

Señales y sistemas

Tema 3: Representación de señales y sistemas continuos en el dominio de la frecuencia Series de Fourier continua

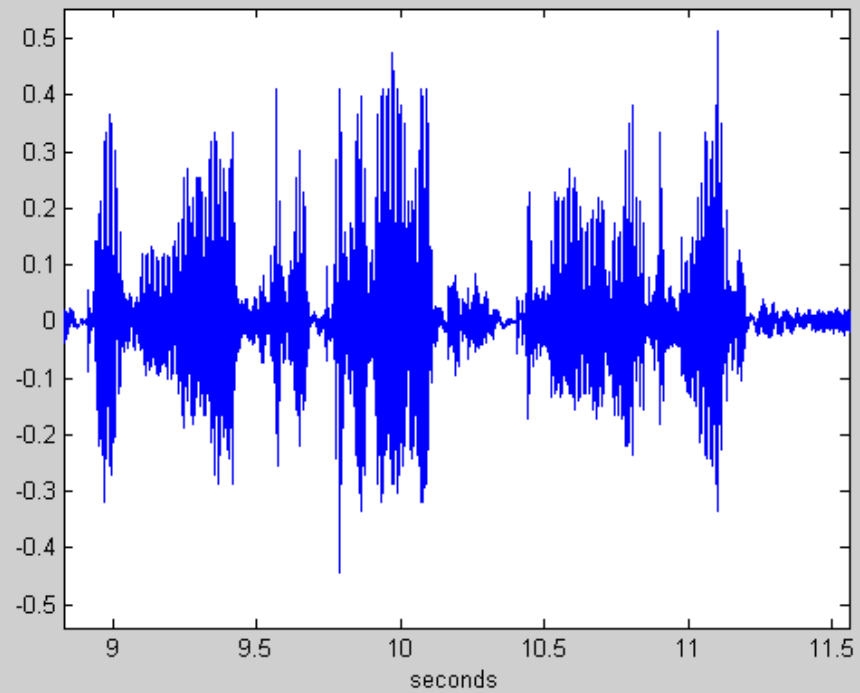


© Diego L. Valladares

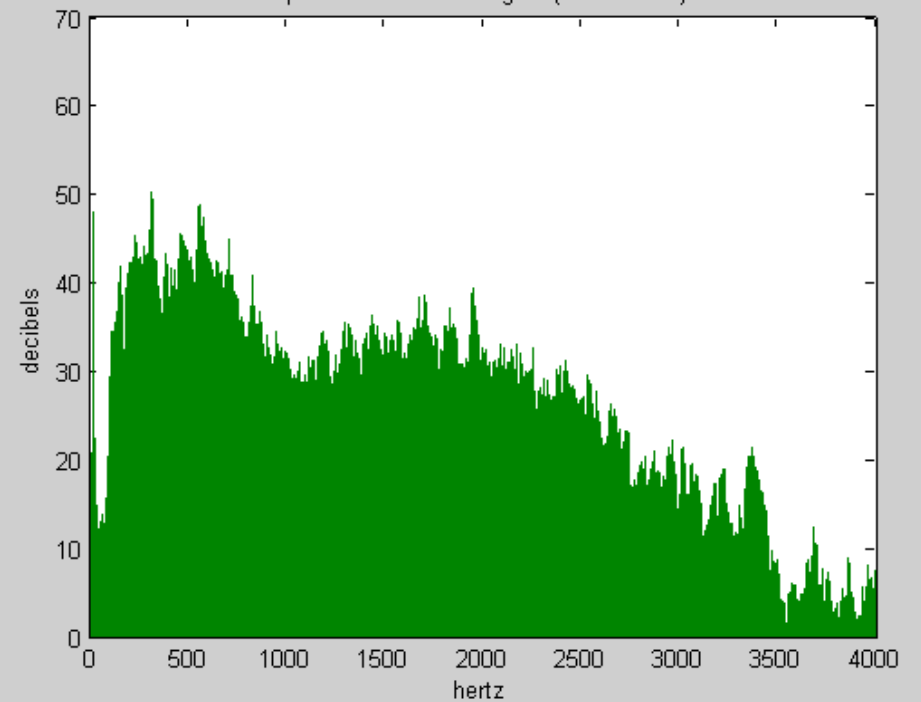
La presentaciones de Señales y Sistemas poseen una licencia
de tipo *Creative Commons Reconocimiento-NoComercial*
4.0 Internacional License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

