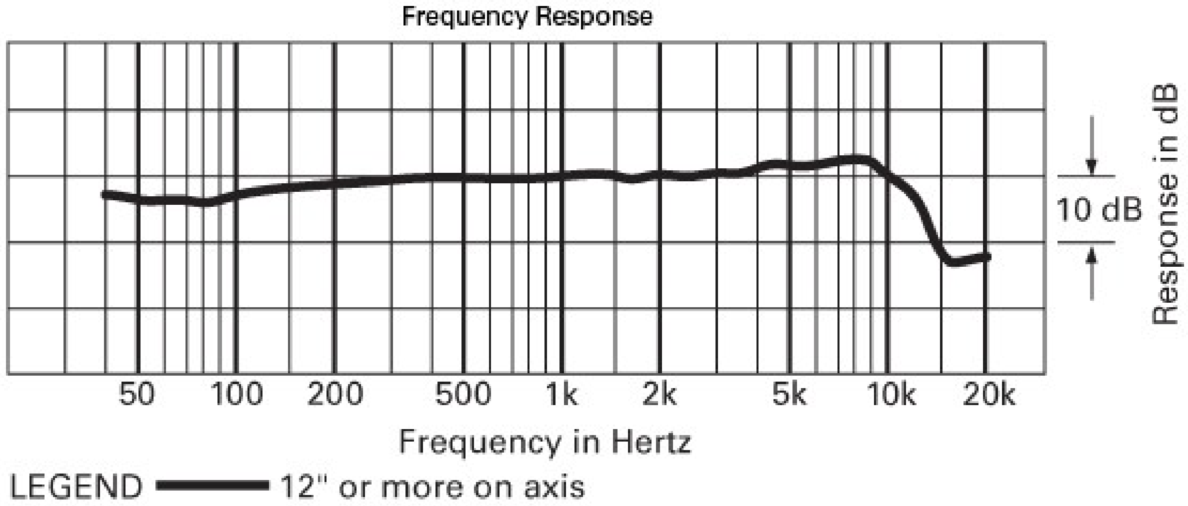
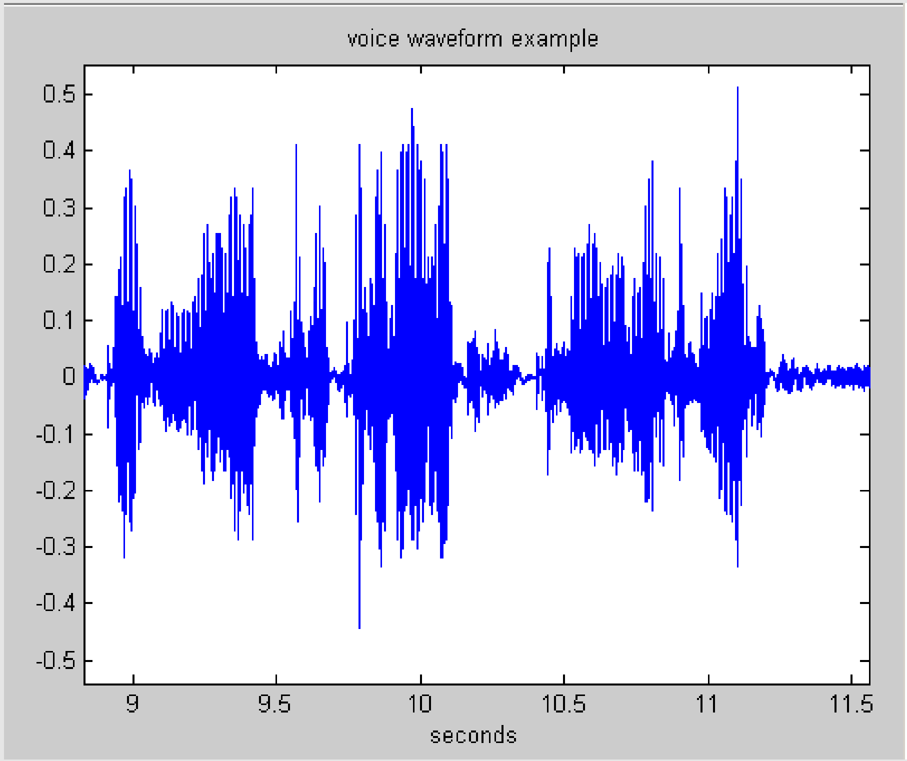
Señales y sistemas

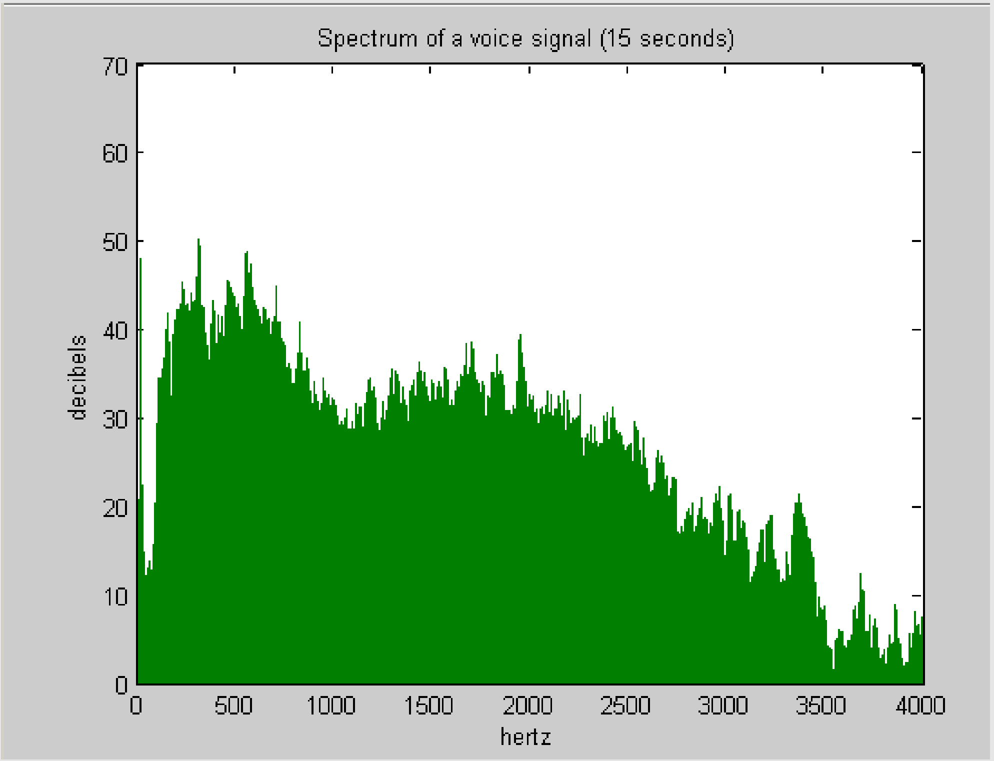
Tema III
Representación de señales y sistemas continuos en el dominio de la frecuencia: la Transformada de Fourier en tiempo continuo

Diego Leonardo Valladares
Departamento de Física
Univ. Nac. de San Luis

ES947/LED


Frequency Response
50
100
200
500
1k
2k
5k
10k
20k
Frequency in Hertz
10 dB
Response in dB
LEGEND
12" or more on axis


voice waveform example
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
9
9.5
10
10.5
11
11.5
seconds


Spectrum of a voice signal (15 seconds)
70
60
50
40
30
20
10
0
decibels
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
hertz

si x(t) es señal periódica

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

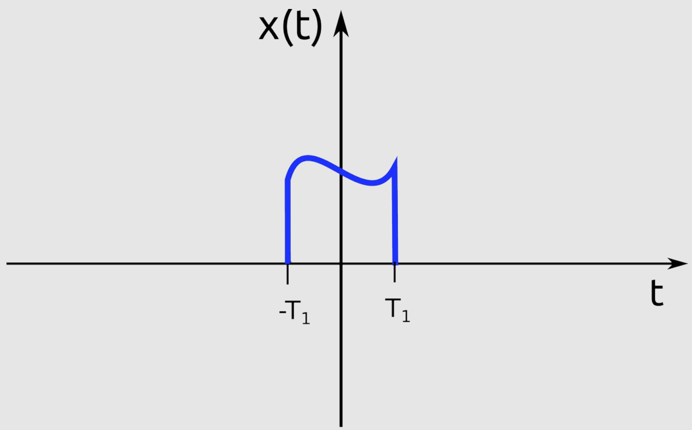
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Tipo	Periódica	No periódica
señal continua	Serie de Fourier	Transformada de Fourier
señal discreta	Serie de Fourier en tiempo discreto	Transformada de Fourier en tiempo discreto

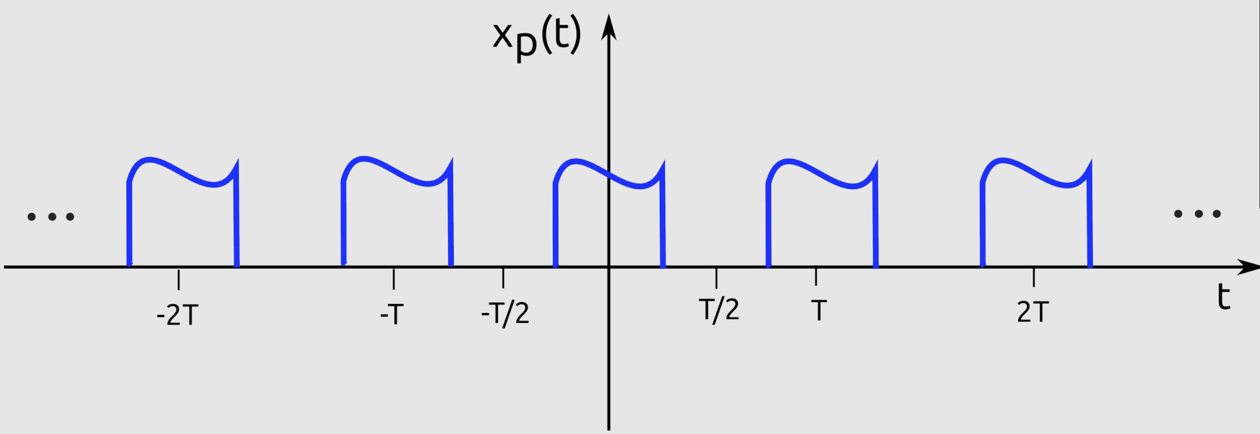
¿Cómo podemos extender la Serie de Fourier a señales no periódicas?

$$x_p(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

Señal periódica de periodo T $\qquad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x_p(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

