

Señales y sistemas

Tema VII: Aplicación de la transformada Z en el análisis de señales y sistemas



© Diego L. Valladares

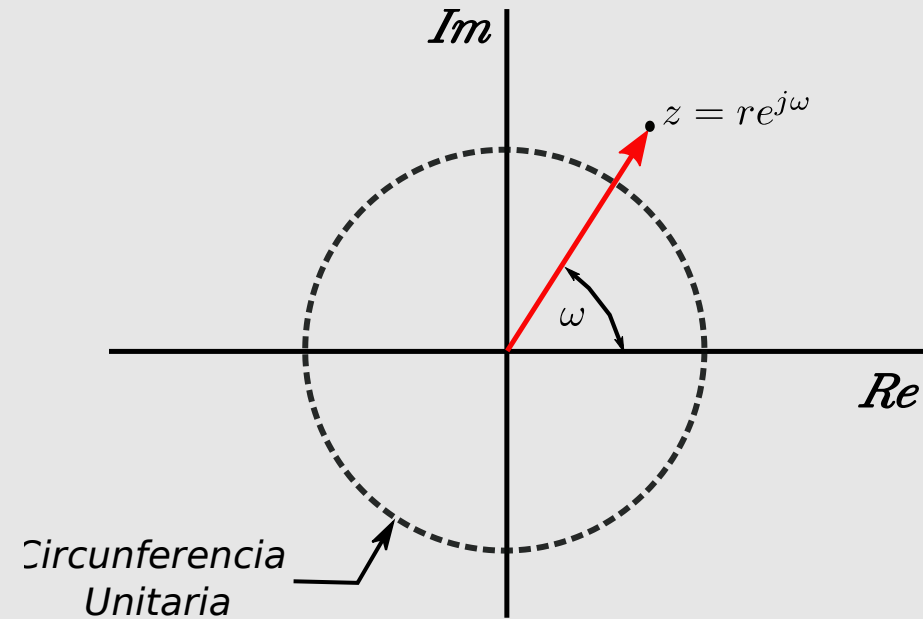
La presentaciones de Señales y Sistemas poseen una licencia de tipo *Creative Commons Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional License* (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

Diego Leonardo Valladares
Departamento de Física
Univ. Nac. de San Luis

Recordemos lo visto

Señal exponencial discreta:

$$x[n] = z^n \quad z = re^{j\omega}$$



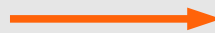
Caso particular:

$$x[n] = e^{j\omega n} \quad |z| = 1$$

Respuesta de un sistema LTI a una exponencial

$$y[n] = \mathcal{T}\{z^n\} = H(z)z^n$$

Función de Transferencia



$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

La Transformada Z:

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$z = re^{j\omega}$$

$$X(z) = \mathcal{Z} \{x[n]\}$$

$$x[n] \leftarrow \mathcal{Z} \rightarrow X(z)$$

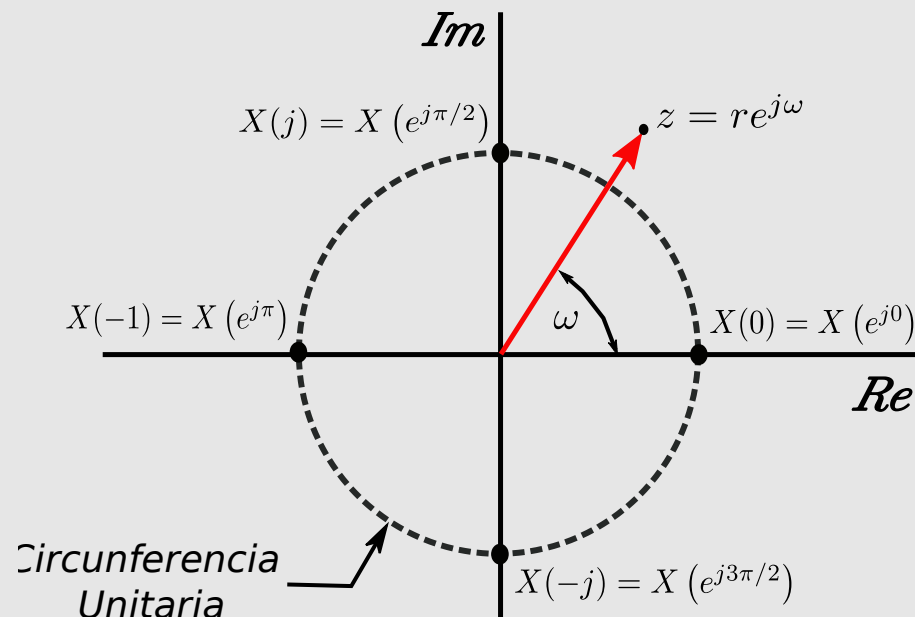
La transformada Z es la versión de la transformada de Laplace en el dominio de tiempo discreto.

Región de convergencia (ROC) = conjunto de valores de z para los cuales existe la transformada Z de la señal.

Relación entre las transformadas Z y Fourier en tiempo discreto:

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$

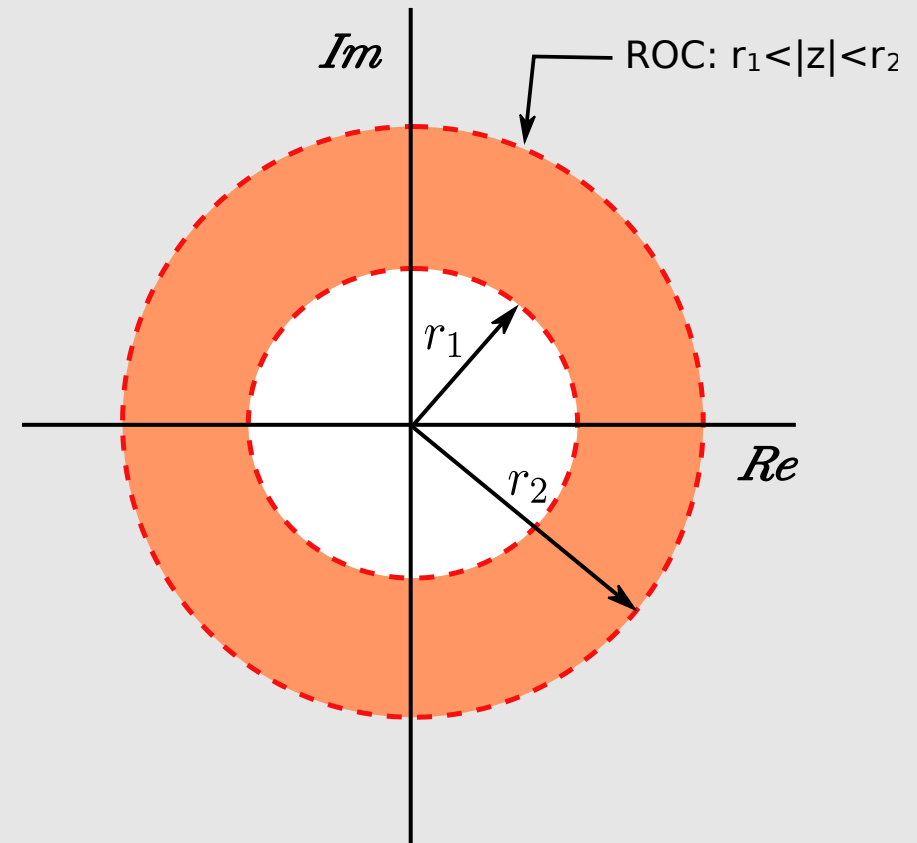


$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$

Existencia de la transformada Z:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n}) e^{-j\omega n} \\ &= \mathcal{F} \{x[n]r^{-n}\} \end{aligned}$$

$$X(z) = \mathcal{F} \{x[n]r^{-n}\}$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

Si la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]r^{-n}$ existe, podemos asegurar que existe la transformada Z de la señal $x[n]$ para el valor de z que corresponde a $z=re^{j\omega}$.

La convergencia de $X(z)$ sólo depende del módulo de z (r) por lo que las regiones de convergencia son regiones anulares.

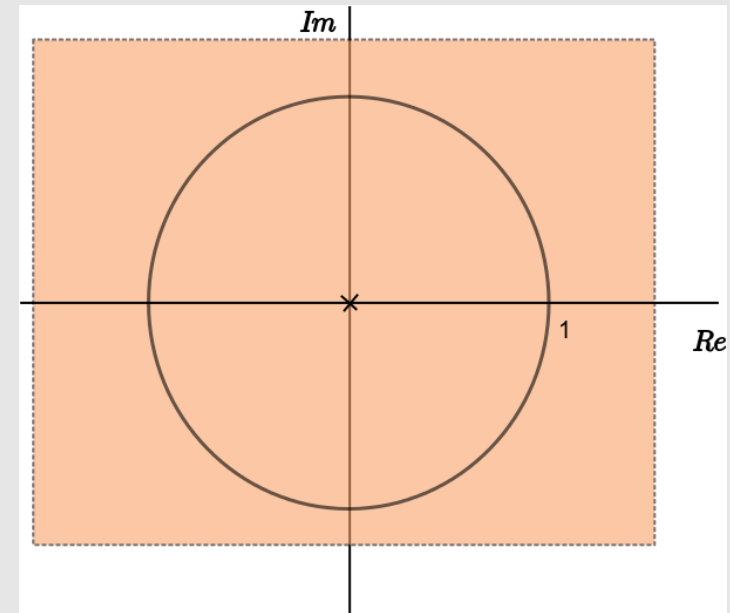
Ejemplo:

$$x[n] = \{1, 1, 2, 3, 5, 8\}$$

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$= 1z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} + 8z^{-5}$$

$ROC \rightarrow$ todo el plano z , exepcto $z = 0$

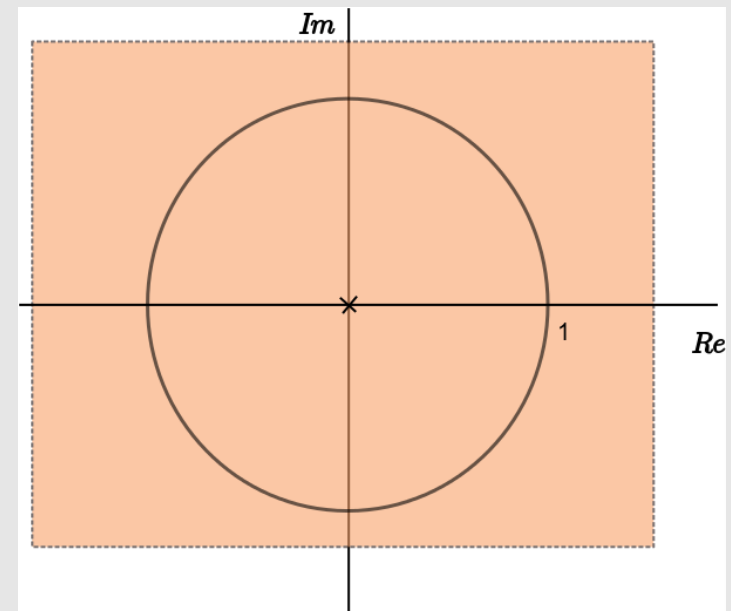


$$x[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

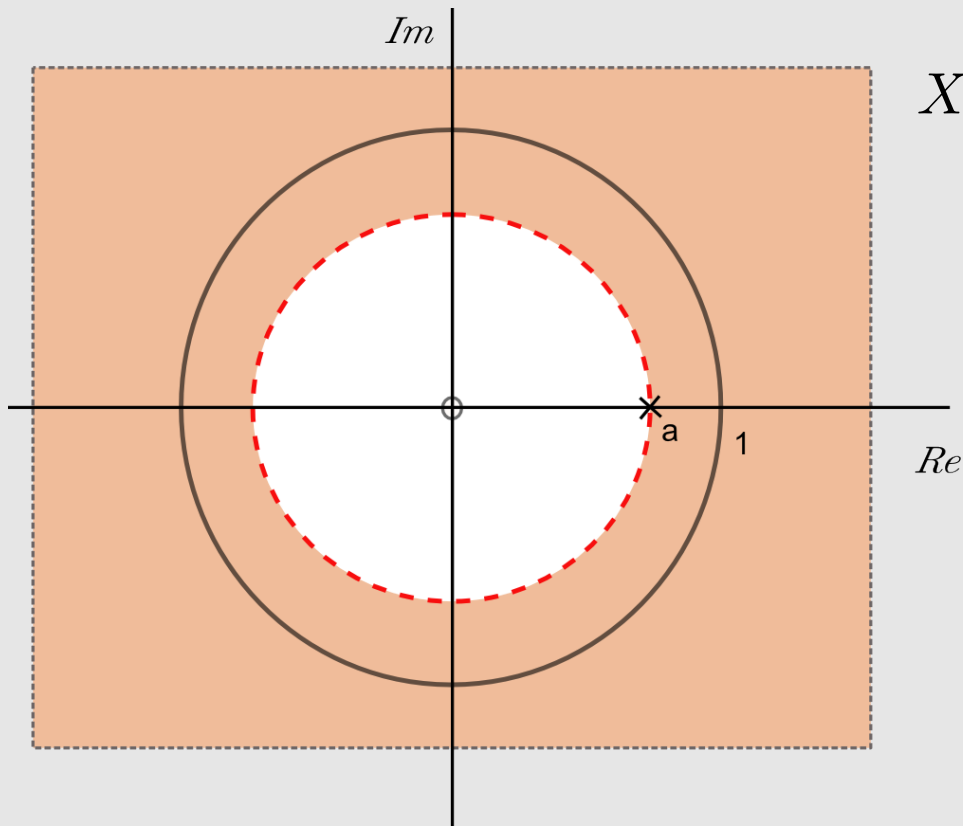
$$= z^2 + 2z^1 + 5z^0 + 7z^{-1} + 0z^{-2} + z^{-3}$$

