Señales y sistemas

Tema IV:
Representación de señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia

Diego Leonardo Valladares
Departamento de Física
Univ. Nac. de San Luis

si x es señal periódica

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega t} dt$$

si x es cualquier señal continua:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-j\omega t} dt$$

Tipo	Periódica	No periódica
señal continua	Serie de Fourier	Transformada de Fourier
señal discreta	Serie de Fourier en tiempo discreto	Transformada de Fourier en tiempo discreto

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n] = \sum_{\cdots}^{\cdots} a_k \, e^{jk\omega_0 n} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Para que la señal exponencial compleja discreta sea periódica debe cumplirse que

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N}, \qquad\qquad x[n] = e^{j\,2\pi/N\,n}$$

Conjunto de señales armónicamente relacionadas

$$\phi_k[n] = e^{jk\,2\pi/N\,n} \qquad k \in <N>$$

Se cumple condición de periodicidad

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \qquad r \rightarrow \text{entero},$$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k\in<N>} a_k \, e^{jk\omega_0 n} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

La serie de Fourier para señales discretas:

señal periódica $\longrightarrow$ $x[n] = x[n+N] \quad \forall n$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{j\,k\,2\pi/N\,n}}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\,k\,2\pi/N\,n}}$$

La expresión nos indica cómo se descompone la señal en exponenciales complejas de diferente frecuencia (múltiplos de la frecuencia fundamental de la señal), siendo el coeficiente espectral a_k una medida de la contribución de la exponencial compleja de frecuencia $k\,2\pi/N$ a la formación de la señal.

Espectro de amplitud $\quad |a_k| \; vs. \; k\omega_0$

Espectro de fase $\quad \angle\, a_k \; vs. \; k\omega_0$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{j\,k\,2\pi/N\,n}}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-j\,k\,2\pi/N\,n}}$$

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + ... + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] \qquad k = 0..N-1$$

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + ... + a_N\phi_N[n] \qquad k = 1...N$$

$$\phi_0[n] = \phi_N[n] \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = a_N$$

Periodicidad de los coeficientes espectrales $\longrightarrow$ $\boxed{a_k = a_{k+rN} \quad \forall k}$

Ejemplo:

$$x[n] = \sin\left(\frac{6\pi}{5} n\right) = \frac{e^{j\,6\pi/5\,n} - e^{-j\,6\pi/5\,n}}{2j}$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\,k\,2\pi/N\,n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\,k\,2\pi/N\,n}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N} \qquad \frac{6\pi/5}{2\pi} = \frac{3}{5}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{4} a_k\, e^{jk2\pi/5\,n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j3\,2\pi/5\,n} - \frac{1}{2j} e^{-j3\,2\pi/5\,n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j3\,2\pi/5\,n} - \frac{1}{2j} e^{j2\,2\pi/5\,n}$$

$$a_0 = a_1 = a_4 = 0,$$

$$a_{-3} = a_2 = \frac{j}{2}, \quad a_3 = -\frac{j}{2}$$

$$|a_2| = \frac{1}{2}, \quad |a_3| = \frac{1}{2}$$

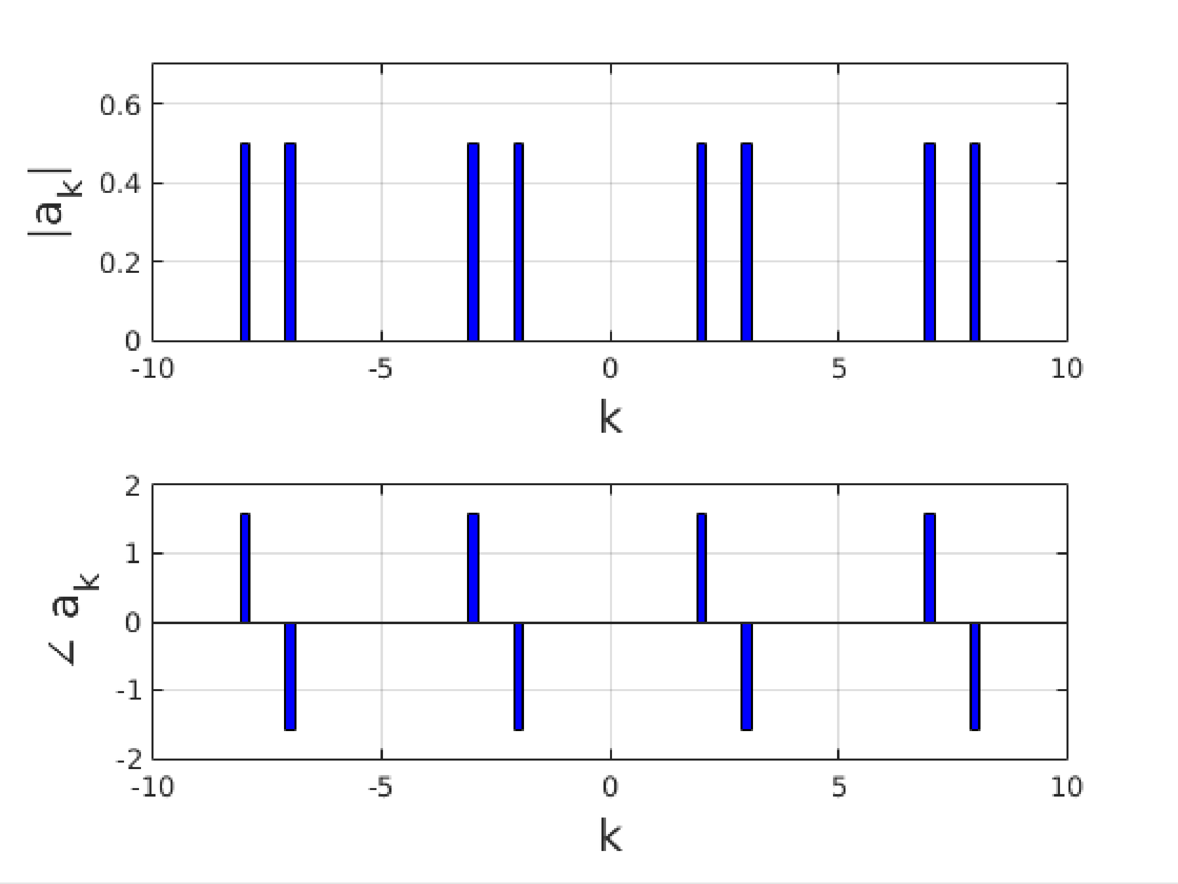
$$\angle a_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \angle a_3 = -\frac{\pi}{2}$$

Ejemplo:

$$x[n] = \sin\left(\frac{6\pi}{5}n\right) = \frac{e^{j\,6\pi/5\,n} - e^{-j\,6\pi/5\,n}}{2j}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j3\,2\pi/5\,n} - \frac{1}{2j}e^{j2\,2\pi/5\,n}$$

$$|a_2| = \frac{1}{2}, \quad |a_3| = \frac{1}{2}$$
$$\angle a_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \angle a_3 = -\frac{\pi}{2}$$



Ejemplo:

$$x[n] = 1 + sen(\pi/5\,n) + 3cos(\pi/5\,n) + \\ cos(2\pi/5\,n + \pi/2)$$

$$N_2 = N_3 = 10, \quad N_4 = 5, \quad \Rightarrow \quad N = 10$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\,k\,2\pi/N\,n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\,k\,2\pi/N\,n}$$