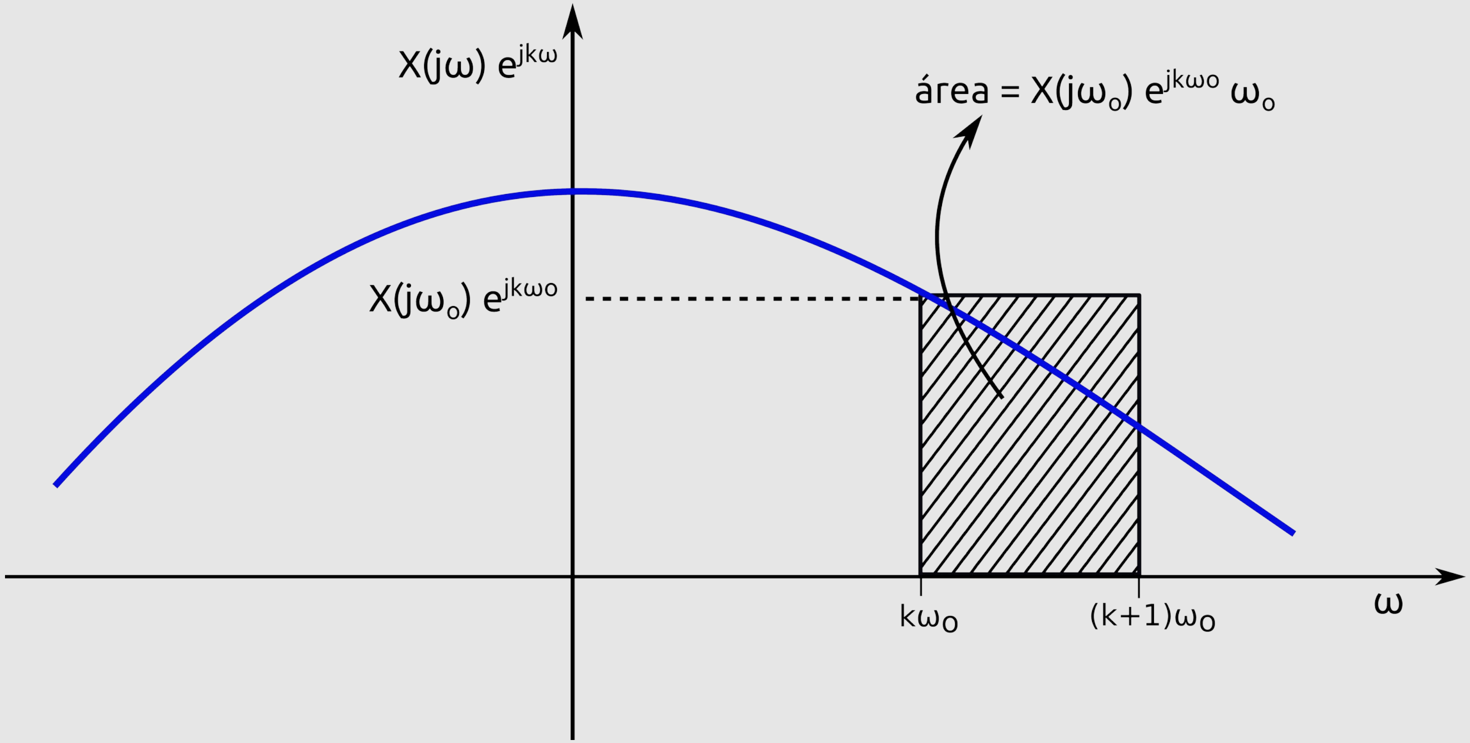


$$\boxed{X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt}$$

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x_p(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \qquad T \to \infty \qquad \omega_0 \to 0$$



$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

Si la señal es periódica

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Si la señal es no periódica

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Transformada Inversa de Fourier
Antitransformada de Fourier
Ecuación de síntesis

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt$$

Transformada Fourier
Integral de Fourier
Ecuación de análisis

La Transformada Inversa de Fourier representa la señal x(t) como combinación lineal de señales exponenciales complejas, la función X(jω)/2π da el valor del coeficiente espectral de la señal a cada valor de ω ya que mide la cantidad en que contribuye la exponencial compleja de frecuencia ω a la formación de la señal x(t).

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \qquad \mathcal{F}\{.\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} ...\, e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) \quad \leftarrow\ F\ \rightarrow \quad X(j\omega)$$

Espectro de la señal no periódica

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad\qquad X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$\dfrac{X(j\omega)}{2\pi}$ $\longrightarrow$ peso de la componente de frecuencia ω en la señal *x(t)*

Representación del espectro de x(t) $\longrightarrow$ $X(j\omega) \quad vs. \quad \omega$

Espectro de la señal no periódica

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad\qquad X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$\dfrac{X(j\omega)}{2\pi}$ → peso de la componente de frecuencia ω en la señal *x(t)*

Relación de Parseval

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega}$$

densidad de energía → $\rho(\omega) = \dfrac{|X(j\omega)|^2}{2\pi}$

Espectro de energía de x(t) → $\rho(\omega) \quad vs. \quad \omega$

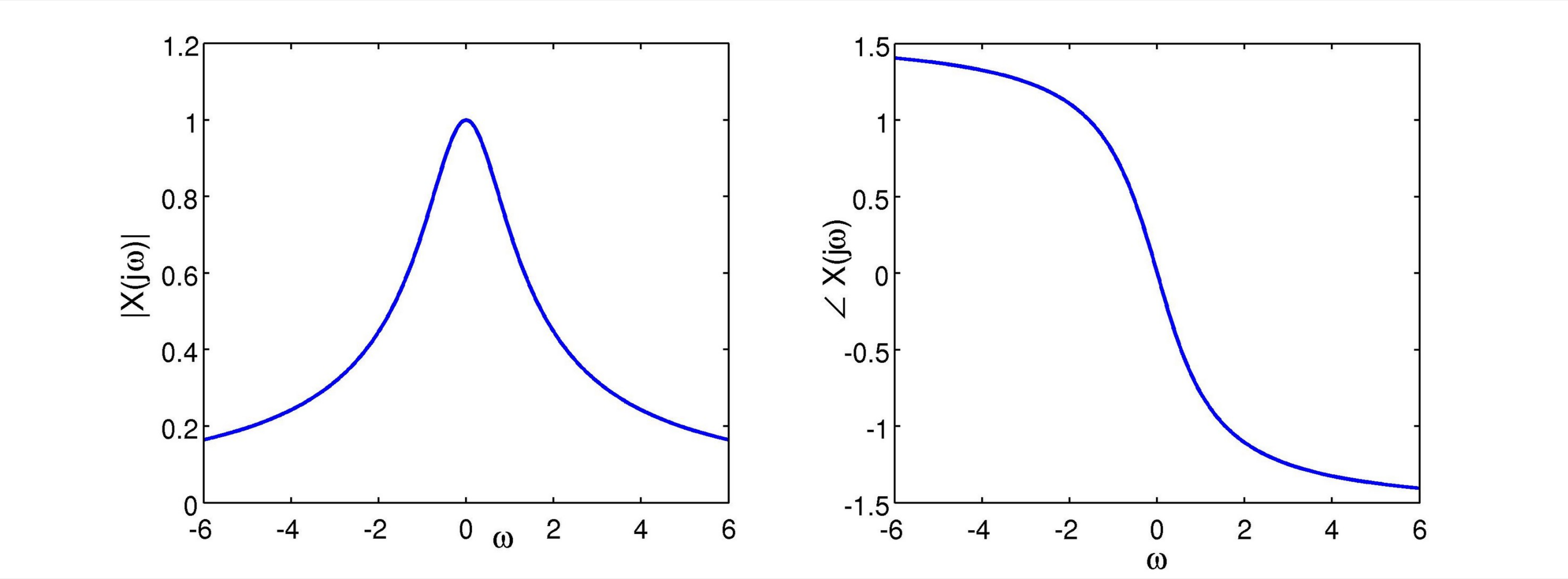
Ejemplo:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} \quad a > 0$$

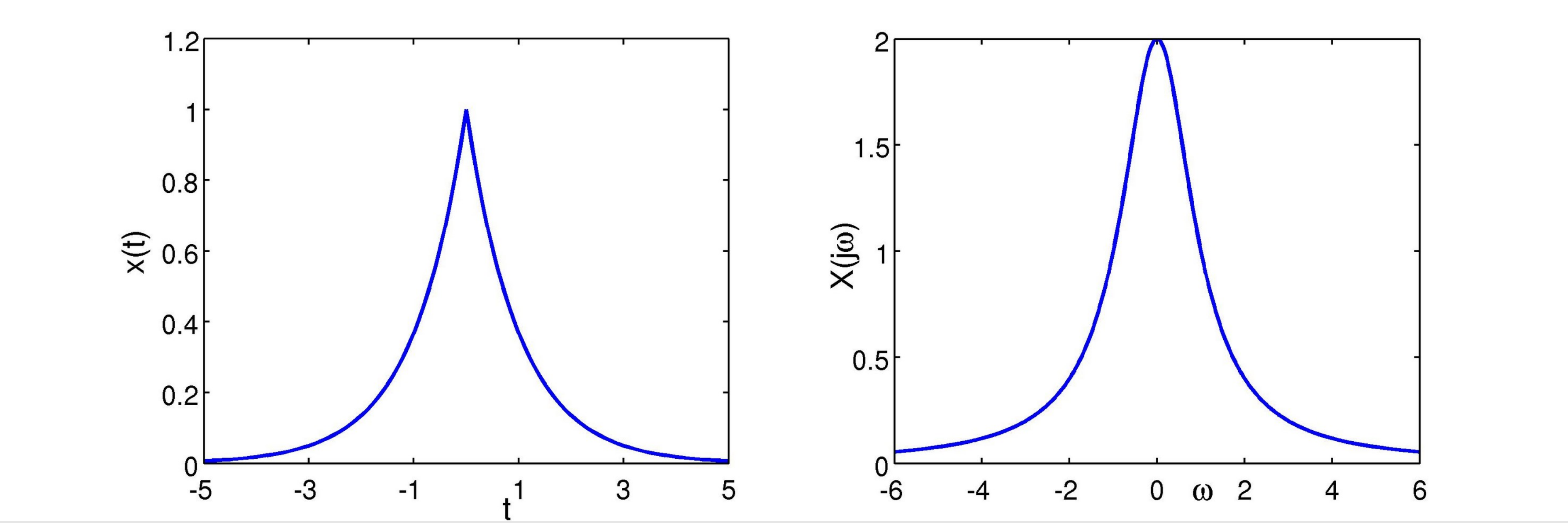
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad \angle X(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Ejemplo:

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



Condiciones de existencia de la Transformada de Fourier:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Si una señal *x(t)* cumple las siguientes tres condiciones, denominadas condiciones de Dirichlet, posee Transformada de Fourier:

- *x(t)* debe cumplir que $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \ < \ \infty$$
- *x(t)* tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito de t.
- *x(t)* tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito de t y cada una de esta discontinuidades es finita.

Condición alternativa $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \ < \ \infty$$

Es posible y útil utilizar la representación de la transformada de Fourier para señales que no cumplen con las condiciones de convergencia, como por ejemplo señales periódicas o la señal escalón u(t), si utilizamos funciones impulso δ(ω) en la transformada.

Transformada de un impulso

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad\qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

$$\boxed{x(t) = \delta(t) \quad \leftarrow \quad F \quad \rightarrow \quad 1}$$

¿significado?

