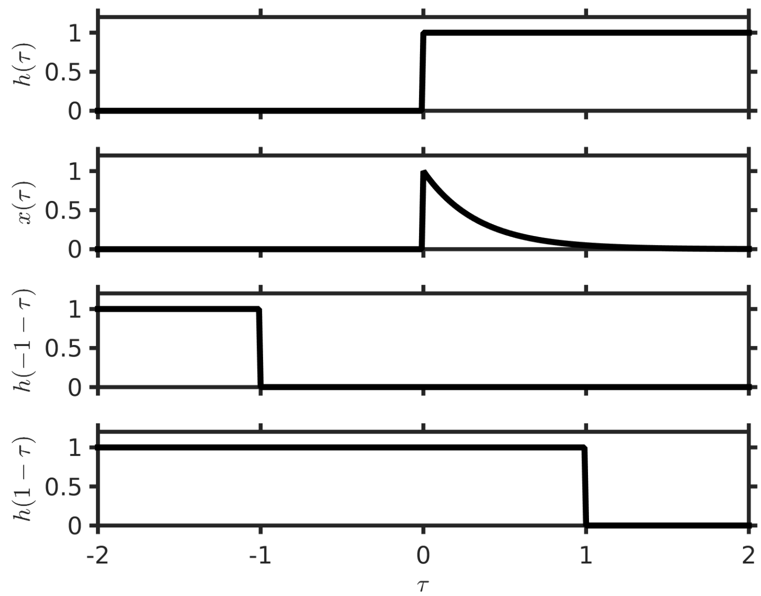

Figura 6: Cálculo gráfico de la convolución descripto en el ejemplo 10: $h(\tau) = u(\tau)$, b) $x(\tau) = e^{-at}$, c) $h(-1-\tau)$ (desplazamiento de h para $\tau < 0$, d) $h(1-\tau)$ (desplazamiento de h para $\tau > 0$)

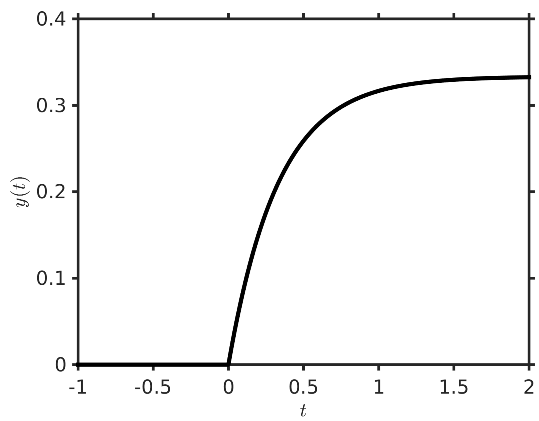

Figura 7: Solución del ejemplo N^0 5, $y(t) = 1/a\,(1 - e^{-at})\,u(t)$.

Propiedades de la operación convolución

Tanto en el caso discreto como en el continuo, la operación convolución tiene las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
\text{conmutativa} \rightarrow \quad & x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \\
\text{distributiva} \rightarrow \quad & x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \\
\text{asociativa} \rightarrow \quad & x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t).
\end{aligned}
$$

Observemos que la propiedad conmutativa implica que es equivalente calcular la convolución de dos señales mediante cualquiera de las dos integrales siguientes:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

Es importante tener esto en cuenta al momento de calcular la respuesta de un sistema mediante la convolución, ya que a veces será más simple calcular $y(t) = h(t) * x(t)$, en vez de $y(t) = x(t) * h(t)$. Expresiones y consideraciones análogas son válidas para el caso discreto.

Propiedad conmutativa de la convolución

La operación convolución es conmutativa, por lo que para un sistema LTI discreto se cumple que

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Una expresión análoga es válida para sistemas LTI continuos. Ya vimos en el ejemplo 4 que esta propiedad puede ser útil cuando usamos la operación convolución para calcular la respuesta del sistema.

Propiedad distributiva de la convolución

La operación convolución es distributiva, por tanto para sistemas LTI continuos se cumple que

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t),$$

Está propiedad tiene una interpretación muy útil en la interconexión de sistemas (ver fig. 8), siendo válida también para sistemas discretos.

Como consecuencia de las propiedades distributiva y conmutativa de la convolución tenemos que

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t).$$

Propiedad asociativa de la convolución

Otra propiedad útil de la convolución es la asociatividad, que para sistemas LTI discretos expresa que

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

Está propiedad está representada en la figura 8. De acuerdo a la propiedad asociativa *la interconexión de dos sistemas en serie es equivalente a la un único sistema cuya función respuesta al impulso es la convolución de las funciones respuesta al impulso de los sistemas por separado*. Consideraciones análogas valen para sistemas LTI continuos.

La propiedad de asociatividad vale para cualquier número de sistemas conectados en cascada serie. Si además tenemos en cuenta la propiedad de conmutatividad, obtenemos otra importante característica de los sistemas LTI:

> En un sistema en en que se conectan sistemas LTI en serie o cascada, el orden en que los sistemas se disponen no modifica la respuesta del sistema.

Es importante enfatizar que esta propiedad vale para sistemas en cascada en los que todos los sistemas componentes son LTI. Por el contrario, si los sistemas son no líneales, la respuesta del sistema depende del orden en que se conecten los sistemas componentes.

