FISICA I

Licenciatura y Profesorado en Química y Licenciatura en Biotecnología

TEMA 9: Cinemática rotacional. Momento de inercia I. Energía cinética rotacional.

Los ejercicios marcados al final de la guía con (*) *los resuelven como tarea práctica individual de repaso. Las preguntas teóricas se plantean como materia de estudio.*

- *Teoría.*

i) Defina la velocidad angular media ω_{media} y la velocidad angular promedio $\omega_{promedio}$. Establezca su diferencia o similitudes. ¿Bajo qué condiciones las velocidades angulares definidas coinciden con la velocidad angular instantánea que posee un objeto en rotación?
ii) Se conoce cómo varía la aceleración angular α (t) en función del tiempo. ¿Cómo se puede conocer la expresión en función del tiempo de: a) La velocidad angular instantánea $\omega(t)$. b) El ángulo de rotación Φ (t) en función del tiempo? c) ¿Qué datos extras se deben conocer?
iii) Escriba todas las relaciones entre variables rotacionales y variables traslacionales instantáneas que conozca para cualquier punto P de un objeto sujeto solo a rotación pura.
iv) En fórmula del teorema de los ejes paralelos, explique el significado de cada término de la igualdad.
v) Para un objeto con rotación pura, escriba la fórmula que determina su energía cinética rotacional. ¿Se puede escribir la misma fórmula en función de la velocidad tangencial? ¿Cómo?

- *Velocidad y aceleración angulares.*

9.1) *Usar definición: s* (*arco*) = *R* θ (*rad*). *Usar* θ (*rad*) = θ (*grados*)$\pi/180$ *y* θ (*grados*) = θ (*rad*)$180/\pi$.
a) ¿Qué ángulo en radianes es subtendido por un arco de *1.5 m* en una circunferencia de radio *2.5 m*? ¿Cuál es su valor en grados? b) Un arco de *14 cm* de longitud en una circunferencia subtiende a un ángulo de *128º*. ¿Cuál es su valor en radianes?¿Qué radio tiene la circunferencia? c) El ángulo entre dos radios de una misma circunferencia con *1.5 m* de radio, es *0.7 rad*. ¿Cuál es su valor en grados? ¿Qué longitud tiene el arco delimitado en la circunferencia por estos dos radios?
9.2) *Usar definiciones:* $\omega_{media}= \Delta\Phi/\Delta t$ *y* $\alpha_{media} = \Delta\omega/\Delta t$. *Usar 1rev = 2* π *rad*
Un tambor de lavarropas partiendo con velocidad angular inicial igual a cero, completa *42 rev* en *3 s*. Su velocidad angular al final de este primer intervalo de *3 s* es de *36 rad/s*. Al final del siguiente intervalo de *3 s* su velocidad bajó a *24 rad/s* después de completar *54 rev* desde el inicio. Calcular la velocidad angular media y la aceleración angular media en los intervalos de tiempo: a) $\Delta t_1=3\ s - 0\ s$, b) $\Delta t_2=6\ s - 3\ s$ y c) $\Delta t_3=6\ s - 0\ s$.
9.3) *Usar:* $\alpha = d\omega/dt$ *y* $\Phi = \Phi_0 + \int \omega dt$.
Una rueda gira con una velocidad angular ω dependiente del tiempo dada por ω (t) = $a + bt^2$, donde $a = -2$ y $b = 0.5$ son constantes numéricas. a) ¿Cuáles son las unidades de las constantes a y b y qué representa la constante a? b) ¿Cuál es la expresión de la aceleración angular en función del tiempo? c) ¿Cuál es la expresión del ángulo recorrido Φ en función del tiempo? d) Si se toma un intervalo de *7 s* ¿durante cuánto tiempo gira en sentido horario y cuánto tiempo gira en sentido antihorario? En ese tiempo calcule $\Delta\Phi$ e interprete el resultado.