Transformada de un pulso cuadrado

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad\qquad x(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

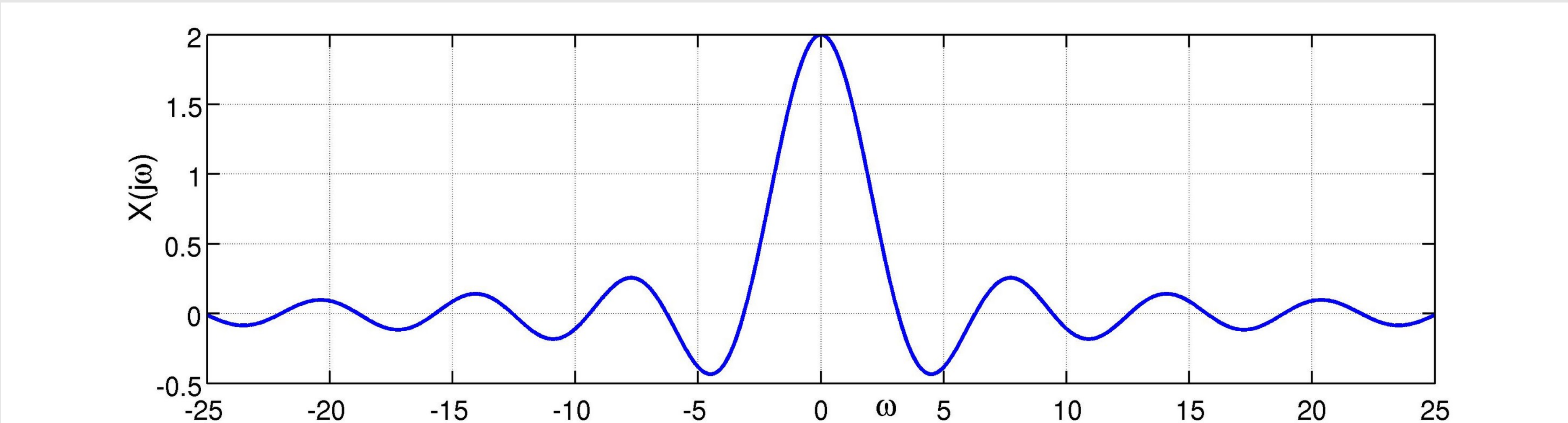
$$X(j\omega) \;=\; \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}\, dt \;=\; 2\,\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

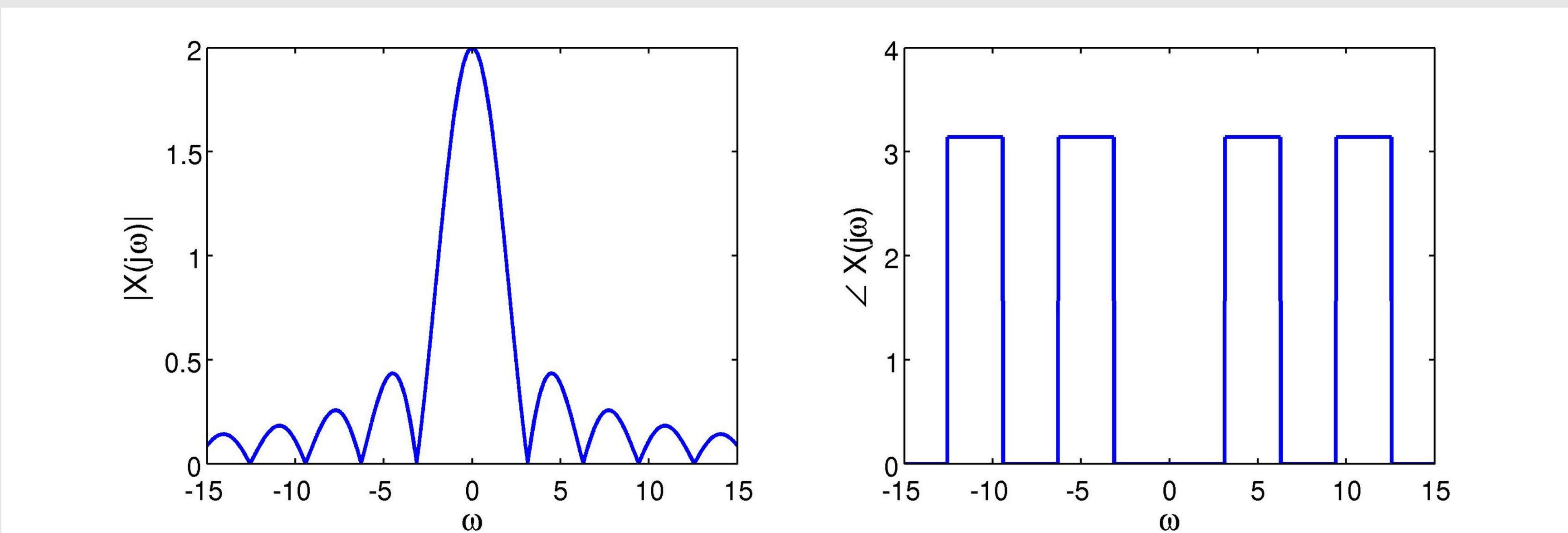
$$X(j\omega) \;=\; 2T_1 \quad \text{para} \quad \omega = 0$$

$$\boxed{x(t) \;=\; \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad \leftarrow \quad F \quad \rightarrow \quad X(j\omega) \;=\; 2\,\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}}$$

Ejemplo:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \qquad\qquad X(j\omega) = 2\,\frac{\operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$





Antitransformada de un pulso cuadrado en frecuencias

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad\qquad x(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \color{red}{X(j\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega t}\, d\omega \;=\; \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

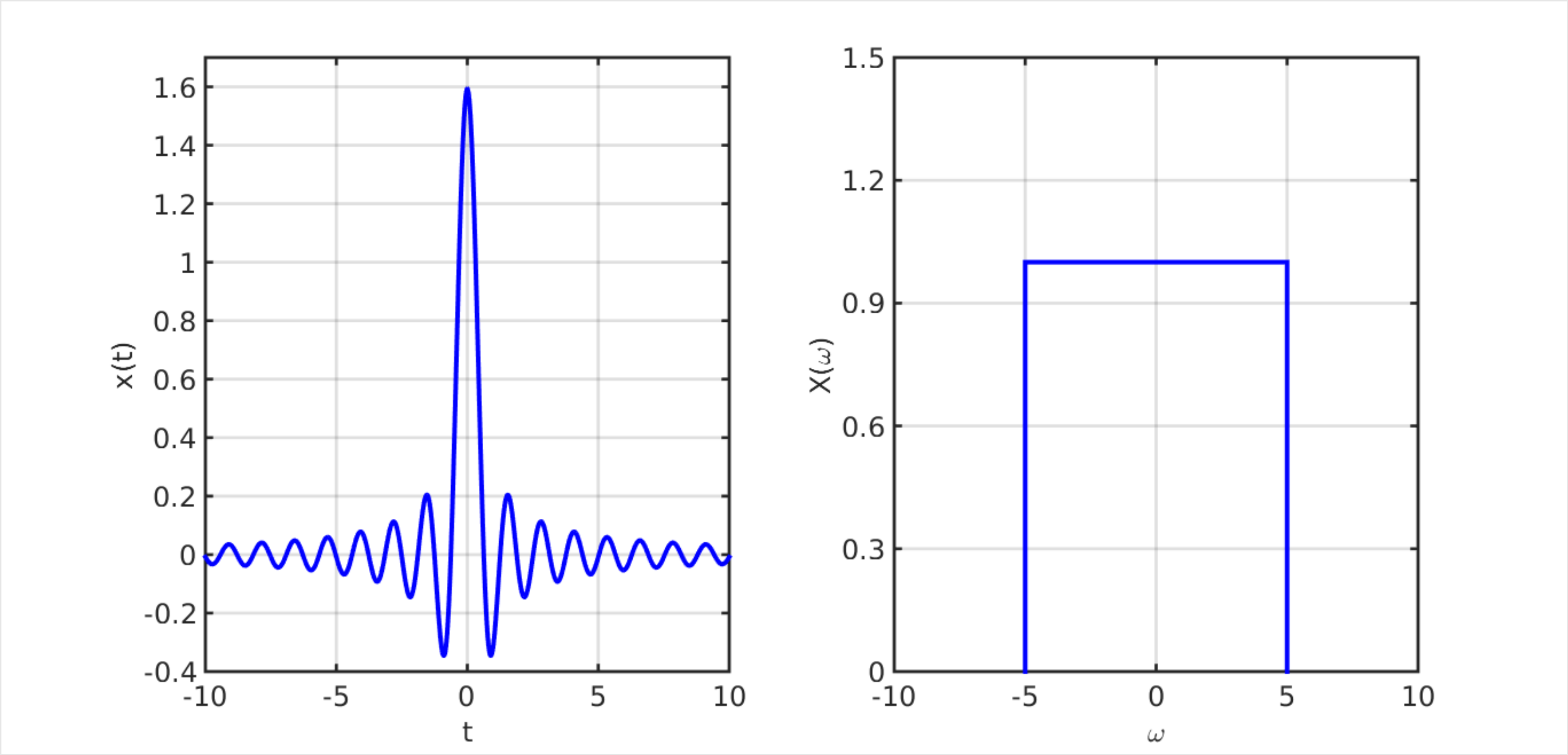
$$t = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} d\omega \;=\; \frac{W}{\pi}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad \leftarrow \quad F \quad \rightarrow \quad x(t) \;=\; \frac{\sin(Wt)}{\pi t}}$$

Ejemplo:

$$x(t) = \frac{sen(Wt)}{\pi t} \qquad X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

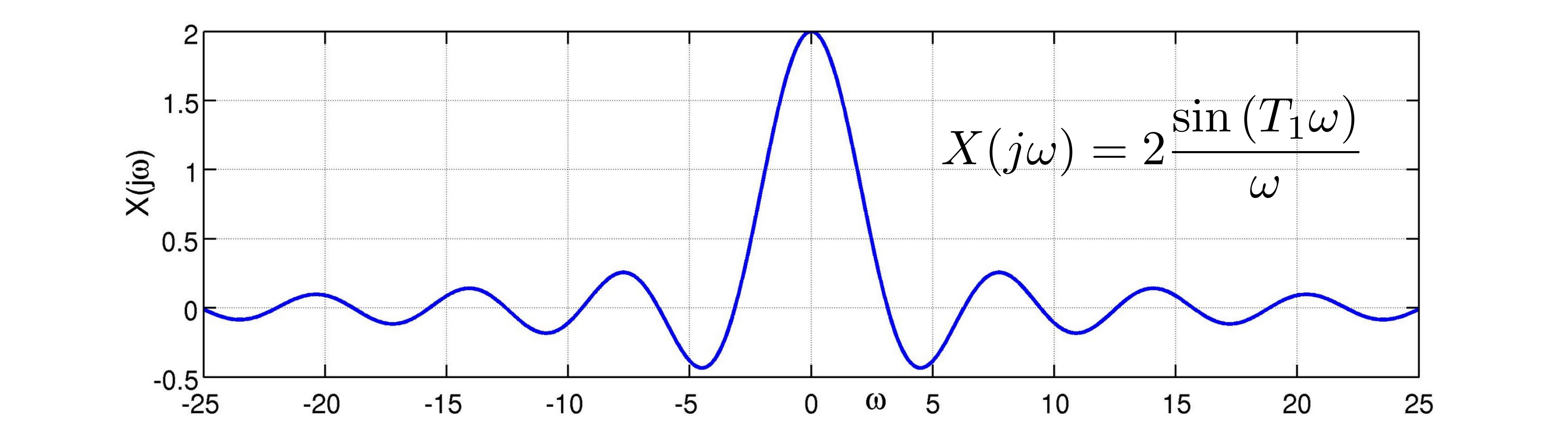
$$x(t) = \frac{sen(5t)}{\pi t} \qquad X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 5 \\ 0 & |\omega| > 5 \end{cases}$$

