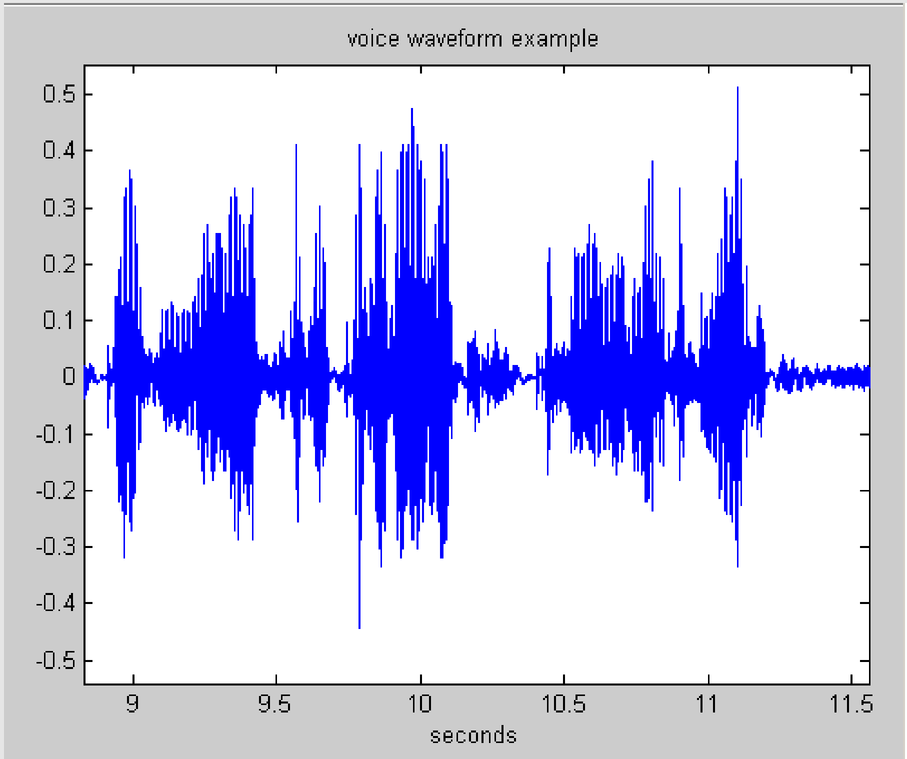
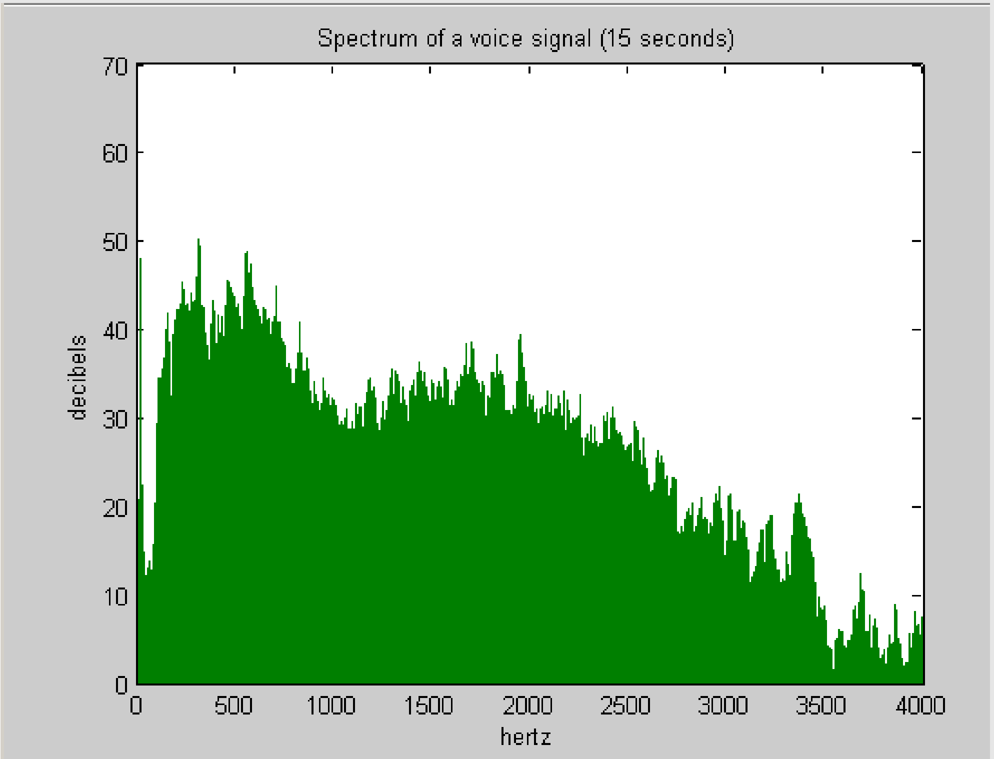
Representación de señales y sistemas continuos en el dominio de la frecuencia
Series de Fourier continua