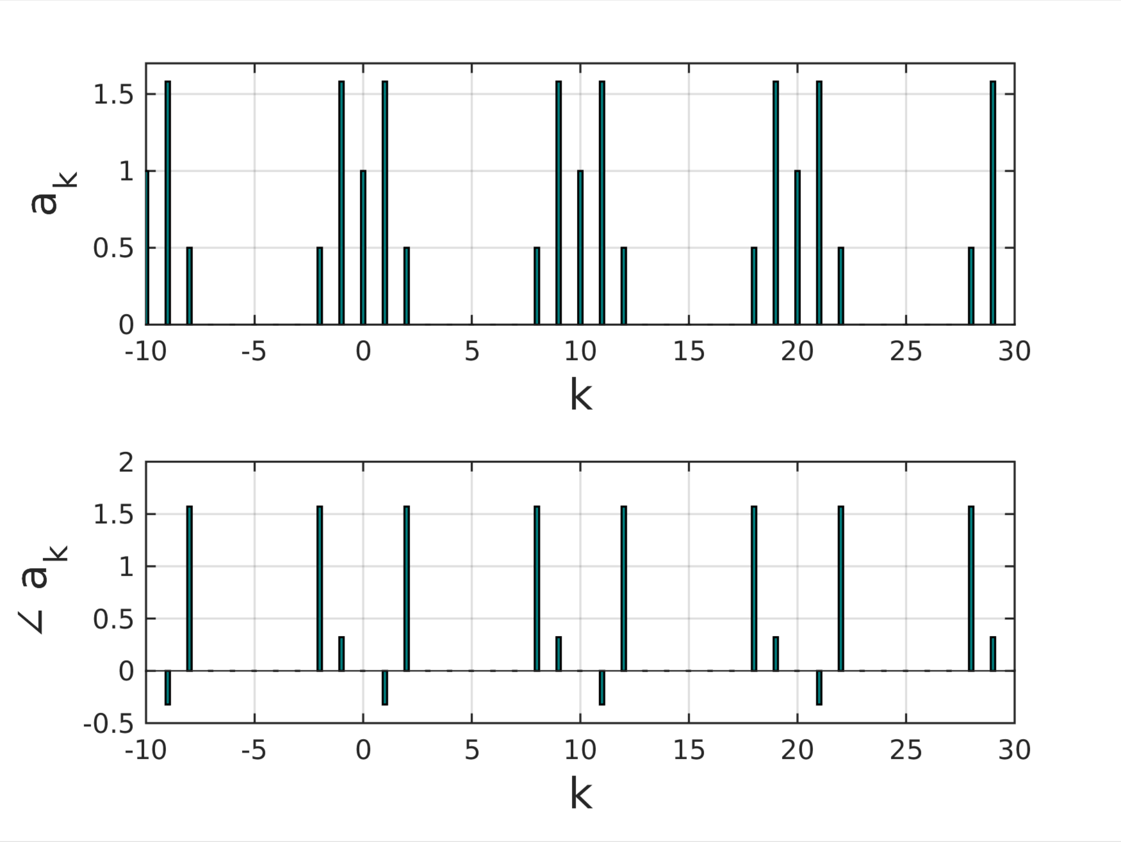
$$x[n] = 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j\right) e^{j\,(2\pi/10)\,n} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j\right) e^{-j\,(2\pi/10)\,n} + \frac{1}{2} e^{j\pi/2}\, e^{j2\,(2\pi/10)\,n} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/2}\, e^{-j2\,(2\pi/10)\,n}.$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$a_9 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j \qquad a_2 = \frac{1}{2}\, e^{j\pi/2}$$

$$a_8 = \frac{1}{2}\, e^{-j\pi/2}$$

$$a_k = 0 \text{ para } \quad 1 < k < 8$$



Ejemplo: pulso cuadrado periódico

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{j\,k\,2\pi/N\,n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-j\,k\,2\pi/N\,n}$$

$$\text{en un periodo N} \quad \rightarrow \; x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\,k\,2\pi/N\,n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x[n] e^{-j\,k\,2\pi/N\,n}$$

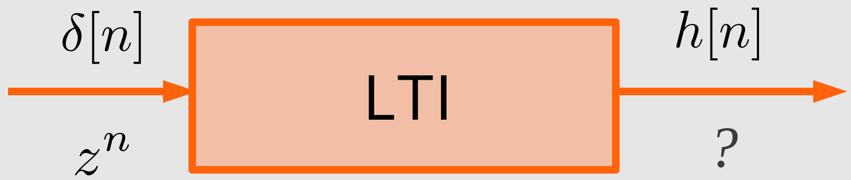
$$a_k = \frac{e^{j\,k\,2\pi/N\,N_1}}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\,k\,2\pi/N\,m} \qquad m = n + N_1$$

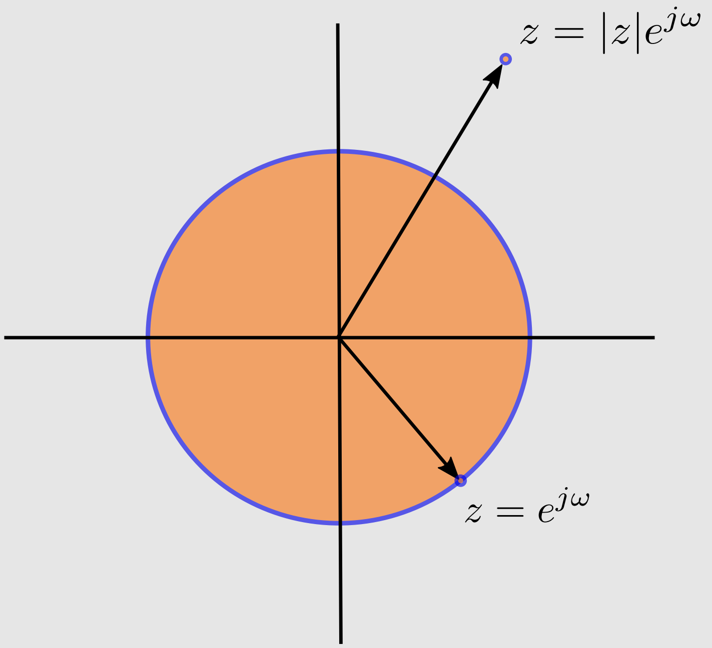
$$a_k = \frac{e^{jk\,2\pi/N\,N_1}}{N} \left(\frac{1 - e^{-jk\,2\pi/N\,(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\,2\pi/N}} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \, \frac{sen\,[2(N_1 + 1/2)N]}{sen(\pi k/N)} \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, ...$$

$$a_0 = \frac{2N_1 + 1}{N}$$

La serie de Fourier y los sistemas LTI:



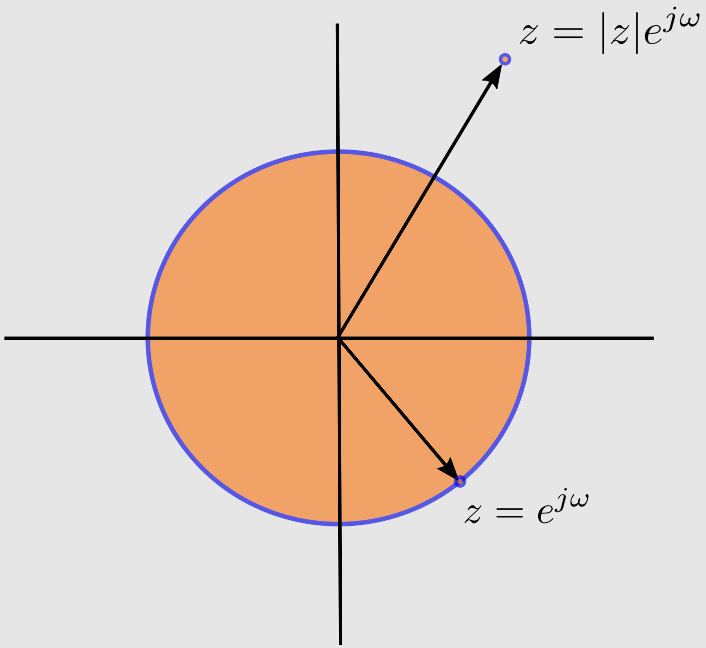


$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * x[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} \\
&= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}
\end{aligned}
$$

$$y[n] = H(z) z^n$$

Función de transferencia → $$H[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