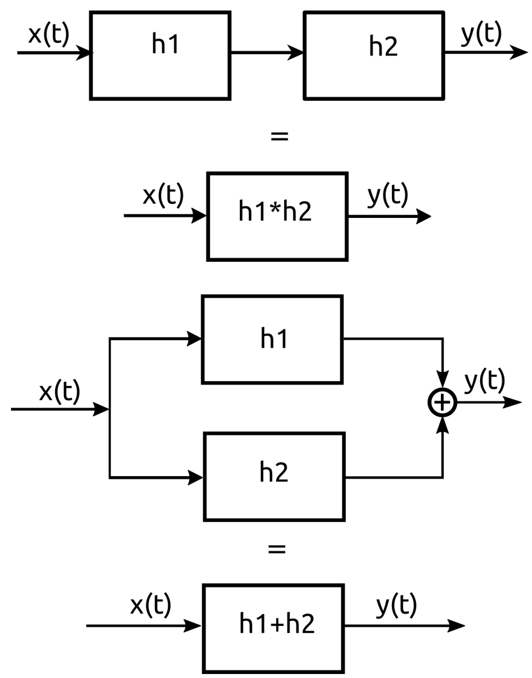

Figura 8: Propiedades de la operación convolución aplicadas a la respuesta al impulso de la interconexión de sistemas

4. Propiedades de sistemas LTI

Anteriormente vimos como podemos caracterizar los sistemas LTI mediante la respuesta al impulso y la operación convolución. Repetimos aquí estos resultados.

$$
\begin{aligned}
y[n] =& x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
y(t) =& x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

La respuesta al impulso h es importante ya que es la base del análisis en el dominio del tiempo de los sistemas LTI. Ambas expresiones nos indican que *un sistema LTI está completamente caracterizado por su respuesta al impulso*. Con esto queremos decir que *sólo conociendo la respuesta al impulso podemos saber cómo es la respuesta del sistema frente a cualquier entrada*, por tanto el sistema está determinado de manera unívoca por la respuesta al impulso. Es importante enfatizar que este resultado sólo vale para sistemas líneales invariantes en el tiempo. Si el sistema no cumple este requisito, la respuesta al impulso no sirve para caracterizar al sistema.

Ejemplo N^o 11. Consideremos el sistema discreto LTI cuya función respuesta al impulso es el pulso cuadrado $h[n] = u[n+2] - u[n-3]$. Utilicemos la operación convolución para obtener la respuesta del sistema frente a una entrada arbitraria, es decir la relación entrada-salida.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \\
&= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\
&= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(u[k+2] - u[k-3]\right) x[n-k] \\
&= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k+2]x[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-3]x[n-k] \\
&= \textstyle\sum_{k=-2}^{\infty} x[n-k] - \sum_{k=3}^{\infty} x[n-k]
\end{aligned}
$$

obtenemos finalmente

$$
y[n] = \sum_{k=-2}^{2} x[n-k].
$$

Esta expresión da explícitamente la relación entrada-salida del sistema, por tanto el sistema LTI especificado por $h[n]$ es único, a pesar de que pueden existir diferentes formas equivalentes de implementarlo.

Veamos que la respuesta el impulso no especifica de manera unívoca a un sistema que no es LTI, ya sea debido a que no es líneal o por que no es invariante en el tiempo. Consideremos la $h[n]$ del ejemplo 4. Existen muchos sistemas no lineales diferentes que poseen esta respuesta al impulso y que frente a una entrada dada $x[n]$ tienen respuestas $y[n]$ distintas, por ejemplo los sistemas no lineales

$$
\begin{aligned}
y[n] =& \quad (x[n+1] + x[n-1])^2, \\
y[n] =& \quad \mathrm{Max}(x[n+1], x[n-1]),
\end{aligned}
$$

tienen todos la $h[n]$ del ejemplo 4, como es posible verificar. A pesar de que poseen la misma respuesta al impulso, todos responden de manera distinta frente a una dada entrada, consecuentemente, *un sistema que no es LTI no está caracterizado por su función respuesta al impulso.*

Existen muchas propiedades de los sistemas LTI que no comparten otros sistemas. Como vimos anteriormente, algunas de estas propiedades se derivan en forma directa de las propiedades de la operación convolución. Otras propiedades están vinculadas con las características propias de los sistemas LTI, como veremos a continuación.

4.1. Sistemas LTI con y sin memoria

En el tema anterior vimos que un sistema sin memoria es aquel en que la respuesta al tiempo n solo depende de la entrada en el mismo instante n. A partir de las propiedades expresadas en la expresión (3), podemos deducir que para que un sistema LTI discreto no tenga memoria se debe cumplir que $h[n]$ es igual a 0 para $n \neq 0$. Por tanto, podemos enunciar la siguiente propiedad de los sistemas sin memoria.

Respuesta al impulso de sistemas sin memoria

La respuesta al impulso de los sistemas LTI sin memoria tiene la forma

$$h[n] = K\delta[n] \qquad \text{o} \qquad h(t) = K\delta(t)$$

donde K es una constante.