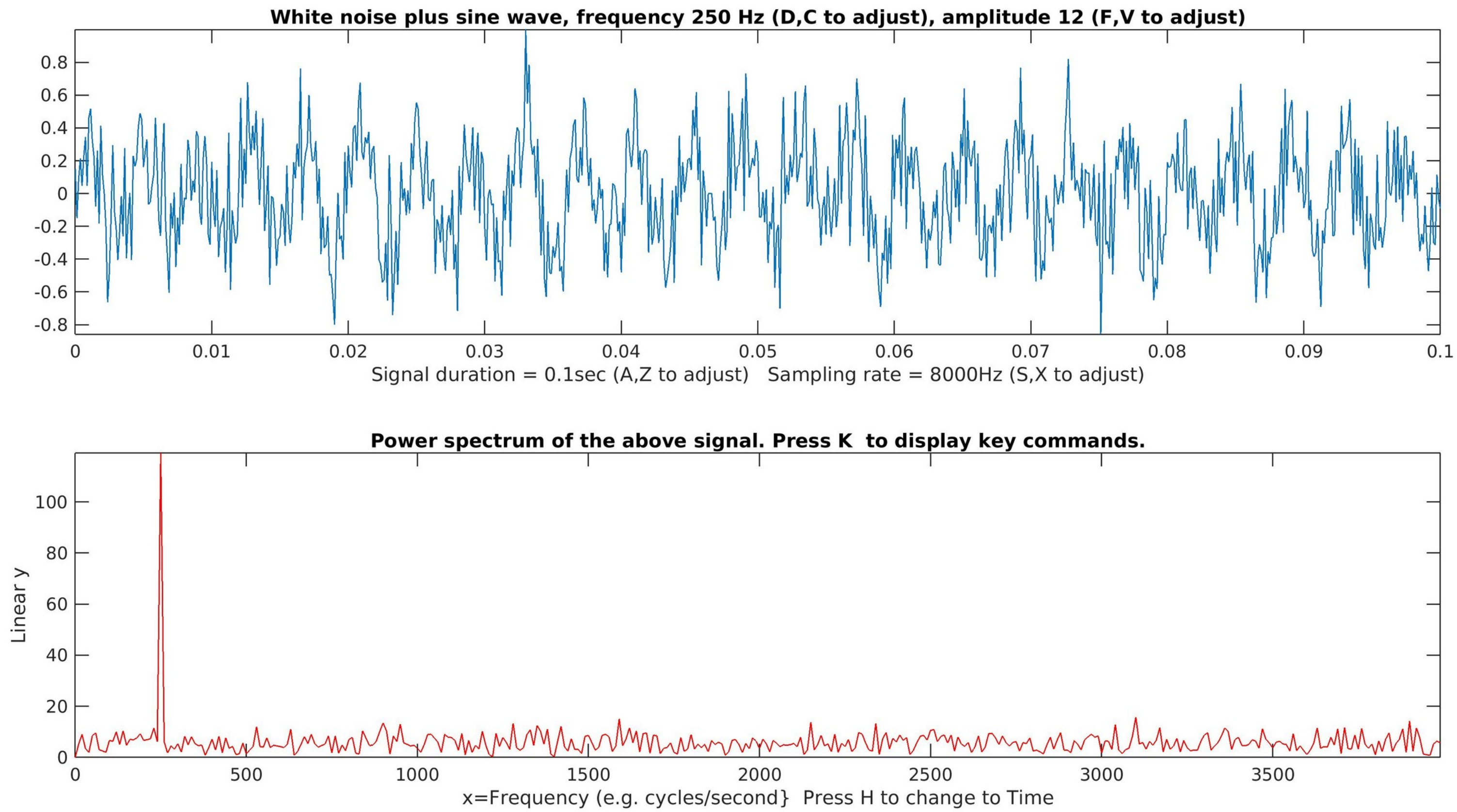
© Diego L. Valladares

La presentaciones de Señales y Sistemas poseen una licencia
de tipo *Creative Commons Reconocimiento-NoComercial
4.0 Internacional License* (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

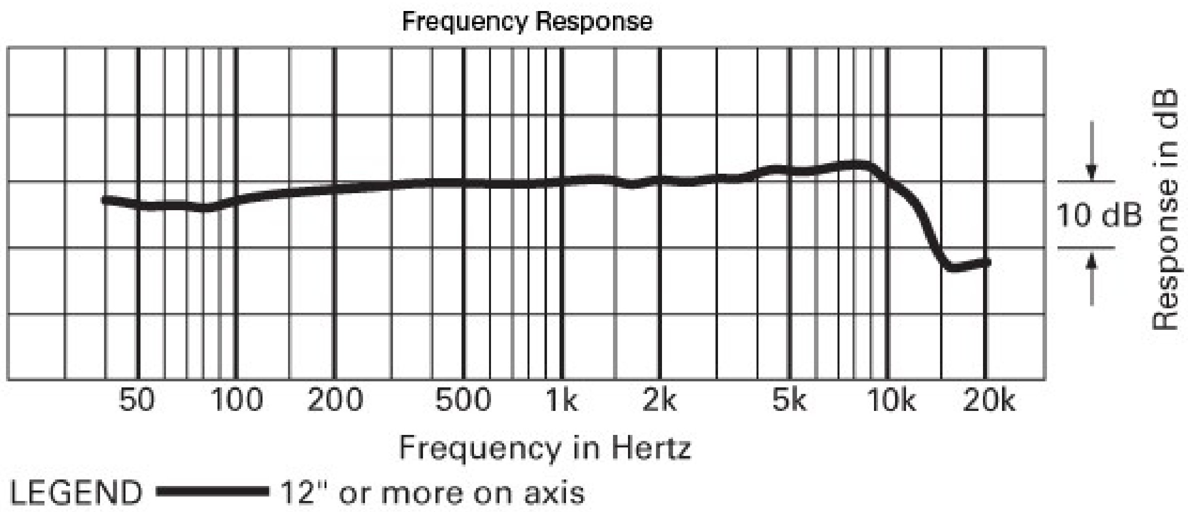
Diego Leonardo Valladares
Departamento de Física
Univ. Nac. de San Luis