La serie de Fourier y los sistemas LTI:



$$y[n] = H(z)z^n$$

$$\boxed{y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}}$$

Función de Respuesta en Frecuencia

$$H(e^{j\omega}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

si la entrada es una señal exponencial compleja, la respuesta del sistema LTI es una exponencial compleja idéntica a la de entrada y multiplicada por un número complejo H(e^{jw}), es decir el sistema LTI sólo multiplica la exponencial compleja de entrada por un factor complejo, la respuesta en frecuencia. Este factor complejo no cambia la frecuencia de la señal, sólo modifica su amplitud.

$$\boxed{H(e^{j\omega}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}$$

Ejemplo

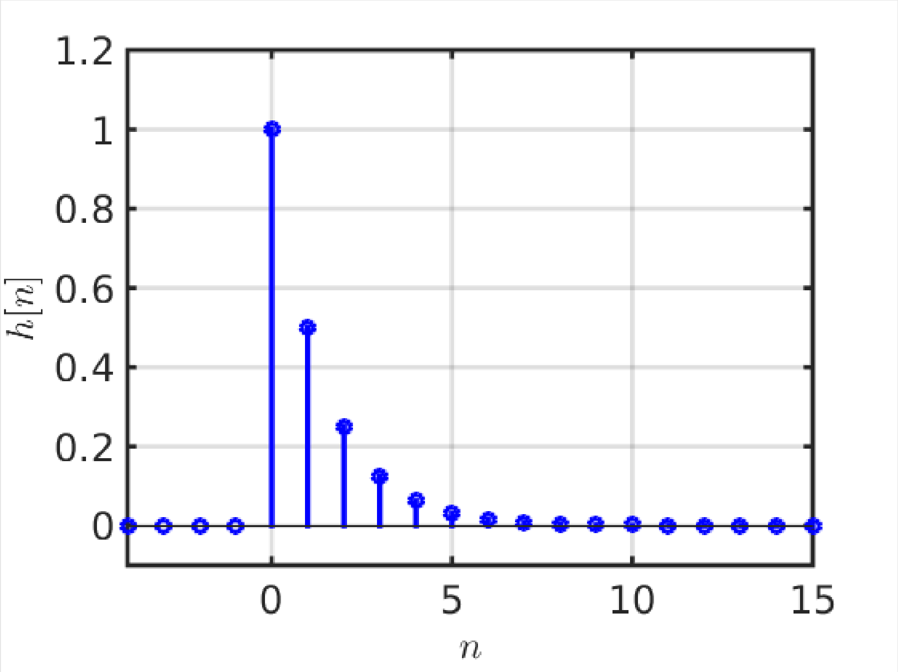
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

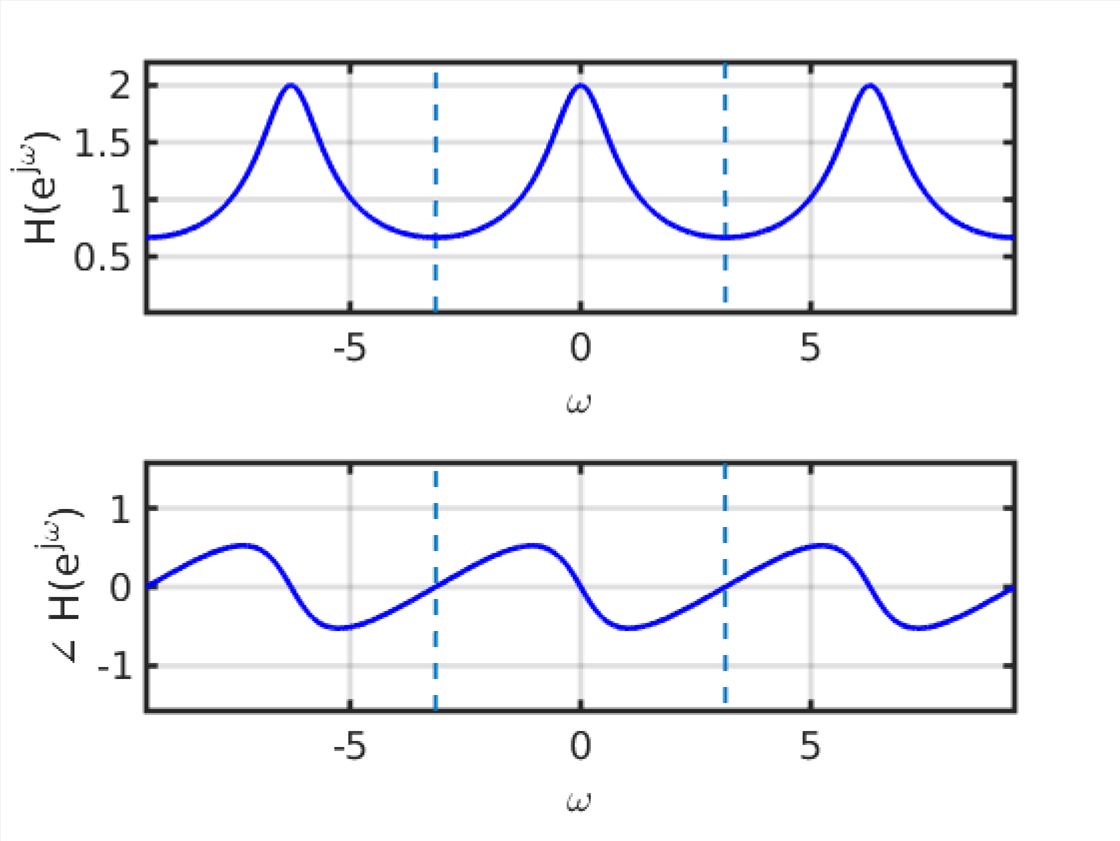
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$





$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \qquad\qquad H(e^{j\omega}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= T\{x[n]\} \\ &= T\left\{\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\,2\pi/N\,n}\right\} \\ &= \sum_{k=<N>} a_k T\left\{e^{jk\,2\pi/N\,n}\right\}. \end{aligned}$$

¿Cuándo se puede calcular la respuesta en frecuencia?

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| \quad < \quad \infty$$

La transformada de Fourier en tiempo discreto

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Transformada Inversa de Fourier en tiempo discreto
Ecuación de síntesis

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Transformada Fourier en tiempo discreto
Ecuación de análisis

La Transformada Inversa de Fourier representa la señal x[n] como combinación lineal de señales exponenciales complejas, la función $X(e^{j\omega})$ da el valor del coeficiente espectral de la señal a cada valor de ω ya que mide en que cantidad contribuye la exponencial compleja de frecuencia ω a la formación de la señal x[n].

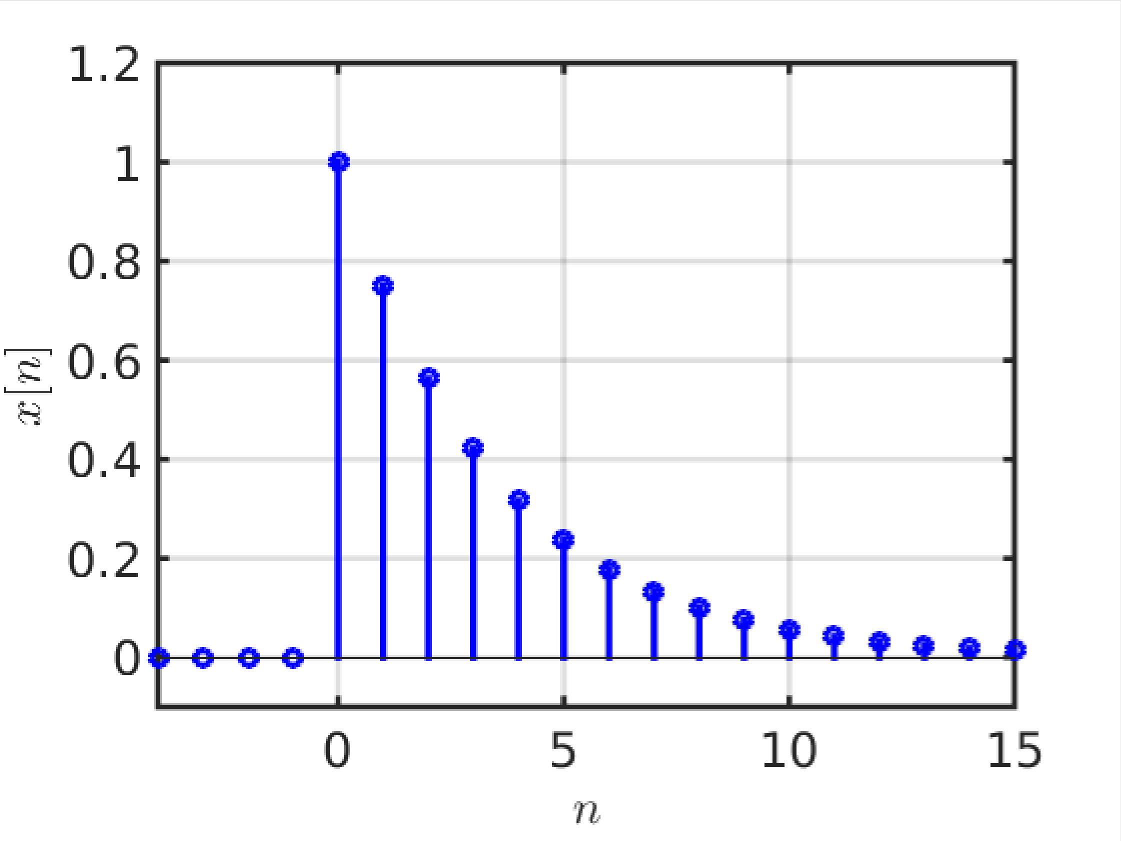
$$X(e^{j\omega}) = F\left\{x[n]\right\}$$

