VOLUMEN UNO

FÍSICA

GRUPO EDITORIAL PATRIA

ALGUNAS PROPIEDADES FÍSICAS

Aire (seco, a 20°C y a 1 atm)	
Densidad	1.21 kg/m^3
Capacidad de calor específico a temperatura constante	1,010 $J/kg \cdot K$
Razón de capacidades de calor específico	1.40
Velocidad del sonido	343 m/s
Fuerza de ruptura eléctrica	3×10^6 V/m
Masa molar efectiva	0.0289 kg/mol
Agua	
Densidad	1,000 kg/m^3
Velocidad del sonido	1,460 m/s
Capacidad de calor específico a presión constante	4,190 $J/kg \cdot K$
Calor de fusión (0°C)	333 kJ/kg
Calor de vaporización (100°C)	2,260 kJ/kg
Índice de refracción	1.33
Masa molar	0.0180 kg/mol
Tierra	
Masa	5.98×10^{24} kg
Radio medio	6.37×10^6 m
Aceleración en caída libre en la superficie terrestre	9.81 m/s^2
Atmósfera estándar	1.01×10^5 Pa
Periodo de satélite a 100 km de altitud	86.3 min
Radio de la órbita geosincrónica	42,200 km
Velocidad de escape	11.2 km/s
Momento de dipolo magnético	8.0×10^{22} $A \cdot m^2$
Campo eléctrico medio en la superficie	150 V/m, hacia abajo
Distancia con:	
Luna	3.82×10^8 m
Sol	1.50×10^{11} m
Estrella más cercana	4.04×10^{16} m
Centro galáctico	2.2×10^{20} m
Galaxia de Andrómeda	2.1×10^{22} m
Borde del universo observable	$\sim 10^{26}$ m

ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS*

Velocidad de la luz en el vacío	c	3.00×10^{8} m/s
Constante gravitacional Newtoniana	G	6.67×10^{11} N · m²/kg²
Constante de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol⁻¹
Constante de gas molar	R	8.31 J/mol · K
Relación masa-energía	c^2	8.99×10^{16} J/kg
		931.5 MeV/u
Constante eléctrica (permitividad)	ϵ_0	8.85×10^{-12} F/m
Constante magnética (permeabilidad)	μ_0	1.26×10^{-6} H/m
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J · s
		4.14×10^{-15} eV · s
Constante de Boltzman	k	1.38×10^{-23} J/K
		8.62×10^{-5} eV/K
Carga elemental	e	1.60×10^{-9} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	511.0 keV
Masa del protón	m_p	1.67×10^{-27} kg
Energía del protón en reposo	$m_p c^2$	938.3 MeV
Radio de Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T
		5.79×10^{-5} eV/T

* En el apéndice B viene una lista más completa que muestra también los valores experimentales óptimos.

ALGUNOS FACTORES DE CONVERSIÓN*

Masa

1 kg = 1,000 g = 6.02×10^{26} u
1 u = 1.66×10^{-27} kg

Longitud

1 m = 100 cm = 39.4 in. = 3.28 ft
1 mi = 1.61 km = 5,280 ft
1 in. = 2.54 cm
1 año luz = 3.26 parsec = 9.46×10^{15} m
1 Å = 0.1 nm = 100 pm = 10^{-10} m

Tiempo

1 d = 86,400 s
1 y = $365\frac{1}{4}$ d = 3.16×10^{7} s

Volumen

1 L = 1,000 cm³ = 10^{-3} m³ = 1.06 quart
1 gal (U.S.) = 231 in.³ = 3.79 L

Medida angular

1 rad = 57.3° = 0.159 rev
π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev

Velocidad

1 m/s = 3.28 ft/s = 2.24 mi/h
1 kg/h = 0.621 mi/h

Fuerza y presión

1 N = 10^{5} dina = 0.225 lb
1 Pa = 1 N/m² = 10 dina/cm² = 1.45×10^{-4} lb/in.²
1 atm = 1.01×10^{5} Pa = 14.7 lb/in.² = 76 cm-Hg

Energía y potencia

1 J = 10^{7} erg = 0.239 cal = 0.738 ft · lb
1 kW · h = 3.6×10^{6} J
1 cal = 4.19 J
1 eV = 1.60×10^{-19} J
1 caballo de fuerza = 746 W = 550 ft · lb/s

Electricidad y magnetismo

1 T = 1 Wb/m² = 10^{4} gauss

*Véase en el apéndice G una lista más completa.

VOLUMEN UNO

FÍSICA

Quinta edición en inglés
(Cuarta edición en español)

Robert Resnick
Profesor de Física
Rensselaer Polytechnic Institute

David Halliday
Profesor de Física
University of Pittsburgh

Kenneth S. Krane
Profesor de Física
Oregon State University

Con la participación de
Paul Stanley
California Lutheran University

DÉCIMA SEGUNDA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 2013

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Título original de la obra:
Physics/Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane, 5th edition
ISBN: 0-471-32057-9
Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978, 1992, 2002, John Wiley & Son Inc.
All right reserved
Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por John Wiley & Son, Inc.

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Elisa Pecina Rosas
Diseño de interiores: Ricardo Pineda
Diseño de portada: Enrique Román Esnaurrízar

Traducción:
Efrén Alatorre Miguel
Lic. en Física, UNAM

Revisión técnica
Físico Antonio Gen Mora
Departamento de Ciencias-Coordinador de Física
Universidad Iberoamericana-Ciudad de México

Ph. D. Raúl Martínez Rosado
Director del Departamento de Ciencias Básicas
ITESM-Campus Estado de México

Físico Ricardo Páez Martínez
Coordinador Académico del Depto. de Física
Universidad Nacional de Colombia

Física, vol. 1
Derechos reservados respecto a la edición en español:
© 2002, GRUPO PATRIA CULTURAL, S. A. DE C.V.
© 2007, GRUPO EDITORIAL PATRIA S.A. DE C.V.
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN 978-970-24-0257-2 (ISBN de 13 dígitos)
ISBN 970-24-0257-3 (cuarta edición)
(ISBN 968-26-1255-1 tercera edición)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México
Printed in México

Tercera edición: 1994
Cuarta edición: 2002
Décima primera reimpresión: 2012
Décima segunda reimpresión: 2013

N. 1
C. 22
MCRS

PREFACIO DEL VOLUMEN I

CATALOGACION
SIBUDEC

Esta es la quinta edición del libro que en 1960 David Halliday y Robert Resnick publicaron con el título de *Physics for Students of Science and Engineering*. Durante 40 años ha sido la obra clásica en el curso introductorio basado en el cálculo y ha gozado de gran prestigio por su exposición clara y exhaustiva. En la presente edición hemos procurado mejorar su accesibilidad sin sacrificar el nivel ni el rigor de su contenido. Reescribimos gran parte del texto para lograr que fluya con suavidad y facilitarle al estudiante la introducción a temas nuevos. En lo posible incluimos más ejemplos prácticos y avanzamos de lo particular a lo general cuando abordamos temas nuevos.

Esta edición contiene importantes cambios en el aspecto pedagógico y en el orden de los capítulos. Quienes estén familiarizados con la cuarta edición encontrarán los mismos temas, sólo que en otro orden. Al efectuar estas revisiones hemos solicitado la opinión de los usuarios de ediciones anteriores, teniendo además en cuenta los resultados de la investigación dedicada a la didáctica de la física. A continuación se indican las innovaciones que ofrece esta edición.

1. Seguimos intentando (como lo hicimos en la edición anterior) lograr un enfoque más coherente de la energía, sobre todo para cerrar la brecha entre mecánica y termodinámica. Varias fuentes han señalado la necesidad de adoptarlo. Los problemas que causan a los estudiantes los conceptos de energía han sido revelados en las investigaciones sobre la didáctica de la física (véase, por ejemplo, el trabajo de Lillian McDermott y sus colegas*). La necesidad de facilitar un mejor conocimiento de las leyes de Newton llevó a Priscilla Lewis** a proponer que se reestructuraran los temas de la introducción a la mecánica: la conservación de la energía mecánica se explicaría después de una exposición exhaustiva de la mecánica vectorial, que entre otras cosas incluiría los sistemas de partículas y la conservación del momento. Arnold Arons llevó a cabo una encuesta que revela algunas de las dificultades que entraña la exposición tradicional de la conservación de la energía.*** Basándonos en parte en esas ideas, en esta quinta edición optamos por desarrollar el concepto de energía siguiendo la presentación de la mecánica vectorial (en sus formas traslacional y rotacional). Ello nos permite ofrecer un tratamiento más unitario y coherente de la energía y de la ley de su conservación, lo mismo que un enfoque "en espiral" en que aplicamos las técnicas de energía a problemas ya resueltos mediante las leyes de la mecánica vectorial. Los conceptos relativos a la energía se explican en los capítulos 11-13, donde después se incluye la información necesaria para utilizar la energía y su conservación en el resto del libro.

2. Se eliminó el capítulo que en la cuarta edición se dedicaba a los vectores. Se introducen a cambio las técnicas vectoriales conforme se necesiten, comenzando en el Capítulo 2 (cinemática) con la adición de vectores y sus componentes, para continuar después con el producto cruz en los capítulos 8 y 9 (cinemática y dinámica rotacional) y en el Capítulo 11 (trabajo y energía). De ese modo se introducen estas técnicas en el momento en que la necesitan los estudiantes y cuando pueden aplicarlas de inmediato. En todos los casos proponemos ejercicios de fin de capítulo para ayudarles a familiarizarse con los conceptos y los métodos. Un nuevo apéndice contiene un resumen de los conceptos y de las fórmulas más importantes en los vectores.

3. Una vez más basándose en los hallazgos de Priscilla Law y de otros investigadores de la didáctica de la física, hemos modificado así el orden de los temas introductorios: cinemática unidimensional, dinámica unidimensional y luego dinámica y dinámica bidimensionales. No creemos necesario reproducir aquí los numerosos argumentos en que se basa este cambio; pero estamos convencidos que al menos ayuda a resolver la constante confusión de los alumnos que asocian la aceleración con la velocidad y no con la fuerza; por ejemplo, el nuevo orden permite explicar la fuerza centrípeta tras haber

hablado por primera vez del movimiento circular uniforme (y no uno o dos capítulos después, como en la cuarta edición). Nos permite además asociar en una etapa más temprana la fuerza y la aceleración gravitacionales, con lo cual se disipan algunos de los errores que los estudiantes suelen cometer al identificar la magnitud y la dirección de la aceleración en el movimiento de un proyectil.

4. El material sobre oscilaciones, que en la edición anterior antecedía a la gravitación y a la mecánica de fluidos, ahora sigue esos tópicos y sirve de introducción natural al movimiento ondular.

5. Gran parte del material dedicado al equilibrio en la cuarta edición (Capítulo 14) fue incorporado al capítulo sobre dinámica rotacional (capítulo 9) en esta edición.

6. La termodinámica, tema que abarcaba cinco capítulos en la edición anterior, ahora ha sido repartido en cuatro capítulos. Un capítulo nuevo (22) referente a las propiedades moleculares de los gases incorpora temas de la teoría cinética y de la mecánica estadística (capítulos 23 y 24 de la cuarta edición) que se relacionan con las propiedades del gas ideal. Los aspectos relativos al trabajo y a la energía del gas ideal ahora encajan naturalmente en el Capítulo 23 (primera ley de la termodinámica). El Capítulo 24 (entropía y la segunda ley) difiere mucho del capítulo correspondiente de la cuarta edición, pues en ésta se da a la entropía un papel más adecuado y prominente como elemento esencial para entender la segunda ley.

7. En la cuarta edición, los temas de la física moderna estaban "dispersos" a lo largo del texto, generalmente en secciones tituladas "opcionales". En este quinta edición seguimos empleando ejemplos de ella cuando así conviene, pero las secciones aisladas dedicadas a ella han sido integradas en el Capítulo 20 (relatividad especial) de este volumen y en los capítulos 45-52 del volumen 2 (donde se examinan los temas de la física cuántica y sus aplicaciones a átomos, sólidos y núcleos). Estamos firmemente convencidos de que la relatividad y la física cuántica son parte esencial de un curso introductorio en este nivel; pero la mejor manera de exponerlos es ofrecer una explicación coherente y unitaria, no una colección de explicaciones aisladas. Igual que en la cuarta edición, en el volumen seguimos ubicando el capítulo sobre la relatividad especial entre los dedicados a la mecánica clásica; esto refleja nuestra opinión de que la relatividad especial debe ir entre los capítulos de cinemática y mecánica que se ocupan de la física clásica. (Sin embargo, los profesores que deseen posponer la presentación de este material pueden posponer fácilmente la exposición del Capítulo 20 hasta más adentrado el curso.)

En esta quinta edición el material de final de capítulo difiere considerablemente del que figuraba en la cuarta. Los conjuntos anteriores de problemas (que remitían a las secciones de capítulo) fueron revisados meticulosamente y colocados en dos grupos: ejercicios y problemas. Los ejercicios, que siguen remitiendo a las secciones del libro, casi siempre son aplicaciones directas del contenido de la sección correspondiente. Tienen por objeto ayudarle a los estudiantes a familiarizarse con los conceptos, con fórmulas importantes, con unidades y dimensiones entre otras cosas. Los problemas, que no remiten a las secciones, requieren a menudo emplear conceptos de varias secciones o incluso de capítulo anteriores. Algunos exigen estimar o localizar en forma independiente los datos necesarios para resolverlos. Al corregir y agrupar los ejercicios y problemas suprimimos algunos problemas de la edición anterior. El próximo año ofreceremos un suplemento de problemas que incluirá casi todos los faltantes, lo mismo que una selección de ejercicios y problemas nuevos. También en esta edición las respuestas a los ejercicios y problemas impares vienen en el texto y los de los pares se encuentran en el manual del profesor que acompaña al libro.

Al material de final de capítulo se agregaron preguntas de opción múltiple y problemas para resolver en computadora. Las preguntas suelen ser de índole conceptual y a menudo requiere una gran penetración del material. Las respuestas vienen en el manual del profesor. Los problemas para resolver con computadora exigen conocer bien las técnicas de hojas electrónicas o las rutinas de manipulación simbólica como Maple o Mathematica.

Hemos procurado preparar un libro que en este nivel ofrezca el panorama lo más completo y riguroso posible de introducción a la física. Sin embargo, conviene puntualizar que *pocos profesores (o ninguno) querrá seguir el libro de principio a fin*, sobre todo en un curso de un año. Se ofrecen muchas trayectorias alternas. Si el profesor desea tratar menos temas con mayor profundidad (lo que a veces se conoce como "menos pero a fondo"), podrá seleccionar entre ellas. Algunas secciones o subsecciones llevan la indicación "opcional", o sea que pueden omitirse sin que se pierda la continuidad. Según el diseño de cada curso, otra secciones y hasta capítulos íntegros pueden omitirse o no estudiarse con mucha profundidad. El manual del profesor, que acompaña al libro, contiene sugerencias para abreviar los temas. Pese a ello, el texto ofrece una presentación completa; el estudiante curioso encontrará allí los temas omitidos y obtendrá una visión más amplia del tema. Confiamos que el libro sea visto como una especie de "mapa carretero" a través de la física; pueden tomarse muchos caminos, panorámicos o directo, y no es necesario utilizarlos todos en el primer viaje. Al viajero deseoso de conocer más se le alentará para que retorne al mapa y explore las áreas que no visitó en ocasiones anteriores.

El texto viene en dos volúmenes. Éste abarca la cinemática, la mecánica y la termodinámica; el volumen 2 incluye el electromagnetismo, la óptica, la física cuántica y sus aplicaciones. Los suplementos disponibles en inglés son:

Instructor's Solutions Manual	Student Solution Manual
Instructor's Manual	Student Study Guide
Instructor's Resource CD	Physics Simulations
Test Bank	eGrade Homework Management System

Para mayor información sobre estos suplementos, favor de comunicarse con su representante de CECSA.

Al preparar esta edición nos han sido útiles las observaciones de un equipo de revisores muy profesionales que, en forma individual o colectiva, ofrecieron sus comentarios y críticas prácticamente sobre todas las páginas del texto:

Richard Bukey, Loyola University
Duane Carmony, Purdue University
J. Richard Chrisman, U. S. Coast Guard Academy
Paul Dixon, California State University-San Bernardino
John Federici, New Jersey Institute of Technology
David Gavenda, University of Texas-Austin
Stuart Gazes, University of Chicago
James Gerhart, University of Washington
John Gruber, San Jose State University
Martin Hacakworth, Idaho State University
Jonathan Hall, Pennsylvania State University, Behren
Oshri Karmon, Diablo Valley College
Jim Napolitano, Rensselaer Polytechnic Institute
Donald Naugle, Texas A&M University
Douglas Osheroff, Stanford University
Harvey Picker, Trinity College
Anthony Pittuco, Prima Community College
Robert Scherer, Ohio State University
Paul Stanley, California Lutheran University
John Toutonghi, Seattle University

Tenemos una profunda deuda de gratitud con las personas anteriores por su dedicación y por las ideas que nos brindaron. También nos gustaría reconocer públicamente las aportaciones del Physics Education Group de la Universidad de Washington, especialmente las de Paul Heron y Lillian McDermott.

Expresamos nuestro agradecimiento a dos personas cuyos esfuerzos infatigables y excelentes contribuciones fueron indispensables para el éxito de este proyecto y que fijaron altos niveles de calidad del producto terminado. J. Richard Christman ha sido uno de ellos; su minuciosa revisión del texto y su participación en los suplementos abarca ya más de tres ediciones. Su insistencia en explicaciones rigurosas y en la didáctica adecuada a lo largo del texto nos ayudó muchas veces a no desviarnos de la senda. Paul Stanley es un nuevo miembro del equipo cuya responsabilidad primaria la constituyen las preguntas y problemas de final de capítulo. Le aportó al proyecto muchas ideas creativas e intuiciones brillantes que estimularán a los estudiantes (lo mismo que a los instructores) a ampliar su comprensión del material.

El personal de John Wiley & Sons nos brinda un apoyo constante a lo largo del proyecto; les agradecemos infinitamente sus atenciones. Nos gustaría expresar nuestra gratitud especialmente a Stuart Johnson por la forma en que administró el proyecto y por su generosa dedicación hasta su terminación. Han enriquecido enormemente la calidad del texto la editora de producción Elizabeth Swain, la editora de fotografías Hilary Newman, la editora de ilustraciones Anna Melhorn y la diseñadora Karin Kincheloe. Sin la habilidad y los esfuerzos de ellas este proyecto no se hubiera publicado.

Pese al empeño puesto por los autores, los revisores y los editores, siempre habrá errores en un libro; invitamos a los usuarios que nos hagan llegar sus correcciones y comentarios sobre el contenido o el aspecto didáctico. Leemos estas comunicaciones, respondemos al mayor número posible y lamentamos no poder contestar todas. No obstante, pedimos a nuestros lectores que nos envíen sus comentarios a la dirección: info@patriacultural.com.mx

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

MEDICIÓN 1

1-1 Magnitudes físicas, patrones y unidades 1
1-2 El sistema internacional de unidades* 2
1-3 Patrón del tiempo 3
1-4 El patrón de longitud** 4
1-5 El patrón de masa 5
1-6 Precisión y cifras significativas 7
1-7 Análisis de las dimensiones 7
Preguntas y problemas 9

CAPÍTULO 2

MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN 13

2-1 Cinemática con vectores 13
2-2 Propiedades de los vectores 14
2-3 Vectores de posición, velocidad y aceleración 17
2-4 Cinemática unidimensional 20
2-5 Movimiento con aceleración constante 26
2-6 Cuerpos en caída libre 28
Preguntas y problemas 31

CAPÍTULO 3

FUERZA Y LAS LEYES DE NEWTON 41

3-1 Mecánica clásica 41
3-2 Primera ley de Newton 42
3-3 Fuerza 44
3-4 Masa 46
3-5 Segunda ley de Newton 47
3-6 Tercera ley de Newton 50
3-7 Peso y masa 52
3-8 Aplicaciones de las leyes de Newton en una dimensión 54
Preguntas y problemas 57

CAPÍTULO 4

MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES 65

4-1 Movimiento en tres dimensiones con aceleración constante 65
4-2 Leyes de Newton en la forma vectorial tridimensional 66
4-3 Movimiento de proyectiles 68
4-4 Fuerzas de resistencia al avance y el movimiento de proyectiles (opcional) 71
4-5 Movimiento circular uniforme 73
4-6 Movimiento relativo 76
Preguntas y problemas 78

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON 89

5-1 Leyes de la fuerza 89
5-2 Tensión y fuerzas normales* 90
5-3 Fuerzas de fricción* 95
5-4 La dinámica del movimiento circular uniforme 100
5-5 Fuerzas dependientes del tiempo (opcional)* 102
5-6 Marcos no inerciales y seudofuerzas (opcional) 103
5-7 Limitaciones de las leyes de Newton (opcional) 105
Preguntas y problemas 107

CAPÍTULO 6

MOMENTO* 119

6-1 Colisiones 119
6-2 Momento lineal 121
6-3 Impulso y momento 121
6-4 Conservación del momento 124
6-5 Colisiones entre dos cuerpos 126
Preguntas y problemas 130

CAPÍTULO 7

SISTEMAS DE PARTÍCULAS 139

7-1 Movimiento de un objeto complejo 139
7-2 Sistemas de dos partículas 140
7-3 Sistemas de muchas partículas 142
7-4 Centro de masa de los objetos sólidos 145
7-5 Conservación del momento en un sistema de partículas 147
7-6 Sistemas de masa variable* (opcional) 149
Preguntas y problemas 152

CAPÍTULO 8

CINEMÁTICA ROTACIONAL 159

8-1 Movimiento rotacional 159
8-2 Las variables rotacionales 160
8-3 Las magnitudes rotacionales como vectores 162
8-4 Rotación con aceleración angular constante 164
8-5 Relaciones entre las variables lineales y angulares 165
8-6 Relaciones vectoriales entre variables lineales y angulares (opcional) 167
Preguntas y problemas 169

CAPÍTULO 9

DINÁMICA ROTACIONAL 175

9-1 La torca 175
9-2 Inercia rotacional y la segunda ley de Newton 178
9-3 Inercia rotacional de los cuerpos sólidos 183
9-4 La torca debida a la gravedad 185
9-5 Aplicaciones de las leyes del equilibrio de Newton para la rotación 187
9-6 Aplicaciones de las leyes de no equilibrio de Newton para la rotación 191
9-7 Combinación del movimiento rotacional y traslacional 193
Preguntas y problemas 197

CAPÍTULO 10

MOMENTO ANGULAR 207

10-1 Momento angular de una partícula 207
10-2 Sistemas de partículas 209
10-3 Momento y velocidad angulares 211
10-4 Conservación del momento angular 215
10-5 El trompo que gira* 219
10-6 Repaso de la dinámica rotacional 220
Preguntas y problemas 221

CAPÍTULO 11

ENERGÍA 1: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA 229

11-1 Trabajo y energía 229
11-2 Trabajo realizado por una fuerza constante 230
11-3 Potencia 234
11-4 Trabajo realizado por una fuerza variable 235
11-5 Trabajo realizado por una fuerza variable: el caso bidimensional (opcional) 238
11-6 Energía cinética y teorema de trabajo-energía 239
11-7 Trabajo y energía cinética en el movimiento rotacional 243
11-8 Energía cinética en colisiones 244
Preguntas y problemas 247

CAPÍTULO 12

ENERGÍA 2: ENERGÍA POTENCIAL 257

12-1 Fuerzas conservativas 257
12-2 Energía potencial 259
12-3 Conservación de la energía mecánica 261
12-4 Conservación de la energía en el movimiento rotacional 264
12-5 Sistemas conservativos unidimensionales: la solución completa 266
12-6 Sistemas tridimensionales conservativos (opcional) 268
Preguntas y problemas 270

CAPÍTULO 13

ENERGÍA 3: CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 279

13-1 Trabajo realizado sobre un sistema por fuerzas externas 279
13-2 Energía interna en un sistema de partículas 281
13-3 Trabajo de fricción 282
13-4 Conservación de la energía en un sistema de partículas 284
13-5 Energía del centro de masa 285
13-6 Reacciones y desintegraciones 288
13-7 Transferencia de energía por calor 290
Preguntas y problemas 292

CAPÍTULO 14

GRAVITACIÓN 299

14-1 Origen de la ley de gravitación 299
14-2 Ley de la gravitación universal de Newton 300
14-3 La constante gravitacional g 302
14-4 Gravitación cerca de la superficie terrestre 304
14-5 Los dos teoremas de cascarones 305
14-6 Energía potencial gravitacional 307
14-7 Los movimientos de los planetas y de los satélites 311
14-8 El campo gravitacional (opcional) 315
14-9 Avances modernos en la gravitación (opcional) 316
Preguntas y problemas 319

CAPÍTULO 15

ESTÁTICA DE FLUIDOS 331

15-1 Fluidos y sólidos 331
15-2 Presión y densidad 332
15-3 Variación de la presión en un fluido en reposo 333
15-4 Principios de Pascal y de Arquímedes 336
15-5 Medición de la presión 340
15-6 Tensión superficial (opcional) 341
Preguntas y problemas 343

CAPÍTULO 16

DINÁMICA DE FLUIDOS 351

16-1 Conceptos generales del flujo de fluidos 351
16-2 Líneas de corriente y la ecuación de continuidad 352
16-3 La ecuación de Bernoulli 354
16-4 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad 356
16-5 Campos de flujo (opcional) 359
16-6 Viscosidad, turbulencia y flujo caótico (opcional) 360
Preguntas y problemas 364

CAPÍTULO 17

OSCILACIONES 373

17-1 Sistemas oscilatorios 373
17-2 El oscilador armónico simple 375
17-3 Movimiento armónico simple 376
17-4 Energía en el movimiento armónico simple 378
17-5 Aplicaciones del movimiento armónico simple 380
17-6 Movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme 384
17-7 Movimiento armónico amortiguado 385
17-8 Oscilaciones forzadas y resonancia 387
17-9 Oscilador de dos cuerpos (opcional) 389
Preguntas y problemas 390

CAPÍTULO 18

MOVIMIENTO ONDULATORIO 401

18-1 Ondas mecánicas 401
18-2 Tipos de ondas 402
18-3 Ondas viajeras 403
18-4 Rapidez de onda en una cuerda estirada 406
18-5 La ecuación de onda (opcional) 408
18-6 Energía en el movimiento ondulatorio 409
18-7 El principio de superposición 411
18-8 Interferencia de ondas 412
18-9 Ondas estacionarias 414
18-10 Ondas estacionarias y la resonancia 416
Preguntas y problemas 419

CAPÍTULO 19

ONDAS SONORAS 427

19-1 Propiedades de las ondas sonoras 427
19-2 Ondas sonoras viajeras 428
19-3 La rapidez del sonido 430
19-4 Potencia e intensidad de las ondas sonoras 432
19-5 Interferencia de las ondas sonoras 433
19-6 Ondas estacionarias longitudinales 434
19-7 Sistemas vibratorios y fuentes de sonido* 436
19-8 Pulsos 439
19-9 El efecto Doppler 440
Preguntas y problemas 443

CAPÍTULO 20

TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD* 451

20-1 Problemas de la física clásica 451
20-2 Los postulados de la relatividad especial 453
20-3 Consecuencias de los postulados de Einstein 454
20-4 La transformación de Lorentz 457
20-5 Medición de las coordenadas espacio-tiempo de un evento 459
20-6 La transformación de velocidades 460
20-7 Consecuencias de la transformación de Lorentz 461
20-8 Momento relativista 465
20-9 Energía relativista 467
20-10 El sentido común y la relatividad especial 471
Preguntas y problemas 471

CAPÍTULO 21

TEMPERATURA 479

21-1 Temperatura y equilibrio térmico 479
21-2 Escalas de temperatura 480
21-3 Medición de las temperaturas 482
21-4 Expansión térmica 484
21-5 El gas ideal 487
Preguntas y problemas 489

CAPÍTULO 22

PROPIEDADES MOLECULARES DE LOS GASES 497

22-1 Naturaleza atómica de la materia 497
22-2 Perspectiva molecular de la presión 499
22-3 La trayectoria libre media 501
22-4 La distribución de las velocidades moleculares 503
22-5 Distribución de las energías moleculares 506
22-6 Ecuaciones de estado de los gases reales 507
22-7 Fuerzas intermoleculares (opcional) 509
Preguntas y problemas 510

CAPÍTULO 23

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 517

23-1 El calor: energía en tránsito 517
23-2 La transferencia de calor 518
23-3 La primera ley de la termodinámica 521
23-4 Capacidad calorífica y calor específico 523
23-5 Trabajo realizado en o por un gas ideal 526
23-6 Energía interna de un gas ideal 529
23-7 Capacidades caloríficas de un gas ideal 531

23-8 Aplicaciones de la primera ley de la termodinámica 533
Preguntas y problemas 536

CAPÍTULO 24

ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA 545
24-1 Procesos en una dirección 545
24-2 Definición del cambio de entropía 546
24-3 Cambio de entropía en los procesos irreversibles 547
24-4 Segunda ley de la termodinámica 551
24-5 Entropía y el desempeño de las máquinas 551
24-6 Entropía y el desempeño de los refrigeradores 555
24-7 Eficiencia de las máquinas reales 556
24-8 La segunda ley revisada 557
24-9 Una perspectiva estadística de la entropía 558
Preguntas y problemas 536

APÉNDICES

A. El sistema internacional de unidades (SI)* A-1
B. Constantes físicas fundamentales* A-3
C. Datos astronómicos A-4
D. Propiedades de los elementos A-6
E. Tabla periódica de los elementos A-9
F. Partículas elementales A-10
G. Factores de conversión A-12
H. Vectores A-17
I. Fórmulas matemáticas A-20
J. Premios Nobel de Física* A-22

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS IMPARES A-26

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS P-1

ÍNDICE I-1

MEDICIÓN

La física es ante todo una ciencia experimental, a pesar de la elegancia matemática de algunas de sus teorías más complejas y abstractas. Por ello, es indispensable que quienes realizan mediciones precisas puedan coincidir en las normas de cómo expresar los resultados de sus mediciones, pues de lo contrario no podrían comunicarse de un laboratorio a otro ni verificarlas.

En este capítulo iniciamos nuestro estudio de la física explicando algunas de las unidades básicas de las magnitudes físicas y algunas normas que han sido aceptadas para medirlas. Expondremos la forma correcta de presentar los resultados de los cálculos y de las mediciones, entre otras cosas las dimensiones apropiadas y el número de cifras significativas. Explicamos y ejemplificamos la importancia de prestar atención a las dimensiones de las magnitudes que aparecen en las ecuaciones. Más adelante definiremos otras unidades básicas y muchas de las derivadas conforme se vaya necesitando.

1-1 MAGNITUDES FÍSICAS, PATRONES Y UNIDADES

Las leyes de la física se expresan en muchas magnitudes diferentes: masa, longitud, tiempo, fuerza, rapidez, densidad, resistencia, temperatura, intensidad luminosa, intensidad del campo magnético y muchas otras. Cada uno de esos términos posee un significado exacto y forman parte del lenguaje que los físicos y otros científicos emplean para comunicarse: cuando un físico usa la designación "energía cinética", sus colegas de inmediato saben lo que quiere decir. Esos términos representan además una magnitud que puede medirse en el laboratorio; del mismo modo que deben coincidir en el significado de ellos, también deben hacerlo en las unidades de expresión de sus valores. De no ser así, tampoco podrían comunicarse los resultados ni comparar los obtenidos en experimentos que se efectúan en varios laboratorios.

La comparación exige crear y aceptar un conjunto de *patrones* o *estándares* de las unidades de medición. Por ejemplo, si una medición de longitud se expresa como 4.3 metros, significa que la longitud medida es 4.3 veces el valor aceptado de la longitud estándar definida como "metro". Si dos laboratorios basan sus mediciones en la misma norma aceptada del metro, se supone que será fácil comparar los resultados. Para ello las normas aceptadas han de ser *accesibles* a quienes necesitan calibrar sus normas secundarias, y además han de ser *invariables* ante el cambio con el paso del tiempo o con las alteraciones del ambiente (temperatura, humedad y otras condiciones).

El mantenimiento y el desarrollo de las normas de medición es una rama dinámica de la ciencia. En Estados Unidos, el National Institute of Standards and Technology* (NIST) es el principal encargado de ello. Pero se requiere asimismo que las normas gocen de aceptación internacional, y esto se ha logrado mediante una serie de reuniones internacionales de la Conferencia General de Pesas y Medidas (conocida por su acrónimo francés CGPM), que se fundó en 1889; su vigesimaprimera junta se celebró en 1999.**

Por fortuna, no es necesario establecer normas de medición para todas las magnitudes físicas, pues algunas pueden considerarse fundamentales, y las normas de otras pueden obtenerse de las fundamentales. Por ejemplo, la longitud y el tiempo antes se consideraba que pertenecían a esa categoría, con sus normas individuales establecidas (el metro y el segundo,

* Véase en http://physics.nist.gov/cuu información acerca de la función que desempeña NIST en la conservación de los patrones.

** Véanse en http://www.bipm.fr algunas recomendaciones hechas por esta conferencia.

respectivamente); la norma de medición de la rapidez (= longitud/tiempo) podía derivarse a partir de ellas. Con todo, en años más recientes la rapidez de la luz se ha medido con una precisión que supera a la del metro estándar anterior, de ahí que en la actualidad todavía utilicemos un patrón para el segundo, pero que definamos la norma de longitud (el metro) en función de la rapidez de la luz y del segundo (Sección 1-4). El caso anterior muestra cómo las mediciones de precisión creciente pueden modificar los patrones establecidos y la rapidez con que evolucionan. Desde que se publicó la primera edición del presente libro, la precisión de la unidad estándar de tiempo (el segundo) ha mejorado en más de un factor de 1,000.

Así pues, el problema principal radica en escoger un sistema que incluya como fundamentales el menor número de magnitudes físicas y en aceptar patrones accesibles e invariables para medirlas. En las siguientes secciones del capítulo describiremos el sistema aceptado internacionalmente y algunas de sus magnitudes fundamentales.

1-2 EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES*

En sus reuniones, la Conferencia General de Pesas y Medidas seleccionó como *unidades base* las siete magnitudes que aparecen en la tabla 1-1. Constituyen la base del Sistema Internacional de Unidades, cuya abreviatura SI está tomada del francés *Le Système International d'Unités*. El SI es la forma moderna de lo que se conoce comúnmente con el nombre de sistema métrico.

En este libro se dan numerosos ejemplos de unidades derivadas de dicho sistema, como rapidez, fuerza y resistencia eléctrica, que figuran en la tabla 1-1. Por ejemplo, la unidad de fuerza en el SI, denominada *Newton* (su abreviatura es N), se define a partir de las unidades base, así:

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2},$$

como aclararemos en el Capítulo 3.

Si expresamos las propiedades físicas en unidades del SI como la producción de una planta de energía eléctrica o el intervalo temporal entre dos fenómenos nucleares, a menudo tendremos que usar números muy grandes o muy pequeños. Para facilitar los cálculos, la Conferencia General de Pesas y Medidas recomienda los prefijos que se incluyen en la tabla 1-2. Por tanto, podemos anotar la producción de una central eléctrica, 1.3×10^9 watts, como 1.3 gigawatts o 1.3 GW. Asimismo, podemos anotar el intervalo temporal del tamaño que a menudo se encuentra en física nuclear, 2.35×10^{-9} segundos como 2.35 nanosegundos o 2.35 ns. Como se advierte en la tabla 1-1, el kilogramo es la única unidad base del SI que *ya* contiene uno de los prefijos de la tabla 1-2. Por tanto, 10^3 kg *no* se expresa como 1 kilokilogramo, sino como 10^3 kg = 10^6 g = 1 Mg (megagramo).

Para fortalecer la tabla 1-1 necesitamos siete conjuntos de procedimientos operacionales para obtener en el laboratorio las siete unidades base del SI. En las tres siguientes secciones vamos a explorarlas en el tiempo, en la longitud y en la masa.

Otros dos grandes sistemas compiten con el SI. Uno es el sistema gaussiano, en cuyos términos se escriben muchas de las obras de física. En este libro no lo empleamos. El apéndice G contiene los factores de conversión a las unidades del Sistema Internacional.

El otro es el sistema inglés, todavía vigente hoy en Estados Unidos. Las unidades básicas en mecánica son longitud (el pie), la fuerza (la libra) y el tiempo (el segundo). Una vez más, en el apéndice G se incluyen los factores de conversión a las unidades del SI. En este libro utilizamos estas últimas, pero en ocasiones se dan los equivalentes del sistema inglés para ayudar a familiarizarse más con el SI a quienes no lo están. Estados Unidos sigue siendo el único país desarrollado que todavía no adopta el SI como su sistema oficial. No obstante, es la norma en todos los laboratorios del gobierno y en muchas industrias, sobre todas las que realizan comercio con el exterior. La pérdida de la nave espacial *Mars Climate Orbiter* en septiembre de 1999, se debió a que el fabricante expresó algunas de sus características en unidades inglesas, que el equipo de navegación de la NASA interpretó erróneamente como unidades del SI. ¡Es importantísimo tener cuidado con las unidades que se usan!

TABLA 1-1 Unidades base del SI

	Unidad del SI	
Magnitud	*Nombre*	*Símbolo*
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Cantidad de sustancia	mol	mol
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Corriente eléctrica	ampere	A
Intensidad luminosa	candela	cd

TABLA 1-2 Prefijos del SI[a]

Factor	*Prefijo*	*Símbolo*	*Factor*	*Prefijo*	*Símbolo*
10^{24}	iota-	Y	10^{-1}	deci-	d
10^{21}	zeta-	Z	10^{-2}	**centi-**	c
10^{18}	exa-	E	10^{-3}	**mili-**	m
10^{15}	peta-	P	10^{-6}	**micro-**	μ
10^{12}	tera-	T	10^{-9}	**nano-**	n
10^{9}	**giga-**	G	10^{-12}	**pico-**	p
10^{6}	**mega-**	M	10^{-15}	femto-	f
10^{3}	**kilo-**	k	10^{-18}	atto-	a
10^{2}	hecto-	h	10^{-21}	zepto-	z
10^{1}	deca-	da	10^{-24}	yocto-	y

[a] Los prefijos que se emplean en este libro se imprimen en negritas.

* Consúltese "SI: The International System of Units", de Robert A. Nelson (American Association of Physics Teachers, 1981). La guía "oficial" del SI en Estados Unidos se encuentra en Special Publication 811 del National Institute of Standards and Technology (edición de 1995).

PROBLEMA RESUELTO 1-1. Toda magnitud física puede multiplicarse por 1 sin que cambie su valor. Por ejemplo, 1 min = 60 s, de modo que 1 = 60 s/1 min; asimismo, 1 ft = 12 in, de modo que 1 = 1 ft/12 in. Usando los factores correspondientes de conversión, calcule *a*) la rapidez en metros por segundo equivalente a 55 millas por hora, y *b*) el volumen en centímetros cúbicos de un tanque con una capacidad de 16 galones de gasolina.

Solución *a*) Para nuestros factores de conversión necesitamos (apéndice G) 1 mi = 1,609 m (así que 1 = 1,609 m/1 mi) y 1 h = 3,600 s (de modo que 1 = 1 h/3,600 s). Por tanto,

$$\text{rapidez} = 55\,\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1{,}609\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{mi}}} \times \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3{,}600\ \text{s}} = 25\ \text{m/s}.$$

b) Un galón de fluidos mide 231 pulgadas cúbicas y 1 in = 2.54 cm. Por tanto,

$$\text{volumen} = 16\ \cancel{\text{gal}} \times \frac{231\ \cancel{\text{in.}}^3}{1\ \cancel{\text{gal}}} \times \left(\frac{2.54\ \text{cm}}{1\ \cancel{\text{in.}}}\right)^3 = 6.1 \times 10^4\ \text{cm}^3.$$

Nótese en los dos cálculos anteriores, cómo los factores de conversión de unidades se insertan, de manera que las unidades indeseadas aparezcan en un numerador y en un denominador; por tanto, se cancelan.

1-3 PATRÓN DEL TIEMPO

La medición del tiempo tiene dos aspectos. En la vida diaria y en algunas aplicaciones científicas queremos saber la hora del día para ordenar los eventos en secuencia. En casi todas las aplicaciones científicas deseamos saber cuánto dura un evento (el intervalo temporal), de ahí que una medida del tiempo deba contestar las preguntas: "¿En qué momento ocurre?", y "¿cuánto durará?" La tabla 1-3 comprende los intervalos temporales que pueden medirse. Los valores extremos de la misma pueden variar por un factor aproximado de 10^{63}.

Como medida del tiempo podemos usar cualquier fenómeno que se repita. La medición consiste en contar las repeticiones, incluidas sus fracciones. Por ejemplo, podríamos emplear un péndulo oscilante, un sistema de masa-resorte o un cristal de cuarzo. Entre los muchos fenómenos repetitivos de la naturaleza, la rotación de la Tierra sobre su eje, que determina la duración del día, se ha usado durante siglos como norma temporal. Un segundo (solar medio) se define como 1/86,400 de un día (solar medio).

Los relojes de cuarzo, cuyo funcionamiento se basa en vibraciones periódicas eléctricamente sostenidas de un cristal de cuarzo, sirven de patrones temporales secundarios. Un reloj de cuarzo puede calibrarse con la Tierra en rotación por medio de observaciones astronómicas y utilizarse en el laboratorio para medir la duración del tiempo. Las mejores de ellas han medido el tiempo con una precisión aproximada de 1 segundo en 200,000 años, pero ni siquiera esa precisión es suficiente para atender las demandas de la ciencia, la tecnología y el comercio modernos.

En 1967, la vigesimatercera Conferencia General de Pesas y Medidas adoptó una definición de "segundo" basada en la frecuencia característica de la radiación que emite un átomo de cesio. En concreto, estableció lo siguiente:

TABLA 1-3 Medición de algunos intervalos temporales[a]

Intervalo de tiempo	*Segundos*
Vida de un protón	$>10^{40}$
Vida media de una desintegración beta doble de ^{82}Se	3×10^{27}
Edad del universo	5×10^{17}
Edad de la pirámide de Keops	1×10^{11}
Esperanza de vida humana (EUA)	2×10^{9}
Tiempo de la órbita terrestre alrededor del Sol (1 año)	3×10^{7}
Tiempo de rotación de la Tierra alrededor de su eje (1 día)	9×10^{4}
Periodo de un satélite terrestre típico de órbita baja	5×10^{3}
Tiempo entre dos latidos cardiacos normales	8×10^{-1}
Periodo de diapasón para concierto	2×10^{-3}
Periodo de oscilación de microondas de 3 cm	1×10^{-10}
Periodo típico de rotación de una molécula	1×10^{-12}
Pulso luminoso más breve producido (1990)	6×10^{-15}
Vida de las partículas menos estables	$< 10^{-23}$

[a] Valores aproximados.

El segundo es la duración de 9,192,631,770 vibraciones de una radiación (especificada) emitida por un isótopo (especificado) del átomo de cesio.

La figura 1-1 muestra la frecuencia nacional estándar actual, un *reloj de fuente de cesio* desarrollado en el National Institute of Standard and Technology (NIST). Su precisión aproximada es de 1 segundo en 20 millones de años.

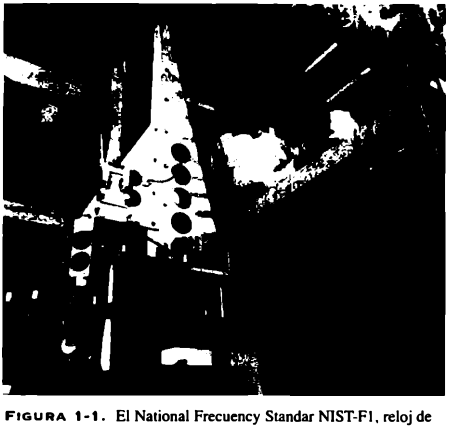


FIGURA 1-1. El National Frecuency Standar NIST-F1, reloj de fuente de cesio, desarrollado en el National Institute of Standards and Technology. La ilustración muestra a sus creadores, Steve Jefferts y Dawn Meekhof. En este aparato, los átomos de cesio de movimiento extremadamente lento son proyectados hacia arriba, recorriendo una distancia aproximada de un metro antes de volver a caer, por acción de la gravedad, a su posición de lanzamiento en 1 segundo aproximadamente, de ahí la designación "fuente". La baja velocidad de estos átomos proyectados permite realizar una observación precisa de la frecuencia de la radiación atómica emitida por ellos. Se da más información en la dirección http://www.nist.gov/public_affairs/releases/n99-22.htm.

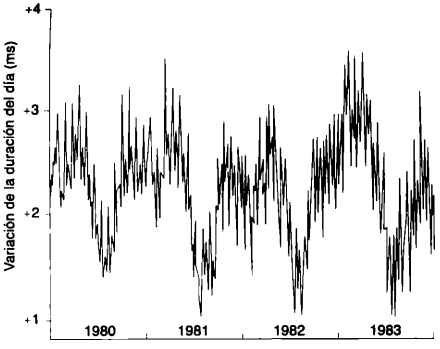


FIGURA 1-2. Variación de la duración del día en un periodo de 4 años. Nótese que la escala vertical es apenas 3 ms = 0.003 s. Véase "The Earth's Rotation Rate", de John Wahr, *American Scientists*, enero-febrero de 1985, p. 41.

Los relojes de cesio con que están equipados los satélites constituyen la base del Sistema de Posicionamiento Global. Los portátiles del tamaño de una maleta se expenden en el comercio. También es posible comprar relojes de escritorio o de pulsera que, automática y de manera periódica actualizados por señales de radio provenientes de NIST, indican "el tiempo atómico". La figura 1-2 muestra, en comparación con un reloj de cesio, las variaciones en la rapidez de rotación de la Tierra en un periodo de 4 años. Estos datos indican lo que significa para un trabajo preciso el relativamente deficiente patrón temporal de la rotación de la Tierra. La figura 1-3 contiene el impresionante registro de mejoramientos que, en el cálculo del tiempo, se han logrado más o menos en los últimos 300 años, desde la invención del reloj de péndulo por Christian Huygens en 1665.

El U.S. Naval Observatory (USNO), situado en Washington, D.C., se encarga de mantener los estándares del cálculo del tiempo. Su reloj maestro representa la producción combinada de un maser de hidrógeno contenido en 20 bóvedas separadas y con ambiente controlado.*

1-4 EL PATRÓN DE LONGITUD**

El primer patrón internacional de longitud era una barra de aleación de platino e iridio denominada metro patrón, que se conservaba en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas cerca de París. El metro era la distancia entre dos líneas delgadas grabadas cerca de los extremos de la barra, cuando se la conservaba a una temperatura de 0°C y se sostenía mecánicamente en una forma establecida. Tradicionalmente se suponía que era la diezmillonésima parte de la distancia entre el polo norte y el ecuador sobre el meridiano que pasa por París. Pero mediciones más exactas, demostraron que la barra del metro patrón difería un poco de ese valor (aproximadamente 0.023%).

Como no se tenía acceso al metro patrón, se hicieron copias exactas y se enviaron a los laboratorios estandarizados de todo el mundo. Estos patrones secundarios sirvieron para calibrar otras barras medidoras más accesibles. Así, hasta hace poco las barras o instrumentos de medición debían su autoridad al metro patrón a través de una complicada cadena de comparaciones en que se usaban microscopios y máquinas de división. Desde 1959 ha sucedido lo mismo con la yarda, cuya

* La información relativa a los servicios de tiempo que ofrece este organismo está disponible en Internet en la dirección http://tycho.usno.navy.mil/ y en el teléfono (202) 762-1401.

** Véase "The New Definition of Meter", de P. Giacomo, *American Journal of Physics*, julio de 1984, p. 607.

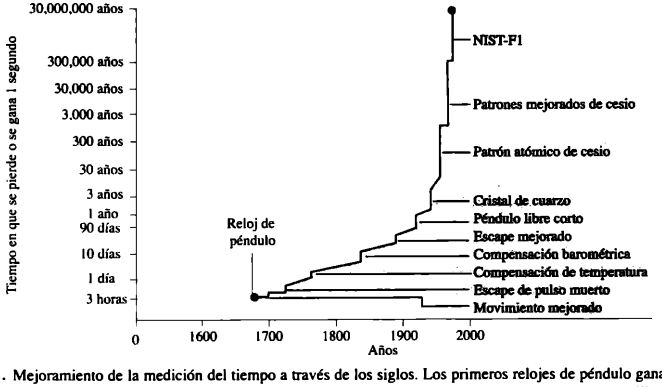


FIGURA 1-3. Mejoramiento de la medición del tiempo a través de los siglos. Los primeros relojes de péndulo ganaban o perdían un segundo cada cierto número de horas; en los modernos relojes de cesio esto sucede sólo después de algunos millones de años.

definición legal en Estados Unidos adoptada ese año establece que

$$1 \text{ yarda} = 0.9144 \text{ metros} \quad \text{(exactamente)},$$

que equivale a

$$1 \text{ pulgada} = 2.54 \text{ centímetros} \quad \text{(exactamente)}.$$

La exactitud con que la necesaria intercomparación de la longitud puede efectuarse con la técnica de equiparar los rayones finos por medio de un microscopio ya no satisface a la ciencia ni a la tecnología modernas. Un patrón de longitud más preciso y reproducible se obtuvo en 1893, cuando el físico estadounidense Albert A. Michelson comparó la longitud del metro estándar con la longitud de onda de luz roja emitida por los átomos de cadmio. Midió cuidadosamente la longitud de la barra y descubrió que el metro estándar era igual a 1,553,163.5 de esas longitudes de onda. En cualquier laboratorio podían obtenerse lámparas idénticas de cadmio, así que Michelson encontró la manera de que los científicos de todo el mundo tuvieran un patrón preciso de longitud sin necesidad de recurrir a la barra del metro patrón.

Pese a este adelanto tecnológico, la barra metálica siguió siendo el patrón oficial hasta 1960, cuando la decimoprimera Conferencia General de Pesas y Medidas adoptó un patrón atómico del metro. Éste se basaba en la longitud de onda de cierta luz de color rojo anaranjado emitida por los átomos de un isótopo de kriptón, con número de masa 86, identificado con el símbolo ^{86}Kr.* En concreto, se definió que un metro es 1,650,763.73 longitudes de onda de dicha luz. Gracias a este patrón fue posible comparar las longitudes con una precisión menor a 1 parte en 10^9.

