Señales y sistemas

Tema VI:
Aplicación de la transformada de Laplace en el análisis de señales y sistemas

Diego Leonardo Valladares
Departamento de Física
Univ. Nac. de San Luis

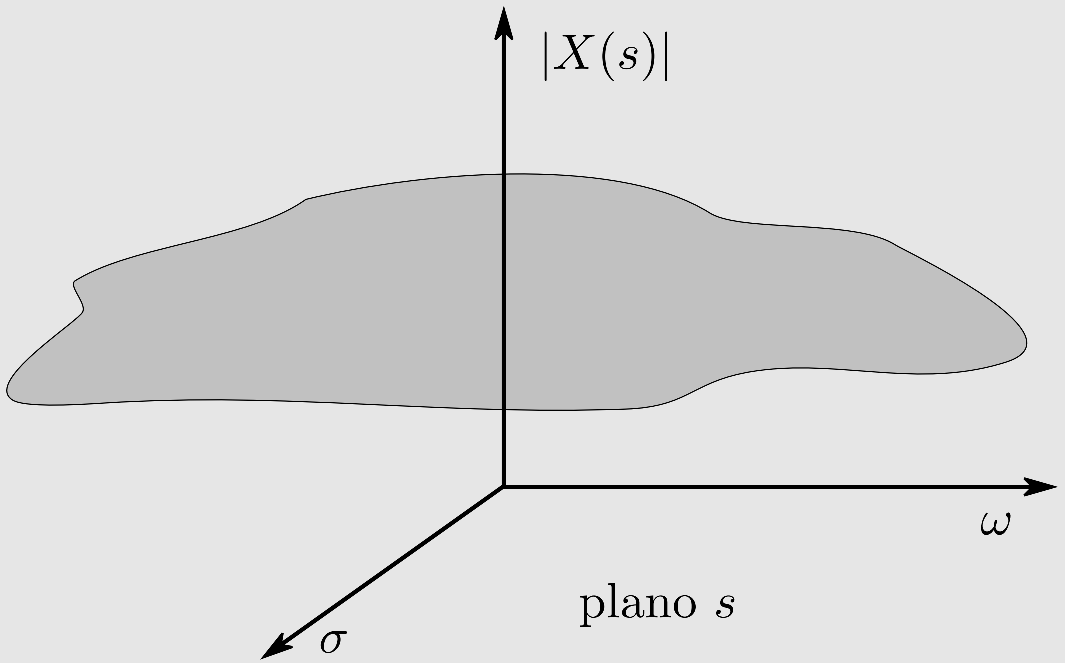
La Transformada de Laplace:

$$\boxed{X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

$$x(t) \leftarrow \mathcal{L} \rightarrow X(s)$$



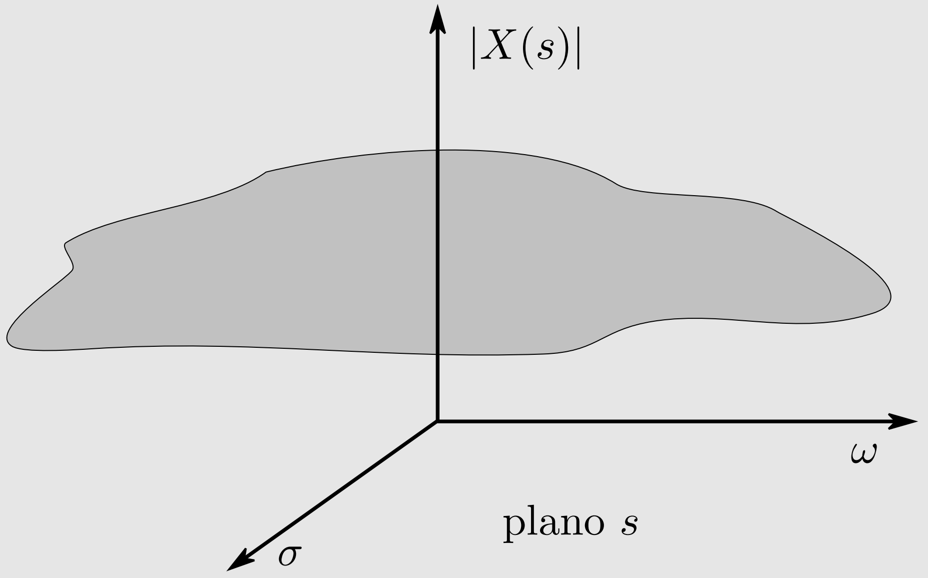
Región de convergencia (**ROC**) = conjunto de valores de *s* para los cuales existe la transformada de Laplace de la señal.

Relación entre las transformadas de Laplace y Fourier:

$$X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

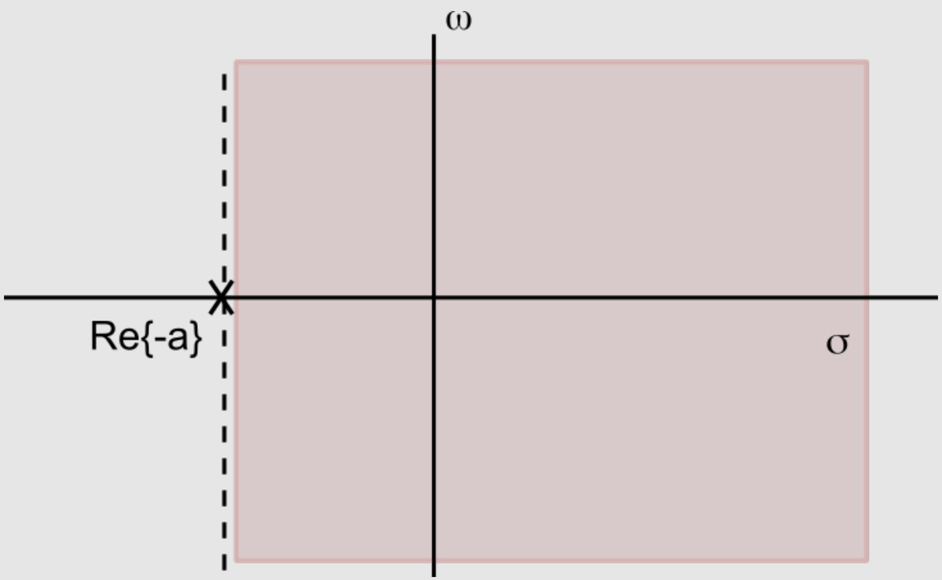


La transformada de Fourier de una señal es la evaluación de su transformada de Laplace para s=jω, es decir en el sobre el eje jω.

Ejemplo:

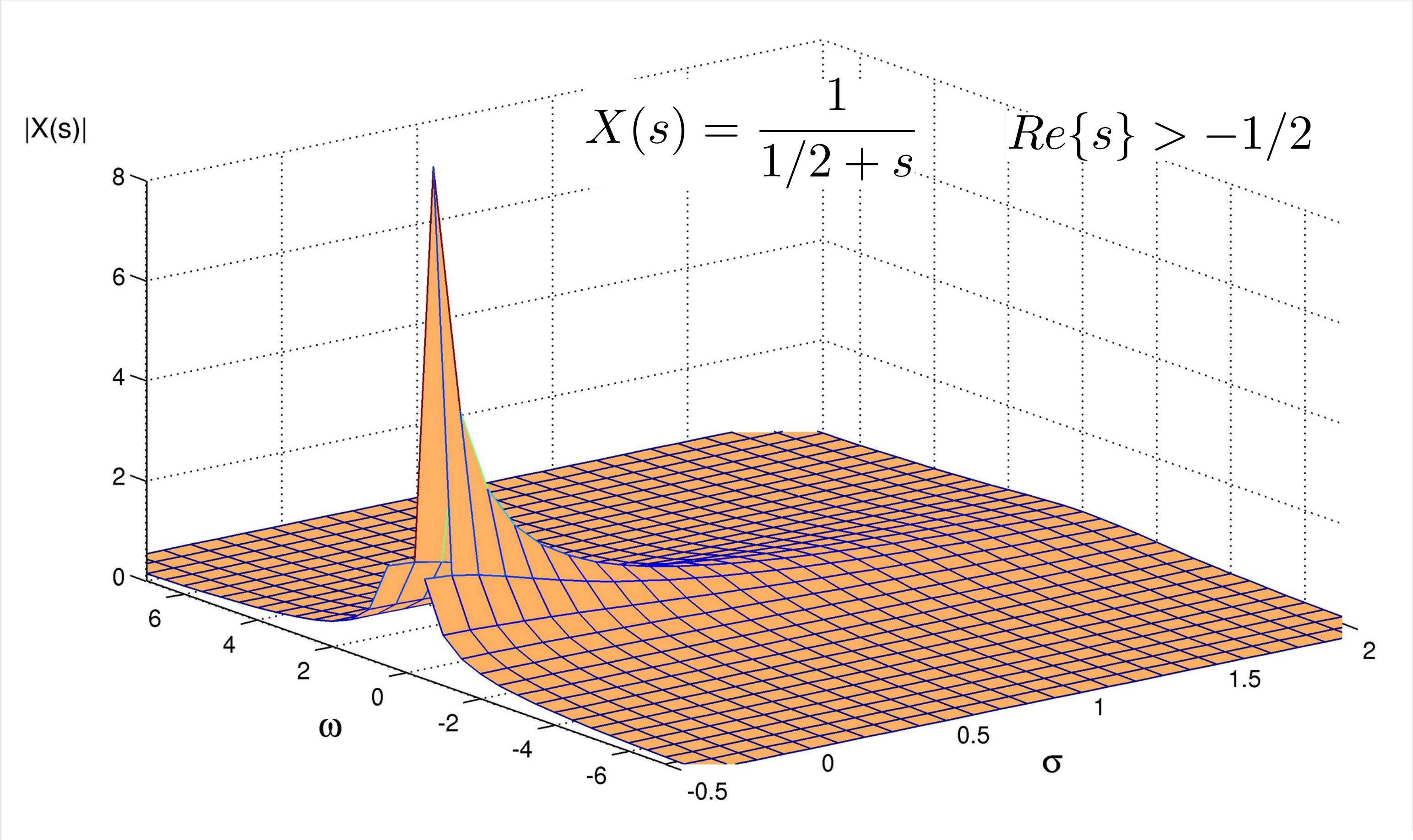
$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-st} dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\
&= -\frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s+a} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \\
&= \frac{1}{s+a} \quad \text{si} \quad Re\{s\} > -a
\end{aligned}$$



$$\boxed{e^{-at}u(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > Re\{-a\}}$$

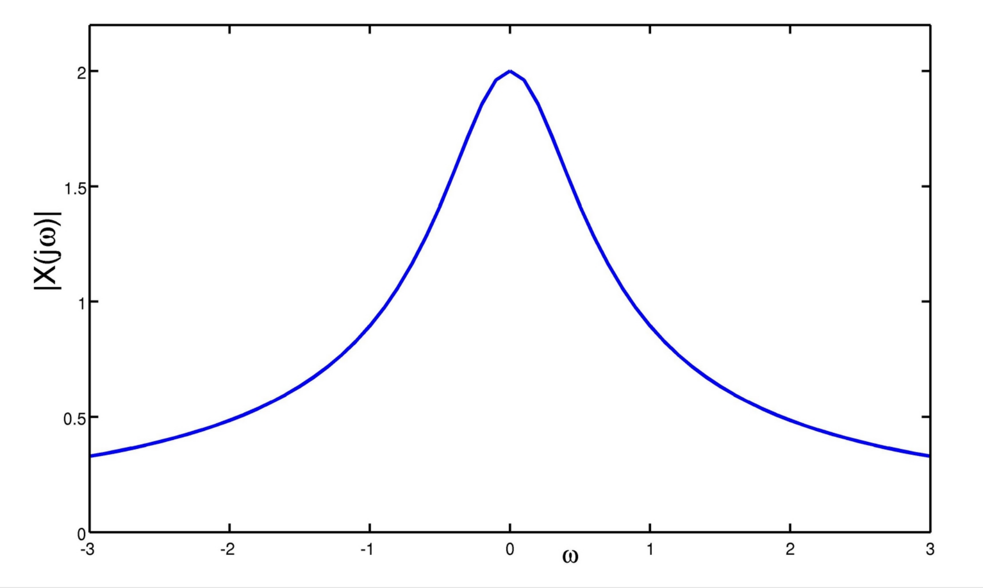
$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$



$$e^{-at}u(t) \quad \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > Re\{-a\}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$