$$x[n] \quad \leftarrow \quad F \quad \rightarrow \quad X(e^{j\omega})$$

	continuo	discreto
síntesis T. Inv. Fourier	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$
análisis T. Fourier	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

Ejemplo:

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$



$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a e^{-j\omega}\right]^n$$

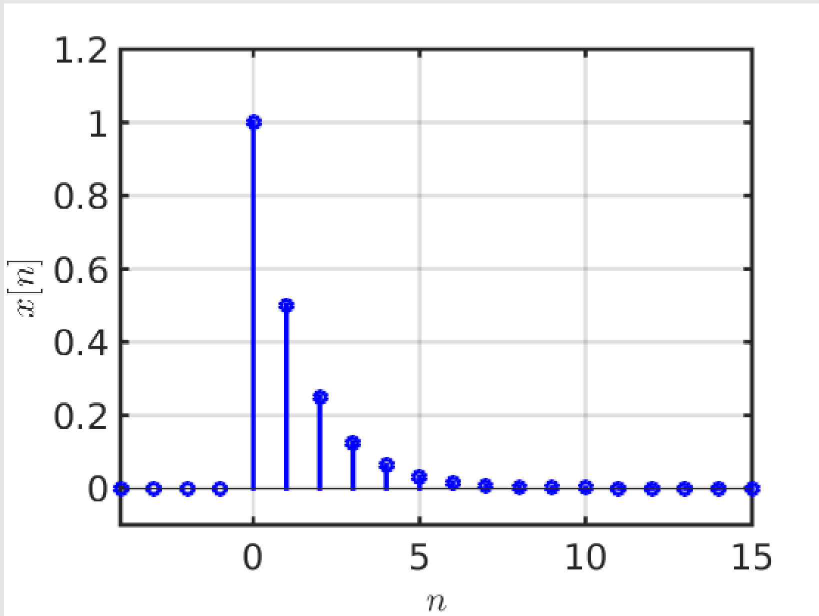
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

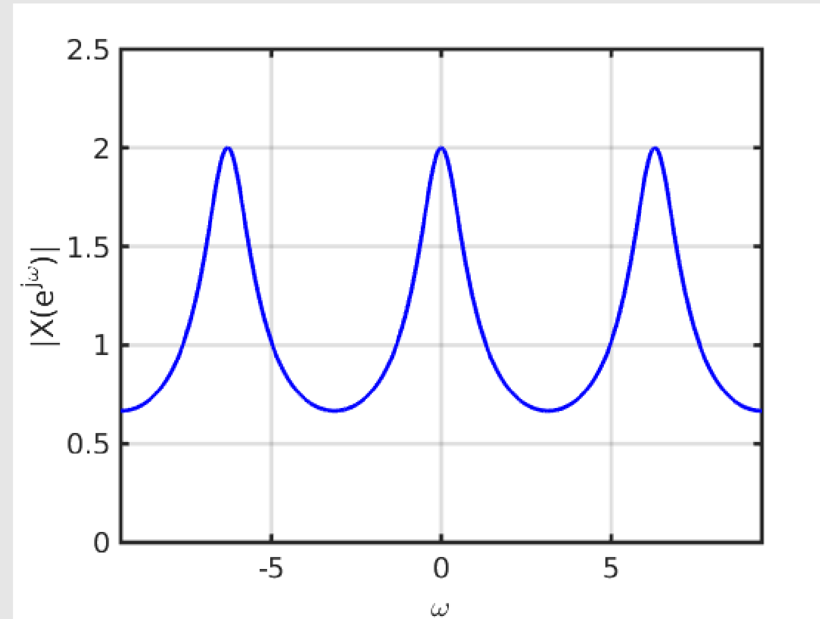
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\,cos(\omega))^2 + (a\,sen(\omega))^2}}$$

$$\angle\{X(e^{j\omega})\} = -arctg\left(\frac{a\,sen(\omega)}{1 - a\,cos(\omega)}\right)$$

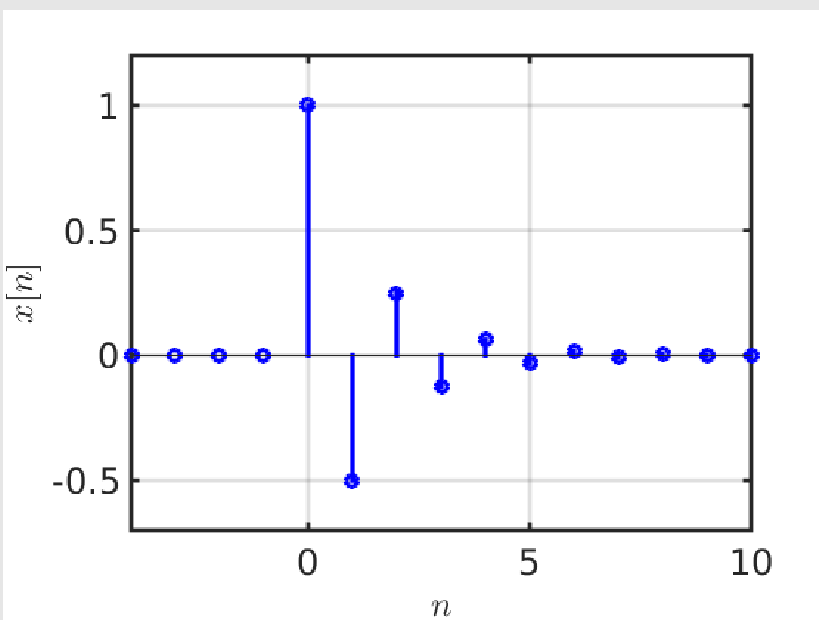
$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1 \qquad |X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\,cos(\omega))^2 + (a\,sen(\omega))^2}}$$