En este caso, la respuesta del sistema obtenida como $y[n] = x[n] * h[n]$ es

$$y[n] = x[n] * K\,\delta[n] = Kx[n]$$

Esta propiedad nos permite identificar sistemas con memoria a través de la forma de h, ya que podemos asegurar que si $h[n] \neq 0$ para algún valor de $n \neq 0$, el sistema posee memoria. Lo mismo podemos decir para sistemas continuos. Por ejemplo, por inspección de la respuesta al impulso podemos asegurar que los sistemas descriptos en los ejemplos 4, 5, 10 y 11 poseen memoria.

Observemos que el sistema LTI identidad, definido por la relación $y[n] = x[n]$ o $y(t) = x(t)$, tiene como función respuesta al impulso un impulso, $h[n] = \delta[n]$, $h(t) = \delta(t)$.

4.2. Sistema LTI inverso

Tal como vimos en el tema anterior, un sistema es invertible si existe otro sistema que conectado en serie con este, da como respuesta el valor de la entrada en el primero. Esto quiere decir que la interconexión del sistema y su sistema inverso operan sobre la entrada de manera similar al sistema identidad. Por tanto, podemos dar el siguiente enunciado.

Respuesta al impulso de un sistema LTI invertible

Para que un sistema LTI con respuesta al impulso h sea invertible, debe existir otro sistema LTI de respuesta al impulso h_1 tal que

$$h_1[n] * h[n] = \delta[n] \qquad \text{o} \qquad h_1(t) * h(t) = \delta(t)$$

Ejemplo N^o 12. Consideremos el sistema LTI caracterizado por

$$h[n] = u[n]$$

El sistema posee memoria y su relación entrada-salida puede calcularse utilizando la relación de convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k],$$

ya que $u[n-k] = 0$ para $k > n$ y $u[n-k] = 1$ para $k \leq n$. Este sistema es el sistema sumador o acumulador que describimos en el tema anterior, donde mostramos que su sistema inverso es el sistema descripto por

$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

Por tanto la respuesta al impulso del sistema inverso es

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Es simple verificar que el sistema LTI y su inverso cumplen que $h_1[n] * h[n] = \delta[n]$

$$\begin{aligned}
h_1[n] * h[n] &= (\delta[n] - \delta[n-1]) * u[n] \\
&= \delta[n] * u[n] - \delta[n-1] * u[n] \\
&= u[n] - u[n-1] \\
&= \delta[n]
\end{aligned}$$

El proceso de recuperación de $x(t)$ o $x[n]$, modificada por el procesamiento realizado por un sistema, se denomina *operación de deconvolución*. Un sistema inverso tiene como salida la señal $x(t)$, cuando su entrada es $y(t) = h(t) * x(t)$, por lo que el sistema inverso resuelve el problema de deconvolución. Este tipo de operación es muy importante en el procesamiento de señales. Por ejemplo, en la transmisión a través de líneas telefónicas es necesario agregar un sistema que sea el sistema inverso de la línea de transmisión para poder disminuir el cambio de la señal de entrada producido por la línea.

4.3. Causalidad en sistemas LTI

Ya vimos que un sistema es causal si la respuesta en un dado instante t_0 depende sólo del valor de la entrada en ese mismo instante o en instantes previos, es decir que la relación entrada-salida es tal que $y(t_0)$ depende de $x(t)$ con $t \leq t_0$. A partir de la expresión (7) podemos deducir que para que un sistema LTI continuo sea causal debe cumplirse que los coeficientes de $x(\tau)$ deben ser 0 para $\tau > t$. Esto significa que $h(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$ o lo que es lo mismo $h(t) = 0$ para $t < 0$. Similares consideraciones valen para un sistema discreto. Por lo que podemos enunciar la siguiente propiedad.

Respuesta al impulso de sistemas causales

La respuesta al impulso de un sistema LTI causal cumple

$$h[n] = 0 \ \ n < 0 \qquad \text{o} \qquad h(t) = 0 \ \ t < 0$$

Esto significa que la respuesta al impulso debe ser nula antes de que el impulso sea aplicado a $t = 0$. Esto es consistente con la definición de causalidad y puede verse de manera intuitiva. Recuerde que la respuesta al impulso es la salida del sistema como respuesta a un impulso aplicado a $t = 0$. Los sistemas causales son no anticipativos, esto quiere decir que no pueden generar una respuesta antes de que se aplique la señal de entrada. Requerir que la respuesta al impulso sea 0 para $t < 0$ es equivalente a decir que el sistema no puede responder antes de la aplicación del impulso.

A partir de la respuesta al impulso, podemos ver que el sistema LTI descripto en el ejemplo 5 es causal. El sistema desplazamiento temporal, para el cual $h(t) = \delta(t - t_0)$, es causal si $t_0 > 0$ y no causal para $t_0 < 0$. El sistema descripto en el ejemplo 4 es no causal, $h[n] \neq 0$ para $n < 0$.

Para un sistema LTI discreto causal, la suma de convolución (3) puede escribirse de la siguiente manera:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

De manera análoga, para un sistema LTI continuo y causal, la integral de convolución (7) es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Tenga en cuenta cómo han cambiado los límites de la sumatoria y de la integral en las últimas dos expresiones.

