Tema I

Diego Leonardo Valladares
Dpto. de Física - Univ. Nac. de San Luis

23 de agosto de 2021

Índice

En la primera parte de este tema daremos el concepto de señal, explicaremos cómo se describen matemáticamente las señales, daremos su representación y las clasificaremos según diversas características.

En la segunda parte, describiremos lo que entenderemos por sistema, daremos sus principales propiedades y clasificación.

1. Concepto de señal

Una señal se define formalmente como una función de una o más variables que representa una magnitud física y contiene información sobre el comportamiento o naturaleza de un fenómeno. Ejemplo de señales son la voz humana, las imágenes de televisión, la temperatura y la presión atmosférica, información transmitida por cambio de tensión eléctrica en un línea de transmisión, etc. Dentro de la gran variedad de señales, las señales eléctricas son las que se miden y pueden ser analizadas con mayor facilidad, es por eso que la mayoría de las señales provenientes de procesos físicos se transforman en señales eléctricas para su posterior análisis. Por ejemplo, muchas variables físicas como la temperatura, la presión, la voz, la humedad y la intensidad de la luz son transformadas mediante transductores en señales de tensión o corriente que varían con el tiempo, para luego ser analizadas.

Es cierto que podemos concluir que las señales son idénticas a las funciones matemáticas. Pero al usar el término «señal» ponemos énfasis en que las señales transportan *información* de algún tipo.

Las señales son representadas matemáticamente como funciones de una o más variables independientes. Si una señal puede representarse mediante una función de una única variable independiente diremos que es *unidimensional*, si posee m variables independientes la señal es *m-dimensional*. Por ejemplo $S(t) = 4t + 1$ o $L(t) = sen(t)$ son expresiones que representan señales unidimensionales, mientras que $I(x, y) = 3\, cos(x, y)$ representa una señal de dos variables (2-dimensional o bidimensional). Otro ejemplo de señal bidimensional lo constituye una imagen, ya que representa distintos colores o tonos de gris (uno para cada pixel) en función de dos variables espaciales. En este curso sólo trataremos señales representadas como funciones de una sola variable independiente, la cual en la mayoría de los casos será la variable tiempo t.

En los ejemplos anteriores, ha sido posible representar la señal por una función matemática. Existen señales que no poseen una representación matemática analítica, como es el caso de la voz humana que puede representarse en una gráfica que muestra la variación de la presión acústica en función del tiempo. En algunos casos podremos representar estas señales utilizando una aproximación mediante la expansión en algún grupo de funciones base, como por ejemplo

$$x(t) \sim \sum_{i=1}^{N} A_i\, cos(2\pi f_i\, t + \theta_i),$$

donde $x(t)$ es la señal, las $\{A_i, f_i, \theta_i\}$ son las amplitudes, frecuencias y fases de las funciones armónicas que son base de la expansión. Los valores $\{A_i, f_i, \theta_i\}$ pueden depender del tiempo.

En muchas aplicaciones la señal es generada por varios sensores o fuentes simultáneamente, lo que lleva a la necesidad de representar la señal en la forma de un vector, en el que cada componente es una señal que proviene de un sensor diferente. Este tipo de señales se denominan *multicanal*.

2. Clasificación

Las señales se pueden clasificar según distintos criterios, daremos a continuación algunas de las clasificaciones más útiles.

2.1. Señales continuas y discretas

Consideraremos dos tipos básicos de señales: señales continuas y señales discretas. Una señal es continua si la variable independiente t es una variable continua. Por otro lado, una señal discreta sólo está definida para valores discretos de t. Ejemplos de señales continuas son la señal de la voz, el valor del voltaje en un circuito RC y la variación de la presión con la altitud en la atmósfera. Como ejemplos de señales discretas podemos citar a la secuencia de 1 y 0 en cualquier circuito digital, la secuencia de los valores de temperatura media diaria y la variación diaria de los valores en la Bolsa de Comercio.

Para distinguir la señales continuas de las discretas utilizaremos la convención de representar la variable independiente por la letra t entre paréntesis para las continuas, es decir las representaremos como $x(t)$. En el caso de señales discretas representaremos la variable independiente por la letra n entre llaves, es decir por $x[n]$, donde n sólo toma valores enteros ($n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$). Nos referiremos a las señales discretas como *secuencias temporales discretas* o simplemente como *secuencias*. En las figuras 1 y 2 se muestra un ejemplo de la representación gráfica de una señal continua y una señal discreta, respectivamente.

En caso de ser posible, especificaremos las señales utilizando una función matemática, por ej. $x(t) = 2cos(3t)$, o indicando explícitamente los valores que toma para cada tiempo como por ej.

$$x[n] = \begin{cases} 3 & |n| < 4 \\ 0 & |n| \geq 4 \end{cases}$$

En el caso de secuencias de duración finita también utilizaremos la siguiente notación

$$x[n] = \{2, \underline{1}, 0, 3, -5\}$$

indicando los valores de la señal en el intervalo que posee valores no nulos, el valor subrayado indica el valor de la señal para $n = 0$. En el caso de este ejemplo la señal es nula salvo en $x[-1] = 2$, $x[0] = 1$, $x[1] = 0$, $x[2] = 3$, $x[3] = -5$.

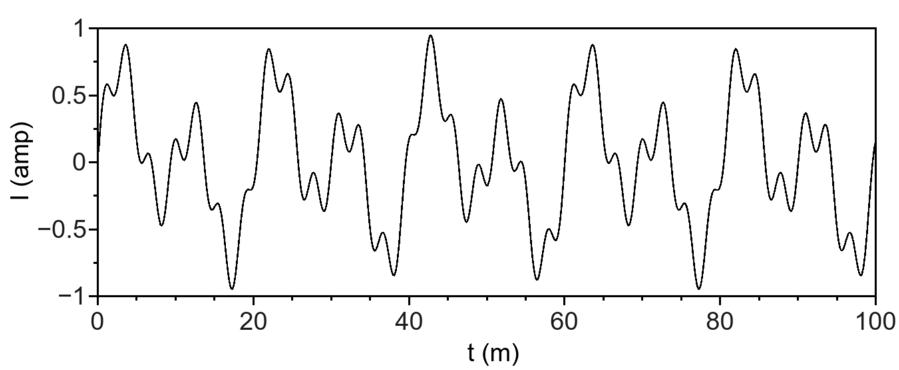

Figura 1: Representación gráfica de una señal continua

Como dijimos una señal discreta $x[n]$ representa un fenómeno para el cual la variable independiente es inherentemente discreta. Existe una importante clase de señales discretas que aparecen al efectuar

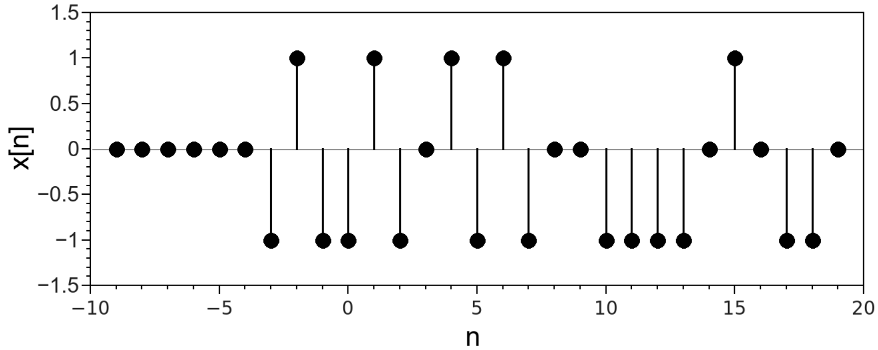

Figura 2: Representación gráfica de una señal discreta

un muestreo (*sampling*) de una señal continua $x(t)$. En este caso la señal discreta $x[n]$ representa las muestras sucesivas de una señal $x(t)$ que proviene de un fenómeno de variación continua:

$$x[n] = x(t_n) \;\; n = ... - 1, 0, 1, 2, 3....$$

Al intervalo entre muestras sucesivas se le denomina *intervalo o tiempo de muestreo*. Si las muestras se toman a intervalos iguales, entonces:

$$x[n] = x(nT_s) \;\; n = ... - 1, 0, 1, 2, 3....$$

Donde T_s es el *tiempo de muestreo*. El número de muestras tomadas por unidad de tiempo ($f_s = 1/T_s$) se denomina *frecuencia de muestreo*. En la figura 3 se representa el proceso de muestreo de una señal continua y en la figura 4 se muestra la señal obtenida discreta por el muestreo.

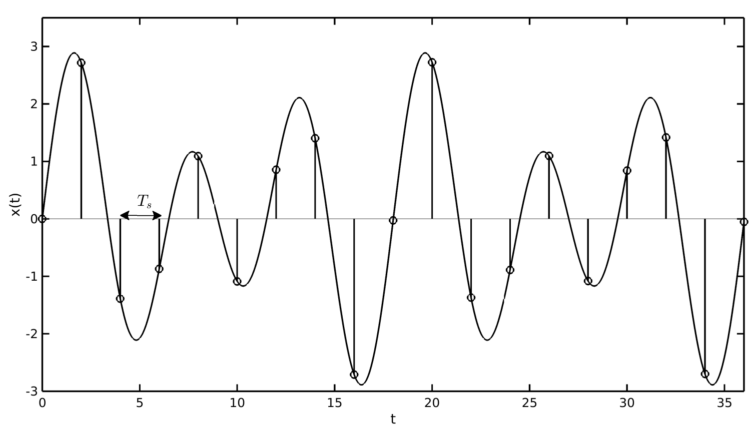

Figura 3: Esquema del proceso de muestreo de una señal continua: señal continua muestreada con $T_s = 2$.

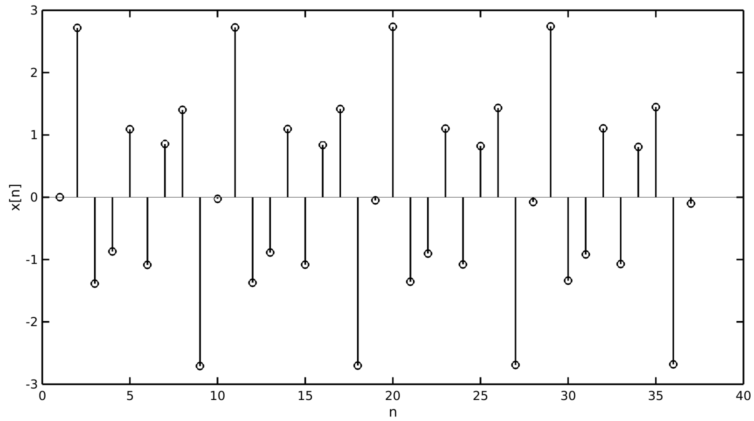

Figura 4: Esquema del proceso de muestreo de una señal continua: señal discreta obtenida por el muestreo de la señal mostrada en la figura 3

2.2. Señales analógicas y digitales

Si una señal puede tomar cualquiera de los valores del intervalo continuo $[a, b]$, pudiendo ser $a = -\infty$ y $b = \infty$, la señal se denomina *analógica*. Si la señal puede tomar un número finito de valores dentro de un intervalo, de denomina *digital*. Si bien las señales continuas son usualmente analógicas, las señales discretas pueden ser analógicas (ej. señal continua muestreada) o digitales (ej. secuencia digital binaria).

2.3. Señales deterministas y aleatorias

Una señal es determinista cuando es generada por un fenómeno determinista, es decir un fenómeno cuyo comportamiento en el futuro es conocido con anterioridad, o lo que es lo mismo el comportamiento del fenómeno puede ser anticipado. Este tipo de señales puede ser especificada por la expresión de una función matemática de la variable independiente. Ejemplo de este tipo de señales son la onda cuadrada periódica y un pulso rectangular.

