FISICA I

Licenciatura y Profesorado en Química y Licenciatura en Biotecnología

TEMA 10: ***Momento de una fuerza (torque). Dinámica rotacional. Equilibrio. Momento angular.***

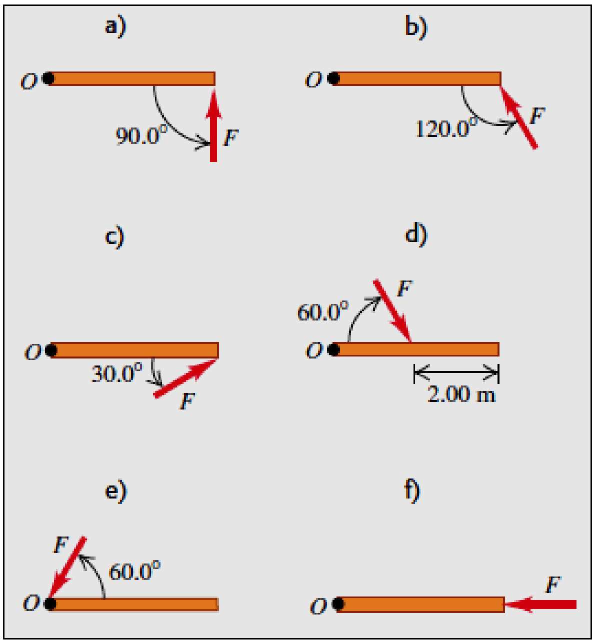
Los ejercicios marcados al final de la guía con (*) los resuelven como tarea práctica individual de repaso. Las preguntas teóricas se plantean como materia de estudio.

- *Teoría.*

i) Defina en forma vectorial el momento de una fuerza **F** o torque $\boldsymbol{\tau}$.
ii) Escriba la ecuación fundamental que vincula el torque con la inercia rotacional y la aceleración angular.
iii) Escriba las ecuaciones fundamentales que se utilizan para estudiar un cuerpo que se traslada y además rota. Si el cuerpo está estático (**v** = *0* y $\omega=0$), escriba a que ecuaciones se reducen las anteriores.
iv) Defina trabajo realizado por un torque, potencia en movimiento rotacional y escriba la ecuaciòn que vincula potencia con cantidades angulares.
v) Definir momento angular para una partìcula que tiene momento lineal **p**. Definir momento angular para un objeto sòlido que rota segùn un eje de simetrìa.
vi) ¿Bajo que condiciòn se conserva la cantidad de movimiento angular total de un sistema?

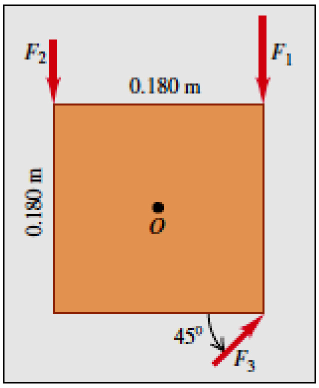
- *Momento de fuerzas (torque).*

10.1) *Usar definición:* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
Calcule el torque de la fuerza **F** alrededor del punto *O* y determine su dirección y sentido en cada una de las situaciones mostradas en la figura. En todos los casos la fuerza y la varilla están en el plano de la página, la varilla mide *4 m* y el módulo de **F** es de *10 N*.



10.2) *Usar definición:* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. *Usar* $\sum_i \tau_i = \tau_{neto}$.

Una placa cuadrada de *0.18 m* de lado, pivotea sobre un eje que pasa por su centro *O* y es perpendicular a la placa. Se aplican sobre ella las tres fuerzas mostradas en la figura cuyas magnitudes son: $F_1 = 18\ N$, $F_2 = 26\ N$ y $F_3 = 14\ N$. a) Calcule el torque de cada fuerza alrededor de ese eje y establezca en cada caso, su dirección y sentido. b) A partir de los resulatdos del item anterior, calcule el torque neto alrededor del mismo eje debido a las tres fuerzas mostradas.