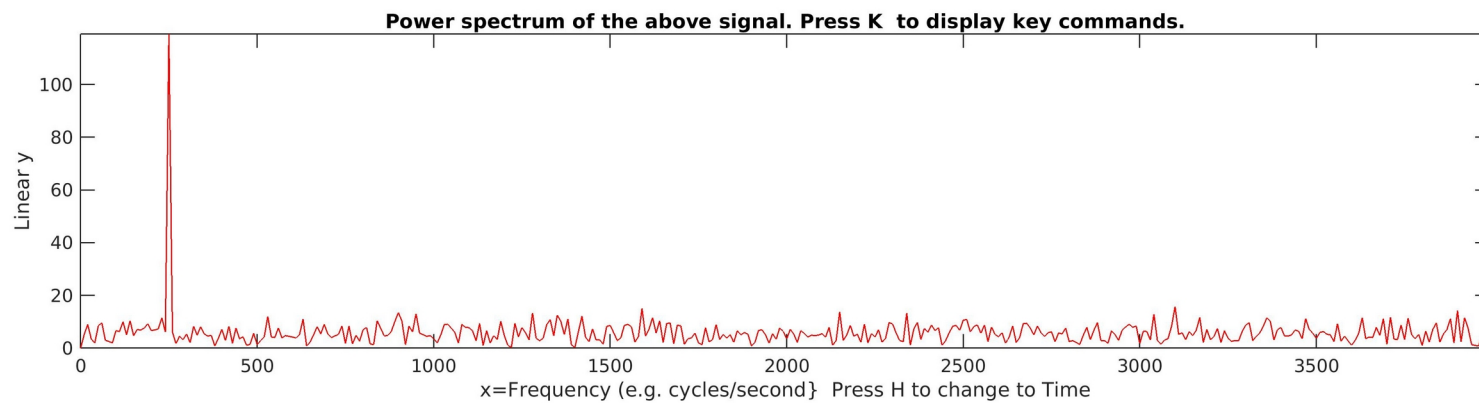
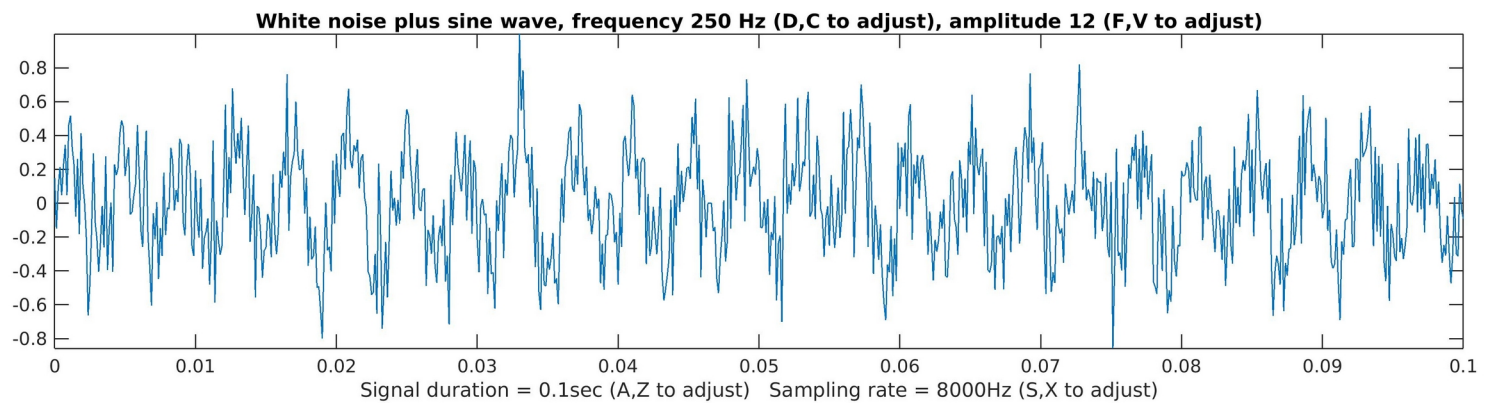
Diego Leonardo Valladares
Departamento de Física
Univ. Nac. de San Luis

voice waveform example

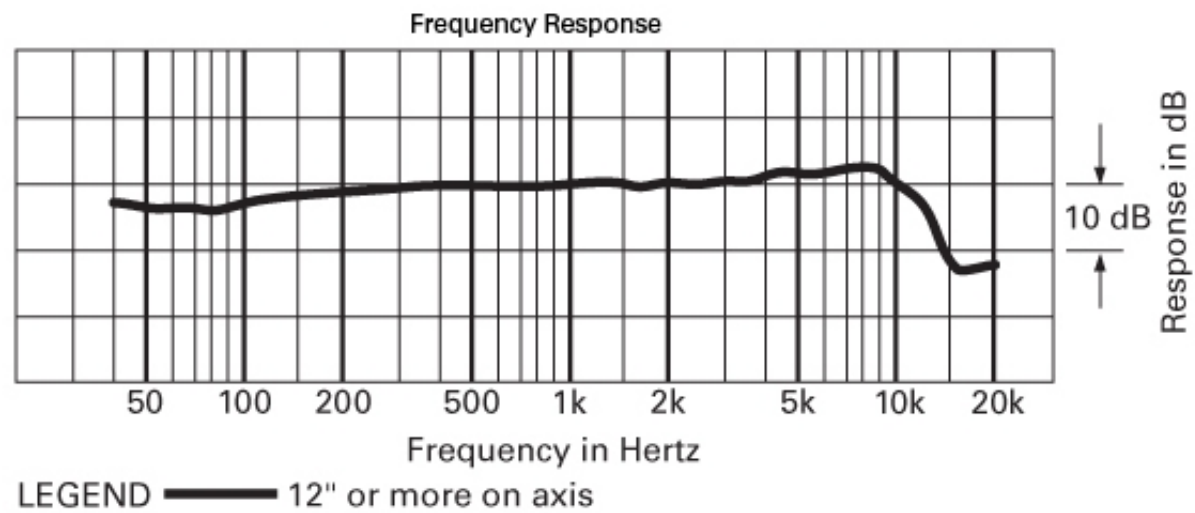


Spectrum of a voice signal (15 seconds)





ES947/LED





¿Porqué las exponenciales continuas son señales importantes?

continua $\rightarrow e^{j\omega t}$

discreta $\rightarrow e^{j\omega n}$

- casi todas las señales de interés pueden representarse como una combinación lineal de este tipo de señales
- la forma particular que posee la respuesta de los sistemas LTI a señales exponenciales complejas determina que mediante estas señales podamos obtener la respuesta del sistema de manera muy simple.