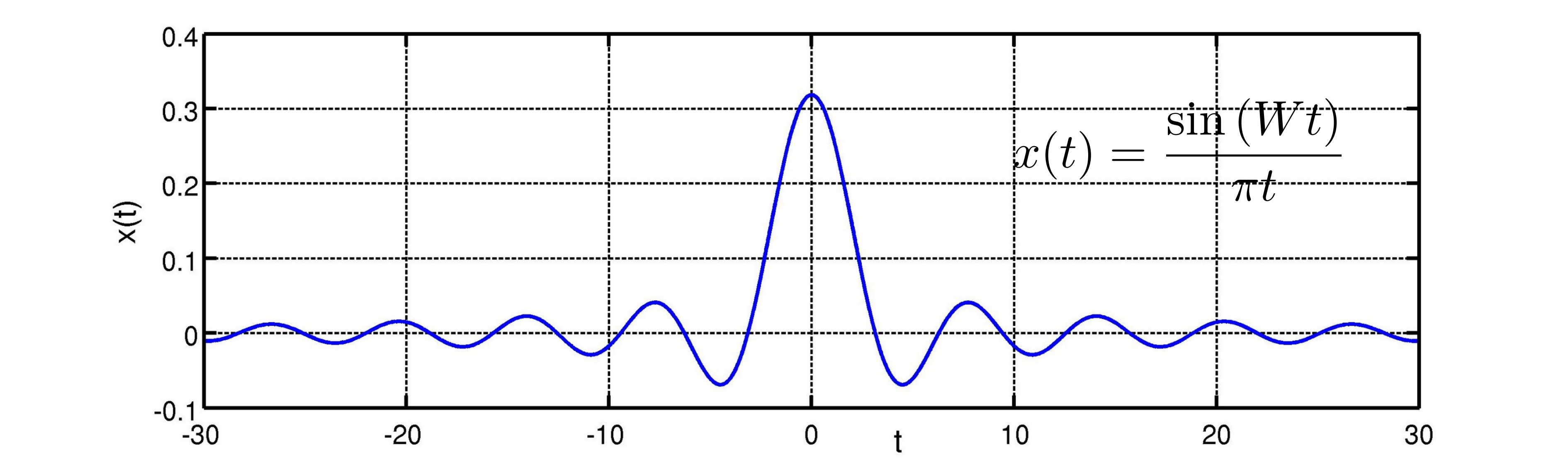


$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad \longleftarrow \quad F \quad \longrightarrow \quad X(j\omega) = 2\,\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \quad \longleftarrow \quad F \quad \longrightarrow \quad X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

$$x(t) = u(t - T_1) - u(t + T_1)$$

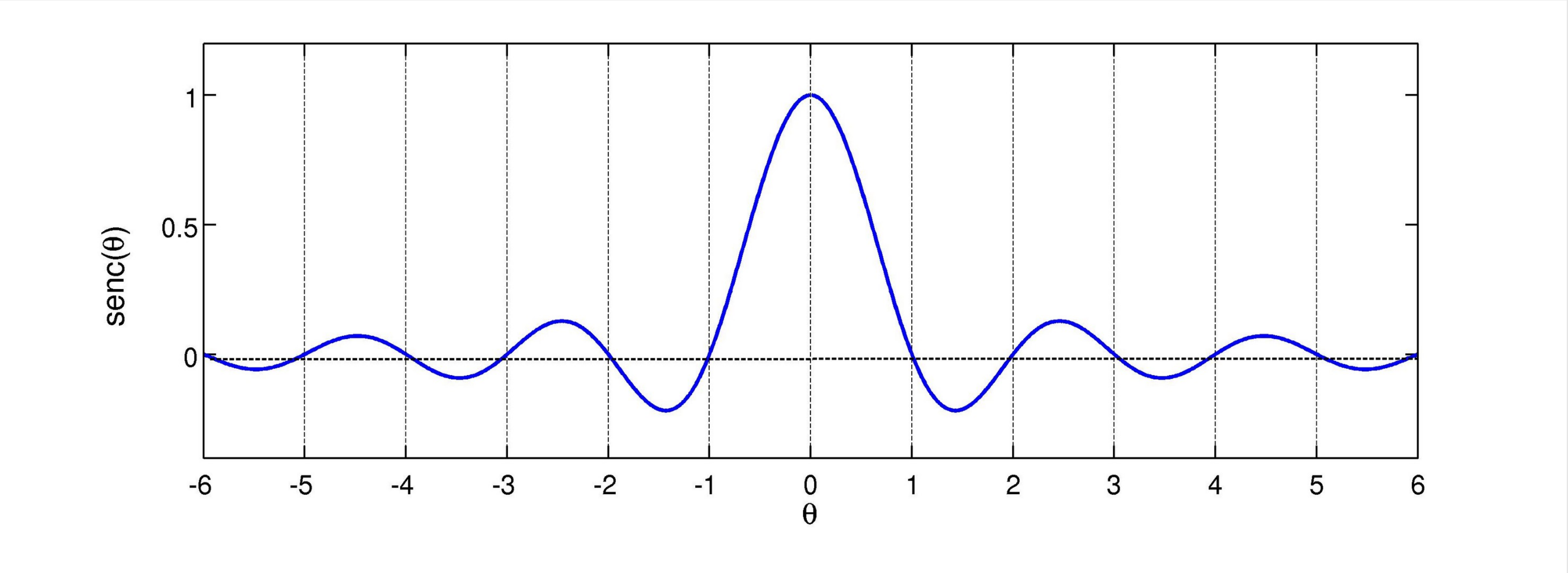




$$X(j\omega) = u(\omega - W) - u(\omega + W)$$

La función seno cardinal:

$$senc(\theta) \equiv \frac{sen(\pi\theta)}{\pi\theta}$$



$$X(j\omega) = 2\frac{sen(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 senc\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$x(t) = \frac{sen(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} sinc\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

Ejemplo: cálculo de la antitransformada de un impulso en frecuencias

$$X(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad\qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \;\; \leftarrow \;\mathcal{F}\; \rightarrow \;\; 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

Tabla 1: Pares básicos de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la Serie de Fourier
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1=1,\ \ a_k=0,\ k\neq 1$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\omega-\omega_0)$	a_k
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$, $a_k=0\ k\neq 1,\ -1$
$\mathrm{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2j}$, $a_k=0\ k\neq 1,\ -1$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0=1,\ a_k=0,\ k\neq 0$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k=\frac{1}{T}\,\forall\, k$
$u(t+T_1)-u(t-T_1)$	$\frac{2\mathrm{sen}(\omega T_1)}{\omega}$	-
$\frac{\mathrm{sen}(Wt)}{\pi t}$	$u(\omega+W)-u(\omega-W)$	-
$\delta(t)$	1	-
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	-
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega_0 t}$	-
$e^{-at}u(t),\ \mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	-
$te^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	-
$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	-

Transformada de Fourier de señales periódicas:

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \;\; \leftarrow \;\mathcal{F}\; \rightarrow \;\; 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \mathcal{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \mathcal{F}\left\{ e^{jk\omega_0 t} \right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\,\pi\, a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)
\end{aligned}$$

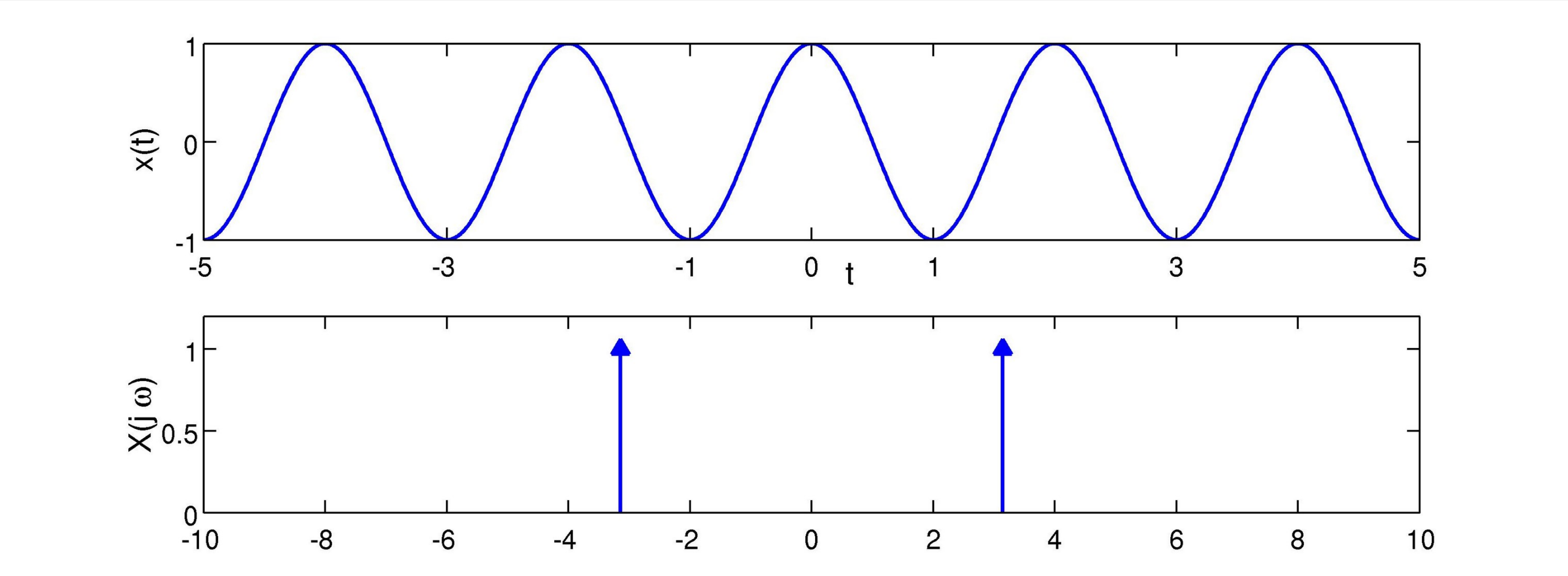
$$\begin{tikzcd}
\{a_k\} \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{SF}"] & x(t) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \\
 & \text{periódica} &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo:

$$\boxed{X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

$$x(t) = cos(\pi t) = \frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2} \qquad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \pi) + \pi\delta(\omega + \pi)$$



$$x(t) = cos(\omega t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Ejemplo:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2. \end{cases} \quad \xleftrightarrow{SF} \quad a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

$$\boxed{p(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2. \end{cases} \quad \xleftrightarrow{F} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega - k\omega_0)}$$

Ejemplo:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad \xleftrightarrow{SF} \quad a_k = \frac{1}{T}$$

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad \xleftrightarrow{F} \quad \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)}$$

Tabla 1: Pares básicos de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la Serie de Fourier
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1=1,\ \ a_k=0,\ k\neq 1$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\omega-\omega_0)$	a_k
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$, $a_k=0\ k\neq 1,\ -1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2j}$, $a_k=0\ k\neq 1,\ -1$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0=1,\ a_k=0,\ k\neq 0$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k=\frac{1}{T}\,\forall\,k$
$u(t+T_1)-u(t-T_1)$	$\frac{2\operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$	-
$\frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t}$	$u(\omega+W)-u(\omega-W)$	-
$\delta(t)$	1	-
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	-
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega_0 t}$	-
$e^{-at}u(t),\ \mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	-
$te^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	-
$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	-

Propiedades de la Transformada de Fourier:

Tabla 1: Propiedades de la Transformada de Fourier continua

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier
Linealidad	$a\,x(t) + by(t)$	$a\,X(j\omega) + b\,Y(j\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencias	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Convolución en el tiempo	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Multiplicación en el tiempo	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$
Escalamiento en tiempo y frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Señal real	$x(t) = x^*(t)$	$\|X(j\omega)\| = \|X(-j\omega)\|$ $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$

Ejemplo: aplicación de la propiedad de desplazamiento temporal

$$x(t) = 3e^{-2(t-1)}u(t-1)$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$\boxed{x(t - t_0) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{3}{2 + j\omega}e^{-j\omega}}$$

Propiedad de integración

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \quad \leftarrow F \rightarrow \quad \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)}$$

Ejemplo: cálculo de la transformada de u(t)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad\qquad F\left\{\delta(t)\right\} = 1$$

$$F\left\{u(t)\right\} = F\left\{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\boxed{u(t) \quad \leftarrow F \rightarrow \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)}$$

Propiedad de convolución:

$$\boxed{x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) \quad \leftarrow \; F \; \rightarrow \quad X_3(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega)}$$

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \quad \leftarrow \; F \; \rightarrow \quad Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)}$$

$$\boxed{H(j\omega) = F\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt}$$

La Función Respuesta en Frecuencia es la Transformada de Fourier de la Respuesta al Impulso.