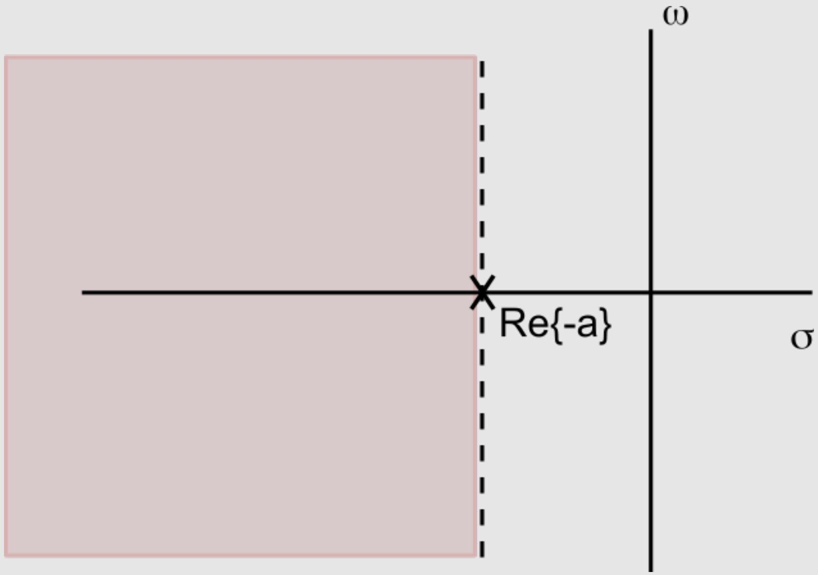
$$X(s) = \frac{1}{1/2 + j\omega}$$



Ejemplo:

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

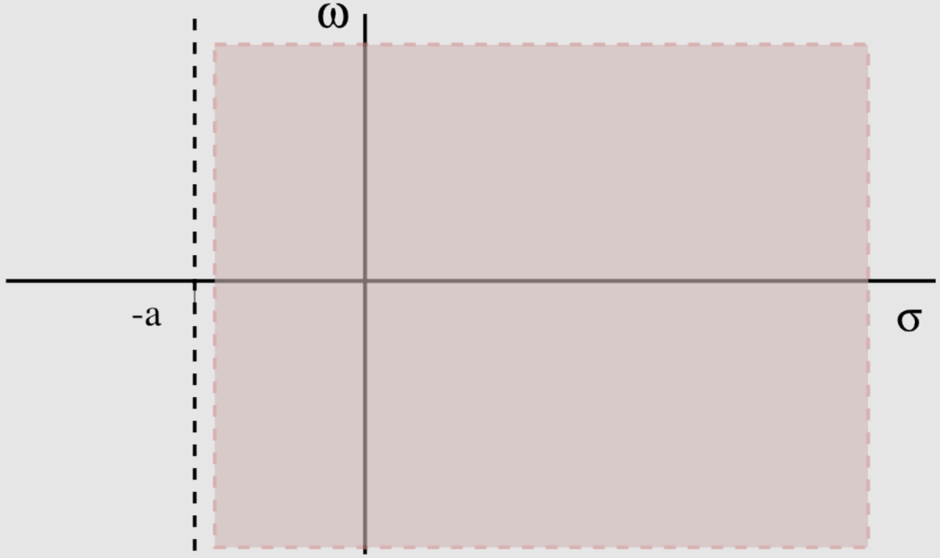
$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)\, e^{-st} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} -e^{-(s+a)t} dt \\
&= \left. \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \right|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{s+a} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \\
&= \frac{1}{s+a} \quad \text{si} \quad Re\{s\} < -a
\end{aligned}$$

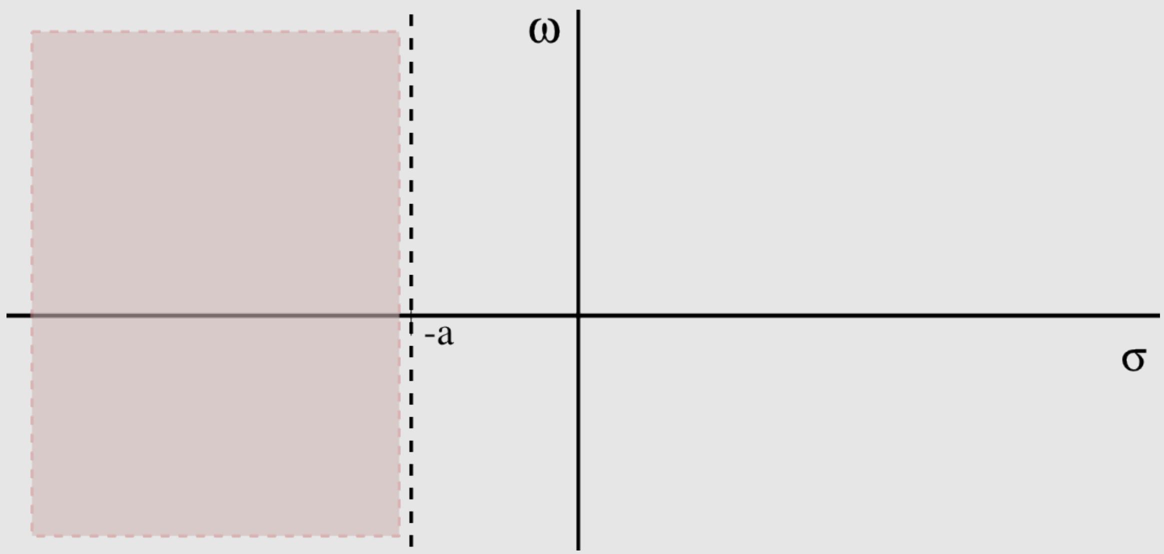


$$\boxed{-e^{-at}u(-t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} < Re\{-a\}}$$

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} < -a$$





Convergencia de la transformada de Laplace:

$$\boxed{X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t}dt \\ &= F\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{X(s) = F\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty$$

La transformada de Laplace X(s) de una señal x(t) converge, y por tanto existe, para valores de s para los cuales existe la transformada de Fourier de $x(t)e^{\sigma t}$, siendo $\sigma=\mathrm{Re}\{s\}$.

Ejemplo:

$$\boxed{e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > -a}$$

$$\boxed{x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)}$$

$$x_1(t) = 3e^{-2t}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad \frac{3}{s+2} \quad Re\{s\} > -2$$

$$x_2(t) = 2e^{-t}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$$

$$\boxed{X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \qquad Re\{s\} > -1}$$

Ejemplo:

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} < -a$$

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + 3e^{1/2\,t}u(-t)$$

$$x_1(t) = 2e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{2}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$$

$$x_2(t) = -3e^{1/2\,t}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{3}{s+(-1/2)} \quad Re\{s\} < -(-1/2)$$

$$X(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s-1/2} = \frac{2(4+s)}{2s^2+s-1} \qquad -1 < Re\{s\} < 1/2$$

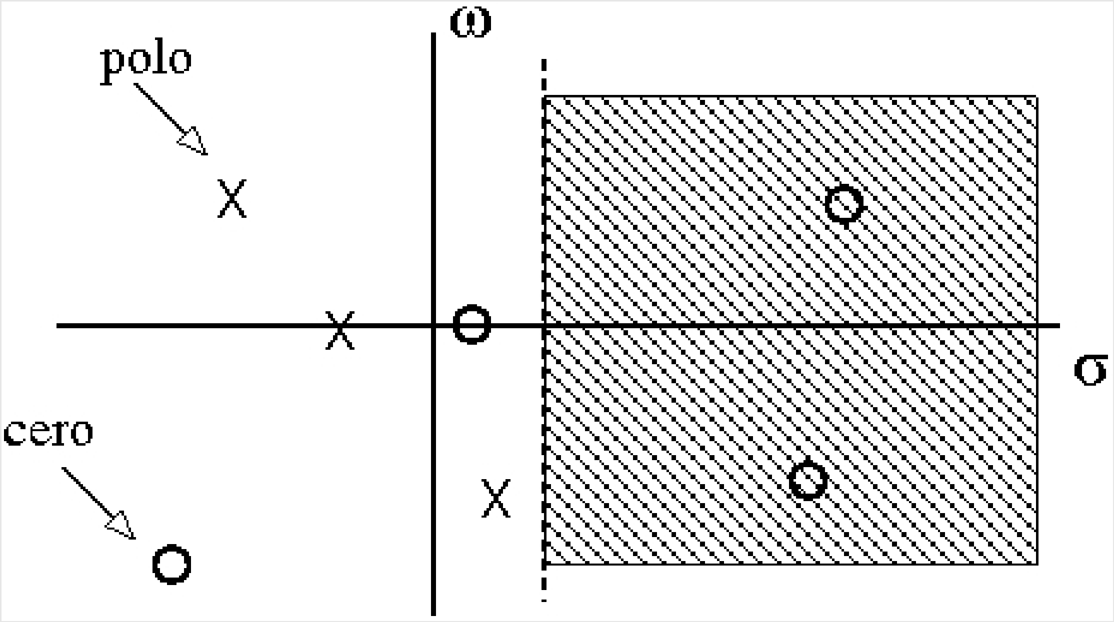
Polos y ceros de X(s):

$$X(s) = \frac{b_o s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n} = \frac{b_o}{a_o} \frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)}$$

$$z_i \;\rightarrow\; \text{ceros} \quad i = 1...m$$

$$p_i \;\rightarrow\; \text{polos} \quad i = 1...n$$

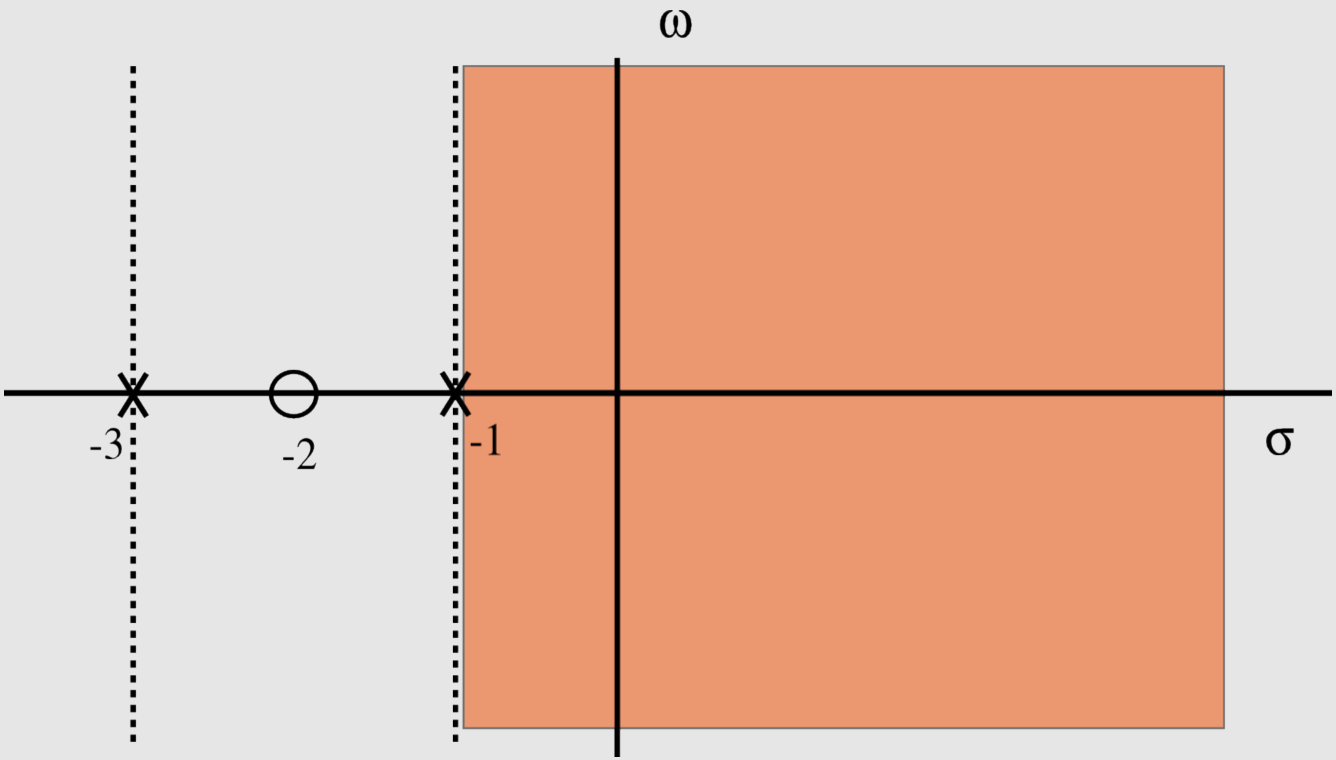
Diagrama de polos y ceros



Este tipo de transformadas racionales siempre aparecen en dos casos importantes:

- cuando las señales son combinaciones lineales de exponenciales reales o complejas
- cuando examinamos los sistemas LTI especificados por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$



$$X(s) = \frac{b_o}{a_o} \frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

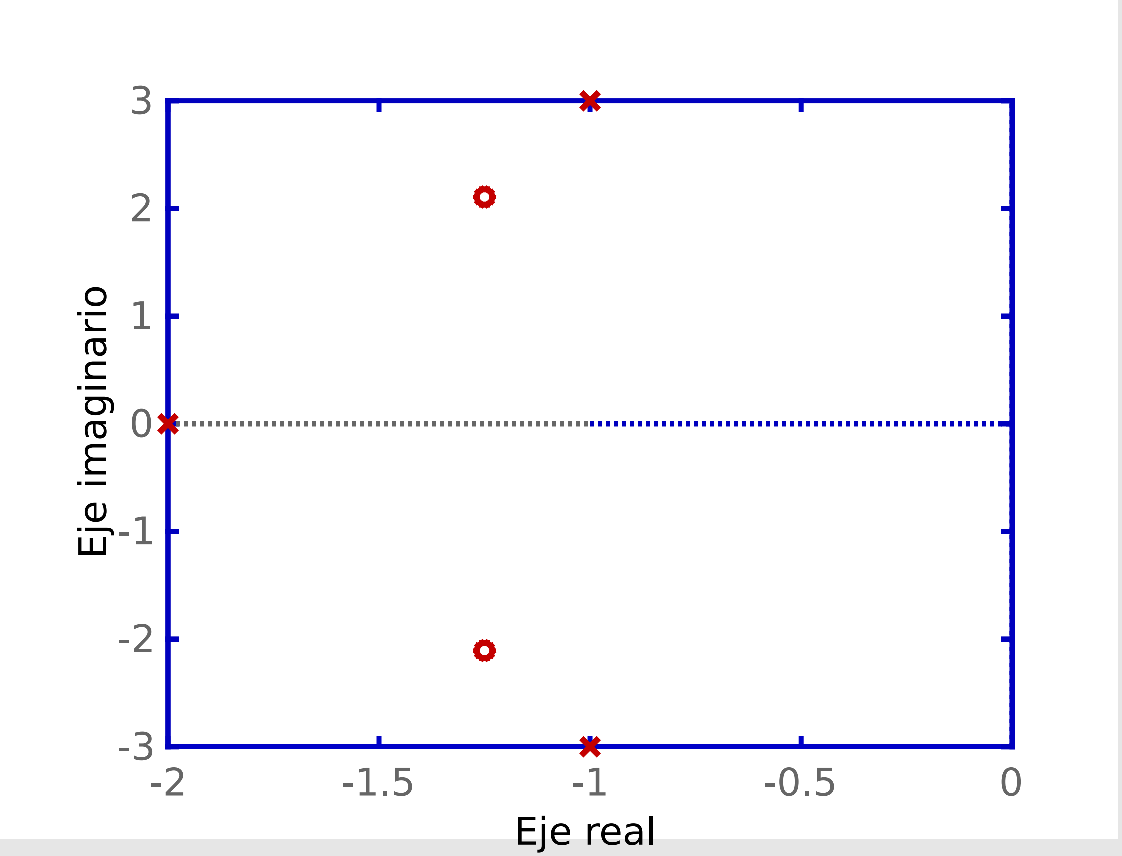
Salvo por un factor de escala (b_o/a_0), X(s) está completamente especificada por el diagrama de polos y ceros.

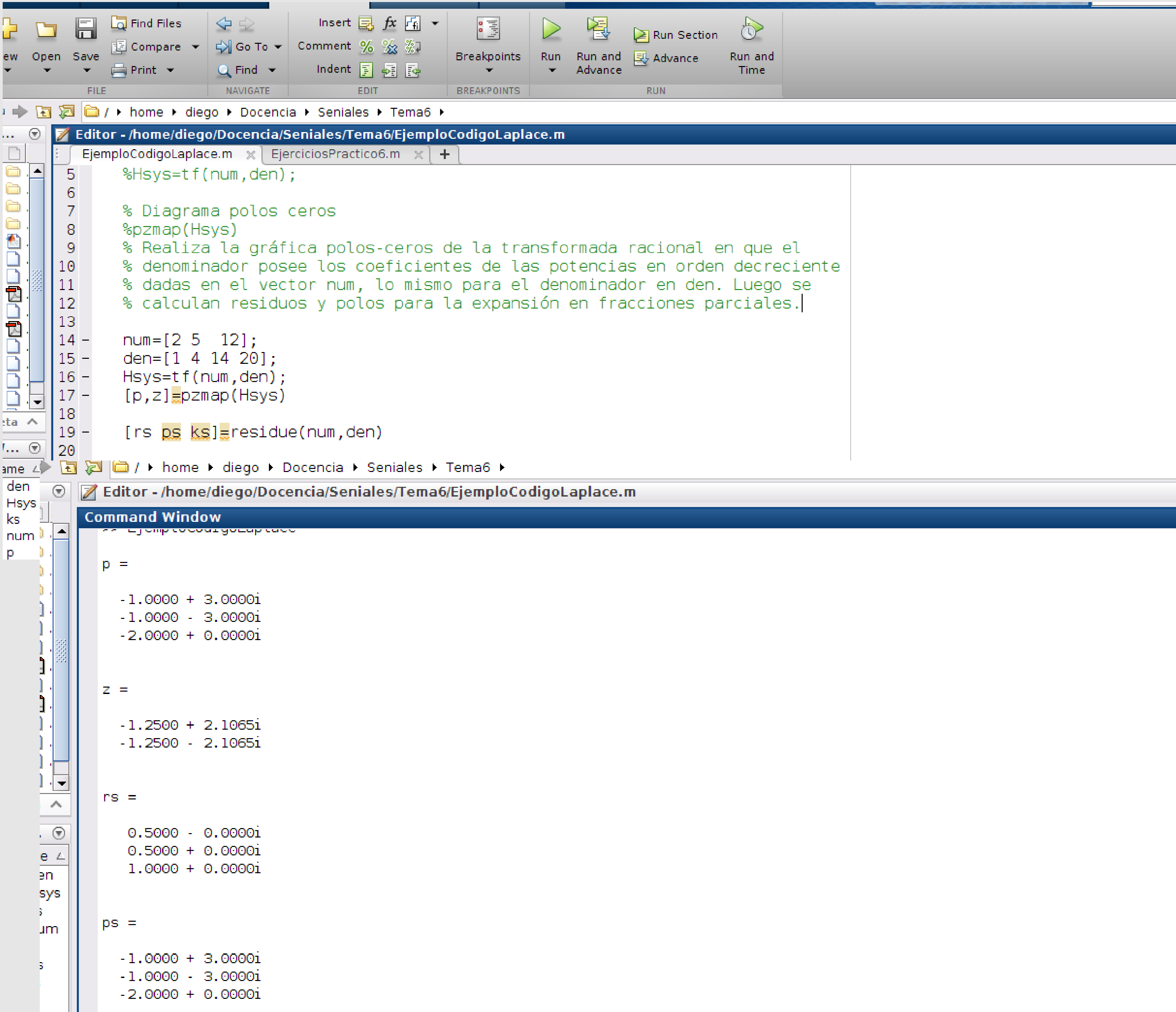
Ejemplo:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \qquad ROC: \; Re\{s\} > -1$$

$$X(s) = 2\frac{(s-(-1.25+2.11j))\,(s-(-1.25-2.11j))}{(s-(-2))\,(s-(-1+j3))\,(s-(-1-j3))}$$

$$\begin{aligned} X(s) = & \frac{1}{s+2} + \\ & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1-3j)}\right) + \\ & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1+3j)}\right). \end{aligned}$$





Find Files
Compare
Print
Open
Save
FILE
Go To
Find
NAVIGATE
Insert
Comment
Indent
EDIT
Breakpoints
BREAKPOINTS
Run
Run and Advance
Run Section
Advance
Run and Time
RUN
/ home diego Docencia Seniales Tema6
Editor - /home/diego/Docencia/Seniales/Tema6/EjemploCodigoLaplace.m
EjemploCodigoLaplace.m
EjerciciosPractico6.m
%Hsys=tf(num,den);
% Diagrama polos ceros
%pzmap(Hsys)
% Realiza la gráfica polos-ceros de la transformada racional en que el
% denominador posee los coeficientes de las potencias en orden decreciente
% dadas en el vector num, lo mismo para el denominador en den. Luego se
% calculan residuos y polos para la expansión en fracciones parciales.
num=[2 5 12];
den=[1 4 14 20];
Hsys=tf(num,den);
[p,z]=pzmap(Hsys)
[rs ps ks]=residue(num,den)
den
Hsys
ks
num
p
Command Window
p =
-1.0000 + 3.0000i
-1.0000 - 3.0000i
-2.0000 + 0.0000i
z =
-1.2500 + 2.1065i
-1.2500 - 2.1065i
rs =
0.5000 - 0.0000i
0.5000 + 0.0000i
1.0000 + 0.0000i
ps =
-1.0000 + 3.0000i
-1.0000 - 3.0000i
-2.0000 + 0.0000i

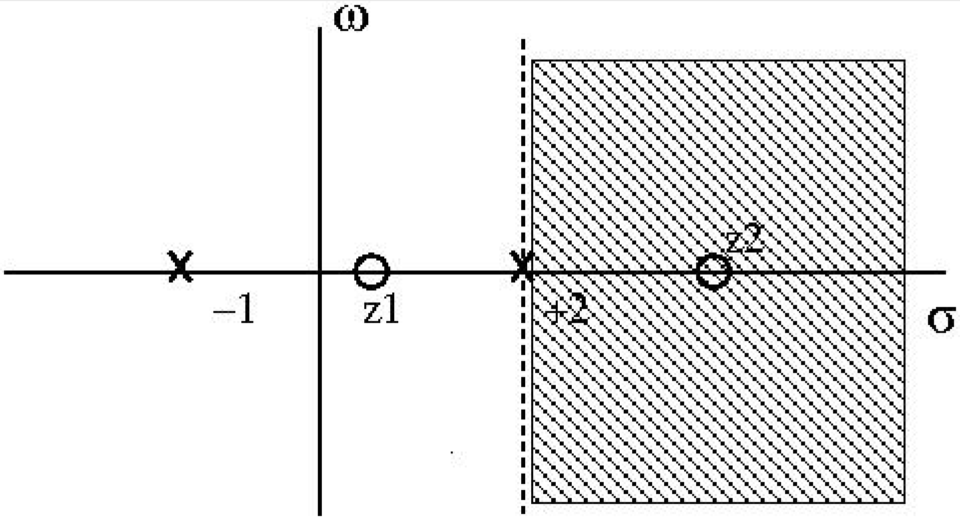
Ejemplo:

$$x(t) = \delta(t) - \frac{5}{3}e^{-t}u(t) - \frac{2}{3}e^{2t}u(t)$$

$$X(s) = 1 - \frac{5}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s-2}$$

$$= \frac{(s+1)(s-2) - 5/3(s-2) - 2/3(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

$$= \frac{(s-1/3(5-\sqrt{19}))(s-1/3(5+\sqrt{19}))}{(s+1)(s-2)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2,$$



$$X(s) = \frac{b_o}{a_o}\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

Propiedades de la Región de Convergencia (ROC):

Propiedad 1: la ROC de X(s) consiste en el plano s completo o en semiplanos del plano s cuyos límites están dados por lineas verticales paralelas al eje Re{s}=0 (eje jω) del plano s.