En 1983, las exigencias de mayor precisión habían llegado a tal punto que ni siquiera el ^{86}Kr patrón podía atenderlas, y en ese año se tomó una medida audaz. Se redefinió al metro como la distancia que recorre una onda luminosa durante un intervalo temporal especificado. En palabras de la decimoséptima Conferencia General de Pesas y Medidas:

> *El metro es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo temporal de 1/299,792,458 de segundo.*

Esto es equivalente a decir que la rapidez de la luz c, ahora *se define* como

$$c = 299{,}792{,}458 \text{ m/s} \quad \text{(exactamente)}.$$

Esta nueva definición del metro se necesitaba porque las mediciones de la rapidez de la luz habían alcanzado tal precisión que la reproducibilidad del ^{86}Kr metro se había convertido en el factor limitante. En vista de ello, convenía adoptar la rapidez de la luz como una magnitud definida y utilizarla junto con el patrón del tiempo (el segundo) determinado con mucha precisión para redefinir al metro.

La tabla 1-4 muestra el intervalo de longitudes medidas que podemos comparar con el patrón.

TABLA 1-4 Algunas longitudes medidas[a]

Longitud	*Metros*
Distancia con el cuasar más lejano observado	2×10^{26}
Distancia con la galaxia Andrómeda	2×10^{22}
Radio de nuestra galaxia	6×10^{19}
Distancia a la estrella más cercana (Proxima Centauri)	4×10^{16}
Radio medio de órbita del planeta más distante (Plutón)	6×10^{12}
Radio del Sol	7×10^{8}
Radio de la Tierra	6×10^{6}
Altura del monte Everest	9×10^{3}
Altura de una persona común	2×10^{0}
Espesor de una página de este libro	1×10^{-4}
Tamaño de un virus ordinario	1×10^{-6}
Radio de un atómo de hidrógeno	5×10^{-11}
Radio efectivo de un protón	1×10^{-15}

[a] Valores aproximados

PROBLEMA RESUELTO 1-2. El año luz es una medida de longitud (no del tiempo) equivalente a la distancia que la luz recorre en 1 año. Obtenga el factor de conversión entre los años luz y los metros, y calcule la distancia con la estrella Proxima Centauri (4.0×10^{16} m) en años luz.

Solución El factor de conversión de años a segundos es

$$1 \text{ y} = 1 \text{ y} \times \frac{365.25 \text{ d}}{1 \text{ y}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}$$
$$= 3.16 \times 10^7 \text{ s}.$$

Usando tres cifras significativas, la rapidez de la luz es 3.00×10^8 m/s. Por tanto, en un año la luz recorre una distancia de

$$(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})\,(3.16 \times 10^7 \text{ s}) = 9.48 \times 10^{15} \text{ m},$$

así que

$$1 \text{ año luz} = 9.48 \times 10^{15} \text{ m}.$$

La distancia con Proxima Centauri es

$$(4.0 \times 10^{16} \text{ m}) \times \frac{1 \text{ año luz}}{9.48 \times 10^{15} \text{ m}} = 4.2 \text{ años luz}.$$

Así pues, la luz procedente de esa estrella tarda cerca de 4.2 años en llegar a la Tierra.

1-5 EL PATRÓN DE MASA

El patrón de la masa en el SI es un cilindro de platino e iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, al que por convención internacional se le asignó una masa de 1 kilogramo. Los patrones secundarios se envían a los laboratorios de estandarización en otros países y las masas de

* El número de masa es el total de protones más neutrones del núcleo. El kriptón que se encuentra en la naturaleza, tiene varios isótopos correspondientes a los átomos con distinto número de masa. Es importante especificar un isótopo particular para el patrón, porque la longitud de onda de la radiación escogida variará de un isótopo a otro aproximadamente en 1 parte en 10^5, lo cual es demasiado grande en comparación con la precisión del patrón.

otros cuerpos se calculan por un método de equilibrio de brazos iguales, con una precisión de una parte en 10^8.

La copia del patrón internacional de masa que se conserva en Estados Unidos, llamado kilogramo prototipo No. 20, está en una bóveda del National Institute of Standards and Technology (Fig. 1-4). Una vez al año se extrae para revisar los valores de los patrones terciarios. Desde 1889, ha sido llevado dos veces a Francia para compararlo con el kilogramo maestro. Cuando se saca de la bóveda siempre están presentes dos personas; una traslada el kilogramo en un par de pinzas y la otra lo atrapa en caso de que el kilogramo se le caiga a la primera.

En la tabla 1-5 se incluyen algunas masas medidas. Nótese que varían por un factor aproximado de 10^{83}. Casi todas se midieron con un kilogramo estándar aplicando métodos indirectos. Por ejemplo, podemos medir la masa de la Tierra (Sección 1-43) midiendo en el laboratorio la fuerza gravitacional de atracción entre dos esferas de plomo y comparándola con la atracción de la Tierra para una masa conocida. Las masas de las esferas deben conocerse mediante una comparación directa con el kilogramo estándar.

En la escala atómica tenemos un segundo patrón de masa, que no es una unidad del SI. Es la masa del átomo ^{12}C, al cual por convención internacional se le asignó una masa atómica de 12 unidades unificadas de masa atómica (cuya abreviatura es u), exactamente y por definición. Podemos obtener la masa de otros átomos con mucha exactitud por medio de un espectrómetro de masas (Sección 32-2). La tabla 1-6 comprende algunas masas atómicas y también la incertidumbre estimada de la medición. Necesitamos un segundo patrón de masa, porque las técnicas actuales de laboratorio permiten comparar las masas atómicas entre sí con mayor precisión que con la que en el presente podemos compararlas con el kilogramo estándar. Ya se labora en la creación de un patrón de masa que reemplace al kilogramo estándar. La relación entre el actual patrón atómico y el primario es aproximadamente

$$1\ \text{u} = 1.661 \times 10^{-27}\ \text{kg}.$$

Una unidad conexa del SI es el *mol*, que mide la cantidad de una sustancia. Un mol de átomos ^{12}C tiene una masa de exactamente 12 gramos, y contiene varios átomos numéricamente iguales a la constante de Avogadro N_A:

$$N_A = 6.02214199 \times 10^{23}\ \text{por mol}.$$

Es un número calculado de manera experimental, con una incertidumbre aproximada de una parte en un millón. Un mol de cualquier sustancia contiene el mismo número de entidades elementales (átomos, moléculas, etc.). Así, 1 mol de gas helio contiene N_A átomos de He, 1 mol de oxígeno contiene N_A moléculas de O_2, y 1 mol de agua contiene N_A moléculas de H_2O.

Para relacionar una unidad atómica de gas con una unidad volumétrica hay que utilizar la constante de Avogadro. Si se quiere reemplazar el kilogramo estándar por un patrón atómico, habrá que mejorar por lo menos dos órdenes de magnitud en la precisión del valor medido de N_A para obtener las masas con una precisión de 1 parte en 10^8.

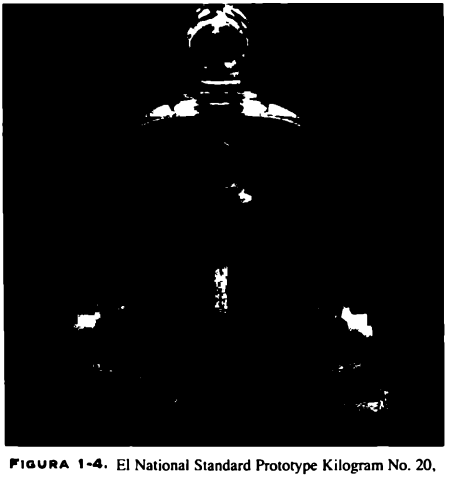


FIGURA 1-4. El National Standard Prototype Kilogram No. 20, en su jarra de doble campana que se conserva en el U. S. National Institute of Standards and Technology.

TABLA 1-5 Algunas masas medidas[a]

Objeto	*Kilogramo*
Universo conocido (estimación)	10^{53}
Nuestra galaxia	2×10^{43}
Sol	2×10^{30}
Tierra	6×10^{24}
Luna	7×10^{22}
Trasatlántico	7×10^{7}
Elefante	4×10^{3}
Persona	6×10^{1}
Uva	3×10^{-3}
Partícula de polvo	7×10^{-10}
Virus	1×10^{-15}
Molécula de penicilina	5×10^{-17}
Átomo de uranio	4×10^{-26}
Protón	2×10^{-27}
Electrón	9×10^{-31}

[a] Valores aproximados.

TABLA 1-6 Algunas masas atómicas medidas[a]

Isótopo	*Masa (u)*	*Incertidumbre (u)*
^{1}H	1.00782503214	0.00000000035
^{12}C	12.00000000	(exacto)
^{64}Cu	63.9297679	0.0000015
^{109}Ag	108.9047551	0.0000032
^{137}Cs	136.9070836	0.0000032
^{208}Pb	207.9766358	0.0000031
^{238}Pu	238.0495534	0.0000022

1-6 PRECISIÓN Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

A medida que mejoramos la calidad de los instrumentos de medición y nuestras técnicas, podemos efectuar experimentos con valores crecientes de precisión, es decir, extender los resultados a *cifras* cada vez más *significativas*, y al mismo tiempo reducir su *incertidumbre experimental*. Tanto ésta como el número de cifras significativas, indican algo acerca de nuestra estimación de la precisión del resultado. En otras palabras, el resultado $x = 3$ m, significa que conocemos menos de x que del valor $x = 3.14159$ m. Cuando declaramos $x = 3$, queremos decir que tenemos una certeza razonable de que x se halla entre 2 y 4 m; en cambio, expresar x como 3.14159 m, significa que probablemente se encuentre en 3.14158 y 3.14160 m. Si expresamos x como 3 m cuando de hecho creemos que sea 3.14159 m, estaremos reteniendo información que pudiera ser importante. Por el contrario, si expresamos $x = 3.14159$ m cuando no tenemos una base para saber otra cosa que no sea $x = 3$ m, estaremos siendo deshonestos al afirmar que poseemos más información de la que en realidad tenemos. La atención a las cifras significativas es importante cuando se presentan los resultados de la medición y de los cálculos, siendo igualmente erróneo incluir demasiadas o muy pocas.

Hay unas reglas simples que deben seguirse al decidir cuántas cifras significativas usar.

Regla 1. Contar a partir de la izquierda e ignorar los ceros iniciales, conservando los dígitos hasta llegar al primero dudoso. Es decir, $x = 3$ m tiene sólo una cifra significativa; expresar este valor como $x = 0.003$ km no cambia el número de ellas. En cambio, si escribiéramos $x = 3.0$ m (o, en forma equivalente, $x = 0.0030$ m), indicaríamos que conocemos el valor de x hasta dos cifras significativas. Una sugerencia: no anote los 9 ni los 10 dígitos de su calculadora si la precisión de los datos de entrada no los justifica. En este libro casi todos los cálculos se efectúan con dos o tres cifras significativas.

Tenga cuidado con las notaciones ambiguas: $x = 300$ m no indica si tenemos una, dos o tres cifras significativas; no sabemos si los ceros transmiten información o si sólo sirven para ocupar lugar. Deberíamos más bien escribir $x = 3 \times 10^2$ o 3.0×10^2 o 3.00×10^2, para especificar la precisión con mayor claridad.

Regla 2. Cuando se multiplica o se divide, el número de cifras significativas del producto o cociente no deberá ser mayor que el de las que se encuentran en el menos preciso de los factores. Por tanto,

$$2.3 \times 3.14159 = 7.2.$$

Se requiere un poco de sentido común cuando se aplica la regla

$$9.8 \times 1.03 = 10.1$$

porque aunque técnicamente 9.8 tenga sólo dos cifras significativas, le falta poco para ser un número con tres, de ahí que el producto deba expresarse con tres cifras significativas.

Regla 3. Al sumar o restar, el dígito menos significativo de la suma o diferencia ocupa la misma posición relativa que el de las cantidades que van a sumarse o restarse. En este caso el *número* de cifras significativas carece de importancia; lo que importa es la *posición*. Por ejemplo, supóngase que queremos encontrar la masa total de tres objetos así:

$$\begin{array}{r} 103.\mathbf{9}\ \text{kg} \\ 2.\mathbf{10}\ \text{kg} \\ \underline{0.31\mathbf{9}\ \text{kg}} \\ 106.\mathbf{319} \end{array} \quad \text{o} \quad 106.3\ \text{kg}$$

El dígito menos significativo o el primer dudoso está impreso en **negritas**. Conforme a la regla 1, deberíamos incluir sólo un dígito dudoso; en consecuencia, el resultado se expresará como 106.3 kg, porque si el "3" es dudoso, el siguiente "19" no aporta información y es inútil.

PROBLEMA RESUELTO 1-3. Queremos pesar a nuestro gato, pero tan sólo contamos con una báscula casera ordinaria. Es una escala digital que muestra el peso en un número entero de libras. Por eso utilizamos el siguiente procedimiento: primero nos pesamos y descubrimos que el resultado es 119 lb; luego sostenemos al gato y observamos que el peso combinado es de 128 lb. ¿Cuál es la incertidumbre fraccional o porcentual de nuestro peso y la del gato?

Solución El dígito menos significativo es el de unidades, de modo que nuestro peso presenta una incertidumbre de 1 libra aproximadamente. Es decir, la báscula indica 119 lb para cualquier peso entre 118.5 y 119.5 lb. Por tanto, la incertidumbre fraccional será

$$\frac{1\ \text{lb}}{119\ \text{lb}} = 0.008 \quad \text{o} \quad 0.8\%.$$

El peso del gato es 128 lb − 119 lb = 9 lb. Pero la incertidumbre del gato sigue siendo 1 lb, aproximadamente, y por lo mismo la incertidumbre fraccional será

$$\frac{1\ \text{lb}}{9\ \text{lb}} = 0.11 = 11\%.$$

Aunque la incertidumbre *absoluta* de nuestro peso y del gato es igual (1 lb), la incertidumbre *relativa* del nuestro tiene una orden de magnitud más pequeña que la del gato. Si tratáramos de medir con este método el peso de gatos de 1 lb, la incertidumbre relativa sería del 100%. Esto ejemplifica un peligro muy común cuando se restan dos números casi iguales: la incertidumbre relativa o porcentual de la diferencia puede ser muy grande.

1-7 ANÁLISIS DE LAS DIMENSIONES

Toda cantidad medida o calculada tiene una *dimensión*. Por ejemplo, la absorción del sonido por un lugar cerrado y la probabilidad de que se produzcan reacciones nucleares presentan la dimensión de un área. Las unidades en que expresen las magnitudes no afectan a su dimensión: una superficie

seguirá siendo tal sin importar si se expresa en m^2 o ft^2, acres, sabines (absorción del sonido) o barnes (reacciones nucleares).

Del mismo modo que definimos los patrones de medición como magnitudes fundamentales al inicio de este capítulo, también podemos escoger una serie de dimensiones fundamentales basadas en patrones independientes de medición. En las magnitudes mecánicas, masa, longitud y tiempo son elementales e independientes, por lo cual pueden servir de dimensiones primarias. Las representamos, respectivamente, con M, L y T.

Toda ecuación ha de ser *consistente desde el punto de vista dimensional*, es decir, las dimensiones en ambos lados han de ser las mismas. Si las observamos con detenimiento, no cometeremos errores al escribir las ecuaciones. Por ejemplo, la distancia x que en el tiempo t recorre un objeto que parte del reposo y se desplaza con una aceleración constante a es, como veremos en el siguiente capítulo, $x = \frac{1}{2}at^2$. La aceleración se mide en unidades como m/s^2. Con los corchetes [ ] denotamos "la dimensión de", así que $[x] = L$ o $[t] = T$. De ello se deduce que $[a] = L/T^2$ o LT^{-2}. Así pues, teniendo presentes las unidades y por ende la aceleración, nunca estaremos tentados a escribir $x = \frac{1}{2}at$ o $x = \frac{1}{2}at^3$.

El análisis de las dimensiones es de gran utilidad cuando se trabaja con ecuaciones. Este procedimiento lo ejemplifican los siguientes problemas resueltos.

PROBLEMA RESUELTO 1-4. Se requiere la "fuerza centrípeta" para mantener un objeto móvil dentro de un círculo a rapidez constante. (El movimiento circular se trata en el Capítulo 4.) Realice un análisis dimensional de esa fuerza.

Solución Podemos empezar preguntando: "¿De qué variables mecánicas podría depender la fuerza centrípeta F?" El objeto móvil sólo tiene tres propiedades probablemente importantes: su masa m, su rapidez v y el radio r de su trayectoria circular. Por tanto, debe estar dada, aparte de las constantes adimensionales, por una ecuación de la forma

$$F \propto m^a v^b r^c,$$

donde el símbolo $\propto$, significa "es proporcional a", y donde a, b y c son exponentes numéricos que se determinan al analizar las dimensiones. Como señalamos en la sección 1-2 (y como veremos en el capítulo 3), la fuerza tiene unidades de $kg \cdot m/s^2$, de ahí que sus dimensiones sean $[F] = MLT^{-2}$. En consecuencia, podemos escribir así la ecuación de la fuerza centrípeta en términos de dimensiones:

$$\begin{aligned}[F] &= [m^a]\,[v^b]\,[r^c] \\ MLT^{-2} &= M^a\,(L/T)^b\,L^c \\ &= M^a\,L^{b+c}\,T^{-b}.\end{aligned}$$

La consistencia dimensional significa que las dimensiones fundamentales han de ser las mismas en ambos lados de la ecuación. Por tanto, si igualamos los exponentes,

exponente de M: $a = 1$;

exponente de T: $b = 2$;

exponente de L: $b + c = 1$, así que $c = -1$.

La expresión resultante será

$$F \propto \frac{mv^2}{r}.$$

La expresión real de la fuerza centrípeta, deducida de las leyes de Newton y de la geometría del movimiento circular, es $F = mv^2/r$. El análisis de las dimensiones da la dependencia exacta de las variables mecánicas. Es una coincidencia feliz, porque del análisis nada puede concluirse acerca de las constantes que carecen de dimensiones. En este caso la constante es casualmente 1.

PROBLEMA RESUELTO 1-5. Un verdadero hito en la evolución del universo poco después del Big Bang es el tiempo de Planck t_p, cuyo valor depende de tres constantes fundamentales: 1) la rapidez de la luz (la constante fundamental de la relatividad), $c = 3.00 \times 10^8$ m/s; 2) la constante gravitacional de Newton (la constante fundamental de la gravedad), $G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3/s^2 \cdot kg$, y 3) la constante de Planck (la constante fundamental de la mecánica cuántica), $h = 6.63 \times 10^{-34}\ kg \cdot m^2/s$. Basándose en un análisis dimensional, calcule el valor del tiempo de Planck.

Solución Usando las unidades de las tres constantes, podemos obtener sus dimensiones:

$$\begin{aligned}[c] &= [m/s] = LT^{-1} \\ [G] &= [m^3/s^2 \cdot kg] = L^3T^{-2}M^{-1} \\ [h] &= [kg \cdot m^2/s] = ML^2T^{-1}\end{aligned}$$

Supongamos que el tiempo de Planck dependa de estas constantes así:

$$t_p \propto c^i\,G^j\,h^k,$$

donde i, j y k son exponentes que debe determinarse. Las dimensiones de esta expresión son

$$\begin{aligned}[t_p] &= [c^i]\,[G^j]\,[h^k] \\ T &= (LT^{-1})^i\,(L^3T^{-2}M^{-1})^j\,(ML^2T^{-1})^k \\ &= L^{i+3j+2k}\,T^{-i-2j-k}\,M^{-j+k}.\end{aligned}$$

Al igualar las potencias en ambos lados obtenemos

exponente de L: $0 = i + 3j + 2k$

exponente de T: $1 = -i - 2j - k$

exponente de M: $0 = -j + k$

y al resolver en las tres ecuaciones anteriores las tres incógnitas nos queda

$$i = -\tfrac{5}{2}, \qquad j = \tfrac{1}{2}, \qquad k = \tfrac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}t_p &\propto c^{-5/2}G^{1/2}h^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ m^3/s^2 \cdot kg)(6.63 \times 10^{-34}\ kg \cdot m^2/s)}{(3.00 \times 10^8\ m/s)^5}} \\ &= 1.35 \times 10^{-45}\ s.\end{aligned}$$

Como se define comúnmente, el tiempo de Planck difiere del valor anterior por un factor de $(2\pi)^{-1/2}$. Estos factores dimensionales no pueden obtenerse mediante esta técnica.

En forma semejante, podemos determinar la longitud y la masa de Planck, que también puede tener interpretaciones muy básicas (Ejercicios 32 y 33).

OPCIÓN MÚLTIPLE

1-1 Magnitudes físicas, patrones y unidades

1-2 El Sistema Internacional de Unidades

1-3 El patrón del tiempo

1-4 El patrón de longitud

1-5 El patrón de masa

1-6 Precisión y cifras significativas

1. Un estudiante va a calcular el área superficial de un hoja de papel. Mide la longitud y obtiene $l = 27.9$ cm; mide el ancho y obtiene $a = 21.6$ cm. Registra la superficie del papel así

   (A) 602.64 cm^2. (B) 602.6 cm^2.
   (C) 602 cm^2. (D) 603 cm^2.

2. Una estudiante va a calcular el espesor de una hoja de papel. Mide el espesor de una pila de 80 hojas con un calibrador de nonio y descubre que el espesor es igual a $l = 1.27$ cm. Para calcular el de una hoja efectúa una división. ¿Cuál de las siguientes respuestas tiene el número correcto de dígitos significativos?

   (A) 0.15875 mm. (B) 0.159 mm.
   (C) 0.16 mm. (D) 0.2 mm.

1-7 Análisis de las dimensiones

3. El periodo de oscilación de un oscilador no lineal depende de la masa m, con dimensiones de M; una constante de fuerza restauradora k con dimensiones de $ML^{-2}T^{-2}$ y la amplitud A, con dimensiones de L. El análisis de dimensiones muestra que el periodo de oscilación debería ser proporcional a

   (A) $A\sqrt{m/k}$. (B) A^2m/k.
   (C) $A^{-1}\sqrt{m/k}$. (D) A^2k^3/m.

PREGUNTAS

1. ¿Cómo criticaría usted la siguiente afirmación: "Una vez escogido un patrón, ¿es invariable por el significado mismo de 'patrón'"?
2. Mencione otras características además de accesibilidad e invariabilidad que juzgue convenientes para un patrón físico.
3. ¿Puede imaginar un sistema de unidades fundamentales (Tabla 1-1) en que no se incluya el tiempo?
4. De las siete unidades contenidas en la Tabla 1-1, sólo una —el kilogramo— tiene un prefijo (Tabla 1-2). ¿Convendría redefinir como 1 g y no como 1 kg la masa de ese cilindro de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas?
5. ¿Qué significa el prefijo "micro-" en la expresión "horno de microondas?" Se ha propuesto que el alimento irradiado con rayos gamma, para alargar su vida de estante, se etiquete "picoondas". ¿Qué cree que signifique eso?
6. Muchos investigadores muy profesionales aceptan la realidad de la percepción extrasensorial basándose en evidencias. Suponiendo que este fenómeno sea efectivamente un hecho natural, ¿qué magnitud o magnitudes físicas procuraría definir para describirlo en términos cuantitativos?
7. Mencione varios fenómenos repetitivos que ocurren en la naturaleza y que podrían servir de patrones adecuados del tiempo.
8. Podríamos definir "1 segundo" como un latido del pulso del actual presidente de la American Association of Physics Teachers. Galileo usó su pulso como cronómetro en algunos de sus trabajos. ¿Por qué conviene más basar una definición en el reloj atómico?
9. ¿Qué cualidades debería reunir un buen reloj?
10. Van a probarse cinco relojes en un laboratorio. Al mediodía en punto, como lo determina la señal temporal WWV, en los días sucesivos de la semana el reloj indica las siguientes lecturas:

Reloj	Dom.	Lun.	Mar.	Miér.
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52

Reloj	Jue.	Vie.	Sáb.
A	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:01:32	12:01:22	12:01:12

   ¿En qué forma dispondría como buenos cronómetros estos relojes atendiendo a su orden de valor relativo?
11. Basándose en lo que sabe de los péndulos, cite las desventajas de usar el periodo de un péndulo como patrón del tiempo.
12. ¿Cómo supo Galileo que el péndulo oscila con la misma frecuencia sin importar la amplitud? Nota: como los péndulos eran esenciales en la construcción de los primeros relojes, Galileo no podía haber utilizado un reloj para encontrar la respuesta.
13. ¿Cuál es la incertidumbre en un buen reloj de arena? ¿Y de un reloj de agua? ¿Y de las velas con que se mide el tiempo durante la noche?
14. El 30 de junio de 1981, el minuto que se extendía de las 10:59 a las 11:00 de la mañana fue alargado arbitrariamente para que contuviera 61 s. El último día de 1989 también se alargó 1 s. Este *segundo bisiesto* se introduce de modo esporádico para compensar el hecho de que la rapidez de rotación de la Tierra va disminuyendo lentamente, medida por nuestro patrón del tiempo atómico. ¿Por qué conviene reajustar nuestros relojes en esta forma?
15. Una estación radiofónica anuncia que son las "89.5 en nuestro cuadrante de FM". ¿Qué significa ese número?
16. ¿Por qué en el SI no existen unidades de superficie ni de volumen?
17. Originalmente se planeó que el metro fuera la diezmillonésima parte del meridiano del polo norte al ecuador que pasa por París. Esta definición discrepa 0.023% con la barra del metro (adoptada como patrón en esa fecha remota). ¿Significa que la barra del metro estándar es inexacta en ese porcentaje?
18. La definición original del metro *no* incluía directamente la medición de la distancia entera entre el polo norte y el ecuador. ¿Cómo se realizó la medida? Explique cualquier posible incertidumbre experimental.

19. ¿Puede medirse la longitud a lo largo de una línea curveada? Si la respuesta es afirmativa, indique cómo.
20. Cuando se tomó la barra del metro como el patrón de longitud, se especificó su temperatura. ¿Puede considerarse la longitud una propiedad fundamental si otra magnitud física, en este caso la temperatura, debe especificarse al escoger el patrón?
21. Al redefinir el metro en función de la rapidez de la luz, ¿por qué los delegados a la Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en 1983, no simplificaron las cosas definiendo la rapidez de la luz con exactitud como 3×10^8 m/s^2? ¿Y por qué no definieron que fuera 1 m/s exactamente? ¿Podían hacer ambas cosas? De ser así, ¿por qué las rechazaron?
22. Originalmente el kilogramo fue definido de modo que la densidad del agua fuera 1,000 en unidades métricas. ¿Puede una versión "métrica" de $\pi = 3.1415926535\ldots$ redefinirse de modo que sea exactamente igual a 22/7? ¿Por qué no definirla como $\pi = 3$ para ahorrarse así muchos problemas de cálculo?
23. Indique una manera de medir *a*) el radio de la Tierra, *b*) la distancia entre ella y el Sol y *c*) el radio del Sol.
24. Indique una manera de medir *a*) el espesor de una hoja de papel, *b*) el espesor de una película de burbuja de jabón y *c*) el diámetro de un átomo.
25. Si alguien le dijera que de la noche a la mañana todas las dimensiones de los objetos se han reducido a la mitad de su valor anterior, ¿cómo refutaría esa afirmación?
26. ¿Es el actual kilogramo patrón de la masa accesible, invariable, reproducible e indestructible? ¿Tiene suficiente simplicidad para efectuar comparaciones? ¿Sería mejor un patrón atómico en algún aspecto? ¿Por qué no lo adoptamos como lo hacemos en el caso de la longitud y del tiempo?
27. ¿Por qué nos parece útil contar con dos patrones de masa: el kilogramo y el átomo ^{12}C?
28. ¿Cómo determinamos la relación entre la masa del kilogramo estándar y la masa del átomo ^{12}C?
29. Indique formas prácticas en que podríamos calcular la masa de los objetos incluidos en la tabla 1-5.
30. Mencione objetos cuya masa podría caer en el amplio intervalo de la tabla 1-5 entre la de un transatlántico y la Luna, y calcule su masa.
31. Los críticos del sistema métrico a menudo desvirtúan el problema diciendo cosas como: "En vez de comprar 1 lb de mantequilla, tendremos que pedir 0.454 kg de mantequilla". Con ello quieren decir que la vida sería más compleja. ¿Cómo refutaría este argumento?

EJERCICIOS

1-1 Magnitudes físicas, patrones y unidades

1-2 El Sistema Internacional de Unidades

1. Use los prefijos de la tabla 1-2 para expresar *a*) 10^6 teléfonos, *b*) 10^{-6} teléfonos, *c*) 10^1 tarjetas, *d*) 10^9 sillas, *e*) 10^{12} toros, *f*) 10^{-1} compañeros, *g*) 10^{-2} patos, *h*) 10^{-9} señoras, *i*) 10^{-12} abucheos, *j*) 10^{-18} niños, *k*) 2×10^2 papas, *l*) 2×10^3 ruiseñores. Ahora que ya entendió el procedimiento, invente otras expresiones similares. (Véase la página 61 de *A Random Walk in Science*, recopilado por R. L. Weber; Crane, Russak & Co., Nueva York, 1974.)
2. Algunos de los prefijos de las unidades del SI han sido incorporadas al lenguaje diario. *a*) ¿Cuál es el equivalente semanal de un sueldo anual de 36K (= 36 k$)? *b*) Una lotería ofrece 10 megadólares como premio principal, pagaderos en un lapso de 20 años. ¿De qué monto es cada cheque mensual? *c*) El disco duro de una computadora tiene una capacidad de 30 GB (= 30 gigabytes). Usando 8 bytes/palabra, ¿cuántas palabras puede guardar?

1-3 El patrón del tiempo

3. En cierta ocasión Enrico Fermi señaló que un periodo estándar de lectura (50 min) se aproxima a 1 microsiglo. ¿Cuántos minutos tiene un microsiglo y cuál es la diferencia porcentual con la aproximación de Fermi?
4. Entre Nueva York y Los Ángeles hay una distancia aproximada de 3,000 mi; la diferencia temporal entre las dos ciudades es de 3 h. Calcule la circunferencia de la Tierra.
5. Una sustitución útil de los segundos de un año es π por 10^7. ¿En qué margen de error porcentual es correcto esto?
6. *a*) En ocasiones una unidad de tiempo que se emplea en microfísica es el *shake*. Un shake equivale a 10^{-8} s. ¿Tiene más shakes un segundo que segundos un año? *b*) El hombre lleva viviendo cerca de 10^6 años, en tanto que el universo tiene una edad aproximada de 10^{10}. Si suponemos que la edad del universo es 1 día, ¿cuántos segundos hace que existe el hombre?
7. En dos competencias de pista, los ganadores de la milla terminaron la carrera en 3 minutos 58.05 s y en 3 min 58.20 s. Para poder concluir que el que hizo el menor tiempo fue verdaderamente más rápido, ¿cuál es el error máximo tolerable en pies al medir las distancias?
8. Un reloj de péndulo (con una carátula de 12 h) gana 1 min/día. Después de ponerlo en la hora correcta, ¿cuánto habrá que esperar antes que vuelva a indicar la hora correcta?
9. La edad del universo es aproximadamente 5×10^{17} s; el pulso luminoso más corto producido en un laboratorio (1990) duró apenas 6×10^{15} s (Tabla 1-3). Identifique un intervalo temporal físicamente significativo que se encuentre más o menos a la mitad entre los dos en una escala logarítmica.
10. Suponiendo que la duración del día aumenta de modo uniforme 0.001 s en un siglo, calcule su efecto acumulativo en la medida del tiempo durante 20 siglos. Esa reducción de la rotación de la Tierra la indican las observaciones de los eclipses solares que ocurrieron durante este periodo.
11. El tiempo (27.3 días) que tarda la Luna en retornar a una posición determinada vista contra el fondo de las estrellas fijas recibe el nombre de mes sideral. Se da el nombre de mes lunar al intervalo entre fases lunares idénticas. El mes lunar es más largo que el mes sideral. ¿Por qué y por cuánto?

1-4 El patrón de longitud

12. Un amigo francés por correspondencia le escribe para decirle que mide 1.9 m. ¿Cuál es su estatura en unidades inglesas?
13. *a*) En las competencias de pista se usan las 100 yardas y los 100 metros en las carreras de velocidad. ¿Cuál de las dos es más larga? ¿Por cuantos metros? ¿Por cuántos pies? *b*) Se llevan registros de las carreras de pista y de campo en la milla y en la milla métrica (1,500 m). Compare esas distancias.
14. La estabilidad del reloj de cesio que se emplea como patrón del tiempo atómico es tal, que dos relojes ganarían o perderían 1 s

entre sí aproximadamente en 300,000 años. Si esa misma precisión se aplicara a la distancia entre Nueva York y San Francisco (2,572 mi), ¿cuánto tenderían a diferir las mediciones sucesivas de esa distancia?

15. La Antártida tiene una forma casi semicircular, con un radio de 2,000 km. El espesor medio de la capa de hielo es de 3,000 m. ¿Cuántos centímetros cúbicos de hielo contiene la Antártida? (No tenga en cuenta la curvatura de la Tierra.)
16. Una unidad de superficie, utilizada con frecuencia cuando se expresan áreas de tierra, es la *hectárea*, definida como 10^4 m^2. Cada año una mina de carbón a cielo abierto consume 77 hectáreas de tierra, hasta una profundidad de 26 m. ¿Qué volumen de tierra, en kilómetros cúbicos, se extrae en ese lapso?
17. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.37×10^6 m. *a)* ¿Cuál es su circunferencia en kilómetros? *b)* ¿Cuál es su área superficial en kilómetros cuadrados? *c)* ¿Cuál es su volumen en kilómetros cúbicos?
18. Transcribimos en seguida la velocidad máxima de varios animales, pero en distintas unidades. Convierta estos datos en m/s y luego clasifique los animales por orden de rapidez máxima creciente: ardilla, 19 km/h; conejo, 30 nudos; caracol, 0.030 mi/h; araña, 1.8 ft/s; leopardo, 1.9 km/min; ser humano, 1,000 cm/s; zorro, 1,100 m/min; león, 1,900 km/día.
19. Cierta nave espacial tiene una velocidad de 19,200 mi/h. ¿Cuál es su velocidad en años luz por siglo?
20. Un automóvil nuevo está equipado con un tablero de "tiempo real" del consumo de combustible. Un interruptor le permite al conductor hacer la conversión automática entre unidades inglesas y las del SI. Sin embargo, la presentación de las primeras muestra mi/gal y la versión del SI es la inversa, l/km. ¿Cuál lectura del SI corresponde a 30.0 mi/gal?
21. Las distancias astronómicas son tan grandes comparadas con las terrestres, que se emplean unidades mucho mayores para facilitar la comprensión de la distancia relativa de los objetos astronómicos. La *unidad astronómica* (AU) es igual a la distancia promedio entre la Tierra y el Sol, 1.50×10^8 km. Un *parsec* (pc), es la distancia en que 1 AU subtendería un ángulo de 1 segundo de arco. El *año luz* (ly), es la distancia que la luz, viajando a través de un medio con una velocidad de 3.00×10^5 km/s, recorrería en 1 año. *a)* Exprese la distancia entre la Tierra y el Sol en parsecs en un año luz. *b)* Exprese en kilómetros un año luz y un parsec. Aunque el año luz se usa mucho más en las obras divulgativas, el parsec es la unidad preferida por los astrónomos.
22. El radio efectivo de un protón mide cerca de 1×10^{-15} m; el del universo observable (dado por la distancia con el cuasar observable más lejano) es 2×10^{26} m (Tabla 1-4). Identifique una distancia físicamente significativa que se encuentre más o menos en la mitad de los dos extremos de una escala logarítmica.

1-5 El patrón de masa

23. Usando las conversiones y los datos presentados en el capítulo, calcule el número de átomos de hidrógeno necesarios para obtener 1.00 kg de hidrógeno.
24. Una molécula de agua (H_2O) contiene dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. El átomo de hidrógeno tiene una masa de 1.0 u, y un átomo de oxígeno una masa de 16 u. *a)* ¿Cuál es la masa de una molécula de agua en kilogramos? *b)* ¿Cuántas moléculas de agua hay en los mares del mundo? Los mares tienen una masa total de 1.4×10^{21} kg.
25. En la Europa Continental, una "libra" equivale a la mitad de un kilogramo. ¿Qué es mejor comprar: una libra de café en París por 9.00 dólares o una libra en Nueva York por $7.20?
26. Un cuarto tiene las dimensiones de 21 ft × 13 ft × 12 ft. ¿Cuánta masa de aire contiene? La densidad del aire a temperatura ambiente y a una presión atmosférica normal es de 1.21 kg/m^3.
27. Un cubo común de azúcar tiene una longitud de borde de 1 cm. Si tuviera una caja cúbica con 1 mol de cubos, ¿cuál sería su longitud de borde?
28. Una persona a dieta pierde 0.23 kg (equivalentes aproximadamente a 0.5 lb) por semana. Exprese la tasa de pérdida de masa en miligramos por segundo.

1-6 Precisión y cifras significativas

29. En el periodo de 1960-1983, el metro se definió como 1,650,763.73 longitudes de onda de cierta luz roja anaranjada emitida por átomos de kriptón. Calcule en nanómetros la distancia correspondiente a una longitud de onda. Exprese el resultado usando el número apropiado de cifras significativas.
30. *a)* Evalúe 37.76 + 0.132 con el número correcto de cifras significativas. *b)* Evalúe 16.264 − 16.26325 con el número correcto de cifras significativas.

1-7 Análisis de las dimensiones

31. Se da el nombre de acuífero, a la roca porosa por donde pasa el agua subterránea. El volumen V de agua que, en el tiempo t, se desplaza por una sección transversal del área A de un acuífero está dado por

$$V/t = KAH/L,$$

donde H, es la caída vertical del acuífero sobre la distancia horizontal L (Fig. 1-5). A esta relación se le llama ley de Darcy. La cantidad K es la conductividad hidráulica del acuífero. ¿Cuáles son las unidades SI de K?

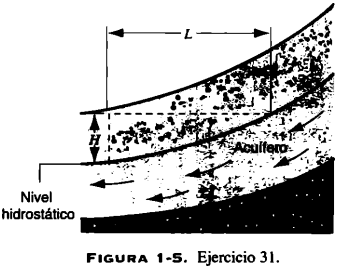


FIGURA 1-5. Ejercicio 31.

32. En el problema resuelto 1-5, combinamos las constantes h, G y c para obtener una cantidad con las dimensiones de tiempo. Repita el cálculo para obtener una cantidad con las dimensiones de longitud; evalúe después el resultado en forma numérica. Ignore las constantes adimensionales. Ésta es la longitud de Planck, es decir, el tamaño del universo observable en el tiempo de Planck.
33. Repita el procedimiento del ejercicio 32 para obtener una cantidad con las dimensiones de masa. Se calcula así la masa de Planck, es decir, el universo observable en el tiempo de Planck.

PROBLEMAS

1. Poco después de la Revolución Francesa, al introducir el sistema métrico, la Convención Nacional Revolucionaria intentó introducir también el tiempo decimal. En este plan, que no tuvo éxito, el día —que comenzaría a medianoche— fue dividido en 10 horas decimales constituidas cada una por 100 minutos decimales. Las manecillas de un reloj de bolsillo de esa época están detenidas en 8 horas decimales, 22.8 minutos decimales. ¿Qué horas son? Consulte la figura 1-6.

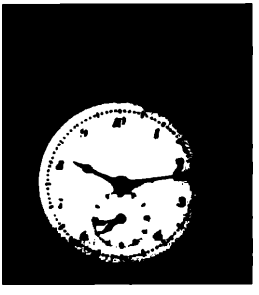
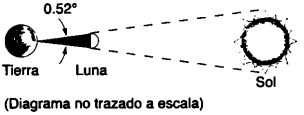


FIGURA 1-6. Problema 1.

2. La distancia promedio entre el Sol y la Tierra es 390 veces la que separa a ésta y a la Luna. Suponga que se produce un eclipse solar total (la Luna entre el Sol y la Tierra; véase la Figura 1-7) y calcule *a*) la razón del diámetro solar al lunar y *b*) la razón del volumen solar al volumen lunar. *c*) El ángulo interceptado en el ojo por la Luna es de 0.52° y la distancia entre ella y la Tierra es de 3.82×10^5 km. Calcule el diámetro de la Luna.



(Diagrama no trazado a escala)

FIGURA 1-7. Problema 2.

3. El navegante de un buque petrolero utiliza los satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS/NAVSTAR) para obtener la longitud y la latitud; consúltese la figura 1-8. Éstas son 43°36′25.3″ N y 77°31′48.2″ W. Si la exactitud de estas determinaciones es ±0.5″, ¿cuál será la incertidumbre de la posición del buque medida sobre *a*) una línea de Norte-Sur (meridiano de longitud) y *b*) una línea de Este-Oeste (paralelo de latitud)? *c*) ¿Dónde se encuentra el buque?

4. En octubre de 1707, cuatro barcos de guerra ingleses naufragaron por un error de posición, dando origen a esfuerzos por crear un reloj submarino que localizara una posición en un radio de 30 millas después de zarpar de Inglaterra a las Antillas Holandesas y en su viaje de regreso. *a*) ¿Qué exactitud diaria deberá tener ese reloj? *b*) ¿Qué exactitud diaria se requiere para que fije la posición en un radio de 0.5 millas después de un 1 año en el mar? (Consúltese *Longitude*, de Dava Sobel, Penguin, Baltimore, 1995.)

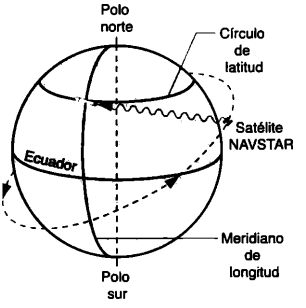


FIGURA 1-8. Problema 3.

5. Durante la noche, una inhalación contiene cerca de 0.3 l de oxígeno (O_2, 1.43 g/L a temperatura y presión ambiente). Cada exhalación contiene 0.3 l de dióxido de carbono (CO_2, 1.96 g/L a temperatura y presión ambiente). ¿Cuánto peso en libras se pierde con la respiración en 1 hora de sueño?

6. Suponga que se tarda 12 h en vaciar un contenedor de 5,700 m^3 de agua. ¿Cuál es el gasto de masa (en kg/s) del agua proveniente del contenedor? La densidad del agua es 1,000 kg/m^3.

7. Los granos de arena fina de las playas de California tienen un radio promedio de 50μm. ¿Qué masa de granos de arena tendrá un área superficial total igual a la de un cubo exactamente 1 m en un borde? La arena se compone de dióxido de silicio, 1 m^3, el cual tiene una masa de 2,600 kg.

8. El kilogramo patrón (Fig. 1-4) tiene la forma de un cilindro circular, cuya altura es igual a su diámetro. Demuestre que, en un cilindro circular de volumen fijo, esa igualdad nos da la superficie más pequeña y de ese modo reduce al mínimo los efectos de contaminación y desgaste de la superficie.

9. La distancia entre dos átomos o moléculas contiguas en una sustancia sólida, puede estimarse calculando dos veces el radio de una esfera con volumen igual al volumen por átomo del material. Calcule la distancia entre los átomos contiguos en *a*) hierro y *b*) sodio. La densidad de ambos son 7,870 kg/m^3 y 1,013 kg/m^3, respectivamente; la masa de un átomo de hierro es 9.27×10^{-26} kg, y la masa de un átomo de sodio es 3.82×10^{-26} kg.

10. *a*) Una placa metálica rectangular tiene una longitud de 8.43 cm y un ancho de 5.12 cm. Calcule su área con el número correcto de cifras significativas. *b*) Una placa metálica circular tiene un radio de 3.7 cm. Calcule su superficie con el número correcto de cifras significativas.

CAPÍTULO 2

MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

La mecánica, la más antigua de las ciencias físicas, estudia el movimiento de los cuerpos. El cálculo de la trayectoria de una pelota de béisbol o de una sonda espacial enviada a Marte son algunos de los problemas que resuelve, lo mismo que el análisis de las trazas que forman las partículas elementales después de la colisión en nuestros más grandes aceleradores. Cuando se describe el movimiento, se trata de la parte de la mecánica denominada cinemática (término de origen griego que significa movimiento, como en cinema). Cuando se analizan las causas del movimiento, se refiere a la dinámica (otro término griego que significa fuerza, como en dinamita). En el presente capítulo estudiaremos principalmente la cinemática en una dimensión. En el Capítulo 3 explicaremos la dinámica unidimensional, y en el 4 ampliaremos esos conceptos para incluir dos y tres dimensiones.

2-1 CINEMÁTICA CON VECTORES

Una partida de reconocimiento se extravió en el bosque muy lejos del campamento (Fig. 2-1). Basándose en sus exploraciones, saben que están a 2.0 km del campamento, en una dirección de Norte de 30° Oeste; también que su campamento se halla a 3.0 km de su base en una dirección Este 45° Norte. Desean comunicar por radio su posición a la base para que les envíen por aire alimentos y suministros lo más cerca a su posición. ¿Cómo puede señalarla respecto a la base?

Aunque hay varias formas de resolver este problema, la más compacta consiste en utilizar *vectores*. Éstos son *magnitudes* que tienen magnitud y dirección, y que además siguen ciertas reglas matemáticas de procesos como la adición y la multiplicación. En la figura 2-1, el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}_1$ (de longitud 3.0 km en una dirección de 45° al noreste) localiza el campamento en relación con la base. El vector de posición $\bar{\mathbf{r}}_2$ (de longitud 2.0 km en una dirección de 30° al noroeste) localiza la partida de reconocimiento en relación con el campamento.

Queremos encontrar el vector $\bar{\mathbf{r}}$ que localiza la partida de reconocimiento en relación con la base. Esta relación la escribimos en términos matemáticos así: $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_2$, pero el signo + de la ecuación no significa lo mismo que en la aritmética o álgebra tradicional. Claro que no quiere decir que sumamos 3.0 km + 2.0 km para obtener la distancia entre la base y la partida de reconocimiento; más aún, debe transmitir un poco de información direccional para ayudarnos a localizarla. Obsérvese que la ecuación $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_2$ *no* indica que la distancia entre la base y la partida sobre $\bar{\mathbf{r}}$ es la misma que la suma de las distan-

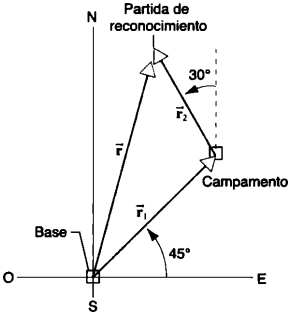


FIGURA 2-1. Por medio de vectores pueden especificarse la ubicación relativa de la base, del campamento y de la partida de reconocimiento.

cias sobre $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Por el contrario, significa que podemos llegar a nuestra meta, partiendo de la base a la partida de reconocimiento a lo largo de dos trayectorias equivalentes, donde "equivalentes", significa que podemos terminar en el mismo lugar.

La posición no es más que una de las muchas magnitudes de la física que pueden representarse por medio de vectores. Hay otras como las siguientes: velocidad, aceleración, fuerza, momento y campos electromagnéticos. En contraste con los vectores, las magnitudes que pueden describirse completamente especificando sólo un número (y sus unidades), se llaman *escalares*. Ejemplos de ellas son la masa, el tiempo, la temperatura y la energía.

Cinemática

En este capítulo se inicia el estudio del movimiento de los objetos explicando los términos con que se describe, y mostrando cómo se relacionan entre sí. A esta rama de la física se le da el nombre de *cinemática*. Al especificar la *posición, velocidad* y *aceleración* de un objeto, podemos describir cómo se desplaza: la dirección de su movimiento, cómo cambia ésta con el tiempo, si el objeto aumenta o disminuye su rapidez, etcétera.

Para simplificar la exposición, en este capítulo examinaremos tan sólo el movimiento de *partículas*. Por "partícula", entendemos un punto individual de masa, como un electrón, pero también designamos un objeto cuyas partes se mueven exactamente de la misma manera. Incluso los objetos complejos pueden ser considerados como partículas, si no existen movimientos internos como la rotación o la vibración de sus partes. Por ejemplo, una rueda que gira no podrá ser considerada como partícula, porque un punto de su borde se desplaza en forma diferente de un punto de su eje. (Pero una rueda que *se desliza* sí *puede* tratarse como partícula.) Por tanto, podemos considerar que un objeto es una partícula en algunos cálculos y en otros no. Por ahora prescindiremos del movimiento interno y consideraremos el electrón y un tren carguero desde el mismo punto de vista: como ejemplos del movimiento de partículas. Según esta aproximación, las partículas pueden realizar varios movimientos: acelerar, disminuir la rapidez, incluso detenerse e invertir la dirección o desplazarse en trayectorias curvas como círculos o parábolas. Mientras podamos clasificar estos objetos como partículas, estaremos en condiciones de utilizar el mismo grupo de ecuaciones cinemáticas para describirlos.

Muchas de las leyes de la física se expresan en forma muy compacta, como relaciones entre las magnitudes expresadas por medio de vectores. Cuando una ley se escribe en forma vectorial, a menudo es más fácil entenderla y manipularla. La posición, velocidad y aceleración, todas ellas magnitudes de la cinemática, son vectoriales, y las reglas que las definen y relacionan entre sí son leyes vectoriales. En este capítulo explicaremos esas leyes y las aplicaremos al movimiento en línea recta. Una demostración más completa de su utilidad se ofrece en el Capítulo 4, en el que se estudia el movimiento bidimensional y tridimensional en trayectorias curvas.

En la siguiente sección resumimos algunas de las propiedades básicas de los vectores que utilizaremos en cinemática. En el apéndice H se dan más detalles respecto a ellas.

2-2 PROPIEDADES DE LOS VECTORES

Para representar un vector sobre un diagrama trazamos una flecha. La longitud del vector debe ser proporcional a su magnitud empleando una escala adecuada. Otros vectores que forman parte del mismo problema se dibujan usando la misma escala, de modo que los tamaños relativos de las flechas son iguales a las magnitudes relativas de los vectores. (Por ejemplo, el vector $\vec{r}_1$ de la figura 2-1, que representa 3.0 km, se traza para que sea 1.5 veces mayor que el vector $\vec{r}_2$, que representa 2.0 km.) La dirección de la flecha corresponde a la del vector, y la punta de la flecha indica el sentido de la dirección. En este libro los vectores se representan usando negritas con una flecha, como en $\vec{\mathbf{a}}$ o $\vec{\mathbf{b}}$. En sus trabajos escritos, puede anotar los vectores colocando una flecha sobre el símbolo, como en $\vec{a}$ o $\vec{b}$.

La magnitud o longitud de un vector se indica así $|\vec{\mathbf{a}}|$, que no proporciona ninguna información direccional sobre el vector $\vec{\mathbf{a}}$. Generalmente escribiremos la magnitud de un vector mediante un símbolo en cursivo como a, que significa lo mismo que $|\vec{\mathbf{a}}|$.

