Práctico N^0 4 (2024):
Serie de Fourier y Transformada de Fourier en tiempo discreto

Problema N^o 1. Determine y *represente* los coeficientes espectrales (representación en frecuencias) de las siguientes señales discretas periódicas:

a) las señales representadas en la figura 1.

b) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$

c) $x[n] = cos(\pi/4\, n) + sen(\pi/4\, n)$

d) pulso cuadrado periódico de periodo $N = 10$, definido en un periodo como

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

donde $N_1 = 3$.

Problema N^o 2. Considere el sistema LTI discreto cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

Halle y realice una gráfica de la respuesta en frecuencia del sistema. Encuentre la salida del sistema a la señal $x[n] = 3sen(3\pi/4\, n)$ utilizando la respuesta en frecuencia del sistema. Realice una gráfica del espectro de la salida del sistema.

Problema N^o 3. Considere el sistema discreto «promediador móvil»

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{1} x[n-k]$$

Utilizando la expresión de la salida de un sistema LTI a una señal periódica, determine la salida del sistema a la señal armónica

$$x[n] \ = \ 2\, cos\,(0{,}2\pi n) + 3\, \mathrm{sen}\,(0{,}6\pi n)$$

Problema N^o 4. Encuentre la transformada de Fourier en tiempo discreto de las siguientes señales, salvo que se indique lo contrario utilice la tabla de transformadas:

a) $p_{N1}[n] \ = \ u[n+N_1] - u[n-N1-1])$ (utilice la definición). Represente, utilizando Matlab, $P_{N1}\left(e^{j\omega}\right)$ para $N_1 = 4$.

b) $x[n] = u[n] - u[n-N]$.

c) $x_{(2)}[n]$ con $x[n] = p[n]$ ($p[n]$ pulso cuadrado de duración 5 y amplitud 1). Represente la señal $x_{(2)}[n]$ utilizando Matlab.

d) $x[n] = 3u[n+4]$.

Problema N^o 5. Encuentre la señal cuya Transformada de Fourier en tiempo discreto es:

a) $X(e^{j\omega}) = p_W(\omega)$ con $W = \pi/4$.

b) $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

c) $X(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})^2$ con $|a| < 1$. Use la propiedad de convolución.

d) $X(e^{j\omega}) = u(\omega) - u(\omega - \pi/6)$

Problema N^o 6. Considere los siguientes sistemas: a) encuentre la respuesta en frecuencias del sistema, b) encuentre la respuesta al impulso y c) represente el espectro de amplitud y el espectro de fase de la función respuesta en frecuencias.

a) $y[n] = x[n] + x[n-1]$

b) $y[n] - 0,9y[n-1] = x[n]$

c) un sistema LTI promediador móvil de tres valores causal.

d) un filtro FIR causal cuya función respuesta al impulso es $h[n] = \{2, 2, -2, -2\}$ para $n = \{0, 1, 2, 3\}$, respectivamente.

e) $y[n] - 3/4\, y[n-1] + 1/8\, y[n-2] = x[n]$

Problema N^o 7. Utilizando métodos del dominio de la frecuencia, determine la respuesta del sistema LTI causal $y[n] - 1/2\, y[n-1] = x[n] + 1/2\, x[n-1]$, a la señal $x[n] = cos(3\pi/2\, n)$.

Problema N^o 8. Considere el sistema LTI discreto cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Utilizando la respuesta en frecuencia del sistema determine la salida del sistema $y[n]$ a la señal de entrada $x[n]$ cuya representación en el dominio de la frecuencia es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Problema N^o 9. Muestre que la salida de un sistema LTI discreto a la señal armónica $x[n] = \mathrm{sen}(2\pi/N\, n)$ es de la forma $y[n] = A(\omega)\,\mathrm{sen}(2\pi/N\, n + \theta(\omega))$, y encuentre la expresión de $A(\omega)$ y $\theta(\omega)$.