Propiedad 2: la ROC de las transformadas racionales no contiene ningún polo. Además para este tipo de transformadas, la ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito.

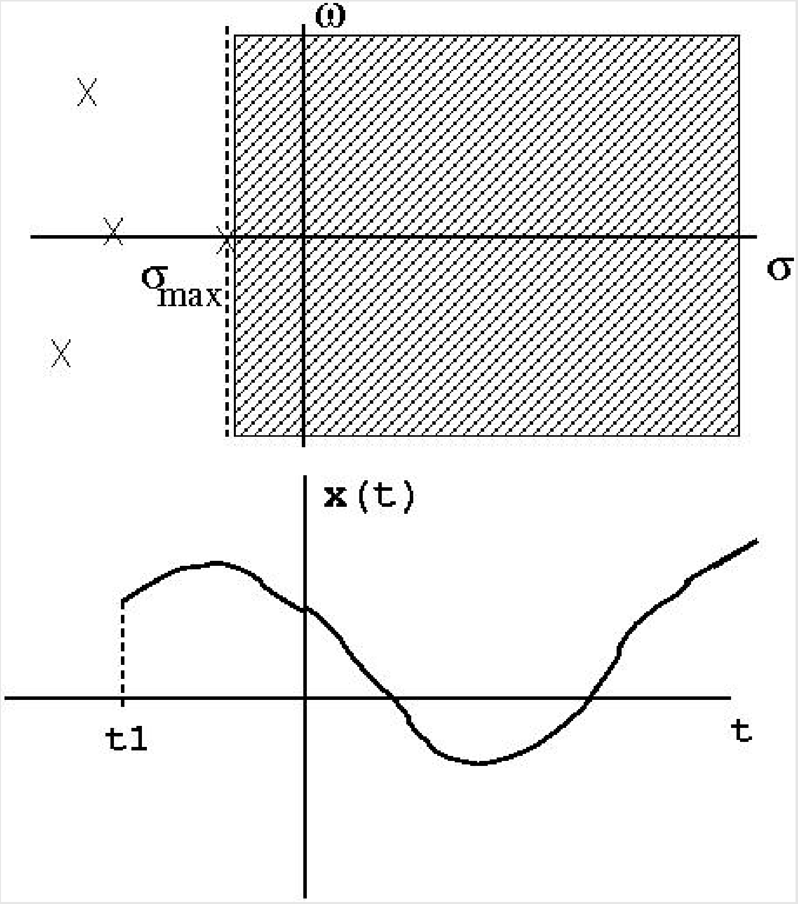
$$X(s) = \frac{b_o s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n} = \frac{b_o}{a_o} \frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

Propiedad 3: Si x(t) es de duración finita y es absolutamente integrable, la ROC es el plano s completo.

x(t) de duración finita $\longrightarrow$ $x(t) = 0 \quad si \quad t < t_1 \quad y \quad t > t_2$

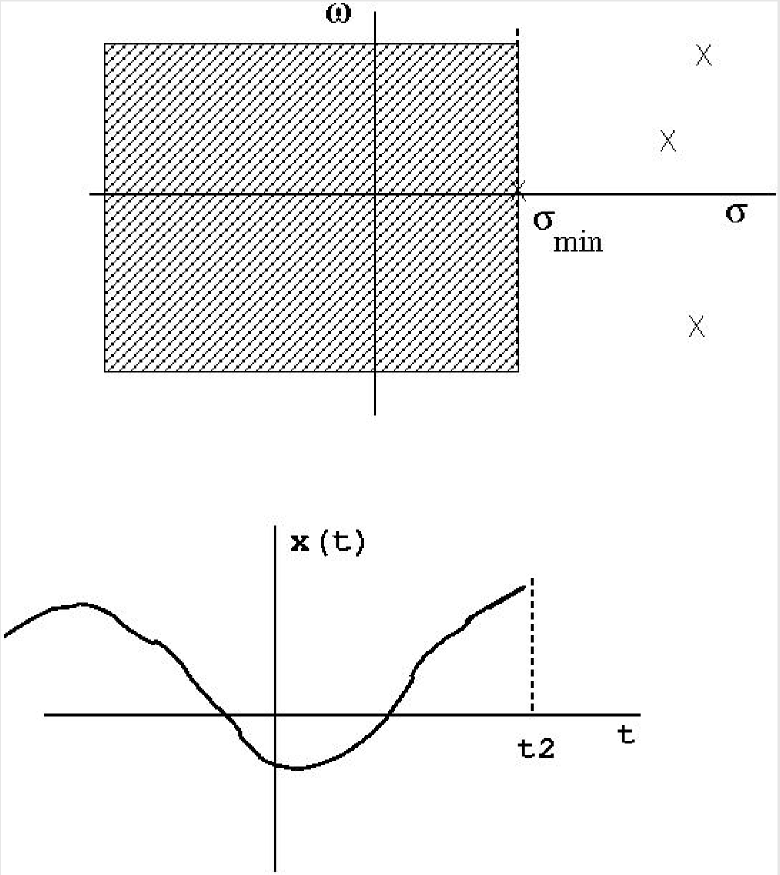
$$X(s) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, e^{-st} dt$$

Propiedad 4: si x(t) es una señal derecha, esto es x(t)=0 para $t<t_1$, si existe X(s) su ROC es de la forma $\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_{max}$, donde σ_{max} es la parte real máxima de cualquiera de los polos de X(s). Por tanto, la ROC es el semiplano infinito a la derecha de la linea vertical $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_{max}$, de esta manera todos los polos quedan a la izquierda de la linea.



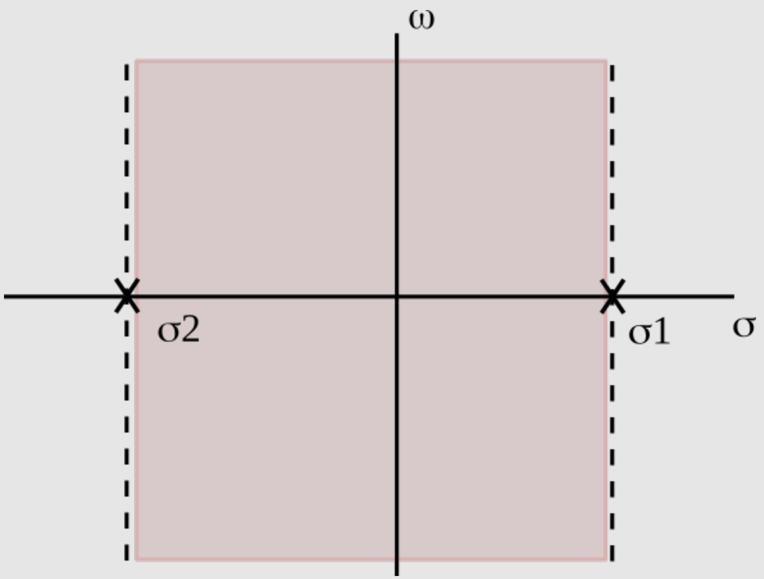
$$X(s) = \int_{t_1}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

Propiedad 5: **s**i x(t) es una señal izquierda, esto es x(t)=0 para $t>t_2$, si existe X(s) su ROC es de la forma $Re\{s\}<\sigma_{min}$, donde σ_{min} es la parte real mínima de cualquiera de los polos de X(s). Por tanto, la ROC es el semiplano infinito a la izquierda de la linea vertical $Re\{s\}=\sigma_{min}$, de esta manera todos los polos quedan a la derecha de la linea.



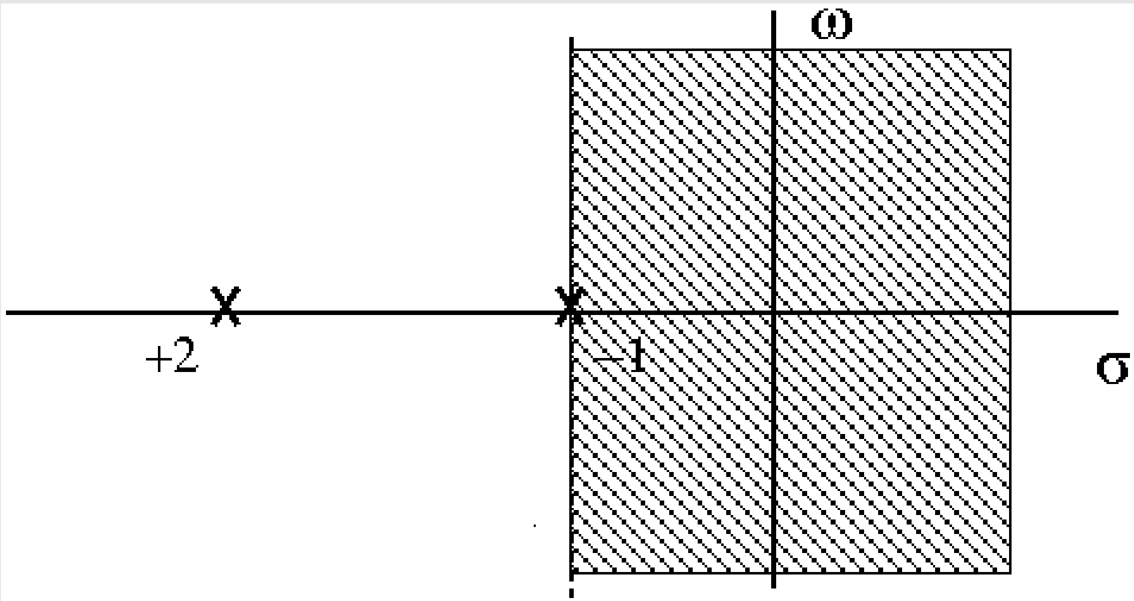
$$X(s) = \int_{-\infty}^{t_2} x(t)\, e^{-st} dt$$

Propiedad 6: Si x(t) es una señal bilateral o lo que es lo mismo de duración infinita, si existe X(s), su ROC es un semiplano del plano s definido por $\sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2$, donde σ_1 y σ_2 son las partes reales de dos polos de X(s). De esta manera, la ROC es una banda paralela al eje s=jw limitada por las líneas verticales que pasan por los polos.