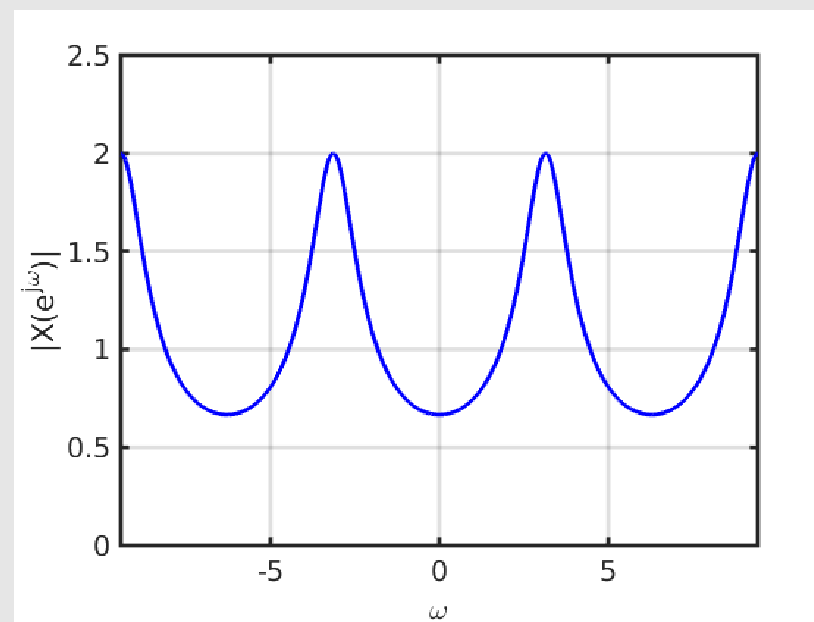
$$a = \frac{1}{2}$$





$$a = -\frac{1}{2}$$



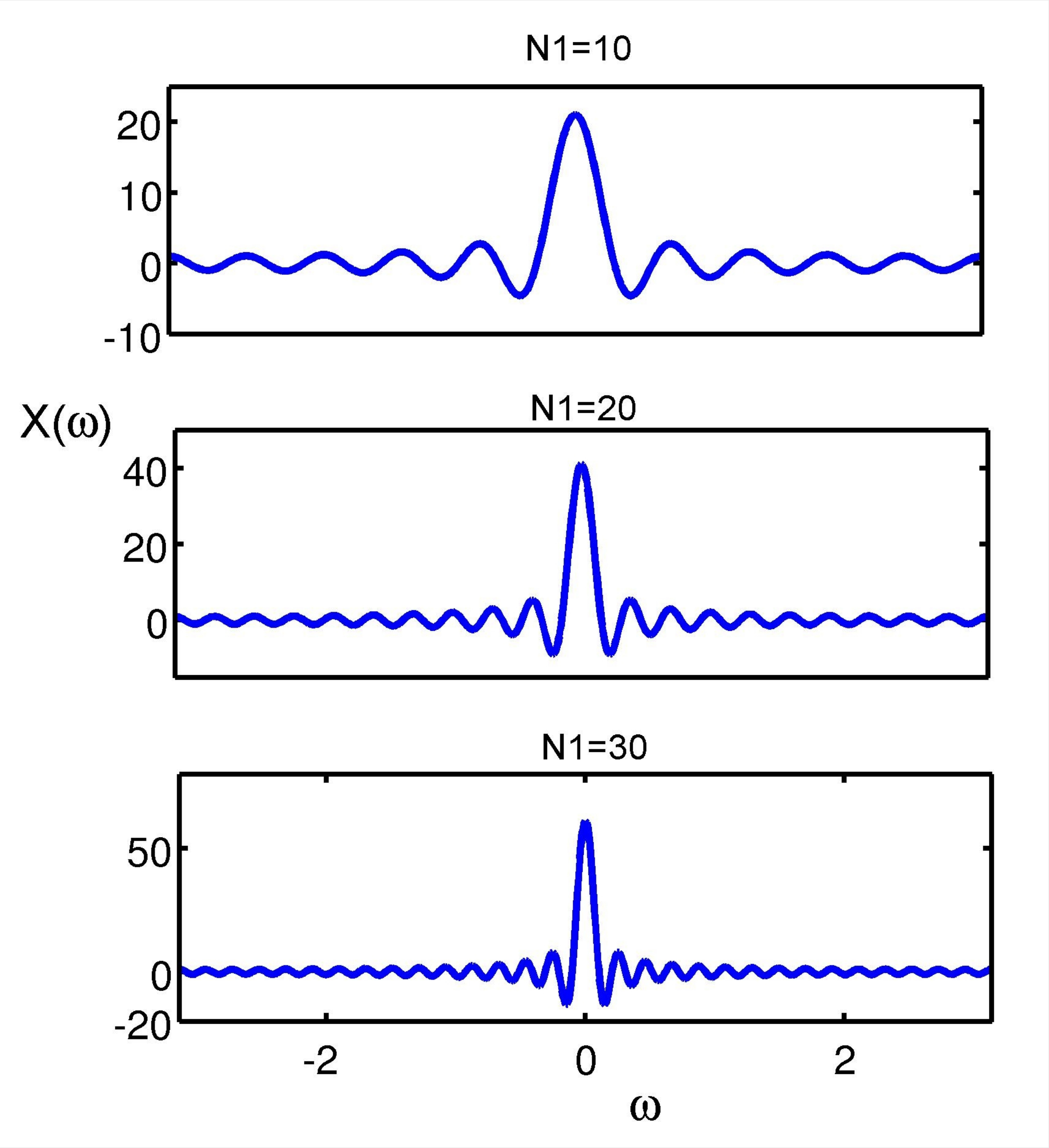


Ejemplo:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| < N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



Condiciones de convergencia

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

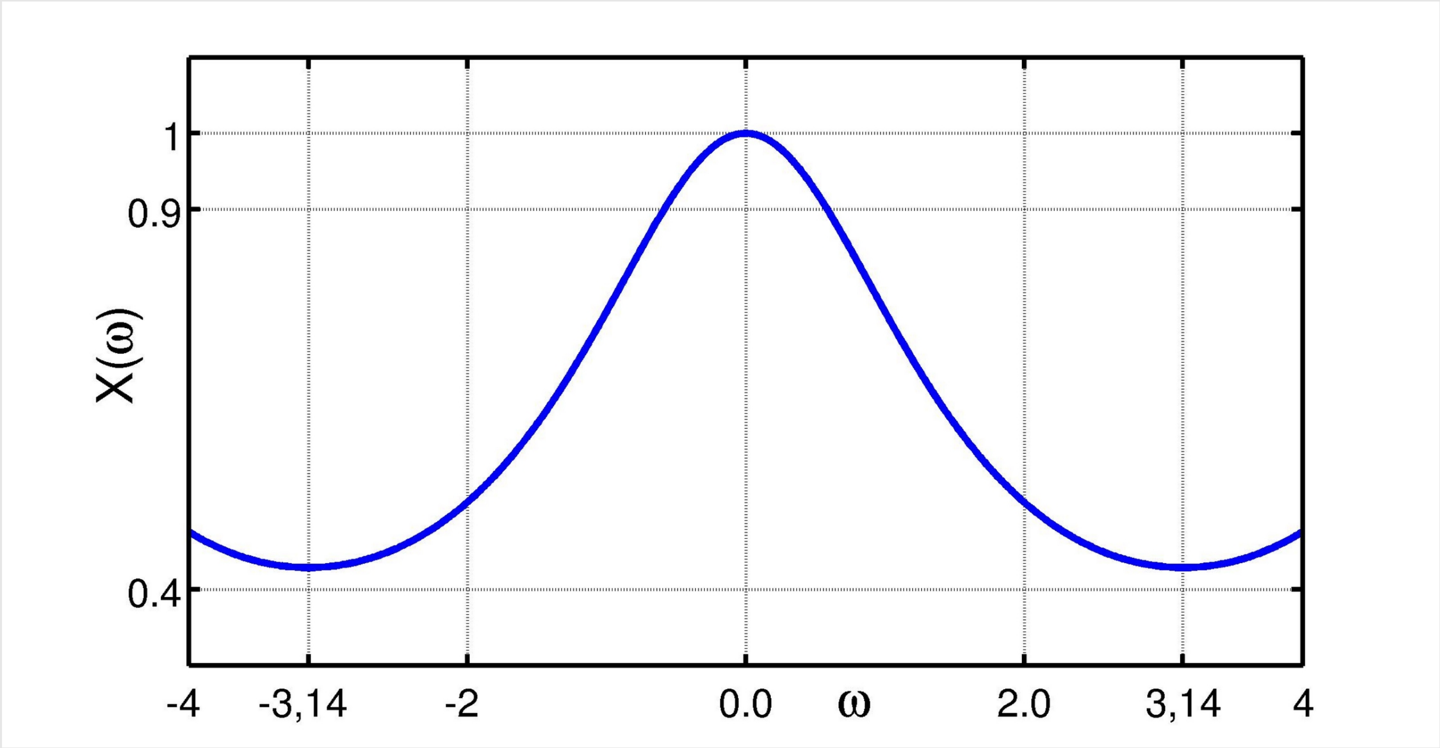
$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]| \; < \; \infty}$$