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \;\; \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \;\; Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)}$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad x(t-t_0) \;\; \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow \;\; e^{-j\omega_o t}X(j\omega)$$

$$x(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{X(j\omega)e^{-j\omega\tau}\right\} e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, X(j\omega)\, e^{-j\omega\tau} \;\; e^{j\omega t}\, d\omega\, d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{H(j\omega)}\right\} e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \boxed{Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)}$$

Ejemplo: respuesta en frecuencia de filtro pasa bajos continuo ideal

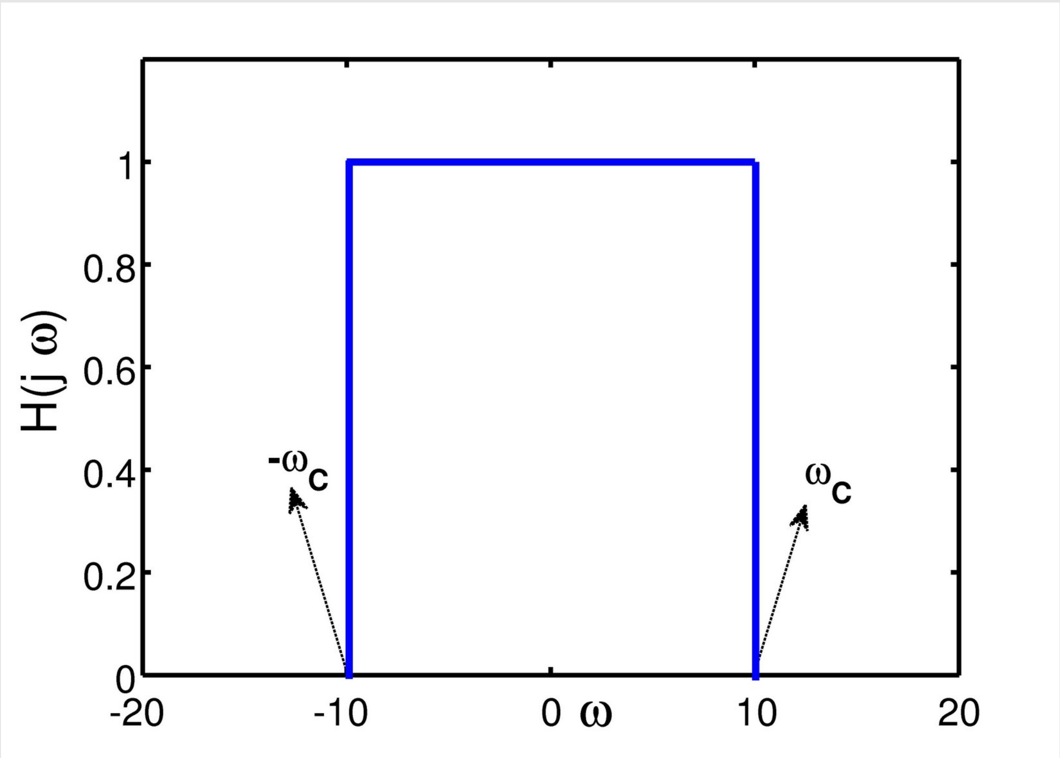
$$H(j\omega) = F\left\{h(t)\right\}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$h(t) = F^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}$$

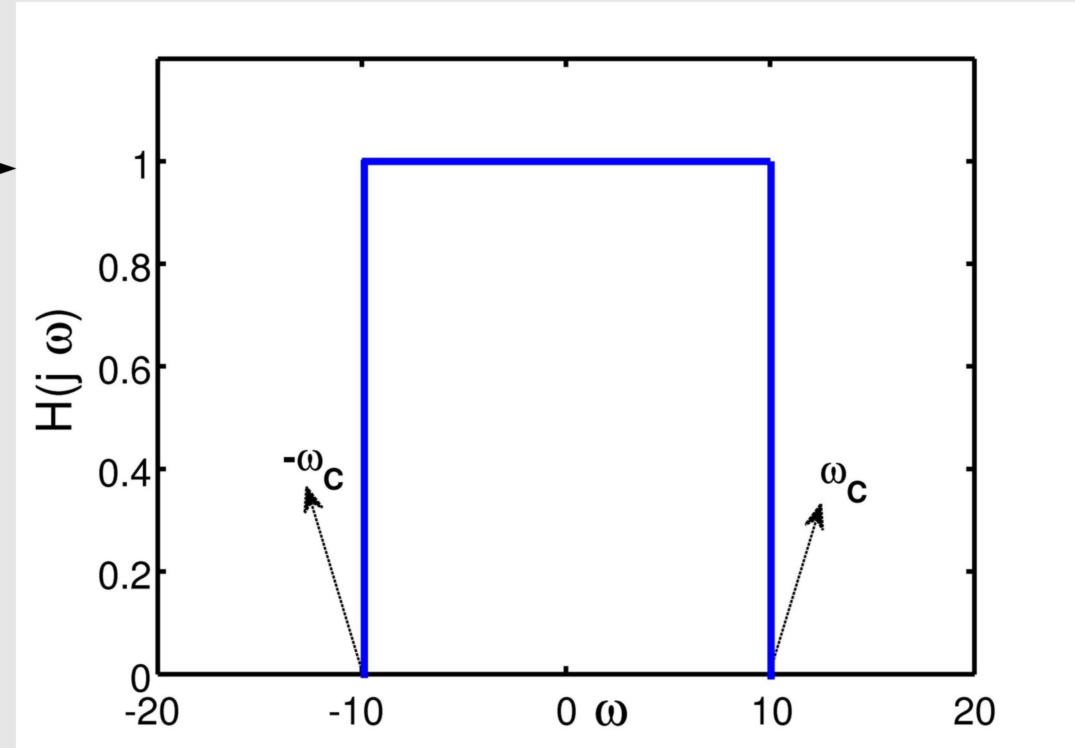
$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\omega_c t)}{\pi t}$$



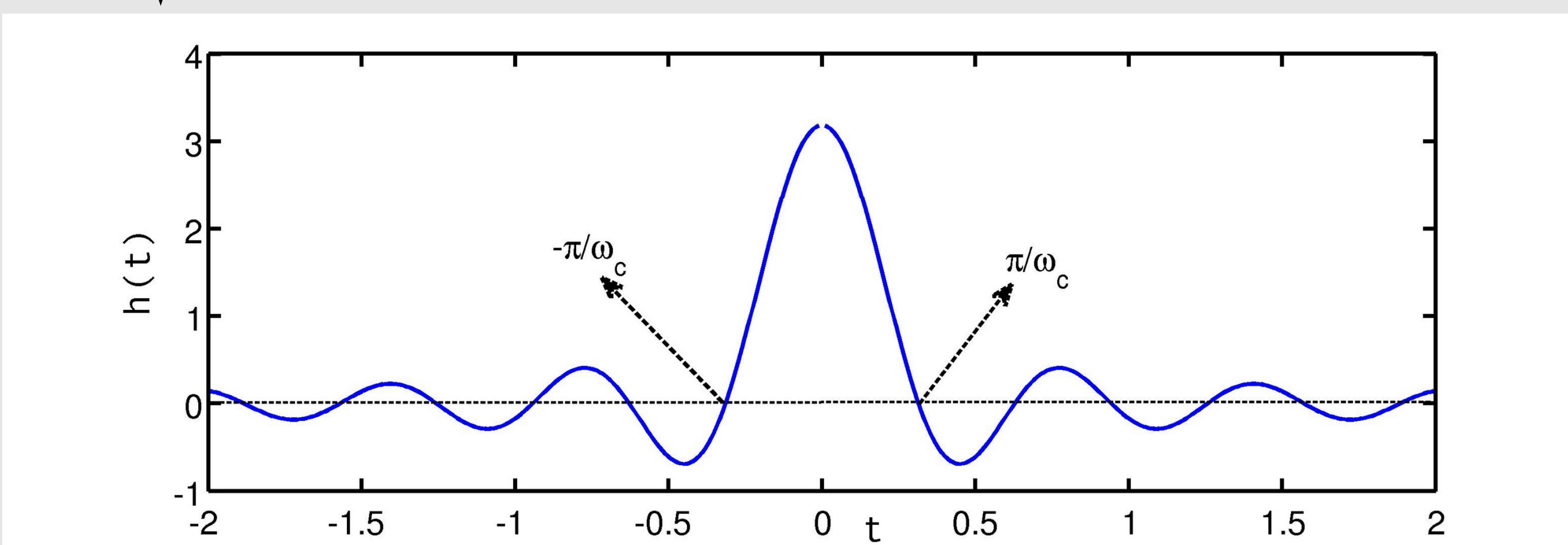
$$\boxed{h(t) = \frac{\operatorname{sen}(\omega_c t)}{\pi t}}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



$$H(j\omega) \leftarrow \ F \ \rightarrow h(t)$$

$$h(t) = \frac{\mathrm{sen}(\omega_c t)}{\pi t}$$



¿Cuándo es posible calcular la respuesta en frecuencias del sistema?

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\left\{h(t)\right\}$$

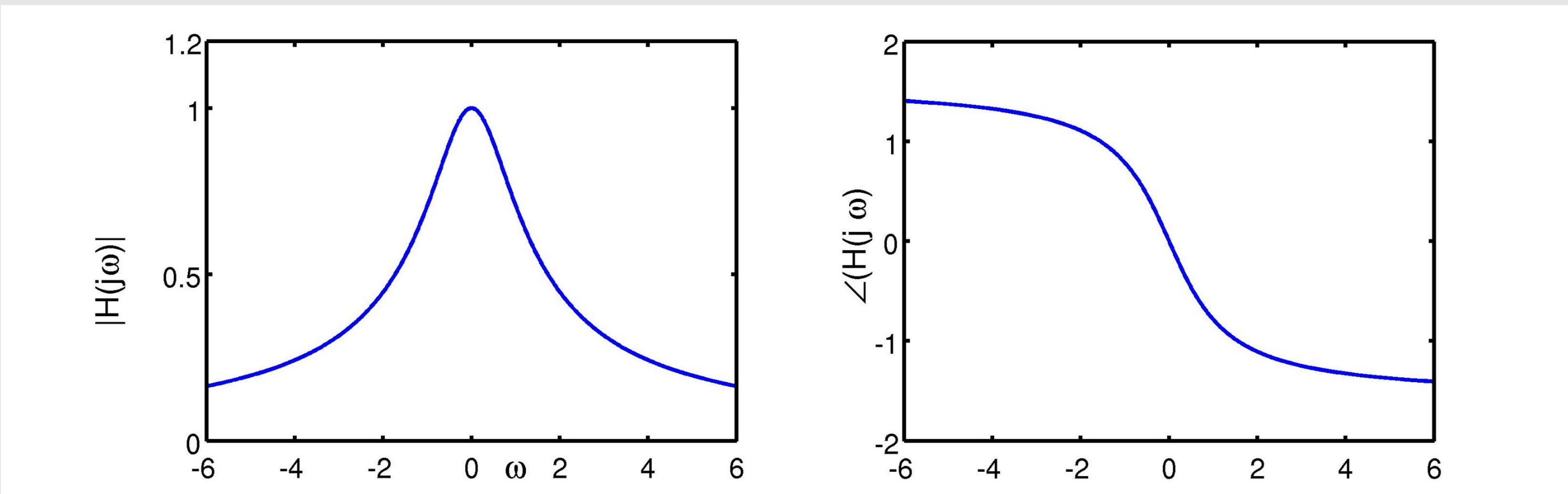
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty}$$

Si bien la condiciones sobre el número de máximos, mínimos y discontinuidades son cumplidas por todas la señales *h(t)* de sistemas LTI de interés práctico, la condición expresada en la última integral no es cumplida por todos los sistema LTI. Solo los sistemas LTI BIBO estables cumplen con esta condición, por lo que podemos asegurar que si el sistema es BIBO estable, existe su función respuesta en frecuencias *H(jω)*.