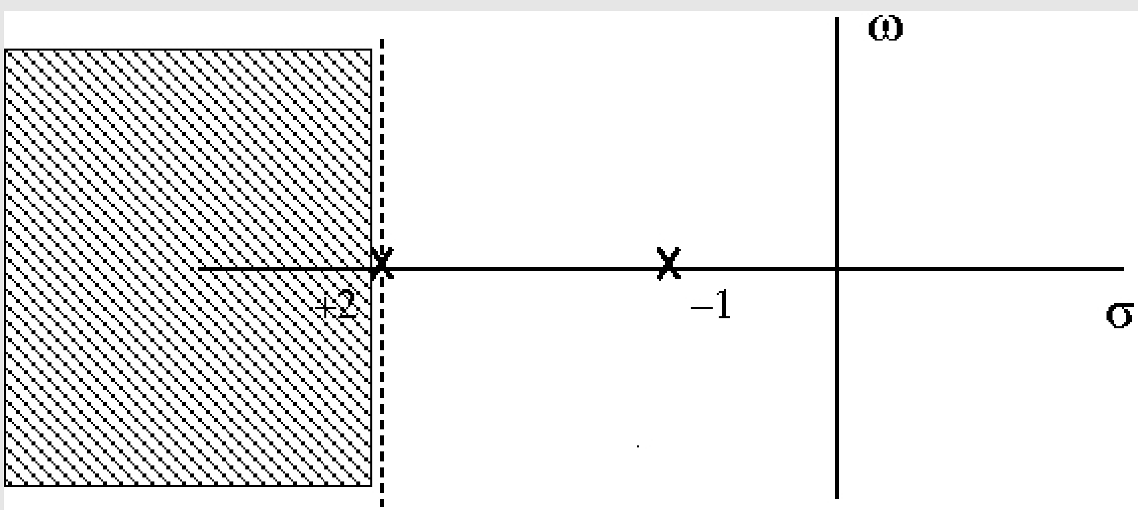


$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

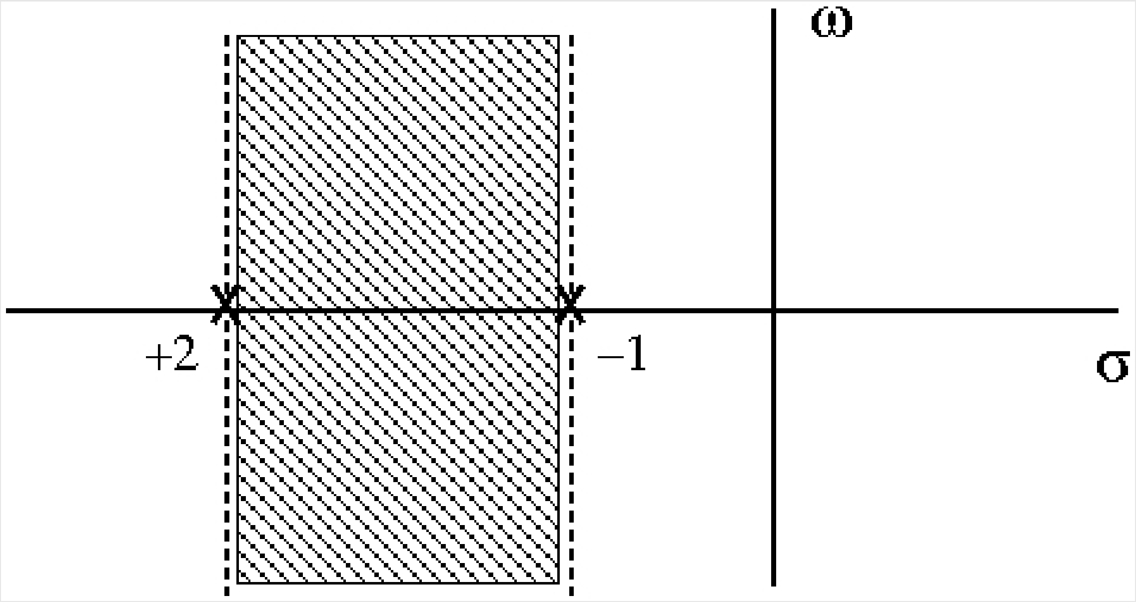


$$x(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) u(t)$$
$$ROC: \ Re\{s\} > -1$$



$$x(t) = \left(-e^{-t} + e^{-2t}\right) u(-t)$$
$$ROC: \ Re\{s\} < -2$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



$$x(t) = -\, e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

$$ROC:\ -2 < Re\{s\} < -1$$

Ejemplo:

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

$$x(t) \;=\; e^{bt}u(-t) + e^{-bt}u(t)$$

$$e^{bt}u(-t) \quad \leftarrow L \rightarrow \quad \frac{-1}{s-b} \qquad Re\{s\} < b$$

$$e^{-bt}u(t) \quad \leftarrow L \rightarrow \quad \frac{1}{s+b} \qquad Re\{s\} < -b$$

$$\boxed{X(s) \;=\; \frac{-1}{s-b} + \frac{1}{s+b} \qquad -b < \; Re\{s\} < b \qquad b > 0}$$

La transformada inversa de Laplace

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \ \ldots\ + X_n(s)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ \ldots\ + x_n(t)$$

Tabla 1: Transformada de Laplace de funciones elementales

Señal	**Transformada**	**ROC**
$\delta(t)$	1	Toda s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$Re\{s\} > -Re\{\alpha\}$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$Re\{s\} < -Re\{\alpha\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}e^{-\alpha t}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$Re\{s\} > -Re\{\alpha\}$
$cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$sen(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-\alpha t}cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > -\alpha$
$e^{-\alpha t}sen(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > -\alpha$

Ejemplo:

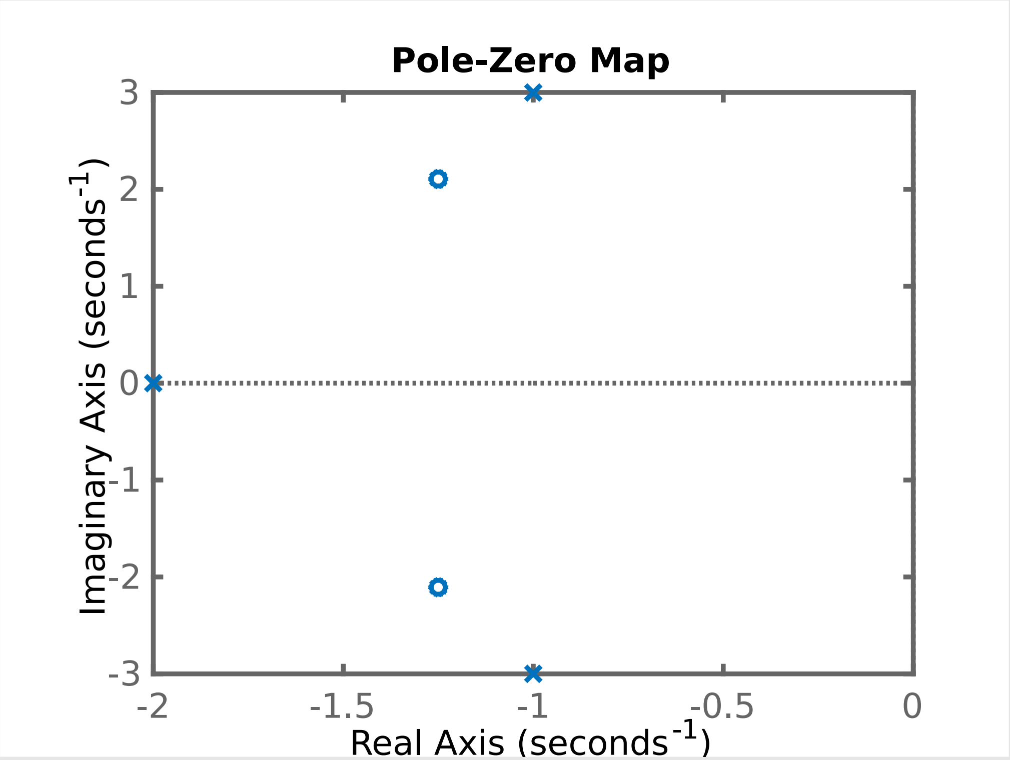
$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \qquad ROC: \ Re\{s\} > -1$$

$$X(s) = 2\frac{(s - (-1.25 + 2.11j))\,(s - (-1.25 - 2.11j))}{(s - (-2))\,(s - (-1 + j3))\,(s - (-1 - j3))}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + (1 - 3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + (1 + 3j)}\right).$$

```
b=[2 5 12];
a=[1 4 14 20];

[r p k]=residue(b,a)
[z p G]=tf2zp(b,a)
Hsys=tf(b,a);
pzmap(Hsys)
```



Propiedades de la transformada de Laplace

$$x_1(t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad X_1(s) \quad \mathrm{ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad X_2(s) \quad \mathrm{ROC} = R_2$$

a) Linealidad

$$\boxed{a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad a\,X_1(s) + b\,X_2(s) \quad \mathrm{ROC} \supset R_1 \cap R_2}$$

Esta notación significa que la ROC incluye al menos a la intersección de los conjuntos R_1 y R_2. Usualmente tendremos que la ROC es el conjunto intersección, pero debemos tener presente que puede haber casos en que la ROC es mayor que el conjunto intersección.

Ejemplo:

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad ROC:\ Re\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \qquad ROC:\ Re\{s >\} - 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}.$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)} \qquad ROC:\ Re\,\{s\} > -2$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

Podemos resumir una regla general para determinar la ROC de una transformada racional, al aplicar las propiedades como la de linealidad, en los siguientes pasos:

* Escribimos la transformada $X(s)$ su formato polo-cero. Esto nos permite determinar si existen cancelaciones polo-cero.

* Realizamos la intersección de cada una de las ROC's de los términos, como $X_1(s)$ y $X_2(s)$ en el ejemplo. Si la intersección no es vacía, la operación nos permitirá determinar una región en el plano s.

* Extendemos los límites derecho e izquierdo de la región hasta el polo más cercano de $X(s)$ o hasta +/- ∞, teniendo en cuenta las posibles cancelaciones polo-cero de la forma racional final de $X(s)$.

Ejemplo:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+3} \qquad ROC: \; Re\{s\} > -3$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \qquad ROC: \; -3 < Re\{s\} < -2.$$

$$X(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+3)}(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}.$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)} \qquad ROC: \; Re\,\{s\} < -2$$

$$x(t) = -e^{-2t}u(-t).$$

Desplazamiento en el tiempo

$$x(t - t_o) \quad \leftarrow \; L \; \rightarrow \quad e^{-st_o} X(s) \quad ROC = R$$

Inversión temporal

$$x(-t) \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad X(-s) \qquad \mathrm{ROC} = -R$$

Diferenciación en el dominio del tiempo

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \quad sX(s) \qquad \mathrm{ROC} \supset R$$

Convolución

$$x_1(t) * x_2(t) \qquad \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \qquad X_1(s)X_2(s) \qquad \mathrm{ROC} \supset \; R_1 \cap R_2$$

...

Análisis y caracterización de sistemas utilizando la transformada de Laplace

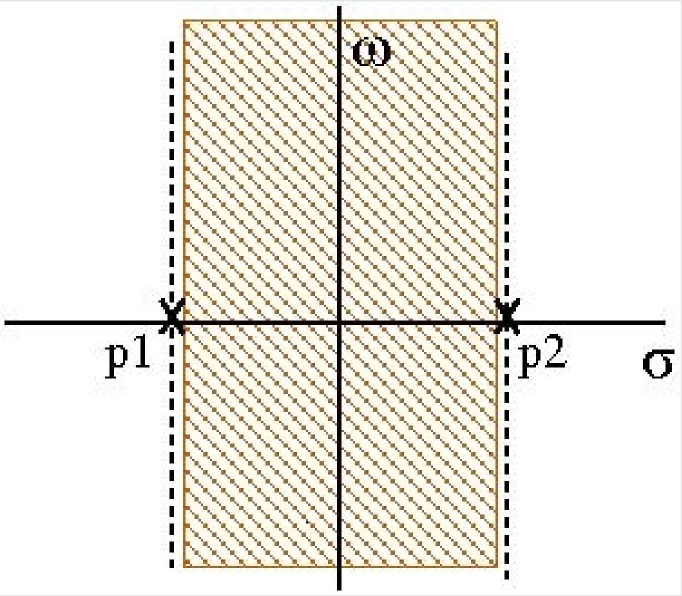
$x(t)$ → LTI Filtro → $y(t) = h(t) * x(t)$

$X(S)$ → LTI Filtro → $Y(s) = H(s)\,X(s)$

$$\boxed{H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$$

Función de Transferencia o
Función del Sistema

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt}$$



$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

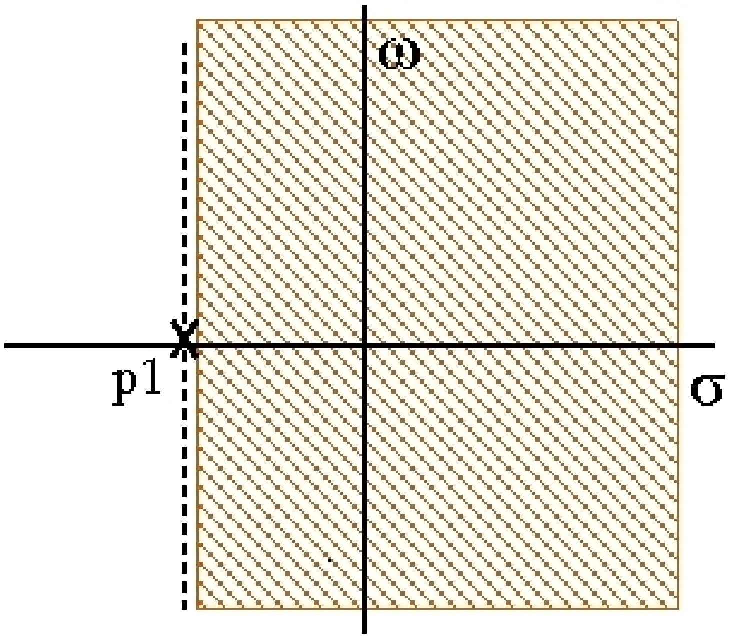
Causalidad en sistemas LTI

$$\boxed{H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$$

Sistema causal →

La región de convergencia de un sistema causal es un semiplano derecho en el plano s. Iincluimos en este caso la posibilidad de que la ROC sea todo el plano s.