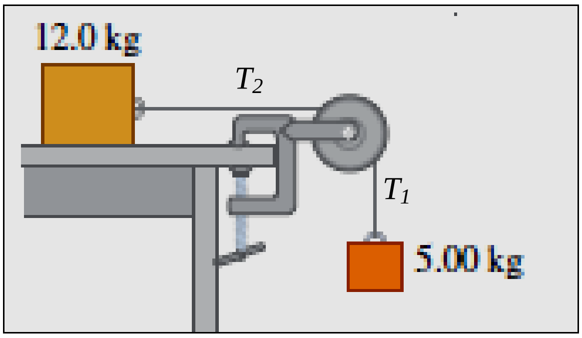


10.3) *Usar* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. *Usar* $\tau = I\alpha$.

Una pequeña esfera de plomo con una masa de *25 g* está conectada al origen por una varilla delgada de *0.74 m* de longitud y de masa *M = 0.25 kg*. La varilla gira en el plano (*x,y*) alrededor del eje *z*. Una fuerza $\mathbf{F} = (22\ N)\mathbf{j}$ actúa sobre la esfera. a) Calcular la inercia rotacional de la combinación (esfera + varilla). b) Si la varilla forma en un instante un ángulo de *30º* con el eje +*x* y en otro instante un ángulo de *60º* también con +*x*, calcular la aceleración angular instantánea en ambos instantes. c) ¿Para qué valor del ángulo de la varilla con el eje +*x*, la aceleración instantánea es igual a cero?

10.4) *Usar* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. *Usar* $\tau = I\alpha$ *para la polea. Usar* $\sum_i F_i = ma$ *para los objetos.*

Una caja de masa *M = 12 kg*, está unida a un peso de *5 kg* por una cuerda sin masa que pasa por una polea sin fricción de radio *R = 7.5 cm* y de inercia rotacional $I = 1.5\times10^{-2}$ $kg\text{-}m^2$. La cuerda no resbala en la polea y hay fricción entre la caja y la mesa con $\mu_K = 0.2$. Cuando se suelta el sistema calcular: a) la aceleración lineal *a* constante de los dos bloques. b) la aceleración angular α de la polea. c) los módulos de las dos tensiones T_1 y T_2. d) Calcular la fuerza resultante que el eje ejerce sobre la polea.



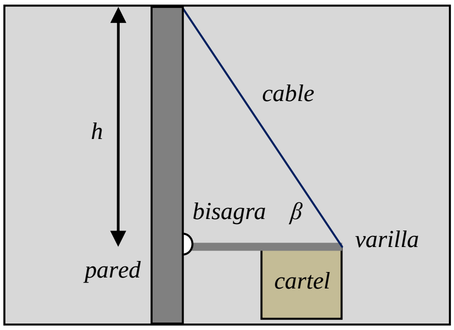
- *Equilibrio. Cuerpos en reposo.*

10.55) *Usar* $\sum_i \tau_i = 0$. *Usar* $\sum_i F_i = 0$ *para todas las fuerzas.*

Una persona de *73 kg* de masa, camina por un puente plano y se detiene a tres cuartas partes de la distancia de uno de sus extremos. El puente es uniforme y tiene una masa de *272 kg*. a) Plantee la ecuación de equilibrio de la suma de todas las fuerzas verticales que actúan sobre el puente. b) Plantee la ecuación de equilibrio de la suma de todos los torques que actúan sobre el puente respecto de un eje arbitrario. c) ¿Qué valores tienen las fuerzas verticales que sus soportes ejercen sobre los extremos? d) Si la persona sigue caminando y se detiene sobre uno de los extremos ¿cómo cambian las respuestas?