$ROC \rightarrow$ todo el plano z , exepcto $z = 0$ y $z = \infty$



Ejemplo: exponencial causal

$$x[n] = a^n u[n]$$



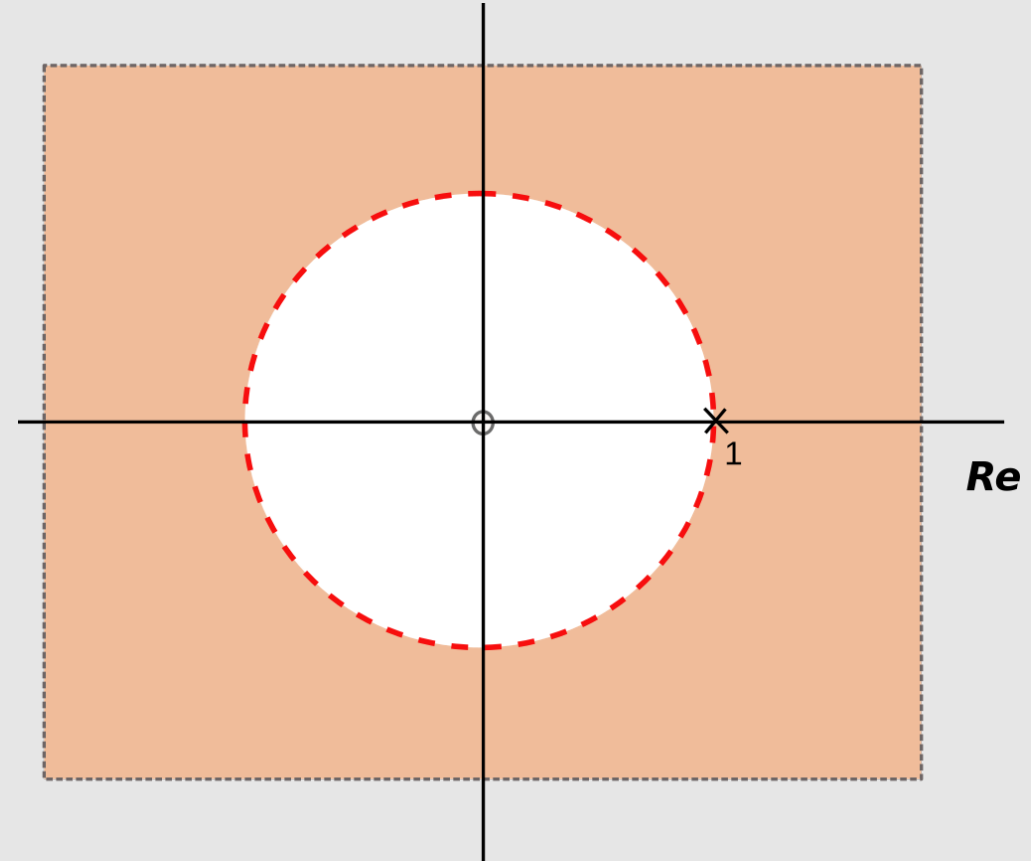
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{si } |az^{-1}| < 1 \\ &\quad \text{Potencias negativas de } z \\ &= \frac{z}{z - a} \\ &\quad \text{Potencias positivas de } z \end{aligned}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC : |z| > |a|$$

Ejemplo:

$$x[n] = u[n]$$

$$\begin{aligned} X(z) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1 \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$



$$a^n u[n] \quad \xleftrightarrow{Z} \quad \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC : |z| > |a|$$

Ejemplo:

$$x[n] = -a^n u[-n - 1]$$

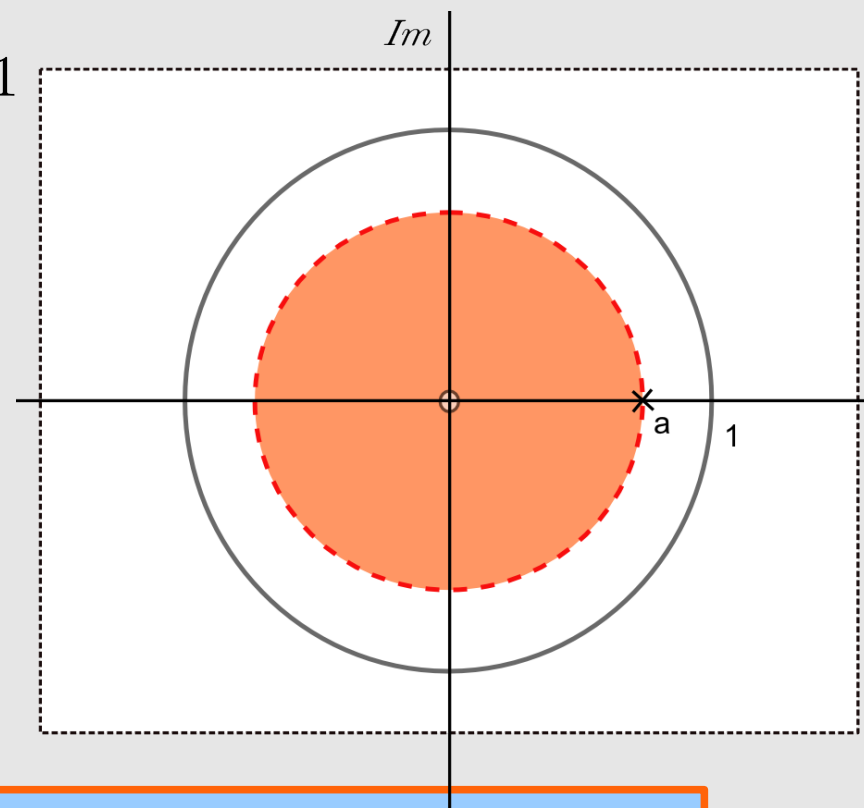
$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n - 1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1} z)^{-n}$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \quad \text{si } |a^{-1} z| < 1$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z}$$

$$= \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$$ROC : |a^{-1} z| < 1 \quad \text{o} \quad |z| < |a|$$



$$-a^{n-1} u[-n - 1] \quad \xleftrightarrow{Z} \quad \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad ROC : |z| < |a|$$

$$\begin{array}{lll}
 a^n u[n] & \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} & \frac{1}{1 - az^{-1}} & ROC : |z| > |a| \\
 -a^{n-1} u[-n-1] & \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} & \frac{1}{1 - az^{-1}} & ROC : |z| < |a|
 \end{array}$$

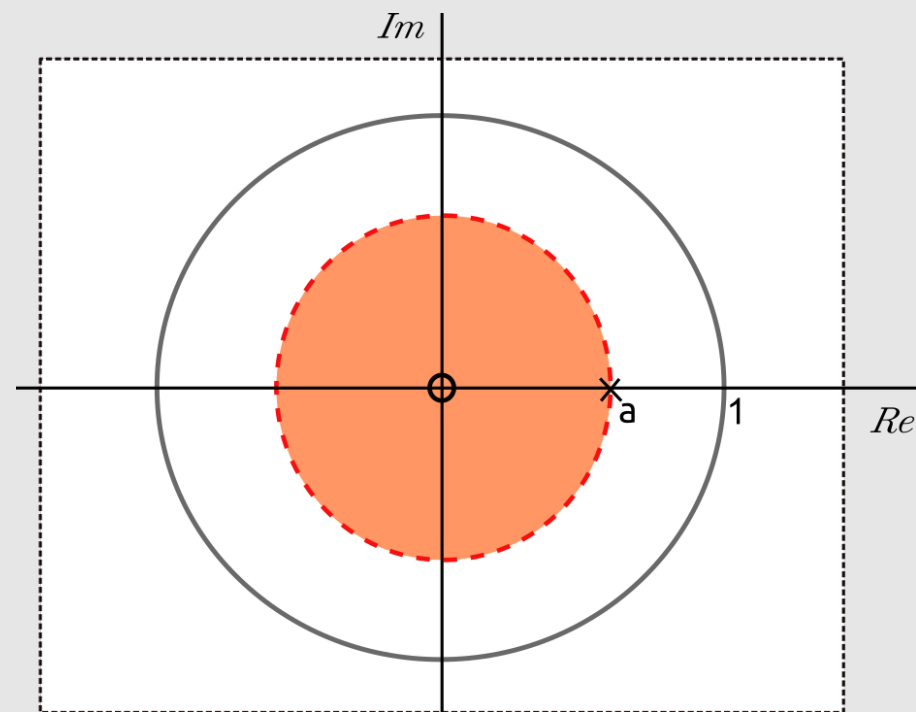
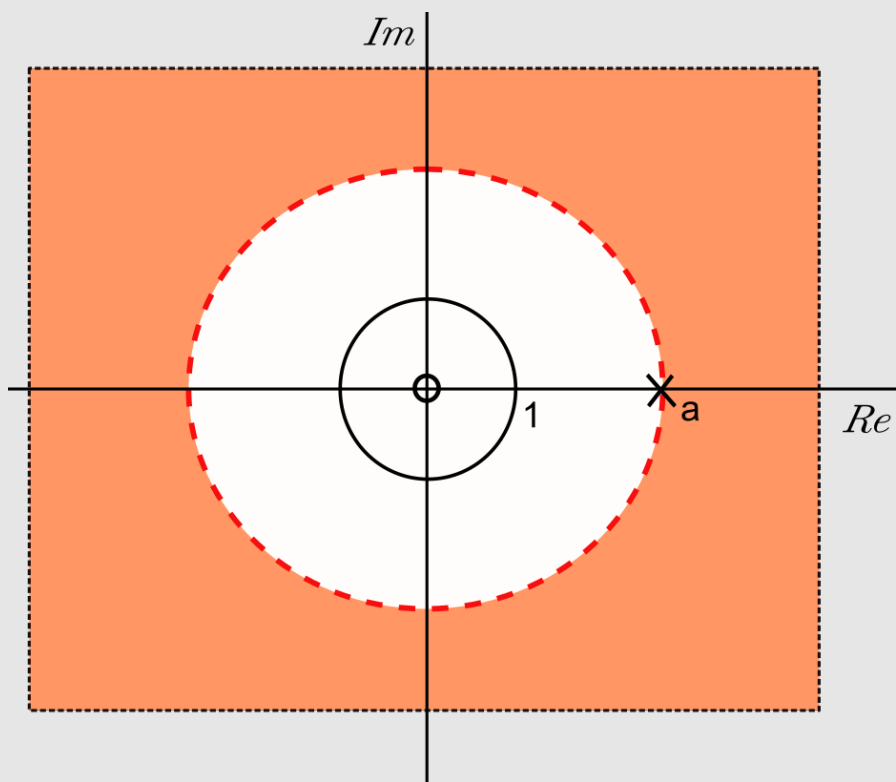


Tabla 1: Transformada Z de señales básicas

Señal	Transformada	ROC
$\delta[n]$	1	Toda z
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a$
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a$
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a$
$(n + 1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a$
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\text{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n \text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r\text{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$

Polos y ceros de $X(z)$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-N}} = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \\ &= z^{N-M} \frac{b_0}{a_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} \\ &= \frac{b_0}{a_0} \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})} \end{aligned}$$

M ceros $z_1, z_2, \dots, z_M$

N polos $p_1, p_2, \dots, p_N$

$si\ N > M$ $N - M$ ceros en $z = 0$ $si\ N < M$ $|N - M|$ polos en $z = 0$
 $N - M$ polos en $z = \infty$ $|N - M|$ ceros en $z = \infty$

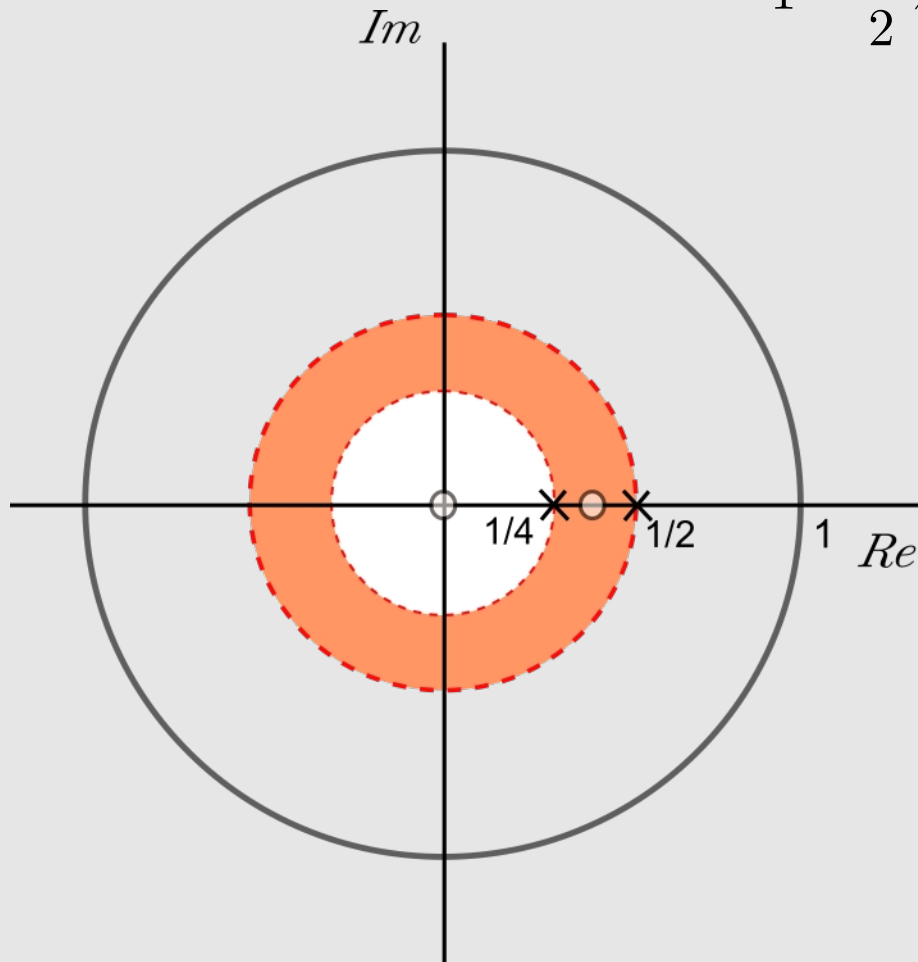
La referencia a los polos y ceros siempre la realizamos con respecto a la transformada Z expresada en su **forma como cociente de polinomios en potencias positivas de z .**

Ejemplo:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad \leftarrow z \rightarrow \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} \quad ROC : |z| > \frac{1}{4}$$

$$- \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \quad \leftarrow z \rightarrow \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad ROC : |z| < \frac{1}{2}$$



$$X(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$= \frac{2 - \frac{3}{4} z^{-1}}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-1}}$$