Problema N^o 10. Determine la salida del filtro representado en la figura 2 a la señal

$$x[n] = 2 + 3cos\,(0{,}4\pi\, n) + \text{sen}\,(0{,}75\pi\, n + \pi/5)$$

Represente la respuesta en frecuencia del filtro, en el rango de frecuencias $-2\pi < \omega < 2\pi$). Utilizando Octave/Matlab represente la señal de entrada y la señal de salida del sistema en una misma gráfica utilizando la función *subplot()*.

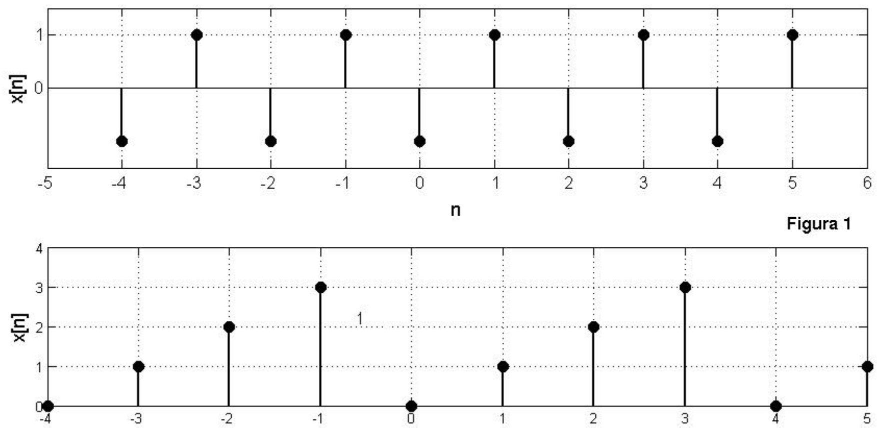

Figura 1

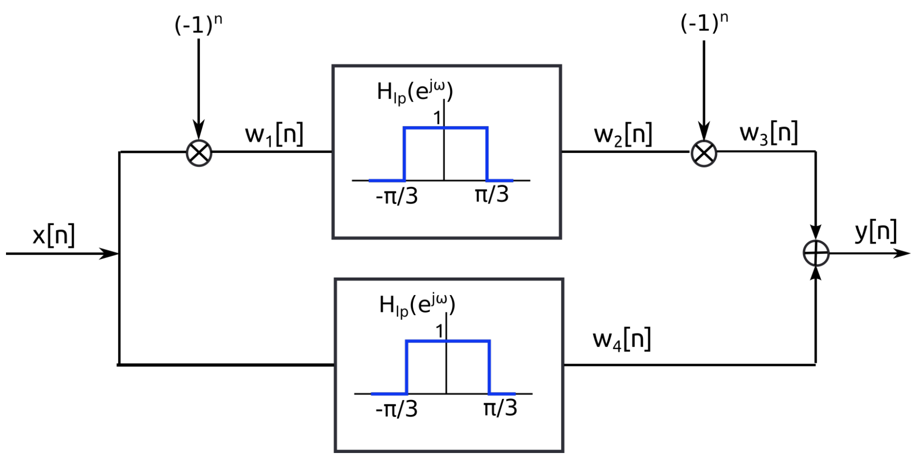

Figura 2

Transformada de Fourier en tiempo discreto de un pulso cuadrado

Vamos a realizar la deducción de la transformada de Fourier en tiempo discreto de un pulso definido por

$$p[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

En la siguientes líneas se obtiene la expresión de la transformada del pulso.

$$\begin{aligned}
X\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]e^{-j\omega n} \\
&= e^{j\omega N_1} \sum_{n'=0}^{2N_1} e^{-j\omega n'} \quad n' = n + N_1 \\
&= e^{j\omega N_1} \frac{1 - e^{-j\omega\,(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= \frac{e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega\,(N_1+1)}}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)} \\
&= \frac{e^{j\omega(N_1+1/2)} - e^{-j\omega\,(N_1+1/2)}}{\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}
\end{aligned}$$