Las señales aleatorias son aquellas que toman valores al azar para cada valor de t. El ruido generado en el amplificador de un receptor de radio o televisión es un ejemplo de una señal aleatoria. En la figura 5 se muestra un ejemplo de una señal aleatoria, donde vemos que la amplitud de la señal fluctúa entre valores positivos y negativos sin ningún tipo de patrón regular que nos permita predecir su comportamiento en el futuro.

2.4. Señales complejas y reales

Una señal es compleja si toma valores en el campo de los números complejos, teniendo parte imaginaria no nula. Si la parte imaginaria de los valores de la señal es nula, se dice que la señal es real o lo que es lo mismo, una señal es real si toma valores en el campo de los números reales. Si la parte real es nula, se dice que la señal es imaginaria pura.

Una señal compleja posee dos representaciones alternativas. Escribiendo el número complejo en representación cartesiana o rectangular:

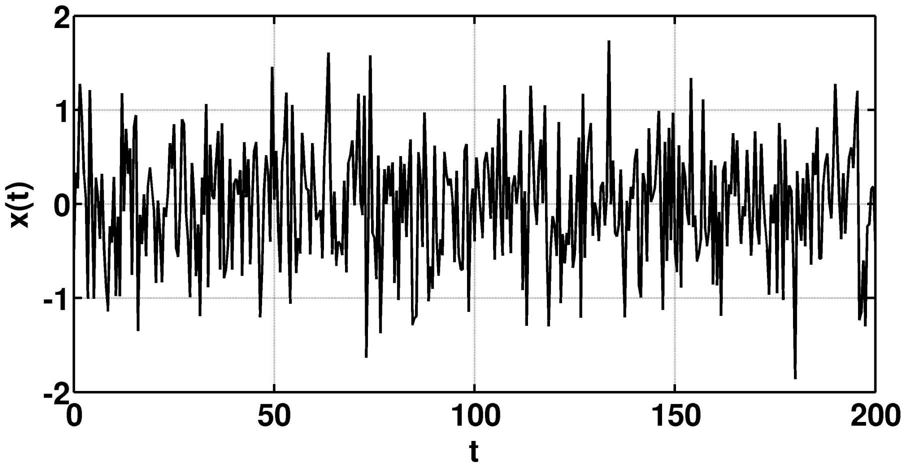

Figura 5: Ejemplo de señal aleatoria

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t),$$

donde $x_r(t)$ es la parte real, $x_i(t)$ es la parte imaginaria y $j = \sqrt{-1}$. También puede escribirse la señal en forma polar:

$$x(t) = r(t)e^{j\theta(t)}$$

donde r es el módulo o magnitud del número complejo y θ es su fase o ángulo.

Remarquemos un concepto importante. Todas las señales que obtenemos a partir de sensores, como la tensión obtenida mediante un osciloscopio o la temperatura mediante un termómetro, son señales reales. Es decir, todas las señales con que trabajamos en ingeniería son reales. *Por razones vinculadas con el método de análisis y caracterización de señales, consideramos a todas las señales como complejas*, una señal real como una señal compleja con para imaginaria nula. Podríamos discutir todo lo referente a las señales y los sistemas considerando las señales como reales en todos los pasos que requiere su análisis, pero esta forma de proceder es considerablemente más engorrosa.

2.5. Señales simétricas (pares) y antisimétricas (impares)

Una señal real es simétrica o par si se cumple:

$$x(-t) = x(t), \qquad x[-n] = x[n]$$

Una señal real es antisimétrica o impar si cumple:

$$x(-t) = -x(t), \qquad x[-n] = -x[n]$$

Ejemplos de señales pares e impares son mostrados en la figura (6). Siempre una señal impar cumple que $x(0) = 0$, ya que es la única manera de que se verifique $x(0) = -x(0)$.

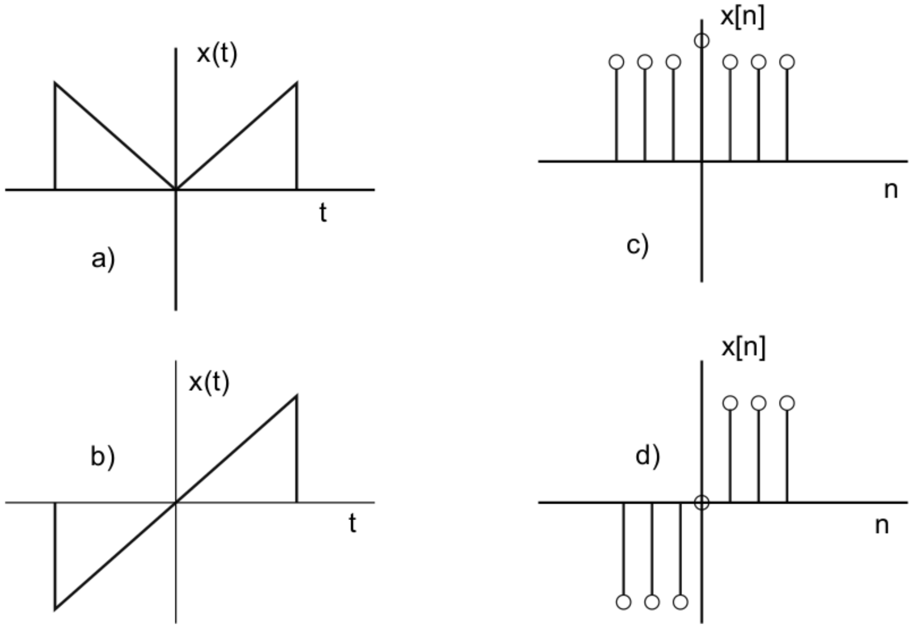

Figura 6: Ejemplo de señales pares (a y c) e impares (b y d)

Una señal $x(t)$ siempre puede ser representada como la suma de una señal par y una impar:

$$x(t) = \mathcal{E}\{x(t)\} + \mathcal{O}\{x(t)\}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{x(t)\} &= \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \\ \mathcal{O}\{x(t)\} &= \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \end{aligned} \tag{1}$$

A $\mathcal{E}\{x(t)\}$ se la denomina *componente par* y a $\mathcal{O}\{x(t)\}$ *componente impar* de $x(t)$. De manera similar, esto es válido para una señal $x[n]$.

Las definiciones anteriores son válidas para señales reales, en el caso de señales complejas se utiliza la noción de *simetría conjugada*. Se dice que una señal compleja $x(t)$ (o de manera análoga $x[n]$) es conjugada simétrica si cumple que:

$$x(-t) = x^*(t)$$

Para que $x(t)$ sea idéntica a su conjugada simétrica debe cumplirse que su parte real sea par y su parte imaginaria sea impar.

2.6. Señales periódicas y no periódicas

Diremos que una señal $x(t)$ es periódica si existe algún valor τ distinto de 0 tal que

$$x(t) = x(t + \tau),$$

para todo t. Ya que la relación se cumple para todo t, también es cierto que para una señal periódica

$$x(t) = x(t + m\tau),$$

para todo t y m entero. Ejemplos de señales periódicas se muestran en la figura (7).

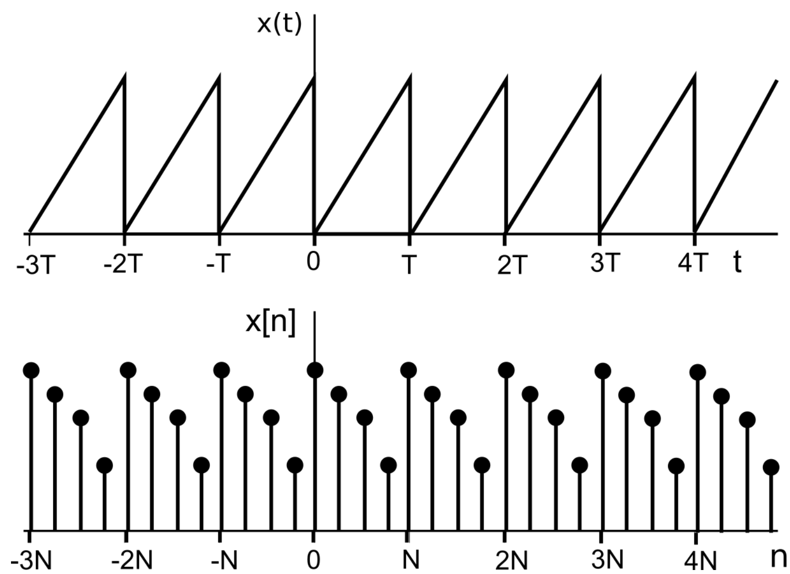

Figura 7: Ejemplo de señales periódicas

El *periodo fundamental* o simplemente *periodo* T es el menor valor positivo de τ para el cual la condición de periodicidad de la señal se cumple. La definición no es válida para una señal constante, para la cual el periodo no está definido.

El recíproco del periodo se denomina *frecuencia fundamental* f

$$f = \frac{1}{T},$$

la cual se mide usualmente en hertz (Hz) o ciclos por segundo. La *frecuencia angular* ω está definida por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{f},$$

que se mide en rad/seg. Nos referiremos a ω simplemente como frecuencia.

La definición de una señal periódica discreta es análoga a la anterior. Una secuencia es periódica si existe un número positivo η que cumple

$$x[n] = x[n + \eta].$$

Al menor valor positivo de η se le denomina periodo N. Definiciones análogas de ω y f son válidas para el caso discreto.

Es importante observar que:

- una secuencia obtenida mediante muestreo de una señal continua periódica puede no ser periódica,
- la suma de dos señales continuas periódicas puede no ser periódica,
- la suma de dos señales discretas periódicas siempre es periódica.

2.7. Señales de energía y señales de potencia

En muchas de las aplicaciones de la teoría de señales, la señal proviene de un sistema para el cual los conceptos de *energía* y *potencia* tienen el significado físico usual. Por ejemplo, si $v(t)$ y $i(t)$ son la tensión y la corriente en los extremos de un resistor R, la potencia instantánea es:

$$p(t) = i(t)v(t) = i^2(t)\,R$$

La energía total disipada en el intervalo $t_1 < t < t_2$ es:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = R\int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt$$

La potencia promedio disipada en este intervalo es:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{R}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt$$

En la teoría de señales se utilizan definiciones análogas a las anteriores para referirse a la potencia y a la energía de una señal, de esta manera se define la energía E de una señal en un intervalo como:

$$E \equiv \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad o \quad E \equiv \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \tag{2}$$

donde $|x(t)|$ denota la magnitud o el módulo del valor instantáneo de la señal. El valor de la potencia promedio se obtiene dividiendo la expresión anterior por la longitud del intervalo, $t_2 - t_1$ para la señal continua o por $n_2 - n_1 + 1$ para la señal discreta.

De manera análoga se define la energía en un intervalo infinito, llamada simplemente *energía de la señal*, como:

$$E_\infty \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \qquad o \qquad E_\infty \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \tag{3}$$

Para poder calcular la energía de una señal, el límite de la definición debe existir. Hay señales para las cuales este límite existe y por tanto podemos calcular la energía de la señal, diremos en este caso que es la señal es una señal de energía. Por el contrario, si el límite no existe y no podemos calcular la energía de la señal, diremos simplemente que la señal no es una señal de energía. Los pulsos que tienen duración finita o las señales que decaen exponencialmente con el tiempo son señales que poseen una energía finita. Si calculamos la energía de una señal periódica, como por ejemplo una señal senoidal, obtendremos un valor infinito.