La condición que la causalidad impone sobre la respuesta al impulso, $h(t) = 0 \ \ t < 0$ o $h[n] = 0 \ \ n < 0$, es totalmente equivalente a la siguiente condición.

Condición de reposo inicial

Si la entrada de un sistema LTI es 0 hasta un instante t_0 (n_0), la respuesta debe ser cero hasta dicho instante,

$$x(t) = 0 \ \ (t < t_0) \Rightarrow y(t) = 0 \ \ (t < t_0)$$
$$x[n] = 0 \ \ (n < n_0) \Rightarrow y[n] = 0 \ \ (n < n_0).$$

Esta condición se denomina *condición de reposo inicial* del sistema, en inglés *initial rest*.

Si un sistema cumple con esta condición se dice que está en reposo inicial. Dicho esto de otra manera, existe una doble implicación entre la causalidad y la condición de reposo inicial para un sistema LTI

$$\text{LTI causal} \Longleftrightarrow \text{LTI en reposo inicial}$$

Veamos primero porqué si el sistema es causal está en reposo inicial. Para un sistema LTI causal podemos asegurar que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Por lo que si la entrada es $x(t) = 0$ hasta t_0, podemos afirmar que

$$y(t) = \left(\int_{t_0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right) u(t-t_0),$$

es decir que $y(t) = 0 \ t < t_0$, por tanto el sistema está en reposo inicial.

Ahora veamos el otro sentido de la implicación, es decir la afirmación que si el sistema LTI está en reposo inicial, es causal. Ya que el sistema está en reposo inicial, podemos asegurar que si $x(t) = 0$ si $t < t_0$, entonces $y(t) = 0$ para $t < t_0$. En particular, fijando $t_0 = 0$ y $x(t) = \delta(t)$, la condición de reposo inicial asegura que $h(t) = 0$ para $t < 0$, o lo que es lo mismo que el sistema es causal.

Ejemplo N^o 13. Consideremos el sistema promediador móvil definido por

$$y[n] = \frac{1}{3}\left\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\right\}$$

Este es un sistema LTI. Veamos si el sistema está en reposo inicial, para ello supongamos como entrada una señal genérica $x[n]$ que cumple $x[n] = 0$ para $n < n_0$. Calculemos $y[n_0 - 1]$

$$
\begin{aligned}
y[n_0-1] &= \frac{1}{3}\left\{x[n_0-2]+x[n_0-1]+x[n_0]\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{0+0+x[n_0]\right\} \\
&= \frac{1}{3}x[n_0] \neq 0
\end{aligned}
$$

Vemos que $y[n_0-1] \neq 0$, por lo tanto el sistema no está en reposo inicial. Podemos asegurar que el sistema no es causal, ya que el sistema es LTI. Esto esta de acuerdo con la forma que posee la relación entrada salida del promediador.

Remarquemos que tanto la condición de causalidad y la equivalencia con la condición de reposo inicial sólo valen para sistemas LTI, al respecto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo N^o 14. Consideremos el sistema incrementalmente líneal definido por

$$
y[n] = 2x[n] + 5
$$

Este no es un sistema LTI, pero es un sistema causal. Veamos si el sistema está en reposo inicial, para ello supongamos como entrada una señal genérica $x[n]$ que cumple $x[n] = 0$ para $n < n_0$. Calculemos $y[n_0-1]$

$$
\begin{aligned}
y[n_0-1] &= 2x[n_0-1]+5 \\
&= 0+5 \\
&= 5 \neq 0
\end{aligned}
$$

Vemos que $y[n_0-1] \neq 0$, por lo tanto el sistema no está en reposo inicial. En este caso la condición de equivalencia causalidad $\leftrightarrow$ reposo inicial no se cumple, ya que el sistema no es LTI.

Si bien la noción de causalidad se aplica a sistemas, es común referirse a una señal como *señal causal* si es nula para $t < 0$, o $n < 0$.

4.4. Estabilidad de un sistema LTI

Recordemos que un sistema es BIBO estable si cumple que para toda entrada acotada, la respuesta del sistema está acotada. Esto significa que un sistema discreto es BIBO estable si se cumple que

$$
|x[n]| < C \ \forall n \Rightarrow |y[n]| < B \ \forall n.
$$

Si aplicamos esta condición a la suma de convolución en (3) podemos obtener la condición de estabilidad de un sistema LTI discreto,

$$
\begin{aligned}
|y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \\
&= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \\
&< C \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,
\end{aligned}
$$

válido para todo n. Por lo que podemos deducir que para que $y[n] \leq B$ y por tanto el sistema LTI discreto sea BIBO estable, su respuesta al impulso debe ser *absolutamente sumable* ($\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Es posible demostrar que la condición anterior es una condición necesaria y suficiente para que un sistema LTI discreto sea BIBO estable. Podemos resumir esto en el siguiente enunciado.

Respuesta al impulso de sistemas LTI discretos estables

La respuesta al impulso de un sistema LTI discreto BIBO estable cumple

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{sistema LTI estable discreto}
$$

Mediante un razonamiento similar se puede demostrar que un sistema LTI continuo es BIBO estable si su función respuesta al impulso es *absolutamente integrable*.