Ejemplo:

$$h(t) = e^{-at}u(t) \;\leftarrow F \rightarrow\; H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

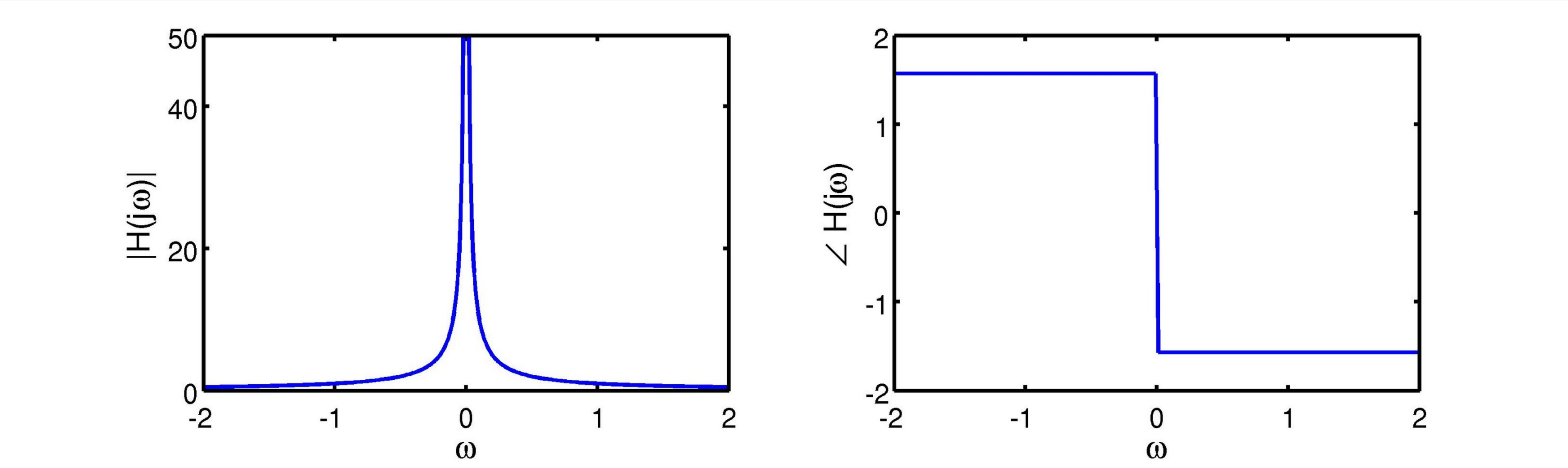
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad \angle H(j\omega) = -arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Ejemplo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad\qquad F\left\{\delta(t)\right\} = 1$$

$$\boxed{h(t) = u(t) \quad \leftarrow F \rightarrow \quad X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)}$$



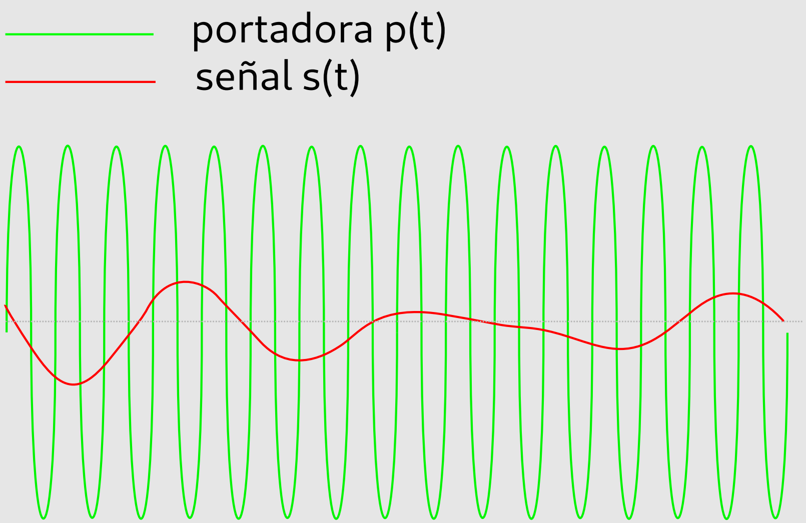
Propiedad de multiplicación o modulación:

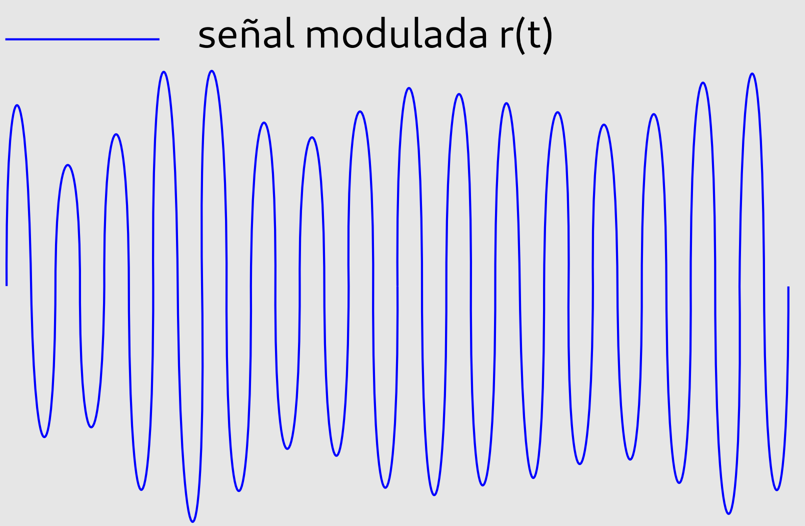
$$\boxed{x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \;\leftarrow\; F \;\rightarrow\; X_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)}$$

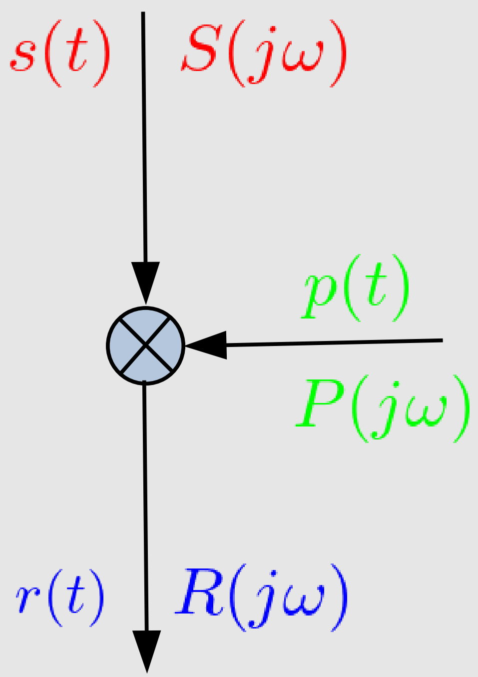
$$X_1(j\omega) * X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta)X_2(j(\omega-\theta))d\theta$$

Aplicación: la modulación de una señal

$$\boxed{r(t) = s(t)p(t) \leftarrow F \rightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)}$$





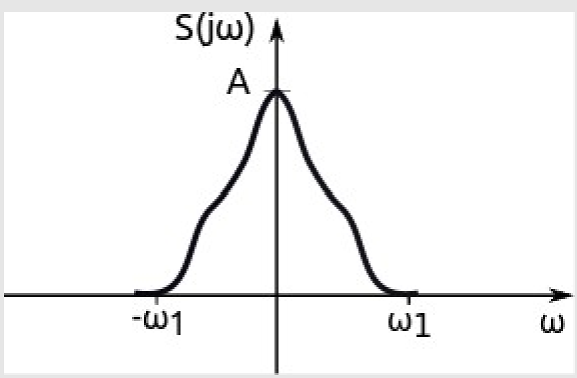


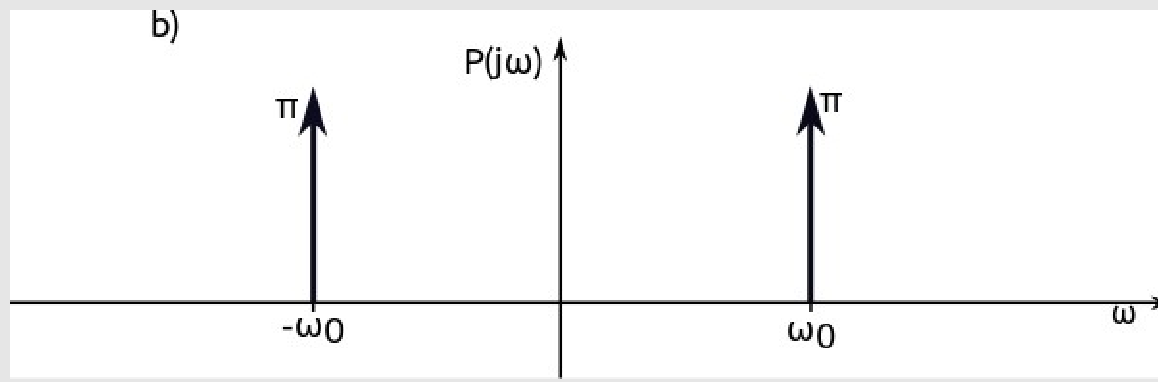
Ejemplo:

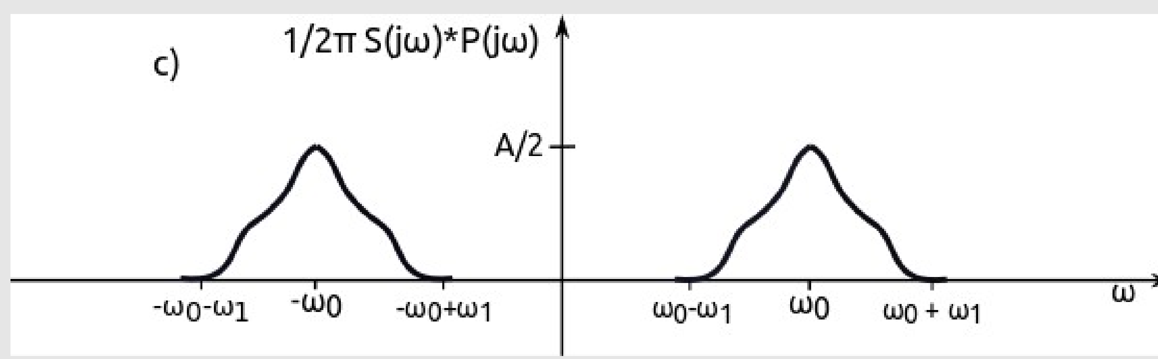
$$\boxed{r(t) = s(t)p(t) \;\leftarrow\; F \;\rightarrow\; R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)}$$

$$p(t) = cos(\omega_0 t) \;\leftarrow F \rightarrow\; P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * (\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta(\theta - \omega_0) + \delta(\theta + \omega_0)\} S(j(\omega - \theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(S(j(\omega - \omega_0) + S(j(\omega + \omega_0)) \right)) \end{aligned}$$