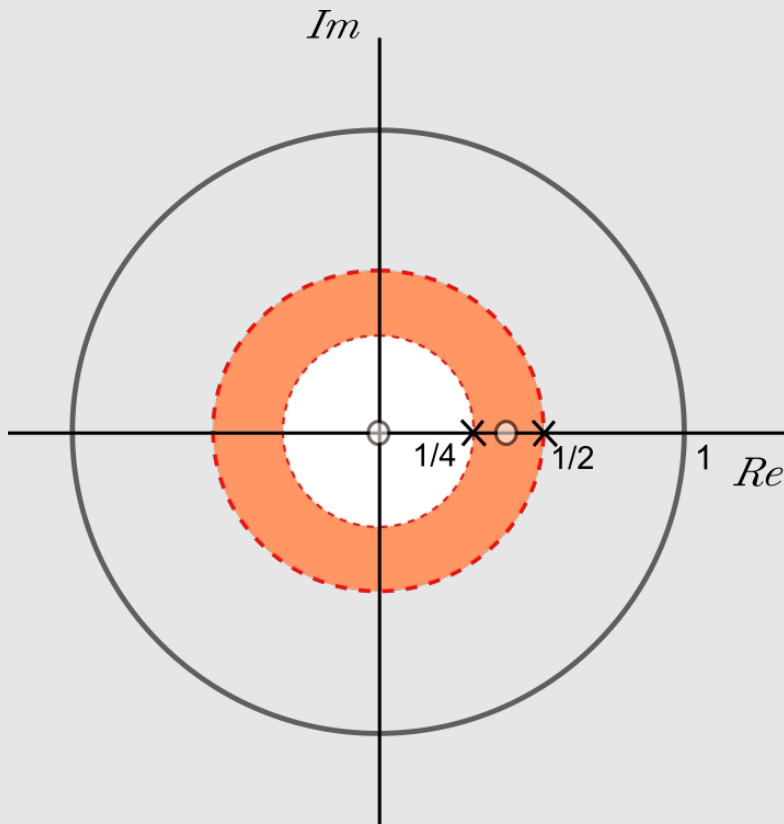
$$= \frac{z \left(z - \frac{3}{8} \right)}{\left(z - \frac{1}{4} \right) \left(z - \frac{1}{2} \right)}$$

$$ROC \rightarrow \frac{1}{4} < z < \frac{1}{2}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$X(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-1}} = \frac{z \left(z - \frac{3}{8}\right)}{\left(z - \frac{1}{4}\right) \left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$ROC \rightarrow \frac{1}{4} < z < \frac{1}{2}$$



```
num=[2 -3/4];
```

```
den=[1 -3/4 1/8];
```

```
[r p k]=residuez(num, den);
```

```
zplane(num,den),
```

```
title('Diagrama polo-ceros'),
```

```
xlabel('Re(z)'),
```

```
ylabel('Im(z)');
```

Propiedades de la Región de Convergencia (ROC):

Propiedad 1: La ROC de $X(Z)$ consiste en el plano z completo o en un semiplano del plano z con forma de región anular centrada en el origen del plano z , cuyos límites están dados por circunferencias centradas en dicho origen.

$$ROC \rightarrow r_1 < r < r_2$$

Propiedad 2: Para las transformadas racionales la ROC no contiene ningún polo. Además para este tipo de transformadas, la ROC está limitada por circunferencias que pasan por los polos o se extiende al infinito.

Propiedad 3: si $x[n]$ es de duración **finita**, la ROC es el plano z completo, excepto por posibles polos en $z=0$ y/o $z=\infty$.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una señal de **lado derecho o derecha**, esto es $x[n]=0$ para $n < n_1$, si existe $X(z)$, su ROC es de la forma

$$r_{max} < |z| \quad \text{o} \quad r_{max} < |z| < \infty$$

donde en caso de $X(z)$ racional, r_{max} es el mayor valor de los módulos de los polos de $X(z)$. Por tanto, la ROC es el exterior de un círculo en el plano z , cuyo radio es r_{max} .

Propiedad 5: Si $x[n]$ es una señal de **lado izquierdo o izquierda**, esto es $x[n]=0$ para $n > n_2$, si existe $X(z)$, su ROC es de la forma

$$|z| < r_{min} \quad \text{o} \quad 0 < |z| < r_{min}$$

donde r_{min} es el menor valor de los módulos de los polos de $X(z)$. Por tanto, la ROC es el interior de un círculo en el plano z cuyo radio es r_{min} .

Propiedad 6: Si $x[n]$ es una **señal bilateral** o lo que es lo mismo de duración infinita, si existe $X(z)$, su ROC es la región anular centrada en el origen definida

$$r_1 < |z| < r_2$$

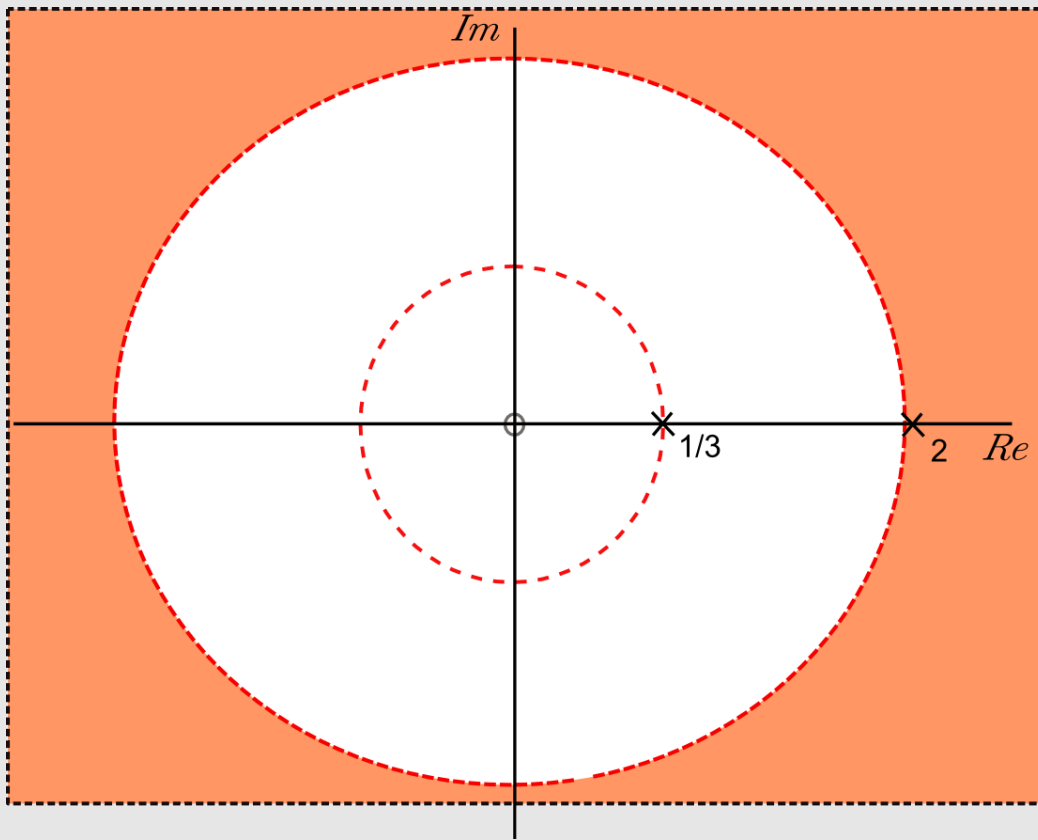
donde en caso de $X(z)$ racional, r_1 y r_2 son los módulos de dos polos de $X(z)$. La ROC está limitada por dos circunferencias de radio r_1 y r_2 centradas en el origen.

Ejemplo:

$$x[n] = a^n u[n] \leftarrow z \rightarrow \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$

$$X(z) = \frac{1.2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{0.2}{1 - 1/3 z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 1/3 z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - 1/3)(z - 2)}$$



$$|z| > 2$$

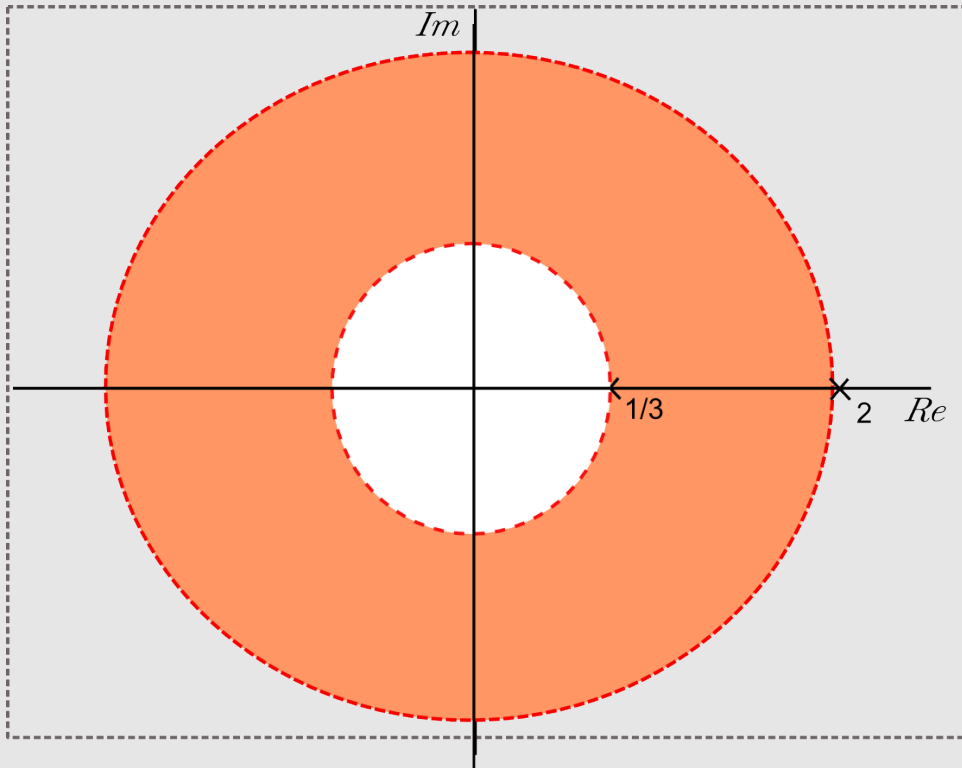
$$x[n] = 1.2 (2)^n u[n] - 0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = a^n u[n] \leftarrow z \rightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \leftarrow z \rightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a|$$

$$X(z) = \frac{1.2}{1-2z^{-1}} - \frac{0.2}{1-1/3z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-1/3z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-1/3)(z-2)}$$



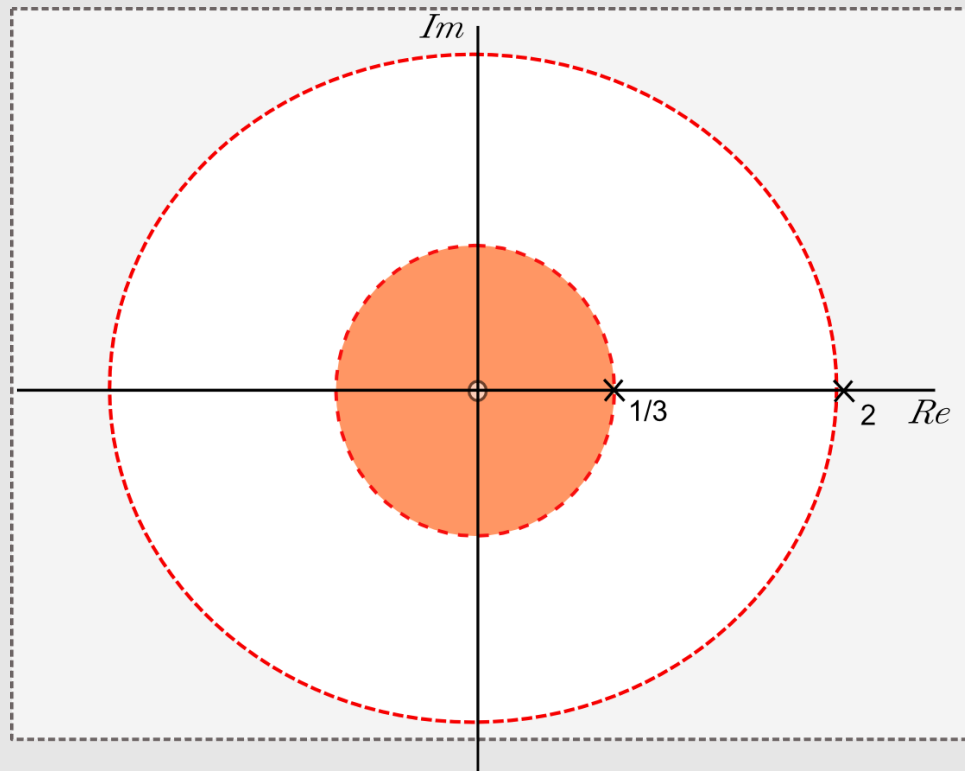
$$\frac{1}{3} < |z| < 2$$

$$x[n] = -1.2 (2)^n u[-n-1] - 0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \leftarrow z \rightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a|$$

$$X(z) = \frac{1.2}{1-2z^{-1}} - \frac{0.2}{1-1/3z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-1/3z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-1/3)(z-2)} \quad |z| < \frac{1}{3}$$



$$x[n] = -1.2 (2)^n u[-n-1] + 0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Ejemplo:

$$x[n] = a^n u[n] \leftarrow z \rightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{e^{j\pi/4n} - e^{-j\pi/4n}}{2j}\right) u[n] \\ &= -\frac{j}{2} \left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] + \frac{j}{2} \left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

