Práctico N^o5 (2024)

Aplicaciones de la transformada de Fourier: Filtrado - Teorema de muestreo

NOTA: Los ejercicios indicados al final de la guía y todos los ejercicios e ítems señalados con (*) son optativos de realizarse durante la cursada y serán evaluados en el examen final.

Problema N^o 1. Una señal continua $x(t)$ se obtiene a la salida de un filtro paso bajas con $\omega_s = 1000\pi$ rad/s. Si el muestreo se realiza mediante un tren de impulsos sobre $x(t)$, ¿cuál de los siguientes periodos de muestreo garantiza que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de sus versiones muestreadas usando un filtro paso bajas adecuado? a) $T = 0,5 \times 10^{-3}$ s, b) $T = 2 \times 10^{-3}$ s, c) $T = 10^{-4}$ s. ¿Qué frecuencia debería poseer el filtro pasabajos de reconstrucción?

Problema N^o 2. Determine la frecuencia de Nyquist de cada una de las siguientes señales:

a) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

b) $x(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$

Problema N^o 3. Se desea muestrear una señal $x(t)$ que no es de banda limitada, mediante el sistema de muestreo por tren de impulsos periódico de periodo $N = 10$ ms. Se pre-procesa la señal antes del muestreo con un filtro ideal F. ¿Cuál debería ser la Respuesta en Frecuencia del filtro F para que el muestreo permita luego poder reconstruir correctamente la señal? Especifique el filtro F indicando su Respuesta en Frecuencia y su Respuesta al Impulso. Explique.

Problema N^o 4. Dos señales $x(t)$ y $y(t)$, dadas por las siguientes expresiones

$$x(t) = \frac{\sin(300\pi t)}{\pi t} \quad y(t) = \frac{\sin(700\pi t)}{\pi t}$$

son multiplicadas para obtener $z(t) = x(t)y(t)$. a) Realice un esquema que muestre $Z(j\omega)$ y determine W_B (frecuencia máxima de la banda de $Z(j\omega)$). b) La señal $z(t)$ se muestrea a intervalos regulares de T_s segundos mediante un sistema de muestreo por impulsos. ¿Cuál es el máximo valor de T_s para que no se produzca el fenómeno de solapamiento o aliasing?

Problema N^o 5. Obtenga la respuesta en frecuencia, la respuesta al impulso y la respuesta al escalón de los siguientes filtros:

a) Promediador móvil discreto de tres puntos causal.

b) Filtro discreto recursivo de 1^{er} orden

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$

c) Promediador móvil especificado por

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M x[n-k]$$

con $N = M = 16$.

Problema N° 6. (*) Utilice DLTIdemo para visualizar las características de la respuesta en frecuencia de los distintos filtros disponibles y su respuesta a señales armónicas de distintas frecuencias. Resuma en palabras las características que posee la señal de salida de los filtros (sistema LTI) a una señal armónica.

Problema N° 7. Determine la función respuesta al impulso del filtro pasa altas discreto cuya función respuesta en frecuencias es:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \pi - \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & |\omega| < \pi - \omega_c \end{cases}$$

Realice una gráfica que muestre el comportamiento del módulo de $h[n]$.

Problema N° 8. (*) Utilice CLTIdemo para visualizar las características de la respuesta en frecuencia de los distintos filtros disponibles y su respuesta a señales armónicas de distintas frecuencias. Resuma en palabras las características que posee la señal de salida de los filtros (sistema LTI) a una señal armónica.

Problema N° 9. Considere un circuito RC donde la señal de entrada es la tensión en los extremos de la fuente y la señal de salida la tensión en los extremos de la resistencia.

- Obtenga su respuesta en frecuencia. Explique en palabras la acción del filtro sobre una señal de entrada genérica.
- Obtenga la respuesta del sistema a la señal $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ donde $f_0 = 20$ Hz, suponga un valor de frecuencia de corte de $f_c = 60$ Hz para el filtro. Utilice CLTIdemo de Matlab para visualizar las características de la respuesta en frecuencia del filtro y verificar la señal de respuesta obtenida.
- (*) Utilice CLTIdemo para visualizar la respuesta en frecuencia de este filtro y su respuesta a la señal armónica.

Problema N° 10. Considere un filtro continuo pasa bajas ideal de frecuencia de corte $\omega = 40$ rad/s. Encuentre la salida del filtro a la señal

$$x(t) = \frac{\text{sen}(20t)}{\pi t} e^{j40t}.$$

Problema N° 11. Considerar un filtro paso bajas ideal definido por:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La entrada de este filtro es $x(t) = \sin(at)/(\pi t)$. a) Encuentre la salida de este filtro para $a < \omega_c$. b) Encuentre la salida del filtro para $a > \omega_c$. c) (*) ¿En que caso la salida no sufre distorsión?