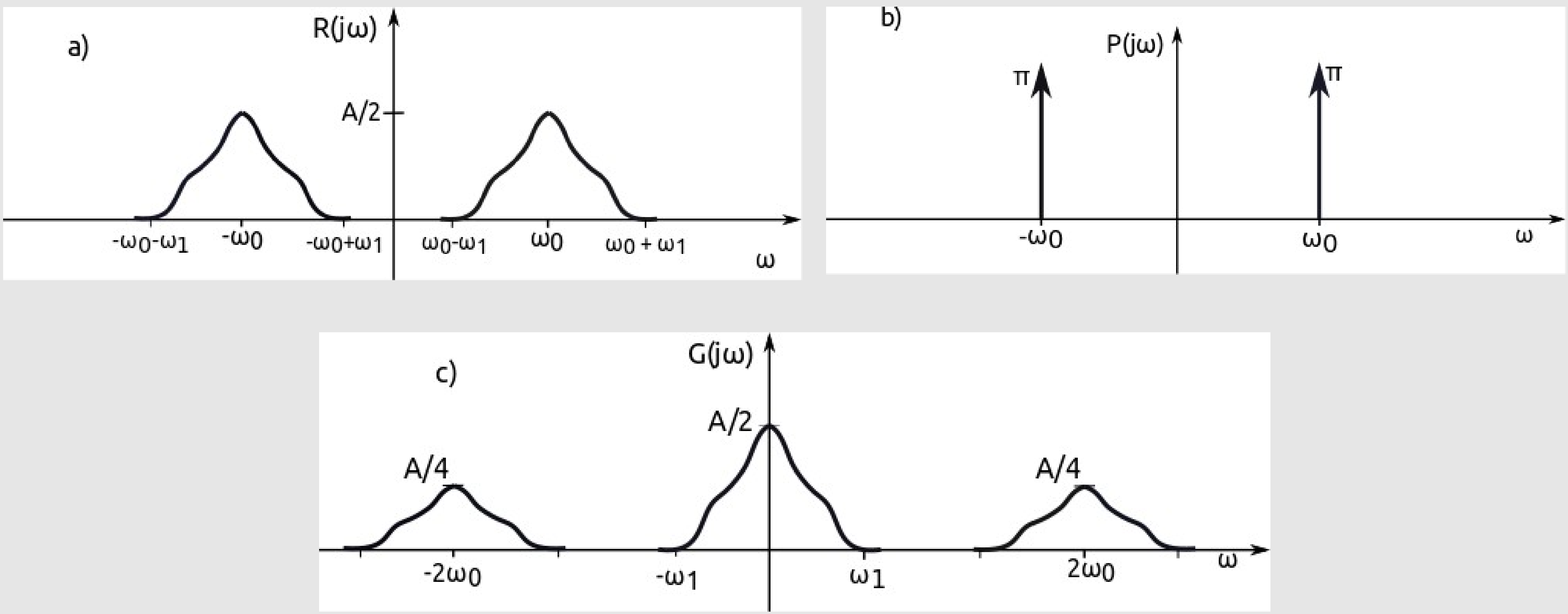




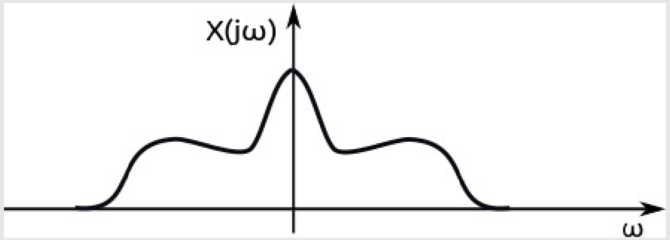
Ejemplo:

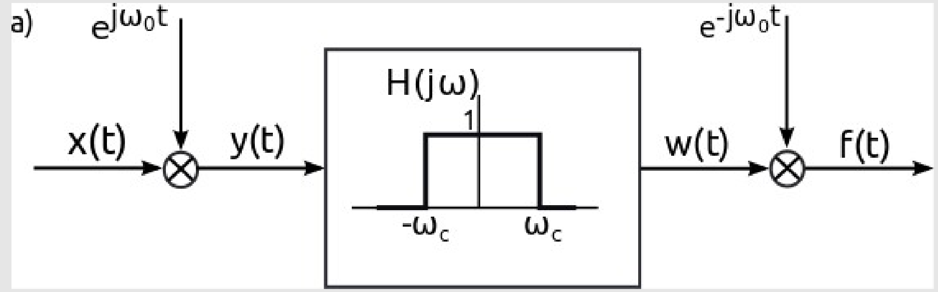
$$g(t) = r(t)p(t) \qquad p(t) = cos(\omega_0 t) \leftarrow F \rightarrow P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * (\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)) \\ &= \frac{1}{2} \left(R(j(\omega - \omega_0) + R(j(\omega + \omega_0)))\right) \end{aligned}$$



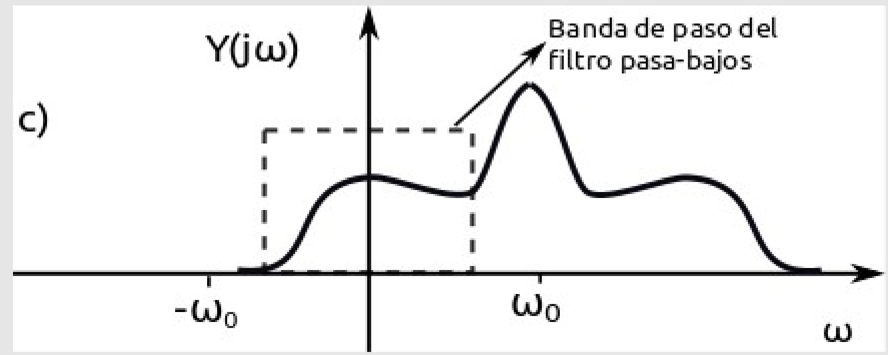
Ejemplo: filtro pasabanda



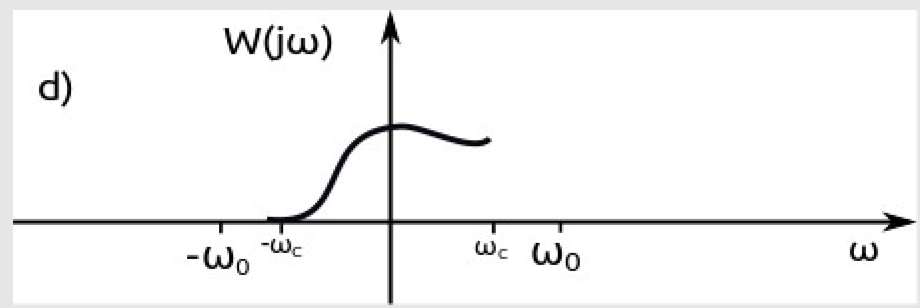


$$y(t) = e^{j\omega_0 t}x(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_0))$$

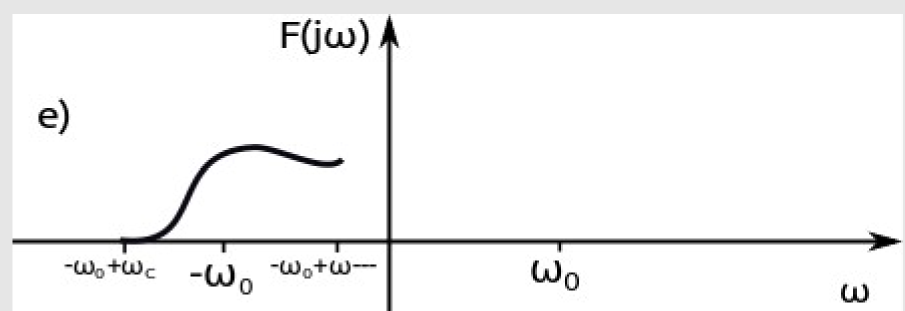


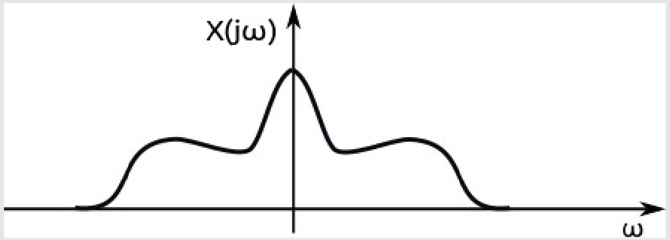
$$W(j\omega) = H_{lp}(j\omega)Y(j\omega)$$
$$= H_{lp}(j\omega)X(j(\omega - \omega_0))$$

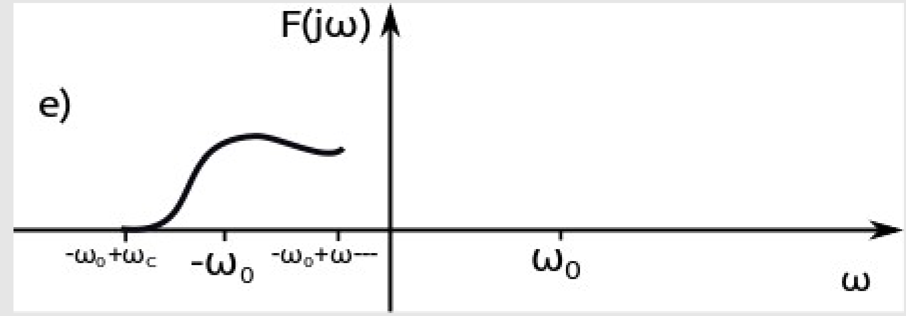


$$f(t) = e^{-j\omega_0 t}w(t).$$

$$F(j\omega) = W(j(\omega + \omega_0))$$
$$= H(j(\omega + \omega_0))X(j(\omega))$$





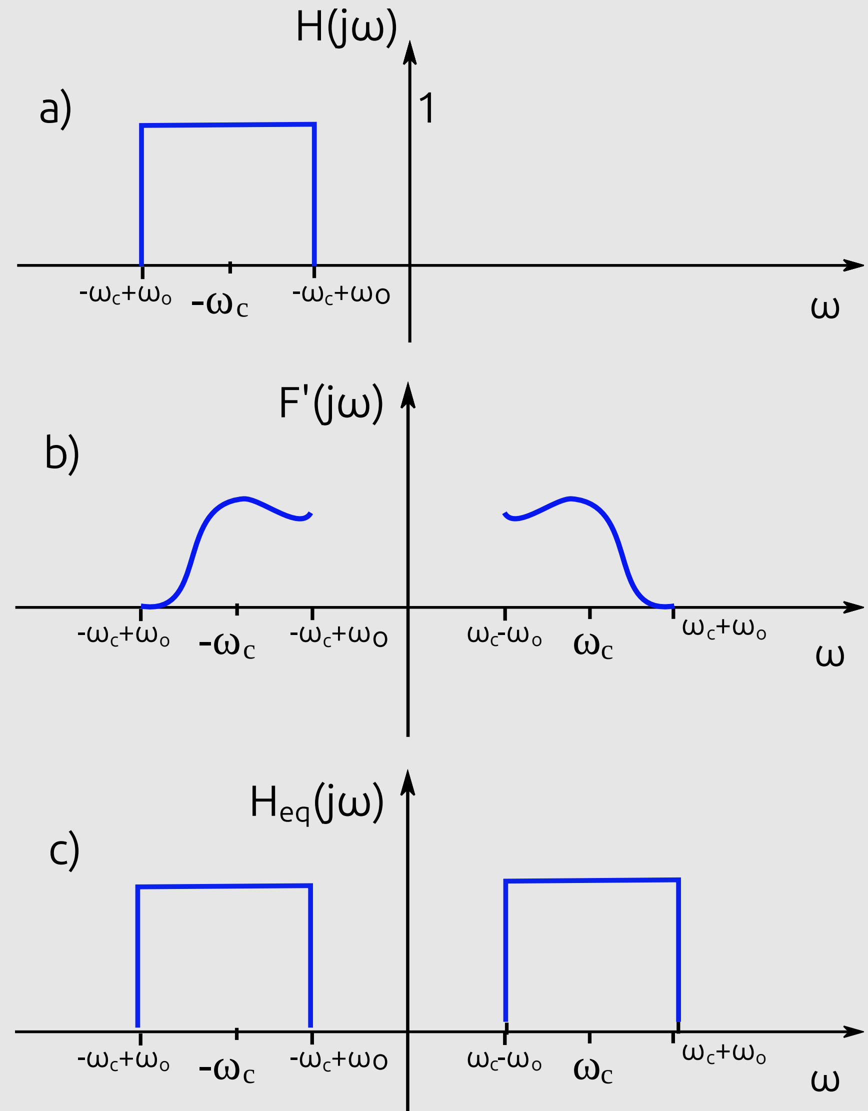


$$F(j\omega) \;=\; H(j\omega)\, X(j\omega)$$

$$Re\{f(t)\} = \frac{1}{2}\,(f(t) + f(t)^*)$$

$$\Rightarrow F'(j\omega) = \mathcal{F}\,\{Re\{f(t)\}\}$$

$$= \frac{1}{2}\,(F(j\omega) + F(-j\omega)^*)$$



Sistemas LTI causales descriptos por ecuaciones diferenciales

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad + \ \text{reposo inicial}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