10.6) *Usar* $\sum_i \tau_i = 0$. *Usar* $\sum_i F_{ix} = 0$ y $\sum_i F_{iy} = 0$

Un cartel cuadrado de *1.2 m* de lado y de *50 kg* de masa, cuelga de una varilla de *2.8 m* de largo y de masa uniforme $m_V = 15\ kg$. La varilla que está en equilibrio, está unida por un extremo a una pared mediante una bisagra y por el otro está sostenido por un alambre con una tensión *T*, que se une a la pared a una distancia *h = 4 m*. a) Suponga que la bisagra aplica a la varilla, una fuerza $\mathbf{F}_b$ con componente horizontal F_{bx} y componente vertical F_{by}. Plantee las ecuaciones de equilibrio de las componentes de toda las fuerzas sobre la varilla. b) Plantee las ecuaciones de equilibrio de la suma de todos los torques sobre la varilla sobre un eje que pasa por la bisagra. c) Calcule la tensión *T* del alambre. d) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza $\mathbf{F}_b$ aplicada en la bisagra. e) Si el cable se corta ¿con qué valor de aceleración angular se empiezan a mover la varilla y el cartel?¿ Es constante esta aceleración?¿Porqué?

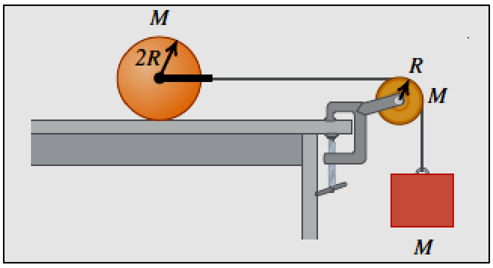


- *Cuerpos en movimiento. Eje móvil.*

10.7) *Usar* $v_{CM} = \omega R$ *y* $v_T = v_{CM}$.
Un aro de *2.2 kg* y de *0.6 m* de radio, rueda hacia la derecha sin deslizar sobre un piso horizontal a una velocidad angular constante de *3 rad/s*. a) ¿A qué velocidad se mueve su centro de masa? b) Calcular el vector velocidad y dar la dirección en que es observado por una persona en reposo que mira los siguientes puntos: i) el punto más alto del aro, ii) el punto más bajo, iii) el punto ubicado en la mitad derecha del aro y iv) el punto ubicado en la mitad izquierda del aro. c) Calcular la energía cinética total del aro.

10.8) *Usar* $\sum_i \tau_i = I\alpha$. *Usar* $\sum_i F_i = ma$.
Una esfera sólida de masa M y densidad de masa uniforme, rueda sin deslizar por una pendiente (plano inclinado) de ángulo θ. a) Plantear las ecuaciones de la dinámica de traslación para el centro de masa en dos ejes perpendiculares (x,y). b) Plantear el torque que aplica la fuerza de fricción estática respecto del centro de masa. c) Resolver y calcular el valor del ángulo y del mínimo coeficiente de fricción estático μ_S tal que la aceleración del centro de masa sea igual a $g/4$. d) Un cilindro de igual masa M e igual radio R que la esfera, se coloca en el mismo plano inclinado de ángulo θ. ¿Rodará sin deslizar si se suelta de la parte superior de la pendiente? Explique.

10.9) *Usar* $\sum_i \tau_i = I\alpha$. *Usar* $\sum_i F_i = ma$.
Un cilindro sólido de masa M y radio $2R$ está sobre una mesa horizontal y puede rodar sobre el eje que pasa por su centro sin resbalar. Mediante un semiaro de masa despreciable, se une con una cuerda a un cuerpo suspendido de masa M a través de una polea de masa M y radio R. El cilindro tiene fricción en la superficie de la mesa pero no existe roce en su eje. La polea tampoco tiene roce en su eje. a) Plantee las ecuaciones de la dinámica de traslaciones para el cilindro y el bloque que cae. b) Plantee los torques aplicados sobre el cilindro y la polea. c) Si el sistema se libera desde el reposo, calcular la aceleración de caída del cuerpo suspendido. ¿Qué significa el valor de esa aceleración en los otros dos cuerpos? d) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estático μ_S entre la mesa y el cilindro para que ruede sin deslizar?