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$



Si el sistema es causal y su **H(s) es racional**, la condición de causalidad es totalmente equivalente a la condición de que la ROC de H(s) es un semiplano derecho, extendiéndose hacia la derecha de su polo con mayor parte real.

Ejemplos

causal

$$h(t) = e^{-t}u(t) \qquad \xleftrightarrow{L} \qquad H(s) = \frac{1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$$

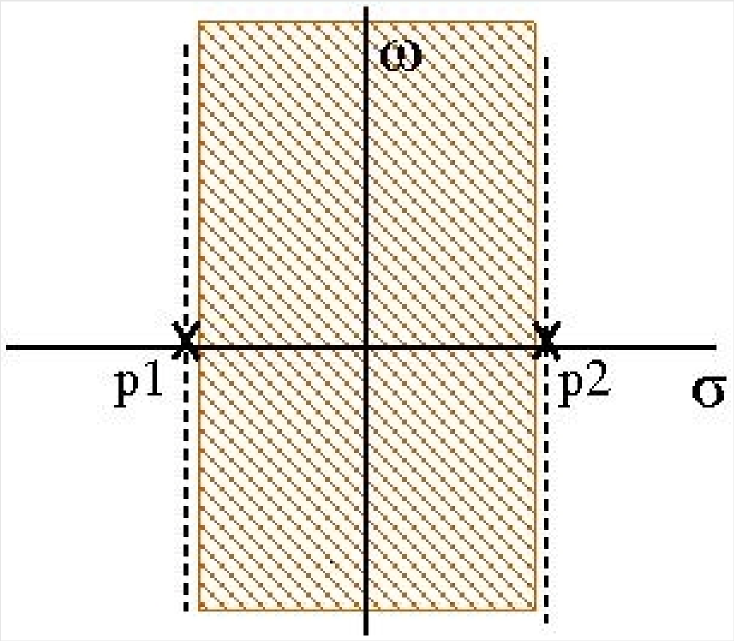
no causal

$$h(t) = e^{-|t|} \qquad \xleftrightarrow{L} \qquad H(s) = \frac{-2}{s^2-1} \quad -1 < Re\{s\} < 1$$

Estabilidad en un sistema LTI

Sistema Bibo estable si $\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \longrightarrow H(j\omega) = F\{h(t)\}$

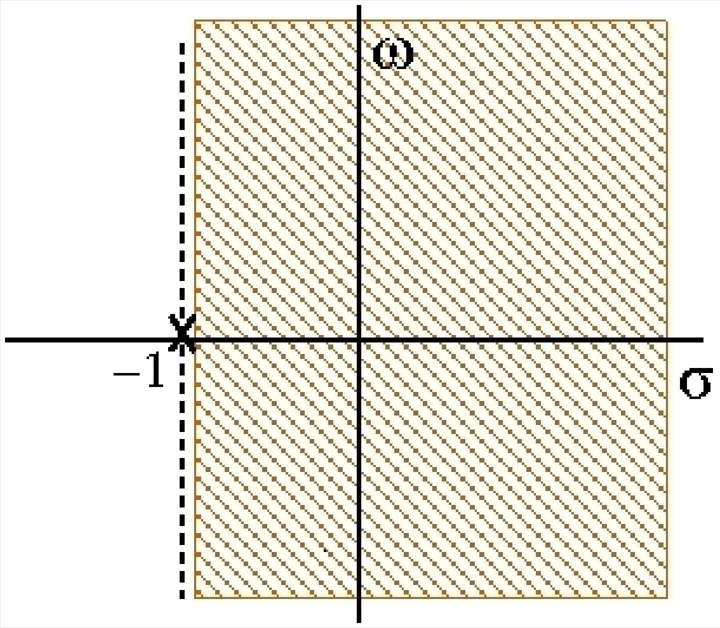
Un sistema LTI es estable si y solo si la ROC de la función transferencia del sistema incluye el eje s=j ω



Ejemplos:

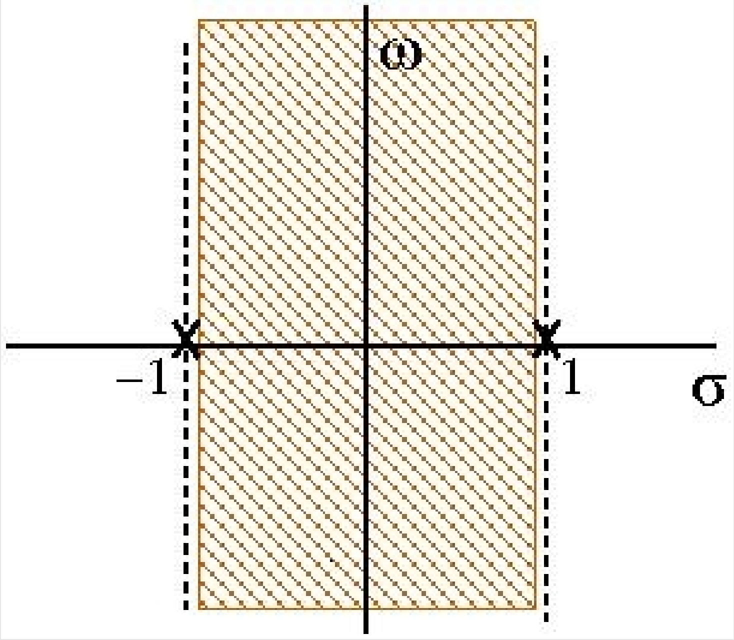
$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$



$$h(t) = e^{-|t|}$$

$$H(s) = \frac{-2}{s^2-1} \quad -1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$$

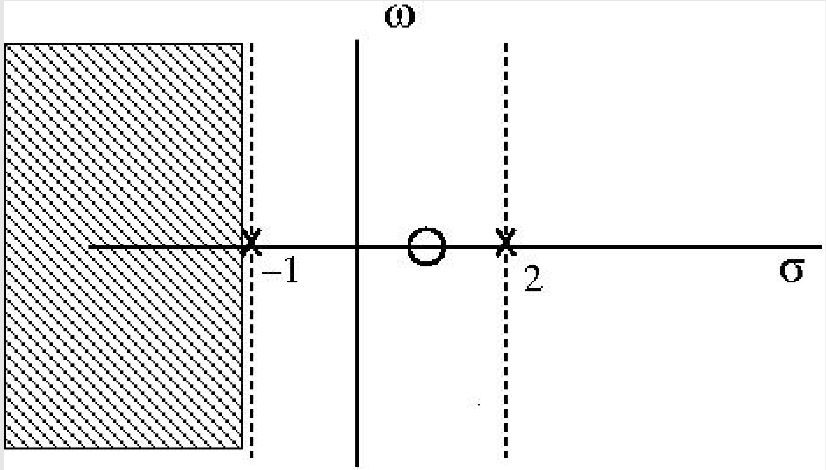


Ejemplo:

$$H(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{s-2}$$

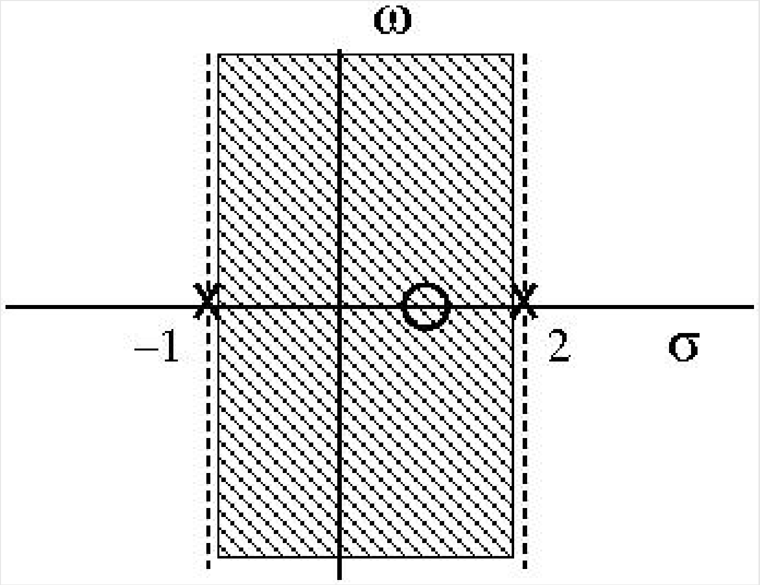
$$ROC \;\rightarrow\; \mathrm{Re}\{s\} < -1$$

$$h(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$



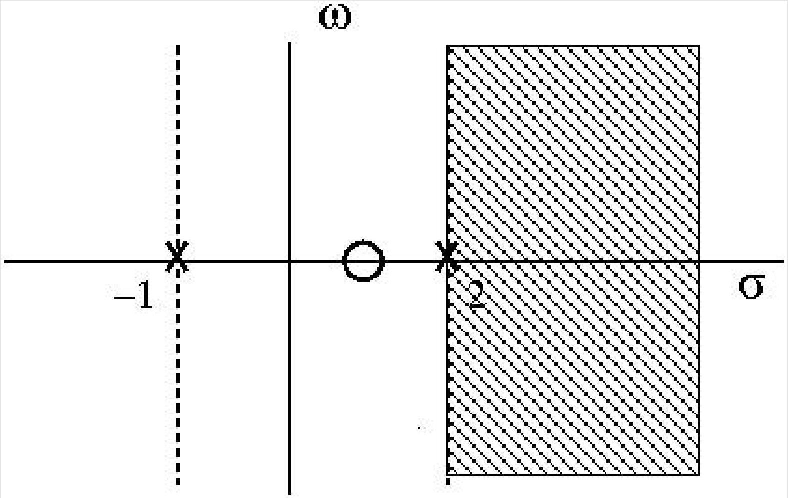
$$ROC \quad \rightarrow \quad -1 < \mathrm{Re}\{s\} < 2$$

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$



Ejemplo:

$$H(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}$$



$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

$$ROC \;\rightarrow \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

Un sistema LTI con función H(s) racional es estable y causal, si y solo si todos los polos del sistema poseen parte real negativa.

Sistemas LTI causales caracterizados por ecuaciones diferenciales

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \text{c.i. nulas}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

ceros $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0$

polos $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$

Es importante observar que la ecuación diferencial determina la función H(s), pero para especificar la ROC de H(s) debemos imponer condiciones sobre la solución de la ecuación. Si el sistema es LTI causal, la ROC es el semiplano derecho que se extiende a la derecha del polo con mayor parte real.

Ya que los coeficientes a_k y b_k son números reales, los polos y ceros (raíces del numerador y denominador) son reales o si son complejos, aparecen en pares de un complejo y su conjugado.