La potencia promedio de la señal en el intervalo infinito, llamada simplemente *potencia de la señal*, la obtenemos mediante

$$P_\infty \equiv \lim_{T\to\infty} \quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \tag{4}$$

para el caso de una señal continua, para una señal discreta la potencia es

$$P_\infty \equiv \lim_{N\to\infty} \quad \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} |x[n]|^2 \tag{5}$$

En base a las definiciones anteriores se distinguen los siguientes tipos de señales:

- $x(t)$ $(x[n])$ es una señal de energía si y sólo si $0 < E_\infty < \infty$, esto implica que $P_\infty = 0$. Un ejemplo de este tipo de señales es $x(t) = 1$ para $0 < t < 1$ y $x(t) = 0$ en cualquier otro caso.
- $x(t)$ $(x[n])$ es una señal de potencia si y sólo si $0 < P_\infty < \infty$, esto implica que $E_\infty = \infty$. Por ejemplo, la señal constante $x[n] = 3$ tiene $E_\infty = \infty$ y $P_\infty = 9$.
- una señal puede no cumplir ninguna de las dos propiedades anteriores, en ese caso simplemente se dice que la señal no es una señal de energía, ni una señal de potencia. Un ejemplo de este tipo de señales es la señal $x(t) = 2t$.

Veamos algunos ejemplos de cómo determinar si una señal es de energía o de potencia.

Ejemplo N^o 1. Calculemos la energía de la señal que vale $x(t) = e^{-t}$ para $t \geq 0$ y $x(t) = 0$ para $t < 0$.

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\
&= \int_{0}^{\infty} \left|e^{-t}\right|^2 dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} < \infty
\end{aligned}
$$

Ya que es posible calcular el valor de la energía, está señal es una señal de energía.

Ejemplo N^o 2. Calculemos la energía y la potencia de la señal $x[n] = \{2, -3, \underline{1}, 1, -1\}$.

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \\
&= 4 + 9 + 1 + 1 + 1 = 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} 16 = 0
\end{aligned}
$$

Por lo que la señal $x[n]$ es una señal de energía, y como vemos, su potencia es nula.

3. Operaciones sobre señales

Se enumeran en esta sección algunas de las operaciones básicas que pueden realizarse sobre las señales. Salvo que se indique explícitamente lo contrario, lo expresado es válido tanto para señales continuas como para discretas.

3.1. Operaciones sobre la variable dependiente

- ✳ Escalamiento en amplitud: $y(t) = c\, x(t)$
- ✳ Suma: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
- ✳ Multiplicación: $y[n] = x_1[n]\, x_2[n]$
- ✳ Diferenciación (sólo válido para señales continuas): $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$
- ✳ Integración (sólo válido para señales continuas): $y(t) = \int x(t) dt$

3.2. Operaciones sobre la variable independiente

- Escalamiento en el tiempo: $y(t) = x(at)$. Esta operación sólo es válida para señales continuas, la operación análoga para señales discretas es descripta en un tema posterior.
- Reflexión temporal: $x[n] = x[-n]$
- Desplazamiento en el tiempo: $y[n] = x[n - n_0]$, donde el entero n_0 puede ser $n_0 > 0$ o $n_0 < 0$. En el caso de señales continuas $y(t) = x(t - t_0)$, donde t_0 es real.

Es importante notar que para realizar una operación de escalamiento y desplazamiento en el tiempo como:

$$y(t) = x(at - b)$$

debe realizarse respetando el correcto orden de precedencia de las operaciones. Primero debe obtenerse la señal intermedia $v(t) = x(t - b)$, sustituyendo t por $t - b$ en $x(t)$. Luego se obtiene $y(t)$ como $y(t) = v(at)$, sustituyendo t por at en $v(t)$.

3.3. Valor medio de una señal

Si observamos la gráfica de una señal en un dado intervalo (ver fig. (8)), veremos que la señal muchas veces varía en torno a un valor bien definido denominado *valor medio* $\bar{x}$. Para una señal continua el valor medio en el intervalo T_m puede obtenerse mediante la operación

$$\bar{x} = \frac{1}{T_m} \int_{t_1}^{t_1+T_m} x(t)dt. \tag{6}$$

Para una señal discreta el valor de $\bar{x}$ en el intervalo N_m está dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{N_m} \sum_{n=n_1}^{n_1+N_m-1} x[n] \tag{7}$$

Existen señales en las que $\bar{x}$ es constante (posee el mismo valor en distintos intervalos) y otras en que esto no se cumple.

Si extraemos el valor medio de una señal obtenemos la *componente alterna* $x_{ac}(t)$

$$x_{ac}(t) = x(t) - \bar{x},$$

en este contexto a $\bar{x}$ se la denomina *componente directa*. Está operación está representada en la figura (8). En principio, cualquier señal de longitud finita puede ser representada por la suma de sus componentes directa y alterna.

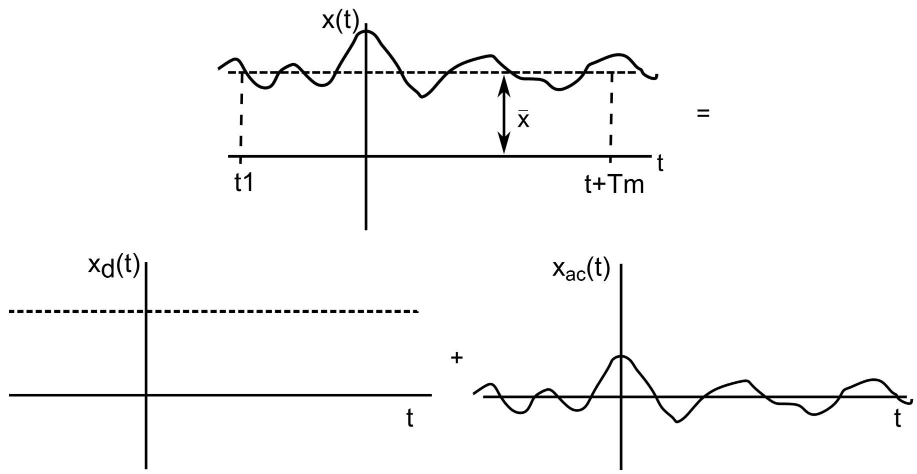

Figura 8: Representación de una señal como la sumas de sus componentes directa y alterna: $x(t) = x_d(t) + x_{ac}(t)$

4. Señales básicas

En esta sección describiremos algunos tipos de señales importantes. Son importantes ya que aparecen frecuentemente y porque también sirven como señales base para construir otros tipos de señales. Además constituyen las señales fundamentales sobre las que se asientan los métodos de análisis de la teoría de señales.

4.1. Señales exponenciales complejas continuas

La señal exponencial compleja continua está definida por:

$$x(t) = Ce^{at} \tag{8}$$

donde C y a son números complejos. Dependiendo de los valores de estos números, la señal puede tener diferentes comportamientos.

Si C y a son reales, $x(t)$ tiene la forma de una exponencial creciente para $a > 0$ o decreciente para $a < 0$. Este tipo de señal sirve para describir muchos tipos de procesos físicos, como por ejemplo el decaimiento radiactivo, la respuesta de un circuito RC o de un sistema mecánico sobreamortiguado.

Si C es real y a es un número imaginario puro ($a = j\omega$), se obtiene un segundo tipo de señales exponenciales,

$$x(t) = Ce^{j\omega t}. \tag{9}$$

Aclaremos algo importante. Utilizaremos valores de frecuencia angular (la denominaremos a partir de ahora simplemente como frecuencia) tanto negativos como positivos. Si bien la frecuencias negativas no tienen sentido físico, es decir no existen en realidad frecuencias negativas, introducimos los valores negativos de ω debido al método de análisis de señales basado en señales exponenciales complejas que usaremos.

La señal (9) es periódica. Esto se verifica ya que:

$$e^{(j\omega t)} = e^{j\omega(t+T)} \;\Leftrightarrow\; e^{j\omega T} = 1. \tag{10}$$

Si $\omega \neq 0$, el periodo T de la señal es:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \tag{11}$$

Podemos relacionar la señal exponencial compleja definida por (9) con señales sinusoidales mediante la relación de Euler.

$$e^{\pm j\omega t} = cos(\omega t) \pm jsen(\omega t) \tag{12}$$

De manera similar, usando la relación de Euler podemos expresar las señales sinusoidales o señales armónicas mediante exponenciales complejas

$$Acos(\omega t + \phi) \;\;=\;\; \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega t}. \tag{13}$$

Podemos escribir esto de otra manera:

$$Acos(\omega t + \phi) \;\;=\;\; \mathrm{Re}[Ae^{j(\omega t+\phi)}] \tag{14}$$

Usando esta notación, una señal senoidal queda expresada como:

$$Asen(\omega t + \phi) \;\;=\;\; \mathrm{Im}[Ae^{j(\omega t+\phi)}] \tag{15}$$

Al ser una señal periódica, la señal exponencial compleja es una señal de potencia, por lo que posee energía total infinita.

Definiremos como *conjunto de señales armónicamente relacionadas* al conjunto de exponenciales complejas $\phi_k(t)$ cuyas frecuencias sean múltiplos de una frecuencia ω (positiva) :

$$\phi_k(t) \equiv e^{jk\omega t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{16}$$

Por ejemplo, el conjunto de señales armónicamente relacionadas $\phi_k(t) \equiv e^{jk5t}$, está constituido por señales exponenciales complejas cuyas frecuencias son múltiplos de $\omega = 5$. Para $k = 0$, $\phi_k(t)$ es constante, mientras que para cualquier otro valor de k, $\phi_k(t)$ es periódica con periodo

$$T_k = \frac{2\pi}{|k|\omega}. \tag{17}$$

Observe que todas las señales armónicamente relacionadas tienen un periodo común $T = 2\pi/\omega$.

En caso de que ambos parámetros C y a de la expresión (8) sean números complejos arbitrarios, el comportamiento de la exponencial compleja puede ser visualizado escribiendo los parámetros utilizando la forma polar para C y la forma rectangular para a:

$$C = |C|e^{j\theta} \tag{18}$$

Luego podemos escribir la exponencial compleja de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Ce^{at} &= |C|e^{j\theta}\, e^{(\sigma+j\omega)t} \\ &= |C|e^{\sigma t}cos(\omega t+\theta) + j|C|e^{\sigma t}sen(\omega t+\theta). \end{aligned} \tag{19}$$

La parte real e imaginaria son señales sinusoidales de amplitud creciente o decreciente dependiendo del valor de σ (parte real de a).

4.2. Señales exponenciales complejas discretas

Como en el caso de señales continuas, una señal importante en tiempo discreto es la señal exponencial compleja, definida por:

$$x[n] = Cz^n \tag{20}$$

donde tanto C y z son números complejos. Usando la forma polar del número complejo z, la exponencial compleja discreta puede expresarse como:

$$x[n] = C\,|z|^n\, e^{j\,\angle(z)\,n}. \tag{21}$$

Aunque esta última forma tiene similitud con la función exponencial compleja continua (ec. 8), en muchos casos es conveniente expresar la función mediante la expresión (20).

En caso de que C sea real y que $|z| = 1$, usando la relación de Euler (12) obtenemos:

$$x[n] \;=\; C\,e^{j\omega n} \;=\; C(cos(\omega n) + jsen(\omega n)), \tag{22}$$

donde $\omega = \angle(z)$. Utilizaremos la forma particular $x[n] = Ce^{j\omega n}$ con C real como forma de la función exponencial compleja discreta hasta que tratemos la transformada Z, donde volveremos a considerar su expresión más general (ec. 20).

Cuando tanto C como z son números complejos, se puede obtener una expresión análoga a (19).

4.3. Diferencias entre las exponenciales continuas y discretas

Existen similitudes entre el comportamiento de la señal exponencial compleja discreta con el caso continuo, pero existen también importantes diferencias.