- *Trabajo y potencia en movimiento rotacional.*

10.10) *Calcular* α *y luego* $\tau = I\alpha$. *Usar* $W = \tau\,\Delta\Phi$ *y* $K_{rot} = ½\, I\omega^2$.
Una rueda de afilar de *1.5 kg* con forma de cilindro sólido, tiene *0.1 m* de radio. a) Calcular el torque constante necesario para llevarla desde el reposo a girar con velocidad angular ω de *1200 rev/min* en un tiempo de *2.5 s*. b) ¿Qué ángulo $\Delta\Phi$ habrá girado en ese tiempo? c) Calcule el trabajo efectuado por el torque. d) Calcular la energía cinética rotacional que tiene la rueda cuando gira a *1200 rev/min*. Compárela con el reusltado obtenido en c) y justifique la conclusión.

10.11) *Usar* $W = \tau\,\Delta\Phi$. *Usar* $P_{media} = \tau\,\omega_{media}$ *y* $P_{inst} = \tau\,\omega_{inst}$.
La hélice de un avión tiene una longitud de *2.08 m* de punta a punta y masa de *117 kg*. Al arrancarse, el motor del avión aplica un torque constante de *1950 N-m* a la hélice que parte del reposo. a) Calcule la aceleración angular de la hélice. b) Calcular la velocidad angular de la hélice después de girar *50 rev*. c) ¿Cuánto trabajo efectúa el motor

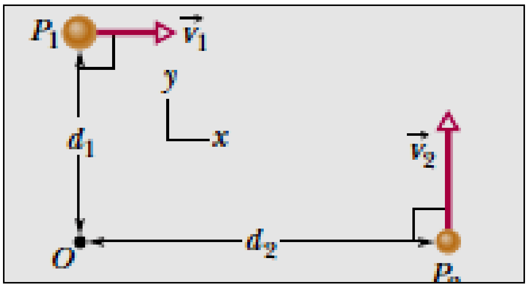
durante las primeras *50 rev*? d) ¿Qué potencia media P_{media} desarrolla el motor en las primeras *50 rev*? e) ¿Qué potencia instantánea P_{inst} desarrolla el motor en el instante en que la hélice ha girado *50 rev*?

10.12) *Usar* $P = \tau\,\omega$, $W = \tau\,\Delta\Phi$. *y* $P_{media} = W/\Delta t$.
a) Un cilindro macizo de *0.2 m* de radio y masa $m_c = 15\ kg$, se conecta al eje de un motor y parte de la potencia del mismo, se utiliza para levantar un peso $P = 1500\ N$ que cuelga de un cable enrollado al cilindro. Si la aceleración ascendente que adquiere el peso es $a = 0.9\ m/s^2$ calcular el torque τ que hace el motor sobre el cilindro. b) Si el peso *P* es subido una distancia vertical $\Delta y = 25\ m$, calcular la potencia media invertida por el motor. c) Calcular la potencia media que consume la fuerza peso. d) ¿Porqué no son iguales estas dos últimas cantidades?

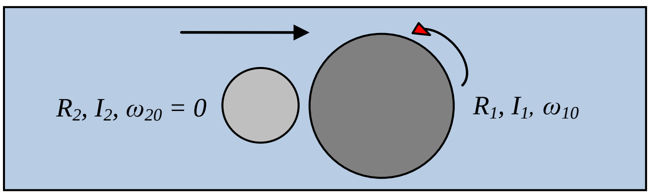
- *Momento angular.*

10.13) *Usar* $L_{total} = (I_{disco} + I_{persona})\,\omega$. *Usar* $\tau = \Delta L / \Delta t$.
Una persona *A* con masa de *50 kg*, está parada en el borde de un disco grande con masa *110 kg* y radio *4 m* que gira a *0.5 rev/s* alrededor de un eje que pasa por su centro. a) Calcular el módulo del momento angular total del sistema respecto de su eje de giro, suponiendo que la persona *A* puede ser tratada como una masa puntual. b) Otra persona *B* empuja desde afuera del disco, aplicando un torque $\boldsymbol{\tau}_B$. Si se quisiera cambiar el momento angular en $\Delta L = +1.05{\times}10^3\ kgm^2/s$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = 15\ s$ ¿Qué módulo de torque constante se debe aplicar y con qué dirección y sentido? c) ¿Cuál es el valor de la velocidad angular final después que la persona *B* terminó de aplicar el torque? d) Suponga que la persona *A* salta de la plataforma y cuando toca el suelo corre el trayectoria paralela al disco en el mismo sentido de rotación y con velocidad de *5 m/s*. Si el momento angular del sistema se conserva ¿Qué velocidad angular adquiere el disco después que la persona *A* saltó?