Componentes de los vectores

Se especifica un vector dando su longitud y dirección; por ejemplo, los vectores de posición de la figura 2-1. Sin embargo, a menudo es más útil describirlo a partir de sus *componentes*. La figura 2-2*a* muestra el vector $\vec{\mathbf{a}}$. Su magnitud o longitud es a y su dirección se especifica por el ángulo ϕ, que se mide respecto al eje positivo x. Los componentes x y y de $\vec{\mathbf{a}}$ se definen por

$$a_x = a\cos\phi \quad \text{y} \quad a_y = \operatorname{sen}\phi. \tag{2-1}$$

A diferencia de la magnitud a que siempre es positiva, los componentes a_x y a_y pueden ser positivos o negativos según

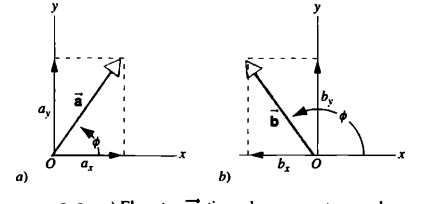


FIGURA 2-2. *a*) El vector $\vec{\mathbf{a}}$ tiene el componente a_x en la dirección x y el componente a_y en la dirección y. *b*) El vector $\vec{\mathbf{b}}$ tiene un componente negativo x.

el ángulo ϕ. Por ejemplo, como se muestra en la figura 2-2*b*, el vector $\vec{\mathbf{b}}$ se localiza mediante un ángulo ϕ que es mayor que 90°, pero menor que 180° (ϕ siempre se mide a partir del eje *x positivo*). En este caso, b_x es negativo y b_y es positivo.

Si conocemos a y ϕ, podemos obtener los componentes de acuerdo con las ecuaciones 2-1. También podemos invertir el proceso –si conocemos a_x y a_y, podemos calcular la magnitud del vector y el ángulo ϕ por medio de

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{y} \qquad \tan\phi = a_y/a_x. \qquad (2\text{-}2)$$

El cuadrante donde se halla $\vec{\mathbf{a}}$, y por tanto el valor de ϕ, puede determinarse a partir de los signos de a_x y a_y. Por ejemplo, −45° (o 315°) y 135° tienen tangentes iguales a −1, de modo que $a_y/a_x = -1$, para ambos. Con $\phi = -45°$, a_x es positivo y a_y es negativo (mientras para $\phi = 135°$, a_x es negativo y a_y es positiva). Conocer los signos de a_x y a_y nos permitirá distinguir ambas posibilidades. (En el problema resuelto 2-3 se da otra explicación de este problema.)

Una manera más formal de escribir un vector en función de sus componentes se basa en un conjunto de *vectores unitarios*. Éstos son vectores de longitud 1 en dirección de los ejes coordenados. En un sistema de coordenadas cartesianas, los vectores unitarios x y y se indican con $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, como se indica en la figura 2-3*a*. Usando los vectores unitarios, podemos escribir el vector $\vec{\mathbf{a}}$ así:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}. \qquad (2\text{-}3)$$

Los vectores unitarios son adimensionales; las dimensiones de $\vec{\mathbf{a}}$ de la ecuación 2-3, son la de sus componentes a_x y a_y.

La relación vectorial de la ecuación 2-3 equivale exactamente a las dos relaciones escalares de la ecuación 2-1. Algunas veces a $a_x\hat{\mathbf{i}}$ y $a_y\hat{\mathbf{j}}$ los llamamos *componentes vectoriales* de $\vec{\mathbf{a}}$. La figura 2-3*b* muestra el vector $\vec{\mathbf{a}}$ y sus componentes vectoriales. Como el efecto físico de un vector es idéntico a los de sus componentes, en ocasiones queremos analizar los problemas reemplazando un vector por sus componentes. Pero cuando hablamos de componentes, casi siempre nos referimos a los componentes escalares de la ecuación 2-1.

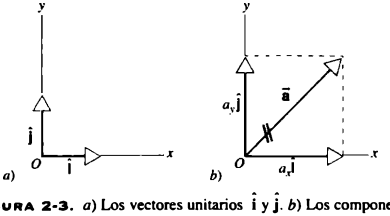


FIGURA 2-3. *a*) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. *b*) Los componentes *vectoriales* de $\vec{\mathbf{a}}$. Cuando queremos reemplazar $\vec{\mathbf{a}}$ por sus componentes vectoriales, conviene trazar una línea doble por el vector original como se muestra aquí; esto nos ayuda a recordar que no debemos considerar más el vector original.

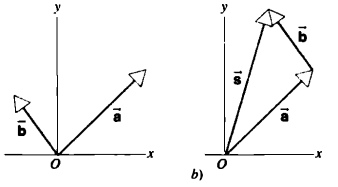


FIGURA 2-4. *a*) Los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$. *b*) Para obtener la suma $\vec{\mathbf{s}}$ de los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$, deslizamos $\vec{\mathbf{b}}$ sin modificar su magnitud ni su dirección hasta que su cola se encuentre en la cabeza de $\vec{\mathbf{a}}$. Después se traza el vector $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ de la cola de $\vec{\mathbf{a}}$ a la cabeza de $\vec{\mathbf{b}}$.

Cuando escribimos una ecuación que contiene vectores, como $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$, queremos decir que los dos vectores son exactamente iguales; tienen la misma magnitud y dirección. Esto sucede sólo si $a_x = b_x$ y $a_y = b_y$, es decir,

Dos vectores son iguales entre sí, sólo si también lo son sus componentes correspondientes.

Adición de vectores

Como en el caso de la figura 2-1, a menudo queremos sumar dos o más vectores para obtener el total. Consideremos los dos vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ de la figura 2.4*a*. Deseamos encontrar el vector $\vec{\mathbf{s}}$, tal que $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

La figura 2-4*b* muestra una construcción gráfica que nos permite encontrar $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$. Primero trazamos el vector $\vec{\mathbf{a}}$. En vez de dibujar $\vec{\mathbf{b}}$ con su inicio en el origen como en la figura 2.4*a*, movemos $\vec{\mathbf{b}}$ hasta que su inicio coincida con la cabeza de $\vec{\mathbf{a}}$. Mientras no cambiemos su magnitud ni su dirección, podremos desplazar un vector en esta forma. El vector $\vec{\mathbf{s}}$, que representa la suma $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$, se traza ahora del inicio de $\vec{\mathbf{a}}$ a la cabeza de $\vec{\mathbf{b}}$. Si estamos sumando más de dos vectores, podemos continuar colocándolos del inicio a la cabeza en esta forma, y el vector de la suma se dibuja desde el inicio del primero hasta la cabeza del último. A menudo podemos utilizar relaciones geométricas o trigonométricas para obtener la magnitud y la dirección del vector suma.

Otra forma de sumar vectores, consiste en sumar sus componentes. Es decir, $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ significa

$$\begin{aligned} s_x\hat{\mathbf{i}} + s_y\hat{\mathbf{j}} &= (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}) + (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (a_x + b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Al hacer los componentes x en el lado izquierdo de la ecuación anterior iguales a los del lado derecho y al repetir lo mismo con los componentes y, obtenemos

$$s_x = a_x + b_x \qquad \text{y} \qquad s_y = a_y + b_y. \qquad (2\text{-}4)$$

Para sumar varios vectores en esta forma, resolvemos cada uno en sus componentes, y luego los sumamos (teniendo en cuenta sus signos algebraicos) para encontrar los componen-

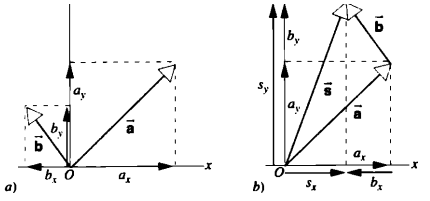


FIGURA 2-5. *a)* Los componentes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. *b)* El vector de la suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ puede obtenerse sumando los componentes de $\vec{a}$ a los de $\vec{b}$. Nótese que b_x es negativo, de modo que $s_x = a_x + b_x$ contiene una sustracción.

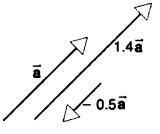


FIGURA 2-6. La multiplicación de un vector $\vec{a}$ por un escalar c nos da un vector $c\,\vec{a}$ cuya magnitud es c veces la de $\vec{a}$. El vector $c\,\vec{a}$ tiene la misma dirección que $\vec{a}$ si c es positivo, y la dirección contraria si c es negativo. Se dan ejemplos para $c = +1.4$ y $c = -0.5$.

tes del vector suma. La figura 2-5 ilustra esta operación. Una vez conocidos sus componentes, nos será fácil obtener su magnitud y dirección por medio de la ecuación 2-2.

Multiplicación de un vector por un escalar

El producto de un escalar c y de un vector $\vec{a}$, escrito $c\,\vec{a}$, es un nuevo vector cuya magnitud es la de c multiplicada por la magnitud de $\vec{a}$. Asimismo, los componentes del nuevo vector son ca_x y ca_y. El escalar puede ser un número puro o una magnitud física con dimensiones y unidades, de manera que el nuevo vector $c\,\vec{a}$ representa una magnitud física distinta de $\vec{a}$. Para dividir un vector entre un escalar, como en $\vec{a}/c$, basta multiplicar el vector $\vec{a}$ por $1/c$.

La multiplicación por un escalar no cambia la dirección de un vector, salvo que pueda invertir la dirección si el escalar es negativo. En la figura 2-6 vemos el efecto de multiplicar un vector $\vec{a}$ por un escalar positivo y otro negativo.

Si multiplicamos un vector $\vec{b}$ por el escalar -1, obtendremos el vector $-\vec{b}$, que es un vector de la misma magnitud que $\vec{b}$, sólo que en dirección contraria. Los componentes de $-\vec{b}$ son $-b_x$ y $-b_y$. Esta propiedad nos sirve para calcular la diferencia entre dos vectores $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, escribiendo primero $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$, y sumando después los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{b}$. La figura 2-7 muestra esquemáticamente el método gráfico

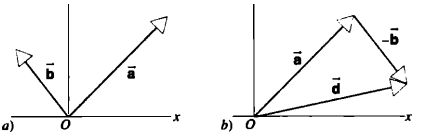


FIGURA 2-7. *a)* Vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. *b)* La diferencia $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ se obtiene sumando $-\vec{b}$ a $\vec{a}$.

para sumar $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para obtener $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. En analogía con la ecuación 2-4, los componentes de $\vec{d}$ son $d_x = a_x - b_x$ y $d_y = a_y - b_y$.

PROBLEMA RESUELTO 2-1. Un avión recorre 209 km en un curso recto formando un ángulo de 22.51° del Norte al Este. ¿Qué distancia al Norte y qué distancia al Sur cubre desde su punto de partida?

Solución Decidimos que la dirección positiva x sea el Este y que la dirección positiva y sea el Norte. A continuación trazamos un vector de desplazamiento (Fig. 2-8) desde el origen (punto de partida), formando un ángulo de 22.5° con el eje y (Norte) inclinado sobre la dirección positiva x (Este). La longitud del vector representa una magnitud de 209 km. Si a este vector lo llamamos $\vec{d}$, d_x nos da la distancia recorrida al Este del punto de partida, y d_y nos da la distancia cubierta al Norte del punto de partida. Tenemos entonces

$$\phi = 90.0° - 22.5° = 67.5°,$$

así que (Ecs. 2-1)

$$d_x = d\cos\phi = (209\text{ km})(\cos 67.5°) = 80.0\text{ km},$$

y

$$d_y = d\,\text{sen}\,\phi = (209\text{ km})(\text{sen}\,67.5°) = 193\text{ km}.$$

Al resolver este problema, hemos supuesto que la superficie de la Tierra puede representarse como el plano xy. Pero sabemos que no

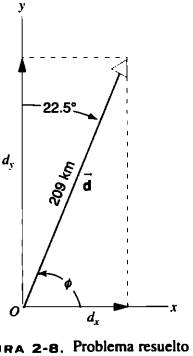


FIGURA 2-8. Problema resuelto 2-1.

es plana sino curva, con un radio de 6,400 km aproximadamente. En distancias pequeñas es más o menos plana y podemos utilizar las coordenadas xy sin problemas. ¿Puede estimar la distancia d que un avión debe recorrer antes que el uso de las coordenadas planas cartesianas causen un error de 5%, calculado en la distancia que el avión cubre hacia el Norte y el Este de su punto de partida?

PROBLEMA RESUELTO 2-2. Un automóvil se dirige hacia el Este en una carretera plana de 32 km. Luego dobla al Norte en una intersección y cubre 47 km antes de detenerse. Encuentre el vector que indica la posición final del vehículo.

Solución. Escogemos un sistema coordenado fijo respecto a la Tierra, con una dirección positiva x que señala hacia el Este, y con una dirección positiva y que señala hacia el Norte. Como se muestra en la figura 2-9, se trazan los dos viajes sucesivos, representados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. El vector resultante $\vec{s}$ se obtiene de $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$. Como $\vec{b}$ no tiene componentes x, y como $\vec{a}$ no tiene componentes y, por medio de la ecuación 2-4 obtenemos

$$s_x = a_x + b_x = 32\text{ km} + 0 = 32\text{ km},$$

$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47\text{ km} = 47\text{ km}.$$

Entonces la magnitud y la dirección de $\vec{s}$ son (Ecs. 2-2)

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(32\text{ km})^2 + (47\text{ km})^2} = 57\text{ km},$$

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{47\text{ km}}{32\text{ km}} = 1.47, \qquad \phi = \tan^{-1}(1.47) = 56°.$$

El vector resultante $\vec{s}$ posee una magnitud de 17 km y forma un ángulo de 56° al Norte del Este.

PROBLEMA RESUELTO 2-3. Tres vectores del plano xy se expresan así respecto al sistema coordenado

$$\vec{a} = 4.3\hat{i} - 1.7\hat{j},$$

$$\vec{b} = -2.9\hat{i} + 2.2\hat{j},$$

y

$$\vec{c} = -3.6\hat{j},$$

donde los componentes están dados en unidades arbitrarias. Encuentre el vector $\vec{s}$ que sea la suma de estos vectores.

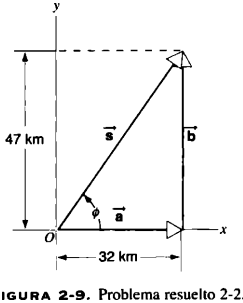


FIGURA 2-9. Problema resuelto 2-2.

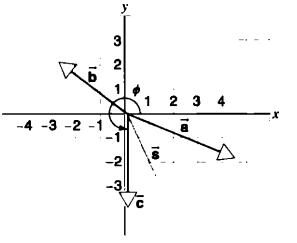


FIGURA 2-10. Problema resuelto 2-3.

Solución Si generalizamos las ecuaciones 2-4 al caso de los tres vectores, tendremos

$$s_x = a_x + b_x + c_x = 4.3 - 2.9 + 0 = 1.4,$$

y

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -1.7 + 2.2 - 3.6 = -3.1.$$

Por tanto,

$$\vec{s} = s_x\hat{i} + s_y\hat{j} = 1.4\hat{i} - 3.1\hat{j}.$$

La figura 2-10 muestra los cuatro vectores. Por medio de las ecuaciones 2-2 podemos calcular que la magnitud de $\vec{s}$ es 3.4, y que el ángulo ϕ que $\vec{s}$ que forma con el eje x positivo, medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj partiendo de dicho eje, es

$$\phi = \tan^{-1}(-3.1/1.4) = 294°.$$

La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan ángulos entre +90° y −90° del arctan. En este caso, −66° (que nos da la calculadora) equivale a 294°. Sin embargo, obtendríamos el mismo ángulo si buscáramos $\tan^{-1}(3.1/-1.4)$, que debería darnos un ángulo en el segundo cuadrante (parte superior izquierda). Al aplicar la ecuación 2-2 para obtener ϕ, hay que considerar los *signos individuales* de los componentes; no basta ocuparnos sólo del signo de su cociente. Si trazamos un dibujo similar al de la figura 2-10, no cometeremos un error demasiado grave, y de ser necesario podemos convertir el valor de la calculadora en un resultado dentro del cuadrante correcto empleando la identidad $\tan(-\phi) = \tan(180° - \phi)$.

2-3 VECTORES DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

En cinemática describimos el movimiento de una partícula por medio de vectores que especifican su posición, velocidad y aceleración. Hasta ahora los ejemplos se han expresado en dos dimensiones (el plano xy). En seguida vamos a estudiar el movimiento en tres dimensiones (utilizando un sistema coordenado xyz).

La figura 2-11 muestra una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria arbitraria en tres dimensiones. En un momento dado t, podemos localizarla por sus coordenadas x, y y z, que son los tres componentes del *vector de posición* $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \qquad (2\text{-}5)$$

donde $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ son los vectores unitarios cartesianos, según se muestra en la figura 2-11.

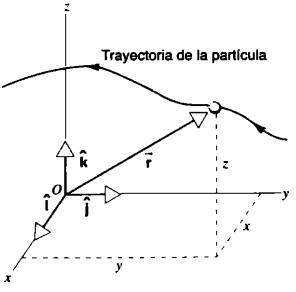


FIGURA 2-11. La posición de una partícula que se desplaza sobre su trayectoria se obtiene por el vector de posición $\vec{r}$, que tiene los componentes x, y y z. También se muestran los tres vectores unitarios cartesianos $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.

Supóngase que la partícula está situada en la posición $\vec{r}_1$ en el tiempo t_1, y que se desplaza a lo largo de su trayectoria hacia la posición $\vec{r}_2$ en el tiempo t_2, como se observa en la figura 2-12*a*. El *vector de desplazamiento* $\Delta\vec{r}$, se define como el cambio de posición que se realiza en este intervalo:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{2-6}$$

Los tres vectores $\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}$ y $\vec{r}_2$, tienen la misma relación que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{s}$ en la figura 2-4*b*. Es decir, si empleamos el método gráfico de adición de la cabeza al inicio, $\Delta\vec{r}$ sumado a $\vec{r}_1$, obtenemos la suma $\vec{r}_2$. Por tanto, $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$, esto a su vez nos da la ecuación 2-6.

Nótese en la figura 2-12*a*, que el desplazamiento no es lo mismo que la distancia recorrida por la partícula. Se determina sólo mediante los puntos inicial y final del intervalo, no mediante la trayectoria cubierta entre ellos.

Velocidad

La *velocidad promedio* en un intervalo, es el desplazamiento (cambio de posición) dividido entre el intervalo temporal durante el cual ocurre el desplazamiento, es decir

$$\vec{v}_{pro} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{2-7}$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$. En esta ecuación, el vector $\Delta\vec{r}$ se multiplica por el escalar positivo $1/\Delta t$, *de modo que el vector* $\vec{v}_{pro}$ *señala en la misma dirección que* $\Delta\vec{r}$.

Al igual que el desplazamiento, la velocidad promedio en un intervalo cualquiera, depende sólo de la ubicación de las partículas al inicio y al final del intervalo; no depende de si aumenta o disminuye, ni siquiera de si cambia de dirección en ese intervalo. Nótese especialmente que si una partícula retorna a su punto de partida, la velocidad promedio será cero según la definición de la ecuación 2-7. Esta definición establece que la velocidad promedio de un automóvil de carreras en las 500 millas de Indianápolis es ¡cero!

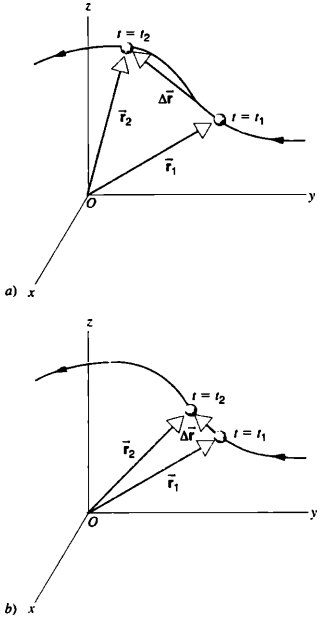


FIGURA 2-12. *a*) En el intervalo Δt de t_1 a t_2, la partícula pasa de la posición $\vec{r}_1$ a la posición $\vec{r}_2$. Su desplazamiento en él es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. *b*) A medida que disminuye el tamaño del intervalo, el vector de desplazamiento se acerca a la trayectoria real de la partícula.

La velocidad promedio es útil cuando se estudia la conducta global de una partícula durante algún intervalo, pero al describir los detalles de su movimiento sería más útil tener una función matemática que nos dé la velocidad en todos los puntos de él. Ésta es la *velocidad instantánea* $\vec{v}$. Cuando usamos el término "velocidad", nos referimos a ella.

Para calcularla reducimos el tamaño del intervalo Δt; al hacerlo el vector $\Delta\vec{r}$ se aproxima a la trayectoria real (como en la figura 2-12*b*) y se convierte en tangente de la trayectoria en el límite $\Delta t \to 0$. En este caso, la velocidad promedio se acerca a la instantánea $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{2-8}$$

La dirección de $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria de la partícula, lo cual indica la dirección en que se desplaza en ese momento.

La ecuación 2-8 se asemeja a la definición de una derivada, y podemos escribirla así

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2-9}$$

Esta derivada de un vector se obtiene tomando la de cada uno de sus componentes:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}. \quad (2\text{-}10)$$

Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ tienen magnitud y dirección constantes, y pueden ser tratados como constantes cuando se toma la derivada; en otros sistemas coordenados (como los cilíndricos o los polares esféricos), puede cambiar de dirección con el tiempo y por ello no pasan inalterados por la derivada.

El vector $\vec{\mathbf{v}}$ también puede escribirse en función de sus componentes

$$\vec{\mathbf{v}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}. \quad (2\text{-}11)$$

Dos vectores pueden ser iguales sólo si sus componentes correspondientes también lo son, por lo cual al igualar las ecuaciones 2-10 y 2-11 se obtienen tres ecuaciones:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2\text{-}12)$$

La relación de vectores tridimensionales de la ecuación 2-9 equivale a la relaciones de tres unidimensionales de la ecuación 2-12.

El término *rapidez* (que indica rapidez instantánea), suele referirse a la magnitud de la velocidad instantánea, sin que se indique la dirección, es decir, la velocidad v es $|\vec{\mathbf{v}}|$. El velocímetro de un automóvil indica su rapidez, no su velocidad puesto que no especifica una dirección. La rapidez es un escalar pues no contiene información direccional. También podemos definir la *rapidez promedio:*

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} \quad (2\text{-}13)$$

Conviene precisar que la rapidez promedio generalmente *no* se relaciona con la magnitud de la velocidad promedio. Por ejemplo, el automóvil en las 500 millas de Indianápolis con una velocidad promedio de cero (porque comienza y termina la carrera en el mismo lugar) ciertamente no tiene una rapidez promedio de ¡cero! La ecuación 2-13 es escalar: la distancia total cubierta no suministra información sobre la dirección del recorrido.

Tanto la velocidad como la rapidez tienen dimensiones de longitud divididas entre el tiempo; de modo que su unidad en el SI es metros por segundo (m/s). Otras unidades útiles son millas por hora (m/h) o mph), kilómetros por hora (km/h), y así sucesivamente.

Aceleración

La magnitud o la dirección de la velocidad de una partícula pueden cambiar conforme ésta se desplaza. El cambio de velocidad con el tiempo se llama *aceleración.* En analogía con la ecuación 2-7, podemos definir la *aceleración promedio* en este intervalo, como el cambio de velocidad por unidad de tiempo, esto es

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{pro}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}. \quad (2\text{-}14)$$

El cambio de velocidad $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ significa $\vec{\mathbf{v}}_{\text{final}} - \vec{\mathbf{v}}_{\text{inicial}}$. Igual que en el caso de la velocidad promedio, la aceleración promedio nada nos dice acerca de la variación de $\vec{\mathbf{v}}$ durante el intervalo Δt. La dirección de $\vec{\mathbf{a}}_{\text{pro}}$ es la misma que la de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$.

La *aceleración instantánea* $\vec{\mathbf{a}}$ se obtiene del límite de la ecuación 2-14 para intervalos temporales cada vez más pequeños:

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}. \quad (2\text{-}15)$$

Una vez más esto puede expresarse como derivada:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \quad (2\text{-}16)$$

y por analogía con las ecuaciones 2-10 y 2-11, podemos escribir los componentes del vector de la aceleración instantánea así

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (2\text{-}17)$$

Nótese que las ecuaciones vectoriales como la 2-16, pueden simplificar la notación, recordándonos además cómo separar los componentes (por ejemplo, a_x no tiene efecto alguno en v_y o v_z).

En general, la dirección de la aceleración no se relaciona con la de $\vec{\mathbf{v}}$. Es posible que $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{a}}$ sean paralelos, antiparalelos, perpendiculares entre sí o en cualquier otro ángulo relativo.

Como $\vec{\mathbf{v}}$ es una magnitud vectorial, un cambio de dirección produce aceleración aunque su magnitud permanezca inalterada. Por tanto, el movimiento con rapidez constante puede ser un movimiento acelerado. Por ejemplo, los componentes de $\vec{\mathbf{v}}$ pueden cambiar de modo que la magnitud $\vec{\mathbf{v}}$ $(= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2})$ permanezca constante. Esta situación se da sobre todo en el movimiento circular uniforme que se estudia en la sección 4-5.

La aceleración se define, como la velocidad dividida entre el tiempo, por lo cual sus dimensiones son longitud/tiempo^2. En el SI, las unidades de aceleración son m/s^2. En ocasiones se escriben m/s/s, que se lee "metros por segundo por segundo". Con ello se resalta que la aceleración es un cambio de velocidad por unidad de tiempo.

PROBLEMA RESUELTO 2-4. Una partícula se desplaza en el plano xy, de modo que sus coordenadas x y y varían con el tiempo según $x(t) = At^3 + Bt$ y $y(t) = Ct^2 + D$, donde $A = 1.00$ m/s^3, $B = -32.0$ m/s, $C = 5.0$ m/s^2 y $D = 12.0$ m. Calcule su posición, velocidad y aceleración cuando $t = 3$ s.

Solución La posición está dada por la ecuación 2-5, con las expresiones correspondientes a $x(t)$ y $y(t)$:

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} = (At^3 + Bt)\hat{\mathbf{i}} + (Ct^2 + D)\hat{\mathbf{j}}.$$

Al evaluar esta expresión cuando $t = 3$ s, obtenemos

$$\vec{\mathbf{r}} = (-69\text{ m})\hat{\mathbf{i}} + (57\text{ m})\hat{\mathbf{j}}.$$

Los componentes de la velocidad se obtienen a partir de la ecuación 2-12:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(At^3 + Bt) = 3At^2 + B$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ct^2 + D) = 2Ct.$$

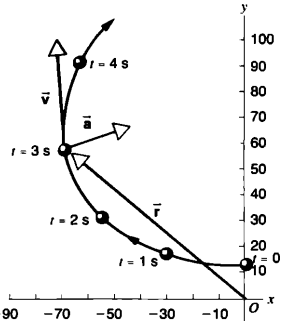


FIGURA 2-13. Problema resuelto 2-4. Se muestra la trayectoria de una partícula en movimiento y se indica su posición en $t = 0$, 1, 2, 3 y 4 s. En $t = 3$ s, se indican también los vectores que representan su posición, velocidad y aceleración. Nótese que no existe una relación particular entre las direcciones de $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$, ni entre las longitudes de los vectores que los representan.

Al evaluar los componentes cuando $t = 3$ s y al utilizar la ecuación 2-11, obtenemos

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-5\ \text{m/s})\hat{i} + (30\ \text{m/s})\hat{j}.$$

Los componentes de la aceleración son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3At^2 + B) = 6At$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(2Ct) = 2C.$$

Con $t = 3$ s, la aceleración será

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = (18\ m/s^2)\hat{i} + (10\ m/s^2)\hat{j}.$$

La figura 2-13 muestra la trayectoria de la partícula de $t = 0$ a $t = 4$ s. En ella se indican los vectores de posición, velocidad y aceleración cuando $t = 3$ s. (Como $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ se expresan en diferentes unidades, la longitud de las flechas dibujadas en la figura 2-13 no guardan relación entre sí.) El vector $\vec{r}$ ubica la partícula en relación con su origen. El vector $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria de la partícula, como se observa en $t = 3$ s. La aceleración $\vec{a}$ representa el cambio de velocidad, y la dirección de $\vec{a}$ en $t = 3$ s se basa razonablemente en cómo la dirección de $\vec{v}$ cambia en el intervalo alrededor de $t = 3$ s.

2-4 CINEMÁTICA UNIDIMENSIONAL

Ahora que hemos establecido las definiciones de importantes magnitudes para describir el movimiento, examinemos algunos ejemplos de sus posibles aplicaciones. Para simplificar la exposición, consideramos el movimiento en una sola dimensión, por lo cual utilizaremos exclusivamente un componente de las ecuaciones 2-5, 2-12 y 2-17.

En la cinemática unidimensional, una partícula puede desplazarse sobre una recta. Puede cambiar su rapidez e incluso invertir su dirección, pero el movimiento siempre se efectúa sobre una línea. Con esta limitación es posible considerar muchas situaciones físicas: la caída de una piedra, un tren que acelera, un automóvil que frena, un disco de goma de hockey sobre hielo, una caja que se empuja hacia arriba en una rampa o un electrón que se desplaza rápidamente dentro de un tubo de rayos X.

Podemos describir el movimiento de una partícula en dos formas: mediante ecuaciones matemáticas y con gráficas. Ambas suministran información sobre el problema y a menudo desearemos utilizar las dos. El método matemático suele ser mejor para resolver problemas, pues ofrece mayor precisión que el método gráfico. En cambio, este último a menudo nos permite una compresión más física que un conjunto de ecuaciones.

A continuación se incluyen algunas clases de movimiento, junto con las ecuaciones o las gráficas que las describen.

1. *Sin movimiento en absoluto.* La partícula ocupa la misma posición en todo momento. Supóngase que se encuentra sobre el eje x en la coordenada A, de modo que (en cualquier momento)

$$x(t) = A. \qquad (2\text{-}18)$$

La gráfica de este "movimiento" aparece en la figura 2-14*a*. La velocidad, que permanece constante, se muestra en la figura 2-14*b*. La situación física aquí representada, pudiera ser por ejemplo, una cuenta que puede deslizarse libremente sobre una alambre recto. En este caso la cuenta se halla en reposo cuando $x = A$.

En los problemas de cinemática, a menudo queremos saber cómo la posición y velocidad dependen del tiempo a medida que una partícula se desplaza. Por ello escribimos como $x(t)$ la coordenada de posición en función del tiempo. De ahí que tracemos la gráfica en la figura 2-14 con x como variable dependiente (sobre el eje vertical), y con t como variable independiente (sobre el eje horizontal). Colocar x sobre el eje vertical, *no* significa que la partícula se desplaza verticalmente; en esta situación, el alambre por donde se desliza la cuenta puede tener cualquier dirección.

2. *Movimiento a velocidad constante.* En el movimiento en una dirección (que escogemos como la dirección x), la velocidad

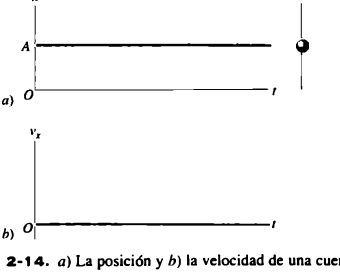


FIGURA 2-14. *a*) La posición y *b*) la velocidad de una cuenta en un alambre en reposo $x = A$.

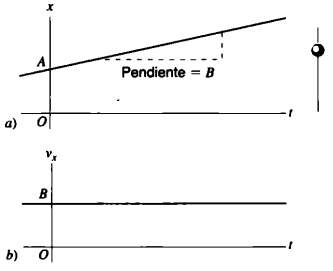


FIGURA 2-15. *a*) La posición y *b*) la velocidad de una cuenta que se desliza en una dimensión a lo largo de un alambre con velocidad constante. La velocidad es igual a la pendiente B de la gráfica de $x(t)$. La gráfica de $v_x(t)$ es la línea horizontal $v_x = B$.

v_x puede ser positiva si la partícula se mueve en la dirección de x creciente, o negativa si lo hace en la dirección contraria. Cuando la velocidad es constante, la gráfica de posición en función del tiempo será una recta. Como se indica en la ecuación 2-12 ($v_x = dx/dt$), la rapidez del cambio de posición es la velocidad. En la gráfica de x en función de t, la rapidez del cambio es la pendiente de la gráfica, cuanto más grande sea la velocidad, mayor será la pendiente. La figura 2-15*a* muestra esta gráfica, cuya forma matemática puede expresarse de este modo:

$$x(t) = A + Bt, \qquad (2\text{-}19)$$

que es la forma acostumbrada de la ecuación de una recta (más comúnmente expresada como $y = mx + b$) con la pendiente B. Nótese que $v_x = dx/dt = B$; la figura 2-15*b* muestra la velocidad constante.

Como se aprecia en la figura 2-15 y también en la ecuación 2-19, la partícula se halla en la posición $x = A$, cuando $t = 0$. Se mueve en dirección de x creciente, de manera que la pendiente B (y la velocidad correspondiente v_x) es positiva.

3. *Movimiento acelerado.* Definida la aceleración, como la rapidez de cambio de la velocidad, el movimiento acelerado corresponderá entonces a aquel en que cambia la velocidad. Y como ésta es la pendiente de la gráfica de $x(t)$, la pendiente deberá cambiar en ella. Por tanto, estas gráficas son líneas curvas y no rectas. He aquí dos ejemplos de movimiento acelerado:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2, \qquad (2\text{-}20)$$

$$x(t) = D \cos \omega t. \qquad (2\text{-}21)$$

En el primer caso (Fig. 2-16*a*), si suponemos que C es positivo, la pendiente aumenta a medida que se mueve la partícula, y esto corresponde a un aumento de la velocidad positiva de la partícula. De acuerdo con las ecuaciones 2-12 y 2-17, $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$. Según la ecuación 2-20 $d^2x/dt^2 = 2C$ y, por tanto, la aceleración es constante. En el segundo caso (Fig. 2-16*b*), la partícula oscila $x = +D$ y $x = -D$; su velocidad pasa de positiva a negativa cuando la derivada de la ecuación 2-21 cambia de signo.

A menudo, las descripciones completas del movimiento son más complicadas que estos ejemplos simples. A continuación se incluyen otros casos que conviene considerar.

4. *Aceleración y el automóvil que frena.* Un automóvil se encuentra en reposo durante cierto tiempo y luego comienza a acelerarse hasta alcanzar cierta velocidad. Después se desplaza por un tiempo a esa velocidad, y al superarla se aplican los frenos para devolverlo al reposo. La figura 2-17*a* muestra la aceleración en varios intervalos; para simplificar la explicación, suponemos que la aceleración es constante durante los intervalos cuando el automóvil acelera y disminuye su velocidad. La aceleración es cero, cuando se halla en reposo o cuando se desplaza a velocidad constante (como lo indica la ecuación 2-17, cuando v_x es una constante, tenemos $a_x = dv_x/dt = 0$).

La figura 2-17*b* muestra la velocidad en cada intervalo. Si $a_x = 0$, v_x será constante. Si a_x es una constante positiva o negativa, v_x se representará mediante una línea recta con la correspondiente pendiente positiva o negativa. En cualquier punto, el valor de a_x puede obtenerse de la pendiente de la gráfica v_x en función de t.

En forma similar se obtiene la gráfica de posición contra tiempo $x(t)$ de la figura 2-17*c*. Nótese que la pendiente de $x(t)$ da $v_x(t)$ como lo exige la ecuación 2-12 ($v_x = dx/dt$). Por ejemplo, en el intervalo en que el automóvil está acelerando, la pendiente de $x(t)$ aumenta gradualmente, lo cual corresponde con exactitud al incremento de la velocidad. En el intervalo en que el automóvil se desplaza a velocidad constante $x(t)$, se representa mediante una recta con pendiente constante.

Estas gráficas están un poco idealizadas; en la vida real, un automóvil no puede pasar inmediatamente de un estado de reposo a otro de aceleración constante. Los saltos repentinos de $a_x(t)$ se conectarían por una curva continua, y se harían redondas las inclinaciones tan pronunciadas de la gráfica de $v_x(t)$.

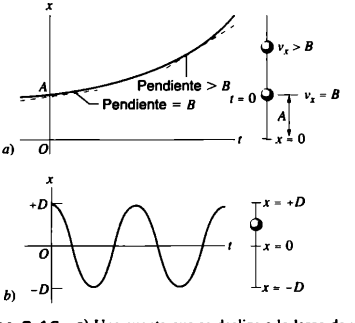


FIGURA 2-16. *a*) Una cuenta que se desliza a lo largo de un alambre en una dimensión, se desplaza en la dirección positiva x con velocidad creciente. La velocidad es igual a la pendiente de la curva que describe el movimiento de la partícula; vemos cómo crece constantemente la pendiente de la curva. *b*) Una cuenta que se desliza por un alambre en una dimensión oscila entre $x = D$ y $x = -D$.

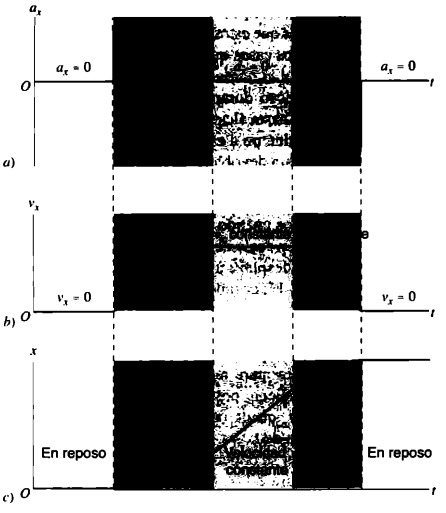


FIGURA 2-17. *a*) La aceleración, *b*) la velocidad y *c*) la posición de un automóvil que arranca del reposo, acelera en un intervalo, luego se desplaza con velocidad constante y finalmente frena con una aceleración negativa para llegar al reposo nuevamente. En realidad no podemos modificar instantáneamente la aceleración de un automóvil de un valor a otro; ambas $a_x(t)$ y $v_x(t)$ serían suaves y continuas para un automóvil verdadero. Las curvas suaves conectarían los segmentos planos $a_x(t)$, y las vueltas pronunciadas en $v_x(t)$ se volverían redondas.

5. *Un objeto que cae.* Como veremos más adelante en este capítulo, cuando un objeto cae cerca de la superficie terrestre, experimenta una aceleración constante hacia abajo a causa de la gravedad. En este problema suponemos que el eje y es vertical, y escogemos la dirección ascendente como positiva, de modo que la aceleración tenga un componente negativo y a_y. La figura 2-18*a* muestra la aceleración $a_y(t)$ igual para una constante de valor negativo.

Si liberamos un cuerpo del reposo, crece la magnitud de su velocidad descendente (negativa) debido a su aceleración. Puesto que a_y es una constante, $v_y(t)$ debe ser una recta cuya pendiente (negativa) sea igual a a_y, como se observa en la figura 2-18*b*. La coordenada vertical y comienza en algún valor positivo correspondiente a la altura H, donde el objeto fue liberado originalmente; $y(t)$ disminuye gradualmente hasta cero a medida que el objeto cae, como se observa en la figura 2.18*c*. En un principio la pendiente de $y(t)$ es cero, porque también lo es inicialmente $v_y(t)$. A medida que v_y se vuelve más negativa, la correspondiente pendiente de $y(t)$ se torna más negativa, como se ve al dibujar las líneas tangentes a $y(t)$ en varios lugares.

6. *Una bola que rebota.* Consideremos ahora una pequeña bola de acero que se deja caer sobre una superficie dura contra la cual rebota. Una vez más escogemos la dirección vertical como el eje y del problema y suponemos que la dirección ascendente es positiva.

Después que la bola de acero choca contra la superficie, rebota hacia arriba. Suponemos que la velocidad simplemente cambia de dirección, luego de hacer contacto con la superficie; su magnitud permanece inalterada. (En realidad se registra una pérdida pequeña de rapidez, porque ni la bola ni

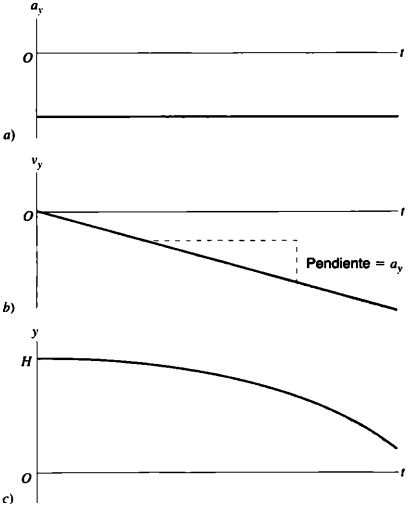


FIGURA 2-18. *a*) La aceleración, *b*) la velocidad y *c*) la posición de un objeto dejado caer desde el reposo y acelerado hacia abajo por la gravedad de la Tierra. La aceleración es una constante negativa, que es igual a la pendiente de $v_y(t)$.

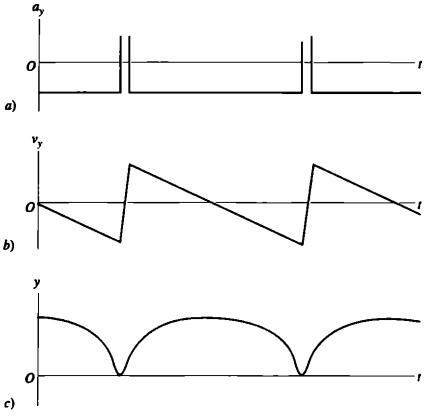


FIGURA 2-19. *a*) La aceleración, *b*) la velocidad y *c*) la posición de un bola de acero que cae en una superficie dura y rebota en ella. Los saltos repentinos en $v_y(t)$, correspondientes a los intervalos breves cuando está en contacto con la superficie, se trazaron como si la aceleración fuera igual a una gran constante positiva en ellos. Nótese que $y(t)$ alcanza su valor máximo, y que la tangente a ella es horizontal cuando $v_y(t)$ llega a cero.

la superficie son perfectamente elásticos.) Durante el breve intervalo en que la bola está en contacto con la superficie, una gran aceleración ascendente (positiva) debe operar para invertir la dirección de su velocidad. Nótese que existe aceleración, aun cuando la magnitud de la velocidad permanezca inalterada; debe ocurrir aceleración siempre que cambie la magnitud *o la dirección* de una velocidad.

Cuando la bola sube tras rebotar, se produce de nuevo una aceleración descendente (constante) a causa de la gravedad, la cual finalmente lo pone en reposo un instante, después del cual comienza a caer otra vez contra la superficie.

La figura 2-19 muestra la aceleración, la velocidad y la posición de la bola. Una vez más, $a_y(t)$ corresponde a la pendiente de $v_y(t)$, y $v_y(t)$ a la pendiente de $y(t)$.

Estamos de nuevo ante una representación un poco idealizada de este movimiento. El comportamiento exacto en el instante de la colisión puede resultar muy complicado, y sin duda no se caracterizará por una aceleración constante como supusimos aquí. No obstante, el comportamiento global será muy semejante al descrito en la figura 2-19.

Ecuaciones de la cinemática unidimensional

Podemos aplicar directamente las ecuaciones vectoriales de la sección 2-3 al movimiento en una dimensión, que sería la dirección x. Supongamos que la partícula empieza en la posición x_1 en el tiempo t_1, y que se desplaza hacia x_2 en el tiempo t_2. En el intervalo temporal $\Delta t = t_2 - t_1$, su desplazamiento es $\Delta x = x_2 - x_1$. De acuerdo con la ecuación 2-7, la velocidad promedio es

$$v_{\text{pro},x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2-22}$$

La velocidad promedio indica el comportamiento medio durante el intervalo temporal Δt. Depende sólo de las posiciones inicial y final de la partícula, y no de su trayectoria entre x_1 y x_2. Suponemos que Δt es positivo (es decir, que nuestros relojes avancen hacia adelante), según la ecuación 2-22 y la regla de la multiplicación de un vector por un escalar, el signo de $v_{\text{pro},x}$ está determinado por el signo de Δx. Cuando $v_{\text{pro},x} > 0$, la partícula se mueve en promedio de una coordenada x más pequeña a una más grande (es decir, se desplaza en la dirección positiva x). Por ejemplo, podría moverse de $x_1 = -8$ m a $x_2 = -4$ m, o de $x_1 = -3$ m a $x_2 = +1$ m, o de $x_1 = +2$ m a $x_2 = +6$ m. En todos los casos, $\Delta x = +4$ m, y por tanto, $v_{\text{pro},x} > 0$. Si $v_{\text{pro},x} < 0$, en promedio, la partícula se mueve en la dirección negativa x; por ejemplo, de $x_1 = +5$ m a $x_2 = +2$ m, o de $x_1 = -3$ m a $x_2 = -6$ m (ambas tienen $\Delta x = -3$ m).

La velocidad instantánea se deduce de la ecuación 2-12:

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \tag{2-23}$$

La ecuación 2-23 permite analizar los ejemplos de movimientos unidimensionales explicados antes en esta sección. Por ejemplo, en el movimiento a velocidad constante de la figura 2-15*a*, si se supone que $x(t) = A + Bt$ da $v_x = dx/dt = B$, como se observa en la figura 2-15*b*.

En el caso de movimiento acelerado en el cual la partícula se desplaza con la velocidad v_{1x} en el tiempo t_1 y acelera hasta alcanzar la velocidad v_{2x} en el tiempo t_2, la ecuación 2-14 da

$$a_{\text{pro},x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2-24}$$

El signo de la aceleración promedio está determinado por el signo de Δv_x; así, un cambio de velocidad de $v_{1x} = -9$ m/s a $v_{2x} = -4$ m/s o de $v_{1x} = +4$ m/s a $v_{2x} = +9$ m/s, corresponde a $\Delta v_x = +5$ m/s y a positivo $a_{\text{pro},x}$; mientras que un cambio de $v_{1x} = +9$ m/s a $v_{2x} = +4$ m/s o de $v_{1x} = -4$ m/s a $v_{2x} = -9$ m/s da $\Delta v_x = -5$ m/s y $a_{\text{pro},x}$ negativo.

Como en el caso de la velocidad promedio, la aceleración media depende sólo de la diferencia entre la velocidad inicial y la final en el intervalo, y no del movimiento detallado durante él. Todos los movimientos que producen el mismo Δv_x en el intervalo Δt darán idéntica aceleración promedio.

La aceleración instantánea se encuentra en la ecuación 2-17:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \tag{2-25}$$

Por ejemplo, en el caso incluido en la figura 2-16*a* con $x(t) = A + Bt + Ct^2$, la ecuación 2-23 nos da $v_x = B + 2Ct$, y la ecuación 2-25 da $a_x = 2C$.

Si emplea las ecuaciones 2-23 y 2-25, debería revisar los movimientos graficados en las figuras 2-17, 2-18 y 2-19 para asegurarse que entiende cómo se relacionan la posición, la velocidad y la aceleración. Nótese sobre todo que la aceleración es la pendiente de la gráfica $v(t)$. Compare las figuras 2-17*a* y *b* para ver que donde la pendiente de $v_x(t)$ es cero (los segmentos lineales horizontales), entonces $a_x = 0$; que donde $v_x(t)$ aumenta (segmento lineal con pendiente positiva), a_x es una constante positiva.

La aceleración puede ser positiva o negativa, sin importar si la velocidad es positiva o negativa. Por ejemplo, consideremos un elevador que se desplaza en sentido vertical; lo llamaremos dirección *y* y supondremos que es positiva. Si el elevador se mueve hacia arriba pero disminuye su velocidad, v_y es positiva, pero a_y es negativa; en este caso el vector de velocidad señala en la dirección $+y$, y el vector de aceleración en la dirección $-y$. Si el elevador se mueve hacia abajo y frena, v_y es negativa y a_y es positiva. A menudo se da el nombre de *desaceleración* a estos dos casos, en que los vectores de velocidad y de aceleración siguen dirección contraria de modo que disminuye la rapidez (la magnitud de la velocidad).

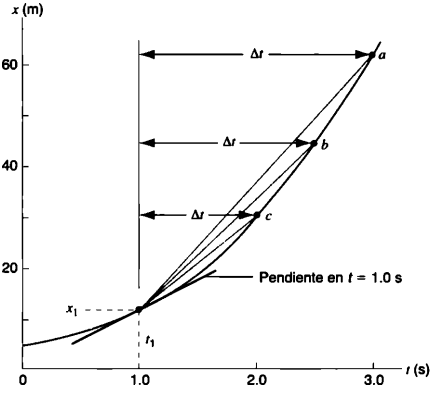


FIGURA 2-20. El intervalo Δt se vuelve más pequeño, en este caso cuando mantenemos fijo t_1 y ponemos el otro punto final t_2 más cerca de t_1. En el límite, el intervalo se convierte en cero y la cuerda se transforma en tangente. Los tres valores de x_2 y t_2 que aquí se muestren, denotadas como *a*, *b* y *c*, corresponden a las tres primeras líneas de la tabla 2-1.

El proceso de límites

Es interesante señalar cómo la velocidad promedio se acerca a la instantánea a medida que Δt se aproxima a cero. Consideremos, por ejemplo, el caso $x(t) = 5.0 + 1.0t + 6.0t^2$, donde *x* se da en metros y *t* en segundos. Arbitrariamente escogemos el punto $x_1 = 12$ m, $t_1 = 1.0$ s y calculamos el valor de $v_{\text{pro},x}$ usando la ecuación 2-22 al seleccionar una serie de puntos x_2, t_2 que se acercan cada vez más a x_1, t_1 para simular el proceso de límites. Los valores calculados se incluyen en la tabla 2-1. Nótese que parecen estar aproximándose al valor $v_{\text{pro},x} = 13$ m/s. Si queremos comparar este valor limitante de $v_{\text{pro},x}$ con el instantáneo, utilizaremos la ecuación 2-23 para obtener $v_x(t) = 1.0 + 12.0t$, que en efecto permite obtener $v_x = 13$ m/s cuando $t = 10$ s.

La figura 2-20 nos ofrece una ilustración gráfica de este proceso de límites. Conforme el punto 2 se acerca al punto 1, la línea que conecta los dos y cuya pendiente representa la velocidad promedio en ese intervalo, se aproximan a la tangente en el punto 1. Eso indica que la velocidad promedio se aproxima a la instantánea en este límite, como lo mostraron nuestros cálculos matemáticos.

TABLA 2-1 El proceso de límites

Punto inicial		*Punto final*		*Velocidad promedio*
x_1 (m)	t_1 (s)	x_2 (m)	t_2 (s)	$\Delta x/\Delta t$ (m/s)
12	1.0	62	3.0	25
12	1.0	45	2.5	22
12	1.0	31	2.0	19
12	1.0	20	1.5	16
12	1.0	13.4	1.1	13.6
12	1.0	12.7	1.05	13.3
12	1.0	12.1	1.01	13.06

PROBLEMA RESUELTO 2-5. Conducimos un BMW por una carretera recta por 5.2 mi a 43 mi/h, y en ese momento se nos acaba la gasolina. En 27 min caminamos 1.2 mi más hasta la estación más cercana. ¿Cuál es nuestra velocidad promedio desde el momento en que arrancamos el automóvil hasta el momento en que llegamos a la estación de gasolina?