Una de estas diferencias se encuentra en la propiedad de periodicidad. Para que la señal $x[n] = e^{j\omega n}$ sea periódica con periodo N, siendo N un entero positivo, se debe cumplir que

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)} \Rightarrow e^{j\omega N} = 1. \tag{23}$$

Por lo que ω debe cumplir la condición:

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad m = 0, 1, 2, 3, ... \tag{24}$$

Así la secuencia $x[n] = e^{j\omega n}$ es periódica sólo para valores de ω que cumplen la condición (24), es decir es periódica sólo cuando el cociente $\omega/2\pi$ es un número racional. Esta propiedad es completamente diferente al caso continuo, donde la función $x(t) = e^{j\omega t}$ es periódica para cualquier valor de ω. Si $\omega \neq 0$ cumple la condición de periodicidad y además los valores de N y m no tienen factores en común, el periodo de la secuencia $x[n]$ es N dado por

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\omega}\right). \tag{25}$$

Similares consideraciones a las anteriores valen para las señales sinusoidales discretas $x[n] = Acos(\omega n)$ y $x[n] = Asen(\omega n)$.

Ejemplo N^o 3. Veamos cómo calcular el periodo de la señal $x[n] = e^{j\,3\pi/5\,n}$, cuya gráfica se muestra en la figura 9. Para ello hacemos el cociente

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\cancel{\pi}/5}{2\cancel{\pi}} = \frac{3}{10}$$

Vemos que cumple con la condición de periodicidad. Ya que no existen factores en común entre $m = 3$ y $N = 10$ (la fracción del miembro derecho es irreducible), el periodo de la señal es $N = 10$, es decir se repite cada 10 muestras.

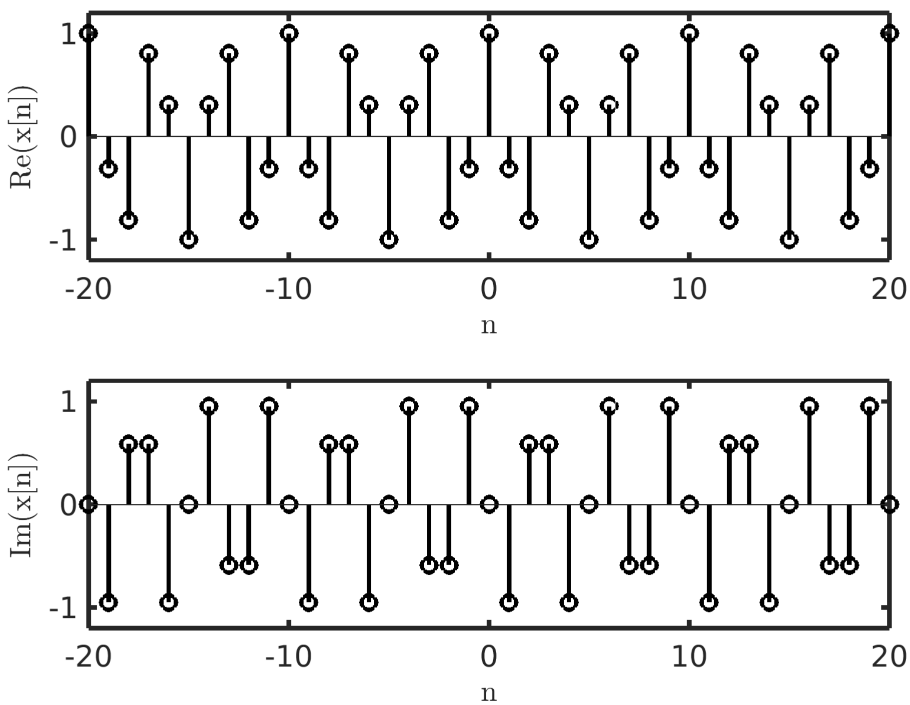

Figura 9: Gráfica de la parte real (a) y parte imaginaria (b) de la señal $x[n] = e^{3\pi/5\, n}$.

Otra importante distinción entre el caso continuo y el discreto es que en el caso continuo la señal $x(t) = e^{j\omega t}$ es diferente para distintos valores de ω, mientras que en el caso discreto esto no se cumple. Considerar la secuencia exponencial compleja con frecuencia $\omega + 2\pi k$, donde k es un entero:

$$e^{j(\omega+2\pi k)n} = e^{j\omega n} e^{j2\pi kn} = e^{j\omega n} \tag{26}$$

ya que $e^{j2\pi kn} = 1$. La secuencia a frecuencia $\omega + 2\pi k$ es la misma que a la frecuencia ω. Luego al considerar señales exponenciales discretas sólo se consideran intervalos de frecuencia de longitud 2π, dentro del cual especificaremos ω. Usualmente se utiliza el intervalo $0 < \omega < 2\pi$ o el intervalo $-\pi < \omega < \pi$. Observe en la figura 10 el efecto que tiene el incremento de valores de la frecuencia en una señal discreta hacia valores cercanos a $\omega = \pi$.

De manera análoga al caso continuo, definimos las funciones exponenciales complejas discretas armónicamente relacionadas $\phi_k[n]$ como todas aquellas secuencias exponenciales complejas periódicas cuya frecuencia es un múltiplo de algún número positivo ω o dicho de otra manera que poseen un periodo común $N = 2\pi/\omega$:

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{27}$$

A diferencia del caso continuo donde existe un número infinito de funciones armónicamente relacionadas, en el caso discreto sólo existen N secuencias armónicamente relacionadas distintas:

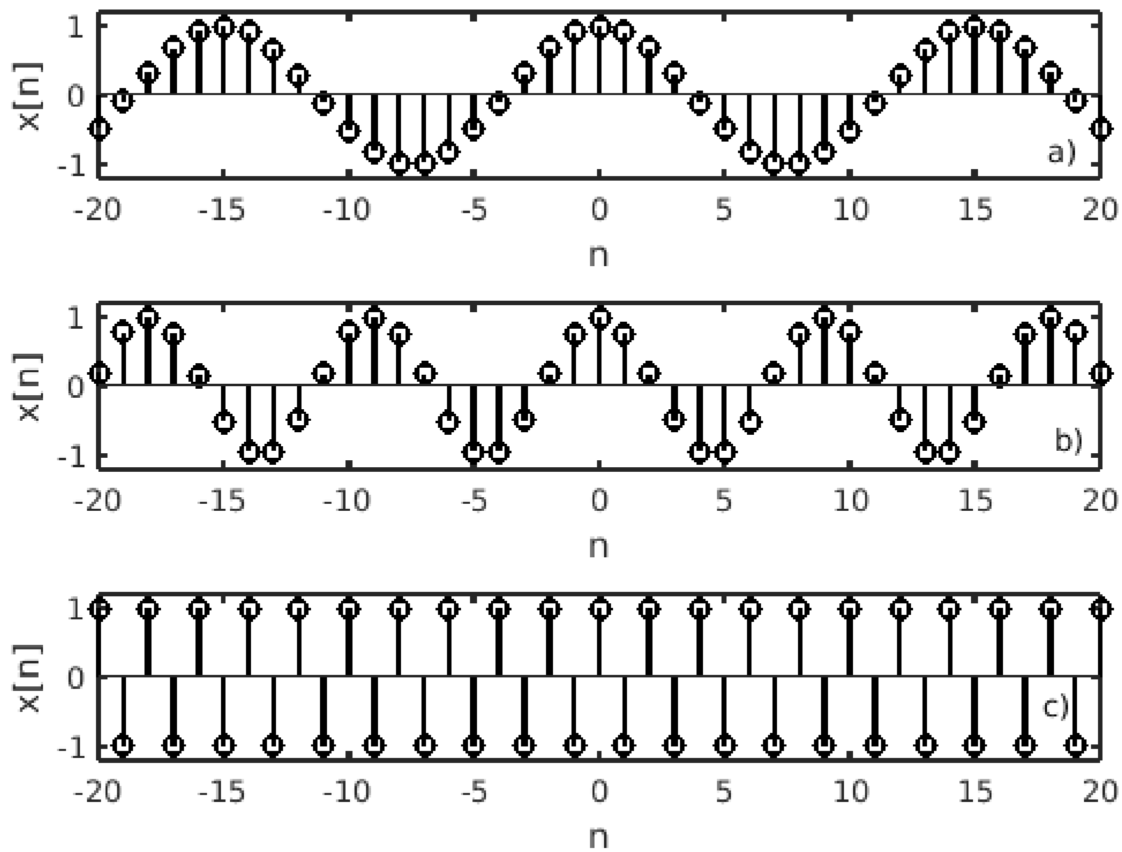

Figura 10: Gráfica de la señal $x[n] = cos(\omega n)$, para a) $\omega = 0{,}1333\,\pi$, b) $\omega = 0{,}222\,\pi$ y c) $\omega = \pi$.

$$\phi_{k+N}[n] = e^{jk\omega n} e^{jN\omega n} = e^{jk\omega n} \tag{28}$$

ya que $e^{jN\omega n} = 1$. Por ejemplo:

$$\phi_0[n] = 1,\ \ \phi_1[n] = e^{j2\pi n/N},\ \ \phi_2[n] = e^{j4\pi n/N}\ \ ....\phi_{N-1}[n] = e^{j2\pi(N-1)n/N}$$

son todas distintas, y cualquier otra $\phi_k[n]$ es idéntica a alguna de las anteriores, así por ejemplo $\phi_N[n] = \phi_0[n]$.

Como ejemplo de la propiedad de periodicidad de una secuencia en su relación con el muestreo de una señal continua, en la figura (11) se representan tres señales sinusoidales discretas. La primera de ellas es la secuencia $x[n] = cos(2\pi n/12)$. Se puede pensar que esta secuencia proviene del muestreo de la señal continua $x(n) = cos(2\pi t/12)$, con tiempo de muestreo $t = 1$. La señal continua tiene como periodo $T = 12$, la señal discreta tiene periodo $N = 12$. Esto es los valores de $x[n]$ se repiten cada 12 muestras.

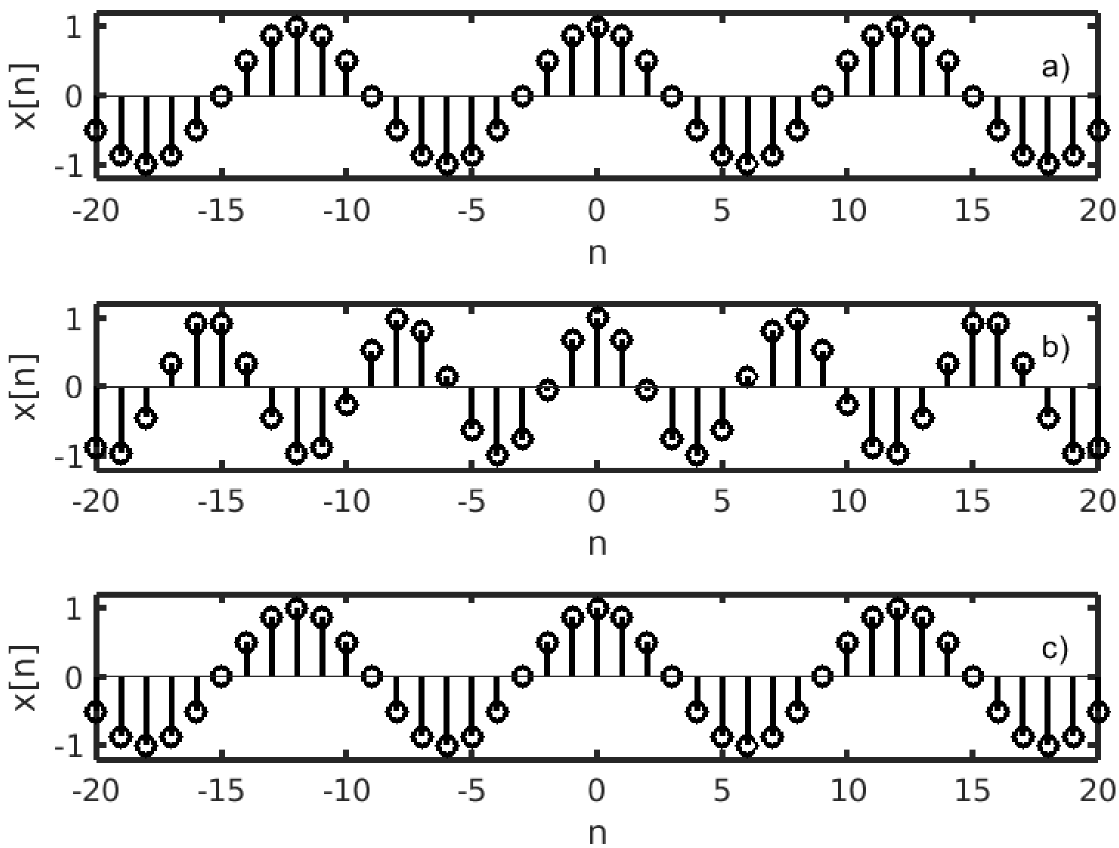

Figura 11: a) $x[n] = cos(2\pi n/12)$, b) $x[n] = cos(8\pi n/31)$, c) $x[n] = cos(n/6)$

En contraste, consideremos la secuencia representada en la figura (11-b), $x[n] = cos(8\pi n/31)$, la que podemos considerar que proviene del muestreo de $x(t) = cos(8\pi t/31)$ con tiempo de muestreo $T_s = 1$. El periodo de la señal continua es $T = 31/4$ y el periodo de la señal discreta es $N = 31$. El periodo de la señal discreta es diferente al de la señal continua, esto es así porque necesitamos considerar un intervalo de $N = 4T = 31$ para que la secuencia se repita.