Tipo	Periódica	No periódica
señal continua	Serie de Fourier	Transformada de Fourier
señal discreta	Serie de Fourier en tiempo discreto	Transformada de Fourier en tiempo discreto

- Implementación en procesamiento $\rightarrow$ Transformada de Fourier Discreta (TFD)
- Algoritmo para aplicar la TFD: Transformada de Fourier Rápida (FFT)

La serie de Fourier para señales periódicas continuas:

señal periódica $\longrightarrow x(t) = x(t + T) \quad \forall t$

armónicos $\longrightarrow \phi_k = \{e^{jk\omega_0 t}\} \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ecuación de síntesis

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Ecuación de análisis

La expresión nos indica cómo se **descompone** la señal en exponenciales complejas de diferente frecuencia (**múltiplos de la frecuencia fundamental de la señal**), siendo el coeficiente a_k una medida de la contribución de la **componente** (exponencial compleja) de frecuencia $k \omega_0$ a la formación de la señal.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \dots$$

$$a_k = A_k e^{j\theta_k} \longrightarrow \text{coeficiente espectral}$$

$$e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \text{componente espectral, modo de Fourier, armónico } k$$

$$e^{\pm j\omega_0 t} \longrightarrow \text{componente fundamental, primer armónico}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \longrightarrow \text{Coeficiente espectral de la componente continua}$$

Espectro de amplitud, fase y potencia de una señal periódica:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = |a_k| e^{j\angle a_k}$$

$|a_k|$ vs. $\omega \rightarrow$ espectro de amplitud o magnitud

$\angle(a_k)$ vs. $\omega \rightarrow$ espectro de fase

Identidad de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \rightarrow \text{Potencia}$$

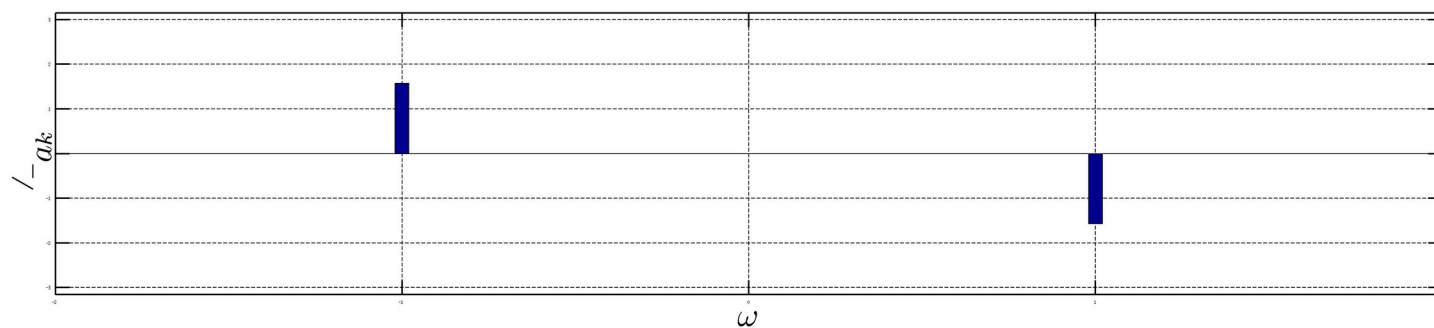
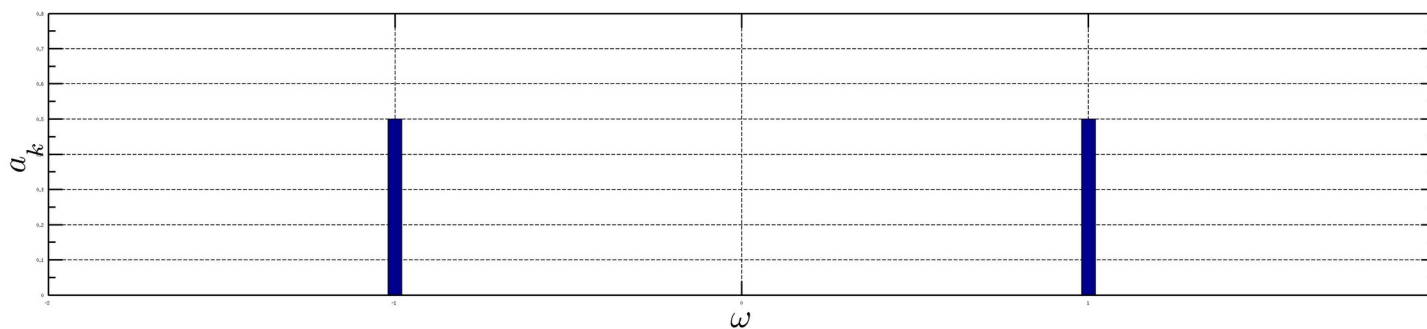
$|a_k|^2$ vs. $\omega \rightarrow$ espectro de potencia

Ejemplo:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

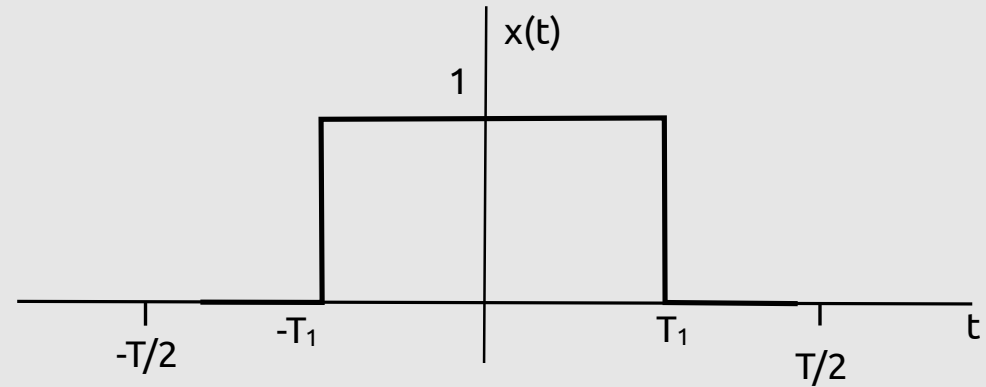
$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \quad x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}j, \quad a_{-1} = +\frac{1}{2}j, \quad a_k = 0 \text{ para } k \neq \pm 1$$