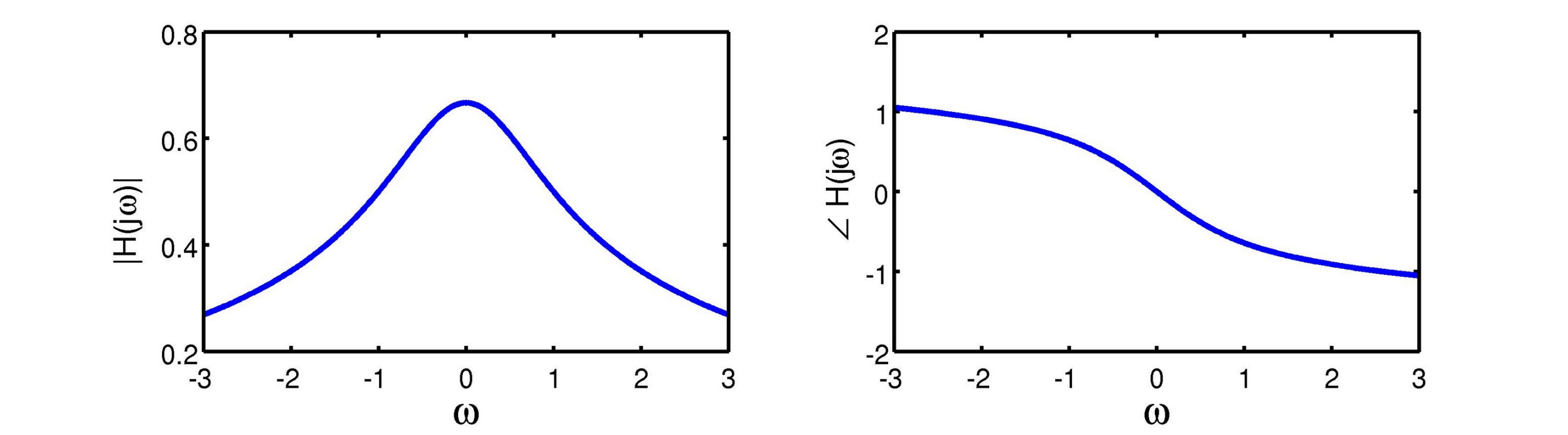
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

Ejemplo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$



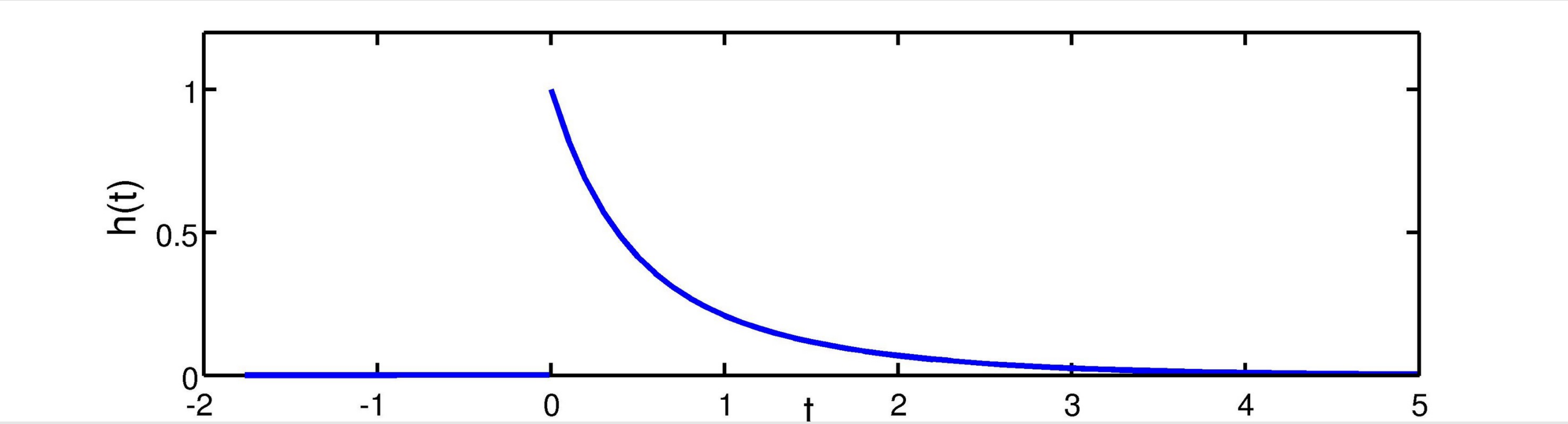
$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

raíces del denominador (polos) $= -1, \quad -3$

residuos $= 0.5, \quad 0.5$

$$H(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{1/2}{j\omega + 3} \qquad e^{-at}u(t) \leftarrow F \rightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

$$h(t) = F^{-1}\left\{H(j\omega)\right\} \Longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$



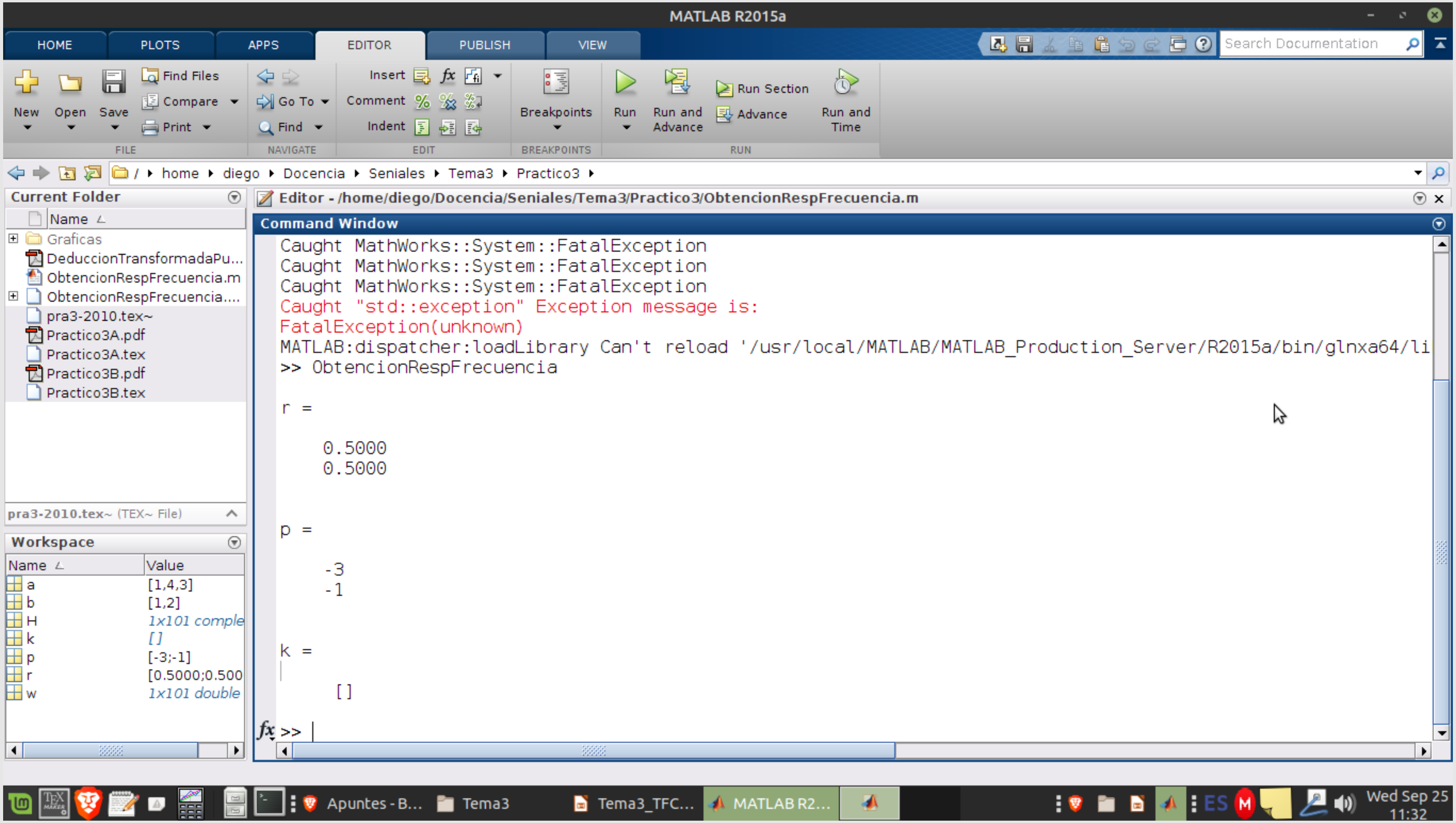
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \qquad H(j\omega) = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

Editor - /home/diego/Docencia/Seniales2016/Tema3/practico3/ObencionRespFrecuencia.m*

```
% fracciones parciales para antitransformar.

% Gráfica de H(jw)

w=[-5:0.1:5];
H=(2+j*w)./((j*w).^2+4*(j*w)+3);

subplot(2,1,1),
plot(w,abs(H)),
grid on,
xlabel('\omega','Interpreter','tex','FontSize',18,'FontName','Arial')
ylabel('H(\omega)','Interpreter','tex','FontSize',18,'FontName','Arial');

subplot(2,1,2);
plot(w,angle(H));
grid on,
xlabel('\omega','Interpreter','tex','FontSize',18,'FontName','Arial')
ylabel('\angle H(\omega)','Interpreter','tex','FontSize',18,'FontName','Arial');


% expansión en fracciones parciales

b=[1, 2]; % coeficientes del polinomio numerador
a=[1, 4, 3]; % coeficientes del polinomio denominador
[r, p, k]=residue(b,a);
```

script | Ln 35 | Col 1

$$H(j\omega) = \frac{r[1]}{j\omega - p[1]} + \frac{r[2]}{j\omega - p[2]} + ... + k[m] + k[m-1](j\omega) + k[m-2](j\omega)^2 + ...$$



$$H(j\omega) = \frac{r[1]}{j\omega - p[1]} + \frac{r[2]}{j\omega - p[2]} + ... + k[m] + k[m-1](j\omega) + k[m-2](j\omega)^2 + ...$$

Importante!!

Siempre se puede calcular la Respuesta en Frecuencia de un sistema LTI descripto por una ecuación diferencial lineal mediante:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Longrightarrow H(j\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

Sólo es válido el cálculo de la salida mediante:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega) \Longrightarrow y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}$$

cuando las C.I. son todas nulas, ya que de otra manera el sistema no es LTI (ni causal).

Podemos calcular la Respuesta al Impulso a partir de:

$$h(t)=F\{H(j\omega)\}$$

h(t) se corresponde a un sistema LTI descripto por la ec. diferencial con todas las condiciones iniciales nulas..