voice waveform example
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
9
9.5
10
10.5
11
11.5
seconds


Spectrum of a voice signal (15 seconds)
70
60
50
40
30
20
10
0
decibels
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
hertz


White noise plus sine wave, frequency 250 Hz (D,C to adjust), amplitude 12 (F,V to adjust)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
Signal duration = 0.1sec (A,Z to adjust)   Sampling rate = 8000Hz (S,X to adjust)
Power spectrum of the above signal. Press K to display key commands.
Linear y
100
80
60
40
20
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
x=Frequency (e.g. cycles/second} Press H to change to Time

ES947/LED


Frequency Response
10 dB
Response in dB
50
100
200
500
1k
2k
5k
10k
20k
Frequency in Hertz
LEGEND
12" or more on axis

¿Porqué las exponenciales continuas son señales importantes?

$$continua \rightarrow e^{j\omega t} \qquad discreta \rightarrow e^{j\omega n}$$

- casi todas las señales de interés pueden representarse como una combinación lineal de este tipo de señales
- la forma particular que posee la respuesta de los sistemas LTI a señales exponenciales complejas determina que mediante estas señales podamos obtener la respuesta del sistema de manera muy simple.

Tipo	Periódica	No periódica
señal continua	Serie de Fourier	Transformada de Fourier
señal discreta	Serie de Fourier en tiempo discreto	Transformada de Fourier en tiempo discreto

- Implementación en procesamiento -> Transformada de Fourier Discreta (TFD)
- Algorítmo para aplicar la TFD: Transformada de Fourier Rápida (FFT)

La serie de Fourier para señales periodicas continuas:

señal periódica $\longrightarrow$ $x(t) = x(t+T) \quad \forall t$

armónicos $\longrightarrow$ $\phi_k = \left\{ e^{k\omega_0 t} \right\} \quad k = ..., -1, 0, 1, ...$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {\color{red}a_k}\, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

Ecuación de síntesis

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

Ecuación de análisis

La expresión nos indica cómo se descompone la señal en exponenciales complejas de diferente frecuencia (múltiplos de la frecuencia fundamental de la señal), siendo el coeficiente a_k una medida de la contribución de la componente (exponencial compleja) de frecuencia k ω_0 a la formación de la señal.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = ... + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + ...$$

$a_k = A_k e^{j\theta_k}$ $\longrightarrow$ coeficiente espectral

$e^{jk\omega_0 t}$ $\longrightarrow$ componente espectral, modo de Fourier, armónico k

$e^{\pm j\omega_0 t}$ $\longrightarrow$ componente fundamental, primer armónico

$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$ $\longrightarrow$ Coeficiente espectral de la componente continua

Espectro de amplitud, fase y potencia de una señal periódica:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = |a_k| e^{j\angle a_k}$$

$|a_k| \; vs. \; \omega \quad \rightarrow \quad$ espectro de amplitud o magnitud

$\angle(a_k) \; vs. \; \omega \quad \rightarrow \quad$ espectro de fase

Identidad de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2. \quad \rightarrow \quad \text{Potencia}$$