Ejemplo: espectro del pulso cuadrado periódico

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2, \end{cases}$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

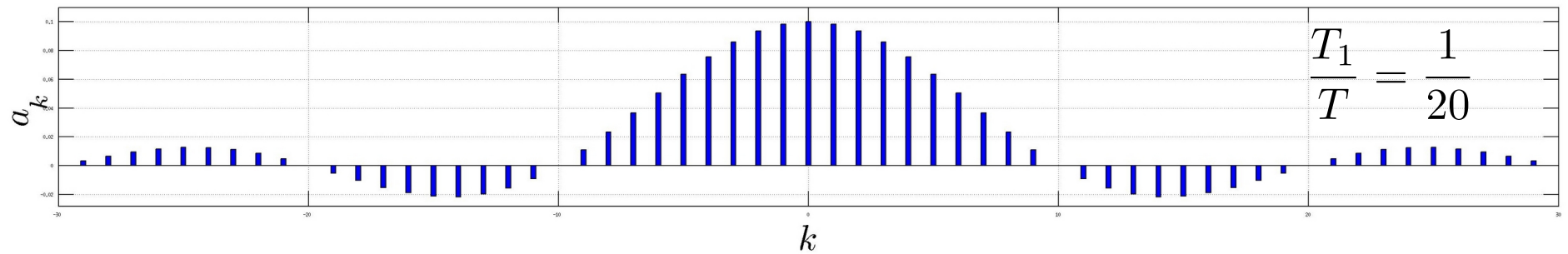
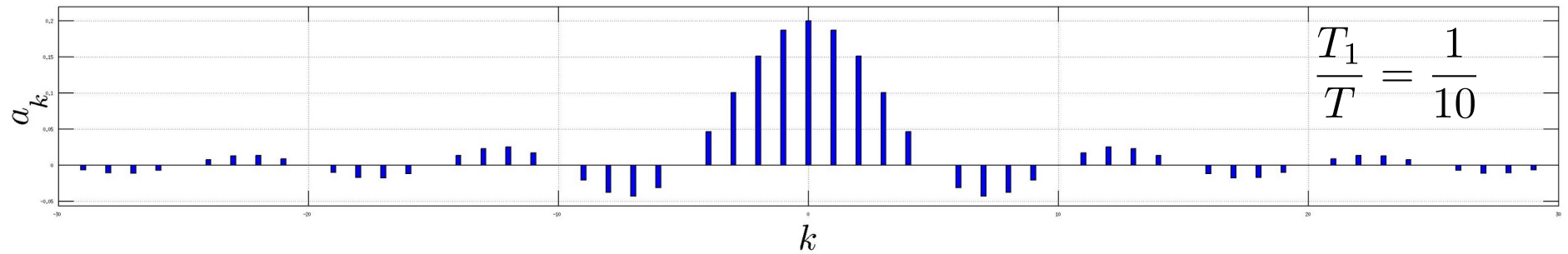
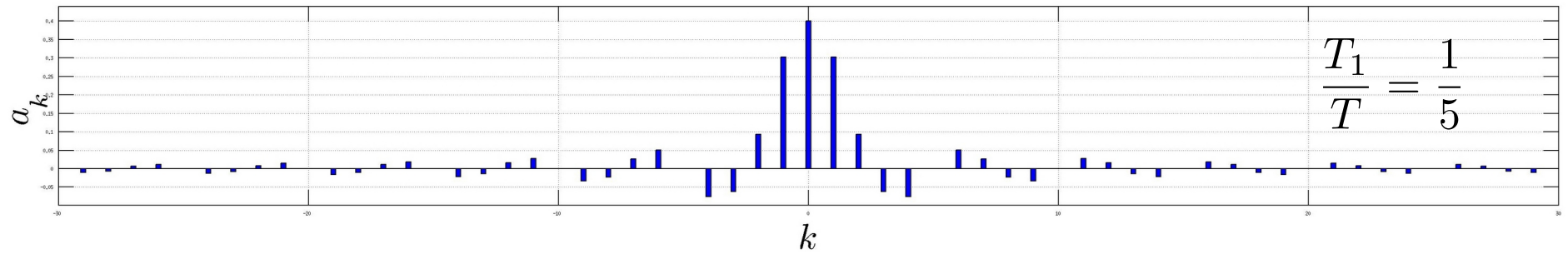
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2}{k\omega_0 T} \left\{ \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right\}$$

$$a_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad k \neq 0 \quad a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad k \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$



Condiciones de existencia de la Serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Una señal periódica $x(t)$ posee una expansión de Fourier o lo que es lo mismo la expansión converge si cumple las siguientes tres condiciones, denominadas condiciones de Dirichlet:

- $x(t)$ debe cumplir que $\int_T |x(t)| dt < \infty$
- $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito de t .
- $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito de t y cada una de estas discontinuidades es finita.