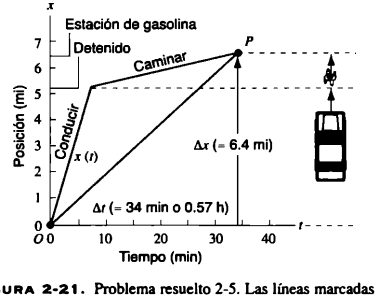


FIGURA 2-21. Problema resuelto 2-5. Las líneas marcadas "Conducir" y "Caminar", muestra movimientos con velocidades constantes diferentes correspondientes a las dos partes del viaje. La velocidad promedio es la pendiente de la línea *OP*.

Solución Podemos encontrar la velocidad promedio con la ecuación 2-22, si conocemos Δx, el desplazamiento neto y Δt, o sea el tiempo transcurrido correspondiente. Estas cantidades son

$$\Delta x = 5.2 \text{ mi} + 1.2 \text{ mi} = 6.4 \text{ mi}$$

y

$$\Delta t = \frac{5.2 \text{ mi}}{43 \text{ mi/h}} + 27 \text{ min}$$
$$= 7.3 \text{ min} + 27 \text{ min} = 34 \text{ min} = 0.57 \text{ h}.$$

Según la ecuación 2-22, tenemos entonces

$$v_{\text{pro},x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6.4 \text{ mi}}{0.57 \text{ h}} = 11.2 \text{ mi/h}.$$

La gráfica $x(t)$ de la figura 2-21 ayuda a visualizar el problema. Los puntos O y P definen el intervalo donde queremos encontrar la velocidad promedio; esta cantidad representa la pendiente de la recta que conecta los dos puntos.

PROBLEMA RESUELTO 2-6. La figura 2-22*a* muestra seis "instantáneas" sucesivas de una partícula que se desplaza sobre el eje x. En $t = 0$, se halla en una posición $x = +1.00$ m a la derecha del origen. En $t = 2.5$ s, ha llegado al reposo cuando $x = +5.00$ m; con $t = 4.0$ s, ha regresado a $x = 1.4$ m. La figura 2-22*b* es una gráfica de la posición x en función del tiempo t en este movimiento; las figuras 2-22*c* y 2-22*d* muestran la velocidad y aceleración correspondientes de la partícula. *a*) Calcule la velocidad promedio en los intervalos AD y DF. *b*) Estime la pendiente de $x(t)$ en los puntos B y F, y compare el resultado con los puntos correspondientes en la curva $v_x(t)$. *c*) Obtenga la aceleración promedio en los intervalos AD y AF. *d*) Estime la pendiente de $v_x(t)$ en el punto D, y compare el resultado con el valor de $a_x(t)$.

Solución *a*) De acuerdo con la ecuación 2-22,

$$AD: \quad v_{\text{pro},x} = \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A}$$
$$= \frac{5.0 \text{ m} - 1.0 \text{ m}}{2.5 \text{ s} - 0.0 \text{ s}} = +1.6 \text{ m/s}$$

$$DF: \quad v_{\text{pro},x} = \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D}$$
$$= \frac{1.4 \text{ m} - 5.0 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 2.5 \text{ s}} = -2.4 \text{ m/s}$$

En el intervalo AD, el signo positivo de $v_{\text{pro},x}$ significa que, en promedio, la partícula se desplaza en dirección de x creciente (es decir, hacia la derecha de la figura 2-22*a*) durante él. El signo negativo de $v_{\text{pro},x}$ en el intervalo DF, indica que en promedio la partícula se desplaza en dirección de x decreciente (a la izquierda de la figura 2-22*a*) durante él. *b*) A partir de las líneas trazadas tangencialmente a $x(t)$ en los puntos B y F de la figura 2-22*b*, estimamos lo siguiente:

$$\text{punto } B: \quad \text{pendiente} = \frac{4.5 \text{ m} - 2.8 \text{ m}}{1.5 \text{ s} - 0.5 \text{ s}} = +1.7 \text{ m/s}$$

$$\text{punto } F: \quad \text{pendiente} = \frac{1.4 \text{ m} - 4.5 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 3.5 \text{ s}} = -6.2 \text{ m/s}.$$

A partir de $v_x(t)$ en la figura 2-22*c*, estimamos $v_x = +1.7$ m/s en el punto B y $v_x = -6.2$ m/s de la parte F, en concordancia con las pendientes de $x(t)$. Conforme a lo previsto, $v_x(t) = dx/dt$.

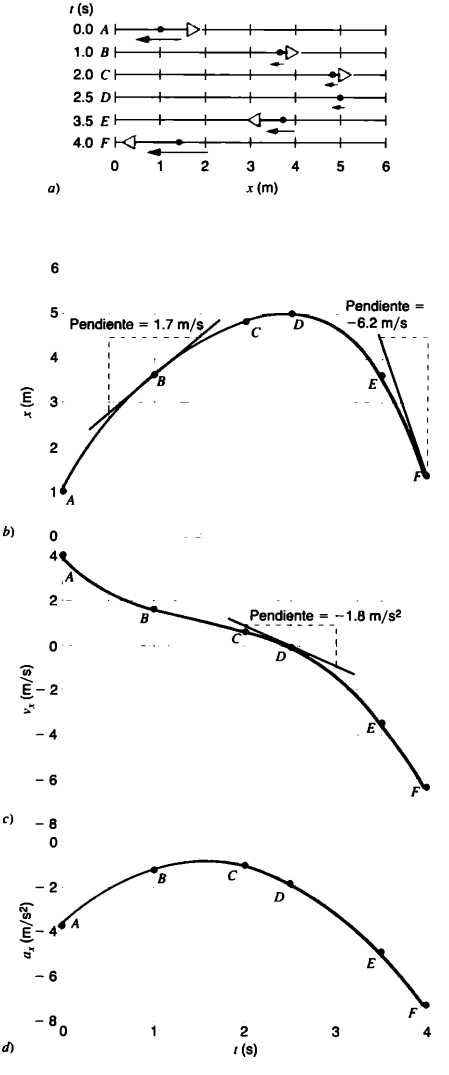


FIGURA 2-22. Problema resuelto 2-6. *a*) Seis "instantáneas" consecutivas de una partícula que se desplaza sobre el eje x. La flecha que la *cruza* indica su velocidad instantánea, y la flecha *debajo* de ella indica su aceleración instantánea. *b*) Gráfica de $x(t)$ del movimiento de una partícula. Los seis puntos $A - F$ corresponden a las seis instantáneas. *c*) Gráfica de $v_x(t)$. *d*) Gráfica de $a_x(t)$.

c) De acuerdo con la ecuación 2-24,

$$AD: \quad a_{\text{pro},x} = \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A}$$

$$= \frac{0.0\ \text{m/s} - 4.0\ \text{m/s}}{2.5\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = -1.6\ \text{m/s}^2$$

$$AF: \quad a_{\text{pro},x} = \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A}$$

$$= \frac{-6.2\ \text{m/s} - 4.0\ \text{m/s}}{4.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = -2.6\ \text{m/s}^2$$

d) A partir de los datos de la línea trazada tangencialmente a $v_x(t)$, en D estimamos lo siguiente:

$$\text{pendiente} = \frac{-0.9\ \text{m/s} - 0.9\ \text{m/s}}{3.0\ \text{s} - 2.0\ \text{s}} = -1.8\ \text{m/s}^2.$$

En el punto D sobre la gráfica $a_x(t)$, vemos que $a_x = -1.8\ \text{m/s}^2$. Por tanto, $a_x = dv_x/dt$. Al examinar la gráfica $v_x(t)$ de la figura 2-22*c*, observamos que su pendiente es negativa, siempre en el intervalo de tiempo cubierto por la gráfica; así, $a_x(t)$ debería ser negativa. En la figura 2-22*d* se explica esto en forma gráfica.

2-5 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Es muy común encontrar el movimiento con aceleración constante (o casi constante): los ejemplos ya citados de objetos que caen cerca de la superficie terrestre o de los automóviles que frenan son muy representativos. En la presente sección vamos a obtener un conjunto de ecuaciones que nos permiten analizar este caso especial de la cinemática unidimensional con aceleración constante. Pero no olvide que estos resultados se aplican *sólo* cuando la aceleración es constante; por tanto, *no* se aplican a situaciones como el peso de un péndulo que oscila, a un misil que despega hacia la órbita de la Tierra, ni a una gota de agua que cae oponiéndose a la resistencia del aire. (Más adelante explicaremos los métodos que analizan estos casos.)

Supongamos que el movimiento se da en la dirección x. Representemos con a_x el componente x del vector de aceleración, es decir, a_x puede ser positivo o negativo. La velocidad inicial ($t = 0$) es v_{0x} y su posición inicial es x_0; ambas son además los componentes x de los vectores, y pueden ser independientemente positivas o negativas. En un momento posterior t, la partícula tiene una velocidad v_x y se halla en la posición x. Nuestra meta es obtener la posición y velocidad en el tiempo t.

Para aceleración constante, la aceleración instantánea y la promedio son iguales en todas partes, y por lo mismo podemos utilizar la ecuación 2-14 para escribir

$$a_x = a_{\text{pro},x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0}$$

o, resolviendo para v_x,

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \tag{2-26}$$

Este importante resultado permite calcular la velocidad en todo momento, pero *sólo con una aceleración constante*. La ecuación 2-26 da la velocidad en función del tiempo que podríamos escribir como $v_x(t)$, pero que generalmente escribimos simplemente como v_x. Nótese que la ecuación 2-26 tiene la forma $y = mx + b$, que describe la gráfica de una recta. Por tanto, la gráfica de v_x en función de t da una recta de pendiente a_x y la intersección v_{0x} (el valor de v_x a $t = 0$). Esta línea se grafica en la figura 2-23*b*. Es evidente que la ecuación 2-26 satisface la ecuación 2-25 ($a_x = dv_x/dt$).

A continuación veremos cómo la posición cambia con el tiempo. En este caso especial en que $v_x(t)$ es una recta, la velocidad promedio en un intervalo cualquiera (como lo definimos en la ecuación 2-22) también será igual al promedio de la velocidad inicial y final en él. En el intervalo temporal de 0 a t,

$$v_{\text{pro},x} = \tfrac{1}{2}(v_x + v_{0x}). \tag{2-27}$$

Vemos que esto es verdad, partiendo de la gráfica de la recta en la figura 2-23*b*. Al combinar las ecuaciones 2-22, 2-26 y 2-27, podemos eliminar v_x y despejar x para obtener

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2, \tag{2-28}$$

que nos da la posición de x en todo momento. También podemos escribir la ecuación 2-28 para encontrar el desplazamiento $x - x_0$ (el cambio neto de posición en el intervalo). La figura 2-23*c* muestra una gráfica de x en función de t, que tiene la forma de una parábola. Las ecuaciones 2-27 y 2-28 son válidas *sólo para aceleración constante*.

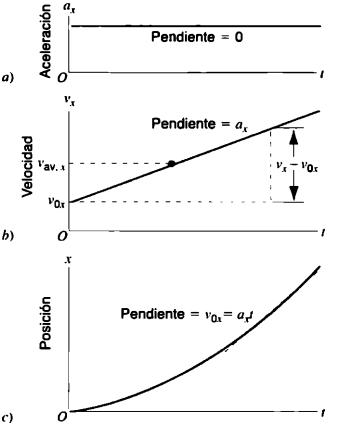


FIGURA 2-23. *a)* Aceleración constante de una partícula igual a la pendiente (constante) de $v_x(t)$. *b)* Su velocidad $v_x(t)$ obtenida en cada punto por la pendiente de la curva $x(t)$. Se indica la velocidad promedio $v_{\text{pro},x}$, que en el caso de una aceleración constante, es igual al promedio de v_x y v_{0x}. *c)* Posición $x(t)$ de una partícula que se mueve con aceleración constante. La curva se dibuja para la posición inicial $x_0 = 0$.

La velocidad y posición instantáneas deben relacionarse por medio de $v_x = dx/dt$. La ecuación 2-28 satisface esa relación como podemos demostrar:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2) = v_{0x} + a_x t = v_x.$$

Los estudiantes que ya están familiarizados con el cálculo integral se darán cuenta de lo siguiente: del mismo modo que la ecuación 2-26 puede obtenerse por diferenciación de la ecuación 2-28, también esta última puede obtenerse por integración de la ecuación 2-26. Este proceso lo demostraremos al final de la sección.

Las ecuaciones 2-26 y 2-28 también sirven de ecuaciones básicas para analizar el movimiento con aceleración constante. Si especificamos la *condición inicial* (los valores iniciales de la posición x_0, la velocidad v_0), y la aceleración (que según veremos luego se debe a la interacción de la partícula con su ambiente), podremos calcular la posición y velocidad para todos los valores del tiempo t.

Recuerde que en estas ecuaciones, v_x y x representan los componentes x de los vectores de velocidad y de posición. Como sucede siempre en problemas que comprenden vectores, podemos poner los ejes coordenados en el lugar que queramos y en cualquier orientación. En estos problemas debemos seleccionar el origen del sistema coordenado (a menudo escogido de modo que $x_0 = 0$, con lo cual se simplifican), y la dirección del eje positivo x, de manera que todos los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en esa dirección sean positivos y los de dirección contraria sean negativos. Una vez escogidos el origen y la dirección del sistema coordenado, deben conservarse a lo largo de la solución del problema.

Integración de las ecuaciones de movimiento (opcional)*

Las ecuaciones 2-26 y 2-28, nuestras expresiones básicas de la cinemática con aceleración constante, también pueden obtenerse aplicando los métodos del cálculo integral. Comenzaremos con la definición de aceleración, $a_x = dv_x/dt$, que podemos escribir así

$$dv_x = a_x dt.$$

Integrando los dos lados de la ecuación:

$$\int dv_x = \int a_x dt = a_x \int dt,$$

donde el último paso, esto es, extraer la aceleración de la integral, puede tomarse por ser constante la aceleración. Al resolver las integrales obtenemos

$$v_x = a_x t + C$$

donde C es una constante de integración. Podemos determinarla partiendo de una de las condiciones iniciales: en $t = 0$, la velocidad es v_{0x}. Al sustituir estos valores en la ecuación anterior, vemos que $C = v_{0x}$, y por lo tanto, obtenemos $v_x = v_{0x} + a_x t$, de acuerdo con la ecuación 2-26.

Para encontrar $x(t)$ por integración, comenzamos con una definición de velocidad, $v_x = dx/dt$, que escribimos así

$$dx = v_x dt.$$

Ahora sustituimos v_x en la ecuación 2-26, e integramos en ambos lados:

$$\int dx = \int (v_{0x} + a_x t)\, dt = v_{0x}\int dt + a_x \int t\, dt.$$

Al resolver las integrales obtenemos

$$x = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 + C',$$

donde C' es otra constante de integración. Para calcularla empleamos la segunda condición inicial: cuando $t = 0$, $x = x_0$. Al sustituir estos valores, obtenemos $C' = x_0$, que nos da $x(t)$ de conformidad con la ecuación 2-28.

PROBLEMA RESUELTO 2-7. Una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio) se desplaza en el interior de un tubo recto al vacío que mide 2.0 m de largo y forma parte de un acelerador de partículas. La partícula alfa entra en el tubo (en $t = 0$) con una velocidad 9.5×10^5 m/s, y sale por el otro extremo en el tiempo $t = 8.0 \times 10^{-7}$ s. *a*) Si su aceleración es constante, ¿cuál será ésta? *b*) ¿Cuál es su velocidad cuando sale del tubo?

Solución *a*) Decidimos que el eje x a lo largo del tubo con su dirección positiva sea el del movimiento de la partícula, y que el origen se encuentre en la entrada del tubo, de modo que $x_0 = 0$. Podemos calcular la aceleración resolviendo la ecuación 2-28 para a_x:

$$a_x = \frac{x - v_{0x}t}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= \frac{2.0\text{ m} - (9.5 \times 10^5\text{ m/s})(8.0 \times 10^{-7}\text{ s})}{0.5(8.0 \times 10^{-7}\text{ s})^2}$$

$$= +3.9 \times 10^{12}\text{ m/s}^2.$$

El signo positivo indica que la partícula empieza a acelerar al pasar por el tubo.

b) Para calcular la velocidad en el momento en que la partícula sale del tubo, aplicamos la ecuación 2-26:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$= (9.5 \times 10^5\text{ m/s}) + (3.9 \times 10^{12}\text{ m/s}^2)(8.0 \times 10^{-7}\text{ s})$$

$$= +4.1 \times 10^6\text{ m/s}.$$

La velocidad de la partícula aumenta debido a que la aceleración es positiva.

PROBLEMA RESUELTO 2-8. Frenamos nuestro Porsche con una aceleración constante de una velocidad de 23.6 m/s (cerca de 53 mph, por supuesto muy por debajo de la velocidad máxima) a 12.5 m/s en una distancia de 105 m. *a*) ¿Cuánto tiempo transcurre durante este intervalo? *b*) ¿Cuál es la aceleración? *c*) Si tuviera que seguir de frente con la misma aceleración constante, ¿cuánto tardaría en detenerse y qué distancia adicional cubriría?

* Los estudiantes no familiarizados todavía con el cálculo integral, posiblemente quieran posponer la lectura de esta sección.

Solución *a*) Decidimos que la dirección positiva para nuestro sistema coordenado fuera la dirección de la velocidad y que el origen fuera tal, que $x_0 = 0$ cuando comenzamos a frenar. Entonces la velocidad inicial será $v_{0x} = +23.6$ m/s en $t = 0$, la velocidad y posición finales serán $v_x = +12.5$ m/s y $x = 105$ m en el tiempo t. Puesto que la aceleración es constante, la velocidad promedio en el intervalo puede calcularse partiendo del promedio de la velocidad inicial, y final según la ecuación 2-27:

$$v_{\text{pro},x} = \tfrac{1}{2}(v_x + v_{0x}) = \tfrac{1}{2}(12.5 \text{ m/s} + 23.6 \text{ m/s}) = 18.05 \text{ m/s}.$$

La velocidad promedio también puede expresarse como $v_{\text{pro},x} = \Delta x/\Delta t$. Con $\Delta x = 105$ y $\Delta t = t - 0$, podemos resolver la ecuación para t:

$$t = \frac{\Delta x}{v_{\text{pro},x}} = \frac{105 \text{ m}}{18.05 \text{ m/s}} = 5.81 \text{ s}.$$

b) Ahora podemos obtener la aceleración de la ecuación 2-26:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{12.5 \text{ m/s} - 23.6 \text{ m/s}}{5.81 \text{ s}} = -1.91 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración es negativa, lo cual significa que, como se preveía, la velocidad positiva se vuelve más pequeña al frenar.

c) Ahora con una aceleración conocida podemos calcular el tiempo total que el automóvil tarda en pasar de la velocidad $v_{0x} = 23.6$ m/s en $v_x = 0$. Al resolver la ecuación 2-26 para t, queda

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{0 - 23.6 \text{ m/s}}{-1.91 \text{ m/s}^2} = 12.4 \text{ s}.$$

La distancia total recorrida se obtiene de la ecuación 2-28 para este intervalo de tiempo con $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\ &= (23.6 \text{ m/s})(12.4 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-1.91 \text{ m/s}^2)(12.4 \text{ s})^2 = 146 \text{ m}. \end{aligned}$$

Desde el momento de inicio del frenado hasta el momento en que el automóvil se detuvo, recorremos una distancia total de 146 m en un tiempo total de 12.4 s. El cambio de 23.6 m/s a 12.5 m/s cubrió una distancia de 105 m en 5.8 s; de modo que en el cambio de 12.5 m/s a 0 viajó una distancia de 146 m − 105 m = 41 m, y duró un tiempo de 12.4 s − 5.8 s = 6.6 s.

2-6 CUERPOS EN CAÍDA LIBRE

El ejemplo más común de movimiento con aceleración (casi) constante, es el de un cuerpo que cae cerca de la superficie terrestre. Si prescindimos de la resistencia del aire, descubriremos un hecho sorprendente: en cualquier punto cercano a la superficie terrestre, *todos los cuerpos caen con la misma aceleración cualquiera que sea su tamaño, su forma o composición.* Esta aceleración, denotada por el símbolo g, recibe el nombre de *aceleración en caída libre* (o también *aceleración debida a la gravedad).* Aunque depende de la distancia con el centro de la Tierra (como veremos en el Capítulo 14), si la distancia de la caída es pequeña en comparación con el radio terrestre (6,400 km), podemos considerarla como constante en toda la caída.

Cerca de la superficie terrestre, la magnitud de g es aproximadamente 9.8 m/s^2, valor que emplearemos en el libro si no se especifica lo contrario. La dirección de la aceleración en caída libre en cualquier punto, establece lo que se entiende por la palabra "abajo" en ese punto.

Aunque hablamos de cuerpos *que caen*, los que describen un movimiento ascendente experimentan la misma aceleración en caída libre (magnitud y dirección). Es decir, no importa si una partícula se desplaza hacia arriba o hacia abajo, la dirección de su aceleración bajo el influjo de la gravedad terrestre siempre será hacia abajo.

El valor exacto de este tipo de aceleración varía con la latitud y la altitud. Pueden darse notables variaciones causadas por la diferencia en la densidad local de la costra terrestre. Estas variaciones las estudiaremos en el Capítulo 14.

La caída libre puede aplicarse a las ecuaciones de aceleración constante (Ecs. 2-26 y 2-28). Con ese propósito, primero efectuamos dos cambios pequeños: 1) designamos como eje y, la dirección de la caída libre y suponemos que su dirección positiva es hacia arriba. Más adelante, en el Capítulo 4, estudiaremos el movimiento bidimensional, y entonces emplearemos la designación x para el movimiento horizontal. 2) Reemplazamos la aceleración constante a por $-g$, pues decidir que la dirección positiva y sea hacia arriba, significa que la aceleración descendente es negativa. Al escoger $a_y = -g$, siempre tendremos g como un número positivo.

Con estas pequeñas modificaciones, las ecuaciones que describen los cuerpos en caída libre son

$$v_y = v_{0y} - gt, \tag{2-29}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{2-30}$$

Del mismo modo que utilizamos las ecuaciones 2-26 y 2-28 para resolver los problemas que incluyen una aceleración constante, también podemos emplear las ecuaciones 2-29 y 2-30 como las fórmulas básicas para resolver los que abarca la caída libre.

PROBLEMA RESUELTO 2-9. Se deja caer un cuerpo del reposo y cae libremente. Determine la posición y la velocidad del cuerpo después que hayan transcurrido 1.0, 2.0, 3.0 y 4.0 s.

Solución Escogemos el punto inicial como origen, de modo que $y_0 = 0$. Conocemos la rapidez inicial (cero) y la aceleración, y nos dan el tiempo. Para encontrar la posición, utilizamos la ecuación 2-30 con $y_0 = 0$ y $v_{0y} = 0$:

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Poniendo $t = 1.0$ s, obtenemos

$$y = -\tfrac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = -4.9 \text{ m}.$$

Para calcular la velocidad usamos la ecuación 2.29, otra vez con $v_{0y} = 0$:

$$v_y = -gt = -(9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s}) = -9.8 \text{ m/s}.$$

Luego de caer durante 1.0 s, el cuerpo se halla a 4.9 m *por debajo* (y es negativo) de su punto de partida y se desplaza *hacia abajo* (v_y es negativa) con una rapidez de 9.8 m/s. Continuando en esta forma, podemos calcular las posiciones y velocidades cuando $t = 2.0$, 3.0 y 4.0 s, que se muestran en la figura 2-24.

Nótese que el cambio de velocidad por segundo es −9.8 m/s, y que la velocidad promedio durante cada intervalo de un segundo (igual al desplazamiento en el intervalo dividido entre el intervalo temporal) es igual a la mitad de la suma de las velocidades inicial y final en el intervalo, tal como lo requiere la ecuación 2-27.

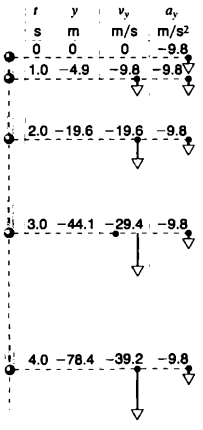


FIGURA 2-24. Problema resuelto 2-9. Se indican la altura, velocidad y aceleración de un cuerpo en caída libre.

PROBLEMA RESUELTO 2-10. Desde el suelo se lanza una pelota verticalmente hacia arriba, con una rapidez de 25.2 m/s. *a)* ¿Cuánto tarda en alcanzar su punto más alto? *b)* ¿A qué altura llega? *c)* ¿Cuánto tardará en estar a 27.0 m sobre el nivel del suelo?

Solución *a)* En su punto más alto la velocidad de la pelota alcanza el valor cero. Dado que v_{0y} y v_y (= 0), queremos calcular t y, por tanto, escogemos la ecuación 2-29 que resolvemos para t:

$$t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{25.2\ \text{m/s} - 0}{9.8\ \text{m/s}^2} = 2.57\ \text{s}.$$

b) Ahora que hemos obtenido el tiempo que la pelota tarda en alcanzar su altura máxima, la ecuación 2-30, con y_0 escogida como 0, nos permite despejar y cuando conocemos las otras cantidades:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= (25.2\ \text{m/s})(2.57\ \text{s}) - \tfrac{1}{2}(9.8\ \text{m/s}^2)(2.57\ \text{s})^2 = 32.4\ \text{m}.$$

c) La ecuación 2-30 es útil en este caso, por ser t la única incógnita. Puesto que deseamos resolver para t, escribiremos la ecuación 2-30 con $y_0 = 0$, en la forma acostumbrada de una ecuación cuadrática:

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y = 0,$$

o, introduciendo los valores numéricos,

$$(4.9\ \text{m/s}^2)t^2 - (25.2\ \text{m/s})t + 27.0\ \text{m} = 0.$$

Al resolver esta ecuación cuadrática, encontramos que $t = 1.52$ s y que $t = 3.62$ s. Con $t = 1.52$ s, la velocidad de la pelota es

$$v_y = v_{0y} - gt = 25.2\ \text{m/s} - (9.8\ \text{m/s}^2)(1.52\ \text{s}) = 10.3\ \text{m/s}.$$

Si $t = 3.62$ s, la velocidad será

$$v_y = v_{0y} - gt = 25.2\ \text{m/s} - (9.8\ \text{m/s}^2)(3.62\ \text{s}) = -10.3\ \text{m/s}.$$

Las dos velocidades tienen igual magnitud pero dirección contraria. El lector debería convencerse a sí mismo de que, si no hay resistencia del aire, la pelota tardará el mismo tiempo en alcanzar su altura máxima que caer la misma distancia, y que en ese momento tendrá la misma rapidez cuando sube que cuando baja. Nótese que la respuesta al inciso *a)* relativa al tiempo que tarda en alcanzar el punto más alto, 2.57 s, se encuentra con exactitud a la mitad entre los dos que se calcularon en el inciso *c)*. ¿Puede usted explicarlo? ¿Puede predecir cualitativamente el efecto de la resistencia del aire en los tiempos de subida y de caída?

La figura 2-25 muestra gráficamente el movimiento de una pelota. Observe sobre todo la simetría de los movimientos ascendente y descendente.

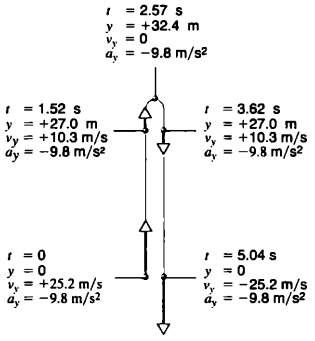


FIGURA 2-25. Problema resuelto 2-10. Se indican la altura, velocidad y aceleración en varios puntos.

PROBLEMA RESUELTO 2-11. Se lanza un cohete en reposo desde una base subacuática situada a una distancia de 125 m debajo de la superficie de un cuerpo de agua. Se mueve de manera vertical hacia arriba con una aceleración desconocida pero supuestamente constante (el efecto combinado de sus motores, de la gravedad de la Tierra, de la flotabilidad y la resistencia al avance del agua), y alcanza la superficie en un tiempo de 2.15 s. Cuando irrumpe en la superficie, su motor se apaga automáticamente (para dificultar la detección) y continúa su ascenso. ¿Qué altura máxima obtiene? (Ignore los efectos en la superficie.)

Solución Como con cualquier proyectil en caída libre, podríamos analizar el movimiento del cohete durante la parte de su movimiento en el aire si conociéramos la velocidad inicial de ella. Por eso, en este problema el plan de ataque consiste en analizar la parte subacuática del movimiento para calcular la velocidad cuando el cohete llega a la superficie; después la consideramos como la velocidad inicial de la parte en caída libre. Estas partes deben calcularse por separado, puesto que la aceleración cambia en la superficie del agua.

En el movimiento subacuático, que se acelera pero no en caída libre, podemos obtener la aceleración a partir de la ecuación 2-28 (reemplazando x por y) con $y - y_0 = 125$ m y $v_{0y} = 0$:

$$a_y = \frac{2(y - y_0)}{t^2} = \frac{2(125\ \text{m})}{(2.15\ \text{s})^2} = 54.1\ \text{m/s}^2.$$

Ahora la ecuación 2-26 (reemplazando de nuevo x por y) da la velocidad final de esta parte del movimiento:

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (54.1\ \text{m/s}^2)(2.15\ \text{s}) = 116\ \text{m/s}.$$

La velocidad en la superficie es de 116 m/s hacia arriba. A continuación analizamos la parte del movimiento correspondiente a la caída libre, suponiendo que la velocidad sea la velocidad *inicial* v_{0y}. En el punto más alto, el cohete alcanza el reposo por un instante ($v_y = 0$); con la ecuación 2-29 calculamos el tiempo en que eso ocurre:

$$t = -\frac{v_y - v_{0y}}{g} = -\frac{(0 - 116\ \text{m/s})}{9.8\ \text{m/s}^2} = 11.8\ \text{s}.$$

Según la ecuación 2-30, con $y_0 = 0$ la altura en ese instante será:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (116\ \text{m/s})(11.8\ \text{s}) - \tfrac{1}{2}(9.8\ \text{m/s}^2)(11.8\ \text{s})^2$$
$$= 687\ \text{m}.$$

Para probar que entendió el problema, debería dibujar las gráficas de $y(t)$, $v_y(t)$ y $a_y(t)$ en forma similar a la figura 2-17. Asegúrese de tener presentes cuáles variables cambian continua y suavemente, y cuáles no en este problema idealizado. ¿Cómo variará el movimiento de un cohete real respecto a esta imagen?

Medición de la aceleración en caída libre (opcional)

La naturaleza del movimiento de un cuerpo que cae siempre ha interesado a los científicos y a los filósofos. Aristóteles (384-322 a. de C.), pensó que los objetos más pesados caerían más rápidamente por su peso. Fue una idea que predominó dos milenos, hasta que Galileo Galilei (1564-1642) hizo la afirmación correcta: sin resistencia del aire, todos los objetos caen con la misma rapidez. Podemos probar su aseveración dejando caer en el vacío una pluma y una bola de acero; observaremos que caen con igual rapidez. En 1971, el astronauta David Scott dejó caer una pluma y un martillo sobre la Luna (sin aire), y observó que tocaban la superficie casi al mismo tiempo.

En la época de Galileo no había los medios para crear un vacío, además de que carecía del equipo necesario para medir con exactitud los intervalos temporales. (Probablemente es una leyenda la famosa historia de que dejó caer varios objetos desde la Torre de Pisa y que los observó llegar al suelo al mismo tiempo. En una torre tan alta, la resistencia del aire ejercería un efecto considerable sobre los objetos, a menos que tuvieran exactamente el mismo tamaño y forma.) Galileo redujo la aceleración (con lo cual facilitó medir los intervalos temporales, y disminuyó además el efecto de la resistencia del aire), haciendo rodar una bola por una pendiente en vez de dejarla caer. Demostró que, en iguales intervalos de tiempo, la bola cubría distancias proporcionales a los enteros impares 1, 3, 5, 7, ... Las distancias totales recorridas en intervalos consecutivos eran proporcionales a 1, 1 + 3 (= 4), 1 + 3 + 5 (= 9), 1 + 3 + 5 + 7 (= 16), y así sucesivamente. Llegó así a la siguiente conclusión: las distancias aumentaban como el *cuadrado* del tiempo, que según hoy sabemos se aplica *sólo* en el caso de aceleración constante. Descubrió además, que los mismos resultados se obtenían cualquiera que fuera la masa de la bola; por tanto, dedujo (en la terminología moderna) que la aceleración en caída libre no depende de la masa del objeto.

En la actualidad la medición de g es un ejercicio ordinario en el laboratorio de un curso introductorio. Al cronometrar la caída de un objeto en una distancia de 1 o 2 m (que tarda cerca de 0.5 s), es posible determinar g con gran precisión porcentual. Podemos determinarla con una precisión aproximada de 0.1% usando incluso un péndulo primitivo (que "disminuye" el movimiento en analogía con la pendiente de Galileo) y midiendo el tiempo de una oscilación completa (como se verá en el Capítulo 17). Este nivel de precisión es suficiente para observar la variación en g entre el nivel del mar y una montaña alta (3 km o 10,000 ft), o entre el Ecuador y los polos.

Con un aparato cuidadosamente diseñado, el método del péndulo puede extenderse a una precisión de 1 parte en 10^6, suficiente para descubrir las variaciones en g entre los pisos de un edificio. A fin de lograr una precisión todavía mayor, los investigadores han perfeccionado el método de caída libre. Pueden efectuarse determinaciones muy exactas dejando caer un objeto en el vacío y reflejando un rayo láser de él a medida que va cayendo. Utilizando relojes atómicos para medir el tiempo de la caída, el valor de g puede determinarse con una precisión aproximada de 1 parte en 10^9, lo cual permite observar su variación en una distancia vertical de 1 cm. Con ellos puede detectarse también el efecto del científico medidor que se halle a 1 m del aparato.

Hoy se venden en las tiendas, gravímetros de cuerpo en caída para realizar estas mediciones de manera precisa. En el modelo más reciente, el objeto se coloca dentro de una caja al vacío, y éste se proyecta hacia arriba, de modo que las mediciones se tomen mientras asciende y cae, como se indica en el problema 33. La figura 2-26 ofrece una versión de este tipo de aparato.

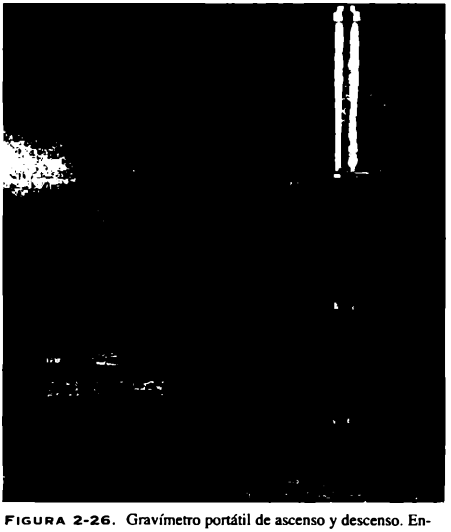


FIGURA 2-26. Gravímetro portátil de ascenso y descenso. Entre sus aplicaciones se encuentran la investigación geofísica, la exploración de petróleo y minerales, y la navegación inercial. Fotografía cortesía del Dr. T. M. Niebauer, Micro-g Solutions. (Véase http://www.microgsolutions.com.)

Mediciones tan exactas de la aceleración en caída libre permiten efectuar estudios detallados sobre la gravedad de la Tierra que tiene importantes consecuencias prácticas. Las variaciones de g entre varios lugares, pueden revelar la presencia de petróleo o minerales bajo la superficie terrestre; las variaciones de g con el tiempo, pueden revelar el movimiento de las placas terrestres o actividad sísmica. El conocimiento de las variaciones pequeñas debidas a irregularidades en la gravedad permite hacer cálculos exactos de la trayectoria de los misiles balísticos o de los satélites terrestres. Además de estas aplicaciones prácticas, las mediciones precisas de g ofrecen pruebas pormenorizadas de nuestro conocimiento de la teoría de la gravitación, una de las fuerzas básicas del universo. ■

OPCIÓN MÚLTIPLE

2-1 Cinemática con vectores

2-2 Propiedades de los vectores

2-3 Vectores de posición, velocidad y aceleración

1. Un objeto se mueve con una velocidad dada por $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$ donde $v_z(t) = 0$. A partir de esto puede concluirse

   a) que la aceleración $\vec{a}(t)$

   A) no tendrá componentes idénticamente cero.
   B) puede tener componentes que son idénticamente cero.
   C) tendrá sólo un componente z que es idénticamente cero.
   D) tendrá un componente idénticamente cero z, y quizás un componente idénticamente cero en la dirección x y y.

   b) y que la posición $\vec{r}(t)$

   A) no tendrá componentes idénticamente cero.
   B) puede tener algunos componentes idénticamente cero.
   C) tendrá sólo un componente z que es idénticamente cero.
   D) tendrá un componente idénticamente cero z, y quizás un componente idénticamente cero en la dirección x o y.

2. Un objeto se desplaza en el plano xy con la posición en función del tiempo dado por $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$. El punto O se encuentra en $\vec{r} = 0$. Es evidente que el objeto se mueve hacia O cuando

   A) $v_x > 0, v_y > 0$. B) $v_x < 0, v_y < 0$.
   C) $xv_x + yv_y < 0$. D) $xv_x + yv_y > 0$.

2-4 Cinemática unidimensional

3. Se lanza un objeto directamente al aire desde el suelo con una velocidad vertical inicial de 30 m/s. En 3 s el objeto alcanza el punto más alto aproximadamente a 45 m sobre el nivel del suelo; después cae al suelo en 3 segundos más, chocando contra él a una velocidad de 30 m/s.

   a) La *rapidez* promedio del objeto durante el intervalo de 6 segundos está muy cerca de

   A) 0 m/s. B) 5 m/s. C) 15 m/s. D) 30 m/s.

   b) La magnitud de la *velocidad* promedio durante el intervalo de 6 segundos está muy cerca de

   A) 0 m/s. B) 5 m/s. C) 15 m/s. D) 30 m/s.

4. Un automóvil recorre 15 millas al Este con una rapidez constante de 20 mi/h, y luego continúa en esa dirección 20 millas con una rapidez constante de 30 mi/h. ¿Qué podemos concluir sobre la magnitud de la velocidad promedio?

   A) $v_{pro} < 25$ mi/h. B) $v_{pro} = 25$ mi/h.
   C) $v_{pro} > 25$ mi/h.
   D) Es necesaria más información para solucionar la pregunta.

5. Un objeto se desplaza sobre el eje x con la posición en función del tiempo dada por $x = x(t)$. El punto O se halla en $x = 0$. Es evidente que el objeto se mueve hacia O cuando

   A) $dx/dt < 0$. B) $dx/dt > 0$.
   C) $d(x^2)/dt < 0$. D) $d(x^2)/dt > 0$.

6. Un objeto parte del reposo con $x = 0$ cuando $t = 0$. Se desplaza en la dirección x con una velocidad positiva después de $t = 0$. La velocidad instantánea y la promedio se relacionan por

   A) $dx/dt < x/t$. B) $dx/dt = x/t$. C) $dx/dt > x/t$.
   D) dx/dt puede ser más grande, más pequeña, o igual a x/t.

7. En la figura 2-27 hay varias gráficas con ejes sin nombre. *a*) ¿Cuál de ellas representa mejor la velocidad en función del tiempo, de un objeto que se mueve con rapidez constante? *b*) ¿Cuál representa mejor la velocidad en función del tiempo para la aceleración dada por $a = +3t$? *c*) ¿Cuál representa mejor la distancia en función del tiempo para una aceleración constante negativa? *d*) ¿Cuál representa mejor la velocidad en función del tiempo si la gráfica E muestra la distancia en función del tiempo?

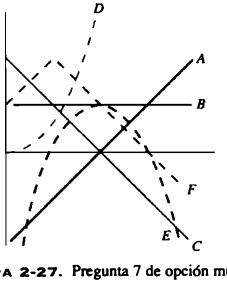


FIGURA 2-27. Pregunta 7 de opción múltiple.

2-5 Movimiento con aceleración constante

8. Un objeto se desplaza en la dirección x con una velocidad $v_x(t)$, y dv_x/dt es una constante no cero. $v_x = 0$, cuando $t > 0$, la magnitud $v_x\, dv_x/dt$ es

   A) negativa. B) cero. C) positiva.
   D) no puede determinarse según la información proporcionada.

2-6 Cuerpos en caída libre

9. Un alumno hace el siguiente comentario durante una sesión de estudio: "Un cuerpo en caída libre cae a mayor distancia durante cada segundo, que la distancia total recorrida en los segundos anteriores". Esta afirmación

   A) siempre es verdadera.
   B) es cierta sólo en tiempos bastante cortos.
   C) es correcta en tiempos bastante largos.
   D) nunca es verdadera.

10. Se lanza un objeto verticalmente hacia el aire con una velocidad inicial de 8 m/s. Usando la convención de signos, *arriba es positivo*. ¿Cómo variará durante su vuelo el componente vertical de la aceleración a_y del objeto (después de dejar la mano)?

A) En la subida $a_y > 0$, en la bajada $a_y > 0$.
B) En la subida $a_y < 0$, en la bajada $a_y > 0$.
C) En la subida $a_y > 0$, en la bajada $a_y < 0$.
D) En la subida $a_y < 0$, en la bajada $a_y < 0$.

11. Un niño se lanza desde el trampolín de una alberca. A la mitad entre el trampolín y el agua arroja un balón hacia arriba. Ignorando la fricción del aire, el instante después que el balón sale de su mano el componente vertical de la aceleración del balón

A) es positivo, pero después decrece pasando por cero y llegando a $-9.8\ \mathrm{m/s^2}$.
B) es cero, pero luego decrece hasta alcanzar $-9.8\ \mathrm{m/s^2}$.
C) se halla entre cero y $-9.8\ \mathrm{m/s^2}$, pero luego decrece y llega a $-9.8\ \mathrm{m/s^2}$.
D) es $-9.8\ \mathrm{m/s^2}$.

12. Un juguete pequeño tiene el aspecto de un tubo y dispara una canica por los extremos. Se deja caer desde un árbol y dispara a la mitad del camino al suelo. Una canica se dirige hacia arriba y la otra al suelo. Considere el componente vertical de la aceleración a_y de las canicas, inmediatamente después que salen del juguete ignorando la fricción del aire.

A) La canica que se desplaza hacia arriba tiene $a_y < -9.8\ \mathrm{m/s^2}$.
B) La canica que se desplaza hacia arriba tiene $a_y = -9.8\ \mathrm{m/s^2}$.
C) La canica que se desplaza hacia arriba tiene $a_y > -9.8\ \mathrm{m/s^2}$.
D) La canica que se desplaza hacia abajo tiene $a_y > -9.8\ \mathrm{m/s^2}$.

PREGUNTAS

1. ¿Pueden dos vectores de distinta magnitud combinarse para producir una resultante cero? ¿Pueden combinarse así tres vectores?
2. ¿Puede un vector tener magnitud cero si uno de sus componentes es no cero?
3. ¿Puede la suma de las magnitudes de dos vectores ser alguna vez igual a la magnitud de la suma de esos dos vectores?
4. ¿Puede la magnitud de la diferencia entre dos vectores ser alguna vez mayor que la magnitud de uno de ellos? ¿Puede ser mayor que la magnitud de su suma? Dé ejemplos.
5. Suponga que $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{d}}_1 + \vec{\mathbf{d}}_2$. ¿Significa esto que debemos tener cualquiera, $d \geq d_1$ o $d \geq d_2$? Si la respuesta es negativa, explique por qué.
6. ¿Puede la rapidez de una partícula ser alguna vez negativa? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo; si es negativa, explique por qué.
7. ¿Implica la velocidad promedio una dirección?
8. Cada segundo, un conejo recorre una mitad de la distancia restante entre su nariz y una cabeza de lechuga. ¿Llegará el momento en que alcance la lechuga? ¿Cuál es el valor limitante de su velocidad promedio? Trace gráficas que muestren la velocidad del conejo y la posición a medida que transcurre el tiempo.
9. En vez de la definición dada en la ecuación 2-13, podríamos haber definido la rapidez promedio, como la magnitud de la velocidad promedio. ¿Son distintas las definiciones? Dé un ejemplo que corrobore su respuesta.
10. En una prueba eliminatoria a dos vueltas, un automóvil recorre la primera vuelta con una rapidez promedio de 90 mi/h. El conductor quiere acelerar durante la segunda vuelta para que la rapidez promedio de dos vueltas sea de 180 mi/h. Demuestre que no es posible hacerlo.
11. Roberto vence a Julia por 10 m en una carrera de 100 m. Dice que le dará una oportunidad justa y acepta volver a competir con ella, sólo que esta vez partiendo 10 m detrás de la línea de arranque. ¿Está realmente dándole una oportunidad justa a Julia?
12. Cuando la velocidad es constante, ¿puede la velocidad promedio en cualquier intervalo temporal diferir de la velocidad instantánea en un momento cualquiera? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo; si es negativa, explique por qué.
13. ¿Puede la velocidad promedio de una partícula que se mueve sobre el eje x ser siempre $\frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)$, si la aceleración no es constante? Pruebe su respuesta utilizando gráficas.
14. *a)* ¿Puede un objeto tener una velocidad cero y aún así estar acelerando? *b)* ¿Puede un objeto tener una velocidad constante, y pese a ello tener una rapidez variable? En ambos casos, dé un ejemplo si contesta afirmativamente; y explique por qué si contesta negativamente.
15. ¿Puede la velocidad de un objeto cambiar de dirección cuando la aceleración es constante? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo; si es negativa, explique por qué.
16. En la figura 2.28 vemos al coronel John P. Stapp en su trineo de cohete; véase el ejercicio 45. *a)* Su cuerpo es un acelerómetro, no un velocímetro. Explique eso. *b)* ¿Puede indicar la dirección de la aceleración a partir de la figura?

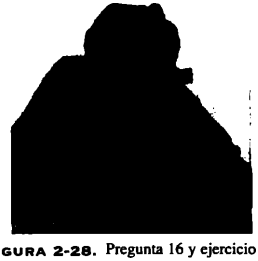


FIGURA 2-28. Pregunta 16 y ejercicio 45.

17. Puede un objeto ir aumentando su rapidez conforme disminuye la magnitud de su aceleración? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo; si es negativa, explique por qué.
18. ¿Cuál de las siguientes situaciones es imposible? *a)* Un cuerpo que tiene una velocidad Este y una aceleración Este; *b)* un cuerpo que tiene una velocidad Este y una aceleración Oeste; *c)* un cuerpo que tiene una velocidad cero pero una aceleración no cero; *d)* un cuerpo que tiene aceleración constante y velocidad variable; *e)* un cuerpo que tiene velocidad constante y aceleración variable.
19. Si liberamos una partícula en reposo ($v_{0x} = 0$) en $x_0 = 0$ en el tiempo $t = 0$, la ecuación 2-28 de la aceleración constante indica que se encuentra en la posición x durante dos momentos diferentes, a saber, $+\sqrt{2x/a_x}$ y $-\sqrt{2x/a_x}$. ¿Qué significa la raíz negativa de esta ecuación cuadrática?
20. ¿Qué sucede con nuestras ecuaciones cinemáticas (Ec. 2-26 ó 2-28) cuando se invierte el tiempo, es decir, cuando reemplazamos t por $-t$? Explique su respuesta.
21. Esperamos que una relación verdaderamente general, como las ecuaciones 2-26 y 2-28, sea válida sin importar la elección de

un sistema coordenado. Al exigir que las ecuaciones generales sean congruentes en el aspecto dimensional, nos aseguramos de su validez prescindiendo de las unidades que se escojan. ¿Se necesitan entonces unidades o sistemas coordenados?

22. Dé algunos ejemplos de objetos que caen, en que sería absurdo ignorar la resistencia del aire.

23. La figura 2-29 muestra una torre de balas en Baltimore, Maryland. Fue construida en 1829 y servía para fabricar balas de acero vaciando el plomo fundido a través de un tamiz situado en la parte superior de la torre. Las balas de acero se solidifican al caer en un tanque de agua instalado en la parte inferior de la torre, 230 ft abajo. ¿Cuáles son las ventajas de fabricar balas en esta forma?

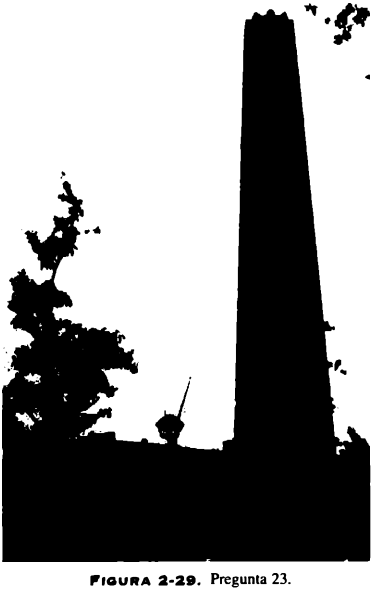


FIGURA 2-29. Pregunta 23.

24. Una persona que está al borde de un abismo a cierta altura sobre el suelo, arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0 y luego otra hacia abajo con la misma rapidez inicial. ¿Cuál pelota, si es que alguna, choca contra el suelo con mayor rapidez? Ignore la resistencia del aire.

25. ¿Cuál es la aceleración descendente de un proyectil que se desprende de un misil que acelera hacia arriba a 9.8 m/s^2?

26. En otro planeta el valor de g es la mitad del que tiene en la Tierra. ¿Cómo se relaciona el tiempo que tarda un objeto en tocar el suelo a partir del reposo en ese planeta con el que se requiere para caer de la misma distancia en la Tierra?

27. *a*) Se lanza una piedra hacia arriba con cierta rapidez en un planeta donde la aceleración de caída libre es el doble de la de la Tierra. ¿A qué altura llega en comparación con la que alcanza en la Tierra? *b*) Si se duplicara la rapidez inicial, ¿qué cambio se produciría?

28. Consideremos una pelota lanzada verticalmente hacia arriba. Teniendo en cuenta la resistencia del aire, ¿cabe esperar que el tiempo en que se eleva sea más largo o más corto que el tiempo en que cae? ¿Por qué?

29. Trace una gráfica cualitativa de la velocidad v en función del tiempo t para un objeto que cae *a*) en que puede ignorarse la resistencia del aire, y *b*) en que no puede ignorarse.

30. Se deja caer una segunda pelota en un pozo de ascensor 1 s después de dejar caer la primera. *a*) ¿Qué sucede con la distancia entre las pelotas conforme transcurre el tiempo? *b*) ¿En qué forma la razón v_1/v_2 de la rapidez de la primera pelota a la de la segunda cambia con el paso del tiempo? Ignore la resistencia del aire y dé respuestas cualitativas.

31. Repita la pregunta 30 teniendo en cuenta la resistencia del aire. También en este caso ofrezca respuestas cualitativas.