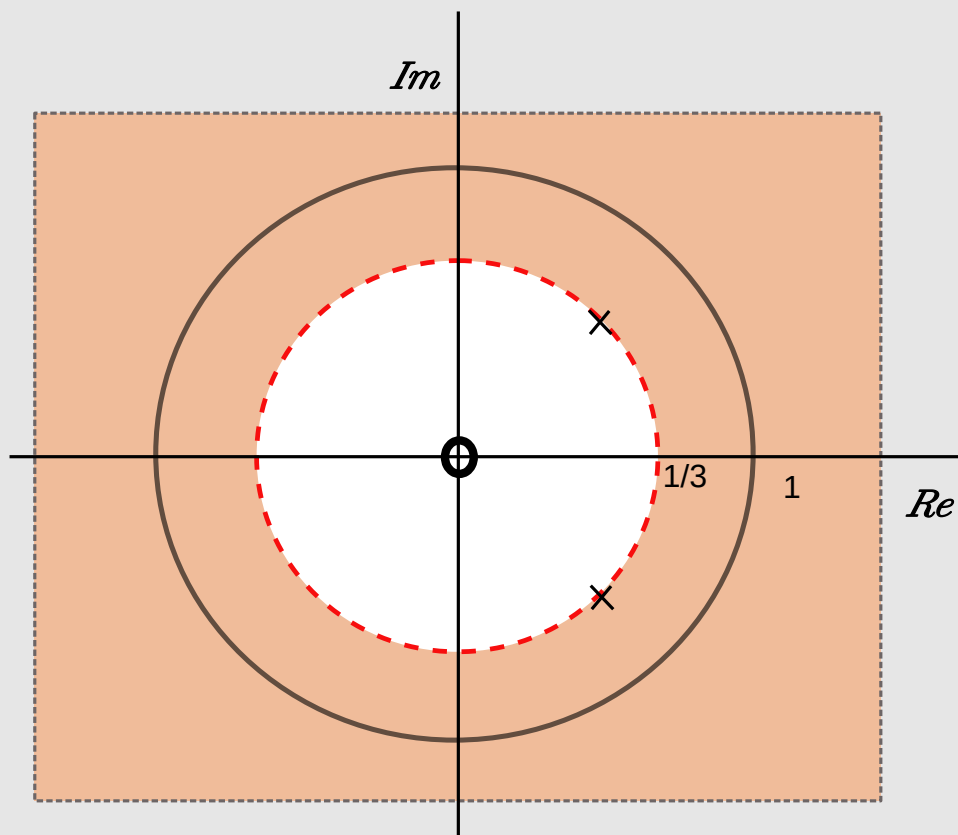
$$\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] \leftarrow z \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{j\pi/4} z^{-1}} \quad ROC : |z| > \left|\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right|$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \leftarrow z \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\pi/4} z^{-1}} \quad ROC : |z| > \left|\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right|$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{-j/2}{1 - \frac{1}{3} e^{\pi/4} z^{-1}} + \frac{j/2}{1 - \frac{1}{3} e^{-\pi/4} z^{-1}} \\
&= \frac{\frac{1}{6} \sqrt{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{6} \sqrt{2} z}{\left(z - \frac{1}{3} e^{j\pi/4}\right) \left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4}\right)} \quad ROC : |z| > \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$$

$$X(z) = \frac{\frac{1}{6}\sqrt{2}z}{\left(z - \frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)} \quad ROC : |z| > \frac{1}{3}$$

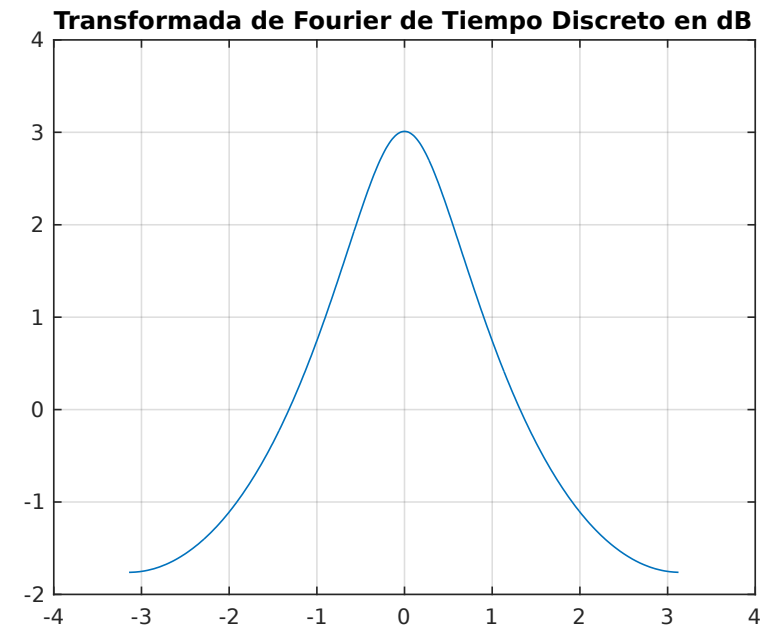
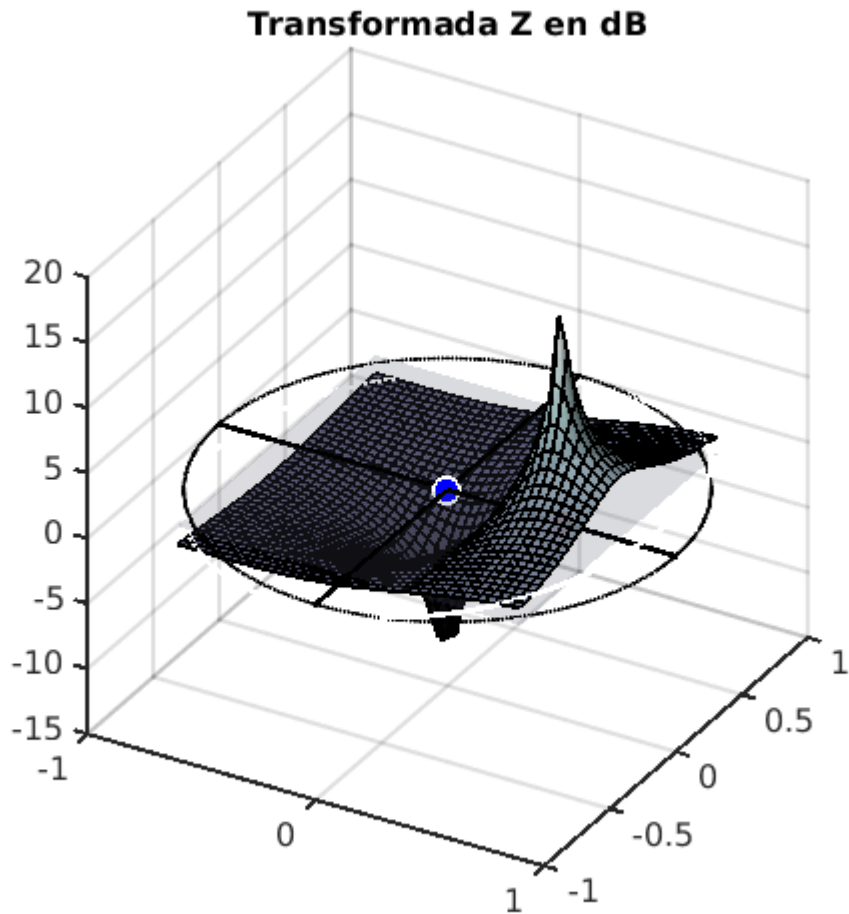


$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \leftarrow z \rightarrow \frac{z}{z - 1/2} \quad |z| > |1/2|$$

```

polos=[1/2]; % polos
ceros=[0]; % ceros
[Hz, Hw, z, w, p, c]=zt(ceros,polos,1,1);
coef_numerador=poly(ceros)
coef_denominador=poly(polos)
figure,
zplane(coef_numerador,coef_denominador)

```



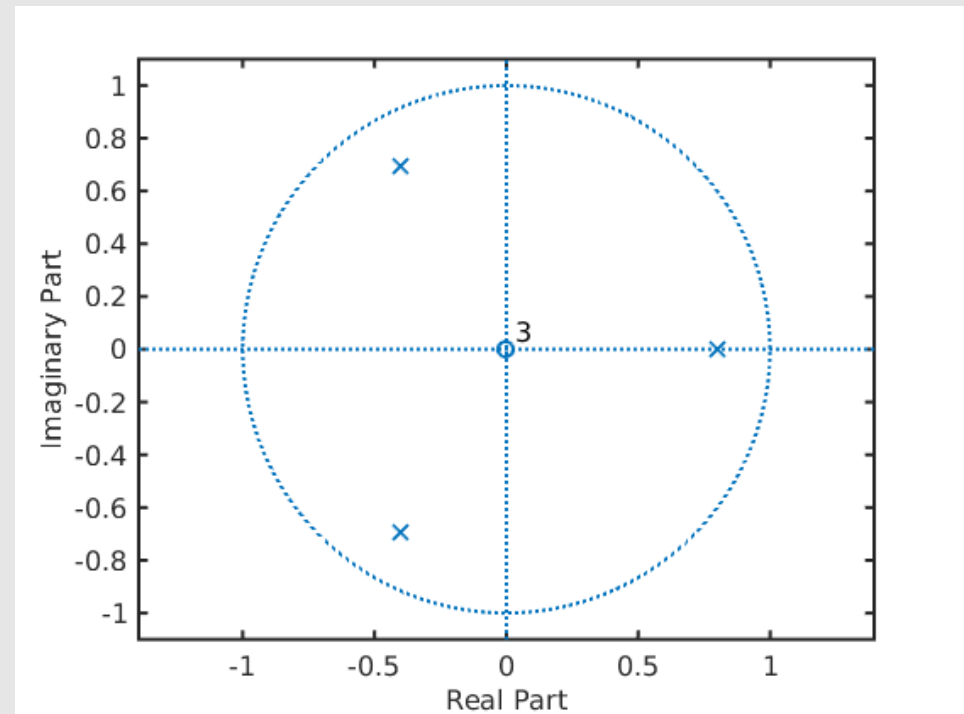
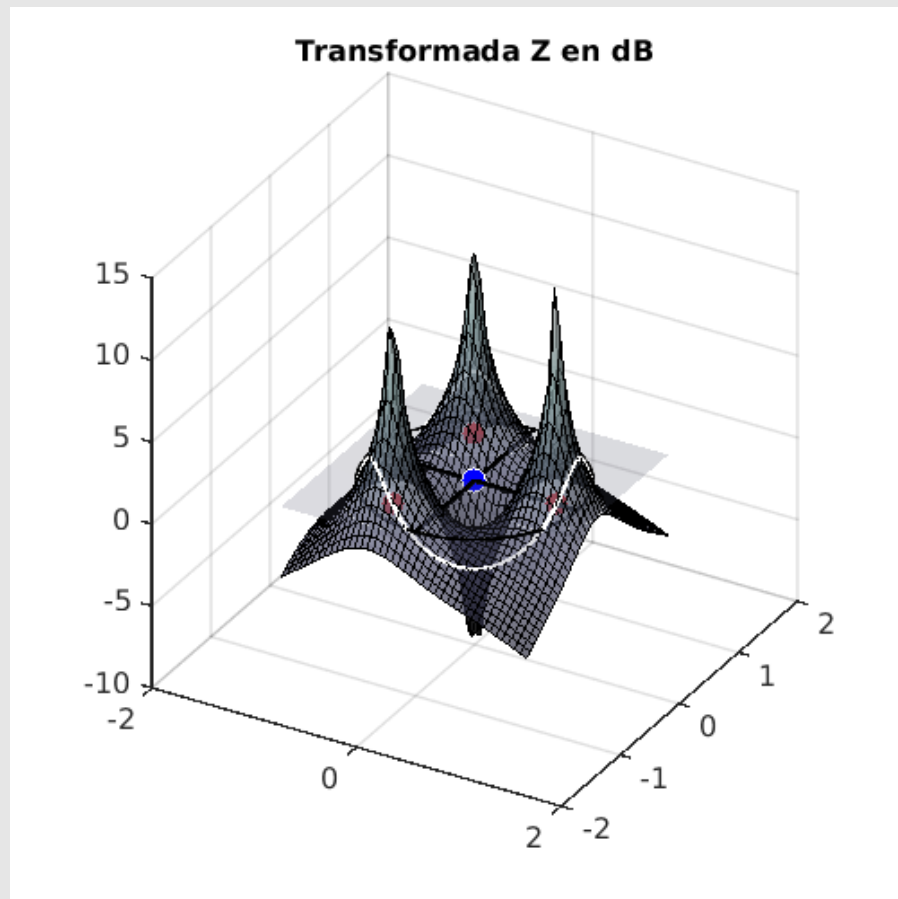
```

% zt es una funcion que representa el 10log del valor absoluto de la TZ del
sistema
% con funcion de transferencia racional X(z),
%
%  $X(z) = (\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}) / (\sum_{k=0}^N a_k z^{-k})$ 
%
% Entradas:
% f: valor 0/1 que indica la naturaleza de los vectores a y b donde f=1 indica
que a y b son raices
% y f=0 indica que son coeficientes de los polinomios del numerador y
denominador respectivamente
% (por defecto f=0);
% a: si f=0 es el vector de coeficientes del polinomio del denominador;
% si f=1 (polinomio factorizado) es el vector que contiene los polos del
sistema
% b: si f=0 es el vector de coeficientes del polinomio del numerador;
% si f=1 (polinomio factorizado) es el vector que contiene los ceros del
sistema
% graficar: valor para indicar que se desea plotear las transformadas,
% si vale 1 grafica las funciones, en caso contrario no (por defecto vale 0)
% Salidas:
% Hw: Transformada de Fourier del sistema con 256 puntos entre -pi y pi
% Hz: Transformada Z del sistema con 256 puntos para el eje real y lo
% mismo para el eje imaginario. La escala de los ejes depende del radio
% maximo de los polos y los ceros.
% Z: Argumento z

```

Ejemplo:

```
r=0.8  
polos=[r r*exp(j*2*pi/3) r*exp(-j*2*pi/3)];  
ceros=[0];  
[Hz, Hw, z, w, p, c]=zt(ceros,polos,1,1);  
coef_numerador=poly(ceros)  
coef_denominador=poly(polos)  
zplane(coef_numerador,coef_denominador)
```