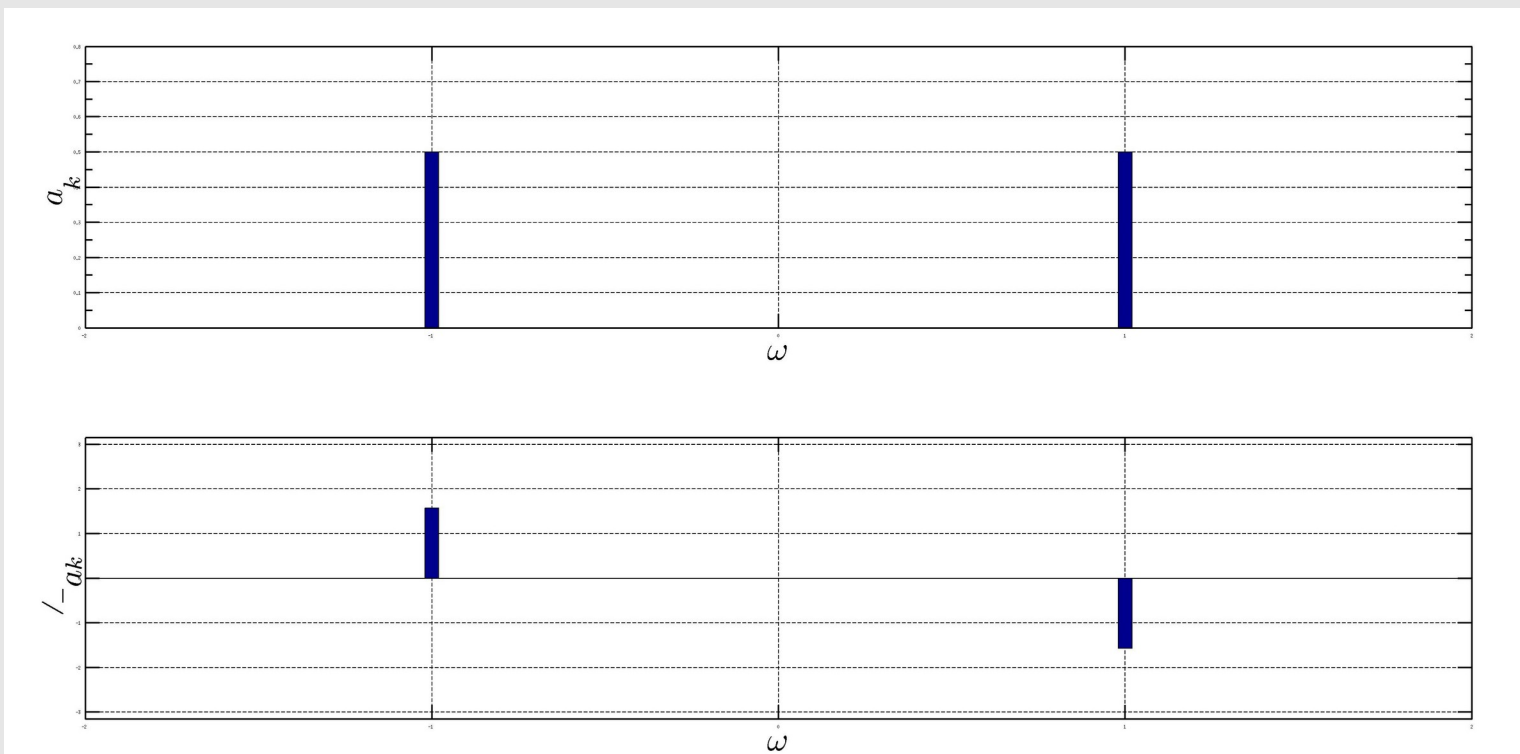
$|a_k|^2 \quad vs. \quad \omega \quad \rightarrow \quad$ espectro de potencia

Ejemplo:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \; e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\; e^{-j\,k\omega_0\,t}\,dt}$$

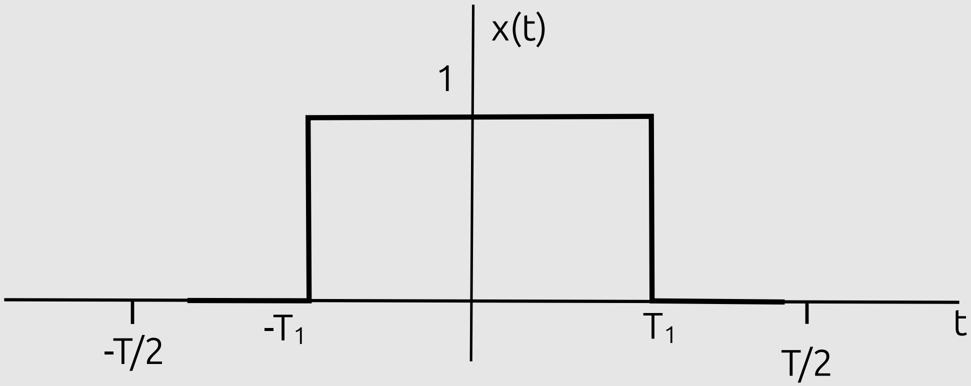
$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \qquad\qquad x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}j, \quad a_{-1} = +\frac{1}{2}j, \quad a_k = 0 \;\; \text{para} \;\; k \neq \pm 1$$