32. Si m es una piedra ligera y M es una piedra pesada, según Aristóteles, ésta debería caer más rápidamente que aquella. Galileo trató de mostrar que la idea de Aristóteles era lógicamente inconsistente usando el siguiente argumento. Atemos las dos para formar una piedra doble. Entonces, al caer, m debería demorar M porque tiende a caer con más lentitud, y la combinación caería más rápidamente que m pero más lentamente que M; pero de acuerdo con Aristóteles, el cuerpo doble $(M + m)$ es más que pesado que M; por tanto, debería caer con más rapidez que M. Si aceptamos que el razonamiento de Galileo es correcto, ¿podemos concluir que M y m deben caer con la misma rapidez? ¿Se necesita realizar un experimento en este caso? Si cree que el razonamiento de Galileo es incorrecto, explique por qué lo cree.

EJERCICIOS

2-1 Cinemática con vectores

2-2 Propiedades de los vectores

1. Considere dos desplazamientos; uno con una magnitud de 3 m, y otro con una magnitud de 4 m. Muestre cómo los vectores pueden combinarse para producir un desplazamiento de magnitud *a*) de 7 m, *b*) de 1 m y *c*) de 5 m.

2. Una persona camina siguiendo este patrón: 3.1 km al Norte, luego 2. 4 km al Oeste y finalmente 5.2 km al Sur. *a*) Construya el diagrama vectorial que represente este movimiento. *b*) ¿Qué distancia y en qué dirección debería volar un ave en línea recta para llegar al mismo punto final?

3. El vector $\vec{a}$ tiene una magnitud de 5.2 unidades y se dirige al Este. El vector $\vec{b}$ tiene una magnitud de 4.3 unidades y sigue la dirección 35° al Oeste del Norte. Al construir los diagramas vectoriales, calcule la magnitud y la dirección de *a*) $\vec{a} + \vec{b}$, y *b*) $\vec{a} - \vec{b}$.

4. *a*) ¿Cuáles son los componentes de un vector $\vec{a}$ en el plano xy si su dirección es 252° en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj respecto al eje positivo x y si su magnitud es 7.34 unidades? *b*) El componente x de cierto vector es -25 unidades, y el componente y es $+24$ unidades. ¿Cuáles son la magnitud del vector y el ángulo entre su dirección y el eje positivo x?

5. Una persona desea llegar a un punto distante 3.42 km de su lugar presente y en una dirección de 35.0° al Norte del Este. Pero

debe pasar por calles que van de N-S o E-O. ¿Qué distancia mínima deberá recorrer para llegar a su destino?

6. Un barco zarpa con rumbo a un sitio situado a 124 km al Norte. Una tormenta imprevista lo impulsó a 72.6 km al Norte y a 31.4 km al Este de su punto de partida. ¿Qué distancia y en qué dirección debe navegar ahora para llegar a su destino original?
7. *a)* ¿Cuál es la suma en notación de vectores unitarios de dos vectores $\vec{a} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{b} = -3\hat{i} + -\hat{j}$? *b)* ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de $\vec{a} + \vec{b}$?
8. Dos vectores están dados por $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ y por $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$. Encuentre *a)* $\vec{a} + \vec{b}$, *b)* $\vec{a} - \vec{b}$ y *c)* un vector $\vec{c}$, tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.
9. Dados dos vectores, $\vec{a} = 4.0\hat{i} - 3.0\hat{j}$ y $\vec{b} = 6.0\hat{i} + 8.0\hat{j}$, calcule la magnitud y la dirección (con el eje $+x$) de *a)* $\vec{a}$, *b)* $\vec{b}$, *c)* $\vec{a} + \vec{b}$, *d)* $\vec{b} - \vec{a}$ y *e)* $\vec{a} - \vec{b}$.
10. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen igual magnitud de 12.7 unidades. Están orientados como en la figura 2-30 y su suma vectorial es $\vec{r}$. Obtenga *a)* los componentes x y y de $\vec{r}$, *b)* la magnitud de $\vec{r}$ y *c)* el ángulo que $\vec{r}$ forma con el eje $+x$.

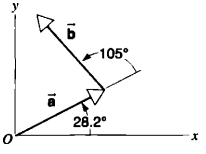


FIGURA 2-30. Ejercicio 10.

2-3 Vectores de posición, de velocidad y aceleración

11. Una mujer camina 250 m en la dirección a 35° al Este del Norte, después 170 m al Este. *a)* Por medio de métodos gráficos, determine el desplazamiento final desde el punto de partida. *b)* Compare la magnitud de su desplazamiento con la distancia que caminó.
12. Se conduce un automóvil al Este una distancia de 54 km, luego al Norte una distancia de 32 km y finalmente 27 km en la dirección 28° al Este del Norte. Trace el diagrama vectorial, y determine el desplazamiento total del automóvil desde el punto de partida.
13. El minutero de un reloj de pared mide 11.3 cm del eje a la punta. ¿Cuál es el vector de desplazamiento de la punta *a)* desde un cuarto después de la hora hasta media hora después, *b)* en la siguiente media hora y *c)* en la siguiente hora?
14. Una partícula pasa por tres desplazamientos sucesivos en un plano como sigue: 4.13 m al Suroeste, 5.26 m al Este y 5.94 m en dirección al Norte del Este a 64°. Escoja el eje x que señala al Este, y el eje y que señala al Norte y determine *a)* los componentes de cada desplazamiento, *b)* los componentes del desplazamiento resultante, *c)* la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante y *d)* el desplazamiento que requeriría la partícula para volver al punto de partida.
15. Una estación de radar descubre un misil que se aproxima desde el Este. Al primer contacto, la posición del misil es 12,000 ft a 40.0° sobre el horizonte. Se le sigue por otros 123° en el plano Este-Oeste y la posición en el contacto final es de 25,800 ft (Fig. 2-31). Determine el desplazamiento del misil durante el periodo del contacto con el radar.
16. Un avión vuela 410 mi al Este desde la ciudad *A* hasta la ciudad *B* en 45 min, y luego 820 mi al Sur desde la ciudad *B* hasta la ciudad *C* en 1 h 30 min. *a)* ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de desplazamiento que representa el viaje total?

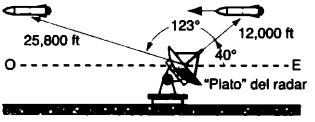


FIGURA 2-31. Ejercicio 15.

¿Cuáles son *b)* el vector de velocidad promedio y *c)* la rapidez promedio del viaje?

17. La posición de una partícula en un plano xy está dada por $\vec{r} = [(2\ \mathrm{m/s^3})t^3 - (5\ \mathrm{m/s})t]\hat{i} + [(6\ \mathrm{m}) - (7\ \mathrm{m/s^4})t^4]\hat{j}$. Calcule *a)* $\vec{r}$, *b)* $\vec{v}$ y *c)* $\vec{a}$ cuando $t = 2$ s.
18. En 3 h 24 min, un balón flota hasta un punto a 8.7 km al Norte, 9.7 km al Este y 2.9 km en altura desde su punto de partida en el suelo. Calcule *a)* la magnitud de su velocidad promedio y *b)* el ángulo que ésta forma con la horizontal.
19. La velocidad de una partícula que se desplaza en el plano xy está dada por $\vec{v} = [(6.0\ \mathrm{m/s^2})t - (4.0\ \mathrm{m/s^3})t^2]\hat{i} + (8.0\ \mathrm{m/s})\hat{j}$. Suponga que $t > 0$. *a)* ¿Cuál es la aceleración cuando $t = 3$ s? *b)* ¿Cuándo (si es que alguna vez) es cero la aceleración? *c)* ¿Cuándo (si es que alguna vez) es cero la velocidad? *d)* ¿Cuándo (si es que alguna vez) es la velocidad igual a 10 m/s?
20. Una partícula se mueve en el plano xy con una velocidad $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$ y aceleración $\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j}$. Calcule la derivada apropiada, y demuestre que la magnitud de $\vec{v}$ puede ser constante, sólo si $a_x v_x + a_y v_y = 0$.

2-4 Cinemática unidimensional

21. Un avión realiza un viaje redondo entre Los Ángeles y Namulevu, Vanuavinaka. Despega a las 12:50 PM (tiempo de Los Ángeles) y aterriza e las 6:50 PM (tiempo de Namulevu). En el viaje de regreso despega a la 1:50 AM (tiempo de Namulevu) y aterriza a las 6:50 PM (tiempo de Los Ángeles). Suponga que el tiempo de vuelo es el mismo en ambas direcciones, y que el avión vuela en línea recta con una velocidad de 520 mi/h. *a)* ¿Cuánto dura el vuelo (en una forma, medida por los pasajeros)? *b)* ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre Namulevu y Los Ángeles? *c)* ¿Aproximadamente, en qué parte del globo se encuentra Namulevu?
22. A las 4:40 PM del 15 de abril un avión despega de Belén, Brasil con destino a Villamil, Ecuador (en las Galápagos). Aterriza a las 8:40 PM en Villamil (tiempo local). El Sol se pone a las 6:15 PM en Belén (tiempo local) y 7:06 PM en Villamil (tiempo local) ¿En qué momento durante el vuelo verán los pasajeros el ocaso?
23. ¿Qué distancia recorre su automóvil si se desplaza hacia adelante a 70 mi/h (= 112 km/h) durante 1 s del tiempo que usted tarda en ver un accidente a un lado de la carretera?
24. El lanzador Roger Clemens de los Yanquis de Nueva York, lanzó una rápida con una velocidad horizontal de 160 km/h como lo verifica una pistola de radar. ¿Cuánto tiempo tardó la bola en llegar al plato que se encuentra a 18.4 m de distancia?
25. La figura 2-32 muestra la relación entre la edad (en millones de años) del sedimento más antiguo y la distancia en kilómetros a la cual se descubrió en un escollo del mar. Del escollo se extruye material y se aleja de él con una rapidez más o menos uniforme. En centímetros por año, calcule la rapidez a la cual este material se aleja del escollo.
26. En cierta ocasión Maurice Greene corrió los 100 m en 9.81 s (el viento soplaba a sus espaldas), y Khalid Khannouchi corrió el maratón (26 mi, 385 yd) en 2:05:42. *a)* ¿Cuál es la velocidad

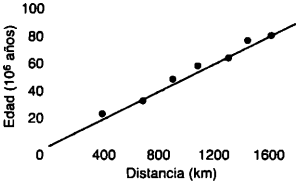


FIGURA 2-32. Ejercicio 25.

promedio? *b*) Si Maurice Greene pudiera conservar la velocidad máxima durante un maratón, ¿en cuánto tiempo lo terminaría?

27. La máxima velocidad legal en una carretera pasó de 55 mi/h (= 88.5 km/h) a 65 mi/h (= 104.6 km/h). ¿Cuánto tiempo se ahorrará en un viaje de la entrada de Buffalo a la salida de la ciudad de Nueva York del New York State Thruway, alguien que vaya a la velocidad mayor en este trayecto de 435 mi (= 700 km)?

28. Un avión a propulsión de alto rendimiento que practica maniobras para evadir el radar, sigue un vuelo horizontal de 35 m sobre el nivel del suelo. De repente, encuentra un terreno que se eleva suavemente a 4.3°, pendiente difícil de detectar (véase Fig. 2-33). ¿En cuánto tiempo debe el piloto hacer una corrección para que el avión no choque contra el suelo? La rapidez del aire es 1,300 km/h.

FIGURA 2-33. Ejercicio 28.

29. Un automóvil sube una colina a una rapidez constante de 40 km/h y en el viaje de regreso desciende a una rapidez constante de 60 km/h. Calcule la rapidez promedio del viaje redondo.

30. Calcule la velocidad promedio en los dos casos siguientes. *a*) Camina 240 ft con una rapidez de 4.0 ft/s y luego corre 240 ft con una rapidez de 10 ft/s sobre una pista recta. *b*) Camina 1.0 min con una rapidez de 4.0 ft/s y luego corre 1.0 min a 10 ft/s sobre la pista.

31. ¿Qué distancia cubrirá en 16 s el corredor cuya gráfica de velocidad-tiempo se muestra en la figura 2.34?

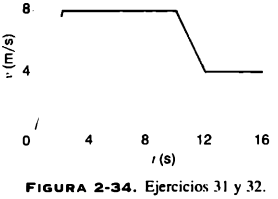


FIGURA 2-34. Ejercicios 31 y 32.

32. ¿Cuál es la aceleración del corredor del ejercicio 31 cuando $t = 11$ s?

33. Una partícula alcanzó una velocidad de 18 m/s en la dirección $+x$, y 2.4 s más tarde su velocidad fue de 30 m/s en dirección contraria. ¿Cuál fue su aceleración promedio durante este intervalo de 2.4 s?

34. Un objeto se desplaza en línea recta como lo describe la gráfica de velocidad-tiempo en la figura 2-35. Dibuje la gráfica que represente la aceleración del objeto en función del tiempo.

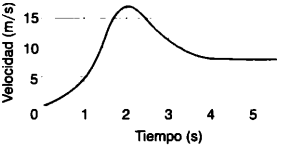


FIGURA 2-35. Ejercicio 34.

35. La gráfica de x en función de t en la figura 2-36*a*, se refiere a una partícula en movimiento en línea recta. *a*) Indique en cada intervalo si la velocidad v_x es +, − o 0, y si la aceleración a_x es +, − o 0. Los intervalos son *OA*, *AB*, *BC* y *CD*. *b*) A partir de la curva, ¿hay un intervalo en el cual la aceleración sea evidentemente no constante? (Ignore el comportamiento de los puntos finales de los intervalos.)

36. Conteste las preguntas anteriores en el caso del movimiento que se describe en la gráfica de la figura 2-36*b*.

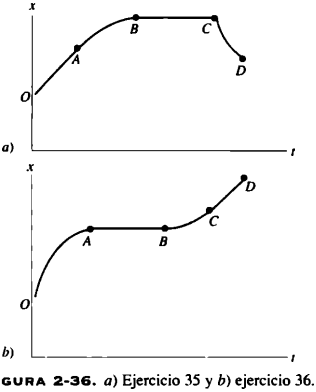


FIGURA 2-36. *a*) Ejercicio 35 y *b*) ejercicio 36.

37. Una partícula se mueve sobre el eje x con un desplazamiento en función del tiempo como se observa en la figura 2-37. Dibuje las curvas aproximadas de velocidad y aceleración en función del tiempo en este movimiento.

FIGURA 2-37. Ejercicio 37.

38. Una partícula que se desplaza sobre el eje positivo x ocupa las siguientes posiciones en diversos momentos:

x(m)	0.080	0.050	0.040	0.050	0.080	0.13	0.20
t(s)	0	1	2	3	4	5	6

a) Grafique el desplazamiento (no la posición) en función del tiempo. *b*) Calcule la velocidad promedio de la partícula en los intervalos 0 a 1 s, 0 a 2 s, 0 a 3 s, 0 a 4 s. *c*) Determine la pendiente de la curva trazada en la parte *a*) en los puntos t = 0, 1, 2, 3, 4 y 5 s. *d*) Grafique la pendiente (¿unidades?), en función del tiempo. *e*) A partir de la curva de la parte *d*), determine la aceleración de la partícula en los tiempos t = 2, 3 y 4 s.

39. La posición de la partícula sobre el eje x depende del tiempo según la ecuación $x = At^2 - Bt^3$, donde x se da en metros y t en segundos. *a*) ¿Cuáles unidades del SI deben tener A y B? En lo siguiente, supongamos que los valores numéricos de A y B en unidades del SI sean 3.0 y 1.0, respectivamente. *b*) ¿En qué momento alcanza la partícula su máxima posición positiva x? *c*) ¿Qué longitud total viaja en los primeros 4 segundos? *d*) ¿Cuál es el desplazamiento durante los primeros 4 segundos? *e*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula al final de cada uno de los primeros 4 segundos? *f*) ¿Cuál es su aceleración al final de cada uno de los primeros 4 segundos? *g*) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el intervalo temporal t = 2 a t = 4 s?

2-5 Movimiento con aceleración constante

40. Un avión Jumbo debe alcanzar una velocidad de 360 km/h (= 224 mi/h) en la pista para poder despegar. Suponiendo una aceleración constante y una pista de 1.8 km (= 1.1 mi), ¿qué velocidad máxima se requiere a partir del reposo?

41. Una nave espacial en el espacio libre se desplaza con una aceleración constante de 9.8 m/s^2. *a*) Si parte del reposo, ¿cuánto tardará en adquirir una rapidez equivalente a un décimo de la de la luz? *b*) ¿A qué distancia la alcanzará? (La velocidad de la luz es de 3.0×10^8 m/s.)

42. La cabeza de una víbora de cascabel puede acelerar 50 m/s^2 al atacar a su víctima. Si un automóvil puede hacer lo mismo, ¿cuánto tardaría en alcanzar una rapidez de 100 km/h partiendo del reposo?

43. Se dispara un muón (partícula elemental) con una rapidez inicial de 5.20×10^6 m/s, hacia una región donde un campo eléctrico produce una aceleración de 1.30×10^{14} m/s^2 en dirección contraria a la velocidad inicial. ¿Qué distancia recorrerá antes de detenerse?

44. Un electrón con una velocidad inicial $v_0 = 1.5 \times 10^5$ m/s entra en una región de 1.2 cm de largo donde se acelera eléctricamente (véase Fig. 2-38). Emerge con una velocidad $v = 5.8 \times 10^6$ m/s.

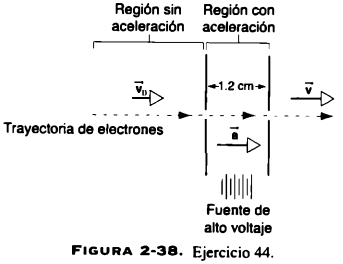


FIGURA 2-38. Ejercicio 44.

¿Cuál fue su aceleración, suponiendo que era constante? (Este proceso ocurre en la pistola de electrones dentro de un tubo de rayos catódicos que se emplea en los receptores de televisión y en los monitores de televisión.)

45. La marca mundial de velocidad terrestre fue establecida por el coronel John P. Stapp cuando, el 19 de marzo de 1954, viajó en un trineo impulsado por un cohete que se desplazó por una pista a 1,020 km/h. Los dos fueron detenidos en 1.4 s (véase Fig. 2-28). ¿Qué aceleración alcanzó el coronel? Exprese su respuesta en términos de g (= 9.8 m/s^2), es decir, la aceleración debida a la gravedad. (Nótese que este cuerpo actúa como acelerómetro y no como velocímetro.)

46. Los frenos de su automóvil pueden crear una desaceleración de 17 ft/s^2. Si está usted yendo a 85 mi/h y de repente ve una patrulla estatal, ¿cuál es el tiempo mínimo en que reducirá la velocidad por debajo de la velocidad límite, 55 mi/h?

47. En una carretera seca, un automóvil con buenas llantas puede frenar con una desaceleración de 11.0 mi/h/s (= 4.92 m/s^2). *a*) ¿Cuánto tarda en llegar al reposo, si inicialmente va a 55 mi/h (= 24.6 m/s). *b*) ¿Qué distancia cubre en ese tiempo?

48. Se dispara una flecha directamente hacia arriba y de regreso cae al suelo con una rapidez de 260 ft/s, enterrándose 9.0 in. Calcule *a*) la aceleración (supuestamente constante) necesaria para detener la flecha y *b*) el tiempo que tarda el suelo en ponerla en reposo.

49. Un ascensor exterior en el New York Marriot Marquis (véase Fig. 2-39) realiza un recorrido total de 624 ft. Su rapidez máxima es de 1,000 ft/min y su aceleración (constante) es de 4.00 ft/s^2. *a*) ¿Qué distancia recorre mientras acelera hasta alcanzar esa velocidad desde el reposo? *b*) ¿Cuánto tarda en llevar a cabo su recorrido, comenzando y terminando en el reposo?

FIGURA 2-39. Ejercicio 49.

50. Un automóvil que va a 35 mi/h (= 56 km/h) está a 110 ft (= 34 m) de una barrera cuando el conductor oprime los frenos. Cuatro segundos más tarde choca contra ella. *a*) ¿Cuál era su desaceleración constante antes del impacto? *b*) ¿Con qué rapidez iba en el momento del impacto?

2-6 Cuerpos en caída libre

51. Caen gotas de lluvia en el suelo desde una nube a 1,700 m sobre la superficie terrestre. Si no fueran frenadas por la resistencia

del aire, ¿con qué velocidad se moverían al caer al suelo? ¿Sería seguro salir afuera durante un temporal?

52. El único cable que soporta un elevador desocupado para construcción se rompe cuando el elevador está en reposo en la parte superior de un edificio de 120 m de altura. *a*) ¿Con qué rapidez choca contra el suelo? *b*) ¿Cuánto tardará en caer? *c*) ¿Cuál era su rapidez cuando cruzó el punto intermedio al caer? *d*) ¿Cuánto tiempo llevaba cayendo cuando cruzó ese punto?

53. En un sitio de construcción una llave de tubo choca contra el suelo con una rapidez de 24.0 m/s. *a*) ¿De qué altura se la dejó caer accidentalmente? *b*) ¿Cuánto tiempo tardó en caer?

54. *a*) ¿Con qué rapidez debe ser arrojada un pelota verticalmente hacia arriba para que alcance una altura máxima de 53.7 m? *b*) ¿Cuánto tiempo durará en el aire?

55. Se deja caer una roca desde un abismo de 100 m de altura. ¿Cuánto tarda en caer *a*) los primeros 50.0 m y *b*) los segundos 50.0 m?

56. Unos exploradores espaciales aterrizan en un planeta de nuestro sistema solar. Observan que una pequeña roca arrojada a 14.6 m/s verticalmente hacia arriba tarda 7.72 s en regresar al suelo. ¿En qué planeta han aterrizado? (Sugerencia: véase el apéndice C.)

57. Una pelota arrojada hacia arriba tarda 2.25 s en alcanzar una altura de 36.8 m. *a*) ¿Cuál fue su rapidez inicial? *b*) ¿Cuál es su rapidez en esa altura? *c*) ¿A qué altura llegará?

58. Se deja caer una pelota desde una altura de 2.2 m y rebota a una altura de 1.9 m sobre el suelo. Suponga que estuvo en contacto con él durante 96 ms y determine su aceleración promedio (magnitud y dirección) durante el contacto con el suelo.

59. Dos objetos inician la caída libre a partir del reposo desde la misma altura, a una distancia de 1.00 s entre sí. ¿Cuánto tiempo después que el primer objeto empiece a caer estarán ambos a 10.0 m de distancia?

60. Un balón sube a 12.4 m/s y alcanza una altura de 81.3 m sobre el suelo cuando se deja caer un paquete. *a*) ¿Con qué rapidez cae el paquete al suelo? *b*) ¿Cuánto tardó en llegar al suelo?

61. Un perro ve una maceta subir y bajar en una ventana de 1.1 m de altura. Si la maceta permanece a la vista un total de 0.54 s, calcule la altura que alcance por encima de la parte superior de la ventana.

PROBLEMAS

1. Las *fallas* son roturas sobre las cuales las caras contrarias de la roca se han rebasado entre sí, paralelamente a la superficie de la fractura. Los sismos suelen acompañarlas. En la figura 2-40 los puntos *A* y *B* coinciden antes de producirse la falla. Se da el nombre de *desplazamiento horizontal* a la línea de la falla en la superficie horizontal (*AB*). El componente del desplazamiento neto en la línea más inclinada del plano de la falla es el *desplazamiento vertical* (*AD*). *a*) ¿Cuál es el desplazamiento neto si el desplazamiento horizontal es de 22 m y el vertical de 17 m? *b*) Si el plano de la falla tiene una inclinación de 52° con el horizontal, ¿cuál es el desplazamiento *vertical* neto de *B* como resultado de la falla en *a*)?

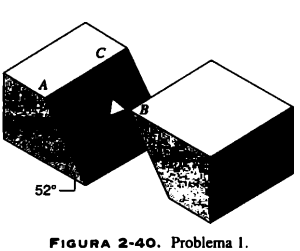


FIGURA 2-40. Problema 1.

2. Una cilindro con un radio de 45 cm rueda sobre un piso horizontal sin deslizarse como se aprecia en la figura 2-41. *P* es un punto pintado en el borde de la rueda. En el tiempo t_1, *P* se halla en el punto de contacto entre la rueda y el piso. En el momento posterior t_2, la rueda ha rodado media revolución. ¿Cuánto se desplaza *P* durante este intervalo?

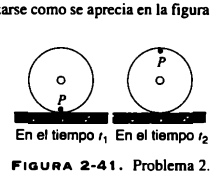


FIGURA 2-41. Problema 2.

3. Un cuarto tiene las dimensiones 10 ft × 12 ft × 14 ft. Una mosca que parte de un rincón termina en el de enfrente. *a*) Determine el vector de desplazamiento en un marco con ejes coordenados paralelos a los bordes del cuarto. *b*) ¿Qué magnitud tiene el desplazamiento? *c*) ¿Podría la longitud de la trayectoria recorrida por la mosca ser menor que esta distancia? ¿Mayor que ella? ¿Igual a ella? *d*) Si la mosca no vuela sino que camina, ¿qué longitud tendrá la trayectoria más corta que puede seguir?

4. Dos vectores de magnitud *a* y *b* forman un ángulo θ entre sí cuando los adosamos. Tome componentes situados sobre los ejes perpendiculares y demuestre que la magnitud de su suma es

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

5. Conduce usted en la carretera interestatal 10 de San Antonio a Houston la mitad del tiempo a 35.0 mi/h (=56.3 km/h) y la otra mitad a 55.0 mi/h (=88.5 km/h). En el viaje de regreso recorre la mitad de la distancia a 35.0 mi/h y la otra mitad a 55.0 mi/h. ¿Cuál es su rapidez promedio *a*) de San Antonio a Houston, *b*) de Houston a San Antonio y *c*) durante todo el viaje?

6. La posición de un objeto que se desplaza en línea recta está dado por $x = At + Bt^2 + Ct^3$, donde $A = 3.0$ m/s, $B = -4.0$ m/s^2 y $C = 1.0$ m/s^3. *a*) ¿Qué posición ocupa el objeto con $t = 0$, 1, 2, 3 y 4 s? *b*) ¿Cuál es su desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 2$ s? ¿Entre $t = 0$ y $t = 4$? *c*) ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo entre $t = 2$ y $t = 4$ s? ¿Y entre $t = 0$ y $t = 3$ s?

7. Dos trenes con una velocidad de 34 km/h, se dirigen uno contra otro sobre la misma vía recta. Un pájaro que puede volar 58 km/h lo hace al frente de un tren cuando están a 102 km de distancia y se dirige hacia el otro. Al alcanzarlo, vuela de regreso al primero y así sucesivamente. *a*) ¿Cuántos viajes puede

realizar de un tren a otro antes que choquen? *b*) ¿Qué distancia total recorre?

8. Un objeto obligado a moverse sobre el eje x, recorre una distancia d_1 con una velocidad constante v_1 en un tiempo t_1. Después cambia al instante su velocidad a una velocidad constante v_2 en el tiempo t_2, cubriendo una distancia d_2. *a*) Demuestre que

$$\frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2} \geq \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

b) ¿En qué condiciones es esto una igualdad?

9. La posición de una partícula que se desplaza sobre el eje x está dada por $x = A + Bt^3$, donde $A = 9.75$ cm y $B = 1.50$ cm/s^3. Considere el intervalo entre $t = 2$ y $t = 3$ s, y calcule *a*) la velocidad promedio; *b*) la velocidad instantánea en $t = 2$ s; *c*) la velocidad instantánea en $t = 3$ s; *d*) la velocidad instantánea en $t = 2.5$ s; y *e*) la velocidad instantánea cuando la partícula se encuentre a la mitad entre su posición en $t = 2$ y $t = 3$ s.

10. Para las siguientes situaciones trace una gráfica que sea una descripción posible de la posición en función del tiempo de una partícula que se mueve sobre el eje x. Cuando $t = 1$ s, la partícula tiene: *a*) velocidad cero y aceleración positiva, *b*) velocidad cero y aceleración negativa, *c*) velocidad negativa y aceleración positiva, *d*) velocidad y aceleración negativas. *e*) ¿En cuál de estas situaciones la rapidez de la partícula aumenta en $t = 1$ s?

11. Si la posición de un objeto está dada por $x = (2.0 \text{ m/s}^3)t^3$, calcule: *a*) la velocidad y aceleración promedio entre $t = 1$ y $t = 2$ s y *b*) la velocidad y aceleración instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$ s. *c*) Compare la magnitud promedio e instantánea; después, explique en cada caso, por qué la más grande lo es.

12. Un electrón que parte del reposo tiene una aceleración que crece linealmente con el tiempo, es decir, $a = kt$, donde $k = (1.50 \text{ m/s}^3)$. *a*) Grafique a en función de t durante el primer intervalo de 10 s. *b*) A partir de la curva de la parte *a*), grafique la curva correspondiente v en función de la t y estime la velocidad del electrón 5 s después de iniciarse el movimiento. *c*) A partir de la curva v en función de t de la parte *b*), grafique la curva correspondiente x en función de la t y estime qué distancia recorre el electrón durante los primeros 5 s de su movimiento.

13. Suponga que lo llaman para que haga alguna recomendación a un abogado sobre la física de uno de sus casos. Se quiere determinar si un conductor rebasó la velocidad máxima de 30 mi/h antes de efectuar un frenado de emergencia, con los frenos puestos y la ruedas deslizándose. Las marcas del deslizamiento en la carretera eran de 19.2 ft de largo. El policía supuso que la desaceleración máxima no superaría la aceleración de un cuerpo en caída libre (= 32 ft/s^2) y no multó al conductor. ¿Iba el conductor a exceso de velocidad? Explique su respuesta.

14. Un tren partió del reposo y se desplazó con aceleración constante. En cierto momento iba a 33.0 m/s y 160 m más adelante iba a 54.0 m/s. Calcule: *a*) la aceleración, *b*) el tiempo necesario para cubrir los 160 m, *c*) el tiempo requerido para alcanzar la rapidez de 33.0 m/s y *d*) la distancia recorrida entre el reposo y el momento en que el tren alcanzó una rapidez de 33.0 m/s.

15. Cuando un conductor detiene un automóvil frenando lo más fuerte posible, la distancia de detención puede considerarse como la suma de una "distancia de reacción", que es la rapidez inicial multiplicada por el tiempo de reacción, y la "distancia de frenado", que es la que se recorre al frenar. La siguiente tabla contiene los valores comunes:

Velocidad inicial (m/s)	Distancia de reacción (m)	Distancia de frenado (m)	Distancia de detención (m)
10	7.5	5.0	12.5
20	15	20	34
30	22.5	45	67.5

a) ¿Qué tiempo de reacción se supone que tenga el conductor? *b*) ¿Cuál es la distancia de frenado del automóvil si la rapidez inicial es de 25 m/s?

16. En el momento en que el semáforo se pone en verde, un automóvil arranca con una aceleración constante de 2.2 m/s^2. En ese instante un camión con una rapidez constante de 9.5 m/s, alcanza al automóvil y lo rebasa. *a*) ¿A qué distancia del punto de partida lo alcanzará el automóvil? *b*) ¿Con qué rapidez se desplazará el automóvil en ese instante? (Conviene trazar una gráfica cualitativa de x en función de t para cada vehículo.)

17. En una carrera de 100 m, un competidor acelera desde el reposo hasta alcanzar la rapidez máxima con una aceleración constante de 2.80 m/s^2 y la conserva hasta el final. *a*) ¿Cuánto tiempo transcurrió?, y *b*) ¿qué distancia recorrió el competidor durante la fase de aceleración si la carrera duró 12.2 s?

18. Se lanza una pelota verticalmente hacia el aire con una rapidez inicial aproximada entre $(25 - \epsilon)$ m/s y $(25 + \epsilon)$ m/s, donde ϵ es un número pequeño comparado con 25. El tiempo total del vuelo de la pelota de regreso al suelo fluctuará entre $t - \tau$ y $t + \tau$. Obtenga t y τ.

19. La figura 2-42 muestra un aparato simple que mide el tiempo de reacción. Está provisto de una cinta de cartón marcada con una escala y con dos puntos grandes. Un amigo sostiene la cinta verticalmente con el pulgar y el índice en el punto de la parte superior, y usted coloca los dos dedos en el punto de la parte inferior procurando no tocar la cinta. Después la suelta y usted trata de sujetarla lo antes posible después de verla caer. La marca en el lugar donde se sujeta representa el tiempo de reacción. ¿A qué distancia del punto de la parte inferior deberíamos poner las marcas de 50, 100, 150, 200 y 250 ms?

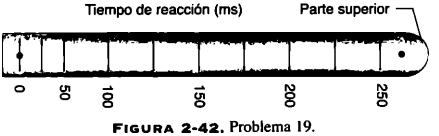


FIGURA 2-42. Problema 19.

20. Mientras piensa en Isaac Newton, una persona parada en un puente que da a una carretera, sin darse cuenta suelta una manzana sobre la valla en el momento en que la parte delantera de un camión pasa debajo de ella. Si el vehículo va a 55 km/h (=34 mi/h) y mide 12 m (=39 ft) de largo, ¿a qué distancia por arriba del camión debe estar la valla si la manzana casi lo golpea en la parte trasera?

21. Se dispara un cohete verticalmente y asciende con una aceleración vertical constante de 20 m/s^2 durante 1.0 min. Entonces se

consume todo su combustible y continúa su movimiento como una partícula en caída libre. *a*) ¿A qué altura máxima llega? *b*) ¿Cuánto tiempo total transcurrió desde el despegue del cohete hasta que cae a la Tierra. (Ignore la variación de g con la altura.)

22. Un basquetbolista a punto de "clavar" el balón, salta 76 cm verticalmente. ¿Cuánto tiempo permanece *a*) en los 15 cm de la parte alta del salto y *b*) en la parte baja? ¿Ayuda esto a explicar por qué estos jugadores parecen quedar suspendidos en el aire en el punto más alto de su salto? (Véase Fig. 2-43.)

FIGURA 2-43. Problema 22.

23. Se arroja una piedra verticalmente hacia arriba. En su ascenso cruza el punto A con una rapidez v, y el punto B, 3.00 m más alto que A, con una rapidez $v/2$. Calcule *a*) la rapidez v y *b*) la altura máxima alcanzada por la piedra arriba del punto B.

24. La Zero Gravity Research Facility en el NASA Lewis Research Center, incluye una torre de caída de 145 m. Es una torre vertical al vacío desde donde, entre otras posibilidades, puede dejarse caer una esfera de 1 m de diámetro que contiene un paquete experimental. *a*) ¿Cuánto dura el paquete en caída libre? *b*) ¿Qué rapidez tiene en la parte inferior de la torre? *c*) En el fondo la esfera experimenta una aceleración promedio de $25g$ al reducirse a cero su rapidez. ¿Qué distancia cubre antes de alcanzar el reposo?

25. Una mujer cae 144 ft desde lo alto de un edificio, chocando contra la parte superior de la caja de un ventilador mecánico, que aplasta hasta una profundidad de 18 in. Logra sobrevivir sin lesiones graves. ¿Qué aceleración (que se supone uniforme) experimentó durante la colisión? Exprese su respuesta en términos de g.

26. La unidad de disco de una computadora está construida para que soporte una aceleración de $100g$ sin dañarse. Suponiendo que la unidad desacelera en una distancia de 2 mm cuando choca contra el suelo, ¿desde qué altura podemos dejarlo caer sin destrozarlo?

27. Como se advierte en la figura 2-44, Clara salta de un puente seguida de cerca por Jaime. ¿Cuánto espera él después que saltó Clara? Suponga que Jim mide 170 cm y que el nivel de salida del salto es la parte alta de la figura. Haga mediciones a escala en la figura.

FIGURA 2-44. Problema 27.

28. Una paracaidista salta y cae 52.0 m sin fricción. Cuando se abre el paracaídas desacelera a 2.10 m/s^2 y toca el suelo con una rapidez de 2.90 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo permanece el paracaidista en el aire? *b*) ¿A qué altura empezó la caída?

29. Una bola de acero se deja caer desde el techo de un edificio (su velocidad inicial es cero). Un observador parado frente a una ventana de 120 cm de altura observa que la bola tarda 0.125 s en llegar de la parte superior a la parte inferior de la ventana. Sigue cayendo, tiene una colisión completamente elástica con una acera horizontal y reaparece en la parte inferior de la ventana 2.0 s después en su descenso. ¿Qué altura tiene el edificio? (La bola tendrá la misma rapidez en un punto en que asciende que el que tenía al descender tras una colisión totalmente elástica.)

30. Un malabarista hace un acto con 5 pelotas en ambas manos. Cada pelota sube 2 metros por arriba de ellas.¿Aproximadamente cuántas veces por minuto arroja cada mano una pelota?

31. ¿Cuál es una estimación razonable del número máximo de objetos que un malabarista puede manejar con las dos manos, si la altura a que los lanza por arriba de las manos es h?

32. Suponga que Galileo hubiera intentado dejar caer dos objetos desde la Torre de Pisa. *a*) Si los hubiera soltado de las manos, pero dejando caer el primero un poco antes que el segundo con una diferencia temporal de $\Delta t = 0.1$ s, ¿cuál sería su separación vertical antes de chocar con el suelo? *b*) ¿Qué exactitud se necesitaría Δt al soltarlos, de modo que los dos objetos presentaran una separación vertical menor que 1 cm poco antes de caer el suelo? (Ignore los efectos de la fricción del aire.)

33. En el National Physical Laboratory de Inglaterra (el equivalente británico del National Institute of Standards and Technology),

una medida de la aceleración g se efectuó lanzando una pelota de vidrio hacia arriba en un tubo al vacío y dejándolo retornar, como se aprecia en la figura 2-45. Sea Δt_L el intervalo entre los dos pasajes por el nivel inferior, Δt_U el intervalo entre los dos pasajes por el nivel superior y H la distancia entre ambos niveles. Demuestre que

$$g = \frac{8H}{(\Delta t_L)^2 - (\Delta t_U)^2}.$$

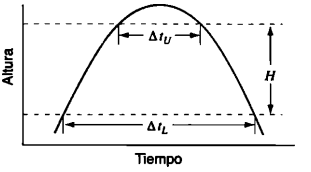


FIGURA 2-45. Problema 33.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. La velocidad de un objeto está dada por

$$v_x(t) = e^{-t^2/100}(t + 10 \operatorname{sen} \pi t).$$

Tanto v_x como x son cero cuando $t = 0$. *a*) Con métodos numéricos determine la primera vez en que v_x es igual a cero después del arranque, y calcule la distancia recorrida desde el origen. *b*) Determine la posición final del objeto cuando $t \to \infty$.

CAPÍTULO 3

FUERZA Y LAS LEYES DE NEWTON

En el Capítulo 2 se estudió el movimiento de una partícula. No preguntamos qué "causaba" el movimiento; nos limitamos a describirlo a partir de la posición de la partícula, de su velocidad y de su aceleración. En este capítulo se explican las causas del movimiento, rama de la física que se conoce como dinámica.

El enfoque de la dinámica que consideraremos, llamado comúnmente mecánica clásica, fue formulado y probado con éxito en los siglos XVII y XVIII. Las teorías más recientes (la relatividad general y especial, así como la mecánica cuántica) han revelado algunos campos muy ajenos a nuestra experiencia ordinaria donde la mecánica clásica no ofrece predicciones que concuerden con los experimentos, pero en lo tocante a los objetos comunes coinciden con la mecánica clásica.

Sin hacer referencia a la relatividad general o especial ni a la mecánica cuántica, estamos en condiciones de construir enormes rascacielos y estudiar las propiedades de los materiales con que se edifican; construir aviones que transportan a cientos de personas y vuelan alrededor del mundo; y enviar sondas espaciales en complejas misiones a los cometas, a los planetas y más allá. Es lo que nos permite realizar la mecánica clásica.

3-1 MECÁNICA CLÁSICA

Los antiguos filósofos se sentían desconcertados ante el movimiento de los objetos. Luchaban con preguntas como las siguientes: ¿tienen una causa todos los movimientos? De ser así, ¿cuál es su naturaleza? La confusión que rodeaba a estas preguntas persistió hasta el siglo XVII, cuando Galileo (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727) propusieron una teoría que explica estos movimientos, y que hoy conocemos con el nombre de "mecánica clásica". En 1687, Newton expuso sus tres leyes del movimiento en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, generalmente llamados *Principia*. En el siglo XX, revelaron sus limitaciones los descubrimientos de la física cuántica (que gobiernan el comportamiento de las partículas microscópicas como los electrones y los átomos) y la relatividad especial (que rige el comportamiento de objetos que se mueven con gran rapidez); las leyes de la mecánica clásica de Newton constituían hasta entonces la base para entender el movimiento y sus causas.

En la mecánica clásica nos concentramos en el movimiento de un objeto en particular que interactúa con otros circundantes (su *ambiente*), de modo que su velocidad cambia, es decir, se produce aceleración. La tabla 3-1 muestra algunos movimientos comunes acelerados y el objeto ambiental que es la causa principal de la aceleración. He aquí el problema central de la mecánica clásica: 1) se coloca un objeto con propiedades físicas conocidas (masa, volumen, carga eléctrica y otras) en un lugar inicial que se desplaza con una velocidad inicial conocida; 2) conocemos (o podemos medir) todas sus interacciones con el ambiente; 3) ¿podemos predecir su movimiento subsecuente? Es decir, ¿podemos determinar su posición y su velocidad en cualquier tiempo futuro?

Para efectuar este análisis comenzamos tratando los objetos físicos como *partículas*, cuerpos cuya estructura o movimiento interno pueden ignorarse y cuyas partes se mueven todas exactamente en la misma forma. A menudo debemos analizar el movimiento de objetos extendidos cuyas partes pueden tener varias interacciones con el ambiente. Por ejemplo, un trabajador podría empujar por un lado una caja pesada mientras la parte inferior experimenta fricción al deslizarse por el piso. Si todas las partes de la caja se desplazan de la misma manera, podemos tratarla como una partícula. No im-

TABLA 3-1 Algunos movimientos acelerados y sus causas principales

Objeto	*Cambio del movimiento*	*Objeto ambiental*	*Tipo de fuerza*
Manzana	Cae del árbol	Tierra	Gravitacional
Automóvil	Se detiene	Carretera	Friccional
Aguja de brújula	Gira hacia el Norte	Tierra	Magnética
Haz de gotas de tinta en impresora	Cambia de dirección	Capacitor	Eléctrica
Balón de helio	Se desprende del suelo	Aire	De flotación

porta, pues, sobre qué parte del objeto opera el ambiente; nos concentramos en el *efecto neto* de todas las interacciones con él. (Más adelante encontraremos casos donde *sí* importa en dónde apliquemos la fuerza a los objetos extendidos, pero por ahora los consideraremos todos como partículas.)

La interacción de un cuerpo con su ambiente la describimos en función de una *fuerza* $\vec{F}$. La fuerza es un empuje o tracción en una dirección determinada. Se describe por medio de vectores: en toda fuerza hemos de especificar la dirección en que opera, y las fuerzas deben combinarse mediante las reglas de la adición de vectores. En este capítulo nos ocuparemos principalmente de problemas que incluyen el movimiento unidimensional, en el cual es preciso especificar el componente de la fuerza (positivo o negativo) relativo a una dirección.

Cada fuerza que se ejerce sobre un objeto se debe a un cuerpo particular de su ambiente. Al comenzar a estudiar la mecánica clásica, conviene que cuando analice las fuerzas en un problema las describa a partir del cuerpo sobre el que actúan y el cuerpo del ambiente que las causa. Por ejemplo, "fuerza de empuje *sobre* la caja *por* el trabajador", "fuerza friccional *sobre* la caja *por* el piso" o "fuerza gravitacional *sobre* la caja *por* la Tierra". Esta técnica le será de gran utilidad cuando se discuta la tercera ley de Newton más adelante en el capítulo.

Para poner en práctica nuestro esquema de la mecánica clásica, comenzaremos definiendo la magnitud de una fuerza a partir de la aceleración de un cuerpo estándar sobre el cual actúa. Después le asignamos a otro cuerpo una *masa m* comparando su aceleración con la del cuerpo estándar cuando aplicamos la misma fuerza a ambos. Finalmente, formulamos *leyes de fuerza* basándonos en las propiedades del cuerpo y de su entorno. Así pues, la fuerza aparece tanto en las leyes del movimiento (que indican qué aceleración experimentará un objeto bajo la acción de una fuerza determinada) como en las de fuerza (que indican cómo calcular la fuerza sobre un cuerpo en cierto ambiente). Unas y otras constituyen las leyes de la mecánica clásica, como se muestra en la figura 3-1.

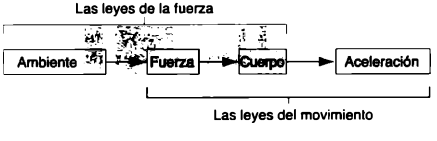


FIGURA 3-1. Nuestro programa de mecánica. Las tres casillas a la izquierda indican que la fuerza es una interacción entre un cuerpo y su ambiente. Las tres casillas de la derecha muestran que acelerará una fuerza que actúe sobre un cuerpo.

El programa de la mecánica clásica no puede probarse por partes. Hay que verlo como un todo y juzgar su éxito a partir de las respuestas a dos preguntas: 1) ¿produce resultados que concuerdan con los experimentos? 2) ¿Tienen las leyes relativas a la fuerza una forma simple y razonable? Debemos acreditarle plenamente a la mecánica clásica que podamos dar un entusiasta "sí" a ambas preguntas.

3-2 PRIMERA LEY DE NEWTON

Antes de la época de Galileo, casi todos los filósofos pensaban que se requería alguna influencia o "fuerza" para mantener un cuerpo en movimiento. Creían que se encontraba en su "estado natural" cuando se hallaba en reposo; por ejemplo, para que se desplazara en línea recta a rapidez constante, era necesario que un agente externo lo impulsara sin cesar; de lo contrario, "naturalmente" dejaría de moverse.

Si quisiéramos probar estas ideas con técnicas experimentales, primero deberíamos encontrar la manera de liberar un cuerpo de todas las influencias ambientales o del resto de las fuerzas. Es difícil lograrlo, pero en ciertos casos podemos hacer muy pequeñas las fuerzas. Si estudiamos el movimiento a medida que las hacemos más y más pequeñas, tendremos una idea de cómo sería el movimiento si las fuerzas externas fueran verdaderamente cero.

Pongamos el cuerpo de prueba —digamos, un bloque— sobre un plano horizontal rígido. Si dejamos que se deslice por el plano, veremos que su velocidad disminuye de manera gradual hasta que se detiene por completo. De hecho, esta observación sirvió para corroborar la idea de que el movimiento se detiene cuando se elimina la fuerza externa; en este caso, la mano que inicialmente empujó el bloque. No obstante, podemos refutarla esta idea con el siguiente razonamiento. Repitamos el experimento utilizando ahora un bloque más suave, un plano también más suave y aplicando un lubricante. Notaremos que la velocidad disminuye más lentamente. Usemos bloques y superficies más pequeñas, así como mejores lubricantes: la velocidad del bloque disminuye más lentamente y recorre una distancia cada vez mayor antes de detenerse. Quizás el lector haya efectuado experimentos con una pista de aire, donde se hace que los objetos floten en una película de aire; se llega así al límite de la ausencia absoluta de fricción, pues basta golpear ligeramente uno de los flotadores para que éste se desplace por la pista con una rapidez lenta y casi constante. Ahora podemos extrapolar y afirmar que, si pudiera eliminarse toda la fricción, el cuerpo continuaría de modo indefinido en una línea recta con velocidad constante. Hace falta una fuerza ex-

terna que ponga en movimiento al cuerpo, pero *no hace falta ninguna para mantenerlo en movimiento con velocidad constante.*

Es difícil encontrar una situación donde ninguna fuerza externa opera sobre un cuerpo. La gravedad lo hace sobre la Tierra o cerca de ella, y las fuerzas de resistencia como la fricción o la resistencia del aire se oponen al movimiento en el suelo o el aire. Por fortuna, no necesitamos ir al vacío de un espacio distante para estudiar el movimiento libre de fuerzas externas, pues respecto al movimiento translacional global de un cuerpo *no existe distinción entre aquel sobre el que no actúa ninguna fuerza externa, y éste otro en el que la suma o resultante de todas las fuerzas externas es cero.* Generalmente llamamos fuerza "neta" a la resultante de todas las que operan sobre un cuerpo. Por ejemplo, el empuje de la mano sobre un bloque deslizante puede ejercer una fuerza que contrarresta la de la fricción y una fuerza hacia arriba en el plano horizontal contrarresta la de la gravedad. En conclusión, la fuerza neta en el bloque puede ser cero, y entonces éste se moverá con velocidad constante.

Nótese que, aunque las cuatro fuerzas operan sobre el bloque, la *fuerza neta* puede ser cero. Está determinada por la suma *vectorial* de todas las que actúan sobre el objeto. Las fuerzas de igual magnitud y de dirección contraria tienen una suma vectorial cero. Así, si queremos obtener una situación en que no haya ninguna fuerza neta, aplicamos fuerzas que contrarresten a las que actúan sobre el cuerpo; por ejemplo, un empuje con la mano o con una máquina que supere la fricción.

Este principio fue adoptado por Newton como la primera de las tres leyes del movimiento:

> *Consideremos un cuerpo sobre el cual no opera ninguna fuerza neta. Si se encuentra en reposo, permanecerá en ese estado. Si se mueve con velocidad constante, seguirá desplazándose.*

La primera ley y los marcos de referencia

Supongamos que usted viaja en un automóvil y que tiene apretado el cinturón de seguridad. Cuando se aplican los frenos, un libro que estaba en el asiento contiguo comienza a deslizarse hacia adelante. No hay una fuerza evidente que lo empuje pero parece comenzar a moverse en relación con usted, lo cual constituye una violación de la primera ley de Newton. Su amigo Guillermo, quien se encuentra de pie a un lado de la carretera, los ve a usted, al automóvil y al libro moverse al mismo tiempo, digamos a 22 m/s (cerca de 50 mi/h). Si usted y el automóvil se detienen repentinamente a 20 m/s (cerca de 45 mi/h), sin fricción con el asiento, el libro seguirá moviéndose a 22 m/h según Guillermo. Él no observa nada extraño ni descubre violación alguna de la primera ley de Newton.

Un ejemplo más: usted está sujetado firmemente al asiento por el cinturón de seguridad en un avión que se topa con turbulencia y de repente pierde un metro de altitud. El vaso en su bandeja parece saltar esa distancia en el aire, sin que una fuerza cause el movimiento. Desde su perspectiva, al parecer la primera ley de Newton ha sido violada. Su amiga Susana vuela a velocidad constante en un avión al lado del de usted; la turbulencia no afecta al de ella. Susana ve su vaso moverse en línea recta en el momento en que usted y el avión descienden abruptamente un metro. Susana no descubre violación alguna de la primera ley en el movimiento del vaso.