Respuesta al impulso de sistemas LTI continuos estables

La respuesta al impulso de un sistema LTI continuo BIBO estable cumple

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{sistema LTI estable continuo}
$$

Un ejemplo de un sistema discreto BIBO estable es el sistema desplazamiento temporal, cuya respuesta al impulso es $h[n] = \delta[n - n_0]$, ya que

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n - n_0]| = 1
$$

Mientras que el sistema sumador continuo, cuya respuesta al impulso es $h(t) = u(t)$, no es BIBO estable ya que su respuesta al impulso no es absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt = \infty.$$

5. Respuesta al escalón de un sistema LTI

Además de la respuesta al impulso existe otra señal que se utiliza para caracterizar sistemas LTI, denominada *respuesta al escalón*.

Respuesta al escalón

$$s(t) = \mathcal{T}\left\{u(t)\right\} \qquad \text{o} \qquad s[n] = \mathcal{T}\left\{u[n]\right\}$$

Teniendo en cuenta la definición de la respuesta al escalón y utilizando las relación de convolución para un sistema LTI discreto, podemos ver que $s[n] = u[n] * h[n]$; desde la cual podemos obtener las relaciones que vinculan $s[n]$ y $h[n]$:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad s[n] - s[n-1] = h[n]$$

De forma análoga, para un sistema continuo encontramos que

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

6. Sistemas LTI continuos descriptos por ecuaciones diferenciales

Una gran cantidad de sistemas continuos tienen su relación entrada-salida descripta por una ecuación diferencial. Para que una ecuación diferencial represente la relación entrada-salida de un sistema LTI, debe un cumplir un conjunto de condiciones que discutiremos a continuación.

Sistemas LTI continuos descriptos por ecuaciones diferenciales

Para que una ecuación diferencial describa la relación entrada-salida de un sistema LTI debe ser lineal, poseer coeficientes constantes y tener todas sus condiciones iniciales nulas. La expresión general de este tipo de ecuación diferencial es

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{10}$$

donde $y(t)$ es la salida y $x(t)$ es la entrada del sistema; los coeficientes a_k y b_k son constantes reales y N es el orden de la ecuación o dimensión del sistema (se corresponde con el mayor orden de la derivada de $y(t)$). Consideramos $x(t) = 0$ hasta el instante t_0 ("instante inicial").

Como dijimos las condiciones iniciales de la ecuación diferencial deben ser todas nulas para que represente la relación entrada salida de un sistema LTI, dicho de otra manera,

$$\left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0} = 0, \qquad k = 0, 1, ..., N-1.$$

Si consideramos un sistema en general (posiblemente no LTI) cuya relación entrada salida está especificada por una ecuación diferencial, la solución $y(t)$ no se encuentra completamente determinada por la ecuación diferencial, es necesario especificar un conjunto de *condiciones auxiliares o iniciales*. Diferentes elecciones de estas condiciones iniciales guían a diferentes relaciones entrada-salida. En general estas condiciones iniciales consisten en especificar los valores de

$$\left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0}, \qquad k = 0, 1, ..., N-1.$$

para algún valor de t_0. *El número de condiciones iniciales coincide con el orden de la ecuación diferencial*, así para una ecuación de primer orden debemos especificar una condición inicial. *Las condiciones iniciales resumen toda la información acerca del pasado del sistema que es necesaria para determinar salidas futuras. No es necesaria información adicional sobre la salida o entrada en instantes previos al considerado como inicial.*

Un ejemplo de un sistema descripto por una ecuación diferencial del tipo (10) es el sistema definido en un circuito serie RC, en el que la entrada es la tensión de la fuente $x(t) = V_s(t)$ y la respuesta es la tensión en los extremos del capacitor $y(t) = V_c(t)$. La ecuación diferencial que describe la relación entrada-salida para este sistema es la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

Para que esta relación entrada-salida corresponda a un sistema LTI, la condición inicial debe ser $y(t_0) = 0$, es decir el capacitor debe encontrarse descargado.

Recordemos que una solución particular de una ecuación diferencial es una solución en que todas las constantes en la expresión de la solución están especificadas. Por el contrario, la solución general posee todas las constantes indeterminadas. La solución particular se obtiene evaluando la solución general en las condiciones iniciales de (10).

La solución de la ecuación (10) puede expresarse como

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

donde $y_p(t)$ es una solución particular de (10) y $y_h(t)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{d^N y_h(t)}{dt^N} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \tag{11}$$

Veamos porqué es necesario que las condiciones iniciales de la ecuación 10 sean todas nulas para que represente la relación entrada-salida de un sistema LTI. *El cumplimiento de esta condición asegurará además que el sistema es causal.*

Para comprender la razón de la afirmación anterior, consideremos el sistema LTI de primer orden descripto por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t).$$

con condición inicial $y(0) = y_0$ y $x(t) = 0$ para $t < 0$. Primero obtengamos la relación entrada-salida del sistema para $t \geq 0$. La solución completa de la ecuación es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

donde $y_h(t)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea y $y_p(t)$ es una solución particular para la ecuación diferencial inhomogénea.

La ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0,$$

tiene como solución

$$y_h(t) = Ce^{-at}.$$

Podemos obtener la solución $y_p(t)$ de la inhomogénea, por el método de variación de la constante en el que se propone como solución $y_p(t) = C(t)e^{-at}$. Si se remplaza esta solución en la ecuación diferencial inhomogénea se puede obtener la dependencia explícita de $C(t)$. La solución $y_p(t)$ queda expresada como

$$y_p(t) = \left\{ \int_{t=0}^{t} x(\tau) e^{a\tau} d\tau \right\} e^{-at}.$$

Sumando $y_h(t)$ y $y_p(t)$ obtenenemos la solución

$$y(t) = Ce^{-at} + \left\{ \int_{t=0}^{t} x(\tau) e^{a\tau} d\tau \right\} e^{-at} \tag{12}$$

Esta solución es válida para $t \geq 0$ y la constante C se determina exigiendo que la solución cumpla con la condición inicial $y(0) = y_0$, por lo que la solución final es

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \left\{ \int_{t=0}^{t} x(\tau) e^{a\tau} d\tau \right\} e^{-at} \qquad t \geq 0.$$

Veamos ahora que ocurre para $t < 0$. Para ver cómo es la solución en este rango de t utilizaremos la condición de que la entrada $x(t)$ es nula hasta 0. Ya que $x(t) = 0$ para $t < 0$, la solución en este intervalo coincide con la solución de la ecuación homogénea (11)

$$y(t) = y_0 e^{-at} \;\; t < 0.$$

La salida para todo el rango de valores de t es por tanto

$$y(t) = y_0 e^{-at} u(-t) + \left(y_0 e^{-at} + \left\{ \int_{t=0}^{t} x(\tau) e^{a\tau} d\tau \right\} e^{-at} \right) u(t) \tag{13}$$

Para que el sistema sea lineal, a partir del principio de superposición dedujimos que el sistema debe cumplir la condición

$$\text{si} \quad x(t) = 0, \; \forall t, \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 \; \forall t$$

Por lo que para que la solución (13) cumpla con la linealidad del sistema, el valor de la condición inicial debe ser nulo, $y_0 = 0$.

Además si sabemos que el sistema es LTI y causal, conocemos que el sistema debe cumplir la condición de reposo inicial, es decir debe cumplir,

$$x(t) = 0 \quad (t < 0) \rightarrow \quad y(t) = 0 \;\; (t < 0)$$

Observando la expresión de la solución (13) para $t < 0$, vemos que para cumplir con esta condición el valor de $y_0 = 0$.

Remarquemos el resultado que hemos obtenido. Un sistema cuya relación entrada salida está descripta por la ecuación (10) con condiciones iniciales nulas, es un sistema LTI causal. Si $x(t) = 0$ para $t < 0$, su solución es

$$y(t) = \left\{ \int_{t=0}^{t} x(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \right\} u(t). \tag{14}$$

Si el sistema descripto por (10) no cumple con la condición de reposo inicial, el sistema ni es LTI, ni es causal.

A $y_h(t)$ se le denomina *respuesta natural o libre* del sistema. Observe que $y_h(t)$ se obtiene igualando a cero la entrada del sistema ($x(t) = 0$), por lo que a $y_h(t)$, se la denomina también *respuesta a entrada nula* ($y_{zi}(t)$). La respuesta a entrada nula $y_{zi}(t)$ sólo depende de las características del sistema descripto por la ecuación diferencial y de la condición inicial o estado inicial del sistema.

La solución $y_p(t)$ depende de las características del sistema y de la señal de entrada considerada. Se la denomina también *respuesta forzada* o *respuesta en estado nulo*.

La respuesta al impulso $h(t)$ del sistema LTI descripto por (10), se puede obtener remplazando la entrada en esta ecuación diferencial por el impulso $\delta(t)$ y fijando las condiciones iniciales en 0.

$$\frac{d^N h(t)}{dt^N} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \qquad c.i. \rightarrow \text{nulas}$$

Es posible obtener la respuesta al impulso como solución de la ecuación diferencial, esto tiene la dificultad de que debemos resolver una ecuación diferencial en que aparecen las funciones singulares $\frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$. No utilizaremos este método para hallar $h(t)$. Posteriormente en el curso describiremos métodos basados en transformadas que permiten obtener $h(t)$.

En el caso particular en que el sistema es de primer orden (ver ejemplo), $N = 1$ en ec. (10),

$$\frac{dh(t)}{dt} + ah(t) = \delta(t),$$

podemos utilizar la solución dada por la expresión (14) para hallar $h(t)$ (condiciones inciales nulas en $t = 0$, sistema en reposo inicial),

$$\begin{aligned} h(t) &= \left\{ \int_{t=0}^{t} \delta(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \right\} u(t) \\ &= e^{-at} u(t) \end{aligned}$$

7. Sistemas LTI discretos descriptos por ecuaciones en diferencias

El mismo rol que poseen las ecuaciones diferenciales para describir sistemas continuos, lo tienen las *ecuaciones en diferencias* en la descripción de sistemas discretos.

Sistemas LTI discretos descriptos por ecuaciones en diferencias

Para que una ecuación en diferencias describa la relación entrada-salida de un sistema LTI discreto debe ser lineal, poseer coeficientes constantes y tener todas sus condiciones iniciales nulas. La expresión general de este tipo de ecuación diferencial es

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{15}$$

donde $y[n]$ es la salida y $x[n]$ es la entrada del sistema; los coeficientes a_k y b_k son constantes reales. El orden N en la ecuación es igual al mayor retardo temporal que aparece en los términos que contienen la salida $y[n]$, es decir $y[n-N]$. Consideramos $x[n] = 0$ hasta el instante n_0 ("instante inicial").