Ejemplo: espectro del pulso cuadrado periódico

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2, \end{cases}$$



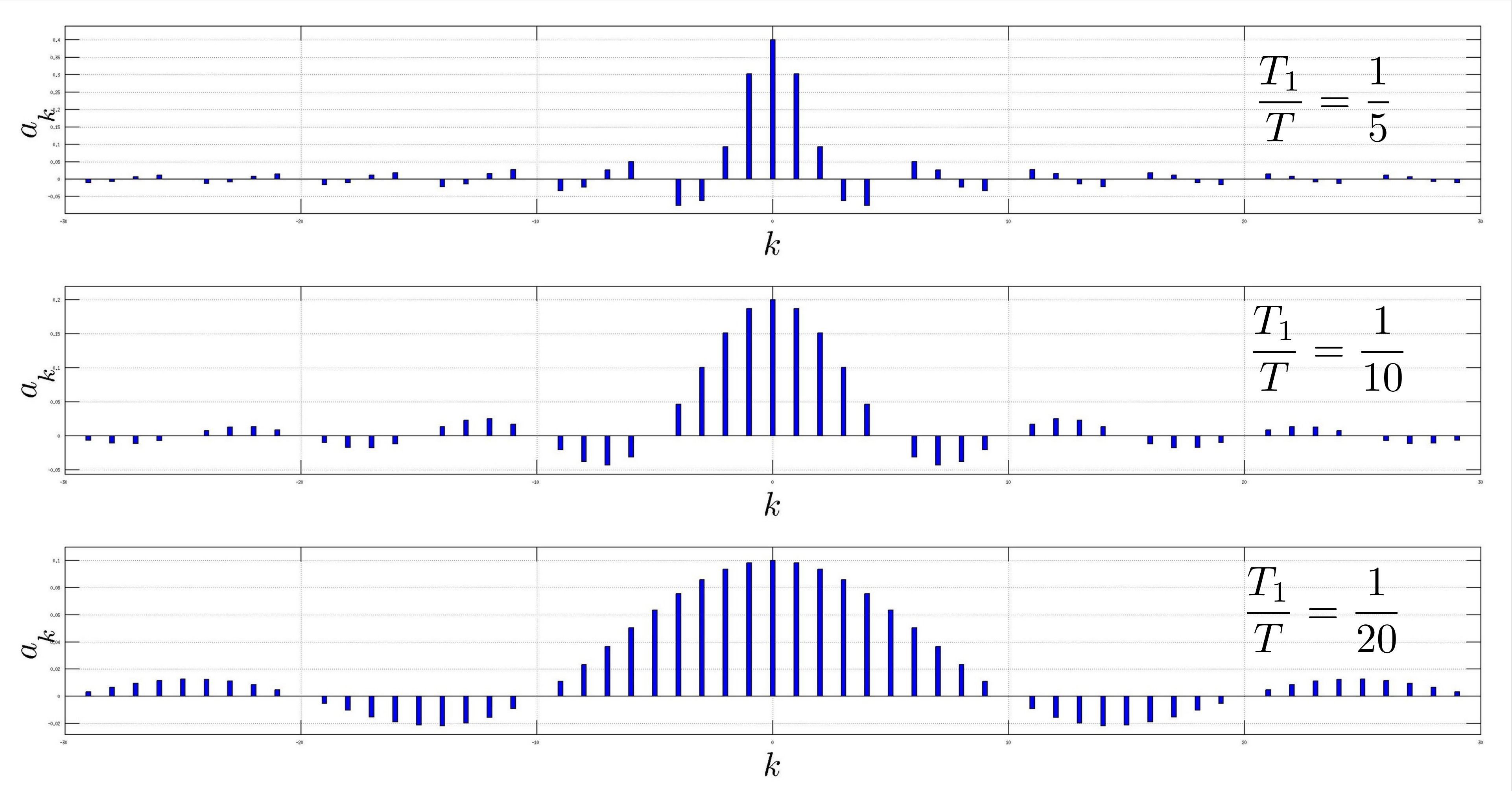
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \; e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) \; e^{-j\,k\omega_0\,t}\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T1} e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{2}{k\omega_0 T}\left\{\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right\}$$

$$\boxed{a_k = \frac{\operatorname{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad k \neq 0 \qquad\qquad a_0 = \frac{2T_1}{T}}$$

$$a_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad k \neq 0 \qquad\qquad a_0 = \frac{2T_1}{T}$$



Condiciones de existencia de la Serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Una señal periódica *x(t)* posee una expansión de Fourier o lo que es lo mismo la expansión converge si cumple las siguientes tres condiciones, denominadas condiciones de Dirichlet:

- *x(t)* debe cumplir que $\int_T |x(t)|dt \; < \; \infty$
- *x(t)* tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito de t.
- *x(t)* tiene un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito de t y cada una de esta discontinuidades es finita.

Ejemplo:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {\color{red} a_k} \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