Los observadores —usted en el automóvil o en el avión, Guillermo en el suelo y Susana en el avión— definen un *marco de referencia.* Éste requiere un sistema coordenado y un conjunto de relojes que permitan al observador medir las posiciones, las velocidades y las aceleraciones dentro de su marco. Los que se hallan en otros marcos medirán diferentes velocidades y aceleraciones.

La primera ley de Newton, aparentemente un resultado obvio, es muy importante porque ayuda a identificar una serie de marcos especiales donde aplicar las leyes de la mecánica clásica. En el ejemplo del automóvil, usted y Guillermo llegarán a distintas conclusiones sobre la aceleración del libro: usted concluirá que acelera hacia adelante, mientras que Guillermo concluye que la aceleración es cero. En términos generales, la aceleración de un cuerpo depende del marco de referencia en relación con el cual se mide. Sin embargo, las leyes de la mecánica clásica son válidas sólo en cierto conjunto de marcos: aquellos en que *todos* los observadores miden la *misma* aceleración de un cuerpo en movimiento. La primera ley permite escoger esa familia especial de marcos si la expresamos así:

> *Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es cero, será posible obtener un conjunto de marcos de referencia en que el cuerpo no tenga aceleración alguna.*

Se da el nombre de *inercia* a la tendencia de un cuerpo a permanecer en reposo o en movimiento lineal uniforme, y a la primera ley de Newton se le llama *ley de la inercia.* Los marcos de referencia a los que se aplica, reciben el nombre de *marcos inerciales.*

Para probar si un marco en especial es inercial o no, ponemos en reposo un cuerpo en su interior y nos cercioramos de que ninguna fuerza neta opera sobre él. Si el cuerpo no permanece en reposo, el marco no será inercial. Asimismo, podemos poner en movimiento el cuerpo (no sujeto a una fuerza neta) con una velocidad constante, si cambia la magnitud o la dirección de su velocidad, el marco no será inercial. Lo será aquel que pase todas estas pruebas.

Para un pasajero en un automóvil que desacelera, el marco de referencia no es inercial, y no es posible aplicar directamente las leyes de la mecánica tal como fueron formuladas antes. Si el marco de referencia de Guillermo las pasa, él podrá aplicarlas exitosamente en su marco. Medirá el cambio de velocidad del automóvil y, por tanto, deducirá su aceleración (debida a la fuerza de fricción con la carretera), pero concluirá que la fuerza neta sobre el libro es cero y que, en consecuencia, debería desplazarse con velocidad constante. En forma análoga, si el marco de referencia de Susana pasa las pruebas, podrá aplicar exitosamente las leyes de la mecánica asociando el cambio repentino de la velocidad vertical del avión a una fuerza vertical neta (en este caso, la diferencia entre la gravedad y la fuerza de "empuje"), y podrá explicar el movimiento del vaso aplicando las mismas leyes.

Marcos de referencia inerciales y el movimiento relativo

Supóngase que se encuentra usted en un automóvil que desciende por la carretera a 22 m/s (cerca de 50 mi/h). En el mismo vehículo sus amigos se desplazan a 22 m/s. Podría arrojar una pelota al regazo de un amigo sentado a su lado, y el lanzamiento no se vería afectado por la velocidad. La pelota caerá en el regazo de su amigo mientras el automóvil continúe moviéndose con una velocidad constante.

Si es rebasado por su amiga Susana, que se encuentra en otro automóvil que avanza con una velocidad de 27 m/s (cerca de 60 mi/h), observará que la distancia entre su automóvil y el de ella crece con una rapidez de 27 m/s − 22 m/s = 5 m/s. Es decir, en relación con su automóvil, el de ella avanza a 5 m/s. Prescinda ahora de los estímulos externos (el escenario que se desplaza a gran velocidad, el aire que se deja atrás, la irregularidad de la carretera y el ruido del motor) y considere tan sólo los dos vehículos. No habrá forma entonces de saber cuál de ellos se mueve "realmente". Por ejemplo, el de Susana podría estar en reposo y el suyo podría estar retrocediendo a 5 m/s; el resultado observado será el mismo. Un minuto después que Susana lo rebase, usted observará que la distancia entre los dos es la velocidad relativa multiplicada por el intervalo: 5 m/s × 60 s = 300 m.

Considere a continuación la perspectiva que tendrá de esto su amigo Guillermo, situado a un lado de la carretera (Fig 3-2). Suponga que Susana lo rebase a usted al pasar frente a él. Según Guillermo, 1 minuto después el automóvil de usted ha recorrido una distancia de 22 m/s × 60 s = 1,320 m, mientras que el de Susana recorrió una distancia de 27 m/s × 60 s = 1,620 m. Guillermo llega a la conclusión de que la distancia entre los automóviles es 1,620 m − 1,320 m = 300 m. Por tanto, usted y él obtienen, la misma conclusión acerca de la distancia existente entre ambos vehículos.

Poco después de rebasarlo a usted, Susana ve una patrulla y aplica el freno. Guillermo la observa disminuir la velocidad de 27 m/s a 20 m/s en un tiempo de 3.5 s. De acuerdo con él, la aceleración de Susana es (suponiendo que la dirección del movimiento sea la dirección positiva x y resolviendo la ecuación 2-26, $v_x = v_{0x} + a_x t$, para a_x)

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(20\ \text{m/s}) - (27\ \text{m/s})}{3.5\ \text{s}} = -2.0\ \text{m/s}^2.$$

Conforme al marco de referencia de usted, la velocidad de Susana es ahora 20 m/s − 22 m/s = − 2 m/s, es decir, usted avanza 2 m/s más rápido que Susana. Según usted, la velocidad de ella cambia de + 5 m/s a − 2 m/s y, por tanto, la aceleración será

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-2\ \text{m/s}) - (5\ \text{m/s})}{3.5\ \text{s}} = -2.0\ \text{m/s}^2.$$

¡Usted y Guillermo coinciden en la aceleración!

Los dos son observadores inerciales. Concuerdan en la aceleración del automóvil de Susana y, por tanto, también lo harán en la fuerza necesaria para producir la aceleración. De hecho, *todos los observadores inerciales coinciden en las mediciones de la aceleración* (aunque en general no concuerden en la medición de la posición ni de la velocidad).

Examinemos ahora el caso contrario en que usted también frena un poco cuando pasa frente a una patrulla, disminuyendo la rapidez de 22 m/s a 21 m/s en el mismo intervalo de 3.5 s. Al inicio del intervalo, determina que la velocidad de Susana es +5 m/s como antes. Al terminar el intervalo del frenado, calculará que la velocidad de ella es 20 m/s − 21 m/s = − 1 m/s (en dirección hacia atrás). Concluirá entonces que la aceleración de Susana es

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-1\ \text{m/s}) - (5\ \text{m/s})}{3.5\ \text{s}} = -1.7\ \text{m/s}^2,$$

que difiere del resultado de − 2.0 m/s² de Guillermo. Usted ha dejado de ser un observador inercial (porque durante el intervalo de 3.5 s en que estaba frenando no podía pasar ya la prueba de la primera ley de Newton).

En este libro aplicamos siempre las leyes de la mecánica clásica desde el punto de vista de un observador situado en un plano inercial. De cuando en cuando explicaremos problemas en que intervienen observadores en marcos de referencia no inerciales, como un carro que acelera, un carrusel que gira o un satélite en órbita. Aunque la Tierra gira, un marco de referencia sujeto a ella puede considerarse más o menos un marco de referencia en aplicaciones prácticas. El carácter no inercial del planeta se vuelve importante cuando se trata de aplicaciones a gran escala, como analizar el vuelo de misiles balísticos o estudiar el viento y las corrientes marinas (véase Secc. 5.6).

Nótese que, en la primera ley, no existe diferencia entre un cuerpo en reposo y otro en movimiento con velocidad constante. Los dos movimientos son "naturales" si la fuerza neta que opera sobre él es cero. Esto se entiende cuando un cuerpo en reposo dentro de un marco inercial se ve desde otro marco, es decir, desde uno que se desplace a velocidad constante respecto al primero. Un observador dentro del primer marco se da cuenta de que el cuerpo se halla en reposo, y un observador dentro del segundo se percata de que el mismo cuerpo se desplaza con velocidad constante. Para los dos el cuerpo no tiene aceleración —es decir, la velocidad no cambia—, y pueden concluir de la primera ley, que ninguna fuerza neta actúa sobre él.

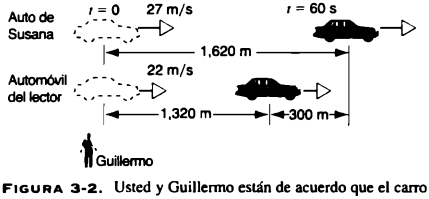


FIGURA 3-2. Usted y Guillermo están de acuerdo que el carro de Susana está 300 m adelante del suyo después de 60 s.

3-3 FUERZA

Según la primera ley de Newton, la *ausencia* de fuerza da origen a la *ausencia* de aceleración. ¿Y qué sucede con su *presencia*?

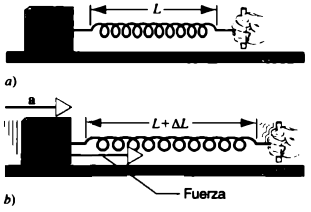


FIGURA 3-3. *a*) Un cuerpo estándar en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. *b*) Se acelera el cuerpo tirando hacia la derecha para estirar el resorte por ΔL.

Con base en la experiencia común, cabe suponer que un cuerpo acelerará cuando se le aplique una fuerza. A continuación exponemos nuestro concepto de fuerza definiéndola en términos operacionales a partir de la aceleración que produce al ser aplicada a un "cuerpo estándar", determinado. Cualquier objeto puede servir como cuerpo estándar, con tal que pueda identificarse y reproducirse claramente. Por ejemplo, podríamos seleccionar un bloque de cobre o un vaso de dimensiones específicas.

Antes de iniciar la medición, hemos de recurrir a la primera ley de Newton para cerciorarnos de que estamos trabajando en un marco de referencia inercial. Si el cuerpo se halla en reposo, ¿permanece en ese estado? Si al comenzar se desplaza con una velocidad constante, ¿la mantiene? Al intentar contestar la segunda pregunta, probablemente descubramos que el cuerpo, una vez en movimiento, disminuye gradualmente su velocidad a causa de la fricción. Mediante un diseño riguroso de nuestro aparato creamos un ambiente lo más libre de fricción posible, quizá haciendo que el cuerpo flote sobre una película de aire o lubricando la superficie donde se mueve. Queremos aplicarle una fuerza y medir su aceleración; también queremos asegurarnos de que otras fuerzas causadas por el ambiente tengan un efecto despreciable en el movimiento del cuerpo.

Escogemos un resorte ligero como fuente de la fuerza. Observamos que los resortes tienen diferente rigidez, por lo cual se necesitan distintos esfuerzos para estirarlos. Asimismo, observamos que el esfuerzo necesario para ello aumenta al estirarlo distancias más extensas.

Colocamos el cuerpo estándar sobre una superficie horizontal sin fricción y le sujetamos un resorte (Fig. 3-3*a*). Por ensayo y error, alargamos el resorte hasta que produzca una aceleración de 1 m/s^2 exacto sobre el cuerpo estándar (Fig. 3-3*b*). Esto se define como *una unidad* de fuerza, y a manera de referencia futura registramos la extensión del estiramiento ΔL que corresponde a esta fuerza. A continuación repetimos el experimento, estirando más el resorte hasta que el cuerpo estándar experimente una aceleración de 2 m/s^2. Esto lo definimos como *dos unidades* de fuerza y volvemos a registrar el estiramiento ΔL que la produce. Proseguimos y calculamos el estiramiento que causa una aceleración de 3 m/s^2, correspondiente a *tres unidades* de fuerza. Con el tiempo tenemos una calibración completa del resorte, la cual nos da el estiramiento que imprime al cuerpo estándar la aceleración deseada. Otros resortes de distinta rigidez podrían calibrarse de manera similar usando el mismo cuerpo estándar.

Basándonos enteramente en la aceleración dada a un cuerpo estándar, ahora contamos con un conjunto de resortes calibrados. Utilizándolos como aparatos, podemos proceder a medir fuerzas desconocidas. Por ejemplo, suspendamos un objeto verticalmente de un resorte, como se advierte en la figura 3-4*a*. La fuerza neta debe ser cero, puesto que el cuerpo está en reposo. La magnitud de la fuerza ascendente ejercida por el resorte deberá ser igual a la de la fuerza descendente de la gravedad. Podemos calcular la fuerza de gravedad sobre el cuerpo con sólo medir la extensión ΔL y revisar nuestra calibración del resorte, a fin de determinar la fuerza correspondiente. De hecho, para estas mediciones se cuenta con escalas de resortes calibrados; por ejemplo, para pesar la fruta y las verduras en las tiendas de comestibles.

Las fuerzas de fricción puede medirse en una forma similar. Al colocar el cuerpo sobre una superficie horizontal donde experimenta una fuerza friccional, podríamos sujetar un resorte (como en la figura 3-4*b*) y tirar del cuerpo con la fuerza apenas justa para que se desplace a una velocidad constante. En este caso, la magnitud de la fuerza del resorte es igual a la fuerza friccional, por lo cual la suma vectorial es cero (por tener igual magnitud y dirección contraria). Podemos determinar la magnitud de la fuerza a partir de la extensión a que se estira el resorte. Una vez más, una báscula de resorte calibrado es de gran utilidad.

Otra forma de medir la fuerza consiste en utilizar una *sonda electrónica de fuerza* que puede conectarse a una computadora para leer las fuerzas directamente (véase Fig. 3-5). La fuerza aplicada a ella causa una pequeña deflexión de un dispositivo mecánico o electrónico; la deflexión puede leerse electrónicamente y calibrarse con un resorte "estándar".

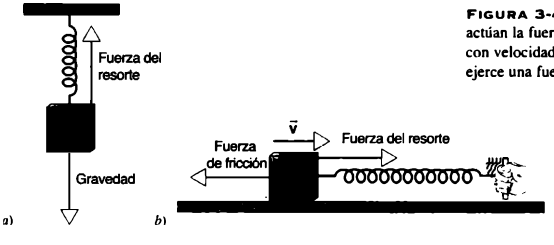
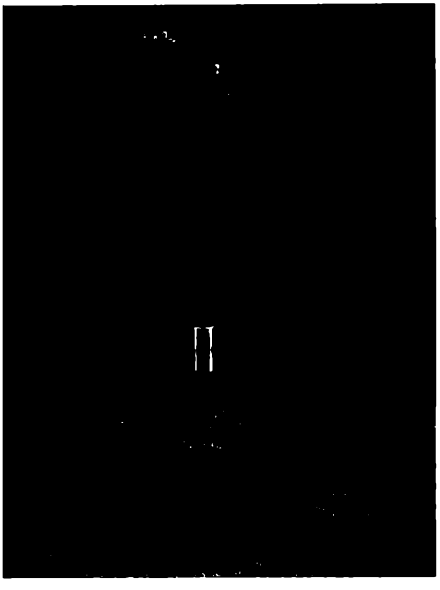


FIGURA 3-4. *a*) Un cuerpo está suspendido en reposo y sobre él actúan la fuerza del resorte y la gravedad. *b*) Un cuerpo se mueve con velocidad constante sobre una superficie horizontal la cual le ejerce una fuerza de fricción.



IGURA 3-5. Una masa cuelga de un resorte conectado a una onda electrónica, que puede conectarse a una computadora para nedir las fuerzas. Cortesía de Vernier Software and Technology.

3-4 MASA

En la sección anterior se describió una serie de experimentos con que se calibran los resortes basados en la aceleración comunicada a un cuerpo estándar, cuando los resortes fueron estirados a varias longitudes. Ahora queremos repetirlos para contestar otra pregunta: ¿qué efectos tendrá la *misma fuerza* cuando se aplica a *diferentes cuerpos*?

La experiencia diaria nos lleva a conjeturar una respuesta cualitativa: es mucho más fácil acelerar una bicicleta empujándola que un automóvil. Es evidente que una misma fuerza produce aceleraciones diferentes cuando se aplica a cuerpos diversos. Lo que los hace que nuestra capacidad de acelerarlos sea diferente es su *masa, que es la propiedad de un cuerpo que determina su resistencia a un cambio de su movimiento.*

Veamos cómo podemos estudiar la relación existente entre fuerza y masa acelerando los cuerpos de masa distinta por medio de nuestro juego de resortes calibrados. Comenzamos obteniendo un segundo cuerpo estándar idéntico y sujetándolo al primero. Luego aplicamos una unidad de fuerza (determinada antes a partir del cuerpo individual) a este objeto combinado; observamos que la aceleración es $0.5\ m/s^2$. Al aplicar dos unidades de fuerza, obtenemos una aceleración de $1.0\ m/s^2$. Podemos repetir el experimento con tres cuerpos estándar unidos, luego con cuatro, y así sucesivamente. He aquí unos resultados posibles de estos experimentos:

Fuerza aplicada	1 uni.	2 unids.	3 unids.	4 unids.
Aceleración de un cuerpo estándar	$1.0\ m/s^2$	$2.0\ m/s^2$	$3.0\ m/s^2$	$4.0\ m/s^2$
Aceleración de dos cuerpos estándar	$0.5\ m/s^2$	$1.0\ m/s^2$	$1.5\ m/s^2$	$2.0\ m/s^2$
Aceleración de tres cuerpos estándar	$0.33\ m/s^2$	$0.67\ m/s^2$	$1.0\ m/s^2$	$1.3\ m/s^2$

Los resultados de las mediciones anteriores indican con toda claridad lo siguiente: en toda combinación de cuerpos la aceleración será directamente proporcional a la fuerza (por ejemplo, en todos los casos dos unidades de fuerza producen el doble de aceleración que una unidad). Sin embargo, la constante de proporcionalidad entre fuerza y aceleración no es igual en los renglones horizontales de la tabla de datos, y constituye una propiedad característica del objeto que será acelerado. Esta propiedad es la masa, que nos da la proporcionalidad entre fuerza y aceleración. La figura 3-6 ilustra estos experimentos que indican las relaciones entre fuerza, masa y aceleración.

A partir de muchos experimentos semejantes al anterior, concluimos lo siguiente: cuanto mayor sea la masa total de un cuerpo, menor será la aceleración producida por una fuerza. Es decir, *la aceleración producida por una fuerza es inversamente proporcional a la masa que será acelerada.* Por tanto, la masa de un cuerpo puede considerarse como una *medida cuantitativa de la resistencia de un cuerpo a la aceleración por una fuerza determinada.*

La observación anterior ofrece un medio directo de comparar la masa de varios cuerpos: aplicamos la misma fuerza a ambos y medimos la aceleración resultante. La razón de su masa será entonces la misma, que la razón *inversa* de las aceleraciones. Por ejemplo, supóngase que aplicamos una fuerza F a un cuerpo estándar (cuya masa hemos de suponer que es m_{est}) y que medimos la aceleración a_{est}. Después observamos que la misma fuerza F aplicada al cuerpo x de masa desconocida m_x produce la aceleración a_x. Formamos razones y entonces tenemos:

$$\frac{m_x}{m_{est}} = \frac{a_{est}}{a_x} \quad \text{(actúa la misma fuerza } F\text{).} \qquad (3\text{-}1)$$

Esto permite calcular la masa de un cuerpo desconocido en función de la masa del cuerpo estándar seleccionado. Por ejemplo, si la aceleración de un cuerpo x es $\frac{1}{3}$ de la del cuerpo estándar cuando se les aplica la misma fuerza, la masa de éste será el triple de la del cuerpo estándar. Nótese que esto sucede sin que importe cuántas unidades de fuerza apliquemos a ambos cuerpos, como se aprecia en la tabla anterior de valores medidos; por ejemplo, las aceleraciones del cuerpo triple en el último renglón de ella son $\frac{1}{3}$ de las correspondientes del cuerpo individual en cada valor de la fuerza aplicada. Mas exactamente, si aplicamos otra fuerza F' al cuerpo estándar y

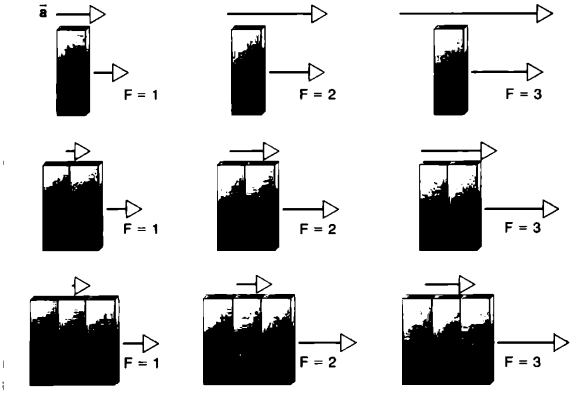


FIGURA 3-6. Experimentos que ilustran la relación entre fuerza (dada en unidades arbitrarias), masa y aceleración. Los vectores de aceleración se dibujan a escala arriba de los bloques. Al leer a lo largo de los renglones vemos que la aceleración siempre es proporcional a la fuerza, pero la proporcionalidad es diferente para las masas. Al leer verticalmente cada columna, vemos que cuando opera la misma fuerza, la aceleración es inversamente proporcional a la masa.

al cuerpo x comunicándoles las aceleraciones a'_{est} y a'_x, descubrimos que la razón de las aceleraciones con la fuerza F' es la misma que la razón con la fuerza F:

$$\frac{m_x}{m_{est}} = \frac{a_{est}}{a_x} = \frac{a'_{est}}{a'_x}. \qquad (3\text{-}2)$$

Obtenemos el mismo valor de una masa desconocida m_x, *sin importar el valor de la fuerza común.* La razón de masa m_x/m_{est} es independiente de la fuerza; la masa es una propiedad fundamental del objeto, sin relación con el valor de la fuerza que se use para comparar la masa desconocida con la estándar.

Mediante una simple extensión de este procedimiento, podemos comparar la masas de dos cuerpos entre sí, en vez de comparar un solo cuerpo con el estándar. Consideremos dos objetos arbitrarios de masa m_1 y m_2. Aplicamos una fuerza de magnitud F a m_1, y medimos la aceleración a_1. Al aplicar la misma fuerza a m_2, obtenemos la aceleración a_2. La razón de las masas es

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{(actúa la misma fuerza)}, \qquad (3\text{-}3)$$

la cual resulta ser idéntica a la razón que habríamos obtenido deduciendo por separado las masas m_1 y m_2 y comparándolas directamente con el estándar, como en la ecuación 3-1.

Esta técnica indica además que, cuando dos masas m_1 y m_2 se sujetan juntas, desde el punto de vista mecánico se comporta como un solo objeto de masa $m_1 + m_2$. Así se demuestra que *las masas se suman como (y son) magnitudes escalares.*

Un ejemplo práctico del uso de esta técnica —consistente en asignar masas comparando las aceleraciones producidas por una fuerza— es la medición precisa de las masas de los átomos. En este caso la fuerza es magnética y la aceleración es perpendicular a la velocidad del átomo; causa, pues, una deflexión en su trayectoria, pero el principio es idéntico: la razón de las masas de los dos átomos es igual a la razón inversa de sus aceleraciones. La medición de la deflexión permite medir exactamente las razones de masa y compararlas con una masa estándar (^{12}C, definida exactamente como 12 u); además, permite obtener valores precisos de las masas, como los de la tabla 1-6.

3-5 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Ahora podemos resumir todos los experimentos y definiciones antes descritos en una ecuación, la ecuación fundamental de la mecánica clásica:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}. \qquad (3\text{-}4)$$

En esta ecuación, $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}}$ es la *suma* (vectorial) *de todas las fuerzas* que actúan *sobre* el cuerpo, m es su masa y $\vec{\mathbf{a}}$ es su aceleración (vectorial). A $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}}$ la llamaremos fuerza *resultante* o *neta.*

La ecuación 3-4 es una formulación de la *segunda ley de Newton.* Si la escribimos en la forma $\vec{\mathbf{a}} = (\Sigma\,\vec{\mathbf{F}})/m$, veremos fácilmente que la aceleración del cuerpo tiene una magnitud directamente proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre ella y en dirección paralela a dicha fuerza. Vemos asimismo que la aceleración de una fuerza determinada es inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Nótese que la primera ley del movimiento parece estar contenida en la segunda como un caso especial porque si $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}} = 0$, entonces $\vec{\mathbf{a}} = 0$. En otras palabras, si la fuerza resultante que opera sobre un cuerpo es cero, la aceleración de él será también cero y el cuerpo se moverá con velocidad constante, como se indica en la primera ley. No obstante, la primera ley

interviene de manera independiente e importante en la definición de los marcos de referencia inerciales. Sin esa definición no podríamos escoger los marcos dónde aplicar la segunda ley. Por eso necesitamos *ambas leyes* para completar el sistema de la mecánica.

La ecuación 3-4 es vectorial. Igual que en las ecuaciones de este tipo, podemos escribir una sola ecuación vectorial como tres unidimensionales,

$$\sum F_x = ma_x, \qquad \sum F_y = ma_y, \qquad \sum F_z = ma_z, \qquad (3\text{-}5)$$

que relacionan los componentes x, y y z de la fuerza resultante (ΣF_x, ΣF_y y ΣF_z) con los componentes x, y y z de la aceleración (a_x, a_y y a_z) para la masa m. Conviene subrayar que ΣF_x es la suma *algebraica* de los componentes x de *todas* las fuerzas, que ΣF_y es la suma *algebraica* de los componentes y de todas las fuerzas y que ΣF_z es la suma *algebraica* de los componentes z de *todas* las fuerzas que operan sobre m. Al tomar la suma algebraica, hay que tener en cuenta los signos de los componentes (es decir, las direcciones relativas de las fuerzas).

Como todas las ecuaciones, la segunda ley de Newton ha de ser congruente desde el punto de vista dimensional. En el lado derecho las dimensiones son, como dijimos en el Capítulo 1 que [ ] denota *las dimensiones de*, $[m][a] = \mathrm{ML/T^2}$ y, por tanto, han de ser también las dimensiones de la fuerza:

$$[F] = \mathrm{ML/T^2}.$$

Las condiciones anteriores se cumplen en ella, cualquiera que sea el origen de la fuerza —gravitacional, eléctrico, nuclear o de otra índole—, y por muy complicada que sea la ecuación que la describe.

En el SI de unidades, el cuerpo estándar posee una masa de 1 kilogramo (véase Secc. 1-5), y en efecto, medimos la masa de los objetos comparándolos con el kilogramo patrón. Para impartirle una aceleración de 1 $\mathrm{m/s^2}$ a una masa de 1 kg, se necesita una fuerza de 1 $\mathrm{kg \cdot m/s^2}$. A esta combinación de unidades se le llama *newton* (cuya abreviatura es N):

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}.$$

Si medimos la masa en kg y la aceleración en $\mathrm{m/s^2}$, la segunda ley de Newton nos da la fuerza en N.

Los otros dos sistemas de uso común son el cgs (centímetro-gramo-segundo) y los sistemas ingleses. En el sistema cgs, la masa se mide en gramos y la aceleración en $\mathrm{cm/s^2}$. La unidad de fuerza en este sistema es la *dina*, y equivale a $\mathrm{g \cdot cm/s^2}$. Puesto que 1 kg = 10^3 g y 1 $\mathrm{m/s^2}$ = 100 $\mathrm{cm/s^2}$, se concluye que 1 N = 10^5 dina. La dina es una unidad muy pequeña, aproximadamente igual al peso de un milímetro cúbico de agua. (En cambio, un newton es el peso aproximado de medio vaso de agua.)

En el sistema inglés, la fuerza se mide en libras y la aceleración en $\mathrm{ft/s^2}$. En este sistema, la masa que se acelera a 1 $\mathrm{ft/s^2}$ por una fuerza de 1 lb se le llama *slug* (palabra inglesa proveniente de *sluggish*, que significa lento o impasible).

En ocasiones se encuentran otras variantes de estos sistemas básicos, pero los tres son los más comunes. En la tabla 3-2 se resumen estas unidades de fuerza; un listado más completo viene en el apéndice G.

TABLA 3-2 Unidades en la segunda ley de Newton

Sistema	*Fuerza*	*Masa*	*Aceleración*
SI	newton (N)	kilogramo (kg)	$\mathrm{m/s^2}$
cgs	dina	gramo (g)	$\mathrm{cm/s^2}$
Inglés	libra (lb)	slug	$\mathrm{ft/s^2}$

Análisis dinámico por medio de la segunda ley de Newton

Al analizar los problemas usando la segunda ley, hay varios pasos que deberán seguirse:

1. Escoger un marco de referencia inercial adecuado. Se selecciona la orientación y la dirección positiva de los ejes coordenados del marco. Se supone que los componentes de la fuerza en la dirección positiva son también positivos, y que los de la dirección contraria son negativos.
2. Para cada objeto del problema trace un *diagrama de cuerpo libre* que muestre todas las fuerzas que operan sobre él. En el diagrama, al cuerpo se le considera una partícula.
3. Indique cada fuerza con dos subíndices: el primero denota el cuerpo sobre el que actúa la fuerza, y el segundo el cuerpo en el ambiente causante de la fuerza. Por ejemplo, F_{AB} indica que la fuerza sobre el cuerpo A se debe al cuerpo B y que F_{BA} indica la fuerza sobre el cuerpo B debida al cuerpo A. Si hay varios objetos A, B, C... en el problema, las fuerzas sobre el cuerpo A podrían incluir F_{AB}, F_{AC}, y así sucesivamente. Este método de designar las fuerzas es muy importante, porque ayudará a no cometer el error de incluir una fuerza ficticia no asociada a un cuerpo en el ambiente.
4. Para cada cuerpo encuentre la suma vectorial de todas las fuerzas. En la práctica esto suele significar sumar por separado (con la debida atención a los signos) los componentes x, y y z de las fuerzas. Después con las ecuaciones 3-5 se obtiene la aceleración de los componentes del cuerpo.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de los procedimientos anteriores.

PROBLEMA RESUELTO 3-1. Una trabajadora W empuja un trineo cargado S, cuya masa m es 240 kg, una distancia d de 2.3 m sobre la superficie de un lago congelado con una fricción despreciable. La trabajadora ejerce una fuerza horizontal constante F_{SW} de 130 N (= 29 lb) mientras lo hace; véase la figura 3-7*a*. Si el trineo parte del reposo, ¿cuál será su velocidad final?

Solución Como se muestra en la figura 3-7*b*, trazamos un eje horizontal x, suponemos que la dirección de x creciente es a la derecha, y consideramos el trineo como una partícula. La figura 3-7*b* es un diagrama *parcial* de cuerpo libre. Al dibujar este tipo de diagramas

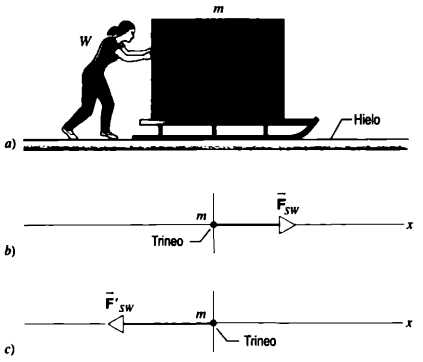


FIGURA 3-7. Problemas resueltos 3-1 y 3-2. *a*) Una trabajadora empuja un trineo cargado por una superficie sin fricción. *b*) Diagrama de cuerpo libre que muestra el trineo como una "partícula" y la fuerza que actúa sobre él. *c*) Un segundo diagrama de cuerpo libre que muestra la fuerza que actúa cuando la trabajadora empuja en la dirección opuesta.

conviene incluir siempre *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula; pero en este caso hemos omitido dos fuerzas verticales que explicaremos luego y que no influyen en nuestra solución. Suponemos que la fuerza F_{SW} ejercida por la trabajadora, es sólo la fuerza horizontal que opera sobre el trineo, de modo que $\Sigma F_x = F_{SW}$. Entonces podemos determinar la aceleración del trineo basándonos en la segunda ley de Newton, es decir,

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{F_{SW}}{m} = \frac{130\text{ N}}{240\text{ kg}} = 0.54\text{ m/s}^2.$$

Con esta aceleración podemos calcular el tiempo necesario para recorrer una distancia d utilizando la ecuación 2-28 ($x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2$) con ($x - x_0 = d$ y $v_{0x} = 0$). Resolviendo obtenemos $t = \sqrt{2d/a_x} = 2.9$ s. La ecuación 2-26 (con $v_{0x} = 0$) nos da ahora la velocidad final

$$v_x = a_xt = (0.54\text{ m/s}^2)(2.9\text{ s}) = 1.6\text{ m/s}.$$

La fuerza, la aceleración, el desplazamiento y la velocidad final del trineo son positivos, lo cual significa que todos ellos señalan a la derecha en la figura 3-7*b*.

Nótese que, para seguir aplicando la fuerza constante, la trabajadora tendría que correr cada vez más rápido para no rezagarse con el trineo que acelera. Con el tiempo la velocidad de éste deberá exceder la más rápida a la cual la trabajadora podría correr; por tanto, ya no podrá aplicarle una fuerza. El trineo seguirá (si no hay fricción) deslizándose a una velocidad constante.

PROBLEMA RESUELTO 3-2. La trabajadora del problema 3-1 quiere invertir la dirección de la velocidad del trineo en 4.5 s. ¿Con qué fuerza constante deberá empujarlo para conseguir su propósito?

Solución Si la trabajadora ejerce una fuerza constante, la aceleración del trineo será también constante. Calcule esta aceleración por medio de la ecuación 2-26 ($v_x = v_{0x} + a_xt$). Al resolver para a obtenemos

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-1.6\text{ m/s}) - (1.6\text{ m/s})}{4.5\text{ s}} = -0.71\text{ m/s}^2.$$

Ésta es de magnitud mayor que la aceleración del problema 3-1 (0.54 m/s^2), por lo cual se deduce que la trabajadora debe empujar más duro esta vez. Calculamos esta fuerza (constante) F'_{SW} con

$$F'_{SW} = ma_x = (240\text{ kg})(-0.71\text{ m/s}^2)$$
$$= -170\text{ N} (= -38\text{ lb}).$$

El signo negativo indica que la trabajadora empuja el trineo en dirección de x decreciente, es decir, hacia la izquierda, como se aprecia en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3-7*c*.

PROBLEMA RESUELTO 3-3. Una caja cuya masa m es 360 kg se encuentra en el piso de un camión que se desplaza con una rapidez v_0 de 105 km/h, como se muestra en la figura 3-8*a*. El conductor aplica los frenos y disminuye a una rapidez v de 62 km/h en 17 s. ¿Qué fuerza (supuestamente constante) opera sobre la caja durante este tiempo? Suponga que la caja no se desliza sobre el piso del camión.

Solución Primero determinamos la aceleración (constante) de la caja. Al resolver la ecuación 2-26 ($v_x = v_{0x} + a_xt$) para a_x obtenemos

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(62\text{ km/h}) - (105\text{ km/h})}{(17\text{ s})(3{,}600\text{ s/h})} = -0.70\text{ m/s}^2.$$

La aceleración debe señalar a la izquierda, pues hemos tomado el sentido positivo de la dirección horizontal hacia la derecha.

La fuerza F_{CT} ejercida sobre la caja por el camión se deduce de la segunda ley de Newton:

$$F_{CT} = ma_x$$
$$= (360\text{ kg})(-0.70\text{ m/s}^2) = -250\text{ N}.$$

Esta fuerza actúa en la misma dirección que la aceleración, es decir, hacia la izquierda en la figura 3-8*b*. Debe proporcionarla un agente externo, como las cuerdas u otros medios mecánicos con que se sujeta la caja al piso del camión. Si no es así, la fricción entre la caja y el piso deben suministrar la fuerza requerida. Si no existe suficiente fricción para aportar una fuerza de 250 N, la caja se resbalará por el piso del camión porque, como lo mide un observador desde el suelo, su rapidez disminuirá menos rápidamente que la del camión.

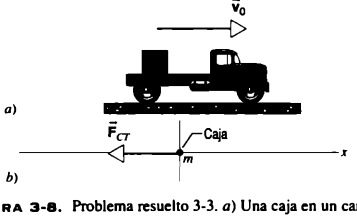


FIGURA 3-8. Problema resuelto 3-3. *a*) Una caja en un camión que se está frenando. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la caja.

3-6 TERCERA LEY DE NEWTON

Pongamos el caso de la Tierra y de la Luna. La Tierra ejerce fuerza gravitacional sobre la Luna y ésta sobre aquélla. Todas las fuerzas forman parte de las interacciones recíprocas que se dan entre dos (o más) cuerpos, cuando no es posible tener sólo una fuerza individual aislada.

Las fuerzas que operan sobre un cuerpo (llamémosle cuerpo A), se deben a otros que están en el ambiente. Supóngase que el cuerpo B es uno de esos cuerpos en el ambiente del cuerpo A. Entonces, entre las fuerzas que actúan sobre él se encuentra $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$, esto es, la que se debe al cuerpo B. También podríamos concentrarnos en el cuerpo B. Entre los cuerpos de su ambiente se halla el cuerpo A, el cual ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ sobre el cuerpo B. La tercera ley de Newton se refiere a la relación entre $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$.

Por experimentación descubrimos lo siguiente: cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste siempre hará lo mismo con el primero. Más aún, observamos que las fuerzas *siempre* tienen la misma magnitud y que siguen una dirección opuesta. En el sistema Tierra-Luna, la magnitud de la fuerza sobre la Luna debida a la Tierra es igual a la magnitud de la fuerza de ésta debida a aquélla. Las fuerzas también siguen dirección opuesta: si imaginamos una línea que conecte a las dos, la fuerza que la Tierra ejerce sobre la Luna actúa sobre esa línea hacia la Tierra, y la fuerza que sobre ésta ejerce la Luna opera sobre la misma línea hacia la Luna.

La tercera ley de Newton resume las observaciones anteriores:

Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, también éste ejerce una fuerza sobre aquél. Estas dos fuerzas siempre tienen la misma magnitud y dirección contraria.

Expresemos lo anterior en términos formales (Fig. 3-9): supongamos que el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ sobre el cuerpo A; el experimento muestra entonces que el primero ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ sobre el segundo. Estas fuerzas se relacionan por medio de

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}. \tag{3-6}$$

El signo negativo nos recuerda que las fuerzas actúan en dirección contraria, como se muestra en la figura 3-9.

A las dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ debidas a la interacción recíproca de dos cuerpos, suele llamárseles fuerzas de "acción" y de "reacción". Estos nombres son totalmente arbitrarios; a cualquiera de las dos podríamos llamarlas "acción" y entonces la otra sería la "reacción". Al usar estos términos comunes, no queremos decir que de alguna manera la "acción" causa la "reacción". Ambas fuerzas existen por interacción recíproca, y nos limitamos simplemente a escoger como la "acción", de modo que la otra será la "reacción". Esto permite formular la tercera ley de Newton en forma abreviada:

A toda acción corresponde una reacción igual en magnitud y de sentido contrario.

Esta ley establece que la fuerza de reacción debe existir, especificando además su magnitud y dirección.

Conviene recordar que las fuerzas de acción y de reacción *siempre* operan sobre cuerpos *diferentes*, como lo recuerdan los subíndices. A menudo encontraremos situaciones donde dos fuerzas iguales y contrarias actúan sobre el mismo cuerpo (como en la figura 3-4). La ecuación 3-6 indica que *no pueden* ser un par de acción-reacción, porque operan sobre el mismo cuerpo. En un verdadero par de acción-reacción, una fuerza actúa sobre el cuerpo A y la otra sobre el cuerpo B. Si ha designado cuidadosamente las fuerzas especificando el cuerpo sobre el que opera la fuerza y el que la causa, estará en condiciones de identificar la fuerza de reacción con sólo intercambiar los nombres de los dos cuerpos. Por ejemplo:

Acción	Fuerza sobre el libro debido a la mesa	*Reacción*	Fuerza sobre la mesa debida al libro
Acción	Fuerza sobre la Luna debida a la Tierra	*Reacción*	Fuerza sobre la Tierra debida a la Luna
Acción	Fuerza sobre un electrón debida al núcleo	*Reacción*	Fuerza sobre el núcleo debida al electrón
Acción	Fuerza sobre una pelota de béisbol debida al bat	*Reacción*	Fuerza sobre el bat debida a la pelota de béis.

Si su objetivo es estudiar la dinámica de un cuerpo (el libro o una pelota de béisbol), sólo deberá considerar un miembro del par acción-reacción. Considerará el otro sólo si también estuviera estudiando la dinámica del segundo cuerpo (la mesa o el bat).

Los siguientes ejemplos ilustran las aplicaciones de la tercera ley.

1. *Un satélite en órbita.* La figura 3-10 muestra un satélite que gira alrededor de la Tierra. La única fuerza que opera

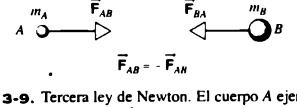


FIGURA 3-9. Tercera ley de Newton. El cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ sobre el cuerpo B. Éste deberá entonces ejercer una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ sobre el cuerpo A, por tanto, $\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}$.

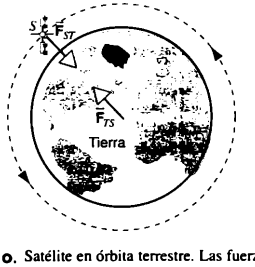


FIGURA 3-10. Satélite en órbita terrestre. Las fuerzas que se muestran son un par de acción-reacción. Nótese que operan sobre cuerpos diferentes.

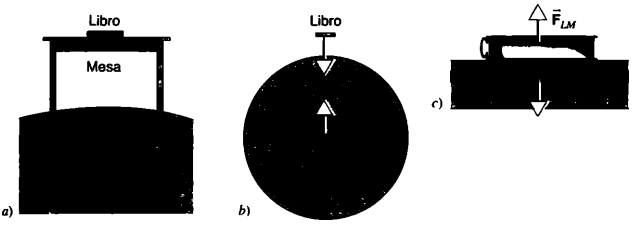


FIGURA 3-11. *a)* Un libro descansa en una mesa, la cual a su vez descansa en la Tierra. *b)* El libro y la Tierra ejercen una fuerza gravitacional recíproca, formando un par de acción-reacción. *c)* El libro y la mesa ejercen fuerza de contacto de acción-reacción entre sí.

en él es $\vec{F}_{ST}$, es decir, la fuerza ejercida *sobre* el satélite *por* la atracción gravitacional de la Tierra. ¿Dónde se encuentra la fuerza correspondiente de reacción? Es $\vec{F}_{TS}$, es decir, la fuerza que actúa sobre la Tierra debido a la atracción gravitacional del satélite.

Quizás el lector piense que un diminuto satélite no puede tener una gran atracción sobre la Tierra, pero así es exactamente como lo exige la tercera ley de Newton ($\vec{F}_{TS} = -\vec{F}_{ST}$). La fuerza $\vec{F}_{TS}$ hace que la Tierra acelere, pero por su gran masa, la aceleración es tan pequeña que no puede percibirse fácilmente.

2. *Un libro en reposo en una mesa.* La figura 3-11*a* muestra un libro colocado en una mesa. La Tierra lo atrae hacia abajo con una fuerza $\vec{F}_{LT}$. El libro no acelera porque el efecto de esta fuerza es equilibrado por una fuerza igual y contraria de contacto $\vec{F}_{LM}$ que la mesa ejerce sobre él.

Aun cuando $\vec{F}_{LT}$ y $\vec{F}_{LM}$ tienen la misma magnitud y dirección opuesta, *no* forman un par de acción-reacción. ¿Por qué? *Porque operan sobre el mismo cuerpo, el libro.* Las dos fuerzas suman cero, y ello explica el hecho de que el libro no acelere.

Ambas fuerzas han de tener una fuerza correspondiente de reacción en alguna parte. ¿Dónde están? La reacción ante $\vec{F}_{LT}$ es $\vec{F}_{LM}$, la fuerza (gravitacional) con que el libro atrae a la Tierra. Este par de acción-reacción lo mostramos en la figura 3-11*b*.

La figura 3-11*c* tiene la fuerza de reacción frente a $\vec{F}_{LM}$. Es $\vec{F}_{ML}$, es decir, la fuerza de contacto que se encuentra en la mesa y se debe al libro. Las parejas de acción-reacción referentes al libro son las siguientes:

Primer par: $\vec{F}_{LT} = -\vec{F}_{TL}$ (libro y Tierra)

y

Segundo par: $\vec{F}_{LM} = -\vec{F}_{ML}$ (libro y mesa)

3. *Empujando una fila de cajas.* La figura 3-12 muestra a un trabajador *W* que empuja dos cajas, ambas colocadas en un carro con ruedas que pueden rodar con una fricción despreciable. El trabajador ejerce una fuerza $\vec{F}_{1W}$ sobre la caja 1, la cual a su vez lo empuja hacia atrás con una fuerza $\vec{F}_{W1}$. La caja 1 empuja a la 2 con una fuerza $\vec{F}_{21}$, y a su vez la caja 2 empuja a la 1 con una fuerza $\vec{F}_{12}$. (Nótese que el trabajador no ejerce una fuerza directa sobre la caja 2.) Si quiere avanzar, el trabajador deberá ejercer una fuerza $\vec{F}_{SW}$ contra el suelo, y la fuerza de reacción del suelo sobre él, $\vec{F}_{WS}$, lo empuja hacia adelante. En la figura hay tres parejas de acción-reacción:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{(cajas 1 y 2)},$$

$$\vec{F}_{1W} = -\vec{F}_{W1} \quad \text{(trabajador y caja 1)},$$

$$\vec{F}_{WS} = -\vec{F}_{SW} \quad \text{(trabajador y suelo)}.$$

Nótese que en este ejemplo el trabajador es el agente activo que causa el movimiento, pero esto lo hace posible la fuerza de reacción que el suelo ejerce sobre él. Si no hubiera fricción entre sus zapatos y el suelo, el trabajador no movería el sistema hacia adelante.

4. *Bloque suspendido de un resorte.* En la figura 3-13*a* se ve un bloque que en estado de reposo cuelga de un resorte, el cual está sujeto en el otro extremo al techo. Las fuerzas sobre el bloque que se muestran por separado en la figura 3-13*b*, son su peso $\vec{F}_{BT}$ (la fuerza gravitacional que la Tierra produce en el bloque) y la fuerza $\vec{F}_{BR}$ ejercida por el resorte. El bloque se halla en reposo bajo la influencia de estas fuerzas, pero *no* son un par de acción-reacción, porque una vez más operan sobre el mismo cuerpo. La fuerza de reacción ante el peso $\vec{F}_{BT}$ es la fuerza gravitacional $\vec{F}_{TB}$ que el bloque ejerce sobre la Tierra y que no aparece en la figura.

La fuerza de reacción ante $\vec{F}_{BR}$ (la fuerza ejercida *sobre* el bloque *por* el resorte), es la fuerza $\vec{F}_{RB}$ ejercida *sobre* el resorte *por* el bloque. Para mostrarla ejemplificamos en la figura 3-13*c* las fuerzas que operan sobre el resorte. Entre ellas figuran las siguientes: la reacción a $\vec{F}_{BR}$, que mostramos con una fuerza $\vec{F}_{RB}$ ($= -\vec{F}_{BR}$) que actúa hacia abajo, el peso $\vec{F}_{RT}$ del resorte (generalmente despreciable) y la tracción $\vec{F}_{Rt}$ que el techo imprime hacia arriba. Si el resorte se halla en reposo, la fuerza neta deberá ser cero: $\vec{F}_{Rt} + \vec{F}_{RT} + \vec{F}_{RB} = 0$.

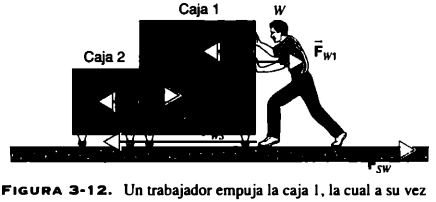


FIGURA 3-12. Un trabajador empuja la caja 1, la cual a su vez empuja la caja 2. Las cajas están sobre ruedas que se mueven libremente, por lo cual no se produce fricción entre ellas y el suelo.

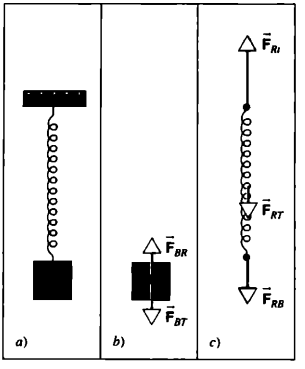


FIGURA 3-13. *a)* Un bloque cuelga en reposo sostenido por un resorte estirado. *b)* Fuerzas sobre el bloque. *c)* Fuerzas sobre el resorte.

La fuerza de reacción ante $\vec{F}_{Rt}$ actúa *sobre* el techo. La reacción no aparece, pues en este diagrama no mostramos el techo como un cuerpo independiente.

Verificación de la tercera ley de Newton

Para verificar la tercera ley, basta colocar dos sondas electrónicas de fuerza a dos automóviles (Fig. 3-5) que chocan en una pista sin fricción. Las dos sondas de fuerza están conectadas a una computadora que grafica la fuerza en el momento preciso en que los dos automóviles colisionan.

En la figura 3-14 se encuentran los resultados de tres choques entre los automóviles. En la figura 3-14*a*, el automóvil 1 se hallaba originalmente en reposo cuando el automóvil 2 (de igual masa) chocó contra él. Nótese que en cada instante la fuerza ejercida en el automóvil 1 por el 2 es igual y de dirección contraria a la que el automóvil 2 tiene en el 1.

En la figura 3-14*b* se ven los resultados cuando los mismos dos automóviles chocan frontalmente cuando están en movimiento; la figura 3-14*c* muestra los resultados de un choque frontal entre ellos cuando el automóvil 2 tiene el triple de masa que el 1.

En todos los casos, sin importar cuál automóvil esté en movimiento ni la masa relativa de ambos, las fuerzas son exactamente iguales y de dirección contraria, tal como lo establece la tercera ley de Newton.

3-7 PESO Y MASA

Consideremos un cuerpo de masa m que soltamos del estado de reposo cerca de la superficie terrestre. Como vimos en la sección 2-6, caerá hacia abajo con la aceleración de caída libre $\vec{g}$ (si prescindimos de otras fuerzas que pueden estar presentes, como la resistencia del aire). Aquí $\vec{g}$ es un vector cuya magnitud g es la aceleración de caída libre, y que sigue una dirección vertical hacia abajo (en dirección del centro de la Tierra). Suponiendo que la superficie sea un marco inercial que permita aplicar la segunda ley de Newton, la fuerza neta del objeto debe ser $m\vec{a}$ o $m\vec{g}$ en nuestro caso, puesto que $\vec{a} = \vec{g}$. Esta fuerza se debe a la atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre el cuerpo.