De manera similar, la señal representada en la figura (11-c) es la secuencia $x[n] = cos(n/6)$, la cual nuevamente puede considerarse como el muestreo de la señal $x(t) = cos(t/6)$ con tiempo de muestreo $T_s = 1$. En este caso la señal discreta no es periódica, dado que no cumple con la condición de periodicidad (24).

4.4. Las señales escalón unidad e impulso discretas

La secuencia escalón unidad en el caso discreto es definida mediante la expresión:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{29}$$

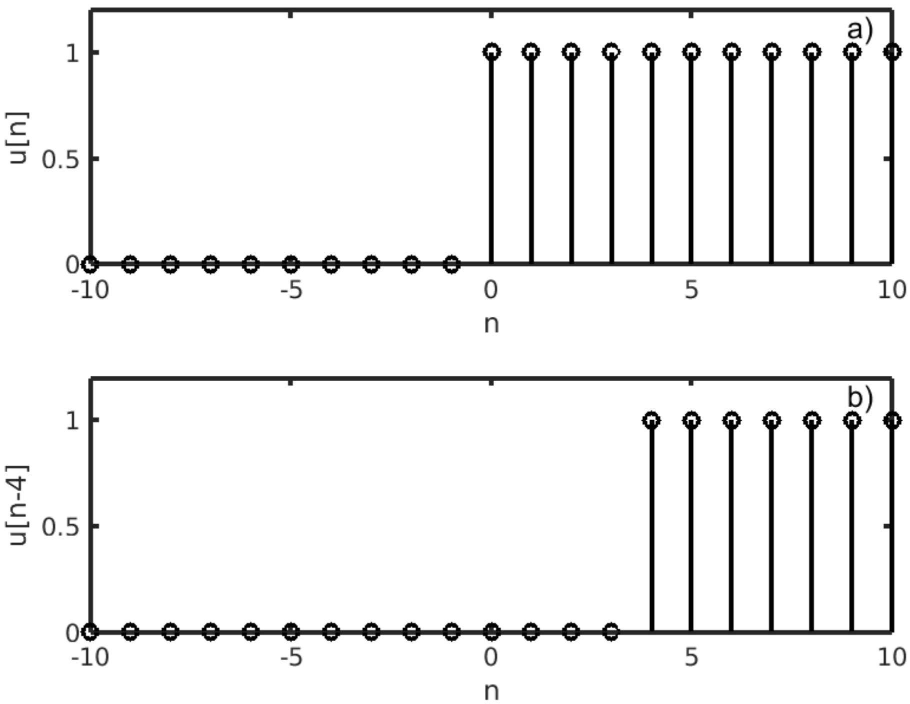

Figura 12: a) Secuencia escalón unidad b) Secuencia escalón unidad desplazada u[n-4].

la cual es mostrada en la figura (12-a). De manera similar la secuencia escalón unidad desplazada en el tiempo se define como:

$$u[n-k] = \begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases} \tag{30}$$

la cual es mostrada en la figura (12-b).

La secuencia impulso unidad o muestreo unidad en el caso discreto se define como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{31}$$

y su versión desplazada en el tiempo como:

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases} \tag{32}$$

Ambas se muestran en la figura (13).

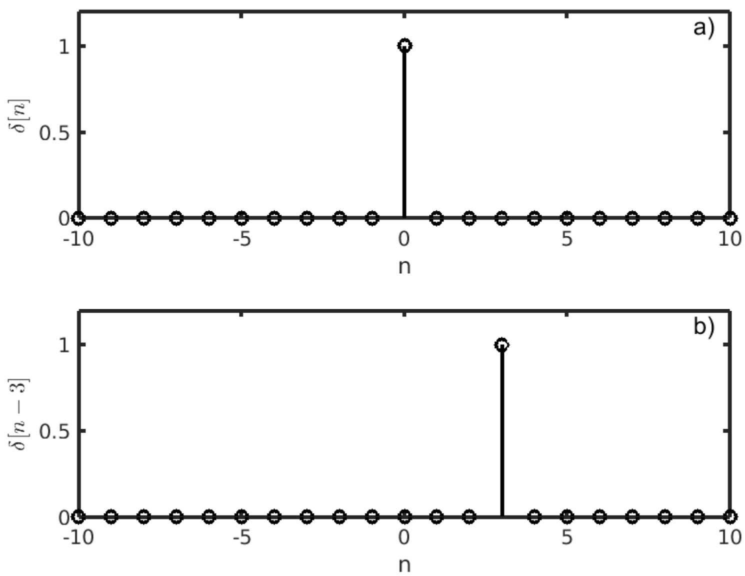

Figura 13: a) Secuencia impulso unidad, b) secuencia impulso unidad desplazada i[n-3]

La secuencia impulso unidad en el caso discreto tiene las siguientes propiedades que se derivan a partir de su definición:

a) $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$

b) $x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$

d) $\delta[n] = \delta[-n]$

e) $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

f) $\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$

4.5. Las señales escalón unidad e impulso continuas

La señal escalón unidad continua, también conocida como la función unidad de Heaviside, está definida por:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{33}$$

la cual es mostrada en la figura (14-a). Esta función es discontinua a $t = 0$, no estando definida para este valor. La función escalón unidad desplazada $u(t - t_0)$ se define mediante la expresión:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \tag{34}$$

y es mostrada en la figura (14-b). La señal escalón unidad continua representa el efecto que tiene el cierre de un interruptor ideal en un circuito.

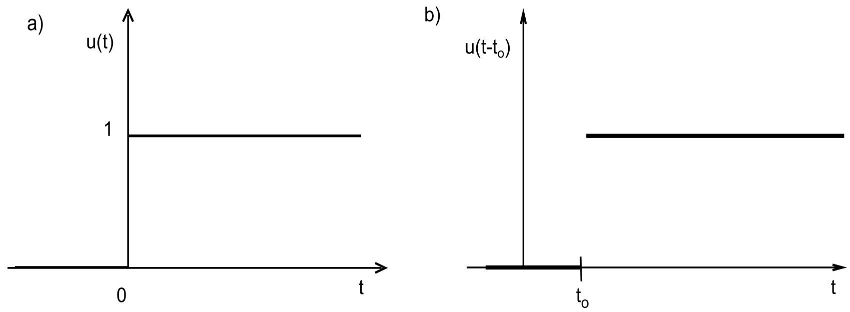

Figura 14: a) Señal escalón unidad b) Señal escalón unidad desplazada.

En contraste con el caso del impulso unidad discreto, existe cierta dificultad matemática para definir la señal impulso unidad continua $\delta(t)$, también conocida como función delta de Dirac. Usualmente, $\delta(t)$ es definida como el límite de una función que posee área unidad, definida en un intervalo de tiempo infinitesimal y que posee las siguientes propiedades:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \tag{35}$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = 1 \tag{36}$$

El proceso de paso al límite $\delta(t) = \text{lím}_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$ es esquematizado en la figura (15). El problema con esta manera de definir la función $\delta(t)$, es que al integrar una función la cual es 0 para todo valor de la variable independiente, excepto en un único punto, deberíamos obtener el valor 0.

Observando la definición formal del impulso continuo, vemos que $\delta(t)$ no es una función en el sentido ordinario, por lo que es conveniente tomar como *definición operativa* la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt \equiv \phi(0) \tag{37}$$

donde $\phi(t)$ es cualquier función continua a $t = 0$.

La señal impulso unidad desplazada en el tiempo $\delta(t-t_0)$ se define de una manera análoga mediante la expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-t_0)dt \equiv \phi(t_0) \tag{38}$$

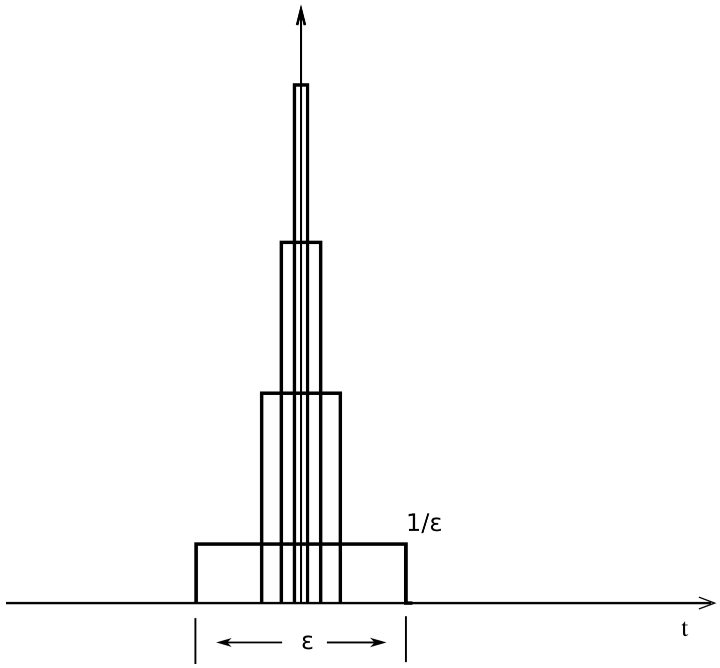

Figura 15: Proceso de paso al límite para definir $\delta(t)$

donde $\phi(t)$ es una función o señal continua a t_0. Si observamos las definiciones (37) y (38), podríamos decir que la función $\delta(\tau)$ tiene la propiedad de poder seleccionar o muestrear el valor de una función continua en el valor que anula el argumento de $\delta(\tau)$, es decir en $\tau = 0$. Esta es la propiedad más importante para nosotros de la función impulso continua.

En la figura (16) se muestra la manera en que usualmente se esquematiza la señal impulso unidad y su versión desplazada en el caso continuo.

Otra manera útil de expresar la definición operativa de la $\delta(t)$ (ec. 38) es

$$\int_a^b \phi(t)\delta(t-t_0)dt \equiv \begin{cases} \phi(t_0) & a < t_0 < b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{39}$$

Es decir que el impulso continuo selecciona el valor de la señal $\phi(t)$ en t_0 siempre que el intervalo de integración incluya a t_0, en caso contrario el valor de la integral es nulo.