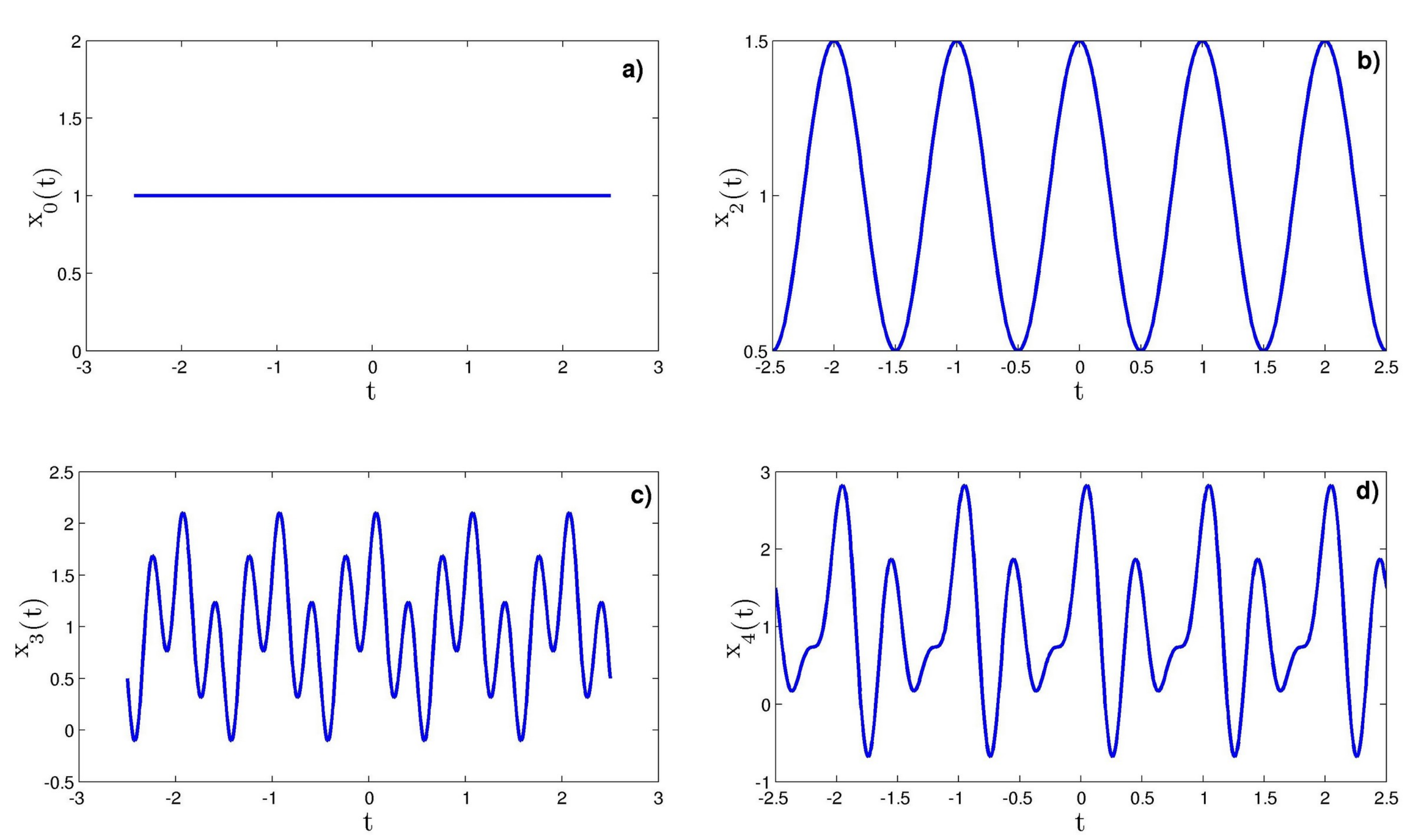
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t} \qquad T = 1$$

$$a_0 = 1, \; a_1 = a_{-1} = 1/4, \quad a_2 = a_{-2} = 1/2 \quad y \quad a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)
\end{aligned}
$$



La serie de Fourier para señales periódicas reales:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) \ \rightarrow \text{señal real} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x^*(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^*$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - a_{-k}^*) e^{jk\omega_0 t} = 0$$