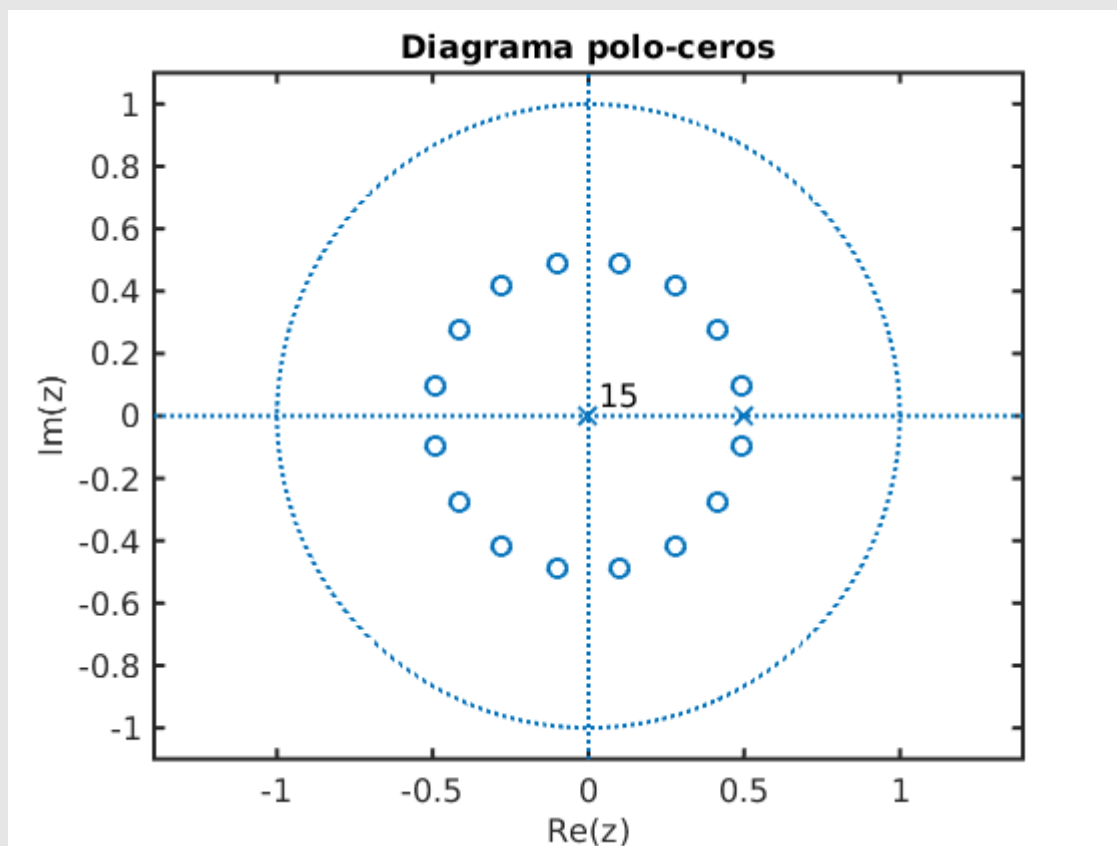


Ejemplo

$$x[n] = a^n (u[n] - u[n - N]),$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n (u[n] - u[n - N]) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} \\ &= \frac{z^N}{z^N} \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \end{aligned}$$

$$z_k = a e^{jk2\pi/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{(z - a) \prod_{k=1}^{N-1} (z - a e^{jk2\pi/N})}{z^{N-1} (z - a)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (z - a e^{jk2\pi/N})}{z^{N-1}} \end{aligned}$$

La transformada Z inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Para la evaluación existen procedimientos alternativos a la utilización de esta expresión, que permiten obtener la señal asociada con una dada $X(z)$, es decir obtener la transformada Z inversa. Uno es la utilización de la tablas de transformadas y propiedades, conjuntamente con la expansión en fracciones parciales. El otro es interpretar la transformada Z como una serie de potencias (serie de Laurent) y obtener la anti-transformada por inspección.

Ambos métodos se basan en la linealidad de la transformada

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) + \dots + X_m(z)$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + \dots + x_m[n]$$

Tabla 1: Transformada Z de señales básicas

Señal	Transformada	ROC
$\delta[n]$	1	Toda z
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a$
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a$
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a$
$(n + 1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a$
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\text{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n \text{sen}(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r\text{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$

Obtención de la transformada Z inversa mediante expansión en serie de potencias

La expresión que define la transformada Z es una expansión en serie de potencias donde los valores de la señal $x[n]$ son los coeficientes de z^{-n}

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \dots + x[-2]z^2 + x[-1]z^1 + x[0]z^0 + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Se puede determinar la señal $x[n]$ a partir de $X(z)$ encontrando el coeficiente correspondiente de z^{-1} . Esto es posible hacerlo por simple inspección en algunos casos o realizando la expansión en serie de $X(z)$ e indentificando los coeficientes de las potencias de z . Si bien esto puede no proporcionar una forma matemática cerrada para la expresión de $x[n]$, el método es muy útil en caso de señales $x[n]$ finitas para las cuales $X(z)$ es un polinomio en z .

Ejemplo de antitransformada mediante serie de potencias.

$$X(z) = 5z^2 + 2 + 3z^{-1} + z^{-3} \quad ROC \rightarrow 0 < |z| < \infty$$

Comparando $X(z)$ con la definición de la transformada, por simple inspección obtenemos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[n] = \begin{cases} 5 & n = -2 \\ 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ 1 & n = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por lo que la señal es

$$x[n] = 5\delta[n+2] + 2 + 3\delta[n-1] + \delta[n-3]$$

Expansión en fracciones parciales

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-N}}$$

$$[r, p, k] = \text{residuez}(b, a)$$

$$[b, a] = \text{residuez}(r, p, k)$$

$$X(z) = \frac{r(1)}{1 - p(1)z^{-1}} + \frac{r(2)}{1 - p(2)z^{-1}} + \frac{r(3)}{1 - p(3)z^{-1}} + \dots$$
$$k(1) + k(2)z^{-1} + k(3)z^{-2} + k(4)z^{-3} + \dots$$

$$x[n] = r(1)p(1)^n u[n] + r(2)p(2)^n u[n] + r(3)p(3)^n u[n] + \dots$$
$$k(1)\delta[n] + k(2)\delta[n-1] + k(3)\delta[n-2] + k(4)\delta[n-3] + \dots$$

Ejemplo de anti-transformada mediante serie de potencias.

$$X(z) = \log \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) \quad |z| > |a|$$

La expansión en serie de potencias de $\log(1-r)$ es

$$\log(1 - r) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n \quad |r| < 1$$

Aplicando esta expresión a $X(z)$

$$X(z) = \log \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = -\log(1 - az^{-1})$$

$$-\log(1 - az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n z^{-n} \quad |z| > |a| \text{ o } |az^{-1}| < 1$$

De donde podemos identificar la señal $x[n]$

$$x[n] = \begin{cases} (1/n) a^n & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases} \quad x[n] = \frac{1}{n} a^n u[n - 1]$$

Propiedades de la transformada Z

$$x_1[n] \xleftarrow{Z} X_1(z) \quad ROC = R_1$$

$$x_2[n] \xleftarrow{Z} X_2(z) \quad ROC = R_2$$

a) Linealidad

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftarrow{Z} a X_1(z) + b X_2(z) \quad ROC \text{ al menos } R_1 \cap R_2$$

b) Desplazamiento en el tiempo

$$x[n - n_o] \xleftarrow{Z} z^{-n_o} X(z) \quad ROC = R \text{ con posible supresión de } z = 0 \text{ y } z = \infty$$

c) Inversión temporal

$$x[-n] \xleftarrow{L} X(z) \quad ROC = -R$$

Ejemplo

$$x[n] = u[n - 1]$$

$$x[n - n_o] \xleftarrow{Z} \rightarrow z^{-n_o} X(z) \text{ ROC} = R \text{ con posible supresión de } z = 0 \text{ y } z = \infty$$

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{ROC} : 1 < |z| < \infty$$

$$u[n - 1] \xleftrightarrow{Z} z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z - 1} \quad \text{ROC} : 1 < |z|$$

d) Escalamiento en el dominio Z

$$z_0^n x[n] \leftarrow Z \rightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad ROC = |z_0|R$$

e) Primera diferencia

$$x[n] - x[n-1] \leftarrow Z \rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z) \quad ROC = \text{al menos } R \cap |z| > 0$$

f) Convolución

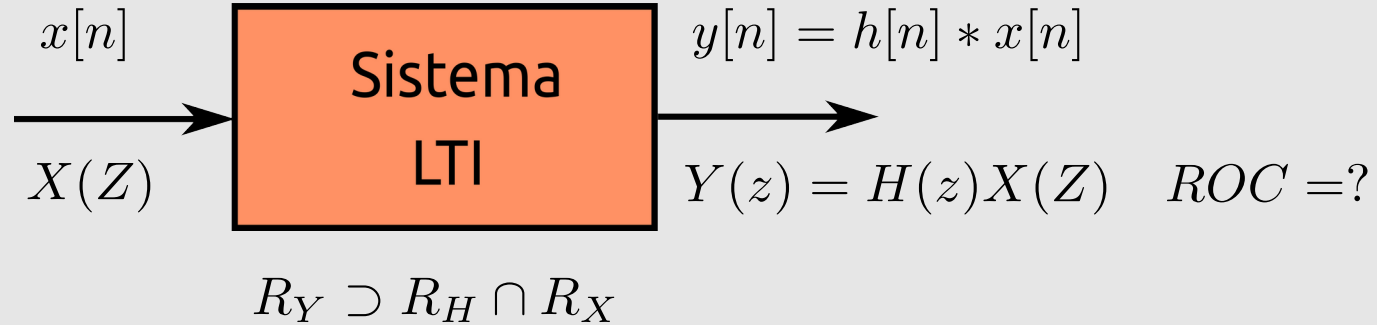
$$x_1[n] * x_2[n] \leftarrow Z \rightarrow X_1(z)X_2(z) \quad ROC = \text{al menos } R_1 \cap R_2$$

g) Conjugación

$$x^*[n] \leftarrow Z \rightarrow X^*(z^*) \quad ROC = R$$

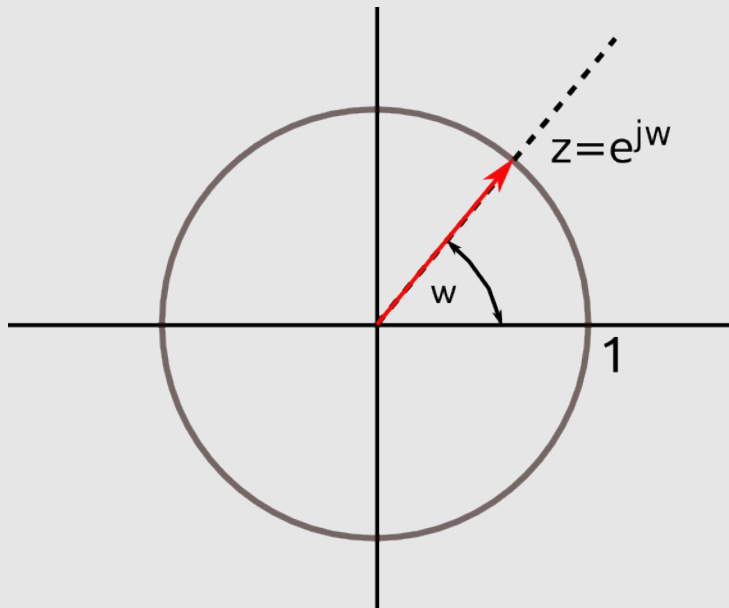
...

Función de transferencia de un sistema LTI discreto



$H(z)$ → Función de transferencia o función del sistema

$$H(z) = \mathcal{Z} \{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$



$\omega \rightarrow$ frecuencia en $[\pi, -\pi)$

$$H(e^{j\omega}) = H(Z)|_{|z|=1}$$

Respuesta al escalón:

$$s[n] = h[n] * u[n],$$

$$S(z) = H(z)U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} H(z)$$

$$ROC : R_S \supset R_H \cap \{1 < |z|\}$$

Ejemplo:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad ROC : |z| > \frac{1}{4}$$

$$x[n] = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \xleftrightarrow{Z} \quad \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad ROC : |z| > \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \frac{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \quad ROC : |z| > \frac{1}{2} \\ &= \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \end{aligned}$$

$$y[n] = 13.33 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 9.33 \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Causalidad en sistemas LTI

Si consideramos que $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$ y a partir de la propiedad de la ROC de una señal derecha, vemos que la región de convergencia de un sistema causal es la región exterior al círculo de radio $r_{\max}$, es decir

$$\text{sistema LTI causal} \rightarrow ROC : |z| > r_{\max}$$

Incluimos en este caso la posibilidad de que la ROC sea todo el plano z .

- Si $H(z)$ es racional, podemos realizar la afirmación inversa y determinar si el sistema es causal simplemente observando si la ROC de $H(z)$ es el exterior de un círculo.
- Además en este caso, la ROC es el exterior de un círculo que contiene todos los polos de $H(z)$ y $r_{\max}$ es el módulo del polo con mayor módulo (más alejado del origen del plano z).
- Si $H(z)$ es el cociente de dos polinomios, para que el sistema sea causal, el orden del polinomio denominador debe ser mayor o igual que el orden del polinomio numerador.