10.14) *Usar la definición* **L** = **r** × **p**
Dos partículas se mueven en el plano (*x,y*). En un cierto instante t_1 la partícula P_1 tiene una masa de *6.5 kg* y una velocidad de módulo $v_1 = 2.2\ m/s$ con la dirección y sentido que se muestra. La partícula P_2 de masa de *3.1 kg* tiene en ese mismo instante, una velocidad de módulo $v_2 = 3.6\ m/s$ con la dirección y sentido que se muestra. La partícula P_1 se ubica a una distancia $d_1 = 1.5\ m$ del punto *O* y la partícula P_2 se ubica a una distancia $d_2 = 2.8\ m$ del mismo punto. a) Calcular en el instante t_1 el módulo del momento angular de cada partícula. Dar su dirección y sentido. b) Calcular en el instante t_1 el módulo del momento angular total del sistema de dos partículas. Dar su dirección y sentido. c) Suponga que las velocidades son constantes y que transcurrieron *10 s* desde t_1, ¿cambia el momento angular total del sistema? ($\Delta t = t_2 - t_1 = 10\ s$). d) Analizar las leyes que gobiernan el movimiento de las partículas y obtener una explicación de la parte c).

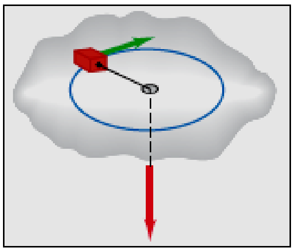


10.15) *Usar* $\tau\,\Delta t = \Delta L$ *para ambos cilindros*. *Esta ecuación define el impulso angular* $\mathbf{J}_{angular}$.
Dos cilindros de radios R_1 y R_2 con inercias rotacionales I_1 e I_2 respectivamente están sostenidos por ejes perpendiculares a la hoja de papel. Inicialmente, el cilindro grande gira con velocidad angular $+\omega_{10}$. Luego se mueve el cilindro pequeño hacia la derecha hasta que hace contacto con el mayor. La fuerza de fricción entre ambos, lo hace girar aplicándole un torque constante. Al principio desliza pero finalmente los dos cilindros giran con velocidades angulares constantes en direcciónes opuestas y velocidades tangenciales iguales y con el mismo sentido en el punto de contacto. a) Obtener una expresión de la velocidad angular del cilindro pequeño. b) Si la masa del cilindro mayor es M_1 y del menor es M_2 y se cumple que $M_1 = 4M_2$ y que los radios están en la relación $R_1 = 2R_2$ calcular el valor de las velocidades angulares de los cilindros suponiendo que $\omega_{10} = 20\ rad/s$. c) ¿Se conserva la energía cinética durante todo el proceso? Explique e intente obtener una relación entre las energías cinéticas final e inicial.

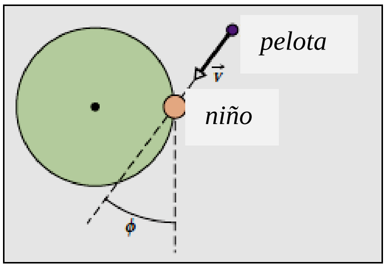


- <u>*Conservación del momento angular.*</u>

10.16) *Usar* $I = mr^2$ *y* $L = I\omega$. *Usar* $W = \Delta K$.
Un bloque pequeño de $0.025\ kg$ en una superficie horizontal sin fricción, está atado a un cordón que pasa por un agujero en la superficie (ver figura). El bloque está girando inicialmente a una distancia de $0.3\ m$ del agujero con velocidad angular de $1.75\ rad/s$. Ahora se tira del cordón desde abajo acortando el radio del círculo que describe el bloque a $0.15\ m$. El bloque puede tratarse como partícula puntual. a) ¿Se conserva el momento angular del bloque?¿Porqué? b) Calcular la velocidad angular que tiene el bloque cuando se acortó el radio de giro. c) Calcular el cambio de energía cinética del bloque. d) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar el cordón?