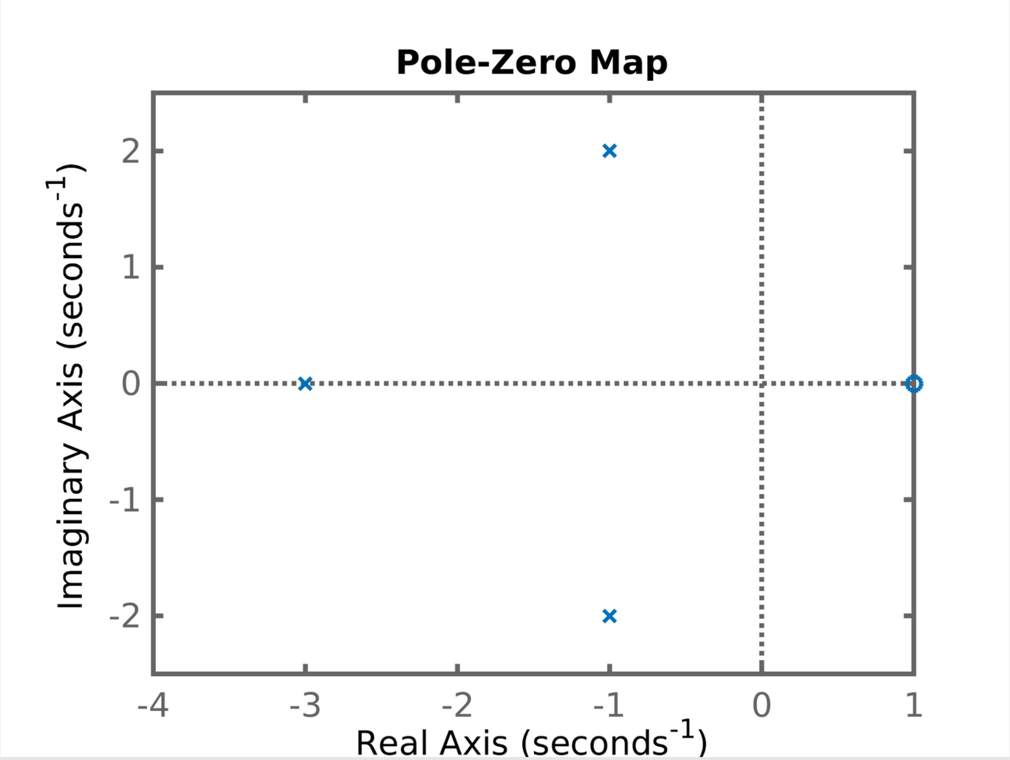
Ejemplo

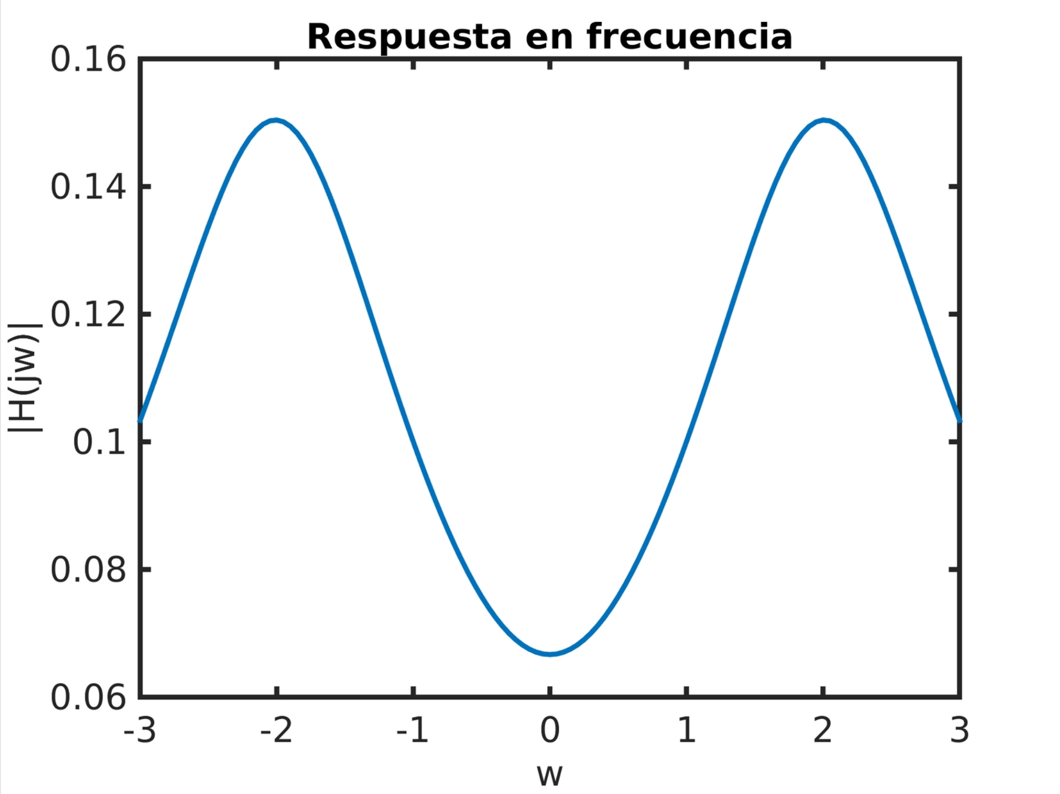
$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

$$H(s) = \frac{(s-1)}{s^3 + 5s^2 + 11s + 15} = \frac{-0.50}{s+3} + \frac{0.25}{s + (1.00 - j2.00)} + \frac{0.25}{s + (1.00 + j2.00)}$$

```
b=[1 -1];
a=[1 5 11 15];
[r p k]=residue(b,a);
[z p G]=tf2zp(b,a)
Hsys=tf(b,a);
pzmap(Hsys)
axis([-4 1 -2.5
2.5]),;
omega=[-3:0.05:3];
figure;
H=freqs(b,a,omega);
plot(omega,abs(H));
```

$$p_1 = -1 + 2j, \quad p_2 = -1 - 2j, \quad p_3 = -3, \quad z = -1$$





Modelo de polos y ceros de un sistema causal

$$\boxed{H(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \qquad ROC: \; Re\{s\} > -1}$$

$$polos \quad \rightarrow \quad p_1 = -2, \quad p_2 = -1 + j3 \quad y \quad p_3 = -1 - j3$$

$$ceros \quad \rightarrow \quad z_1 = -1.25 + 2.11j, \quad y \quad z_2 = -1.25 - 2.11j$$

$$H(s) = \frac{1}{s - (-2)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - (-1 + 3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - (-1 - 3j)}\right)$$

$$e^{-2t}u(t) \quad \leftarrow \; L \; \rightarrow \quad \frac{1}{s + 2} \qquad Re\{s\} > -2$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \quad \leftarrow \; L \; \rightarrow \quad \frac{1}{s + (1 - 3j)} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \quad \leftarrow \; L \; \rightarrow \quad \frac{1}{s + (1 + 3j)} \qquad Re\{s\} > -1$$

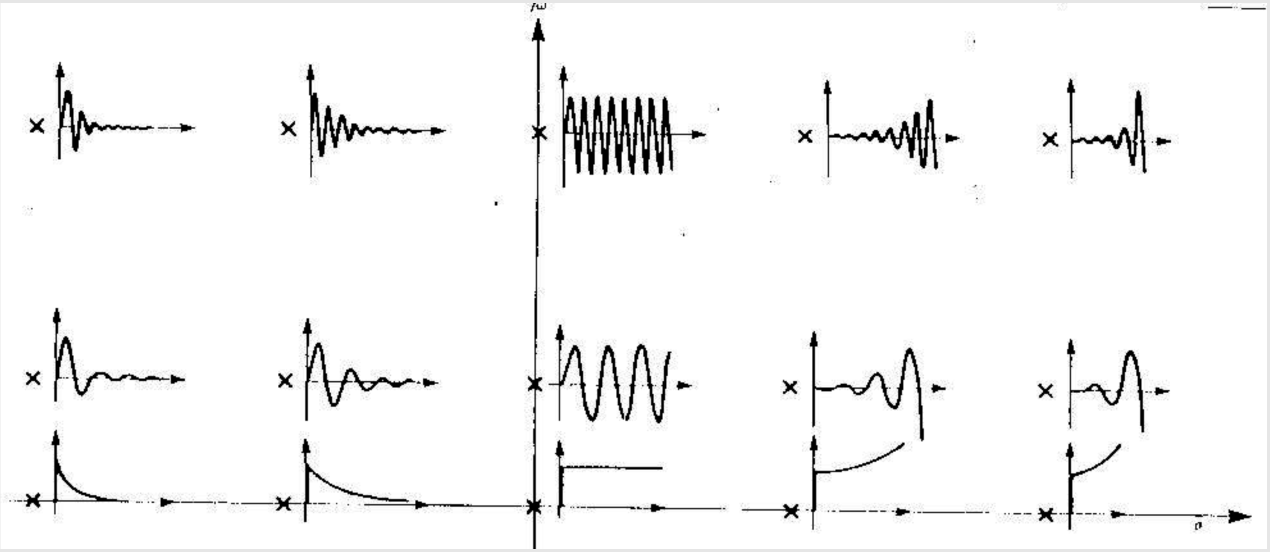
$$\boxed{\begin{aligned} h(t) &= e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}u(t) \\ &= e^{-2t}u(t) + e^{-t}cos(3t)u(t) \end{aligned}}$$

Interpretación en el dominio del tiempo:

$$H(s) = \frac{\dots}{(s-\sigma_1) \quad \dots \quad (s-(\sigma_2+j\omega_2))(s-(\sigma_2-j\omega_2)) \quad \dots}$$

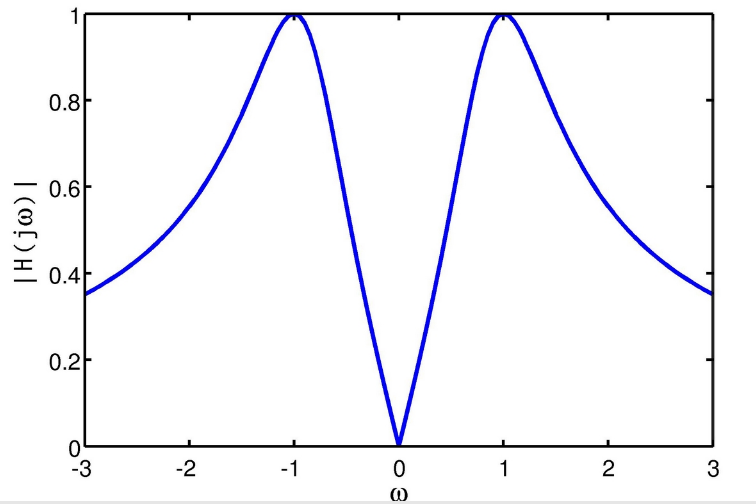
$$\text{polos en } \rightarrow \ \sigma_1, ..., \sigma_2 \pm j\omega_2, ...$$

$$h(t) \quad = \quad e^{\sigma_1 t}u(t) \quad + \quad ... \quad + e^{\sigma_2 t}cos(\omega_2 t)u(t) + ...$$