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \; < \; \infty}$$

Ejemplo:

$$x[n] \;=\; a^{|n|} \qquad\qquad |a| \;<\; 1$$

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a e^{-j\omega} \right]^{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a e^{j\omega} \right]^{m} \\
&= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} + \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} \;=\; \frac{1 - a^2}{1 - 2a\ \cos(\omega) + a^2}
\end{aligned}$$



Transformada de señales periódicas discretas

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \qquad\qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + k2\pi).$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + k2\pi) \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 n} \quad \leftarrow \quad \mathcal{F} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + k2\pi)}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 n} \quad \leftarrow \quad \mathcal{F} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + k2\pi)}$$

$$\boxed{\sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\,k\,2\pi/N\,n} \quad \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)}$$

Propiedades de la transformada:

$$x[n] \leftarrow F \rightarrow X(e^{j\omega})$$

Periodicidad ⟶ $$X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

Desplazamiento temporal ⟶ $$x[n-n_0] \leftarrow F \rightarrow e^{-j\,\omega\,n_0} X(e^{j\omega})$$

Desplazamiento en frecuencias ⟶ $$e^{j\omega_0 n}\, x[n] \leftarrow F \rightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

Primera diferencia ⟶ $$x[n] - x[n-1] \leftarrow F \rightarrow (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

Diferenciación en frecuencia ⟶ $$nx[n] \leftarrow F \rightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

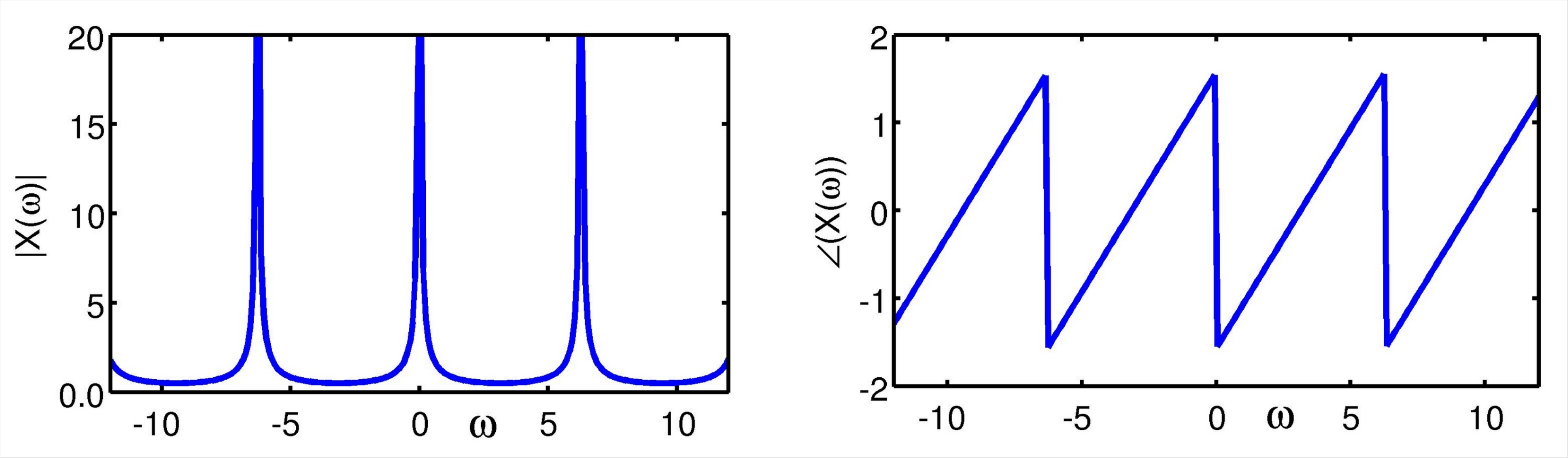
Propiedad de acumulación:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \quad \leftarrow F \rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Ejemplo:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \qquad\qquad F\{\delta[n]\} = 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$



Propiedad expansión temporal:

señal continua → $x(at) \leftarrow F \rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

$x[an] \quad ?$ $\qquad x[2n] \quad ?$

$$\boxed{x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{si n es múltiplo de m } (n = km) \\ 0, & \text{si n no es múltiplo de m } (n \neq km) \end{cases}}$$

Operación <<***expansión temporal de orden m de la señal x[n]***>>

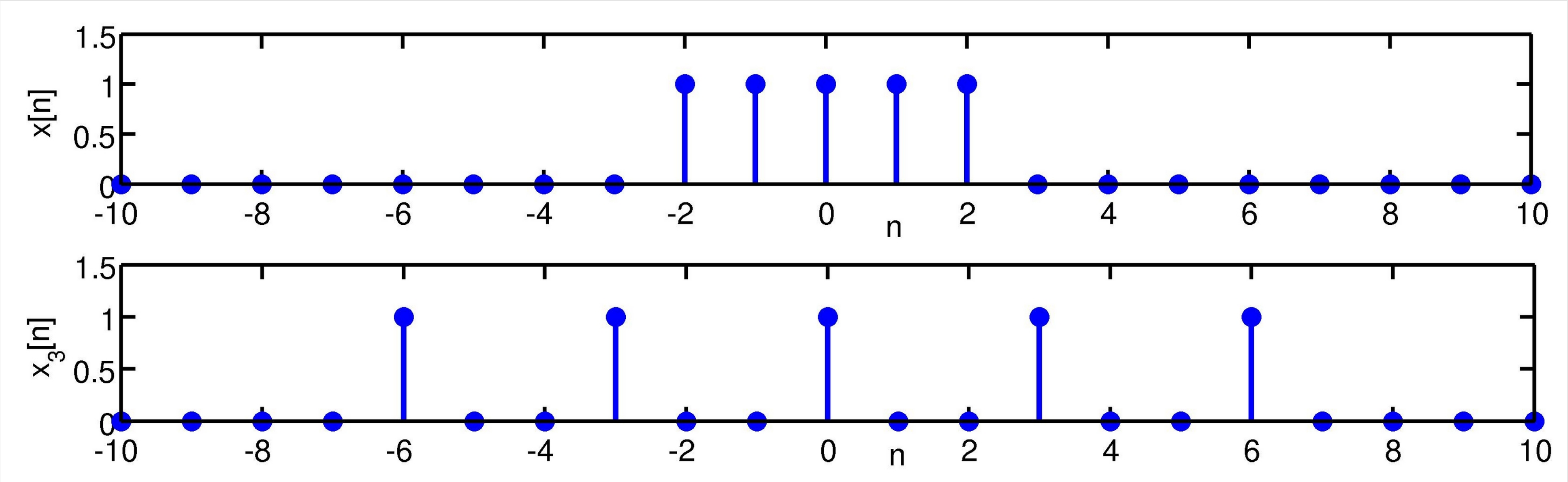
$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{si n es múltiplo de m } (n = km) \\ 0, & \text{si n no es múltiplo de m } (n \neq km) \end{cases}$$

$x_3[n] = ?$

$x_3[0] = x[0/3] = x[0]$ $\quad$ $x_3[3] = x[3/3] = x[1]$ $\quad$ $x_3[6] = x[6/3] = x[2]$