$$x(t) \ \text{real} \quad \Longrightarrow \quad a_k = a_{-k}^*$$

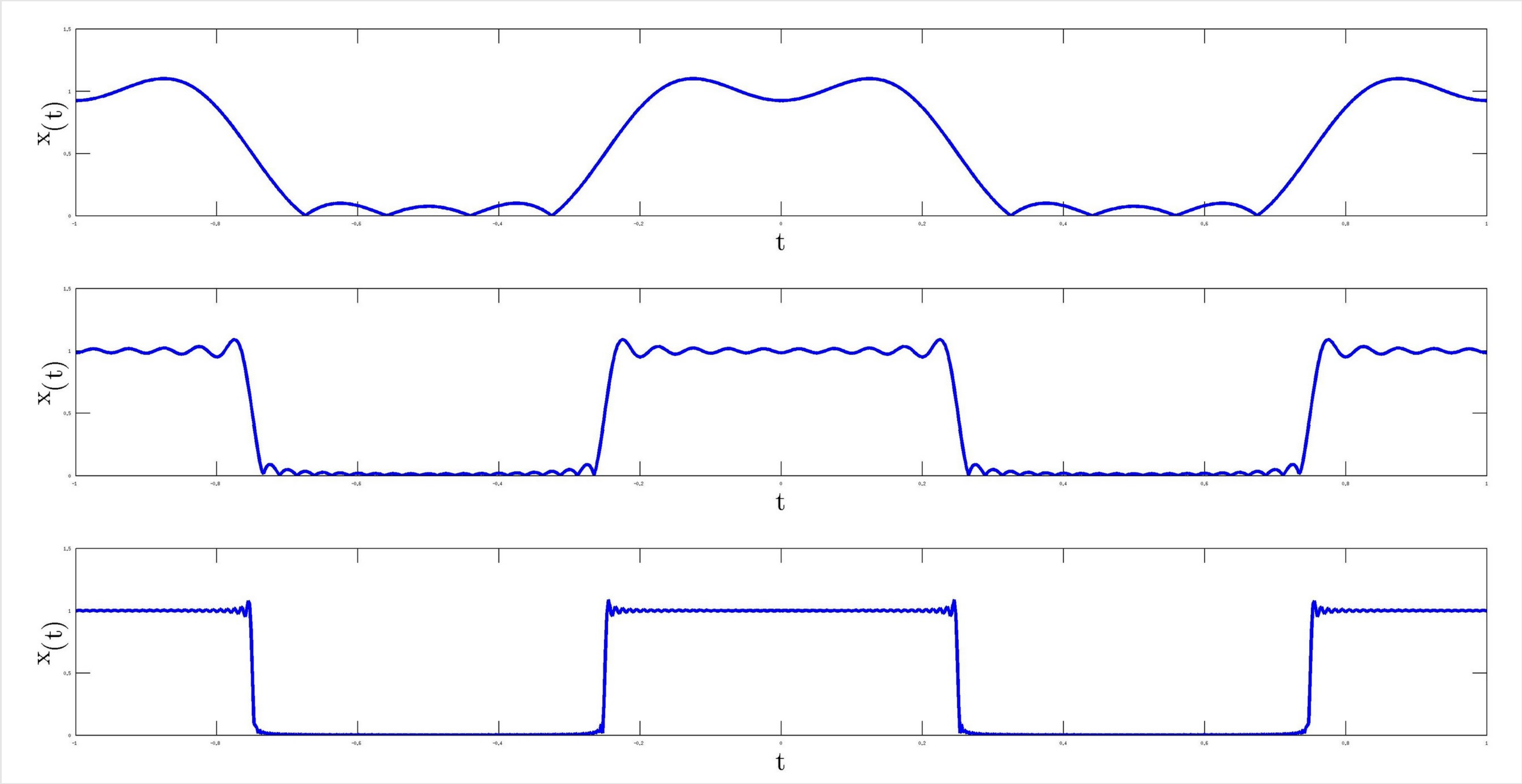
$$|a_k| e^{j\angle a_k} = \left| a_{-k}^* \right| e^{-j\angle a_{-k}^*}$$

$$x(t) \quad \text{es real} \quad \begin{cases} |a_k| & = |a_{-k}| \\ \angle a_k & = -\angle a_{-k} \end{cases}$$

Ejemplo: superposición de componentes para el pulso cuadrado periódico

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2, \end{cases}$$

$$x_n(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



$N = 3$

$N = 20$

$N = 100$

Formas alternativas de la serie de Fourier para señales reales:

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{jk\omega t} + a_{-k} e^{-jk\omega t} \right)$$

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \,\mathrm{Re} \left\{ a_k e^{jk\omega t} \right\}$$

$$\boxed{x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} 2 A_k \cos\left(k\omega t + \theta_k \right)}$$

$$a_k = B_k + jC_k.$$

$$\boxed{x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \cos\left(k\omega t \right) - C_k \sin\left(k\omega t \right) \right)}$$

La serie de Fourier y los sistemas LTI:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} \\
&= H(j\omega) e^{j\omega t}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}}$$

Función de Respuesta en Frecuencia

$$\boxed{H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}$$

La respuesta del sistema LTI a una exponencial compleja de frecuencia ω, es una exponencial compleja idéntica a la de entrada, multiplicada por una función compleja de variable real H(j ω) denominado función Respuesta en Frecuencia. Este factor complejo no cambia la frecuencia de la señal, sólo modifica su amplitud.

$$y(t) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(h(t) * e^{jk\omega_0 t}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega) e^{jk\omega t}$$

$$y(t) = T\left\{e^{j\omega t}\right\} = H(j\omega)e^{j\omega t} \qquad H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega) e^{jk\omega t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega) e^{jk\omega t}$$

Ejemplo: evaluemos la función respuesta en frecuencia del sistema LTI

$$y(t) = x(t-3)$$

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 3) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\boxed{H(j\omega) = e^{-j3\omega}}$$

Respuesta del sistema a la entrada armónica

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$y(t) = -\frac{j}{2} H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{2} H(-j\omega_0) e^{-j\omega_0 t}$$

$$\text{Si } H(j\omega_0) = H(-j\omega_0) \quad \Rightarrow \quad y(t) = H(j\omega_0) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}}{2j}$$

$$y(t) = H(j\omega_0) \sin(\omega_0 t)$$

Ejemplo: evaluemos la función respuesta en frecuencia del sistema LTI

$$y(t) = x(t-3)$$

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 3) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\boxed{H(j\omega) = e^{-j3\omega}}$$