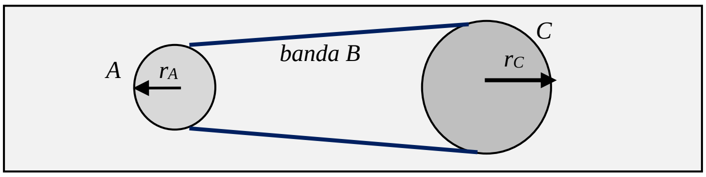
- *Rotaciones con aceleración angular α constante.*

9.4) *Usar:* $\alpha= \Delta\omega/\Delta t$ *y* $\Delta\Phi = \omega_0\Delta t + \alpha\ \Delta t^2/2$.
La velocidad angular del motor de un automóvil, aumenta uniformemente de *1170 rev/min* a *2880 rev/min* en *12.6 s*. a) Calcular la aceleración angular en *rev/min*^{2}. b) Calcular cuántas revoluciones efectúa el motor en ese lapso. c) Si luego de llegar a la velocidad angular de *2880 rev/min* el auto se desacelera de manera que el motor pasa a girar a *1000 rev/min* en un intervalo $\Delta t = 25.2\ s$, calcular qué valor de aceleración angular se aplicó. d) Calcular cuántas revoluciones efectúa el motor en ese lapso.
9.5) *Usar:* $\Delta\Phi = (\omega_0 + \omega_f)\Delta t/2$, $\omega_f = \omega_0 + \alpha\Delta t$ *y* $\omega^2_f = \omega^2_0 + 2\alpha\ \Delta\Phi$.
Una rueda que inicialmente estaba detenida, completa *90 rev* en un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1 = 15\ s$ y su velocidad angular en t_2 es $\omega_2 = 10\ rev/s$. a) Calcular su rapidez angular ω_1 al comienzo t_1 del intervalo. b) Calcular cuánto tiempo transcurrió entre el momento que la rueda estaba detenida ($t = 0\ s$) y el inicio del intervalo t_1.

c) Calcular el desplazamiento angular total entre $t = 0\ s$ y t_2. d) Si en t_2 se aplica una desaceleración α_2 a fin de frenar la rueda en las próximas $45\ rev$ ¿cuál es el valor de α_2?
9.6) *Usar:* $\omega_f = \omega_0 + \alpha\Delta t$. *Usar* $\Delta\Phi = (\omega_0 + \omega_f)\Delta t/2$.
En $t = 0\ s$ la velocidad angular ω_0 de una rueda de afilar era de $24\ rad/s$ y tenía una aceleración angular constante α de $30\ rad/s^2$. Luego en $t = 2\ s$, se abre el interruptor y se quita el suministro de energía eléctrica. La rueda sigue girando por su inercia y gira $432\ rad$ hasta que se detiene debido a un pequeño roce externo. a) ¿Qué ángulo giró la rueda entre $t = 0\ s$ y $t = 4\ s$? b) ¿Cuánto demoró en detenerse? c) ¿Con qué valor constante de aceleración angular se detuvo? d) Calcular el desplazamiento angular entre $t = 0\ s$ y el instante que se detiene.

- *Relaciones entre las variable angulares y lineales.*

9.7) *Usar:* $v_T = \omega R$, $a_R = v_T^2/R$ *y* $a_T = \alpha R$. *Usar* $\mathbf{a}_{total} = \mathbf{a}_{radial} + \mathbf{a}_{tangencial}$.
Una rueda fija con radio de $0.3\ m$, parte del reposo y acelera con aceleración angular constante de $0.6\ rad/s^2$. Calcule la magnitud de las aceleraciones tangencial, radial y total de un punto sobre su borde en las siguientes situaciones: a) en $t=0\ s$, b) después de girar 60^o y c) cuando su velocidad angular instantánea es de $1.59\ rad/s$. d) Calcular a qué tiempo t la aceleración radial es igual a g ($= 9.8\ m/s^2$).
9.8) *Usar:* $v_T = \omega R$ *y* $a_T = \alpha R$.
Se debe diseñar un cilindro giratorio para levantar con cuidado cubetas de cemento desde el suelo hasta una cierta altura. Las cubetas se enganchan en el extremo libre de un cable que se enrolla en el cilindro a medida que éste gira. a) Calcular el diámetro del cilindro si se desea levantar las cubetas con velocidad constante de $15\ cm/s$ mientras gira a $10\ rev/min$. b) Con el radio calculado en a) calcular la aceleración angular que debe tener el cilindro para levantar las cubetas con una aceleración lineal de $5\ cm/s^2$. c) Si la altura que deben subir las cubetas es de $12\ m$, calcular con los datos de la parte b) cuántas revoluciones efectuó el cilindro y que tiempo tarda en subir cada cubeta si parte con velocidad inicial cero.
9.9) *Usar condición que las velocidades tangenciales* $v_T = \omega R$ *son iguales.*
Una rueda A de radio $r_A = 10\ cm$ está acoplada mediante una banda B a una rueda C de radio $r_C = 25\ cm$. La rueda A aumenta desde $t = 0\ s$ su rapidez angular desde el reposo con una aceleración angular constante de $1.6\ rad/s^2$. a) Determinar el tiempo t que tarda la rueda C en alcanzar una velocidad angular de $100\ rev/min$ suponiendo que la banda B no resbale en las ruedas. b) Calcular las aceleraciones radiales y tangenciales de ambas ruedas en ese instante t. c) Cuál de las ruedas ha girado mayor número de revoluciones? d) Suponga que el sistema es el conjunto de tracción de una bicicleta (plato-cadena-piñón). El plato, tiene un número $N_P = 36$ de dientes y el piñón seleccionado tiene N_p dientes. Si la longitud de los arcos s de circunferencia que abarca cada diente en el plato y en el piñón tienen igual valor, calcular el número de dientes del piñón N_p si se sabe que la relación entre la velocidad angular del plato y del piñón $\omega_{Plato}/\omega_{piñón} = 0.39$.