$x_3[1] = 0$ $\quad$ $x_3[4] = 0$ $\quad$ $x_3[7] = 0$

$x_3[2] = 0$ $\quad$ $x_3[5] = 0$ $\quad$ $x_3[8] = 0$

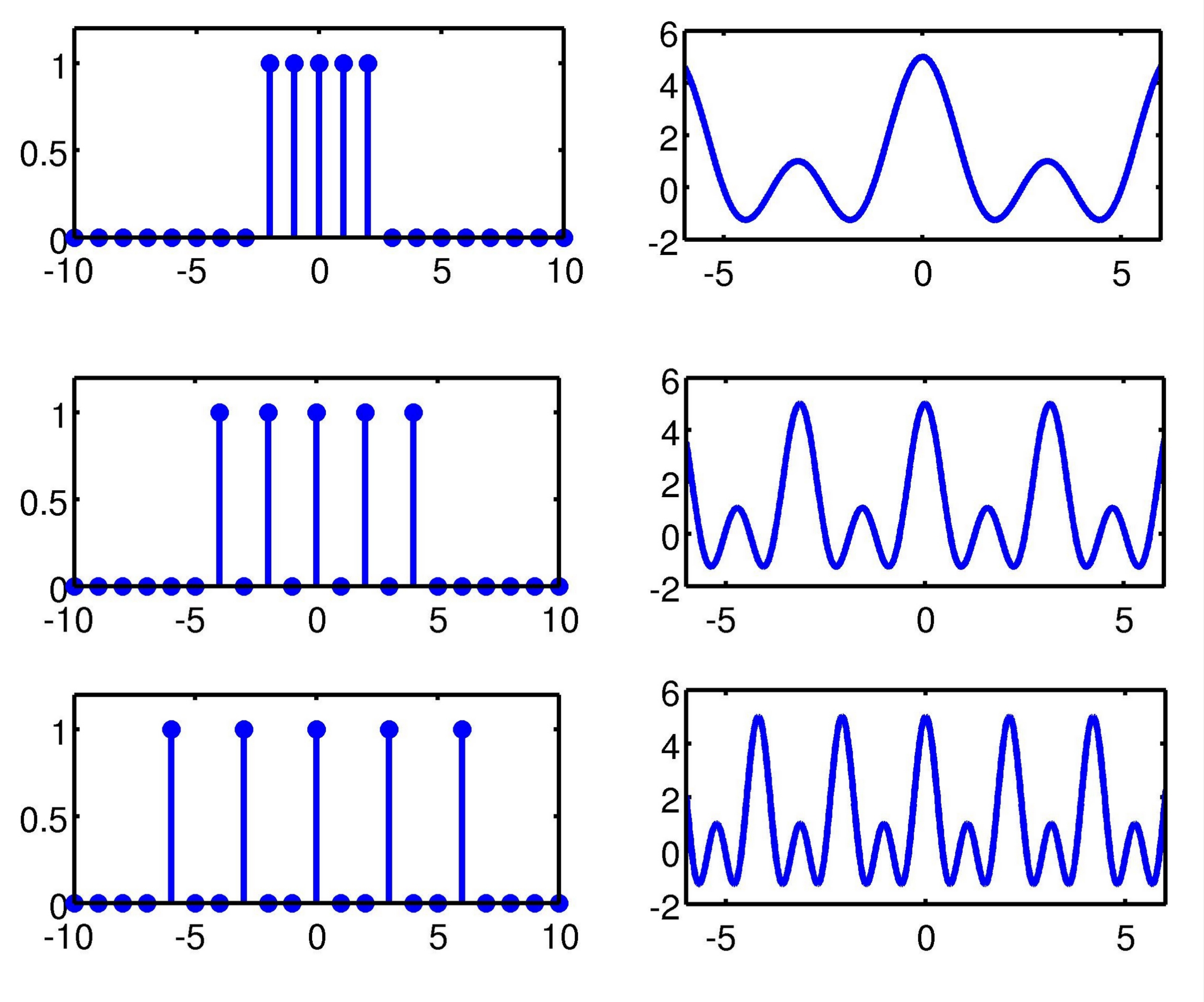


$$x_{(m)}[n] \leftarrow F \rightarrow X\left(e^{j\,m\,\omega}\right)$$

$p[n]$ $X\left(e^{j\omega}\right)$

$p_2[n]$ $X\left(e^{j2\omega}\right)$

$p_3[n]$ $X\left(e^{j3\omega}\right)$



$$p_{(m)}[n] = 1 \quad |n| <= N_1$$

$$\mathrm{P}_m\left(e^{j\omega}\right)) = \frac{sen\left(m\omega(N_1 + 1/2)\right)}{sen(m\omega/2)}$$

Propiedad de convolución:

$$\boxed{x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] \quad \xleftarrow{\quad} \quad \mathcal{F} \quad \xrightarrow{\quad} \quad X_3\left(e^{j\omega}\right) = X_1\left(e^{j\omega}\right) X_2\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] \quad \xleftarrow{\quad} \quad \mathcal{F} \quad \xrightarrow{\quad} \quad Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = F\left\{h[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}}$$

La Función Respuesta en Frecuencia es la Transformada de Fourier de la Respuesta al Impulso

Condición de existencia

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| \ < \ \infty}$$

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 \ < \ \infty}$$

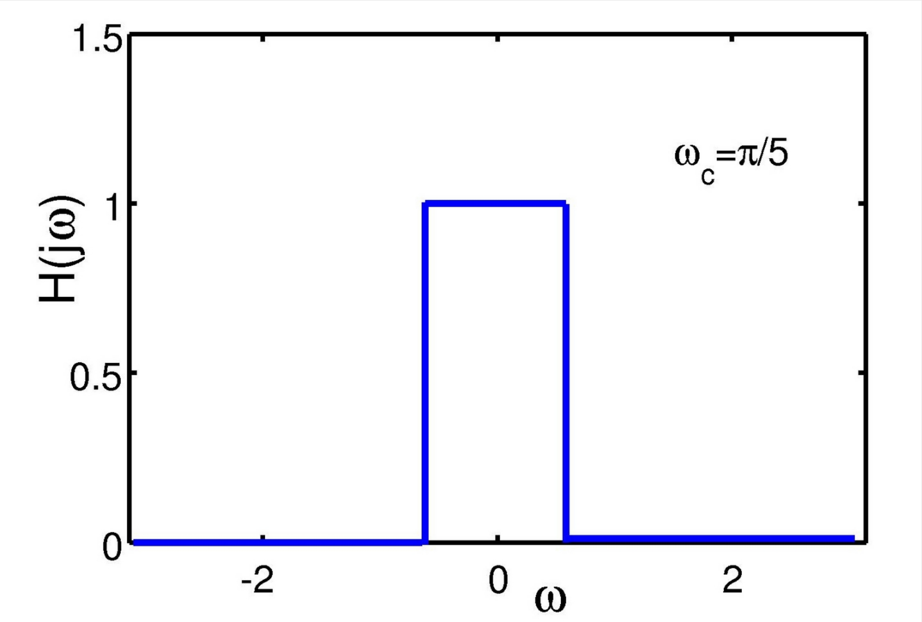
Ejemplo:

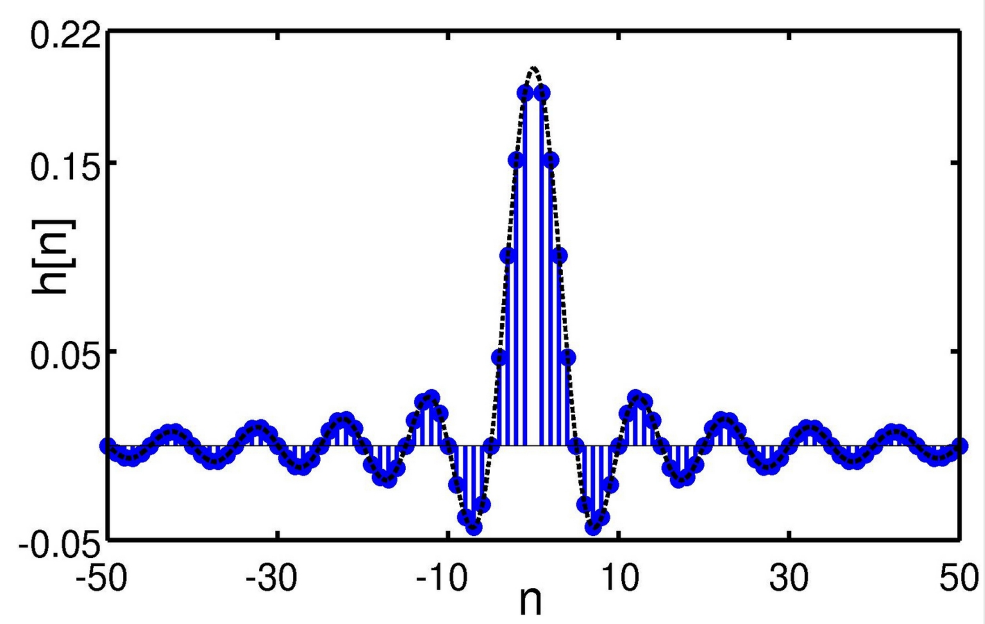
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$h[n] \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right]_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