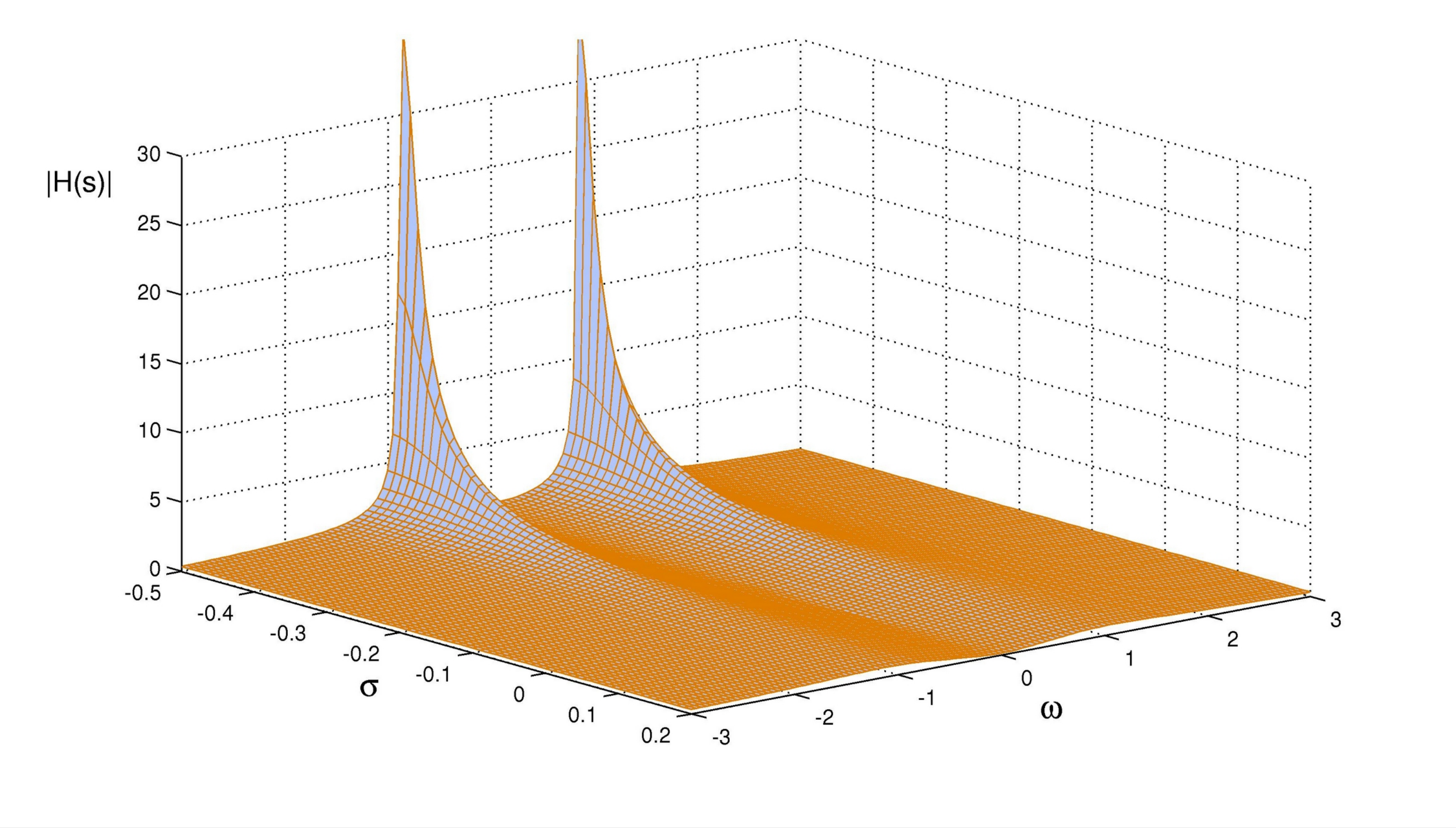


Interpretación en el dominio de la frecuencia:

$$H(s) = \frac{s}{s^2+s+1} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\frac{1}{2}$$

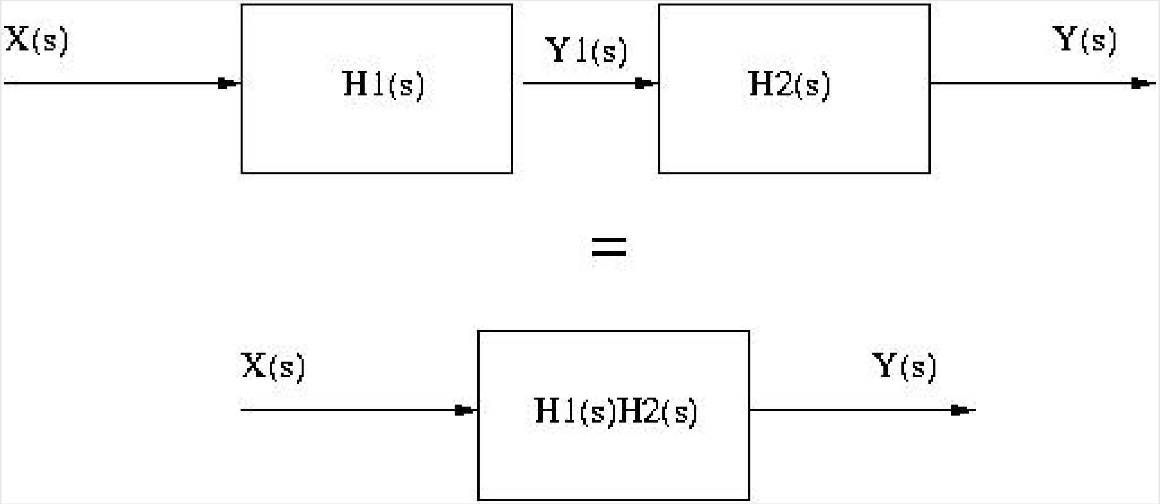


$$\text{cero} \;\rightarrow\; s=0, \quad \text{polos} \;\rightarrow\; s_{1,2} = -1/2 + -j\sqrt{3}/2$$

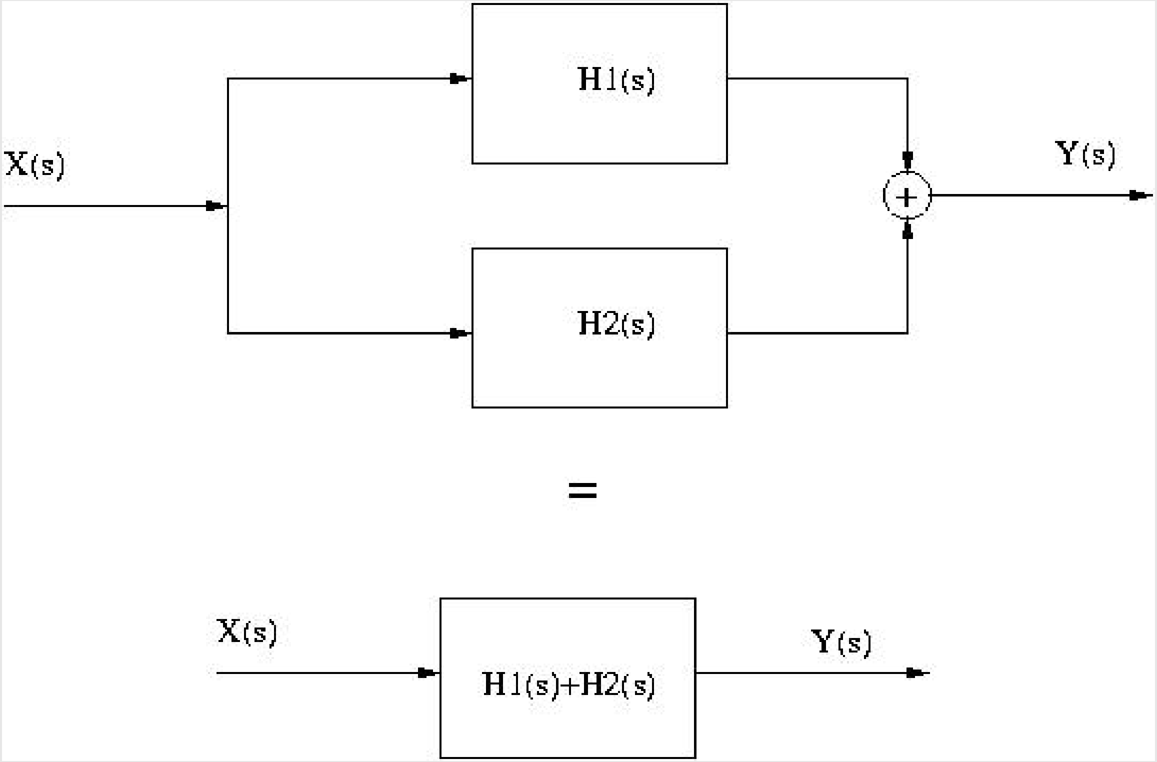


Diagramas de bloques para sistemas en tiempo continuo

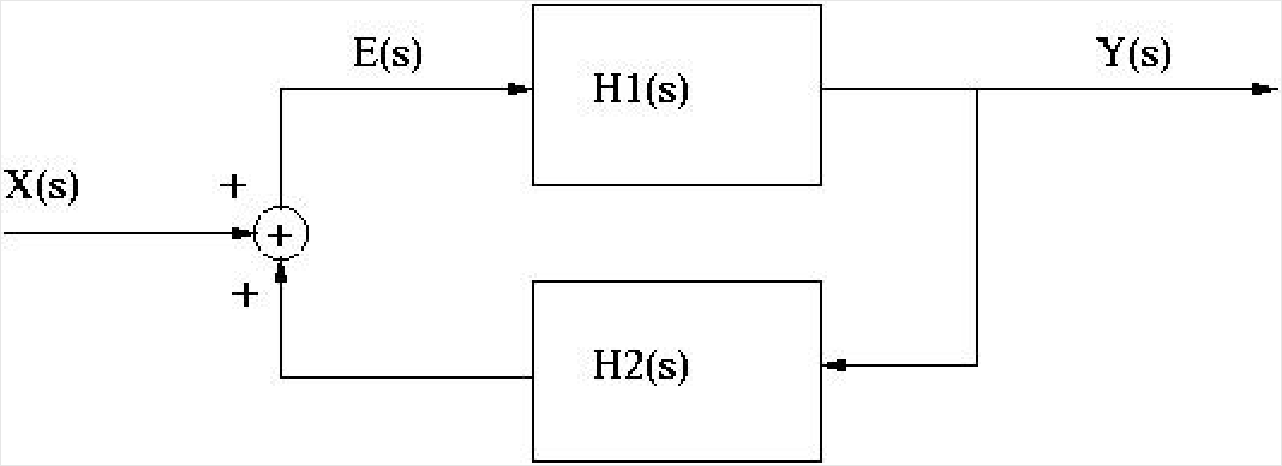
Función Transferencia de sistemas en serie



Función de transferencia de sistemas en paralelo



Función de Transferencia de un sistema realimentado



$$Y(s) = H_1(s)E(s)$$

$$E(s) = X(s) + H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}X(s)$$

$$\boxed{H_+(s) = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}X(s)}$$

$$\boxed{H_-(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}X(s)}$$

La transformada unilateral de Laplace

$$\boxed{X(s) \equiv \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

$$X(s) = UL\{x(t)\} \qquad\qquad x(t) \quad \leftarrow UL \rightarrow \quad X(s)$$

$$\boxed{UL\{x(t)\} = L\{x(t)u(t)\}}$$

La ROC de la transformada unilateral de cualquier señal x(t) es siempre un plano derecho en el plano s.

Ejemplos:

$$x_1(t) = A, \quad x_2(t) = \delta(t), \quad x_3(t) = e^{-j2t}$$

$$X_1(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad Re\{s\} > 0$$

$$X_2(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad \text{para todo s}$$

$$X_3(s) = \int_0^{\infty} e^{-j2t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+2} \quad Re\{s\} > -2$$

Propiedad de diferenciación en el tiempo

$$UL\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = \left. x(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$$= sX(s) - x(0)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \leftarrow UL \rightarrow \; sX(s) - x(0)}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftarrow UL \rightarrow s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

$$\boxed{\frac{d^nx(t)}{dt} \leftarrow UL \rightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \; ... \; - x^{n-1}(0)}$$

Solución de ec. diferenciales utilizando la transformada unilateral de Laplace

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)}$$

$$x(t) = 2u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{ROC} \rightarrow Re\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{2}{s} \text{ con ROC dada por } Re\{s\} > 0$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \qquad \text{ROC} \rightarrow Re\{s\} > 0.$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \left[1 - e^{-t} + e^{-2t}\right] u(t)}$$

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)}$$

$$y(0) = 3,\ y'(0) = -5, \qquad x(t) = 2u(t)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt} \leftarrow UL \rightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \ \dots\ - x^{n-1}(0)$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = X(s)$$

$$s^2Y(s) - s3 + 5 + 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2/s + 3(s+3) - 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t) \qquad \text{para } t > 0}$$