9.10) *Usar:* $v_T = \omega R$, $a_R = v_T^2/R$ *y* $a_T = \alpha R$.
Un disco con un radio de $0.25\ m$, se rota un total de $800\ rad$ partiendo desde el reposo. En los primeros $400\ rad$, el disco aumenta su velocidad angular con una aceleración constante α y luego disminuye su velocidad angular con aceleración angular $-\alpha$ hasta llegar al reposo. En el movimiento, la máxima aceleración radial de cualquier punto de su borde, es $a_{radial\ máx} = 400\ m/s^2$. a) ¿Cuál es el mínimo tiempo requerido para la rotación? b) ¿Qué valor tiene la aceleración tangencial? c) ¿Qué velocidad angular máxima adquiere el disco?

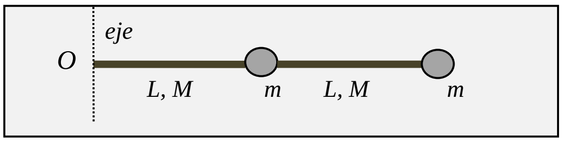
- *Inercia rotacional: momento de inercia. Teorema de los ejes paralelos.*

9.11) *Usar* $I_{vértice} = I_{CM} + MH^2$.
Un bloque rectangular de dimensiones ($ancho \times largo \times altura = a \times l \times h = 10\ cm \times 25\ cm \times 5\ cm$), tiene una masa $M = 0.95\ kg$ con una densidad uniforme. a) Calcular el momento de inercia I_{CM} respecto de un eje perpendicular a la cara mayor que pasa por el *C.M.*. b) Usando el teorema de los ejes paralelos, determinar una expresión de la inercia rotacional $I_{vertice}$ del bloque respecto de un eje que pasa por una esquina y es perpendicular a la cara mayor. c) Calcular $I_{vertice}$. d) Calcular la inercia rotacional $I_{costado}$ respecto a un eje perpendicular a una cara del costado del bloque, de largo l y alto h y que pasa por el centro de masa.

9.12) *Usar* $I = I_{aro} + I_{rayos}$. *Usar* $I = I_{CM} + MH^2$.
Una rueda de carreta de radio exterior $R_e = 0.3\ m$ y radio interior $R_i = 0.25\ m$, se arma con un aro de masa uniforme $M_{aro} = 1.4\ kg$ y ocho rayos de masa $m_{rayo} = 0.25\ kg$ cada uno. a) Calcular el momento de inercia de la rueda respecto de un eje perpendicular que pasa por su centro. b) Si se tiene otro aro delgado de masa total M_{total} e iguales radios, ¿qué valor debe tomar M_{total} para que la inercia rotacional respecto a un eje perpendicular al aro y que pase por el borde del mismo, sea igual a la calculada en el caso a).

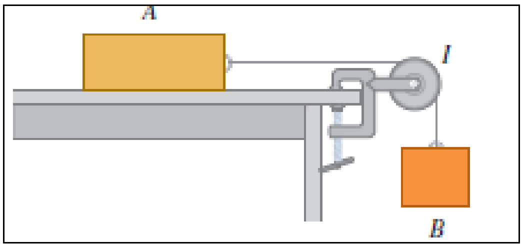
9.13) *Usar* $I_{total} = \sum_k I_k$. *Para las varillas, usar* $I_{eje} = I_{CM} + MH^2$.