Ejemplo: sistema causal

$$x[n] = a^n u[n] \leftarrow z \rightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

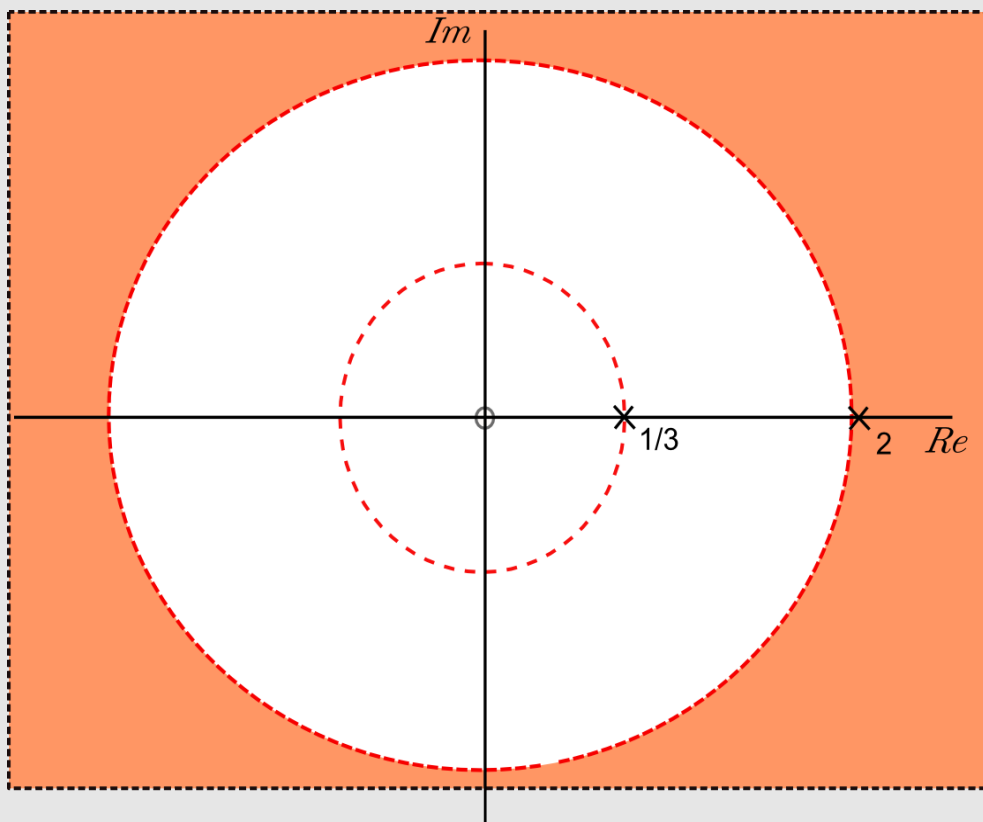
$$H(z) = \frac{1}{(1 - 1/3 z^{-1})(1 - 2 z^{-1})} = \frac{1}{1 - 7/3 z^{-1} + 2/3 z^{-2}} = \frac{z^2}{(z - 1/3)(z - 2)}$$

$$H(z) = \frac{1.2}{1 - 2 z^{-1}} - \frac{0.2}{1 - 1/3 z^{-1}}$$

```
num=[1];  
den=[1 -7/3 2/3];  
[r p k]=residuez(num, den)
```

$$|z| > 2$$

$$h[n] = 1.22 (2)^n u[n] - 0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

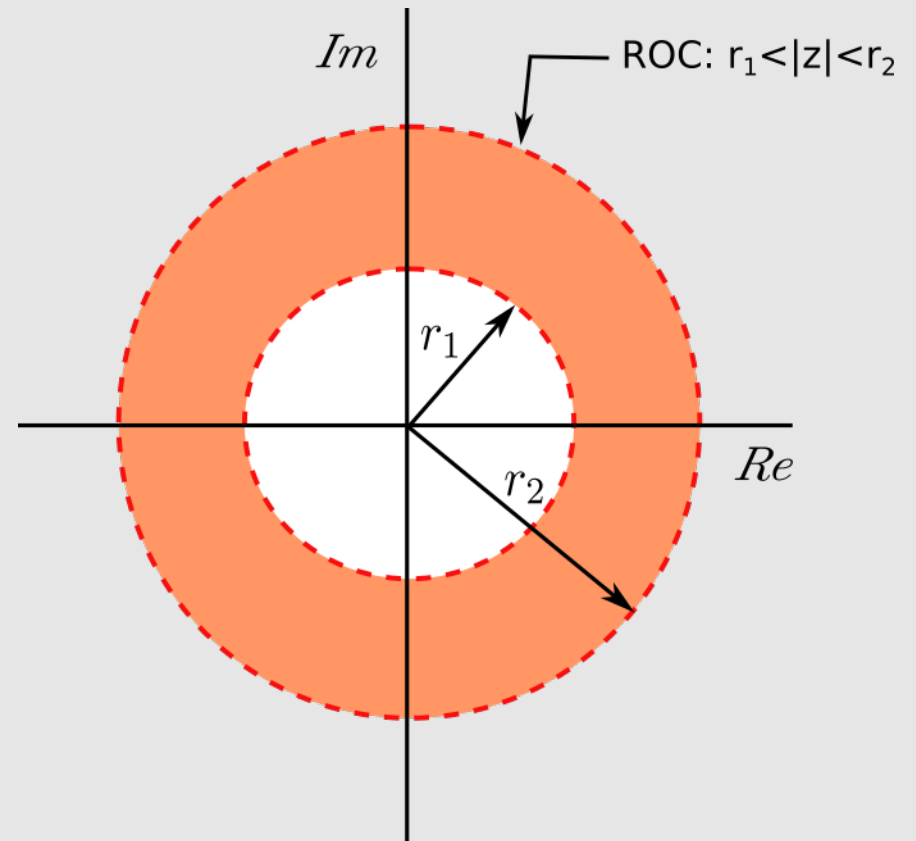


Estabilidad en un sistema LTI

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

Un sistema LTI es estable sí y solo sí la ROC de la función transferencia del sistema incluye la circunferencia unitaria donde, lo que nos permite realizar la evaluación

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}.$$



Sistemas LTI causales caracterizados por ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad + \quad \text{c.i.} = \text{nulas}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \qquad \mathcal{Z} \{x[n-k]\} = z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

La región de convergencia de $H(z)$ la determinamos a partir de su forma algebraica y de la propiedades del sistema (causalidad y estabilidad).

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$= \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}$$

$$= z^{N-M} \frac{b_0}{a_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})}$$

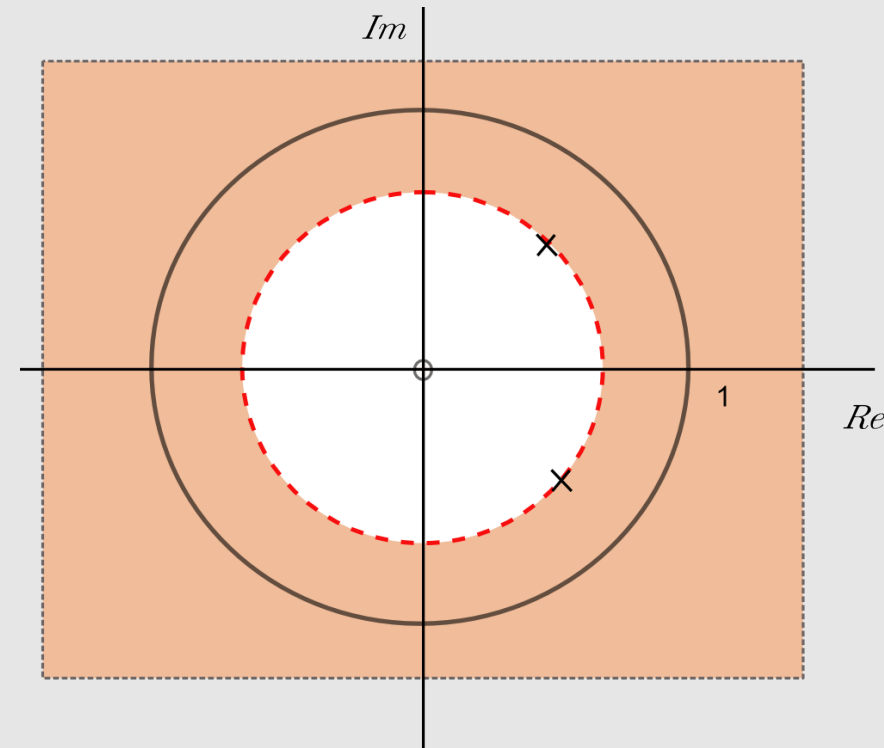
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad + \text{ c.i.=nulas}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

- Como los coeficientes a y b son reales, las raíces de ambos polinomios son reales o aparecen en pares complejo y complejo conjugado.

- Como el sistema es LTI causal, $h[n]=0$ para $n<0$, la ROC es la región externa al círculo cuyo radio es el polo más externo, es decir el de mayor módulo. El módulo del polo puede ser mayor o menor que 1.

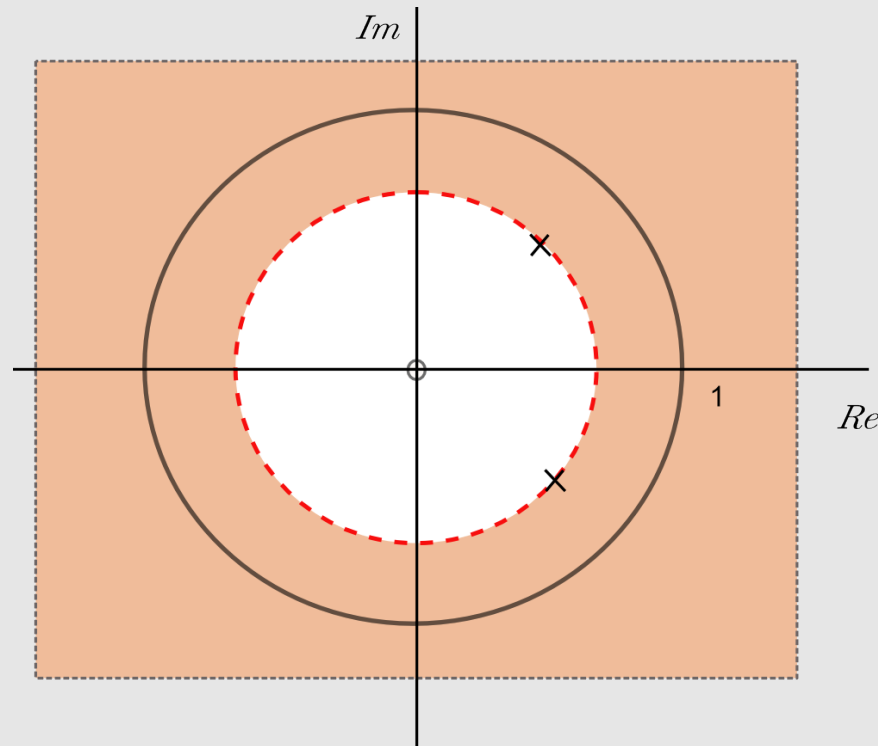
- Recordemos que dado que el sistema es causal, el grado del polinomio denominador N debe ser mayor o igual que el grado del polinomio numerador.



$$\text{causal} \rightarrow N \geq M$$

Si además el sistema es estable, la región de convergencia debe incluir la circunferencia unitaria, por lo que podemos concluir que **si el sistema posee $H(z)$ racional, es causal y estable todos sus polos deben poseer módulo menor que 1.**

$H(z)$ racional de un LTI estable + causal
 $|p_k| < 1, \forall k$



Casos particulares:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad + \text{ c.i.=nulas} \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

a) Filtro de respuesta al impulso finita - Promediador móvil causal

$$a_k = 0 \quad k = 1..N, \quad a_0 = 1 \quad y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$$

$$h[n] = \{ \underline{b_0}, b_1, b_2, \dots, b_M \}$$

Posee M ceros determinados por los coeficientes b_k y M polos en $z=0$.

También se dice que posee un polo trivial de orden M en $z=0$. Se denomina sistema **“todos ceros”** o de **“promediador móvil”**. Es un filtro FIR.

La ROC de $H(z)$ es todo el plano z menos el $z=0$.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$$

$$h[n] = \{ \underline{b_0}, b_1, b_2, \dots, b_M \}$$

Ejemplo de promediador móvil causal

$$y[n] = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 x[n-k]$$

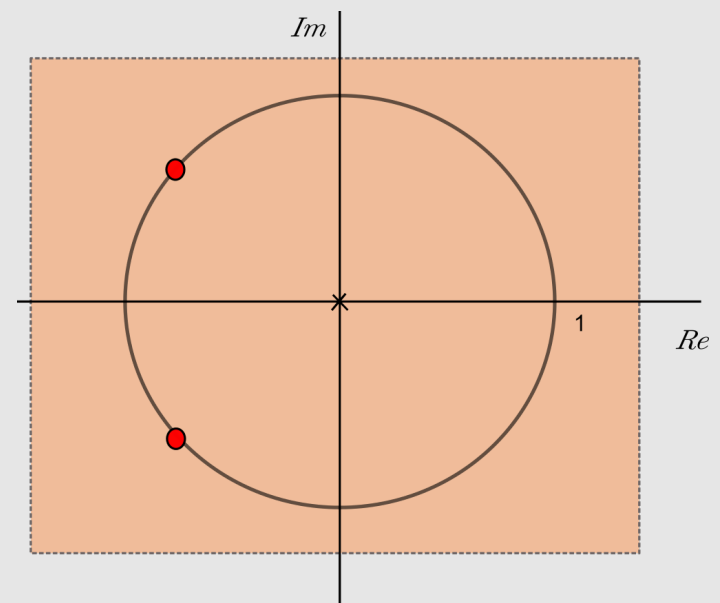
$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

$$h[n] = \left\{ \underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$H(z) = \frac{1}{3} [1 + z^{-1} + z^{-2}] = \frac{1}{3} \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