10.17) *Usar* $L_{barra} = I_{barra}\,\omega$. *Usar* $L_{pelota} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{elota}$.
Una barra metálica muy angosta de $2\ m$ de longitud y $90\ N$ de peso, cuelga verticalmente del techo en un pivote sin fricción colocado en el extremo superior. De repente, una pelota de $3\ kg$ que viaja horizontalmente a $10\ m/s$ golpea a la barra a una distancia de $1.5\ m$ debajo del techo. La pelota rebota en sentido opuesto con módulo de velocidad igual a $6\ m/s$. a) Calcular la velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque. b) Durante el choque ¿porqué se conserva el momento angular pero no el momento lineal?
10.18) *Usar* $I_{niño} = mr^2$. *Para el momento angular usar* $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ *y* $L = I\omega$.
Un niño de $30\ kg$ está sentado y quieto en el borde de un disco de radio $R = 2\ m$ e inercia $I_D = 120\ kgm^2$ respecto de un eje que pasa por su centro. El disco está rotando en sentido antihorario con velocidad angular $\omega_I = 0.1\ rad/s$ y hacia el chico se le envía una pelota de $1\ kg$ con velocidad de módulo $12\ m/s$ en una dirección que forma un ángulo $\phi = 37^o$ con la línea de la tangente al punto donde está ubicado el niño (observe la figura) . a) Calcular el momento angular total del sistema disco + niño en el momento en que la pelota llega al chico. Considere que el niño puede ser tratado como una masa puntual. b) El niño atrapa la pelota que queda quieta en sus manos. Calcular la nueva velocidad angular ω_F del sistema. Indique el sentido de giro. c) Suponga que el niño se corre hacia el centro ubicándose a $R = 1\ m$ del eje del disco que gira con igual velocidad angular y se le arroja la pelota en la misma dirección que en el caso a). Calcule que valor de velocidad debe tener la pelota para detener al sistema disco + niño. d) Si cuando el niño está a $1\ m$ del eje recibe la pelota con igual dirección pero con velocidad lineal de $30.43\ m/s$ y la atrapa ¿cómo girará la plataforma + niño y con qué valor de velocidad angular?

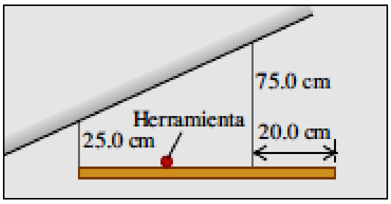


- <u>*Tarea Práctica Individual de Repaso.*</u>

10.1*) *Usar definición:* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. *Usar definición de producto vectorial.*
La fuerza que actúa sobre una pieza mecánica es $\mathbf{F} = (-5\ N)\mathbf{i} + (4\ N)\mathbf{j}$. El vector del orígen al punto de aplicación de la fuerza es $\mathbf{r} = (-0.45\ m)\mathbf{i} + (0.15\ m)\mathbf{j}$. a) Haga un dibujo que muestre **r**, **F** y el orígen. b) Use la regla de la mano derecha para determinar dirección y sentido del torque. c) Calcule el vector torque según su definición y compare con b).
10.2*) *Usar* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. *Usar* $\tau = I\alpha$.
Un aro muy delgado de masa $M = 0.5\ kg$ y radio $R = 15\ cm$ está girando a una velocidad angular $\omega_0 = 20\ rev/s$. De repente se apoya con su eje de giro perpendicular sobre una mesa y ésta le aplica una fuerza de fricción con coeficiente cinético $\mu_K = 0.3$. El eje de giro, está fijo por lo que el aro no puede trasladarse y rota en el lugar de contacto. a) Calcular el torque de fricción sobre el aro. b) Calcular el tiempo que tarda en detenerse. c) Calcular el número de revoluciones que giró hasta detenerse.