Dos partículas puntuales de masa $m = 25\ gr$ cada una, son sujetadas entre sí y a un eje de rotación por dos varillas de masa $M = 250\ gr$ y longitud $L = 30\ cm$. La combinación gira alrededor de un eje de rotación que pasa por O. a) ¿Cuál es la expresión del momento de inercia I_1 de la varilla *1* respecto de O? b) ¿Cuál es la expresión del momento de inercia I_2 de la varilla *2* respecto de O? c) Obtener una expresión algebraica del momento de inercia rotacional total I de la combinación respecto del eje O. d) Ubique sobre la línea la posición del centro de masa y calcule el valor de la inercia rotacional $I_{C.M.}$.



- <u>*Energía en el movimiento rotacional.*</u>

9.14) *Usar* $K_{rotacional} = ½\ I\ \omega^2$.
Se necesita diseñar un volante industrial en forma de disco de $1.2\ m$ de diámetro que pueda almacenar una máxima energía cinética rotacional K de $1.425\times10^5\ J$ cuando su aceleración radial máxima es de $9.5\times10^3\ m/s^2$. a) Calcular la velocidad angular máxima del disco y la velocidad tangencial máxima de un punto de su borde. b) Calcular el momento de inercia I del volante respecto a un eje que pasa por su centro. c) Calcular su masa.
9.15) *Usar* $W_{no\ conservativo} = \Delta U + \Delta K_{rotacional} + \Delta K_{lineal}$.
Un cascarón esférico de masa *800 g*, gira alrededor de un eje de fricción despreciable. Una cuerda enrollada en el ecuador del cascarón, pasa por una polea de masa *396 g* y se une a una masa pequeña de *29 g* que cae por influencia de la fuerza peso. Suponga que la masa pequeña, parte del reposo y cae una distancia de $1.2\ m$ hasta llegar al suelo. a) Calcular la velocidad que tiene cuando impacta en la Tierra. b) Calcular la energía rotacional total. c) Suponga que por mínimos roces con los ejes del cascarón y de la polea, se pierde en el tiempo que dura la caída una energía $\Delta E = -0.025\ J$ ¿cómo cambian las respuestas anteriores?
9.16) *Usar teorema del W y energía cinética:* $W = \Delta K$.
La polea de la figura, tiene un radio $R = 0.16\ m$ y un momento de inercia $I = 0.48\ kg\text{-}m^2$. L acuerda no resbala en la polea y esta gira sobre un eje sin fricción. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque A de masa $m_A = 2\ kg$, es $\mu_K = 0.28$ y el bloque B de masa $m_B = 4\ kg$, desciende una distancia de $1.2\ m$ hasta llegar al suelo. a) ¿Se conserva la energía mecánica total del sistema?¿Porqué? b) Plantee la ley del trabajo y la energía cinética observando que las tensiones hacen trabajo sobre los bloques y sobre la polea. c) Calcular la velocidad que adquieren las masas A y B cuando esta última toca el suelo.

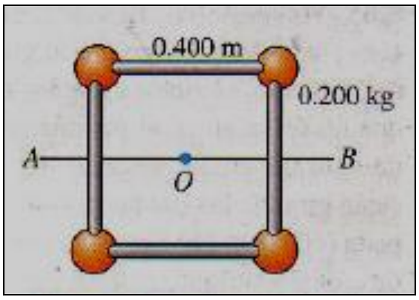


9.17) *Usar* $\Delta U + \Delta K_{rotacional} = 0$.
Una varilla de masa M y longitud $L = 1\ m$, se sostiene en posición vertical con su extremo inferior apoyado sobre el suelo. a) Demuestre que la energía potencial gravitacional de la varilla está dada por $U = Mgy_{CM}$ donde y_{CM} es la altura vertical del centro de masas ($C.M.$). b) Ubicar el centro de masa y dar una expresión de la energía potencial gravitatoria de la varilla. c) Usando conservación de la energía, calcular la velocidad de impacto del extremo superior cuando la varilla se sale de la vertical y cae golpeando contra el piso. Suponga que el extremo inferior no resbala en el piso.