Ejemplo N^o 4. Apliquemos la propiedad de selección (39) al caso de que la señal de la queremos seleccionar un valor a $t_0 = 2$ sea una señal armónica, la expresión simplemente nos indica que

$$cos(2) = \int_a^b cos(\tau)\delta(\tau-2)d\tau$$

donde el intervalo $[a, b)$ es cualquiera que contenga al valor 2, en caso contrario el valor de la integral es nulo.

Enumeremos algunas propiedades de la función $\delta(t)$:

a) $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

b) $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

c) Una señal puede ser expresada mediante la expresión:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

d) $\delta(t) = \delta(-t)$

e) $\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$

f) $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$

g) $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

Observemos con detenimiento las propiedades f) y g), ambas muestran la relación entre el impulso y el escalón en el caso continuo.

A pesar de la dificultad matemática que presenta la definición de $\delta(t)$, está función posee un rol central en la teoría de señales. Es conveniente recordar y intentar interpretar de manera intuitiva las definiciones (37) y (38) con ayuda de sus correspondientes expresiones en el caso discreto. Debemos tener presente que la función impulso unidad es una idealización matemática que nos permite representar en nuestros cálculos un pulso real de duración extremadamente corta y gran amplitud. La duración del pulso mediante el cual aproximamos la función impulso unidad deber ser mayor o menor, dependiendo del tiempo de respuesta del sistema físico sobre el cual el pulso este ingresando como señal de entrada. Para un sistema cuyo tiempo de respuesta característico es 1 minuto, un pulso rectangular de área unitaria y de 2 ms. de duración puede aproximar correctamente la señal impulso unidad. Claramente este pulso no será un impulso unidad para un sistema con tiempo de respuesta de 1 ms. En este sentido podemos interpretar la función impulso unidad como un pulso de área unitaria (no necesita realmente ser rectangular) que es lo suficientemente corto en el tiempo, comparado con el tiempo de respuesta del sistema físico con que se está tratando. Daremos más precisiones sobre la aproximación de $\delta(t)$ mediante un pulso real al tratar la función respuesta al impulso en el tema siguiente.

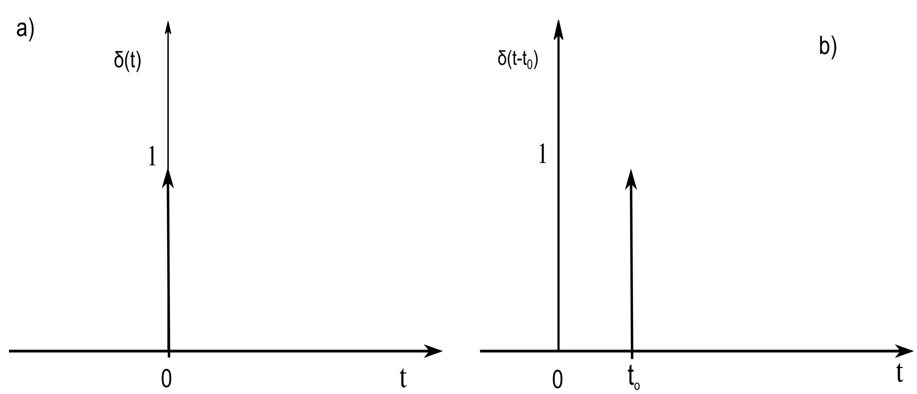

Figura 16: Esquemas de la señal impulso unidad (a) y su versión desplazada en el tiempo (b)

5. Sistemas continuos y discretos

5.1. Definición y representación de sistemas

Definiremos como *sistema* a un modelo matemático de un proceso físico que relaciona la señal de entrada o excitación (*input*) con la señal de salida o respuesta (*response*). Si bien no es totalmente general abarcando todos los tipos de sistema, esta definición de sistema se aplica a numerosa cantidad de modelos de dispositivos y procesos físicos.

Para ver un primer ejemplo de sistema consideremos como dispositivo físico que realiza un muestreo, es decir un dispositivo que toma muestras de una señal continua $x(t)$ a intervalos igualmente espaciados en el tiempo ($t = nT_s$) y las transforma en una señal discreta $x[n]$. El sistema es el modelo matemático que describe todo el proceso realizado por el dispositivo físico,

$$x[n] = x(nT_s) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...$$

Es importante remarcar que el sistema (modelo matemático) no es el dispositivo físico que describe. Como veremos sobre el mismo dispositivo físico podemos definir diferentes sistemas.

Para definir un sistema debe especificarse la *relación entrada-salida*. Esta relación describe lo que el sistema hace sobre la entrada para dar la respuesta. La relación entrada-salida, puede ser una simple frase, una relación matemática explícita entre la entrada y la salida (p. ej. $y = 2x + 5$), una relación matemática implícita como la ecuación diferencial del ejemplo anterior o una ecuación en diferencias.

Un sistema continuo es un sistema en el cual una señal continua es aplicada como entrada, dando por resultado una señal de salida continua. De manera análoga, un sistema discreto es un sistema en que tanto la señal de entrada como la señal de salida son discretas.

En la figura (17) se muestra el tipo de diagrama que utilizaremos para representar los sistemas, indicando la señal de entrada (x) y la correspondiente señal de salida (y). Este tipo de diagrama se conocen como *diagramas de bloques*. Veremos en el siguiente tema los bloques básicos que utilizaremos para representar sistemas.

Utilizaremos dos notaciones para referirnos a un sistema. La primera de ellas es

$$x(t) \longrightarrow y(t), \quad x[n] \longrightarrow y[n]$$

La segunda notación hace referencia a un sistema como una transformación o mapeo de la señal de entrada en la señal de salida

$$y \ = \mathbf{T}\{x\}$$

donde $\mathbf{T}$ es el operador que representa la regla por la cual x es transformada en y.

Existen sistemas con entradas y salidas múltiples, en este curso restringiremos nuestra atención a sistemas que poseen una única entrada y una única salida.

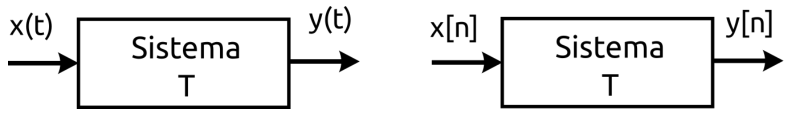

Figura 17: Representación de sistemas como diagramas de bloques.

Desarrollaremos la teoría de sistemas continuos en forma paralela a la correspondiente a sistemas discretos. Unificaremos la descripción de ambos tipos de sistemas al tratar el tema de muestreo de una señal continua, en que describiremos un sistema mixto, en el cual la señal de entrada es una señal continua y la señal de salida es la señal muestreada, es decir una señal discreta.

Una de las principales motivaciones para desarrollar la teoría de sistemas es que sistemas provenientes de muy diferentes aplicaciones y en principio muy distintos, pueden describirse y analizarse con el mismo conjunto de herramientas. Para ilustrar esto, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo N^o 5. Consideremos un circuito RC serie conectado a una fuente de tensión $V_e(t)$, en donde la señal de salida es la tensión en los extremos del capacitor $V_c(t)$. La corriente $i(t)$ en la resistencia está dada por

$$i(t) = \frac{V_e(t) - V_c(t)}{R}.$$

A partir de la definición de capacitancia podemos obtener la siguiente relación

$$i(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}.$$

Igualando las dos relaciones anteriores obtenemos

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = \frac{1}{RC}V_e(t)$$

Esta última es la expresión que da la relación entre la entrada $V_e(t)$ y la salida del sistema $V_c(t)$. Implícitamente, nos indica que operaciones debemos aplicar a la entrada del sistema para obtener su salida. La relación explicita la obtenemos al obtener la solución de la ecuación diferencial.

Este es un ejemplo de un sistema continuo representado por una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dt} + ay(t) = bx(t).$$

Existe una gran cantidad de sistemas que podemos representar mediante este tipo de ecuaciones diferenciales.

Por último remarquemos nuevamente que el sistema no es el dispositivo físico que representa. Observemos que sobre el mismo dispositivo físico (circuito RC serie) podemos definir un sistema distinto si tomamos como entrada la tensión en la fuente $V_e(t)$ y la salida como la tensión en los extremos de la resistencia $V_R(t)$.

Ejemplo N^o 6. Un simple ejemplo de un sistema discreto es el balance de la cuenta en un banco. Supongamos que el monto de dinero en el mes n es $y[n]$ y que el crecimiento mensual de este monto debido al pago de intereses por un 10 %, está dado por la ecuación:

$$y[n] = 1{,}01y[n-1] + x[n] \text{ o } y[n] - 1{,}01y[n-1] = x[n]$$

donde $x[n]$ es el monto de dinero depositado durante el mes. La expresión anterior es un caso particular de una ecuación en diferencias lineal de primer orden

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

De manera similar al caso de la ecuación diferencial del primer ejemplo, existe una gran cantidad de sistemas cuya evolución está descripta por este tipo de ecuaciones en diferencias.

5.2. Bloques básicos para representar sistemas

Representaremos sistemas graficamente mediante la conexión de bloques básicos, esta representación nos ayuda a analizar el sistema para obtener su relación entrada-salida.

En el procesamiento de señales mediante sistemas continuos utilizamos las operaciones básicas de suma, multiplicación, escalamiento (multiplicación por una constante), derivación e integración. Los bloques básicos que representan cada una de estas operaciones se muestran en la figura 18. Discutiremos en el siguiente tema la razón por la que la operación derivación no es utilizada en la práctica dentro de los sistemas de procesamiento.

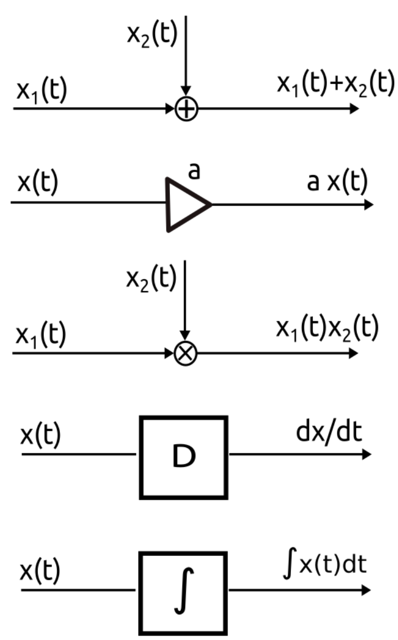

Figura 18: Bloques que representan las operaciones básicas de procesamiento de señales continuas

En el procesamiento de señales mediante sistemas discretos utilizamos las operaciones básicas de suma, multiplicación, escalamiento (multiplicación por una constante) y retardo temporal. Los bloques básicos que representan cada una de estas operaciones se muestran en la figura 19.

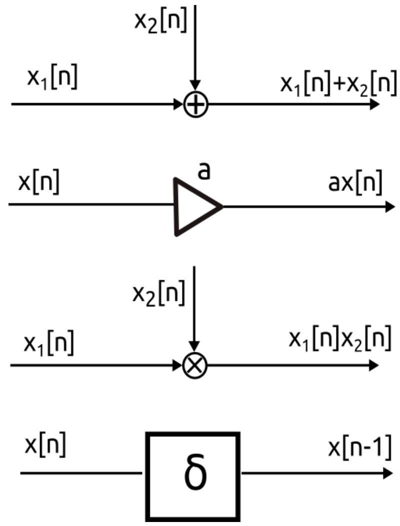

Figura 19: Bloques que representan las operaciones básicas de procesamiento de señales discretas

5.3. Interconexión de sistemas

En la figura (20) se representan las dos maneras básicas de interconectar sistemas. La primera de ellas es la interconexión de sistemas en serie o cascada (fig. (20-a)), donde la salida de un sistema es la entrada del otro. La segunda es la interconexión en paralelo (fig. (20-b)), donde ambos sistemas tienen la misma señal de entrada. En esta última el símbolo $\oplus$ representa la suma, de tal manera que la salida de un sistema en paralelo es la suma de los sistemas 1 y 2. Podremos conectar los sistemas en configuraciones mixtas en la cual existan bloques de sistemas en serie conectados con bloques de sistemas en paralelo.