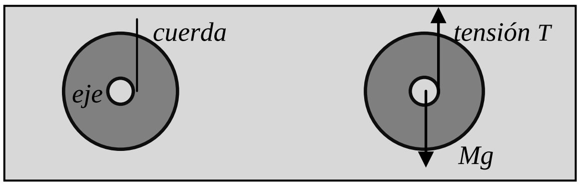
10.3*) *Usar* $\sum_i \tau_i = 0$. *Usar* $\sum_i F_i = 0$

Una repisa de masa uniforme de *60 cm* y *50 N* de peso, se sostiene horizontalmente mediante alambres verticales unidos al techo en pendiente. Una herramienta pequeña de *25 N* se coloca en la repisa en el punto medio entre los alambres. a) Calcule la tensión en cada cable. b) ¿Dónde debería ubicarse la herramienta en la repisa, para que ambos hilos tengan el mismo valñor de tensión?



10.4*) *Usar* $\sum_i \tau_i = I\alpha$. *Usar* $\sum_i F_i = ma$.

Un yo-yo tiene una inercia rotacional $I = 950\ gr\text{-}cm^2$ y una masa de *150 gr*. El radio del eje mide *3.2 mm* y su cuerda *134 cm* de largo. Rueda desde el reposo hasta el extremo de la cuerda. a) ¿Cuál es su aceleración lineal? b) ¿Cuánto tarda en llegar al extremo de la cuerda? c) ¿Qué velocidad angular tiene cuando llega al punto más bajo?

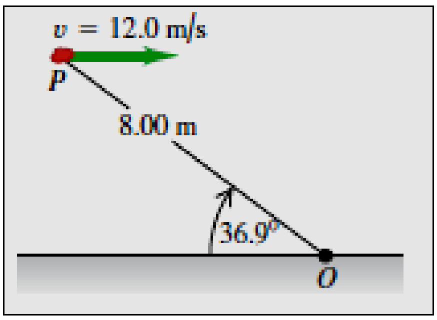


10.5*) *Usar* $\tau = P/\omega$ *y* $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Las puntas de corte de una sierra circular, están a *8.6 cm* del eje de rotación. La velocidad angular cuando la sierra no está cortando madera, es de *4800 rev/min* y el motor consume *0.5 hp* de potencia (*1 hp = 745.7 w*). a) Calcular el torque que el motor aplica a la sierra. b) Al cortar madera, la rapidez angular de la sierra baja a *2400 rev/min* y el motor desarrolla una potencia de *1.9 hp*. ¿Qué torque mínimo aplica el motor a la madera sobre las puntas de la sierra? c) ¿Qué fuerza tangencial mínima ejerce la madera sobre las puntas de la sierra?

10.6*) *Usar* $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. *Usar* $\tau = dL/dt$.

Una piedra de *2 kg*, tiene una velocidad horizontal de módulo *12 m/s* cuando está en el punto *P* de la figura. Considere a la línea horizontal como eje *x* y la vertical como eje *y*. a) ¿Qué magnitud respecto de *O* tiene el momento angular y cuál es su dirección y sentido? b) Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso, calcule en ese instante el módulo de *dL/dt* y dar su dirección y sentido. c) ¿Qué magnitud respecto de *O* tiene el momento angular y cuál es su dirección y sentido cuando la piedra cruza el eje *x*? ¿Aumentó o disminuyó el momento angular?



10.7*) *Usar* $I_{disco} = ½M_{disco}R^2$. *Usar* $I_{hombre} = m_{hombre}R^2$. *Usar* $L_{antes} = L_{después}$.

Un disco plano de madera de *120 kg*, tiene un radio de *2 m* y gira inicialmente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro a *3 rad/s*. De repente un paracaidista con masa total de *85 kg* se posa suavemente con dirección vertical sobre el disco en un punto cerca de su borde externo. a) Calcular la velocidad angular del disco después que el paracaidista se posó en él (trate al hombre como partícula puntual). b) Calcular la energía cinética del disco antes y después de la llegada del paracaidista. ¿Porqué no son iguales esas energías? c) De repente, la persona arroja el paracaídas de *15 kg* fuera del disco en dirección radial. ¿Cuál es la nueva velocidad angular del disco?