Como dijimos las condiciones iniciales de la ecuación en diferencias deben ser todas nulas para que represente la relación entrada salida de un sistema LTI. En este caso las condiciones iniciales o auxiliares consisten en especificar los N valores

$$y[n_0-1], \quad y[n_0-2], \quad \dots \quad, y[n_0-N].$$

Por ejemplo, la ecuación en diferencias que describe la relación entrada salida de un acumulador discreto es

$$y[n] - y[n-1] = x[n],$$

la cual es de primer orden, $N = 1$.

De manera análoga a las ecuaciones diferenciales vistas en el sección anterior, una ecuación en diferencias puede resolverse de manera exacta. La solución en este caso es

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n],$$

donde $y_h[n]$ es la solución de la ecuación en diferencias homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

y $y_p[n]$ es una solución particular de la ecuación en diferencias completa o inhomogénea. También en este caso la solución de la ecuación homogénea se denomina *respuesta natural* o *respuesta a entrada nula* del sistema y la solución de la inhomogénea se denomina *respuesta natural* o *respuesta a entrada nula*.

La ecuación (15) no especifica completamente la relación entrada-salida del sistema, para esto es necesario especificar N condiciones auxiliares o iniciales.

Si el sistema LTI es causal, como ya indicamos, cumple con la condición de reposo inicial, es decir cumple con la condición de que si $x[n] = 0$ para $n < n_0$ entonces $y[n] = 0$ para $n < n_0$. Esta condición especifica completamente la solución de la ecuación en diferencias.

Sistema LTI recursivo

Una forma alternativa de expresar (15) es

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\} \tag{16}$$

Esta ecuación expresa de manera explícita $y[n]$ como función de los valores previos de la entrada y la salida del sistema. El sistema representado por una ecuación en diferencias del tipo 15, o lo que es lo mismo por la ecuación 16, con $N > 0$, se denomina *sistema recursivo*.

Observando la última expresión, vemos la necesidad de especificar las N condiciones iniciales, ya que para calcular la respuesta del sistema $y[n]$ empezando en n_0 deberemos especificar $y[n_0 - 1]$, $y[n_0 - 2]$ ..., $y[n_0 - N]$ conjuntamente con los valores $x[n_0 - 1]$, $x[n_0 - 2]$ ..., $x[n_0 - M]$.

Si $N > 0$, la ecuación (16) es denominada *ecuación recursiva* ya que especifica un procedimiento recursivo para determinar la respuesta del sistema en función de valores de la entrada y de valores previos de la salida.

Sistema LTI no recursivo

Si $N = 0$, la ecuación (16) se reduce a

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \tag{17}$$

esta ecuación recibe el nombre de *ecuación no recursiva* ya que no son necesarios valores previos de la salida para especificar el valor $y[n]$, representa un *sistema no recursivo*. En este caso especial no necesitamos especificar las condiciones auxiliares para determinar $y[n]$, ya que la ecuación en diferencias es de orden $N = 0$.

La determinación de la respuesta al impulso de sistemas LTI discretos puede hacerse de manera directa a través de (16), mediante la expresión

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k h[n-k]\right\}. \tag{18}$$

Si la ecuación en diferencias que especifica el sistema es no recursiva, $N = 0$ en la expresión anterior, la respuesta al impulso es

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{19}$$

Observemos que en este caso la respuesta al impulso tiene un número finito de términos distintos de 0, o dicho de otra manera, tiene una duración finita, por este motivo a este tipo de sistemas se los denomina *sistemas de respuesta al impulso finita* o abreviadamente *sistemas FIR*, siglas de la denominación en inglés *finite impulse response*. Observemos que la ecuación (17) no es más que la suma de convolución $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$.

En el caso de que $N > 0$ en la expresión (18), la respuesta al impulso del sistema tiene en general una duración infinita o lo que es lo mismo, un número infinito de términos. Sistemas de este tipo se denominan *sistemas de respuesta al impulso infinita* o *sistemas IIR*, del inglés *infinite impulse response*.

Ejemplo N^o 15. Consideremos el sistema LTI acumulador discreto, cuya relación entrada-salida está descripta por la siguiente ecuación en diferencias de primer orden

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \qquad \text{o} \qquad y[n] = x[n] + ay[n-1]$$

y calculemos su salida para la entrada para $x[n] = K\delta[n]$. Esta es una ecuación recursiva (ecuación en diferencias de primer orden) en la que necesitaremos especificar una condición inicial para hallar $y[n]$. Para la entrada especificada, $x[n] = 0$ para $n < 0$. Ya que el sistema es causal, la condición de reposo inicial implica que $y[n] = 0$ para $n < 0$, por lo que tomamos como condición inicial $y[-1] = 0$ y a partir de $n = 0$, utilizamos la ecuación 16 para determinar $y[n]$,

$$\begin{aligned} y[0] =& K\delta[0] + ay[-1] = K \\ y[1] =& K\delta[1] + ay[0] = aK \\ y[2] =& K\delta[2] + ay[1] = a^2K \\ &... \\ &... \\ &... \\ y[n] =& K\delta[n] + ay[n-1] = a^nK. \end{aligned}$$

La salida del sistema para la entrada especificada es

$$y[n] = a^nKu[n].$$

La respuesta al impulso del sistema se obtiene haciendo $K = 1$

$$h[n] = a^nu[n].$$

Ya que la respuesta al impulso tiene un número infinito de términos es un sistema IIR, lo cual es consistente con el hecho de que es un sistema recursivo.