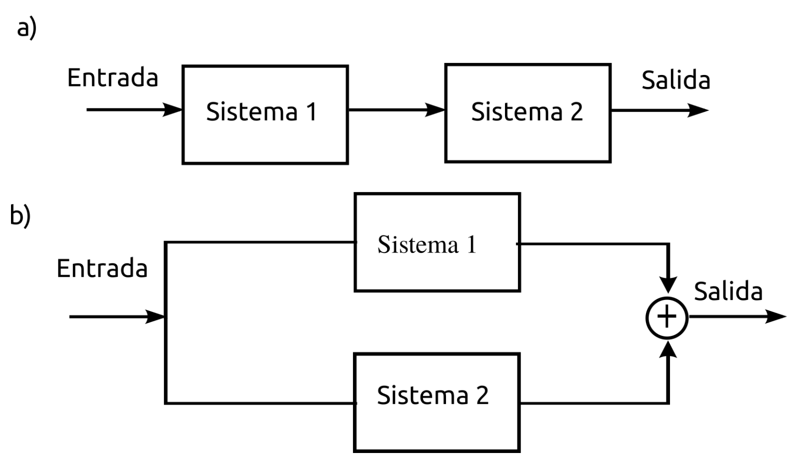

Figura 20: Interconexión de sistemas en serie (a) y en paralelo (b)

Otro tipo de interconexión importante es la interconexión en una configuración con realimentación (*feedback*), cuyo esquema es mostrado en la figura (21). En este tipo de sistemas la salida del sistema 1 es la entrada del sistema 2, cuya salida es realimentada a la entrada del sistema 1. Los sistemas realimentados aparecen en una amplia variedad de aplicaciones, en especial en los sistemas de control de procesos.

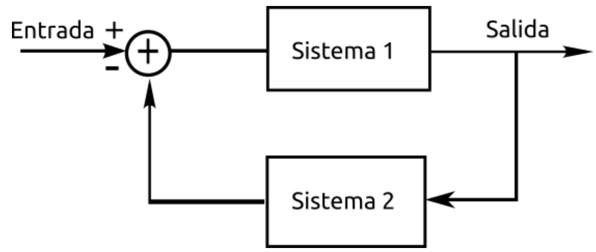

Figura 21: Interconexión de sistemas en una configuración con realimentación.

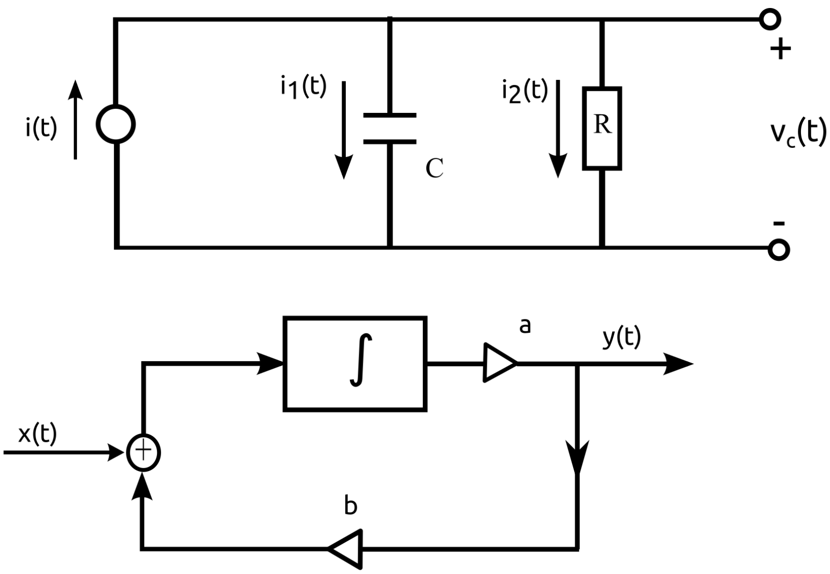

Figura 22: Implementación de un circuito RC como un sistema realimentado, $a = 1/C$ y $b = 1/R$.

Ejemplo N^o 7. Un sistema discreto importante es el sumador, descripto por la relación entrada-salida

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k],$$

el sistema devuelve como salida al instante n, la suma de los valores de la entrada hasta ese instante.

El sumador puede implementarse como un sistema realimentado, para ello vamos que podemos transformar su relación entrada salida de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \\
&= x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \\
&= x[n] + y[n-1]
\end{aligned}
$$

Por lo que finalmente podemos escribir la relación entrada-salida del sumador discreto como la ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

la se corresponde con la conexión del tipo de un sistema con realimentación.

Ejemplo N^o 8. Un ejemplo de sistema con realimentación es el circuito RC mostrado en la figura (22). La salida de este circuito es:

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\, d\tau$$

Con el objetivo de encontrar la relación entrada-salida, en un primer paso obtenemos

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} (i(\tau) - i_2(\tau))\, d\tau,$$

remplazando encontramos

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} (i(\tau) - v_c(\tau)/R)\, d\tau,$$

a partir de la cual podemos encontrar larelación entrada-salida del sistema realimentado y representarlo como el sistema de bloques:

$$y(t) = a\int_{-\infty}^{t} (x(\tau) - by(\tau))\, d\tau,$$

donde $a = 1/C$ y $b = 1/R$.

Ejemplo N^o 9. En la figura 23 se representan dos configuraciones distintas del *promediador móvil*:

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n-2] + x[n-1] + x[n]\right),$$

una en cascada o serie y la otra en paralelo. La denominación se debe a que el valor de la salida es el promedio de $x[n]$, $x[n-1]$ y $x[n-2]$ y el valor de $y[n]$ cambia con el tiempo. El bloque denotado con la letra δ efectúa un retardo temporal unitario, δ^n denota un retardo temporal de n unidades de tiempo.

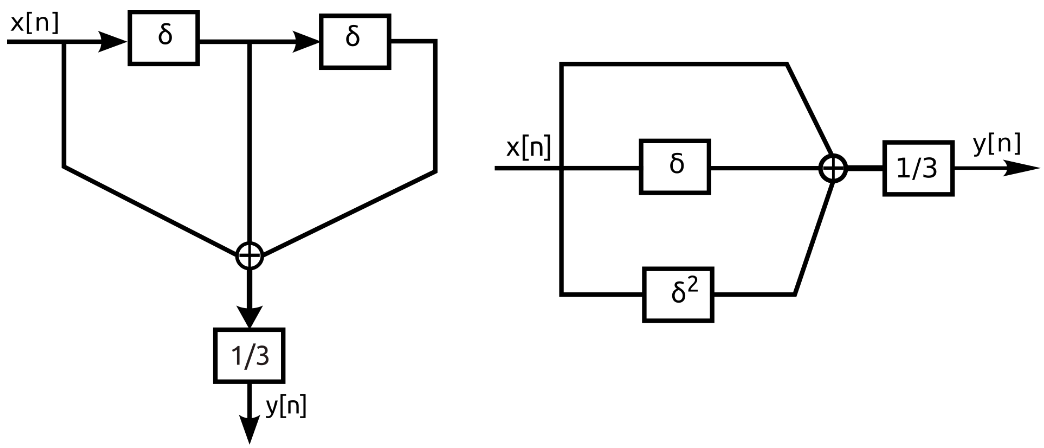

Figura 23: Dos implementaciones distintas del promediador móvil.

6. Propiedades básicas de los sistemas

6.1. Sistemas con y sin memoria

Se dice que un sistema no posee memoria si la salida a un dado tiempo sólo depende de la entrada en el mismo instante. En caso contrario se dice que el sistema posee memoria.

Ejemplos de sistemas sin memoria son:

- el sistema discreto definido por $y[n] = x[n] - x[n]^2$,
- el sistema compuesto por una resistencia con la entrada tomada como la corriente y la salida como el voltaje a través del resistor, $y(t) = Rx(t)$,
- el sistema *identidad* $y[n] = x[n]$.

Ejemplo de sistemas con memoria son:

- el sistema *acumulador* o *sumador* $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$,
- el sistema de retardo temporal o *delay* $y[n] = x[n-1]$,
- el sistema compuesto por un capacitor, de capacitancia C, donde la entrada es la corriente y la salida el voltaje en los extremos del capacitor (fig. (22)).

Un sistema con memoria posee algún dispositivo capaz de guardar valores previos de la entrada, así por ejemplo el acumulador debe recordar todos los valores pasados de la entrada para sumarlo al valor actual

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] \quad o \quad y[n] = y[n-1] + x[n] \tag{40}$$

Observemos que la última expresión nos indica la forma en que debemos implementar el acumulador mediante un sistema con realimentación. Todos los sistemas con realimentación poseen memoria.

En muchos sistemas físicos esta capacidad para guardar la información pasada está asociada con la capacidad del sistema para acumular energía, como por ejemplo en el caso del sistema formado por el capacitor del ejemplo.

Si bien asociamos el concepto de sistema con memoria al hecho de poder acumular valores pasados, la definición también incluye dentro de la categoría de sistema con memoria, a un sistema cuya salida depende de valores futuros de la entrada. Si bien puede parecernos que estos sistemas no son naturales, veremos que constituyen una clase muy importante y extendida de sistemas.

6.2. Sistemas invertibles y no invertibles

Un sistema es invertible si es posible determinar la señal de entrada x únicamente observando la señal de salida y. Esto es solamente posible si diferentes valores de entrada producen siempre salidas de valor diferente. Para un sistema invertible siempre podremos encontrar un sistema tal que puesto en serie con el sistema de una salida igual a la entrada original. Ejemplos de sistemas invertibles son $y(t) = \frac{1}{2}x(t)$, cuyo sistema inverso es $y(t) = 2x(t)$ y el acumulador $y[n] - y[n-1] = x[n]$, su sistema inverso es $y[n] = x[n] - x[n-1]$. Ejemplos de sistemas no invertibles son: $y(t) = 0$ y $y(t) = x(t)^2$.

6.3. Sistemas causales y no causales:

La noción de causalidad de un sistema está asociada a nuestra noción de que los efectos no pueden anticiparse a las causas, en otras palabras la respuesta de un sistema físico no puede ocurrir antes de que la entrada haya sido aplicada. *Por tanto, diremos que un sistema es causal si la salida al tiempo t_0 depende sólo de la entrada evaluada a $t \leq t_0$.* Este tipo de sistemas recibe también el nombre de *sistemas no anticipativos.*

Ejemplos de sistemas causales son el sistema formado por el circuito RC que hemos descripto anteriormente y el sistema descripto por $y[n] = x[n] + x[n-1]$. Ejemplos de sistemas no causales son los sistemas descriptos por $y(t) = x(t+1)$ y $y[n] = x[-n]$. Es importante notar que todo sistema sin memoria es causal, pero lo inverso no es cierto.

Si bien los sistemas causales son muy importantes, la no causalidad en los sistema es usual en muchas disciplinas, en especial en aquellos casos en que la variable independiente de los sistemas no es el tiempo, tal como ocurre en el procesamiento de imágenes.

También la no causalidad es usual cuando el sistema no trabaja en tiempo real, como es el caso del procesamiento de señales que han sido previamente grabadas, como por ejemplo en el procesamiento de series temporales de datos, en el análisis de datos meteorológicos o en el tratamiento de datos demográficos. Por ejemplo, si estamos interesados en analizar una tendencia de variación lenta en los datos, intentaremos eliminar fluctuaciones de alta frecuencia promediando los datos mediante el sistema *promediador móvil* descripto por:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{k=M} x[n-k], \tag{41}$$

el cual es no causal.