Si sostenemos el cuerpo en la mano en vez de soltarlo, su aceleración será cero y, por tanto, la fuerza vertical neta también lo será (conforme a la segunda ley de Newton). No hemos "desactivado" la atracción gravitacional; esta fuerza sigue actuando sobre el cuerpo y podemos seguirla expresando como $m\vec{g}$. Por tanto, la mano debe ejercer una fuerza ascendente igual a la magnitud de la fuerza descendente $m\vec{g}$, de modo que la fuerza neta sea cero. (Estas dos fuerzas *no* son un par de acción-reacción, porque no operan sobre el mismo cuerpo.) Sentimos la necesidad de ejercer la fuerza ascendente mediante la tensión de los músculos; así podemos "sentir" la atracción gravitacional de la Tierra en el cuerpo.

La fuerza descendente de la gravedad terrestre que actúa sobre el cuerpo se llama *peso*. Esa fuerza es la misma sin importar si el cuerpo se halla en reposo o si cae; tiene una magnitud mg y una dirección hacia el centro de la Tierra. En función de la magnitud, el peso es

$$W = mg. \tag{3-7}$$

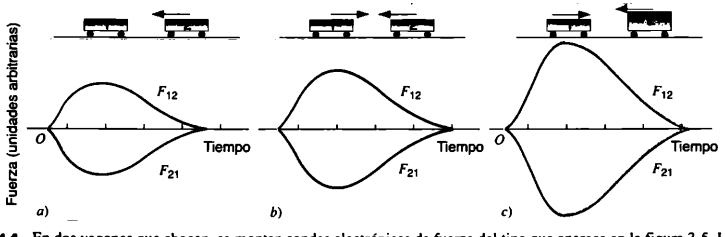


FIGURA 3-14. En dos vagones que chocan, se montan sondas electrónicas de fuerza del tipo que aparece en la figura 3-5. Las sondas miden al mismo tiempo la fuerza que los vagones ejercen entre sí. Las gráficas muestran las fuerzas que se ejercen sobre los dos vagones en función del tiempo durante las colisiones. *a)* Al inicio el vagón 2 está en movimiento y choca con el vagón 1, el cual se encuentra en reposo. Los dos vagones poseen la misma masa. *b)* Colisión frontal entre dos vagones de igual masa. *c)* Colisión frontal entre dos vagones, de los cuales el 2 tiene el triple de masa que el 1.

El peso se mide en unidades de fuerza, como los newtons o las libras.

Podemos medir el peso directamente, si colocamos el cuerpo en una báscula de plataforma (por ejemplo, una báscula de baño) con una pantalla, la cual indica la magnitud de la fuerza que la plataforma ejerce sobre el cuerpo; si éste se halla en reposo, la fuerza vertical neta será cero y, por tanto, la fuerza ascendente debida a la plataforma deberá ser igual a la fuerza descendente producida por la Tierra (el peso). También podemos medir esta fuerza, usando una báscula de resorte, como la que se encuentra en la sección de frutas y verduras de un supermercado. Una vez más la fuerza neta ha de ser cero, y el resorte ejerce una fuerza ascendente (que puede leerse en la báscula) igual a la magnitud de la fuerza descendente mg.

Cuando se traza un diagrama de cuerpo libre cerca de la superficie terrestre, conviene incluir una fuerza $m\vec{g}$ dirigida hacia el centro de la Tierra. El diagrama representa el peso, es decir, la fuerza gravitacional sobre el cuerpo debida a la Tierra. La fuerza de reacción de la tercera ley ante el peso, es la fuerza gravitacional sobre la Tierra debida al cuerpo; dicha fuerza aparecerá sólo en un diagrama de cuerpo libre de la Tierra (como en las figuras 3-10 o 3-11*b*).

En esta exposición hemos supuesto que la superficie terrestre es un marco inercial. Esto es aproximadamente cierto; debido a la rotación de la Tierra, su superficie no es un marco inercial, pero el error resultante de esta suposición es muy pequeño: cerca de 0.3% en el Ecuador, donde el efecto alcanza su nivel máximo. Es decir, el peso indicado en una báscula en el Ecuador es 0.3% más pequeño que la fuerza de gravedad sobre el cuerpo. En los polos, la rotación no influye en la lectura de la báscula ni en la aceleración en caída libre. Si prescindimos de este efecto, podemos pensar que las lecturas de la báscula en la superficie terrestre son una medida bastante precisa del peso de un objeto.

La diferencia entre peso y masa

Como se observa en la ecuación 3-7, el peso depende de la masa: a una masa más grande corresponde un peso mayor. Un segundo cuerpo con el doble de masa que el primero tendrá también el doble de peso en el mismo sitio. Pero peso y masa son magnitudes muy distintas. En la definición de masa dada en la sección 3-4 y en nuestros métodos operativos para medirla, no se hace referencia a la fuerza gravitacional de atracción de la Tierra. Podríamos aplicar el mismo procedimiento y obtener los mismos valores de la masa en comparación con el kilogramo patrón, si efectuáramos mediciones en la Luna (donde la aceleración en caída libre es apenas $\frac{1}{6}$ del valor que tiene en la Tierra), o incluso en el espacio vacío lejos de cualquier planeta o estrella (donde la aceleración en caída libre es cero). El peso del cuerpo sería diferente en esos lugares, pero la masa sería igual; es decir, debemos aplicar la misma fuerza en ellos para producir una aceleración determinada.

La masa de un cuerpo tiene el mismo valor en cualquier sitio, pero su peso variará en la superficie de la Tierra donde la aceleración en caída libre dependa del sitio. En un lugar de la superficie terrestre donde $g = 9.78\ \mathrm{m/s^2}$ (cerca del Ecuador, por ejemplo), un cuerpo con masa de 1.00 kg tiene un peso de 9.78 N, mientras que cerca de los polos donde $g = 9.83\ \mathrm{m/s^2}$ (porque los polos están más cerca del centro de la Tierra que el Ecuador) el mismo cuerpo pesaría 9.83 N. Para registrar varios pesos, unas básculas idénticas de resorte situadas en ambos sitios no se estirarían lo mismo. A diferencia de la masa, que es una propiedad *intrínseca* de los cuerpos, el peso depende de la ubicación respecto al centro de la Tierra. (En la sección 14-4 se discuten las variaciones de g en nuestro planeta.)

La ecuación 3-7 muestra que, para determinado valor de g, la masa y el peso son proporcionales entre sí. Algunas veces vemos una ecuación donde las unidades de masa se hacen iguales a las de peso (por ejemplo, 1 kg = 2.2 lb). Esta ecuación viola las reglas de la uniformidad dimensional que se explicaron en la sección 1-7. Aquí el signo igual significa "es equivalente a", y la ecuación debería significar que, en un lugar donde g tiene cierto valor, un objeto con masa de 1 kg es equivalente al peso de 2.2 lb. En la superficie de la Luna, la ecuación se leería 1 kg = 0.37 lb; en cambio, en la superficie de Júpiter se leería 1 kg = 5.1 lb. Una hamburguesa de "cuarto de libra" en un restaurante de comida rápida de Júpiter contendría cerca de 14 veces más carne que la misma ración en la Luna; en cambio, una hamburguesa de 0.1 kg (cerca de $\frac{1}{4}$ lb en la Tierra) contendría exactamente la misma cantidad de carne en cualquier otra parte. Cuando colonicemos planetas, deberemos cerciorarnos de ordenar nuestros suministros por masa, ¡no por peso!

Ingravidez

Las fotografías de los astronautas en vehículos que giran en el espacio (como se observa en la figura 3-15), los muestran flotando libremente en un estado conocido como "ingravidez". Debemos tener mucho cuidado al analizar el movimiento de los astronautas, porque en su vehículo de movimiento rápido ni siquiera se aproximan a un marco inercial. Un objeto soltado del estado de reposo permanece en el mismo sitio, de acuerdo con el marco no inercial de los astronautas. Por tanto, la aceleración en caída libre parece ser cero en ese marco.

FIGURA 3-15. La astronauta Dra. Mae C. Jemison en caída libre dentro de la nave espacial *Endeavor* en órbita da la impresión de flotar, como si no tuviera peso.

FIGURA 3-16. Actores en ingravidez simulada durante la filmación de la película *Apolo 13*. Están en caída libre en un avión KC-135 que vuela en una trayectoria parabólica. Este avión, apodado "Vomit Comet", lo emplea la NASA para investigar la microgravedad.

Sin embargo, un objeto soltado en una nave que no gire en órbita y que se encuentre en la misma altitud (cerca de 400 km en el caso de una nave espacial), caerá hacia el centro de la Tierra con una aceleración en caída libre de cerca de 8.7 m/s^2.

La báscula indicaría cero si quisiéramos colocar un cuerpo en una báscula de plataforma o sujetarlo a una báscula de resorte en el marco de referencia no inercial del astronauta. En este marco no podemos usar la lectura para determinar el peso del cuerpo. No obstante, el cuerpo *no* "carece" de masa ni de "gravedad". Con $g = 8.7\ m/s^2$ en esa altitud, un cuerpo de 1 kg pesaría 8.7 N, cerca de 11% menos que en la superficie terrestre.

La percepción o sensación del peso incluye la fuerza con que el piso nos impulsa hacia arriba. Cuando flotamos en el agua, estamos menos conscientes de nuestro *peso*, pero estamos plenamente conscientes de nuestra *masa* como cuando aceleramos nadando por ella. Si estamos de pie en un elevador que acelera hacia arriba, el piso ejerce una fuerza sobre nosotros que es mayor que la atracción de la gravedad y por eso sentimos como si aumentara nuestro peso; cuando el elevador acelera hacia abajo, sentimos como si pesáramos menos. Si estamos parados en báscula de plataforma en un elevador que acelera, las lecturas de la báscula confirmarán esas percepciones (véase el problema resuelto 3-7). Pero la magnitud del peso sigue siendo mg, independientemente de la aceleración.

La verdadera ingravidez puede conseguirse sólo en lo profundo del espacio, lejos de cualquier estrella o planeta. Los astronautas flotarían libremente en una nave espacial que fuera a la deriva con los motores apagados. Si los motores se activan, la aceleración resultante haría que la nave fuera un marco no inercial; en el marco de referencia de los astronautas, el piso de la nave que acelera ejercería una fuerza hacia arriba que les parecería similar al peso. En forma parecida, si la nave gira, la pared externa sería el piso que da la sensación de peso al impulsar hacia el eje de rotación todo lo que esté en contacto con el piso. Este efecto a menudo recibe el nombre de "gravedad artificial", y se utilizará en la Estación Espacial Internacional para crear la sensación de peso en los especímenes biológicos.

Un cuerpo en caída libre cerca de la superficie terrestre no tiene piso que lo impulse y, por lo mismo, se sentirá ingrávido. Si estuviera usted dentro de una cámara también en caída libre (como una caseta de elevador cuyo cable se rompe), el piso no lo impulsará y no tendrá la sensación de peso. Como veremos en el siguiente capítulo, un proyectil en caída libre cerca de la superficie terrestre sigue una trayectoria parabólica; si un avión vuela sobre una trayectoria de este tipo, los pasajeros serán objetos en caída libre y se sentirán sin peso porque no están en contacto con el piso del avión. Es un efecto que se usa para entrenar a los astronautas a fin de que dominen la caída libre semejante a la de la órbita de la Tierra, y también se ha usado en películas para simular los efectos de órbita (Fig. 3-16). Aunque un cuerpo en caída libre cerca de la superficie terrestre carece de la sensación de peso que normalmente procede del impulso hacia arriba de un piso, el peso mantiene el valor mg, el cual indica la fuerza de la atracción gravitacional sobre el cuerpo.

3-8 APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON EN UNA DIMENSIÓN

Aunque todos los problemas que se resuelven con las leyes de Newton exigen un procedimiento en particular, el método general que se expuso en la sección 3-5 constituye el fundamento de

su análisis. La mejor manera de aprender las aplicaciones de las reglas consiste en estudiar los ejemplos. A menudo hay en ellos dos o más cuerpos a los que es preciso aplicarlas por separado.

En estos problemas hacemos algunos suposiciones que simplifican el análisis a costa de un poco de la realidad física. Los cuerpos se tratan como partículas, de manera que podemos considerar que las fuerzas actúan en un solo punto. Las cuerdas no tienen masa (no se requiere que una fuerza las acelere) y son inextensibles (no se estiran y, por lo mismo, los cuerpos conectados por cuerdas tirantes tienen la misma rapidez y aceleración). A pesar de tales simplificaciones, los ejemplos dan una buena idea de las técnicas básicas del análisis dinámico. Más adelante se incluyen en el libro otras técnicas que nos permiten ser más realistas en nuestro análisis. Por ahora, prescindiremos de muchos efectos de importancia innegable, a fin de concentrarnos en los métodos fundamentales con que se resuelven los problemas.

PROBLEMA RESUELTO 3-4. Un trabajador W empuja una caja de empaque con masa $m_1 = 4.2$ kg. Delante de la caja se encuentra otra de masa $m_2 = 1.4$ kg (Fig. 3-17*a*). Las dos cajas se deslizan por el piso sin producir fricción. El trabajador empuja la caja 1 con una fuerza $P_{1W} = 3.0$ N. Calcule las aceleraciones de las cajas y la fuerza ejercida por la caja 1 sobre la caja 2.

Solución Suponemos que el eje positivo x sigue la dirección del movimiento de la caja, por lo cual los componentes de la fuerza y de la aceleración a la derecha de la figura 3-17 son positivos. El trabajador empuja solo la caja 1. La fuerza $\vec{F}_{21}$ que empuja la caja 2 es ejercida sobre ella por la caja 1. De acuerdo con la tercera ley de Newton, entonces la caja 2 ejerce una fuerza $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ sobre la caja 1. Con F_{12} y F_{21}, que representan la magnitud de las fuerzas, el componente x de $\vec{F}_{12}$ es $-F_{12}$, y el de $\vec{F}_{21}$ es F_{21}. Las figuras 3-17*b* y 3-17*c*, muestran los diagramas de cuerpo libre de las dos cajas. La fuerza neta sobre m_1 es $\Sigma F_x = P_{1W} - F_{12}$, y para la caja 1 según la segunda ley de Newton ($\Sigma F_x = ma_x$) nos da

(caja 1) $$P_{1W} - F_{12} = m_1 a_1,$$

donde a_1 representa el componente x de la aceleración de la caja 1. La fuerza neta sobre la caja 2 es $\Sigma F_x = F_{21}$, de modo que la segunda ley de Newton da

(caja 2) $$F_{21} = m_2 a_2.$$

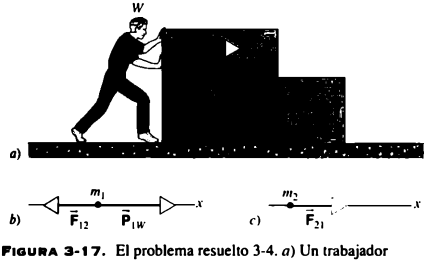


FIGURA 3-17. El problema resuelto 3-4. *a*) Un trabajador empuja una caja, la cual a su vez empuja otra. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la caja 1. *c*) Diagrama de cuerpo libre de la caja 2.

Si las dos cajas permanecen en contacto, $a_1 = a_2$. A esta aceleración común la llamamos a. Al sumar estas ecuaciones obtenemos

$$P_{1W} - F_{12} + F_{21} = m_1 a + m_2 a$$

o, aplicando la tercera ley de Newton a las magnitudes de las fuerzas de contacto ($F_{12} = F_{21}$) y resolviendo para a,

$$a = \frac{P_{1W}}{m_1 + m_2} = \frac{3.0\ \text{N}}{4.2\ \text{kg} + 1.4\ \text{kg}} = 0.54\ \text{m/s}^2.$$

No debe sorprendernos demasiado que la aceleración dependa de la masa total $m_1 + m_2$ del sistema de las dos cajas, porque la fuerza P_{1W} ejercida por el trabajador es la causa definitiva de la aceleración del sistema entero. Para determinar la fuerza de contacto que la caja 1 ejerce sobre la caja 2, tenemos

$$F_{21} = m_2 a = (1.4\ \text{kg})(0.54\ \text{m/s}^2) = 0.76\ \text{N}.$$

Nótese que la fuerza ejercida por la caja 2 sobre la caja 1 (igual a 0.76 N) es más pequeña que la que ejerce el trabajador en la caja 1 (3.0 N). Eso es razonable puesto que F_{21} sirve sólo para acelerar la caja 2, mientras que P_{1W} actúa para comunicarle la misma aceleración a las dos cajas.

PROBLEMA RESUELTO 3-5. Una carreta de masa $m_C = 360$ kg rueda sobre ruedas sin fricción. En ella se encuentra una caja de masa $m_B = 150$ kg (Fig. 3-18*a*). La caja puede resbalar en la carreta, pero ambas ejercen una fuerza (por la fricción) sobre la otra durante el deslizamiento. Cuando un trabajador jala la caja con una fuerza $\vec{F}_{BW}$, la caja y la carreta se mueven hacia adelante, pero la caja se mueve más rápido porque la fuerza de fricción no es lo bastante fuerte para impedir que la caja se resbale hacia adelante en la carreta. Un observador mide la magnitud de las aceleraciones y se da cuenta que son 1.00 m/s^2 para la caja y 0.167 m/s^2 para la carreta. Calcule *a*) la fuerza de fricción entre la caja y la carreta, y *b*) la fuerza que el trabajador ejerce sobre la caja.

Solución *a*) Escogemos el eje x de modo que su dirección positiva sea a la derecha de la figura 3-18. Los componentes de la fuerza y de la aceleración en esa dirección son positivos. El trabajador ejerce una fuerza $\vec{F}_{BW}$ sobre la caja. Se acostumbra usar un símbolo en minúsculas $\vec{f}$ para representar las fuerzas de fricción, de modo que la fuerza en la caja debida a la carreta es $\vec{f}_{BC}$, la cual señala a la izquierda (contra el movimiento de la caja) y tiene el componente x, $-f_{BC}$. Conforme a la tercera ley de Newton, hay una fuerza de fricción igual y opuesta $\vec{f}_{CB}$ en la carreta ejercida por la caja. Las figuras 3-18*b* y 3-18*c* muestran los diagramas de cuerpo libre de la carreta y la caja.

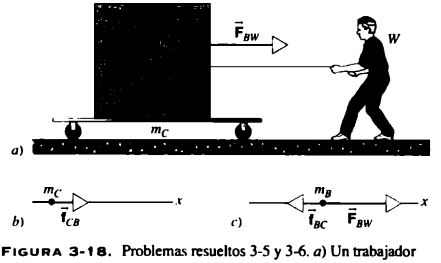


FIGURA 3-18. Problemas resueltos 3-5 y 3-6. *a*) Un trabajador tira de una caja que se desliza sobre una carreta que rueda. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la carreta. *c*) Diagrama de cuerpo libre de la caja.

La fuerza neta en la carreta es $\Sigma F_x = f_{CB}$, y al aplicarle la segunda ley de Newton ($\Sigma F_x = ma_x$), obtenemos

(carreta) $$f_{CB} = m_C a_C = (360\text{ kg})(0.167\text{ m/s}^2) = 60\text{ N}.$$

b) En forma análoga, la fuerza neta sobre la caja es $\Sigma F_x = F_{BW} - f_{BC}$ y, en consecuencia, la segunda ley de Newton nos da

(caja) $$F_{BW} - f_{BC} = m_B a_B$$

y resolviendo para F_{BW} obtenemos

$$F_{BW} = f_{BC} + m_B a_B = 60\text{ N} + (150\text{ kg})(1.00\text{ m/s}^2) = 210\text{ N},$$

donde hemos empleado $f_{BC} = f_{CB}$ para la magnitud de las fuerzas de fricción que forman un par de acción-reacción.

La fricción con la caja empuja la carreta hacia adelante. Aun cuando en este caso la fricción produce el movimiento de la carreta, la que existe entre dos objetos siempre se opone a su movimiento *relativo*. Si no interviniera la fricción en este problema, la carreta no se movería en absoluto y habría más movimiento relativo entre ella y la caja. Si la fuerza de fricción fuera lo bastante grande (véase el siguiente problema resuelto), la caja y la carreta se moverían juntas *sin* movimiento relativo entre ellas.

PROBLEMA RESUELTO 3-6. Supóngase en el problema resuelto anterior que la fuerza de fricción fuera más grande, de manera que la caja no se deslizara en la carreta (las dos se mueven al mismo tiempo como una unidad). Si la fuerza aplicada por el trabajador permanece inalterada con 210 N, ¿cuál será la fuerza de fricción de la caja sobre la carreta?

Solución La carreta y la caja se mueven juntas y, por tanto, tienen la misma aceleración a. La segunda ley de Newton da

(carreta) $$\Sigma F_x = f_{CB} = m_C a$$

(caja) $$\Sigma F_x = F_{BW} - f_{BC} = m_B a.$$

Como queremos resolver para la incógnita $f_{CB} = f_{BC}$, eliminamos a en las dos ecuaciones y obtenemos

$$f_{CB} = \frac{m_C F_{BW}}{m_C + m_B} = \frac{(360\text{ kg})(210\text{ N})}{360\text{ kg} + 150\text{ kg}} = 150\text{ N}.$$

PROBLEMA RESUELTO 3-7. Un pasajero P de masa $m = 72.2$ kg viaja en un elevador mientras permanece de pie sobre una báscula de plataforma (Fig. 3-19*a*), que es esencialmente una báscula calibrada de resorte que indica la fuerza ascendente F_{PR} ejercida por ella sobre el pasajero. (La situación sería exactamente igual si el pasajero estuviera suspendido de una báscula de resorte.) ¿Qué indica la escala cuando la cabina del elevador *a*) desciende con velocidad constante, y *b*) asciende con una aceleración de 3.20 m/s²?

Solución *a*) Primero formule una regla general que sea válida para cualquier aceleración a. Decidimos que el marco de referencia inercial sea el del edificio donde el elevador está instalado, porque un elevador que acelere no es un marco de referencia inercial. Tanto g

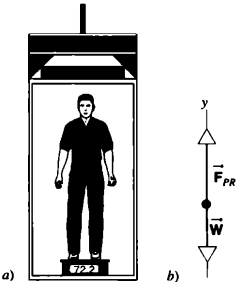


FIGURA 3-19. Problema resuelto 3-7. *a*) Un pasajero viaja en la cabina de un elevador mientras está de pie sobre una báscula. Como la mayoría de las básculas, ésta indica unidades de masa (kilogramos) y no en las unidades correspondientes de fuerza (newtons). *b*) Diagrama de cuerpo libre del pasajero.

como a son medidas por un observador en este marco. Elegimos el sistema coordenado de manera que el eje y sea vertical y positivo hacia arriba. La figura 3-19*b* muestra el diagrama de cuerpo libre del pasajero: la fuerza ascendente $\vec{F}_{PR}$ ejercida por la báscula y el peso descendente $\vec{W}$ de magnitud $W = mg$ (la fuerza de la gravedad sobre el pasajero).

Entonces la fuerza neta sobre el pasajero es $\Sigma F_y = F_{PR} - W$, y la segunda ley de Newton ($\Sigma F_y = ma_y$) nos da

$$F_{PR} - W = ma_y$$

o bien

$$F_{PR} = W + ma_y = mg + ma_y.$$

Cuando $a_y = 0$ (correspondiente al movimiento con velocidad constante), tenemos

$$F_{PR} = mg = (72.2\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 708\text{ N} (= 159\text{ lb}).$$

La lectura de la báscula no depende de la velocidad del elevador; indica lo mismo cuando el elevador se mueve con una velocidad constante y cuando se halla en reposo.

b) Cuando $a_y = +3.20$ m/s², tenemos

$$F_{PR} = m(g + a_y) = (72.2\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2 + 3.20\text{ m/s}^2)$$
$$= 939\text{ N} (= 211\text{ lb}).$$

La lectura de la báscula aumenta cuando el elevador acelera hacia arriba y disminuye cuando lo hace hacia abajo. ¿Qué indica la lectura de la báscula cuando el elevador se mueve hacia arriba pero acelera hacia abajo (es decir, cuando disminuye su velocidad)? ¿Qué lectura presenta cuando el cable se rompe y el elevador está en caída libre ($a_y = -g$)?

OPCIÓN MÚLTIPLE

3-1 Mecánica clásica

3-2 Primera ley de Newton

1. Una nave interestelar, lejos de la influencia de estrellas y planetas, se desplaza con alta velocidad bajo la influencia de cohetes de fusión cuando los motores se descomponen y se detienen. La nave
   A) se detendrá inmediatamente, arrojando a sus ocupantes a la parte delantera.
   B) comenzará a disminuir su velocidad, llegando finalmente al reposo en la fría soledad del espacio.
   C) seguirá moviéndose a velocidad constante durante algún tiempo, pero luego comenzará a reducirla.
   D) seguirá moviéndose indefinidamente con la misma rapidez.
2. Un niño pequeño juega con un balón en una superficie uniforme. Le da un empujón para hacerla rodar, y luego el balón rueda una corta distancia antes de detenerse. El balón disminuye su velocidad y se detiene porque
   A) el niño deja de empujarlo.
   B) la rapidez es proporcional a la fuerza.
   C) debe haber alguna fuerza sobre ella que se oponga a la dirección del movimiento.
   D) la fuerza neta sobre ella era cero, por lo cual quiso permanecer estacionaria.

3-3 Fuerza

3. Un estudiante sujeta una regla a un bloque de madera situado en posición horizontal, como se advierte en la figura 3-20*a*. La superficie ejerce gran fuerza de fricción sobre el bloque. Se clava un anillo en la marca de 0 in. El estudiante estira la banda de goma en la marca de 5 in; luego la estira más y, cuando llega a la marca de 8 in, el bloque de madera empieza moverse (Fig. 3-20*b*). Antes que el bloque comience a moverse, la fuerza neta en él cuando estiramos la banda de goma 7 in es
   A) mayor que B) igual que
   C) menor que D) sin relación con
   la fuerza neta sobre el bloque cuando la banda se estiró 6 in.
4. En la pregunta 3 de opción múltiple el estudiante tira de la banda de goma hasta que se encuentra en la marca de 9 in. El bloque de madera se desliza cada vez más rápidamente con aceleración constante; y al desplazarse el bloque, el estudiante mueve la mano de modo que siempre estira hasta la marca de 9 in. Cuando se estira la banda 9 in, la fuerza neta sobre el bloque es
   A) mayor que B) igual que
   C) menos que D) sin relación con
   la fuerza neta en el bloque cuando estiramos 7 in la banda de goma.

3-4 Masa

5. Dos objetos con masa M y $m(M > m)$ se encuentran en una superficie sin fricción. La fuerza F acelerará el objeto más pequeño con una aceleración a. Si se aplica la misma fuerza a un objeto más grande,
   A) lo moverá con mayor aceleración.
   B) lo moverá con la misma aceleración.
   C) lo moverá pero con aceleración menor.
   D) lo moverá sólo si la fuerza F es mayor que algún valor mínimo.

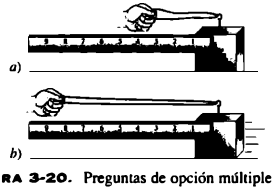


FIGURA 3-20. Preguntas de opción múltiple 3 y 4.

3-5 Segunda ley de Newton

6. Un objeto se mueve hacia el Norte. De esta escueta información podemos deducir
   A) que sobre él actúa una sola fuerza que se dirige al Norte.
   B) que sobre él opera una fuerza neta que se dirige al Norte.
   C) que sobre él actúan varias fuerzas, pero que la más grande debe dirigirse al Norte.
   D) nada sobre las fuerzas que operan sobre el objeto.
7. Un objeto se mueve al Norte con rapidez creciente. De esta escueta información deducimos
   A) que sobre el objeto opera una sola fuerza que se dirige al Norte.
   B) que sobre el objeto opera una fuerza neta que se dirige al Norte.
   C) que varias fuerzas operan sobre el objeto, pero que la más grande debe dirigirse al Norte.
   D) nada sobre las fuerzas que operan sobre el objeto.
8. ¿Cuál de los siguientes objetos no experimenta una fuerza neta dirigida al Norte?
   A) Un objeto que se desplaza hacia el Norte con una rapidez decreciente.
   B) Un objeto que se desplaza al Norte con una rapidez creciente.
   C) Un objeto que llega instantáneamente al reposo y luego empieza a moverse hacia el Norte.
   D) Un objeto que se desplaza al Norte con rapidez constante.

3-6 Tercera ley de Newton

9. Una roca descansa en la superficie terrestre. La magnitud de la fuerza que actúa sobre ésta debida a la roca es F_{SR}, y la de la fuerza sobre la roca debida a la superficie es F_{RS}. Si comparamos estas fuerzas, obtenemos
   A) $F_{SR} < F_{RS}$. B) $F_{SR} = F_{RS}$. C) $F_{SR} > F_{RS}$.
   D) Que no contamos con suficiente información para comparar las dos fuerzas.
10. Una roca se halla en una superficie inclinada. Originalmente estaba en reposo, pero comienza a deslizarse por la pendiente. La magnitud de la fuerza en la superficie debida a la roca es F_{SR}, y la magnitud de la fuerza sobre la roca debida a la superficie es F_{RS}. Si las comparamos, obtendremos
    A) $F_{SR} < F_{RS}$ siempre.
    B) $F_{SR} = F_{RS}$ cuando la roca está en reposo, pero entonces $F_{SR} > F_{RS}$.
    C) $F_{SR} = F_{RS}$ siempre.
    D) $F_{SR} > F_{RS}$ siempre.
11. Un piano rueda hacia abajo por una pendiente sin fricción a una velocidad creciente. El afinador lo ve, corre y lo empuja, desacelerándolo hasta una rapidez constante. La magnitud de la fuerza sobre el afinador es F_{AP}, y la magnitud de la fuerza sobre el piano es F_{PA}. Si comparamos estas fuerzas, encontramos
    A) $F_{PA} > F_{AP}$ siempre.

B) $F_{PA} > F_{AP}$ mientras el piano disminuye pero $F_{PA} = F_{AP}$ cuando el piano se desplaza a velocidad constante.
C) $F_{PA} = F_{AP}$ siempre.
D) $F_{PA} = F_{AP}$ mientras el piano disminuye pero $F_{PA} < F_{AP}$ cuando el piano se desplaza a velocidad constante.

3-7 Peso y masa

12. Una roca grande le *cae* a usted en el dedo gordo. ¿Cuál de los siguientes conceptos es más importante para determinar cuánto le duele?
A) La masa de la roca.
B) El peso de la roca.
C) El peso y la masa de la roca son importantes.
D) La masa o el peso, pues ambos están relacionados por la constante multiplicativa g.

13. Una roca grande *está* sobre su dedo gordo. ¿Cuál de los siguientes conceptos es más importante para determinar cuánto le duele?
A) La masa de la roca.
B) El peso de la roca.
C) El peso y la masa de la roca son importantes.
D) La masa o el peso, pues ambos están relacionados por la constante multiplicativa g.

3-8 Aplicaciones de las leyes de Newton en una dimensión

14. Un objeto puede moverse libremente en una mesa, salvo que haya una fuerza constante de fricción f que se oponga a su movimiento cuando se desplaza. Si una fuerza de 10.0 N tira de él, la aceleración será 2.0 m/s^2. Si una fuerza de 20.0 N lo hace, la aceleración será 6.0 m/s^2.

a) ¿Cuál es la fuerza de fricción f?

A) 1.0 N. B) 3.33 N. C) 5.0 N. D) 10.0 N.

b) ¿Cuál es la masa del objeto?

A) 0.40 kg. B) 2.5 kg. C) 3.33 kg. D) 5.0 kg.

15. Una paracaidista está en caída libre antes que se abra el paracaídas. La fuerza neta sobre ella posee una magnitud F y se dirige hacia abajo; esta fuerza es un poco menor que su peso W a causa de la fricción del aire. Después abre el paracaídas. Un instante después éste se infla, y la fuerza neta sobre ella
A) es mayor que F y se dirige hacia abajo.
B) es menor que F y se dirige hacia abajo.
C) es cero.
D) se dirige hacia arriba, pero podría ser mayor o menor que F.

16. *a*) Está usted sobre una báscula de resorte de baño. La báscula "indica" su masa. ¿Qué es lo que *mide* en realidad? *b*) Está usted sobre una báscula de resorte de baño dentro de un elevador que acelera hacia arriba a 2.0 m/s^2. La báscula "indica" su masa. ¿Qué es lo que *mide* la báscula?
A) Su masa.
B) Su peso.
C) La fuerza con que la báscula empuja hacia arriba sus pies.
D) La fuerza con que sus pies empujan la báscula hacia abajo.

PREGUNTAS

1. De los objetos listados en la tabla 3-1, ¿cuáles podrían considerarse una partícula para el movimiento descrito? Para los que se comportan como partícula, ¿puede usted describir un tipo de movimiento en que *no* puedan considerarse partículas?
2. ¿Por qué caemos hacia adelante cuando un autobús en movimiento desacelera para detenerse y caemos hacía atrás cuando acelera a partir del reposo? Los viajeros del tren subterráneo a menudo optan por ver el costado del vagón cuando el tren arranca o se detiene y ver el frente o la parte trasera cuando corre a velocidad constante. ¿Por qué?
3. ¿Por qué especificamos el uso de un resorte "ligero" para los experimentos descritos en la sección 3-3? ¿Cuál sería la diferencia si utilizáramos un resorte "pesado"?
4. Un bloque con una masa m está soportado por una cuerda C atada al techo, y una cuerda similar D, se halla atada al fondo del bloque (Fig. 3-21). Explique lo siguiente: si le da un jalón repentino a D se romperá, pero si tira de él lentamente se romperá C.
5. Critique la afirmación que se hace con frecuencia, la cual señala que la masa de un cuerpo es una medida de la "cantidad de materia" que contiene.
6. Si usamos la fuerza, la longitud y el tiempo como magnitudes fundamentales, ¿cuáles son las dimensiones de la masa?
7. ¿Cuántos slugs contiene un kilogramo?
8. Un automóvil en movimiento que se desplaza con rapidez constante frena de repente. Los ocupantes, todos con el cinturón de seguridad puesto, son lanzados hacia adelante. Sin embargo, en el momento en que se detiene todos son arrojados hacia atrás. ¿Por qué? ¿Es posible que un automóvil se detenga sin este "jalón"?
9. ¿Puede la primera ley de Newton considerarse simplemente un caso especial de la segunda ley con $\vec{a} = 0$? Si la respuesta es afirmativa, ¿se necesita en realidad esa ley? Explique su respuesta.
10. ¿Qué relación existe —si es que hay alguna— entre la fuerza que actúa sobre un objeto y la dirección en que se desplaza?
11. Suponga que se acelera un cuerpo sobre el cual actúan exactamente dos fuerzas. ¿Se deduce de esto que *a*) no puede moverse con rapidez constante; *b*) la velocidad nunca podrá ser cero; *c*) la suma de las dos fuerzas no puede ser cero; *d*) las dos fuerzas deben operar en la misma línea?
12. A un caballo se le grita para que tire de un carretón. Se niega a intentarlo, citando como defensa la tercera ley de Newton: la tracción del caballo sobre el carretón es igual a la tracción del carretón sobre el caballo. "Si nunca puedo ejercer una fuerza mayor sobre el carretón que la que él ejerce sobre mí, ¿cómo podré alguna vez ponerlo en movimiento?", pregunta el animal. ¿Qué contestaría usted?

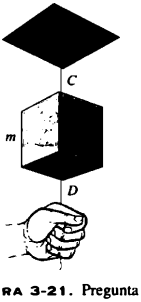


FIGURA 3-21. Pregunta 4.

13. Comente si los siguientes pares de fuerzas son ejemplos de acción-reacción: *a*) La Tierra atrae un ladrillo; el ladrillo atrae a la Tierra. *b*) Un avión de hélice empuja el aire hacia la cola; el aire empuja al avión hacia adelante. *c*) Un caballo tira de un carretón hacia adelante y lo mueve; el carretón tira del caballo hacia atrás. *d*) Un caballo tira hacia adelante un carretón sin moverlo; el carretón tira hacia atrás al caballo. *e*) Un caballo tira hacia adelante un carretón sin moverlo; la Tierra ejerce una fuerza igual y contraria sobre el carretón. *f*) La Tierra tira del carretón hacia abajo; el suelo lo empuja hacia arriba con una fuerza igual y contraria.
14. El siguiente enunciado es verdadero; explíquelo. Dos equipos tiran de una misma cuerda en sentido contrario; gana el que empuje más fuerte (horizontalmente) contra el suelo.
15. Dos estudiantes tratan de romper una cuerda. Primero tiran de ella uno en cada extremo y fracasan. Después atan un extremo a una pared y juntos tiran de la cuerda. ¿Es este procedimiento mejor que el primero? Explique su respuesta.
16. ¿Cuál es la masa del lector en slugs? ¿Y su peso en newtons?
17. Un ciudadano francés que llena un formulario, anota "78 kg" en el espacio marcado Poids (peso). Pero el peso es una fuerza y el kilogramo es una unidad de masa. ¿Qué tienen los franceses (entre otros) en mente cuando utilizan la unidad de masa para indicar su peso? ¿Por qué no lo anotan en newtons? ¿Cuántos newtons pesa esta persona? ¿Cuántas libras?
18. Comente los siguientes enunciados relativos a la masa y al peso tomados de algunos exámenes. *a*) La masa y el peso son las mismas magnitudes físicas expresadas en unidades diferentes. *b*) La masa es una propiedad de un objeto solo, mientras que el peso se debe a la interacción de dos objetos. *c*) El peso de un objeto es proporcional a su masa. *d*) La masa de un cuerpo depende de los cambios de su peso local.
19. Una fuerza horizontal actúa sobre un cuerpo que puede desplazarse. ¿Puede producir una aceleración si es menor que el peso del cuerpo?
20. ¿Por qué la aceleración de un cuerpo en caída libre no depende de su peso?
21. Describa algunas formas en que podría, aunque sea brevemente, experimentar ingravidez.
22. ¿En qué circunstancias su peso sería cero? ¿Se basa su respuesta en la elección de un sistema de referencia?
23. El "brazo mecánico" de una nave espacial puede manejar un satélite de 2,200 kg cuando se extiende a 12 m; vea la figura 3-22. Sin embargo, en el suelo este sistema manipulador remoto (SMR) no puede soportar su propio peso. En la "ingravidez" de una nave espacial en órbita, ¿por qué el sistema debe ser capaz de ejercer una fuerza cualquiera?
24. En noviembre de 1984, los astronautas Joe Allen y Dale Gardner rescataron un satélite de comunicaciones Westar 6 de una órbita fallida y lo pusieron en el compartimiento de carga de la nave *Discovery* (Fig. 3-22). Al describir la experiencia, Joe Allen señaló que el satélite "no es pesado, sino masivo". ¿Qué quiso decir?
25. En el manual del propietario de un automóvil se recomienda lo siguiente: el cinturón de seguridad debe colocarse de modo que "se ajuste cómodamente" y que la cabecera del asiento frontal debe ajustarse para que la nuca se apoye cómodamente. Esto debe hacerse de manera que "la parte superior de la cabecera esté al nivel de la parte superior de los oídos". ¿Cómo apoyan las leyes de Newton estas buenas recomendaciones?

FIGURA 3-22. Preguntas 23 y 24.

26. ¿Es posible deducir $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ de algún otro principio? ¿Es $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ una conclusión experimental?
27. Los observadores en dos marcos inerciales distintos medirán la misma aceleración de un objeto en movimiento. ¿Medirán la misma velocidad del objeto? ¿Medirán la misma fuerza en él?
28. Usted es un astronauta que se encuentra en el vestíbulo de una estación espacial y le quita la tapa a una larga jarra de estaño que contiene una sola aceituna. Describa varias formas —en las que aproveche la inercia de la aceituna o de la jarra— para extraerla.
29. En la figura 3-23, una aguja ha sido colocada en cada extremo de un palo de escoba; los extremos de las agujas descansan sobre los bordes de vasos llenos de vino. El experimentador asesta un golpe duro con un palo grueso al palo de escoba. El palo de escoba se rompe y cae al suelo, pero los vasos permanecen en su lugar, sin que se derrame el vino. Esta impresionante suerte de salón gozaba de gran popularidad a finales del siglo XIX. ¿Cuál es su fundamento físico? (Si el lector quiere realizarlo, le aconsejamos practicar antes con latas de refresco vacías. Pensándolo bien, podría incluso pedirle a su profesor que lo haga a manera de demostración de la lección.)

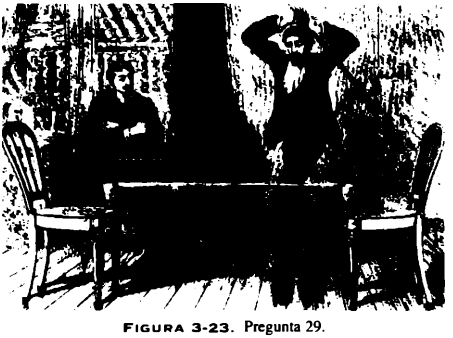


FIGURA 3-23. Pregunta 29.

30. Un solo cable soporta un elevador. No tiene contrapeso. El elevador recibe la gente en el nivel del suelo y la lleva al último piso. Otras personas entran y son llevadas a la planta baja. Du-

rante este viaje redondo, ¿cuándo la fuerza que el cable ejerce sobre el elevador es igual al peso de éste más el de los ocupantes? ¿Es mayor? ¿Es menor?

31. Se encuentra usted en la plataforma de vuelo de la nave espacial *Discovery*, y alguien le entrega dos bolas de madera idénticas. Pero una tiene un núcleo de plomo y la otra no. Describa varias formas de distinguirlas.
32. Se encuentra en la gran plataforma de una báscula de resorte y lee su peso. Después da un paso en ella y observa que la báscula indica un peso menor al que tenía al dar el peso y un peso mayor al que tenía al terminar el paso. Explique lo sucedido.
33. ¿Podría pesarse en una escala cuya lectura máxima es menos de lo que su peso? Si la respuesta es afirmativa, explique por qué.
34. Un peso cuelga de una báscula de resorte en el techo de un elevador. ¿En cuál de los siguientes casos la lectura en la báscula será la más alta: *a*) elevador en reposo; *b*) elevador subiendo con rapidez constante; *c*) elevador que desciende con rapidez decreciente; *d*) elevador que desciende con rapidez creciente? ¿En cuál caso la lectura será la más pequeña?
35. Una mujer está parada en una báscula de resorte dentro de un elevador. ¿En cuál de los siguientes casos registrará la escala la lectura mínima: *a*) elevador inmóvil; *b*) se rompe el cable del elevador, caída libre; *c*) elevador que acelera hacia arriba; *d*) elevador que acelera hacia abajo; *e*) elevador que se desplaza a velocidad constante? ¿En cuál de los casos anteriores se registrará la lectura más alta?
36. La figura 3-24 muestra el cometa Kohoutek tal como apareció en 1973. Como todos los cometas, gira alrededor del Sol bajo la influencia de la atracción gravitacional que ejerce sobre él. El núcleo del cometa es relativamente masivo en la posición denotada por *P*. La cola se debe a la acción del viento solar, que consta de partículas cargadas que fluyen hacia afuera del Sol. Por mera inspección, ¿qué puede decir de la dirección de la fuerza que opera sobre el núcleo del cometa? ¿Sobre la dirección en que se acelera al núcleo? ¿Y sobre la dirección en que se mueve el cometa?
37. En general (Fig. 3-24), los cometas tienen una cola de polvo, formada por partículas que la presión de la luz solar arroja lejos del Sol. ¿Por qué a menudo es curva la cola?

FIGURA 3-24. Preguntas 36 y 37.

38. ¿Puede imaginar algunos fenómenos físicos en que participe la Tierra y no pueda ser tratada como partícula?
39. Considere un salto desde un alto trampolín. Mientras espera armarse de valor para saltar, su aceleración es cero y "siente" la fuerza de gravedad. Cuando salta acelera hacia el agua, pero durante la "caída libre" siente la ingravidez, como si no existiera la fuerza de gravedad. ¿Contradice esto las leyes del movimiento de Newton? ¿Cómo podría explicar esto a un estudiante de otra materia que no sea la física?

EJERCICIOS

3-1 Mecánica clásica

3-2 Primera ley de Newton

3-3 Fuerza

3-4 Masa

3-5 Segunda ley de Newton

1. Supóngase que la fuerza gravitacional del Sol se eliminara repentinamente, de modo que la Tierra se convirtiera en un objeto libre en vez de estar confinada a la órbita solar. ¿Cuánto tardaría la Tierra en alcanzar una distancia del Sol igual al actual radio orbital de Plutón? (Sugerencia: algunos de los datos los encontrará en el apéndice C.)
2. Un bloque de 5.5 kg se halla inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Se tira de él con una fuerza horizontal constante de 3.8 N. *a*) ¿Cuál es su aceleración? *b*) ¿Cuánto tiempo debe tirarse de él antes que alcance una rapidez de 5.2 m/s? *c*) ¿Qué distancia recorre en ese tiempo?
3. Un electrón se desplaza en línea recta desde el cátodo de un tubo al vacío hasta su ánodo, que se halla a 1.5 cm de distancia. Comienza con una rapidez cero y llega al ánodo con una rapidez de 5.8×10^6 m/s. Suponga una aceleración constante y calcule la fuerza ejercida sobre los electrones. Esta fuerza tiene un origen eléctrico. La masa del electrón es 9.11×10^{-31} kg.
4. Un neutrón se desplaza con una rapidez de 1.4×10^7 m/s. Las fuerzas nucleares tienen un alcance muy corto —pues son esencialmente cero en el exterior del núcleo—, pero son muy fuertes en el interior. Si captura un neutrón y lo pone en reposo un núcleo cuyo diámetro es 1.0×10^{-14} m, ¿cuál será la magnitud mínima de la fuerza, supuestamente constante, que actúa sobre el neutrón? La masa de éste es 1.67×10^{-27} kg.
5. En un juego modificado de tirar de la cuerda, dos personas jalan en direcciones opuestas, no sobre la cuerda sino sobre un trineo de 25 kg en reposo sobre una carretera cubierta de hielo. Si los participantes ejercen fuerzas de 90 y de 92 N, ¿cuál será la aceleración del trineo?
6. Un automóvil que se desplaza a 53 km/h choca contra un lindero de un puente. Un pasajero recorre hacia adelante una distancia de 65 cm (respecto a la carretera) antes de ser detenido por una bolsa de aire inflada. ¿Qué fuerza (supuestamente constante) actúa sobre la parte superior de su tronco superior, que tiene una masa de 39 kg?
7. Un electrón es proyectado horizontalmente con una rapidez de 1.2×10^7 m/s y entra en un campo eléctrico que ejerce sobre él una fuerza vertical constante de 4.5×10^{-16} N. La masa del electrón es 9.11×10^{-31} kg. Determine la distancia vertical a la

cual se desvía el electrón mientras se mueve hacia adelante 33 mm en dirección horizontal.

8. El yate solar *Diana*, diseñado para navegar en el sistema solar usando la presión de la luz solar, tiene un área de velero de 3.1 km^2 y una masa de 930 kg. Cerca de la órbita terrestre, el Sol podría ejercer una fuerza de radiación de 29 N sobre su velamen. *a)* ¿Qué aceleración podrá impartir la fuerza al yate? *b)* Una aceleración pequeña puede producir efectos grandes si actúa durante suficiente tiempo de manera constante. Partiendo del reposo ¿cuánto viajaría la nave en 1 día bajo estas condiciones? *c)* ¿Cuál sería entonces su rapidez? (Véase *The Wind from the Sun*, un fascinante relato de ciencia-ficción escrito por Arthur C. Clark sobre una carrera de yates solares.)

9. Cierta fuerza le imparte al objeto m_1 una aceleración de 12.0 m/s^2. La misma fuerza le da al objeto m_2 una aceleración de 3.30 m/s^2. ¿Qué aceleración le comunicaría a un objeto cuya masa es *a)* la diferencia entre m_1 y m_2, y *b)* la suma de m_1 y m_2.

10. Despreciando la fuerza gravitacional, ¿qué fuerza se necesitaría para acelerar una nave espacial de 1,200 toneladas métricas del reposo a una décima de la velocidad de la luz en 3 días? ¿En 2 meses? (Una tonelada métrica = 1,000 kg). *b)* Suponiendo que los motores se apagan cuando se alcanza esta velocidad, ¿cuánto se tardaría en completar un viaje de 5 meses-luz en cada uno de los dos casos? (Use 1 mes = 30 días.)

3-6 Tercera ley de Newton

11. Dos bloques, con masas m_1 = 4.6 kg y m_2 = 3.8 kg, están conectados por un resorte ligero en una mesa horizontal sin fricción. En cierto momento, cuando m_2 tiene una aceleración a_2 = 2.6 m/s^2: *a)* ¿cuál es la fuerza sobre m_2, y *b)* ¿cuál es la aceleración de m_1?

3-7 Peso y masa

12. ¿Cuáles son el peso en newtons y la masa en kilogramos de *a)* una bolsa de 5.00 lb de azúcar, *b)* un defensa de fútbol americano de 240 lb y *c)* un automóvil de 1.8 ton? (1 tonelada = 2,000 lb)?

13. ¿Cuáles son la masa y el peso de *a)* un vehículo para nieve de 1,420 lb, y *b)* una bomba de calor de 412 kg?

14. Un viajero espacial cuya masa es de 75.0 kg abandona la Tierra. Calcule su peso *a)* en la Tierra, *b)* en Marte, donde g = 3.72 m/s^2, y *c)* en el espacio interplanetario. *d)* ¿Cuál es su masa en esos tres lugares?

15. Cierta partícula tiene un peso de 26.0 N en un punto donde la aceleración debida a la gravedad es 9.80 m/s^2. *a)* ¿Cuáles son su peso y su masa en un punto donde la aceración debida a la gravedad es 4.60 m/s^2? *b)* ¿Cuáles son el peso y la masa de la partícula si se dirige a un punto del espacio donde la fuerza gravitacional es cero?

16. Un avión de 12,000 kg vuela a nivel con una rapidez de 870 km/h. ¿Cuál es la fuerza de empuje ascendente ejercida sobre él por el aire?

17. ¿Cuál la fuerza neta sobre un automóvil de 3,900 lb que acelera a 13 ft/s^2?

18. Un trineo de un cohete experimental de 523 kg puede acelerar del reposo hasta alcanzar 1,620 km/h en 1.82 s. ¿Qué fuerza neta se requiere?

19. Un avión de propulsión parte del reposo en la pista y acelera para despegar a 2.30 m/s^2 (= 7.55 ft/s^2). Tiene dos motores de propulsión, cada uno de los cuales ejerce un empuje de 1.40 × 10^5 N (= 15.7 tons). ¿Cuánto pesa el avión?

3-8 Aplicaciones de las leyes de Newton en una dimensión

20. *a)* Dos pesos de 10 lb están sujetos a una báscula de resorte como se aprecia en la figura 3-25*a*. ¿Cuál es la lectura de la báscula? *b)* Un peso de 10 lb está sujeto a una báscula de resorte que a su vez está unida a una pared, como se observa en la figura 3.25*b*. ¿Cuál es la lectura de la báscula? (No tenga en cuenta el peso de la báscula.)