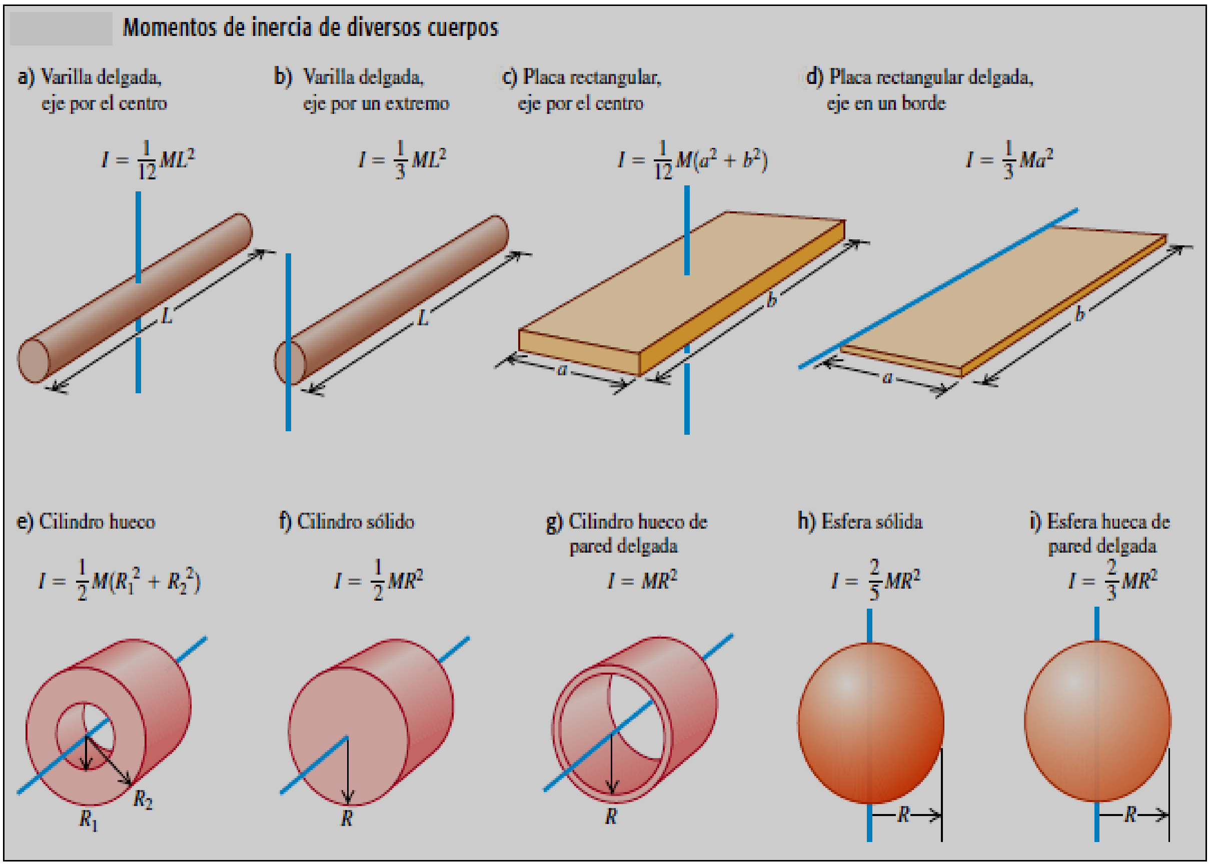
- *Tarea Práctica Individual de Repaso.*