Problemas optativos. Su evaluación se realizará en el examen final

Problema N° 1. Obtenga y grafique con Matlab la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del filtro especificado por

$$y[n] = \sum_{k=-32}^{32} \frac{\text{sen}(2\pi k/33)}{\pi k} x[n-k]$$

¿Cómo modificaría este filtro para que fuera causal?

Problema N° 2. Para cada uno de los siguientes sistemas represente el diagrama de Bode, indicando las correspondientes aproximaciones en línea recta y la frecuencia de corte o frecuencia de 3 db, en cada caso.

a) $H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{10}$

b) $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/100}$

Verifique las gráficas obtenidas utilizando.

Problema N° 3. Considere el sistema LTI causal cuya relación entrada salida es

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t)$$

- a) ¿Cuál es el valor final de la respuesta al escalón $s(t)$ de este filtro? Utilice en Matlab la función $step()$ para verificar la respuesta.
- b) Determine la frecuencia de corte de este filtro (frecuencia de 3db). Realizando con Matlab un diagrama de Bode verifique su respuesta.

Problema N° 4. Analice los siguientes sistemas de segundo orden y determine qué tipo de filtro constituyen. Utilice Matlab para trazar sus diagramas de Bode y verificar su respuesta.

a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 100y(t) = 100x(t)$

b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 21\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t) = 7x(t)$

Problema N° 5. Considere el sistema de segundo orden cuya respuesta en frecuencia es la indicada, para los casos en que Γ toma el valor $\Gamma_1 = 10$ y $\Gamma_2 = 60$. Determine la ecuación diferencial que describe este sistema. Utilizando Matlab obtenga la representación mediante el diagrama de Bode de la ganancia en db.

$$H(j\omega) = \frac{625}{(j\omega)^2 + \Gamma j\omega + 625}$$

Problema N° 6. Considerar un filtro pasa bajos continuo de frecuencia de corte ω_c . La señal de entrada a este filtro es $x(t) = e^{-2t}u(t)$. Encuentre el valor de ω_c tal que el filtro pasa la mitad de la energía de la señal de entrada.

Problema N° 7. Determine la función que describe el retardo de grupo del sistema descrito por

$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$$

Realice una gráfica esquemática de la fase de $H(j\omega)$ y una gráfica que muestre el comportamiento de la función retardo de grupo. Indique si este sistema produce distorsión.

Problema N° 8. Utilizando Matlab, trace el diagrama de Bode de cada una de las siguientes Respuestas en Frecuencia:

a) $\frac{16}{(j\omega + 2)^4}$, b) $\frac{10 + 5j\omega + 10(j\omega)^2}{1 + (j\omega/10)}$.

Problema N° 9. Considere un filtro pasa bajas con una frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$ rad. y función retardo de grupo $\tau = 5$. Determine y dibuje la Respuesta al Impulso del Filtro e indique si este sistema produce distorsión.

Ejemplos de códigos de Matlab

1) Código de Matlab para representar las características en tiempo y frecuencia del filtro discreto

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

```
den=[1 -3/4 1/8];
num=[1 1/2];
FT=filt(num,den);

[h,n]=impulse(FT);
stem(n,h),
axis([0 25 0 1.5]);

figure;
[s,n]=step(FT);
stem(n,s),
axis([0 25 0 5.0]);

figure;
w=[-pi:0.1:pi];
H=freqz(num,den,w);
plot(w,abs(H));
```

2) Código de Matlab para representar las características en tiempo y frecuencia del filtro continuo

$$2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

```
t=[0:0.1:50];
w=[-10:0.1:10];
a=2;
H=1./(1+a*j*w);
h=1/a*exp(-t/a);
s=1-exp(-t/a);

subplot(3,1,1),
plot(w,abs(H),'LineWidth',2),
ylabel('H(jw)','FontSize',16),
xlabel('w','FontSize',16);

subplot(3,1,2),
plot(t,h,'LineWidth',2),
axis([-1 3*a 0 1.2*(1/a)]),
ylabel('h(t)','FontSize',16),
xlabel('t','FontSize',16);

subplot(3,1,3),
```

```
plot(t,s,'LineWidth',2);  
axis([-1 3*a 0 1.1]),  
ylabel('s(t)', 'FontSize',16),  
xlabel('t', 'FontSize',16);
```

3) Código para representar el diagrama de Bode del filtro continuo de primer orden

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

```
tau=0.1;  
num=[1];  
den=[1 tau];  
  
TF = tf(num,den);  
bodeplot(TF);
```