ceros en $z = -0.5000 \pm 0.8660j$
 polo de orden 2 en $z = 0$

ROC $|z| > 0$

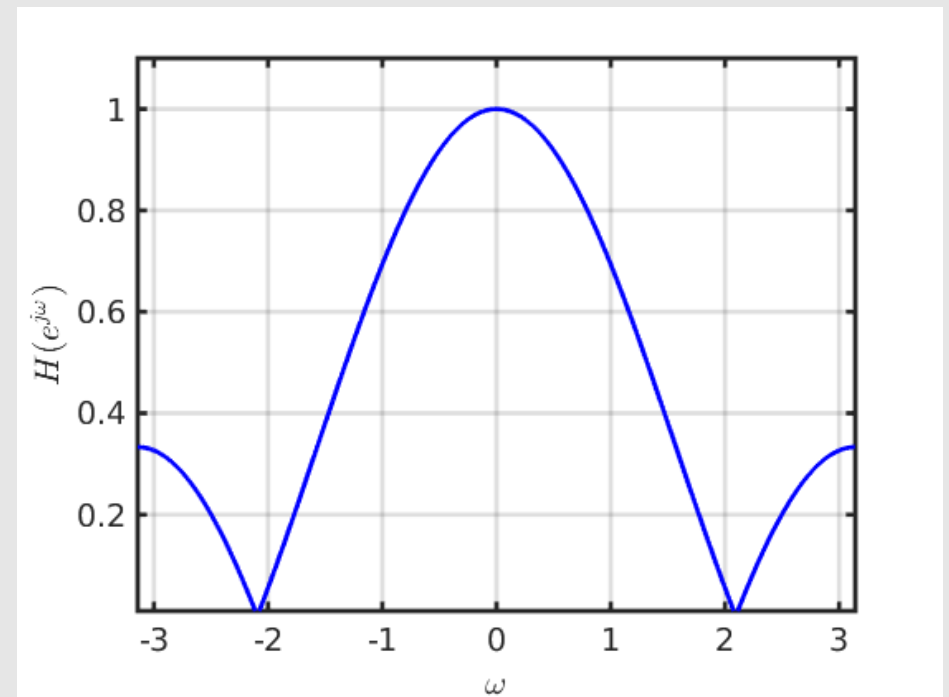
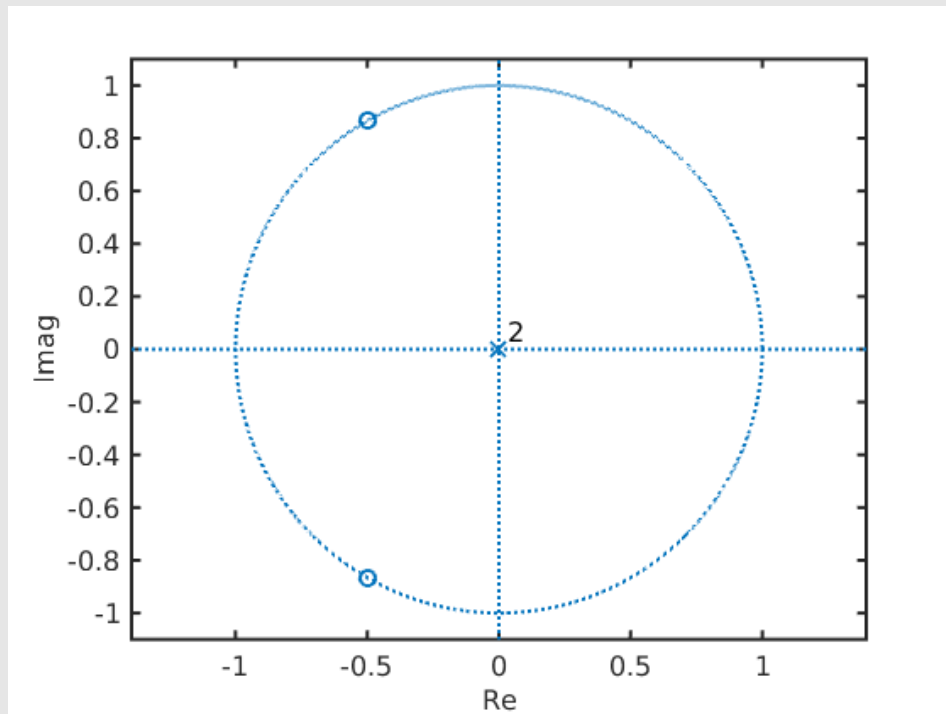


$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

$$H(z) = \frac{1}{3} [1 + z^{-1} + z^{-2}] = \frac{1}{3} \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

$$h[n] = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

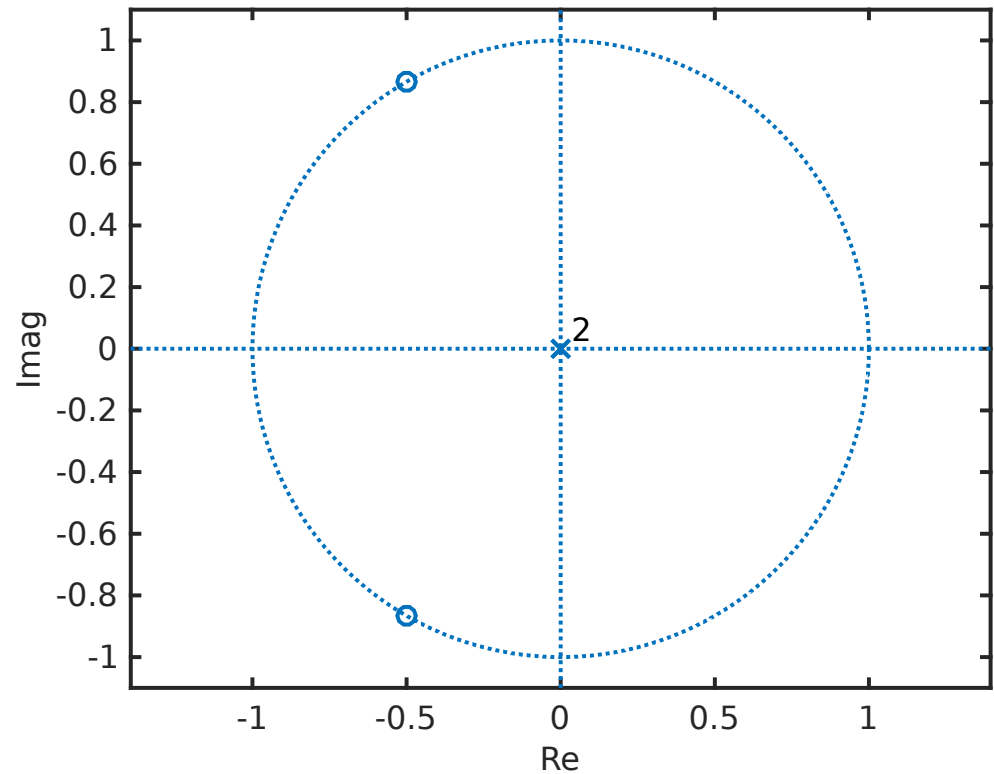
ceros en $z = -0.5000 \pm 0.8660j = e^{j2/3\pi}$, $\frac{2}{3}\pi \approx 2.09$



Ejemplo:

$$H(z) = \frac{1}{3} \{1 + z^{-1} + z^{-2}\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{z^2 + z + 1}{z^2} \right\}$$

```
num=[1/3 1/3 1/3];  
den=[1];  
[r p k]=residuez(num, den)  
zplane(num,den)  
ceros=roots(num)  
modceros=abs(ceros)  
faseceros=angle(ceros)
```



b) Filtro auto-regresivo

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad + \text{ c.i.} = \text{nulas} \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$b_k = 0 \quad k = 1..M \quad y[n] = b_0 x[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = z^N \frac{b_0}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}$$

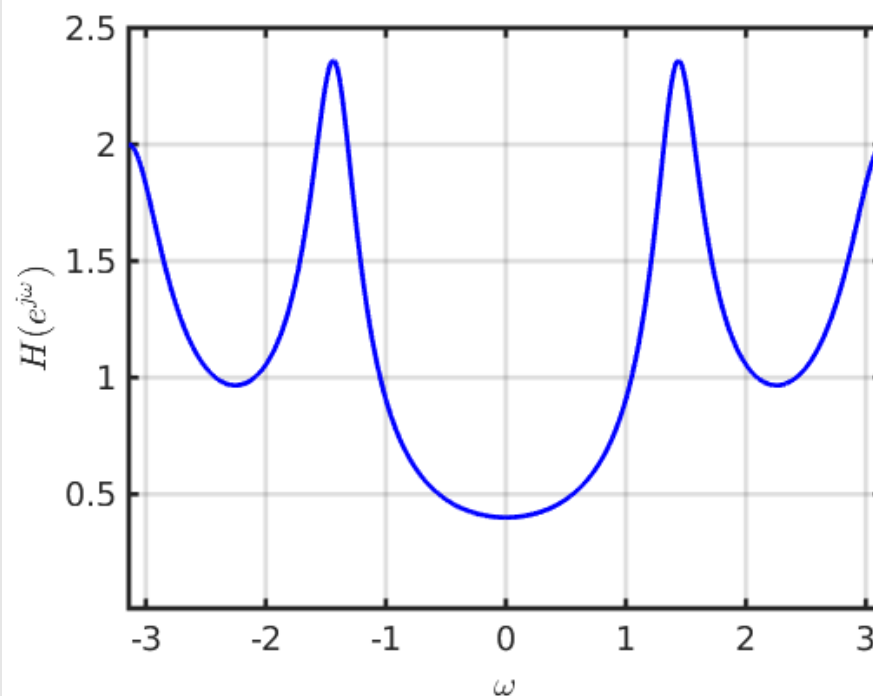
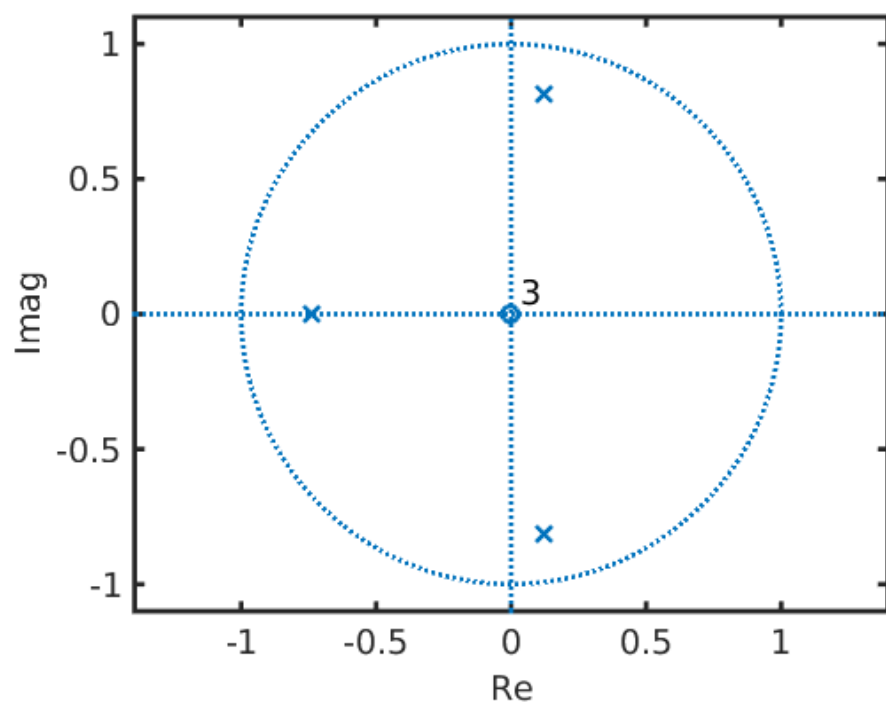
Posee N ceros en $z=0$ (cero trivial de orden N), N polos no triviales determinados por los coeficientes a_k . Se denomina sistema **“auto-regresivo”** o **“todos polos”**. Es un filtro IIR.

Ejemplo

$$y[n] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 y[n-k] = x[n]$$

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.7390, \\ p_{23} &= 0.1195 \pm 0.8138j \\ |p_{23}| &= 0.8226 \quad \angle(p_{23}) = \pm 1.42 \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}} = z^3 \frac{1}{z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}$$



Ejemplo

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n] \quad \text{en reposo inicial}$$

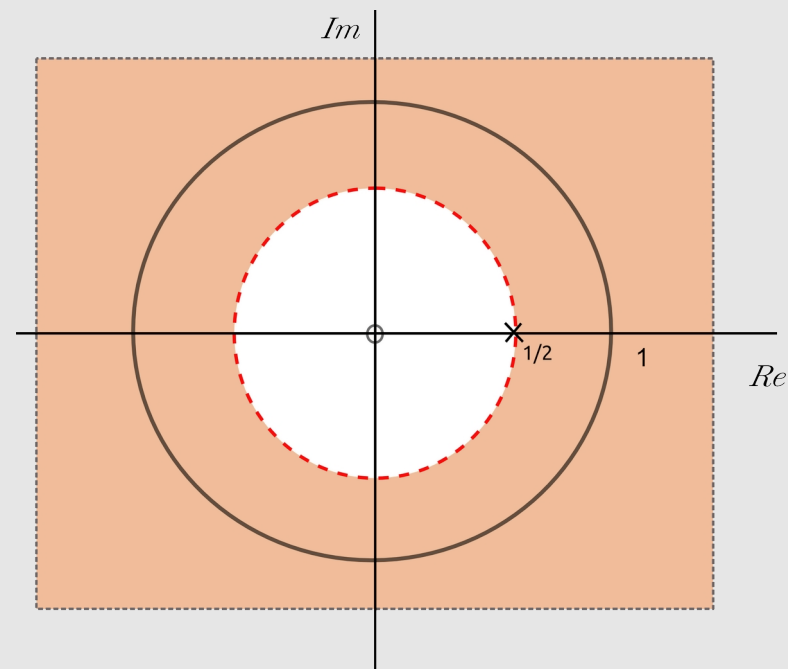
$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z}{z - \frac{1}{2}}$$

cero en $z = 0$

polo en $z = \frac{1}{2}$

$$h[n] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ROC $|z| > \frac{1}{2}$



c) caso general

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad + \text{ c.i.=nulas}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = z^{(N-M)} \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}$$

sistema causal $\rightarrow N \geq M$

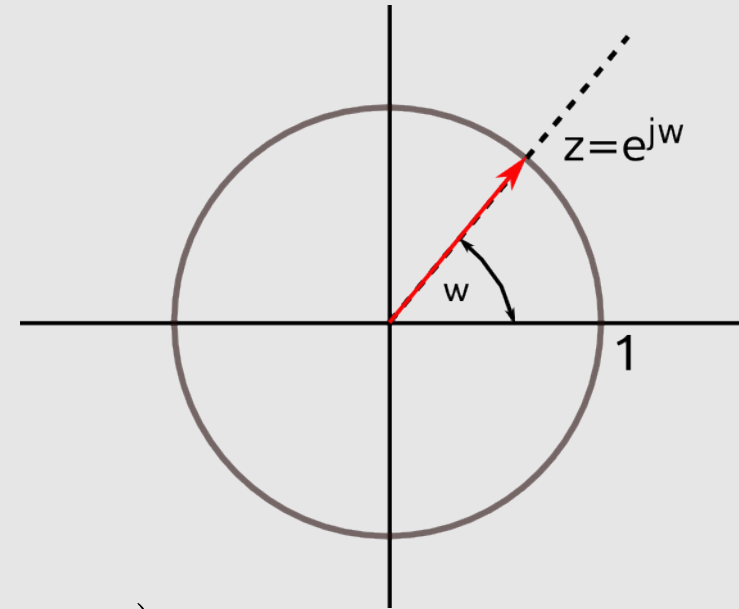
Posee M ceros determinados por los coeficientes b_k , N polos determinado por los coeficientes a_k , 1 cero trivial de orden N-M. Se denomina **“promediador móvil autoregresivo”**. Es un filtro IIR.