6.4. Sistemas estables:

Un concepto importante referido a las propiedades de un sistema, es el concepto de estabilidad. Si bien existen varias definiciones y tipos de estabilidad, consideraremos sólo un tipo de estabilidad, la estabilidad BIBO (*bounded-input bounded output*). *Un sistema es BIBO estable si el sistema posee una salida acotada para cualquier entrada acotada.*

Se dice que una señal es acotada si su módulo no crece sin límite

$$\forall |x(t)| < B < \infty \text{ para todo t}$$

y análogamente para una señal discreta. Por tanto, la noción de BIBO estabilidad puede expresarse como:

$$|x(t)| < B_1 < \infty \;\Rightarrow |y(t)| < B_2 < \infty$$

Un ejemplo de sistema estable es el descripto por $y(t) = e^{x(t)}$ ya que

$$|y(t)| = e^{x(t)} \leq e^{B} < \infty$$

para toda señal de entrada $|x(t)| < B$.

Un ejemplo de sistema inestable es el acumulador $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$. Si aplicamos una señal escalón $u(t)$, el sistema tiene como salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} d\tau = t$$

la cual no permanece acotada para todo t, a pesar de que la señal de entrada es acotada.

Este último ejemplo sirve para enfatizar que *basta encontrar una señal para la cual el sistema no tenga salida acotada para poder asegurar que el sistema no es BIBO estable.*

6.5. Sistemas invariantes con el tiempo:

Durante todo el curso sólo trataremos sistemas cuyas propiedades no cambian con el paso del tiempo, así por ejemplo si nuestro sistema está formado por un circuito RC tal como el descripto en la figura (22), supondremos que los valores de R y C no cambian con el tiempo. Esto nos permite asegurar que para una dada corriente de entrada $i(t)$ dada, obtendremos el mismo voltaje de salida $v(t)$ con independencia del momento en que apliquemos la corriente. Es en este sentido, en el que decimos que el sistema es invariante con el tiempo.

Formalmente, diremos que *un sistema es invariante con el tiempo si un desplazamiento temporal de la señal de entrada produce un desplazamiento idéntico de la señal de salida.* En otras palabras para un sistema invariante con el tiempo, si $y(t)$ es la salida para la entrada $x(t)$, la salida del sistema es $y(t-t_0)$ cuando la señal de entrada es $x(t-t_0)$. Esto podría no ser así, pensemos en un sistema definido sobre un circuito RC serie, cuyo valor de la capacitancia cambia con el tiempo. La definición de sistema invariante está representada en la figura (24). Una definición análoga vale para sistemas discretos.

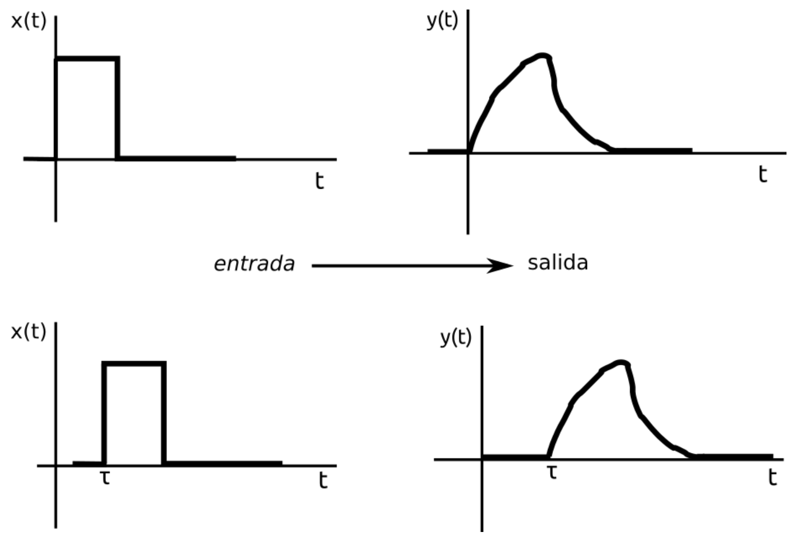

Figura 24: Respuesta de un sistema invariante con el tiempo.

6.6. Sistemas Lineales:

Tanto para sistemas continuos como para discretos, diremos que un sistema es lineal si cumple con el siguiente principio: *si la señal de entrada es la combinación lineal de varias señales, la salida del sistema es misma combinación de las salidas a cada señal individual.* Este principio se denomina *principio de superposición.*

Podemos enunciar la anterior definición de manera más precisa, diciendo que para que un sistema sea lineal, se deben cumplir dos propiedades

- la respuesta a $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ es $y(t) = \sum_{i=1}^{N} y_i(t)$,
- la respuesta a $ax_i(t)$ es $ay_i(t)$,

donde $y_i(t)$ es la salida del sistema para cada entrada individual $x_i(t)$ y a es una constante compleja. La primera de estas dos propiedades se denomina aditividad y la segunda homogeneidad. Si un sistema no cumple con cualquiera de estas dos condiciones diremos que es un sistema no lineal. Una definición análoga es válida para un sistema discreto.

Podemos combinar las dos propiedades que definen un sistema lineal en una única propiedad. Si la entrada está dada por la superposición

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t),$$

utilizando la relación entrada-salida representada por el operador T

$$\begin{aligned} y(t) &= T\left\{x(t)\right\} = T\left\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i T\left\{x_i(t)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t). \end{aligned} \tag{42}$$

Observemos en el último desarrollo que gracias a la linealidad del sistema hemos podido intercambiar o conmutar el operador T con la sumatoria y el escalamiento por a, esto se representa en la figura 25.

Una consecuencia directa de las propiedad de homogeneidad es que para sistemas lineales, una señal de entrada que *siempre* es nula ($x[n] = 0\ \forall n$) produce siempre una salida nula para todo n, lo mismo es válido para sistemas continuos. Esto se puede probar teniendo en cuenta la propiedad de homogeneidad que exige que si el sistema es lineal se debe cumplir

$$T\left\{0\, x[n]\right\} = 0\, y[n]$$

Podemos probar la linealidad del sistema observando su salida frente a una entrada nula, si el sistema responde con una salida no nula concluimos que es no lineal. La afirmación inversa no es válida, para ver el porqué de esto, pensemos en el sistema $y(t) = x^2(t)$.

Ejemplo de sistemas lineales son:

- $y(t) = kx(t)$ donde k es una constante,
- $y(t) = \int x(t)$,
- el circuito RC mostrado en la figura (22)
- el acumulador.
- $\dfrac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$ con condiciones iniciales nulas.

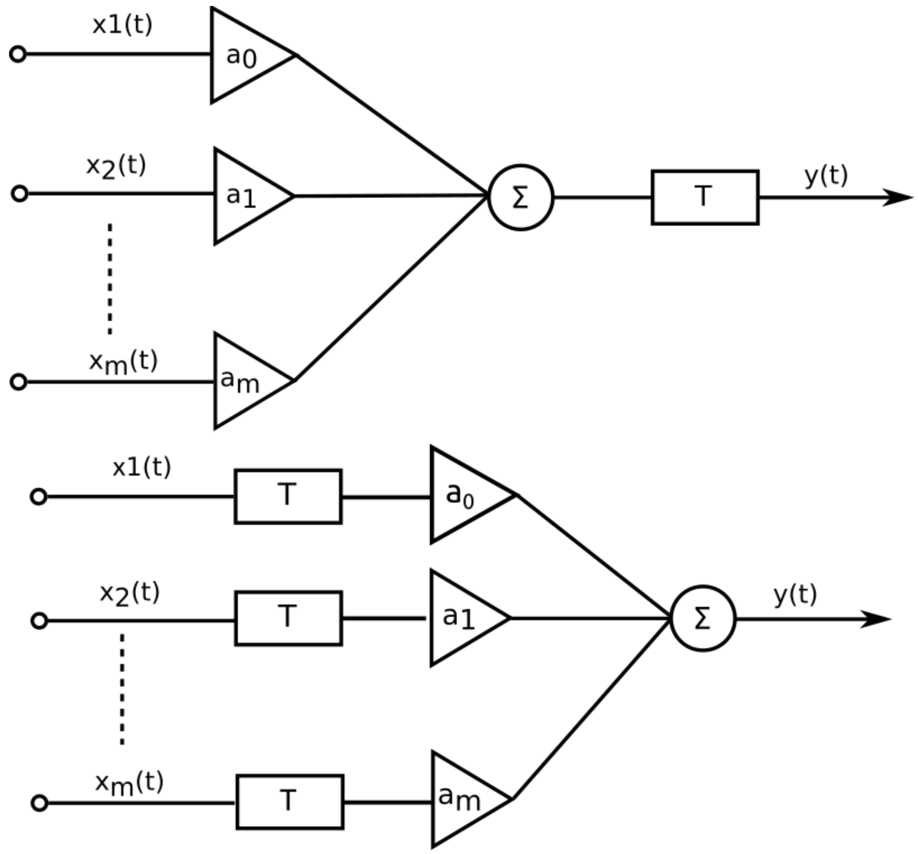

Figura 25: Conmutación de sistemas lineales

Durante todo el curso sólo trataremos sistemas que son lineales e invariantes con el tiempo, a los cuales nos referiremos con la denominación sistemas LTI (*linear time-invariant system*). Es importante tener presente que la linealidad y la invariancia temporal son propiedades de los modelos que utilizamos para describir los sistemas físicos y no propiedades de los sistemas físicos en sí. A pesar de esta limitación, es generalmente siempre posible utilizar un sistema o modelo lineal con invariancia temporal para describir dispositivo o proceso físico; para ello sólo debemos restringir la validez de nuestro modelo a un rango limitado de variación de la entrada o rango de operación. Este es el caso de la mayoría de los circuitos electrónicos, a los cuales siempre podremos analizarlos mediante sistemas LTI en el rango de operación lineal.

6.7. Sistemas Incrementalmente Lineales:

Consideremos el sistema

$$y[n] = 5x[n] + 3.$$

A pesar de que el sistema está descripto por una ecuación lineal, el sistema es no lineal. Para ver esto observemos que ocurre con la propiedad de aditividad para las señales de entrada $x_1[n] = 2$ y $x_2[n] = 4$

$$x_1[n] \ \rightarrow \ y_1[n] = 13,$$

$$x_2[n] \ \rightarrow \ y_2[n] = 23.$$

Sin embargo la respuesta a $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] = 33$, la cual es diferente a $y_1[n] + y_2[n]$. Además podemos observar que el sistema tiene salida distinta de 0 para entrada nula.

Este tipo de sistemas corresponde a un grupo de sistemas discretos y continuos denominados *sistemas incrementalmente lineales*, dado que responden linealmente a cambios o incrementos en la entrada. En otras palabras, la diferencia entre dos salidas ($\Delta y = y_2 - y_1$) correspondientes a diferencias entre dos entradas ($\Delta x = x_2 - x_1$) cumple con las condiciones de un sistema lineal.

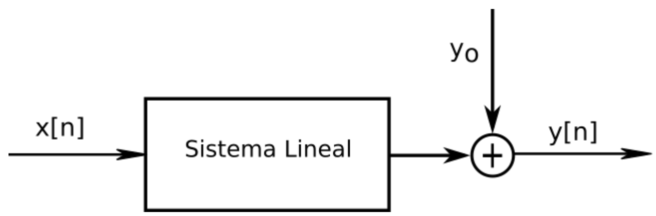

Figura 26: Representación de un sistema incrementalmente lineal

Los sistemas incrementalmente lineales se representan por el diagrama en bloques de la figura (26), en donde la salida es la suma de un sistema lineal y una señal que es la respuesta a entrada nula del sistema $y_0 = T\{0\}$.