Respuesta del sistema a la entrada:

$$x(t) = 3cos(2\pi t) + 5sen(6\pi t)$$

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{j2\pi t} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{5}{2j}e^{j6\pi t} - \frac{5}{2j}e^{-j6\pi t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}H(j2\pi)e^{j2\pi t} + \frac{3}{2}H(-j2\pi)e^{-j2\pi t} + \frac{5}{2j}H(j6\pi)e^{j6\pi t} - \frac{5}{2j}H(-j6\pi)e^{-j6\pi t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{j2\pi(t-3)} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi(t-3)} + \frac{5}{2j}e^{j6\pi(t-3)} - \frac{5}{2j}e^{-j6\pi(t-3)}$$

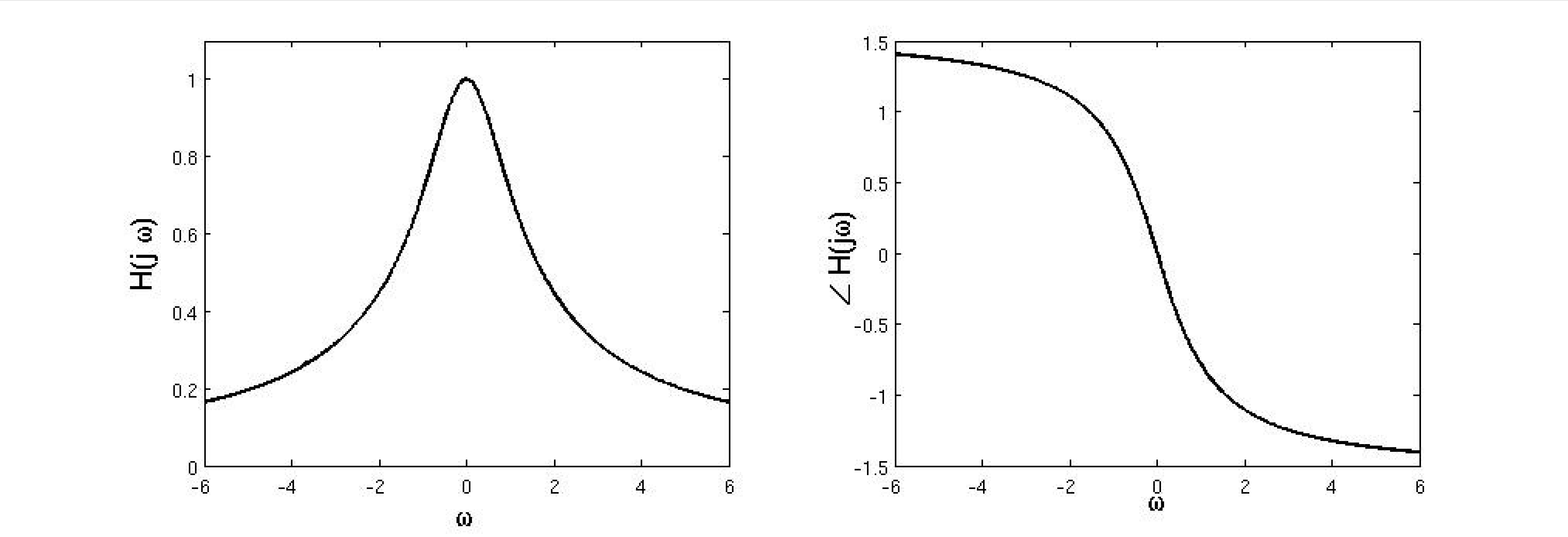
$$y(t) = 3cos(2\pi(t-3)) + 5sen(6\pi(t-3))$$

Ejemplo:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$H(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}dt = \frac{1}{1+j\omega}$$



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega)e^{jk\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = 1/4$$

$$a_2 = a_{-2} = 1/2 \quad a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} b_k e^{j\ k\ 2\pi\ t} = \sum_{k=-3}^{3} a_k H(j\ k\ 2\pi) e^{j\ k\ 2\pi\ t}$$

$$b_0 = a_0 H(0) = 1,$$

$$b_{\pm 1} = a_{\pm 1} H(\pm j\ 2\pi) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 \pm j2\pi} \right\}$$

$$b_{\pm 2} = a_{\pm 2} H(\pm j\ 4\pi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \pm j4\pi} \right\}$$

$$b_{\pm 3} = a_{\pm 3} H(\pm j\ 6\pi) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{1 \pm j6\pi} \right\}.$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = 1/4$$

$$a_2 = a_{-2} = 1/2 \quad a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} b_k e^{j\ k\ 2\pi\ t} = \sum_{k=-3}^{3} a_k H(j\ k\ 2\pi) e^{j\ k\ 2\pi\ t}$$

$$b_0 = a_0 H(0) = 1,$$

$$b_{\pm 1} = a_{\pm 1} H(\pm j\ 2\pi) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 \pm j2\pi} \right\}$$

$$b_{\pm 2} = a_{\pm 2} H(\pm j\ 4\pi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \pm j4\pi} \right\}$$

$$b_{\pm 3} = a_{\pm 3} H(\pm j\ 6\pi) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{1 \pm j6\pi} \right\}.$$