Deducción de la respuesta en frecuencia de un promediador móvil discreto:

En las siguientes líneas se realiza la deducción de la respuesta en frecuencia del filtro no recursivo discreto denominado "promediador móvil".

Consideremos un promediador móvil discreto no causal cuya relación entrada salida es

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} x[n-k]$$

La respuesta al impulso del filtro es

$$h[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} \delta[n-k].$$

La respuesta al impulso es un pulso cuadrado discreto (duración finita - filtro IIR) cuyos valores son

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{N+M+1} & -N \leq n \leq M \\ 0 & \text{para otro valor de n} \end{cases}$$

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ la podemos hallar tomando la transformada de Fourier de $h[n]$ (transformamos cada impulso de la suma y aplicamos la propiedad de desplazamiento temporal de la señal):

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} e^{-j\omega k}.$$

Podemos escribir $H(e^{j\omega})$ como una expresión que sea más fácil de interpretar. Veamos su deducción.

$$
\begin{aligned}
H\left(e^{j\omega}\right) &= \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} e^{-j\omega k} \\
&= \frac{e^{j\omega N}}{N+M+1}\sum_{k'=0}^{N+M} e^{-j\omega k'}, \quad k' = k+N \\
&= \frac{e^{j\omega N}}{N+M+1}\left(\frac{1-e^{-j\omega(N+M+1)}}{1-e^{-j\omega}}\right)
\end{aligned}
$$

En la última expresión multiplicamos y dividimos el numerador por $e^{j\omega(N+M+1)/2}$ y el denominador por $e^{j\omega/2}$ y obtenemos

$$
H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{j\omega N}e^{-j\omega(N+M+1)/2}}{(N+M+1)e^{-j\omega/2}}\left(\frac{e^{j\omega(N+M+1)/2}-e^{-j\omega(N+M+1)/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}\right)
$$

Utilizando la igualdad de Euler, finalmente encontramos

$$
H\left(e^{j\omega}\right) = e^{j\omega(N-M)/2}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\omega\left(M+N+1\right)/2\right)}{\operatorname{sen}\left(\omega/2\right)}\right]
$$

En la figura 1 se representa el módulo de la respuesta en frecuencia para distintos valores de N y M.

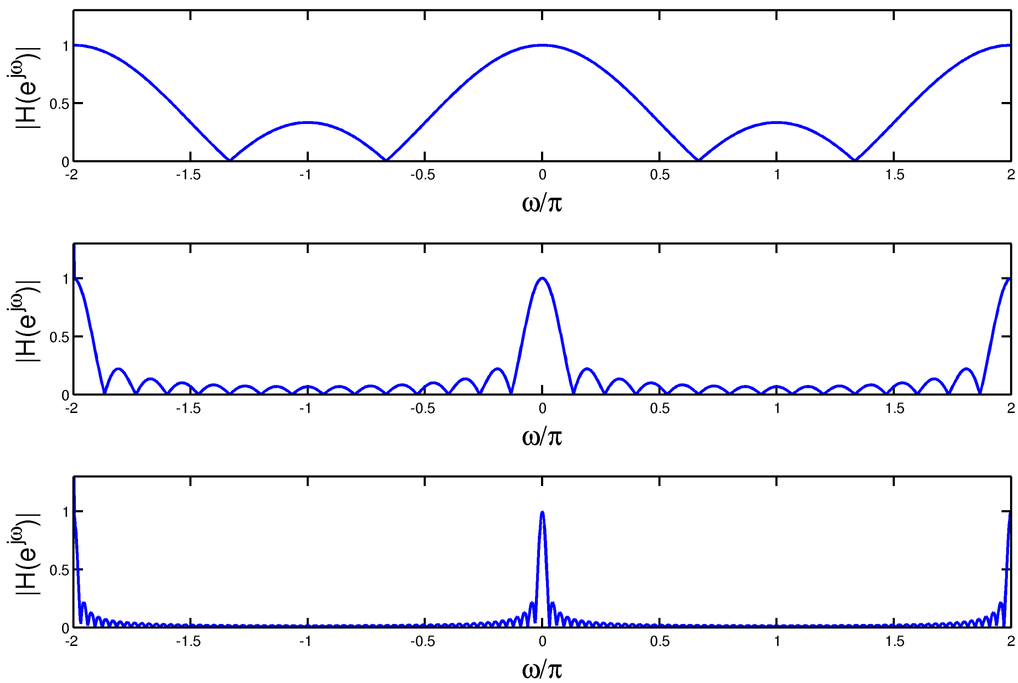

Figura 1: Respuesta en frecuencia del promediador móvil discreto, para valores de $N = M = 1$, $N = M = 7$ y $N = M = 32$