9.1*) *Usar definiciones* $\omega_{media} = \Delta\Phi/\Delta t$ *y* $\alpha_{media} = \Delta\omega/\Delta t$.
Desde el inicio en que estaba en reposo, una puerta giratoria está en movimiento. En un dado instante y luego de haber girado *5 rad*, tiene una velocidad angular de *4 rad/s*. En ese mismo momento, es empujada por una persona y *3 s* después rotó desde el inicio, un ángulo total de *23 rad*. a) Calcular la velocidad angular media de la puerta en los *3 s*. b) Si a los *3 s* su velocidad angular instantánea es de *12 rad/s* calcular la aceleración angular media que le aplicó la persona a la puerta. c) ¿A cuántas revoluciones por minuto (*rpm*) se movió la puerta en el intervalo de *3 s*?
9.2*) *Usar* $\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\Phi$ *y* $\omega_f = \omega_0 + \alpha\Delta t$. *Usar* $\Delta\Phi = (\omega_0 + \omega_f)t/2$.
Un volante completa *42.3 rev* al pasar de una velocidad angular de *1.44 rad/s* al reposo total ($\omega_f = 0$). a) Si la aceleración es constante, calcular qué tiempo se requiere para que se detenga. b) Calcular el tiempo que tarda en completar la primera mitad de las *42.3 rev*. c) Calcular la velocidad angular media ω_{media} en la segunda mitad de las *42.3 rev*.
9.3*) *Usar* $v_T = \omega R$, $a_R = v_T^2/R$ *y* $a_T = \alpha R$. *Usar* $\mathbf{a}_{total} = \mathbf{a}_{radial} + \mathbf{a}_{tangencial}$.
Un ventilador eléctrico de techo de *0.75 m* de diámetro, gira sobre un eje fijo con velocidad angular inicial de *0.25 rev/s*. La aceleración angular es constante de $0.9\ rev/s^2$. a) Calcular la velocidad angular del ventilador después de *2 s*. b) ¿Cuántas revoluciones giró un aspa en ese tiempo? c) Calcular la velocidad tangencial de un punto en el extremo del aspa en *t = 2 s*. d) Calcular la aceleración resultante de un punto en el extremo del aspa en *t = 2 s*. e) Calcular el ángulo entre la aceleración resultante y la aceleración radial en *t = 2 s*.

9.4*) *Usar definición de* $I_{total} = \sum_k m_k r_k^2$.
Cuatro esferas pequeñas que pueden considerarse como puntos de masa *m = 0.2 kg* cada una, están dispuestas en los vértices de un cuadrado de *0.4 m* de lado unidas por varillas de masas *M* despreciables ($M \approx 0$). Calcular el momento de inercia en los siguientes casos: a) alrededor de un eje que pasa por el centro *O* y perpendicular al cuadrado, b) alrededor de un eje que pasa por la línea *AB* c) alrededor de un eje que pasa por la esfera superior izquierda, el centro *O* y la esfera inferior derecha y d) alrededor de un eje que pasa por la esfera superior izquierda y la esfera inferior izquierda.



9.5*) *Usar conservación de energía mecánica:* $E = U + K_{rotacional} + K_{lineal}$.
Una polea sin fricción, tiene la forma de un disco sólido uniforme de masa *2.5 kg* y radio *0.2 m*. Una piedra de *1.5 kg* se une a un alambre muy delgado que se enrolla alrededor de la polea y el sistema se libera desde el reposo. a) Calcular cuánto debe caer la piedra para que la polea tenga *4.5 J* de energía cinética. b) Calcular qué valor porcentual de la energía cinética total del sistema tiene la polea. c) Calcular el momento de inercia que debería tener la polea para que en cualquier instante la energía cinética de la piedra sea igual a la de la polea.
9.6*) *Usar conservación de energía mecánica:* $E = U + K_{rotacional}$
Una varilla metálica de un metro de longitud y *0.16 kg* de masa, pivotea sobre un extremo de manera que puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal. El metro se sostiene de manera que forma un ángulo de *53º* con la vertical y luego se suelta. Al pasar por la posición vertical calcule: a) el cambio de energía potencial gravitacional de la varilla, b) la velocidad angular del metro y c) la velocidad lineal del otro extremo opuesto al eje. d) Si la varilla pasa de la posición vertical en *23º* ¿qué velocidad angular tiene en ese momento? e) ¿Porqué se desacelera la varilla?


Momentos de inercia de diversos cuerpos
a) Varilla delgada, eje por el centro
$I = \frac{1}{12}ML^2$
L
b) Varilla delgada, eje por un extremo
$I = \frac{1}{3}ML^2$
L
c) Placa rectangular, eje por el centro
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
a
b
d) Placa rectangular delgada, eje en un borde
$I = \frac{1}{3}Ma^2$
a
b
e) Cilindro hueco
$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
R_1
R_2
f) Cilindro sólido
$I = \frac{1}{2}MR^2$
R
g) Cilindro hueco de pared delgada
$I = MR^2$
R
h) Esfera sólida
$I = \frac{2}{5}MR^2$
R
i) Esfera hueca de pared delgada
$I = \frac{2}{3}MR^2$
R