8. Representación en diagramas de bloques:

Una característica muy importante de los sistemas LTI descriptos por ecuaciones diferenciales o por ecuaciones en diferencias es que pueden ser representados mediante la interconexión de bloques de operaciones elementales. Este tipo de representación facilita el análisis del sistema. Además la representación mediante diagrama de bloques es de considerable valor al momento de simular estos sistemas en computadoras o de implementar un hardware que realice las operaciones del sistema.

Veamos un ejemplo de la representación mediante diagrama de bloques de un sistema LTI discreto descripto por

$$y[n] + ay[n-1] = x[n]$$

Para representar el sistema mediante los bloques de operaciones elementales, es conveniente escribir la ecuación en diferencias del siguiente modo

$$y[n] = x[n] - ay[n-1]$$

El diagrama de bloques que representa este sistema se muestra en la figura (9).

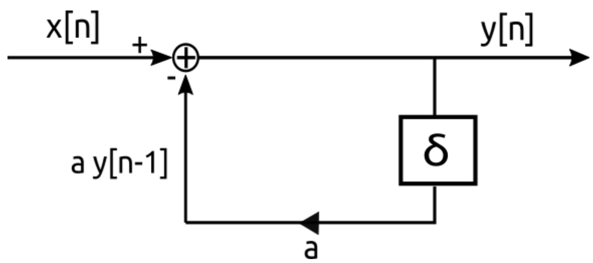

Figura 9: Diagrama de bloques que representa el sistema $y[n] + ay[n-1] = x[n]$

Para ver la representación mediante diagramas de sistemas LTI continuos consideremos el siguiente sistema

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

Es conveniente escribir la ecuación diferencial del siguiente modo

$$y(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{a}x(t)$$

El miembro derecho de la ecuación indica que para hallar la expresión explícita de $y(t)$ necesitamos tres operaciones: multiplicación por una constante, suma y diferenciación. La representación del sistema se muestra en la figura 10.

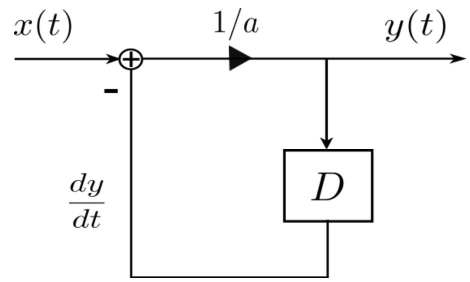

Figura 10: Diagrama de bloques de sistemas continuos del sistema $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$

Si bien la representación del sistema de la figura 10 es válida, no es la representación que se utiliza normalmente, ya que los bloques de diferenciación son difíciles de implementar en la práctica y extremadamente sensibles a errores y al ruido. Para obtener una mejor representación escribamos la ecuación diferencial del siguiente modo

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + x(t).$$

e integremos la expresión entre los límites $-\infty$ y t.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [x(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

Si el sistema es LTI causal, debido a la condición de reposo inicial, la integral da el valor de $y(t)$.

De esta manera, podemos representar el sistema mediante un diagrama de bloques que solo conste de las operaciones de suma, multiplicación por un coeficiente e integración. En la figura 11 se representa del sistema mediante el integrador y se muestra una representación del bloque integrador.

Los integradores son mucho más fáciles de implementar en la práctica que los bloques de diferenciación, y no son tan sensibles al ruido. Es importante observar que en el caso continuo, la existencia de un bloque integrador en un sistema impone la necesidad de que el sistema tenga memoria.

Otra manera de escribir la expresión que da la respuesta del sistema mediante el integrador es

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [x(\tau) - ay(\tau)] d\tau,$$

la cual hace evidente que necesitamos especificar la condición inicial $y(t_0)$ para poder hallar $y(t)$. El valor de $y(t_0)$ es el valor guardado en el integrador al tiempo t_0.

Si bien hemos mostrado los bloques básicos que representan sistemas discretos y continuos de primer orden, es posible interconectar estos bloques para representar y simular sistemas de mayor orden como veremos posteriormente.

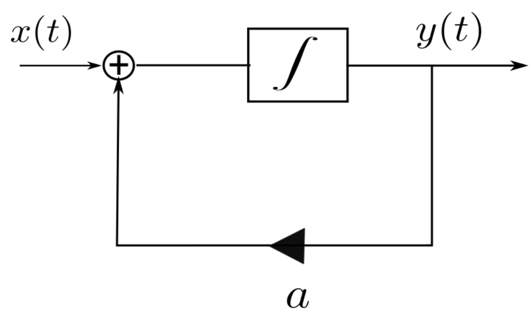

Figura 11: Diagrama de bloques de sistemas continuos: el integrador en remplazo del diferenciador.