Ejemplo:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

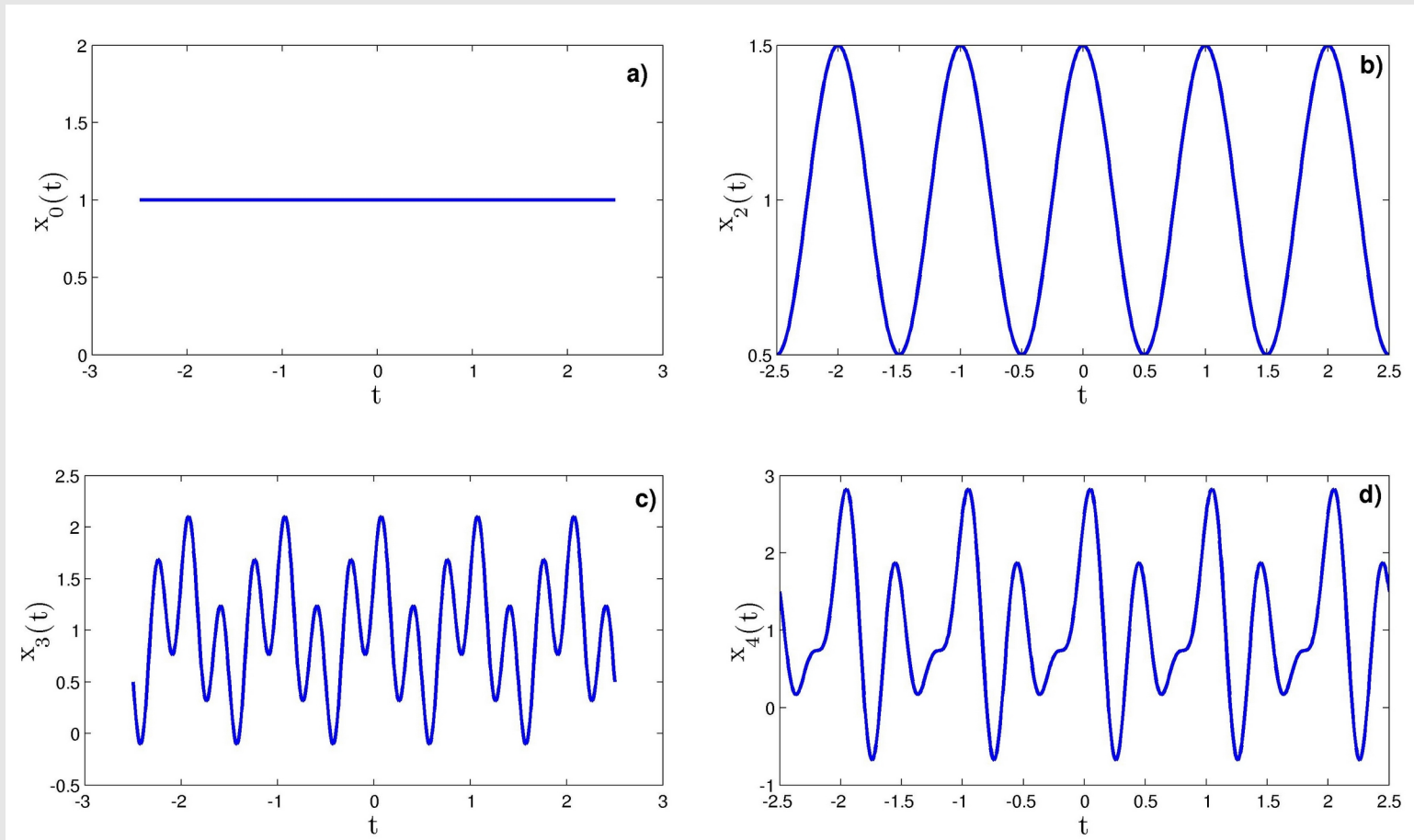
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

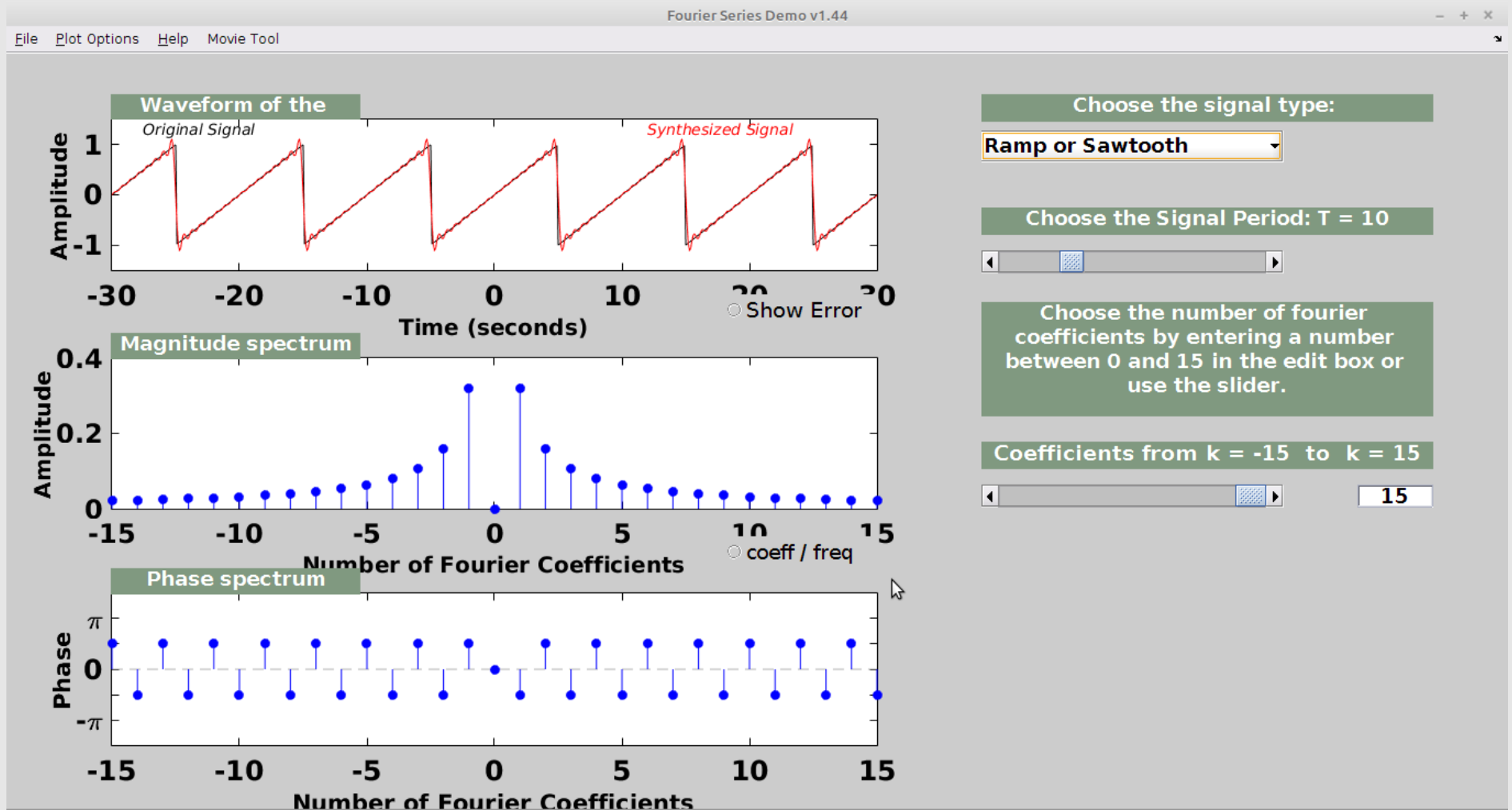
$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t} \quad T = 1$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = 1/4, \quad a_2 = a_{-2} = 1/2 \quad y \quad a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)
 \end{aligned}$$