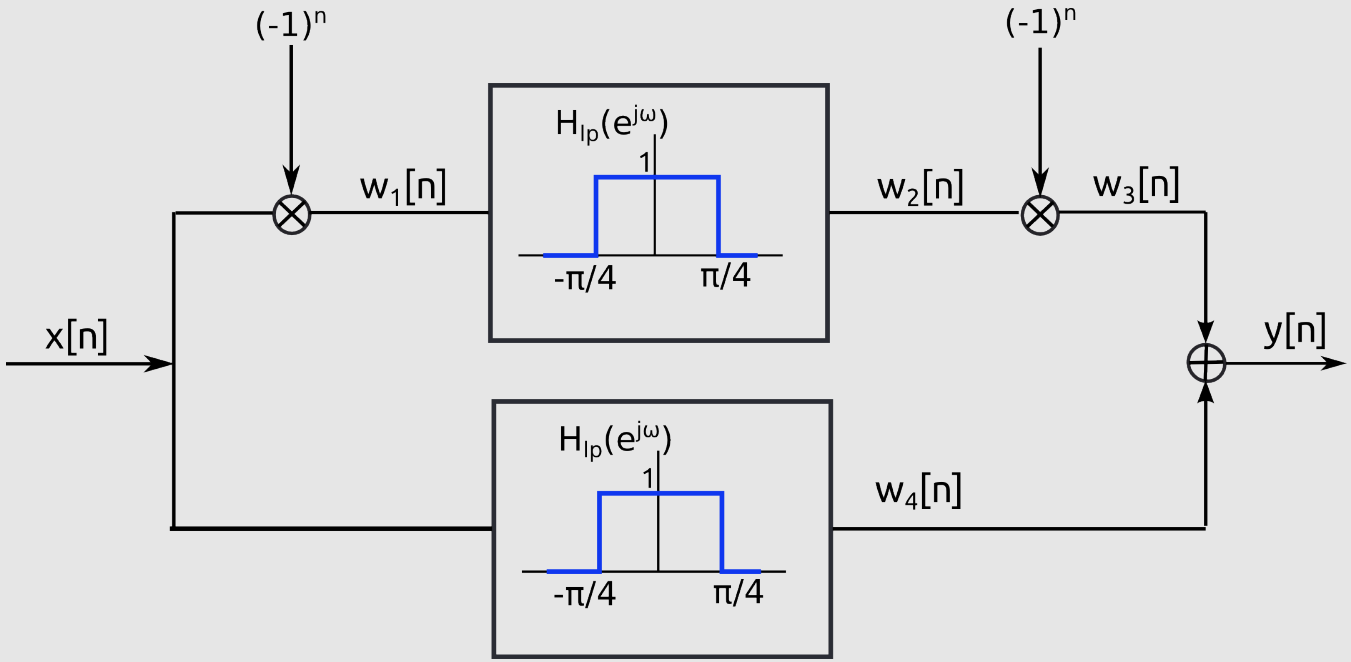
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right)}{jn} = \frac{sen(\omega_c n)}{\pi n}$$





Ejemplo:

$$\boxed{e^{j\omega_0 n}x[n] \quad \leftarrow F \rightarrow \quad X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)}$$



$$w_1[n] = e^{j\pi n}x[n] \;\rightarrow\; W_1\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

$$w_2[n] = w_1[n] * h[n] \;\rightarrow\; W_2\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

$$w_3[n] = e^{j\pi n}w_2[n] \;\rightarrow W_3\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$$

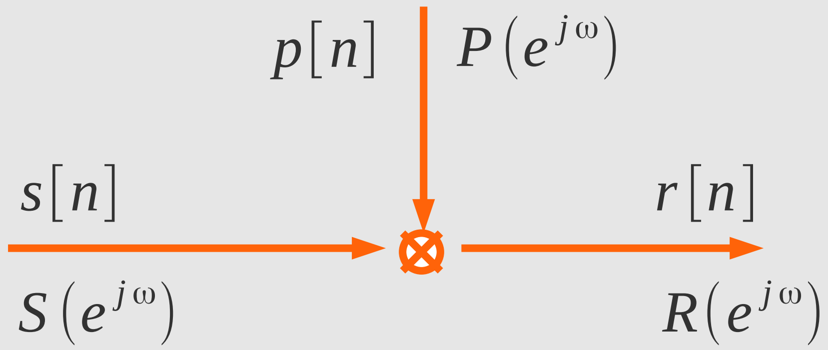
$$w_4[n] = x[n] * h[n] \;\rightarrow\; W_4\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$Y(j\omega) = \left[H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) + H_{lp}\left(e^{j\omega}\right)\right] X\left(e^{j\omega}\right) \qquad \boxed{H_{eq}\left(e^{j\omega}\right) = H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) + H_{lp}\left(e^{j\omega}\right)}$$

Propiedad de multiplicación:

$$r[n] = s[n]p[n] \;\leftarrow F \rightarrow\; R\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} S\left(e^{j\omega}\right) \otimes P\left(e^{j\omega}\right)$$

$$X_1\left(e^{j\omega}\right) \otimes X_2\left(e^{j\omega}\right) \equiv \int_{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)\; X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$



Ejemplo:

$$r[n] = s[n]p[n] \leftarrow F \rightarrow R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} S(e^{j\omega}) \otimes P(e^{j\omega})$$

$$r[n] = x[n]\cos[n]$$

$$\cos[\omega_0 n] \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - \omega_0 + m2\pi) + \pi\delta(\omega + \omega_0 + m2\pi)$$

$$R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi m)) \otimes S\left(e^{j\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(S\left(e^{j(\omega - \omega_0 + 2\pi m)}\right) + S\left(e^{j(\omega + \omega_0 + 2\pi m)}\right)\right)$$

Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones en diferencias:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

$$\begin{aligned}
F\left\{\textstyle\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} &= F\left\{\textstyle\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \\
\textstyle\sum_{k=0}^{N} a_k F\{y[n-k]\} &= \textstyle\sum_{k=0}^{M} b_k F\{x[n-k]\} \\
\textstyle\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) &= \textstyle\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

$$H(e^{j\omega}) \equiv \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \Longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-kj\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}}$$

Ejemplo:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}}$$

$$a^n u[n] \leftarrow F \rightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \qquad |a| < 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\boxed{h[n] = F^{-1}\left\{H(e^{j\omega})\right\} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

$$H(v) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{8}v^2}, \qquad v = e^{-j\omega}$$

$>> \quad a = [1 \quad -3/4 \quad 1/8];$

$>> \quad b = [2];$

$>> \quad [r \quad p \quad k] = residuez(b, a);$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{r[1]}{1 - p[1]e^{-j\omega}} + \frac{r[2]}{1 - p[2]e^{-j\omega}} + \quad \ldots$$

$$+ k[1] + k[2]e^{-j\omega} + k[3]e^{-j2\omega} + \ldots$$

$$h[n] = r[1]p[1]^n u[n] + r[2]p[2]^n u[n] + \quad \ldots$$

$$+ k[1]\delta[n] + k[2]\delta[n-1] + k[3]\delta[n-2] + \ldots$$

	continuo	discreto
síntesis	$h(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$h[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$
análisis	$H(j\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$	$H(e^{j\omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$