Construcción de filtros a partir de localización de polos y ceros

Construcción de filtros a partir de localización de polos y ceros

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad + \text{ c.i.} = \text{nulas}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$



$$H(e^{j\omega}) = H(Z)|_{|z|=1} \quad \omega \rightarrow \text{frecuencia en } [\pi, -\pi)$$

Reglas:

- Ubicamos polos cerca de las frecuencias a amplificar.
- Ubicamos ceros cerca de las frecuencias a atenuar.
- Para que el sistema sea estable y causal, el módulo de los polos debe ser menor que 1.
- Por cada polo p_k debe existir su conjugado p_k^* , para que los coeficientes de la relación entrada-salida (ecuación en diferencias) sean reales.
- El número de ceros y polos que elegimos siempre debe mantener la relación $N \geq M$ para que el filtro se corresponda con un sistema LTI causal.

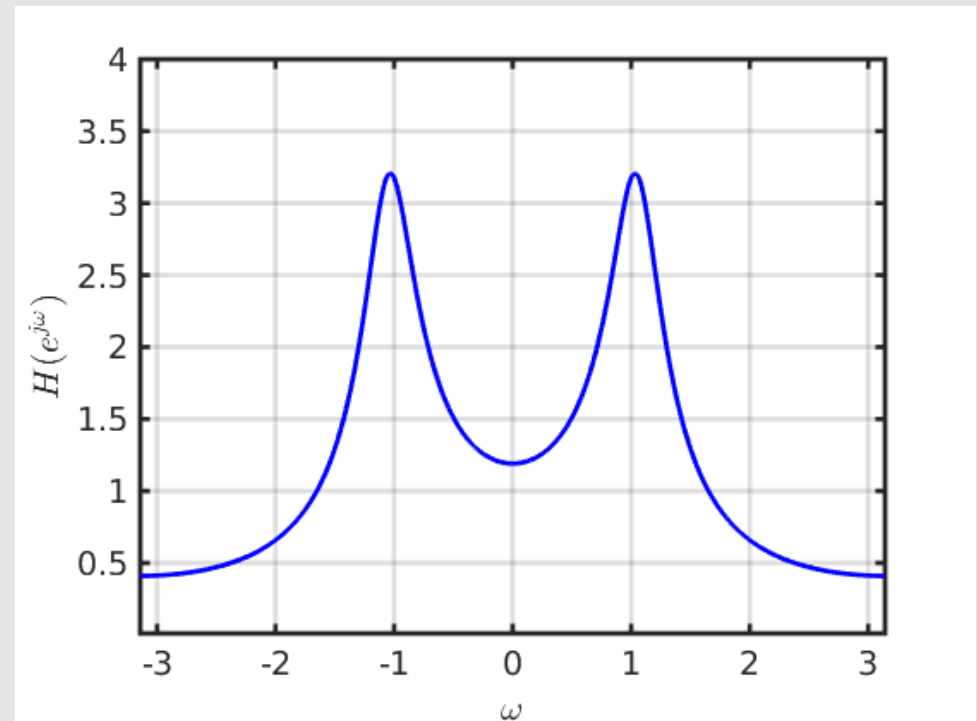
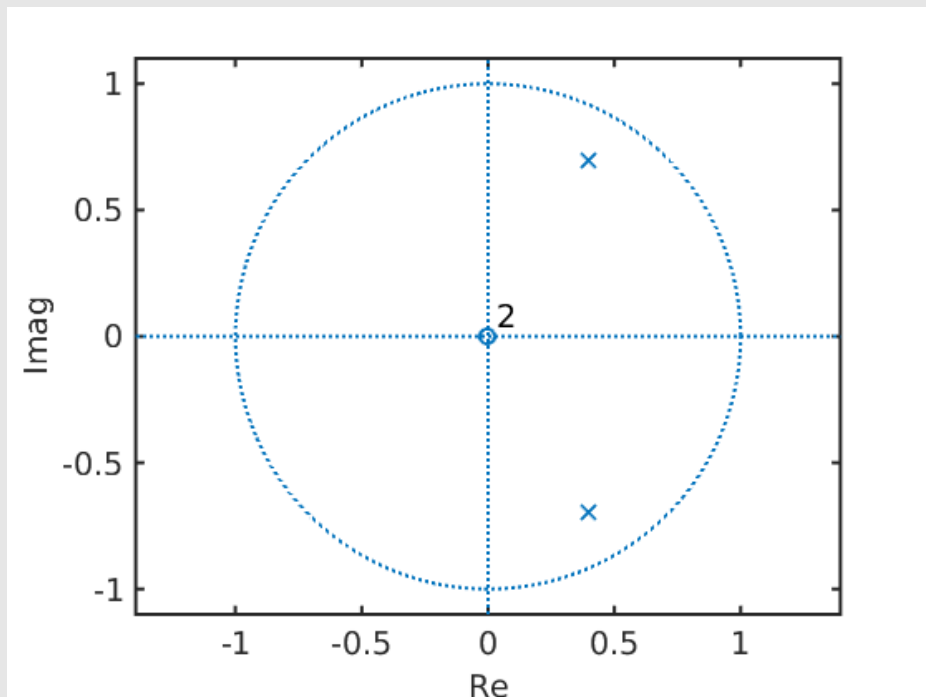
Ejemplo: resonador digital, amplifica bandas centrada en la frecuencias ω_0 y $-\omega_0$

$$H(z) = G \frac{\dots}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})}$$

$|r| < 1 \rightarrow$ sistema causal y estable

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z^2}{(z - p)(z - p^*)} \\ &= \frac{1}{(1 - pz^{-1})(1 - p^*z^{-1})} \\ &= \frac{1}{(1 - 2r \cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2})} \end{aligned}$$

$$y[n] - 2r \cos(\omega_0) y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n]$$

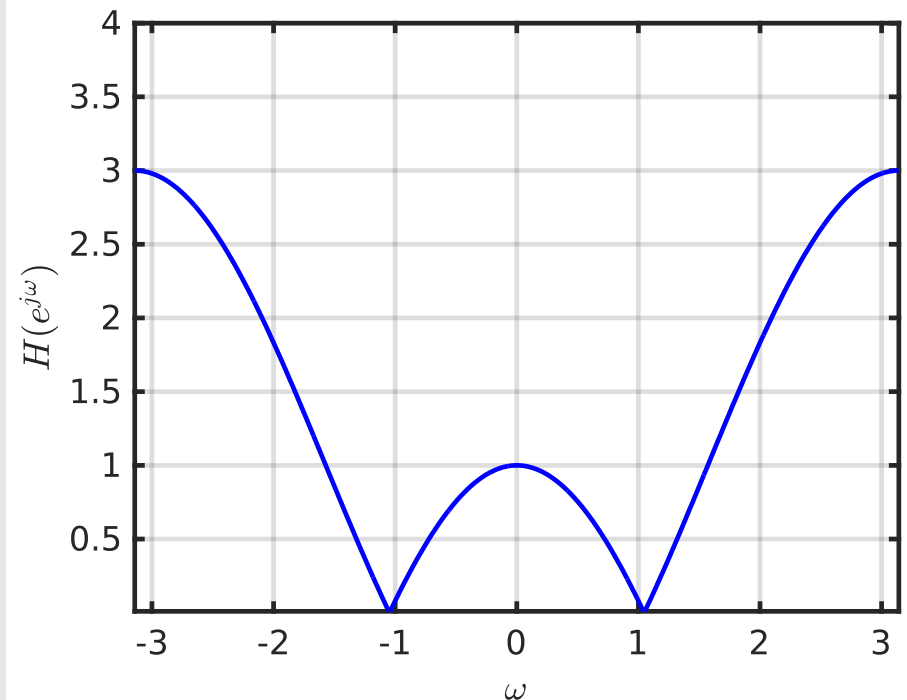
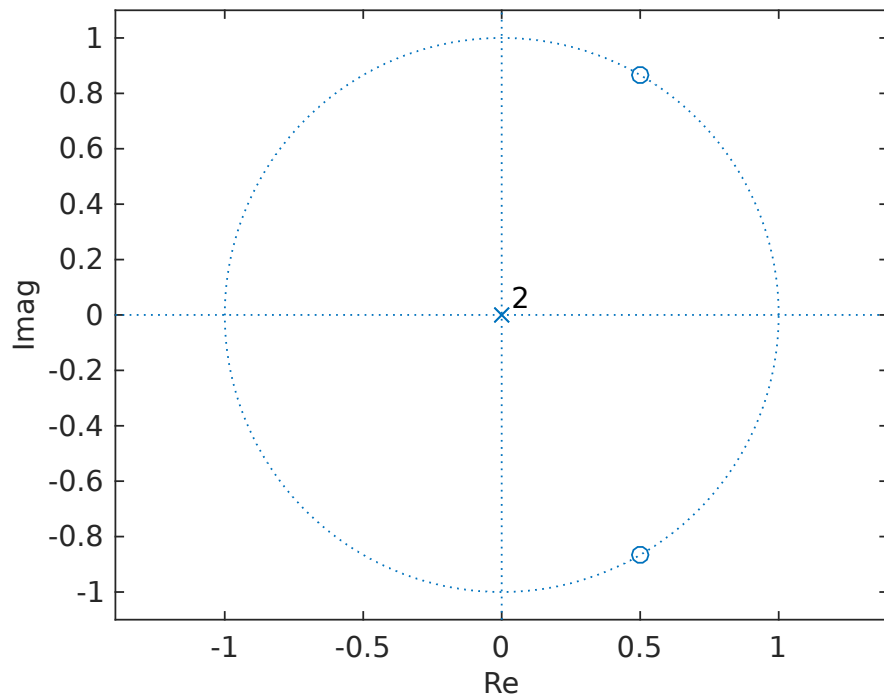


Ejemplo: filtro ranura, elimina frecuencias específicas (sistema todo ceros).

Introducir un cero en la circunferencia unitaria por cada frecuencia a eliminar.

$$\begin{aligned} H(z) &= G \frac{(z - e^{j\omega_0}) (z - e^{-j\omega_0})}{z^2} \\ &= G \frac{[z^2 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z + 1]}{z^2} \\ &= G (1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}) \end{aligned}$$

$$y[n] = G(x[n] - 2\cos(\omega_0)x[n-1] + x[n-2])$$



```
w0=pi/3;  
num=[1 -2*cos(w0) 1];  
den=[1];  
[r p k]=residuez(num, den)  
zplane(num,den)
```

```
w=[-pi:0.01:pi];  
H=(1-2*cos(w0)*exp(-j*w)+exp(-2*j*w))./(exp(-j*2*w));  
pt=plot(w,abs(H)),  
axis([-pi pi 0.010 4.0])
```

Ejemplo de promediador móvil causal (sistema todos ceros)

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$

$$h[n] = \left\{ \frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M} \right\}.$$

$$H(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} = \frac{1}{M} \frac{1 - (z^{-1})^M}{1 - z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{M} \frac{1 - (z^{-1})^M}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{M} \frac{z^{-M} z^M - 1}{z^{-1} z - 1}$$

$$H(z) = \frac{1}{M} z^{-(M-1)} \frac{z^M - 1}{z - 1}$$

$$H(z) = \frac{1}{M} z^{-(M-1)} \frac{z^M - 1}{z - 1}$$

polo de orden $M - 1$ en $z = 0$, polo en $z = 1$

ceros en $z = re^{j\theta}$ con $\rightarrow z^M = 1, \Rightarrow r^M e^{jM\theta} = 1, r = 1, e^{jM\theta} = 1$

M ceros en $M\theta = m 2\pi, \theta = \frac{m}{M} 2\pi, m = 0, 1, \dots M - 1$

polo en $z = 1$ que se cancela con cero en $z=0$

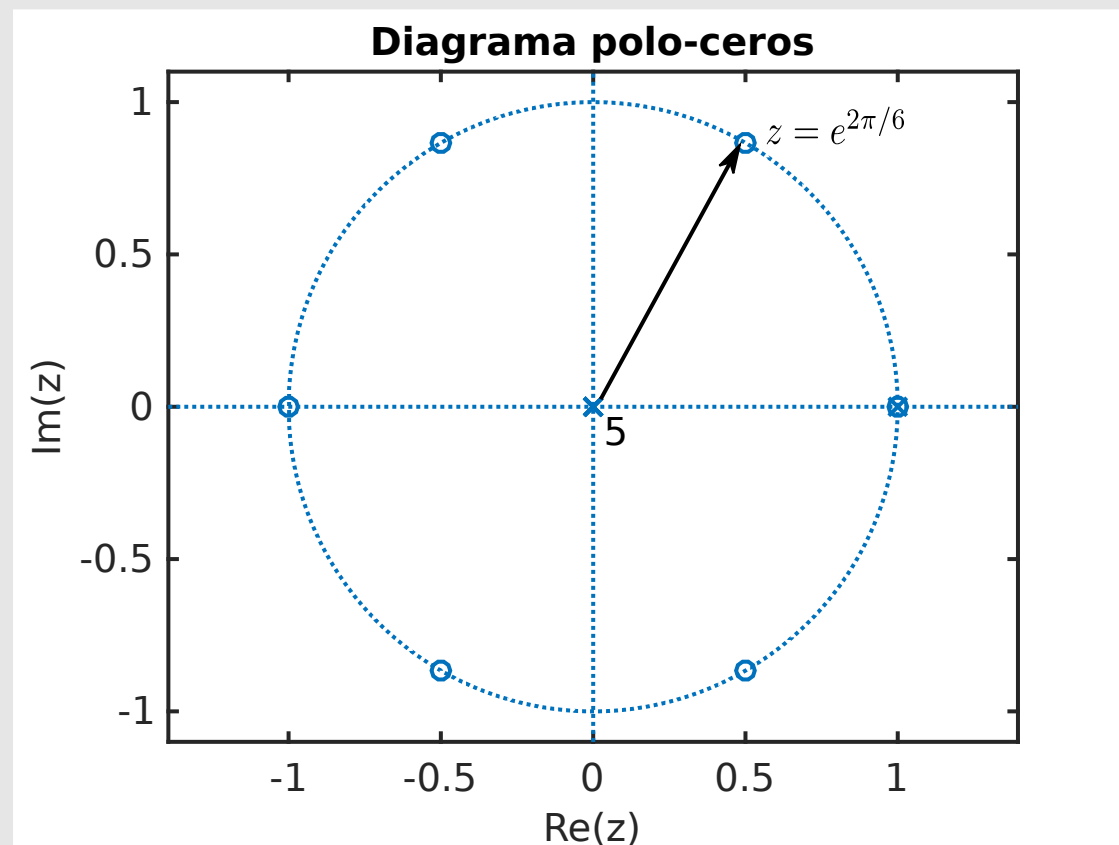


Diagrama polo-ceros