señal periódica



espectro de líneas

La serie de Fourier para señales periódicas reales:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) \rightarrow \text{señal real} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x^*(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^*$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - a_{-k}^*) e^{jk\omega_0 t} = 0$$

$$x(t) \text{ real} \quad \Rightarrow \quad a_k = a_{-k}^*$$

$$|a_k| e^{j\angle a_k} = |a_{-k}^*| e^{-j\angle a_{-k}^*}$$

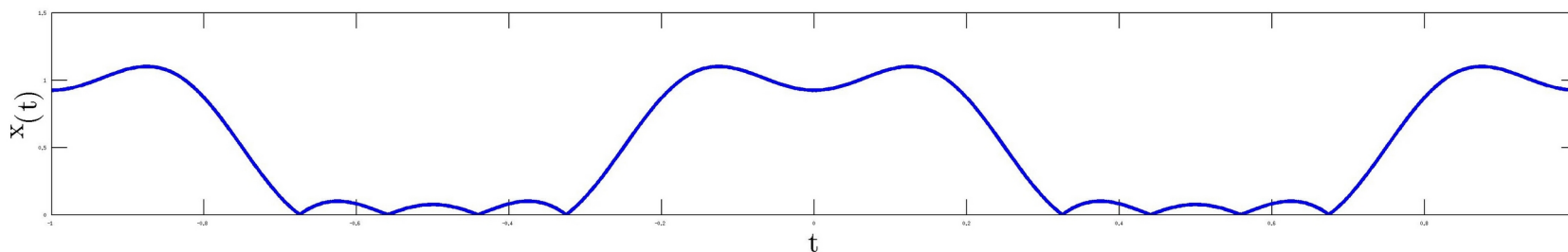
$$x(t) \text{ es real} \quad \begin{cases} |a_k| &= |a_{-k}| \\ \angle a_k &= -\angle a_{-k} \end{cases}$$

Ejemplo: superposición de componentes para el pulso cuadrado periódico

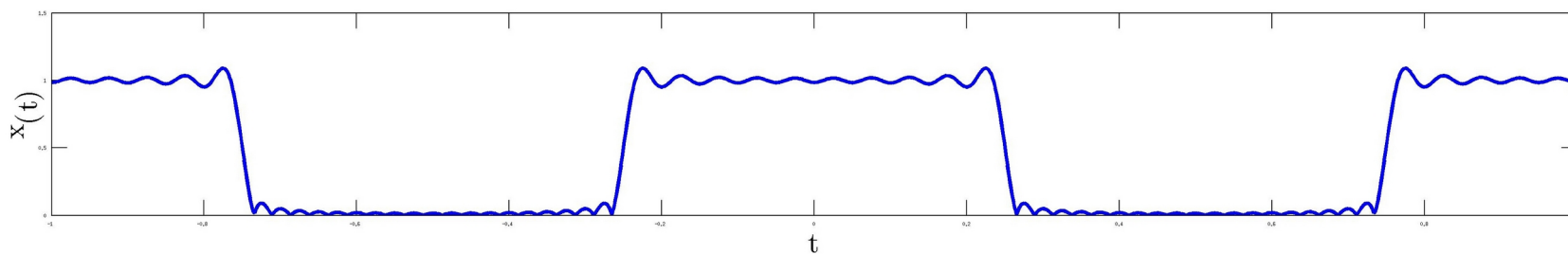
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2, \end{cases}$$

$$x_n(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

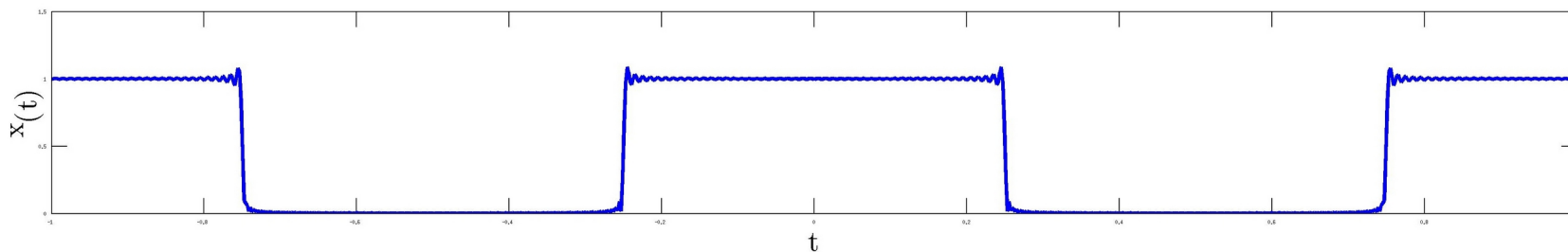
$N = 3$



$N = 20$



$N = 100$



Formas alternativas de la serie de Fourier para señales reales:

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega t} + a_{-k} e^{-jk\omega t})$$

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ a_k e^{jk\omega t} \}$$

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(k\omega t + \theta_k)$$

$$a_k = B_k + jC_k.$$

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos(k\omega t) - C_k \sin(k\omega t))$$

La serie de Fourier y los sistemas LTI:



$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} \\ &= H(j\omega) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$$y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

Función de Respuesta en Frecuencia

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

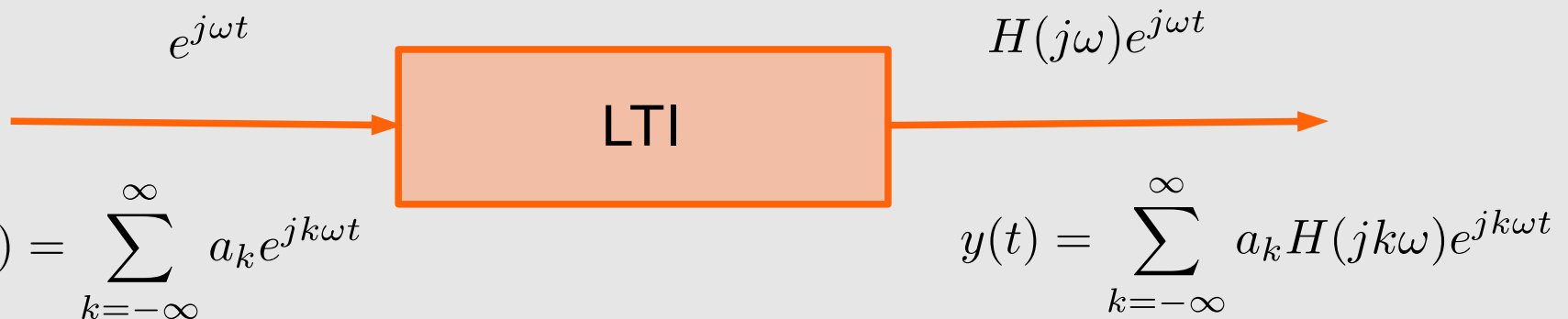
La respuesta del sistema LTI a una exponencial compleja de frecuencia ω , es una exponencial compleja idéntica a la de entrada, multiplicada por una función compleja de variable real $H(j\omega)$ denominado función Respuesta en Frecuencia. **Este factor complejo no cambia la frecuencia de la señal, sólo modifica su amplitud.**

$$y(t) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (h(t) * e^{jk\omega_0 t})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$



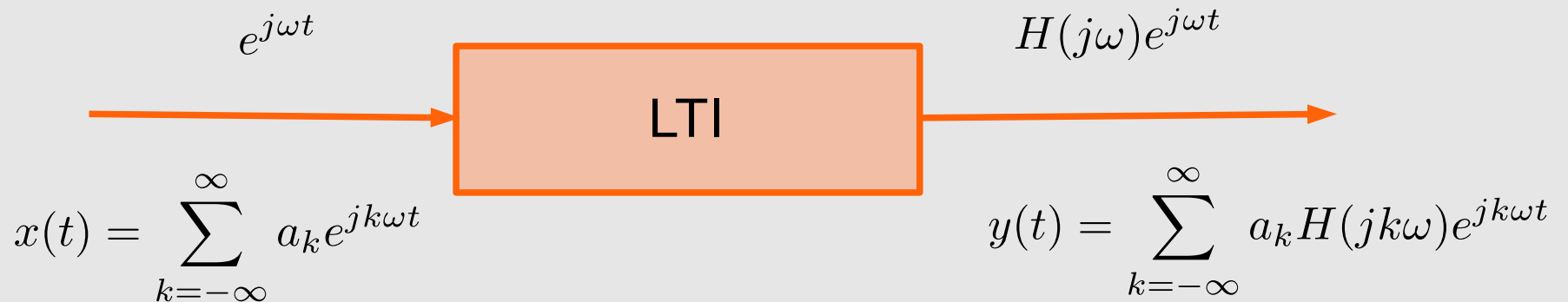
$$y(t) = T \{ e^{j\omega t} \} = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \textcolor{red}{a}_k e^{jk\omega t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \textcolor{red}{a}_k H(jk\omega) e^{jk\omega t}$$



Ejemplo: evaluemos la función respuesta en frecuencia del sistema LTI

$$y(t) = x(t - 3)$$

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 3) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$H(j\omega) = e^{-j3\omega}$$

Respuesta del sistema a la entrada armónica

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$y(t) = -\frac{j}{2} H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{2} H(-j\omega_0) e^{-j\omega_0 t}$$

$$\text{Si } H(j\omega_0) = H(-j\omega_0) \Rightarrow y(t) = H(j\omega_0) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$
$$y(t) = H(j\omega_0) \sin(\omega_0 t)$$

Ejemplo: evaluemos la función respuesta en frecuencia del sistema LTI

$$y(t) = x(t - 3)$$

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 3) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$H(j\omega) = e^{-j3\omega}$$

Respuesta del sistema a la entrada:

$$x(t) = 3\cos(2\pi t) + 5\sen(6\pi t)$$

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{j2\pi t} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{5}{2j}e^{j6\pi t} - \frac{5}{2j}e^{-j6\pi t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}H(j2\pi)e^{j2\pi t} + \frac{3}{2}H(-j2\pi)e^{-j2\pi t} + \frac{5}{2j}H(j6\pi)e^{j6\pi t} - \frac{5}{2j}H(-j6\pi)e^{-j6\pi t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{j2\pi(t-3)} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi(t-3)} + \frac{5}{2j}e^{j6\pi(t-3)} - \frac{5}{2j}e^{-j6\pi(t-3)}$$

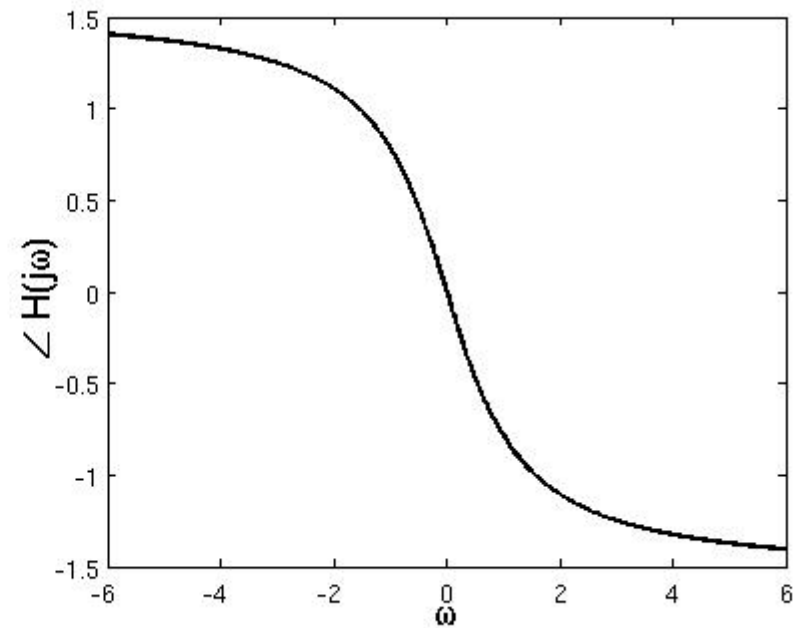
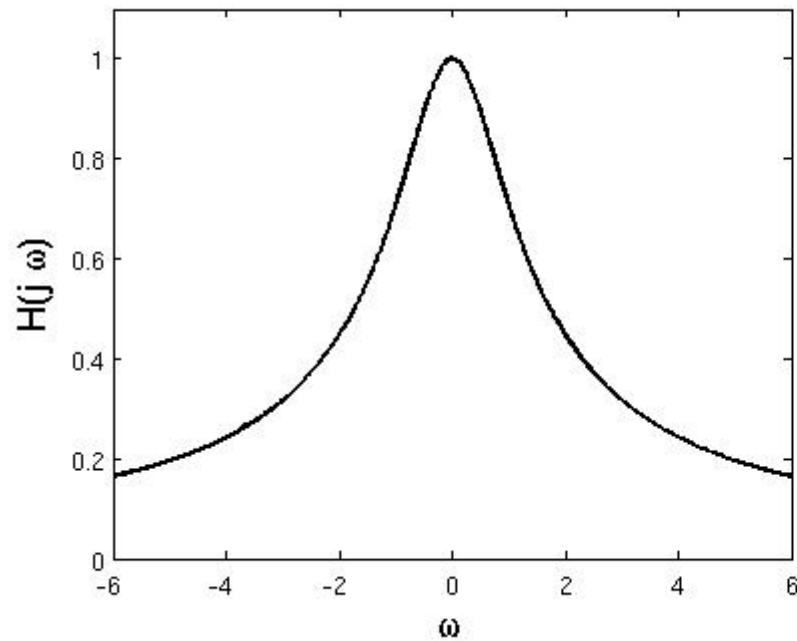
$$y(t) = 3\cos(2\pi(t - 3)) + 5\sen(6\pi(t - 3))$$

Ejemplo:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \frac{1}{1+j\omega}$$



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega) e^{jk\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = 1/4$$

$$a_2 = a_{-2} = 1/2 \quad a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 b_k e^{j k 2\pi t} = \sum_{k=-3}^3 a_k H(j k 2\pi) e^{j k 2\pi t}$$

$$b_0 = a_0 H(0) = 1, \quad b_{\pm 2} = a_{\pm 2} H(\pm j 4\pi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \pm j 4\pi} \right\}$$

$$b_{\pm 1} = a_{\pm 1} H(\pm j 2\pi) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 \pm j 2\pi} \right\} \quad b_{\pm 3} = a_{\pm 3} H(\pm j 6\pi) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{1 \pm j 6\pi} \right\}.$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = 1/4$$

$$a_2 = a_{-2} = 1/2 \quad a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 b_k e^{j k 2\pi t} = \sum_{k=-3}^3 a_k H(j k 2\pi) e^{j k 2\pi t}$$

$$b_0 = a_0 H(0) = 1, \quad b_{\pm 2} = a_{\pm 2} H(\pm j 4\pi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \pm j 4\pi} \right\}$$

$$b_{\pm 1} = a_{\pm 1} H(\pm j 2\pi) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 \pm j 2\pi} \right\} \quad b_{\pm 3} = a_{\pm 3} H(\pm j 6\pi) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{1 \pm j 6\pi} \right\}.$$