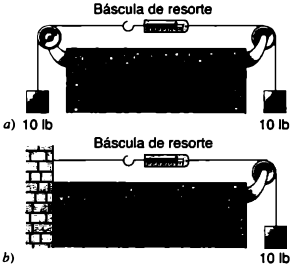


FIGURA 3-25. Ejercicio 20.

21. Se hace que un automóvil que se desplaza inicialmente con una rapidez de 50 mi/h (≈80 km/h) y que pesa 3,000 lb (≈13,000 N), se detenga en una distancia de 200 ft (≈61 m). Calcule *a)* la fuerza de frenado, y *b)* el tiempo necesario para detenerse. Suponiendo la misma fuerza de frenado, determine *a)* la fuerza de frenado, y *b)* el tiempo requerido para detenerse. Suponiendo la misma fuerza de frenado, calcule *c)* la distancia, y *d)* el tiempo necesario para detenerse si el automóvil se desplazara inicialmente a 25 mi/h (≈40 km/h).

22. Con una aceleración de 9.2 m/s^2, un meteoro de masa 0.25 kg cae verticalmente a través de la atmósfera terrestre. Además de la gravedad, una fuerza de demora (debida a la fuerza friccional de resistencia al avance ejercida por la atmósfera) actúa sobre el meteoro. ¿Qué magnitud tiene esta fuerza retardatoria? Véase la figura 3-26.

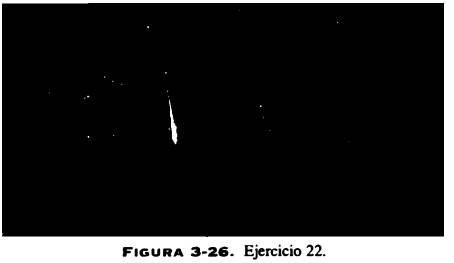


FIGURA 3-26. Ejercicio 22.

23. Un hombre con una masa de 83 kg (equivalente a un peso de 180 lb) salta hacia abajo a un patio de concreto, desde la saliente de una ventana apenas a 0.48 m (= 1.6 ft) sobre el suelo. Olvida doblar las rodillas al caer, de manera que su movimiento se detiene en una distancia de 2.2 cm (= 0.87 in). *a)* ¿Cuál es la aceleración promedio del hombre desde el momento en que sus pies tocan el patio hasta el momento en que se detiene totalmente? *b)* ¿Con qué fuerza promedio impacta este salto su estructura ósea?

24. ¿Qué fuerza necesita un hilo de pescar para detener un salmón de 19 lb que nada a 9.2 ft/s en una distancia de 4.5 in?

25. ¿Cómo podría un objeto de 100 lb ser bajado de un techo usando una cuerda con una resistencia a la rotura de 87 lb, sin que se rompa la cuerda?

26. Un objeto está colgado de una báscula de resorte sujeta al techo de un elevador. La báscula indica 65 N cuando el elevador está parado. *a*) ¿Cuál será la lectura cuando el elevador suba con una rapidez constante de 7.6 m/s? *b*) ¿Cuál será cuando el elevador suba con una rapidez de 7.6 m/s y una desaceleración de 2.4 m/s^2?

27. Los trabajadores están introduciendo equipo en un elevador de carga en la parte superior de un edificio. Sin embargo, lo sobrecargan y el cable desgastado se rompe. En el momento del accidente la masa del elevador cargado es de 1,600 kg. Al caer el elevador, los carriles guía ejercen sobre él una fuerza retardatoria constante de 3,700 N. ¿Con qué rapidez chocará el elevador contra el fondo del pozo a 72 m debajo?

28. Un avión de propulsión de la marina que pesa 26 ton (Fig. 3-27) requiere una velocidad propia de 280 ft/s para despegar. Su motor alcanza un empuje de 24,000 lb. Debe despegar de un portaaviones con una pista de vuelo de 300 ft. ¿Qué fuerza debe ejercer la catapulta del portaaviones? Suponga que ésta y el motor del avión ejercen una fuerza constante en la distancia de despegue de 300 ft.

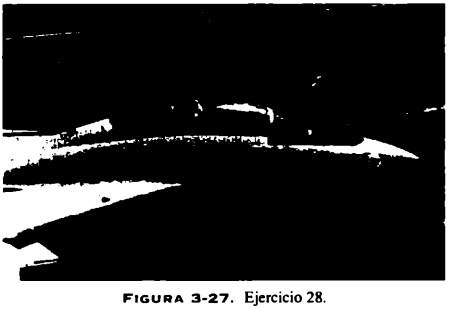


FIGURA 3-27. Ejercicio 28.

29. Un cohete y su carga útil tienen una masa total de 51,000 kg. ¿Qué magnitud tiene el empuje de su motor cuando *a*) el cohete "flota" sobre la plataforma de lanzamiento poco después de la ignición, y *b*) cuando acelera hacia arriba a 18 m/s^2?

30. Una persona de 77 kg se lanza en paracaídas y experimenta una aceleración de 2.5 m/s^2 hacia abajo, poco después de abrir el paracaídas. La masa de éste es de 5.2 kg. *a*) Calcule la fuerza ascendente ejercida sobre el paracaídas por el aire. *b*) Calcule la fuerza descendente ejercida por la persona sobre el paracaídas.

31. Un helicóptero de 15,000 kg levanta un automóvil de 4,500 kg con una aceleración ascendente de 1.4 m/s^2. Calcule *a*) la fuerza vertical que el aire ejerce sobre las aspas del helicóptero, y *b*) la tensión en el cable superior de soporte (Fig. 3-28).

FIGURA 3-28. Ejercicio 31.

PROBLEMAS

1. Un haz luminoso proveniente del láser de un satélite choca contra un objeto lanzado accidentalmente de un misil balístico (Fig. 3-29). El haz ejerce una fuerza de 2.7×10^{-5} N sobre el blanco. Si el "tiempo de permanencia" del haz en el blanco es de 2.4 s, ¿cuánto se desplazará el objeto si es *a*) una ojiva de combate, de 280 kg, y *b*) un señuelo de 2.1 kg? (Estos desplazamientos pueden medirse observando el haz reflejado.)

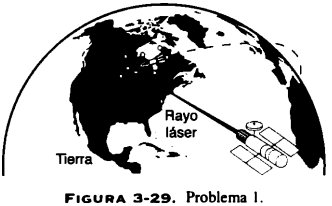


FIGURA 3-29. Problema 1.

2. Una muchacha de 40 kg y un trineo de 8.4 kg están sobre la superficie de un lago congelado a una distancia de 15 m. Por medio de una cuerda la muchacha ejerce una fuerza de 5.2 N sobre el trineo, atrayéndolo hacia ella. *a*) ¿Cuál es la aceleración del trineo? *b*) ¿Cuál es la aceleración de la muchacha? *c*) ¿A qué distancia de la posición inicial de ella se encuentran, suponiendo que la fuerza permanezca constante? Suponga que no hay fuerzas de fricción.

3. Un bloque se suelta del reposo en la parte superior de un plano inclinado y sin fricción de 16 m de largo. Llega al fondo 4.2 s después. En el momento en que el primero se suelta, se lanza un segundo bloque hacia arriba del plano desde el fondo, de manera que vuelve al fondo junto con el primero. *a*) Calcule la aceleración de cada bloque en el plano inclinado. *b*) ¿Cuál es la velocidad inicial del segundo bloque? *c*) ¿Qué altura del plano

inclinado alcanza? Puede suponer que los dos bloques presentan la misma aceleración.

4. Se sujeta un motor de un avión de propulsión de 1,400 kg al fuselaje de un avión de pasajeros con sólo tres pernos (como se acostumbra). Suponga que cada perno soporta una tercera parte de la carga. *a*) Calcule la fuerza sobre cada perno mientras el avión espera en la pista para despegar. *b*) Durante el vuelo el avión encuentra turbulencia que repentinamente le imparte una aceleración vertical de 2.60 m/s^2. Calcule la fuerza sobre cada perno. ¿Por qué sólo se usan tres (véase Fig. 3-30)?

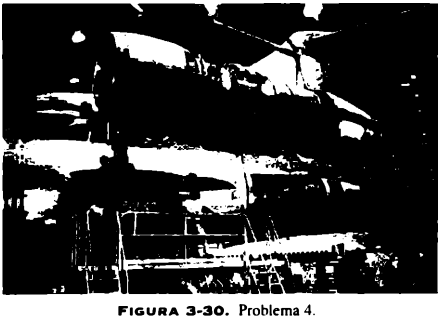


FIGURA 3-30. Problema 4.

5. Un nave de aterrizaje se aproxima a la superficie de Calisto, uno de los satélites (lunas) de Júpiter (Fig. 3-31). Si el motor del cohete le imprime un empuje hacia arriba de 3,260 N, la nave descendería a una velocidad constante, considerando que Calisto no tuviera atmósfera. Si el empuje hacia arriba es de 2,200 N, la nave aceleraría hacia abajo a 0.390 m/s^2. *a*) ¿Cuánto pesa la nave de aterrizaje cerca de la superficie de Calisto? *b*) ¿Cuál es su masa? *c*) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de Calisto?

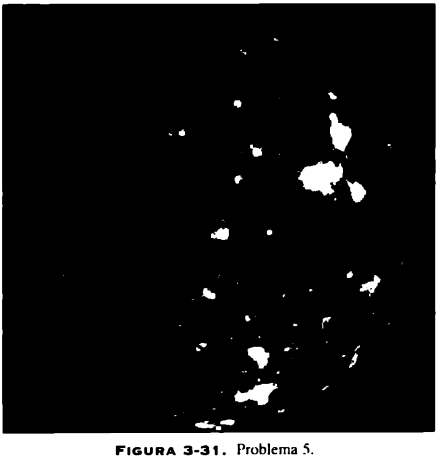


FIGURA 3-31. Problema 5.

6. Un globo aerostático de investigación, con una masa total M, desciende verticalmente con una aceleración a (véase Fig. 3-32). ¿Cuánto lastre debe arrojarse desde la barquilla para darle una aceleración ascendente a suponiendo que no cambie la fuerza ascencional del aire sobre él?

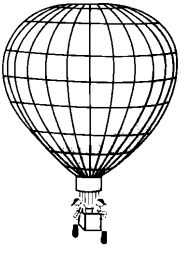


FIGURA 3-32. Problema 6.

7. El juguete de un niño consta de tres vagones a los que se les aplica tracción sobre patines pequeños sin fricción (Fig. 3-33). Los carros tienen las masas m_1 = 3.1 kg, m_2 = 2.4 kg y m_3 = 1.2 kg. Si tira de ellos hacia la derecha con una fuerza horizontal P = 6.5 N, obtenga *a*) la aceleración del sistema, *b*) la fuerza ejercida por el segundo vagón sobre el tercero y *c*) la fuerza ejercida por el primer vagón sobre el segundo.

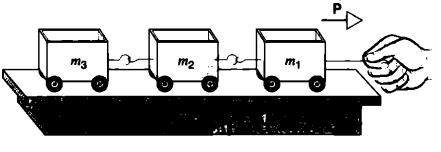


FIGURA 3-33. Problema 7.

8. La figura 3-34 muestra tres cajas con las masas m_1 = 45.2 kg, m_2 = 22.8 kg y m_3 = 34.3 kg en una superficie horizontal sin fricción. *a*) ¿Qué fuerza horizontal F se necesita para empujarlas a la derecha como una unidad, con una aceleración de 1.32 m/s^2? *b*) Calcule la fuerza ejercida por m_2 en m_3. *c*) Por m_1 en m_2.

9. Una cadena de cinco eslabones, cada uno con una masa de 100 g, es levantada verticalmente con una aceleración constante de 2.50 m/s^2, como se advierte en la figura 3.35. Calcule *a*) las fuerzas que actúan entre los eslabones contiguos, *b*) la fuerza F

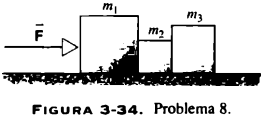


FIGURA 3-34. Problema 8.

que ejerce el agente que levanta la cadena sobre el eslabón de la parte superior y *c*) la fuerza neta en cada eslabón.

FIGURA 3-35. Problema 9.

10. Dos bloques están en contacto en una mesa sin fricción. A uno de ellos se le aplica una fuerza horizontal, como se observa en la figura 3-36. *a*) Si $m_1 = 2.3$ kg, $m_2 = 1.2$ kg y $F = 3.2$ N, calcule la fuerza de contacto entre los dos bloques. *b*) Demuestre que, si se aplica la misma fuerza F, por la derecha, a m_2 y no a m_1, la fuerza de contacto entre ellos es 2.1 N, que no es el mismo valor obtenido en *a*). Explique esto.

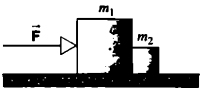


FIGURA 3-36. Problema 10.

11. Como se indica en la figura 3-37, una cuerda de masa m tira de un bloque de masa M en una superficie horizontal sin fricción. Una fuerza horizontal $\vec{P}$ se aplica en un extremo de la cuerda. Suponiendo que el pandeo de la cuerda es despreciable, calcule *a*) la aceleración de la cuerda y del bloque, y *b*) la fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque.

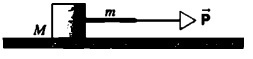


FIGURA 3-37. Problema 11.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Se lanza verticalmente al aire un objeto de 10.0 kg con una velocidad inicial de 50.0 m/s. Además de la fuerza de gravedad, hay una fuerza de fricción que es proporcional a la velocidad según $f_y = -bv_y$; adviértase que esta fuerza es negativa (descendente) cuando el objeto se desplaza hacia arriba, y positiva (ascendente) cuando se desplaza hacia abajo. *a*) Genere numéricamente gráficas de distancia-tiempo del objeto usando $b = 0$, pero utilice varios tamaños de intervalo con Δt, como 1.0 s, 0.1 s, 0.01 s y 0.001 s. Muestre los resultados en una sola gráfica. ¿Cómo varía el punto más alto con el tamaño del intervalo? *b*) Genere numéricamente las gráficas de distancia-tiempo del objeto usando el tamaño de intervalo $\Delta t = 0.01$ s. Pero esta vez ensaye los valores no cero con b; por ejemplo, 0.1 N · s/m, 0.5 N · s/m, 1.0 N · s/m, 5.0 N · s/m y 10.0 N · s/m. ¿Cómo varía el punto más alto con b? ¿Qué observa respecto a la forma de la gráfica al aumentar b?

CAPÍTULO 4

MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

En este capítulo analizaremos una ampliación de los conceptos expuestos en los Capítulos 2 y 3. En ellos explicamos la cinemática y la dinámica en función de vectores, pero consideramos de manera exclusiva aplicaciones en una dimensión. En este capítulo ampliamos la discusión para incluir aplicaciones en dos y en tres dimensiones. Se simplifica enormemente llevar un control de los componentes individuales x, y y z del movimiento, si recurrimos a vectores para describir la posición de la partícula, su velocidad y aceleración, lo mismo que las fuerzas que actúan sobre ella. Para explicar los métodos vectoriales incluimos dos ejemplos: un proyectil lanzado con componentes horizontales y verticales de la velocidad en la gravedad de la Tierra, y un objeto que sigue una trayectoria circular.

4-1 MOVIMIENTO EN TRES DIMENSIONES CON ACELERACIÓN CONSTANTE

En la sección 2-5 describimos un método para analizar la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula que se desplaza en una dimensión con aceleración constante. Si conocemos la aceleración, podremos calcular la velocidad en todo momento conforme a la ecuación 2-26 ($v_x = v_{0x} + a_x t$) y la posición también en todo momento a partir de la ecuación 2-28 ($x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$).

Consideremos ahora la posibilidad de que la partícula se mueva en tres dimensiones con aceleración constante. Es decir, a medida que se desplaza, no varían la dirección ni la magnitud de la aceleración. Asimismo, podemos representar la aceleración como un vector $\vec{\mathbf{a}}$ con tres componentes (a_x, a_y, a_z) que son constantes. En general, la partícula se desplaza en una trayectoria curva. Como en el caso del movimiento en una dimensión, nos gustaría conocer su velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ (un vector con los componentes v_x, v_y, v_z) y su posición $\vec{\mathbf{r}}$ (un vector con los componentes x, y, z) en todo momento.

Podemos obtener las ecuaciones generales del movimiento con la $\vec{\mathbf{a}}$ constante haciendo

$$a_x = \text{constante}, \quad a_y = \text{constante} \quad \text{y} \quad a_z = \text{constante}.$$

La partícula empieza en $t = 0$, con una posición inicial $\vec{\mathbf{r}}_0 = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}} + z_0\hat{\mathbf{k}}$, y una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}}$. A continuación procedemos como lo hicimos en la sección 2-5 y desarrollamos, en analogía con la ecuación 2-26, *tres* ecuaciones unidimensionales: $v_x = v_{0x} + a_x t$, $v_y = v_{0y} + a_y t$ y $v_z = v_{0z} + a_z t$, que escribimos como la ecuación de un solo vector tridimensional

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t. \tag{4-1}$$

Cuando utilice ésta u otra ecuación vectorial, recuerde que representa tres ecuaciones independientes unidimensionales. Es decir, una igualdad vectorial como $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ significa que *deben* cumplirse tres condiciones: $A_x = B_x$, $A_y = B_y$ y que $A_z = B_z$. Es, pues, claro que la ecuación 4-1 representa las tres ecuaciones unidimensionales para los componentes.

Al calificar de "independiente" las tres ecuaciones componentes, queremos decir que los componentes de la velocidad varían independientemente uno de otros; por ejemplo, a_x afectó sólo a v_x y no a v_y o v_z. Si $a_y = a_z = 0$, pero $a_x \neq 0$, entonces v_y y v_z permanecerían constantes, pero v_x variará con el tiempo.

El segundo término del lado derecho de la ecuación 4-1 contiene la multiplicación del vector $\vec{\mathbf{a}}$ por el escalar t. Como se indica en el apéndice H, esto nos da un vector de longitud at que señala en la misma dirección que el vector original $\vec{\mathbf{a}}$.

En forma parecida, podemos escribir las tres ecuaciones de los componentes del vector de posición como en la ecuación 2-28: $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$, $z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2$. Las tres ecuaciones unidimensionales pueden combinarse y formar una sola ecuación vectorial tridimensional:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2, \qquad (4\text{-}2)$$

que contiene las tres para los componentes.

PROBLEMA RESUELTO 4-1. La nave espacial *Enterprise* se desplaza sin motores por el espacio (donde la gravedad es despreciable) con una rapidez de 15.0 km/s en relación con determinado marco de referencia inercial. De repente la atrapa un haz de atracción, que tira de ella en dirección perpendicular a su velocidad original y le imprime una aceleración de 4.2 km/s^2 en esa dirección. Una vez que ha actuado sobre ella durante 4.0 s, *Enterprise* enciende sus motores que le dan una aceleración constante de 18.0 km/s^2 en dirección paralela a su movimiento original. Al cabo de 3.0 s más, los motores y el haz de atracción dejan de operar, y la nave vuelve a desplazarse sin motores. Calcule la velocidad de la nave en ese momento, y su posición respecto a su ubicación cuando apareció el haz.

Solución Establecemos nuestro sistema coordenado con el eje positivo x en dirección del movimiento original de la nave, y el eje y positivo en dirección de la atracción del haz, escogiendo el origen ($x = 0$, $y = 0$) en el lugar donde el haz comenzó a actuar. (Con esta selección del sistema coordenado, no se produce movimiento en la dirección z.) Dividimos el problema en dos partes que es preciso analizar por separado: 1) de $t = 0$ a $t = 4.0$ s cuando la nave se mueve con $a_x = 0$, $a_y = +4.2$ km/s^2, y 2) de $t = 4.0$ s a $t = 7.0$ s cuando se desplaza con $a_x = +18.0$ km/s^2, $a_y = +4.2$ km/s^2.

Analizamos una parte a la vez. En la primera, cuando $v_{0x} = +15.0$ km/s^2 y $v_{0y} = 0$, los componentes x y y de las ecuaciones 4-1 y 4-2 se convierten en

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 15.0 \text{ km/s} + 0 = 15.0 \text{ km/s}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (4.2 \text{ km/s}^2)(4.0 \text{ s}) = 16.8 \text{ km/s}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = 0 + (15.0 \text{ km/s})(4.0 \text{ s}) + 0 = 60.0 \text{ km}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(4.2 \text{ km/s}^2)(4.0 \text{ s})^2$$
$$= 33.6 \text{ km}.$$

En el intervalo de 3.0 s de $t = 4.0$ s a $t = 7.0$ s, escribimos un conjunto similar de ecuaciones empleando otra variable t' que fluctúa entre 0 y 3.0 s (pero mantenemos el origen del sistema coordenado en el lugar inicial). En este intervalo, las velocidades y los lugares iniciales son los valores antes obtenidos con $t = 4.0$ s ($v_{0x} = 15.0$ km/s,

$v_{0y} = 16.8$ km/s, $x_0 = 60.0$ km, $y_0 = 33.6$ km), y

$$v_x = v_{0x} + a_x t' = 15.0 \text{ km/s} + (18.0 \text{ km/s}^2)(3.0 \text{ s}) = 69.0 \text{ km/s}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t' = 16.8 \text{ km/s} + (4.2 \text{ km/s}^2)(3.0 \text{ s}) = 29.4 \text{ km/s}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t' + \tfrac{1}{2}a_x t'^2$$
$$= 60.0 \text{ km} + (15.0 \text{ km/s})(3.0 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(18.0 \text{ km/s}^2)(3.0 \text{ s})^2$$
$$= 186 \text{ km}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t' + \tfrac{1}{2}a_y t'^2$$
$$= 33.6 \text{ km} + (16.8 \text{ km/s})(3.0 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(4.2 \text{ km/s}^2)(3.0 \text{ s})^2$$
$$= 103 \text{ km}.$$

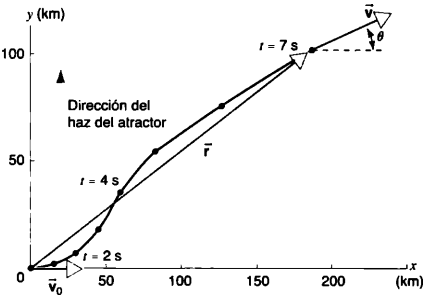


FIGURA 4-1. Problema resuelto 4-1. Los puntos muestran la posición de la nave espacial en intervalos de 1 segundo de $t = 0$ a $t = 7$ s. Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ muestran la posición y la velocidad en $t = 7$ s. Nótese que $\vec{v}_0$ es tangente a la trayectoria en $t = 0$, y que $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en $t = 7$ s.

Cuando $t = 7.0$ s, la nave se halla en $x = 186$ km, $y = 103$ km (es decir, a una distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 213$ km del punto inicial de referencia). Los componentes de su velocidad son $v_x = 69$ m/s, $v_y = 29$ m/s, correspondientes a una rapidez de $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 75$ km/s y a una dirección dada por el ángulo $\theta = \tan^{-1} v_y/v_x = 23°$ en relación con el eje x. La figura 4-1 muestra la trayectoria de la nave espacial y su posición en diversos momentos. Por lo regular, como se observa en $t = 7$ s, son diferentes las direcciones de los vectores de posición y de velocidad.

Nótese en este problema, que el uso de los componentes de los vectores ayuda a separar los movimientos x y y. Es decir, las soluciones a las ecuaciones para los componentes x no dependen del movimiento y. Si el haz de atracción no existiera y si *Enterprise* encendiera sus motores en la misma forma de 4.0 a 7.0 s, todavía se encontrará en $x = 186$ km desplazándose con una velocidad $v_x = 69$ km/s en 7.0 s. Si el haz estuviera presente pero los motores no se encendieran, *Enterprise* estaría todavía en $y = 103$ km moviéndose con una velocidad de $v_y = 29$ km/s en 7.0 s.

4-2 LEYES DE NEWTON EN LA FORMA VECTORIAL TRIDIMENSIONAL

Antes que anotemos las leyes de Newton en su forma vectorial tridimensional, hemos de verificar que la fuerza, tal como la definimos, es una magnitud vectorial. En el Capítulo 3 vimos que, incluso en una dimensión, es preciso tener en cuenta la dirección de las fuerzas. Puesto que tienen magnitud y dirección, sospechamos que puede ser una magnitud vectorial. Sin embargo, para ser vector no basta que tenga magnitud y dirección; es necesario obedecer las leyes de la suma vectorial expuestas en la sección 2-2. Sólo mediante experimentos podemos determinar si las fuerzas, según la definición dada, cumplen con ellas.

Hagamos los arreglos necesarios para ejercer una fuerza de 4 N sobre el eje x, y una fuerza de 3 N sobre el eje y. Como antes, las aplicamos primero por separado y luego simultáneamente al cuerpo estándar de 1kg en una superficie horizontal sin fricción. ¿Qué aceleración tendrá el cuerpo? Mediante

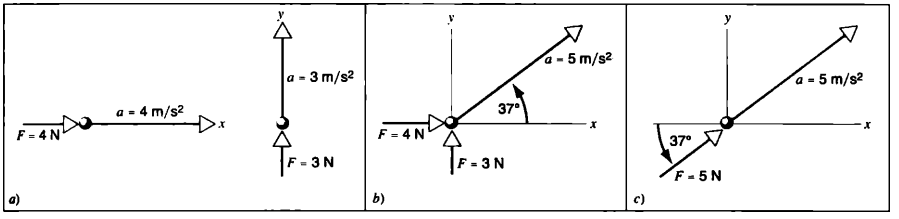


FIGURA 4-2. *a)* Una fuerza de 4 N en la dirección x produce una aceleración de 4 m/s^2 en la dirección x, y una fuerza de 3 N en la dirección y imparte una aceleración de 3 m/s^2 en la dirección y. *b)* Cuando las fuerzas se aplican en forma simultánea, la aceleración resultante es 5 m/s^2 en la dirección indicada. *c)* La misma aceleración puede obtenerse con una fuerza individual de 5 N en la dirección indicada.

experimentos podríamos determinar que la fuerza de 4 N en la dirección x que actúa sola, producía una aceleración de 4 m/s^2 en esa dirección, y que la fuerza de 3 N en la dirección y que actuaba sola, producía una aceleración de 3 N m/s^2 en esa dirección (Fig. 4-2*a*). Cuando las fuerzas se aplican al mismo tiempo como se observa en esta figura 4-2*b*, la aceleración es 5 m/s^2, dirigida sobre una línea que forma un ángulo de 37° con el eje x. Es la misma aceleración que se habría producido si el cuerpo estándar experimentara una fuerza de 5 N en esa dirección. El mismo resultado puede obtenerse, si primero sumamos las fuerzas de 4 y 3 N en forma vectorial (Fig. 4-2*c*), obtenemos una resultante de 5 N dirigida a 37° desde el eje x, y luego le aplicamos al cuerpo esa fuerza neta de 5 N. Este tipo de experimentos prueba de modo concluyente que las fuerzas son vectores; poseen magnitud y dirección, *además* de sumarse conforme a la ley de adición de vectores.

Ahora que estamos convencidos de que la fuerza es un vector, se justifica que escribamos la segunda ley de Newton en forma vectorial, como ya lo hicimos en el Capítulo 3:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \tag{4-3}$$

que abarca las tres ecuaciones de las componentes

$$\sum F_x = ma_x, \qquad \sum F_y = ma_y, \qquad \sum F_z = ma_z. \tag{4-4}$$

Es decir, es necesario satisfacer las tres simultáneamente cuando aplicamos la segunda ley.

La ecuación 4-3 indica que podemos obtener la dirección de la aceleración si tomamos la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Como la masa es un *escalar*, la dirección de $\vec{\mathbf{a}}$ es la misma que la de $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}}$. Una vez que tenemos la fuerza resultante, podemos determinar la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ a partir de la ecuación 4-3. Sin embargo, como veremos en los ejemplos de este capítulo, a menudo es más fácil utilizar las ecuaciones 4-4 para resolver los problemas, dividiendo antes cada fuerza en sus componentes, y obteniendo después la suma de cada uno para determinar los componentes de la aceleración.

Si las fuerzas son constantes, también lo será la aceleración y podremos servirnos de las ecuaciones de la sección 4-1 para encontrar la posición y la velocidad de la partícula en cualquier momento. Si no son constantes, no podremos usar las ecuaciones de la aceleración constante; más adelante en el capítulo se explica un ejemplo de una fuerza no constante: la resistencia al avance sobre un proyectil.

La tercera ley de Newton es también una ecuación vectorial:

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}, \tag{4-5}$$

que nos indica lo siguiente: sin importar la dirección en un espacio tridimensional del vector $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ que representa la fuerza que A ejerce sobre B, el vector $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ que representa la fuerza que ejerce B sobre A tiene la misma magnitud y opera en dirección opuesta.

PROBLEMA RESUELTO 4-2. Una caja de masa m = 62 kg se desliza por el piso sin fricción y con una velocidad inicial de v_0 = 6.4 m/s. Con el propósito de moverla en otra dirección, Tomás empuja en sentido contrario al movimiento inicial, con una fuerza constante de magnitud F_{CT} = 81 N, mientras Julia lo hace en dirección perpendicular, con una fuerza constante de magnitud F_{CJ} = 105 N (Fig. 4-3*a*). Si los dos empujan por 3.0 s, ¿en qué dirección se desplazará la caja cuando dejen de empujarla?

Solución Supongamos que la dirección x positiva es la del movimiento inicial de la caja (de modo que la fuerza de Tomás $\vec{\mathbf{F}}_{CT}$ sigue una dirección x negativa), y que la dirección y positiva es la de la fuerza de Julia $\vec{\mathbf{F}}_{CJ}$. La figura 4-3*b* muestra el diagrama de cuerpo libre de la caja. La única fuerza en la dirección x es la que ejerce Tomás, así que $\Sigma F_x = -F_{CT}$; de modo similar, $\Sigma F_y = -F_{CJ}$. Aplicamos la segunda ley de Newton en su forma de componentes (Ecs. 4-4) y entonces podemos escribir las ecuaciones del movimiento de la caja así

dirección x $(\sum F_x = ma_x)$: $\quad -F_{CT} = ma_x$

dirección y $(\sum F_y = ma_y)$: $\quad -F_{CJ} = ma_y$

Resolviendo, obtenemos

$$a_x = -\frac{F_{CT}}{m} = \frac{-81\text{ N}}{62\text{ kg}} = -1.31\text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{F_{CJ}}{m} = \frac{105\text{ N}}{62\text{ kg}} = 1.69\text{ m/s}^2.$$

Al usar la ecuación 4-1 en su forma de componentes calculamos los componentes de la velocidad con t = 3.0 s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 6.4\text{ m/s} + (-1.31\text{ m/s}^2)(3.0\text{ s}) = 2.5\text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (1.69\text{ m/s}^2)(3.0\text{ s}) = 5.1\text{ m/s}.$$

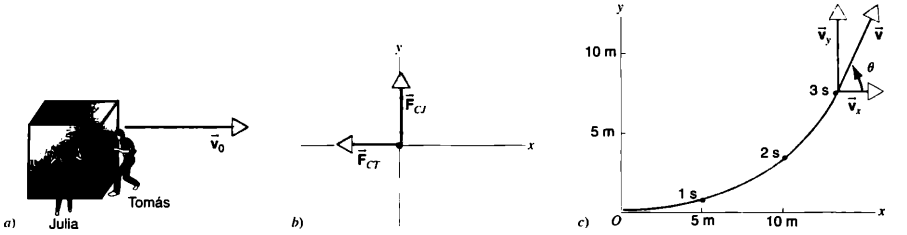


FIGURA 4-3. Problema resuelto 4-2. *a*) Tomás empuja en contra del movimiento inicial de la caja y Julia lo hace en dirección perpendicular. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la caja. *c*) La tangente a la trayectoria da la dirección del movimiento de la caja. Se muestran los componentes de la velocidad con $t = 3.0$ s.

Una gráfica de la trayectoria de la caja se muestra en la figura 4-3*c*, que contiene además los componentes de la velocidad cuando $t = 3.0$ s. Para calcular la magnitud de la velocidad y la dirección empleamos las ecuaciones 2-2:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2.5\ \text{m/s})^2 + (5.1\ \text{m/s})^2} = 5.7\ \text{m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{5.1\ \text{m/s}}{2.5\ \text{m/s}} = 64°.$$

Nótese que $\vec{v}$ sigue la dirección del movimiento (tangente a la curva que representa la trayectoria de la caja).

¿Puede encontrar el lugar de la caja cuando $t = 3.0$ s?

4-3 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Un ejemplo común del movimiento en dos dimensiones, es el de proyectiles cerca de la superficie terrestre, en el cual un proyectil —digamos una bola de golf o de béisbol— se arroja en una dirección arbitraria. Por ahora prescindiremos de la resistencia del aire (una fuerza no constante), con lo cual simplificaremos los cálculos.

La figura 4-4*a* contiene el movimiento inicial del proyectil en el momento del lanzamiento. Su velocidad inicial $\vec{v}_0$ se dirige en un ángulo ϕ_0 medido con la horizontal. Escogemos el sistema coordenado con el eje horizontal x, y su dirección positiva correspondiente al componente horizontal de la velocidad inicial. El eje y es vertical, con su dirección positiva hacia arriba. También ponemos el origen del sistema en el lugar del lanzamiento, de manera que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. Los componentes de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos \phi_0, \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \phi_0. \tag{4-6}$$

El diagrama de cuerpo libre del proyectil (de masa m) se incluye en la figura 4-4*b*. La gravedad es la única fuerza que interviene. Es constante pues tiene una dirección descendente y la misma magnitud mg en todas partes de la trayectoria del proyectil, cualquiera que sea el lugar o la dirección del movimiento. Con nuestra elección del sistema coordenado, los componentes de la fuerza neta son

$$\sum F_x = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum F_y = -mg \tag{4-7}$$

y entonces los componentes de la segunda ley de Newton (Ecs. 4-4) nos dan

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = 0 \qquad \text{y} \qquad a_y = \frac{\sum F_y}{m} = -g. \tag{4-8}$$

El componente horizontal de la aceleración es cero en todas partes de la trayectoria, y el componente vertical de la aceleración es $-g$ también en todas partes.

Al aplicar las fórmulas de la aceleración constante incluidas en la sección 4-1, obtenemos los componentes de la velocidad:

$$(a)\ v_x = v_{0x}, \qquad (b)\ v_y = v_{0y} - gt \tag{4-9}$$

y los componentes de la posición:

$$(a)\ x = v_{0x}t, \qquad (b)\ y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{4-10}$$

Nótese que el componente horizontal de la velocidad permanece constante (e igual a su valor inicial) durante todo el vuelo. En las ecuaciones 4-4, vimos que el componente x de la aceleración *sólo* puede verse afectado por una fuerza neta con un componente x. En este caso, $\Sigma F_x = 0$, así v_x permanece constante. La fuerza en la dirección y afecta sólo a y y v_y, no a x o v_x.

Las ecuaciones para el movimiento vertical (Ecs. 4-9*b* y 4-10*b*), son exactamente las de la caída libre (Ecs. 2-29 y 2-30). De hecho, si observáramos el movimiento desde un automóvil que corre por el suelo a una velocidad v_{0x} en la dirección del proyectil, el movimiento parecería ser el de un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez v_{0y}.

La figura 4-5 muestra el movimiento. En cualquier punto, la magnitud del vector de velocidad es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{4-11}$$

y su dirección está dada por

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x}, \tag{4-12}$$

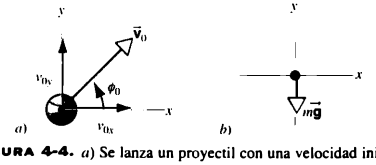


FIGURA 4-4. *a*) Se lanza un proyectil con una velocidad inicial $\vec{v}_0$. *b*) Diagrama de cuerpo libre del proyectil.

donde ϕ es el ángulo que el vector de velocidad forma con la horizontal. En todos los puntos del movimiento este vector es tangente a la trayectoria del proyectil.

Las ecuaciones 4-10 nos dan x y y como funciones del parámetro común t. Al combinar y eliminar t en ellas, obtenemos

$$y = (\tan \phi_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2, \qquad (4\text{-}13)$$

que relaciona y a x, y que es la ecuación de la *trayectoria* del proyectil. Puesto que v_0, ϕ_0 y g son constantes, esta ecuación presenta la forma

$$y = bx - cx^2,$$

es decir, la ecuación de una parábola. De ahí que la trayectoria de un proyectil sea parabólica, como se aprecia en la figura 4-5.

El *alcance horizontal* R del proyectil, como se muestra en la figura 4-5, se define como la distancia sobre la horizontal donde el proyectil retorna al nivel de donde fue lanzado. Podemos determinarlo introduciendo $y = 0$ en la ecuación 4-13. Una solución surge de inmediato con $x = 0$; la otra nos da el alcance:

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \phi_0 \cos \phi_0 = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\phi_0, \qquad (4\text{-}14)$$

usando la identidad trigonométrica sen $2\theta = 2$ sen $\theta \cos \theta$. Nótese que, con determinada rapidez inicial, obtenemos el alcance máximo para $\phi_0 = 45°$ tal que sen $2\phi_0 = 1$.

La figura 4-6 muestra una fotografía estroboscópica de la trayectoria de un proyectil no afectado severamente por la resistencia del aire. La trayectoria presenta una forma parabólica. La figura 4-7 compara los movimientos de un proyectil dejado caer del reposo con otro disparado al mismo tiempo en dirección horizontal. En ella vemos directamente las predicciones de las ecuaciones 4-10 cuando $\phi_0 = 0$. Nótese que 1) el movimiento horizontal de la pelota 2 sí se ajusta a la ecuación 4-10: su coordenada x aumenta las mismas cantidades en intervalos iguales, independientemente del movimiento y; y 2) los movimientos y de ambos proyectiles son idénticos: los incrementos verticales de su posición son idénticos, independientemente de su movimiento horizontal.

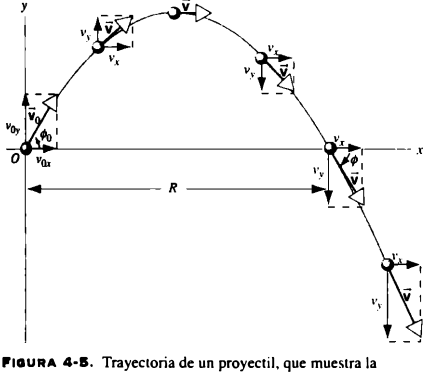


FIGURA 4-5. Trayectoria de un proyectil, que muestra la velocidad inicial $\bar{v}_0$, sus componentes, así como la velocidad $\bar{v}$ y sus componentes para cinco valores de t. Nótese que $v_x = v_{0x}$ durante todo el vuelo. La distancia horizontal R es el alcance del proyectil.

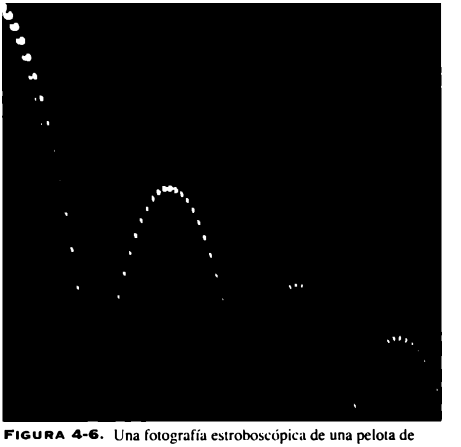


FIGURA 4-6. Una fotografía estroboscópica de una pelota de golf (que entra en la fotografía desde la izquierda) que bota contra una superficie dura. Entre los impactos, muestra la trayectoria parabólica característica del movimiento de proyectiles. ¿Por qué cree que la altura de los rebotes sucesivos va disminuyendo? (En el Capítulo 6 se da la respuesta.)

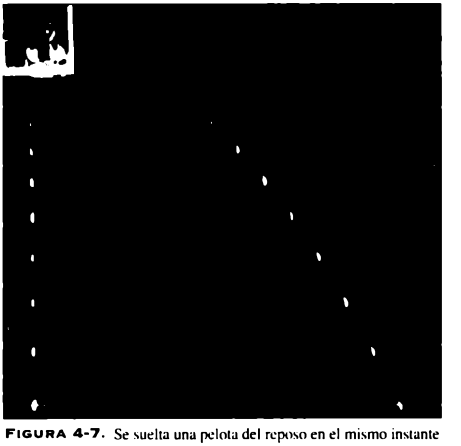


FIGURA 4-7. Se suelta una pelota del reposo en el mismo instante que otra es disparada hacia la derecha. Nótese que las dos caen exactamente con la misma rapidez: el movimiento horizontal de la pelota 2 no afecta a la rapidez vertical de su caída. Las exposiciones en esta fotografía estroboscópica se tomaron a intervalos de 1/30 s. ¿La velocidad horizontal de la segunda pelota parece ser constante?

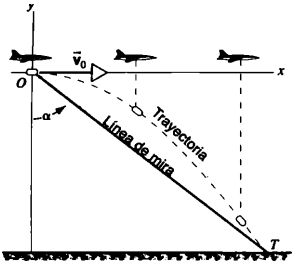


FIGURA 4-8. Problema resuelto 4-3.

PROBLEMA RESUELTO 4-3. En un concurso consistente en dejar caer un paquete sobre un blanco, el avión de un concursante vuela a velocidad horizontal constante de 155 km/h y a una altitud de 225 m hacia un punto situado directamente arriba del blanco. ¿A qué ángulo de visión α debe soltarse el paquete para que dé en el blanco (Fig. 4-8)?

Solución Escogemos un marco de referencia fijo respecto a la Tierra, siendo su origen O el punto de lanzamiento. El movimiento del paquete en el momento de arrojarlo es el mismo que el del avión. Por tanto, su velocidad inicial $\vec{v}_0$ es horizontal y su magnitud es 155 km/h. El ángulo de lanzamiento ϕ_0 es cero.

Calculamos el tiempo de la caída a partir de la ecuación 4-10*b*. Con $v_{0y} = 0$ y $y = -225$ m en el suelo, esto da

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-225\text{ m})}{9.8\text{ m/s}^2}} = 6.78\text{ s}.$$

Nótese que el tiempo de la caída no depende de la rapidez del avión en un lanzamiento horizontal.

La distancia horizontal recorrida por el paquete en este tiempo está dada por la ecuación 4-10*a*:

$$x = v_{0x}t = (155\text{ km/h})(1\text{ h}/3600\text{ s})(6.78\text{ s})$$
$$= 0.292\text{ km} = 292\text{ m}$$

de modo que el ángulo de visión (Fig. 4-8) debería ser

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{|y|} = \tan^{-1}\frac{292\text{ m}}{225\text{ m}} = 52°.$$

¿Parece parabólico el movimiento del paquete cuando se observa desde un marco de referencia fijo respecto al aeroplano? (¿Recuerda usted haber visto alguna película en que se lanzan bombas de un avión, escenas tomadas por una cámara fotográfica instalada en el avión, o en otro avión que sigue un curso paralelo a la misma velocidad?)

PROBLEMA RESUELTO 4-4. Un jugador de fútbol soccer patea un balón en un ángulo de 36° con la horizontal, con una rapidez inicial de 15.5 m/s. Suponiendo que el balón se desplace en un plano vertical, calcule *a*) el tiempo t_1 en que alcanza el punto más elevado de su trayectoria, *b*) su altura máxima, *c*) el tiempo de vuelo y el alcance y *d*) su velocidad cuando choca contra el suelo.

Solución *a*) El componente vertical de la velocidad inicial es $v_{0y} = v_0 \text{ sen } \phi_0 = (15.5\text{ m/s}) \text{ sen } 36° = 9.1$ m/s. En la parte más alta de su trayectoria, $v_y = 0$. Resolviendo la ecuación 4-9*b* para el tiempo y sustituyendo los valores numéricos obtenemos:

$$t_1 = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{9.1\text{ m/s} - 0}{9.8\text{ m/s}^2} = 0.93\text{ s}.$$

b) La altura máxima $y_{máx}$ se alcanza cuando $t_1 = 0.93$ s. Utilizando la ecuación 4-10*b*, tenemos

$$y_{máx} = v_{0y}t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2$$
$$= (9.1\text{ m/s})(0.93\text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.8\text{ m/s}^2)(0.93\text{ s})^2 = 4.2\text{ m}.$$

c) Para calcular el tiempo total de vuelo t_2, hacemos $y = 0$ en la ecuación 4-10*b*, y luego de eliminar la solución $t = 0$ (que nos recuerda que el balón partió en $y = 0$ cuando $t = 0$), resolvemos para determinar el otro tiempo en que el balón se halla en $y = 0$:

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(9.1\text{ m/s})}{9.8\text{ m/s}^2} = 1.86\text{ s}.$$

Nótese que $t_2 = 2t_1$, que debe ocurrir porque el tiempo necesario para que el balón suba (alcance su altura máxima desde el suelo), es igual al que se requiere para que baje (llegue al suelo partiendo de su altura máxima). Este alcance es la distancia horizontal recorrida en el tiempo t_2:

$$x = v_{0x}t_2 = (v_0 \cos \phi_0)t_2 = (15.5\text{ m/s})(\cos 36°)(1.86\text{ s}) = 23.3\text{ m}.$$

d) Para calcular la velocidad del balón al caer al suelo, utilizamos la ecuación 4-9*a* y obtenemos v_x, que permanece constante durante el vuelo:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \phi_0 = (15.5\text{ m/s})(\cos 36°) = 12.5\text{ m/s},$$

y a partir de la ecuación 4-9*b* obtenemos v_y en $t = t_2$,

$$v_y = v_{0y} - gt = 9.1\text{ m/s} - (9.8\text{ m/s}^2)(1.86\text{ s})$$
$$= -9.1\text{ m/s}.$$

Por tanto, la velocidad tiene una magnitud dada por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5\text{ m/s})^2 + (-9.1\text{ m/s})^2} = 15.5\text{ m/s},$$

y la dirección dada por

$$\tan \phi = v_y/v_x = (-9.1\text{ m/s})/(12.5\text{ m/s}),$$

así que $\phi = -36°$, o 36° con las manecillas del reloj desde el eje x. Nótese que $\phi = -\phi_0$, girando como cabe suponer de la simetría (Fig. 4-5).

La rapidez final resulta ser igual a la inicial. ¿Puede explicar esto? ¿Se trata de una coincidencia?

Cómo dispararle a un blanco que cae

En una demostración en el salón de clase, se apunta una pistola de aire contra un blanco elevado, que se suelta en caída libre mediante un mecanismo cuando la "bala" sale del cañón. Sin importar la rapidez inicial de la bala, siempre da en el blanco que cae.

Para entender un resultado tan sorprendente, supongamos que si no hubiera aceleración debida a la gravedad, el blanco no caería y la bala recorrería la línea de mira para llegar al blanco directamente (Fig. 4-9). El efecto de la gravedad hace que los cuerpos aceleren hacia abajo en la misma proporción respecto a la posición que tendrían de no existir. Por tanto, en el tiempo t, la bala caerá una distancia $\frac{1}{2}gt^2$ de la posición que habría ocupado en la línea de mira, y el blanco caerá la misma distancia desde el punto de partida. Cuando la bala llega a la línea de caída del blanco, la distancia debajo de la posición inicial del blanco será la misma a la que se halle éste y, por tanto,

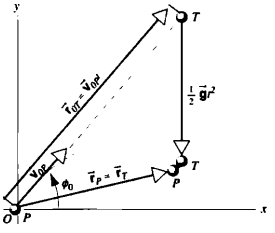


FIGURA 4-9. En el movimiento de un proyectil, su desplazamiento del origen en un tiempo t cualquiera, puede considerarse como la suma de dos vectores $\vec{v}_{0P}t$, dirigido a lo largo $\vec{v}_{0P}$ y $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$, dirigido hacia abajo.

se producirá la colisión. Si la bala se mueve más rápido de lo que se indica en la figura (v_0 más grande), tendrá un alcance mayor y cruzará la línea de caída en un punto más elevado; pero como llega allí más pronto, el blanco caerá una distancia equivalentemente menor en el mismo tiempo y chocará con ella. Un argumento similar se aplica a velocidades menores.

En un análisis equivalente utilizaremos la ecuación 4-2

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

para describir la posición del proyectil y el blanco en el tiempo t. En el caso del proyectil P, $\vec{r}_0 = 0$ y $\vec{a} = \vec{g}$, y tenemos entonces

$$\vec{r}_P = \vec{v}_{0P}t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2. \qquad (4\text{-}15)$$

Para el blanco T, $\vec{r}_0 = \vec{r}_{0T}$, $\vec{v}_0 = 0$ y $\vec{a} = \vec{g}$, lo cual nos da

$$\vec{r}_T = \vec{r}_{0T} + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2. \qquad (4\text{-}16)$$

Si se produce una colisión, debemos tener $\vec{r}_P = \vec{r}_T$. La simple inspección indica que esto ocurrirá en un tiempo t dado por $\vec{r}_{0T} = \vec{v}_{0P}t$, es decir, en el tiempo t ($= r_{0T}/v_{0P}$) que un proyectil no-acelerado tardaría en llegar a la posición del blanco sobre la línea de mira. Como la multiplicación de un vector por un escalar positivo da otro vector en la misma dirección, la ecuación $\vec{r}_{0T} = \vec{v}_{0P}t$ indica que $\vec{r}_{0T}$ y $\vec{v}_{0P}$ han de hallarse en la misma dirección. Es decir, la pistola debe dirigirse a la posición inicial del blanco.

4-4 FUERZAS DE RESISTENCIA AL AVANCE Y EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES (Opcional)

Las gotas de lluvia caen de nubes cuya altura h sobre el suelo es de 2 km aproximadamente. Empleando las ecuaciones de los cuerpos que caen libremente (Ecs. 2-29 y 2-30), esperamos que una gota caiga al suelo con una rapidez de $v \approx 200$ m/s, es decir, unas 440 mi/h. El impacto de un proyectil, inclusive de una gota de lluvia, a esa velocidad sería letal; sin duda cometimos un error en el análisis, ya que las gotas se desplazan con una rapidez mucho menor.

El error aparece cuando olvidamos el efecto de la fuerza de fricción que el aire ejerce en la gota de lluvia que cae. Dicha fuerza constituye un ejemplo de una fuerza de *resistencia al avance* con que se encuentra un objeto que se mueve a través de un medio fluido, como el aire o el agua. Este tipo de fuerza tiene efectos importantes en varios objetos, entre otros las pelotas de béisbol que se desvían mucho de la trayectoria ideal (sin ellas), y los esquiadores que descienden las colinas e intentan adaptar su cuerpo y su posición para atenuarla. Las fuerzas de resistencia al avance han de tenerse en cuenta cuando se diseñan aviones y barcos. Desde el punto de vista de los cuerpos que caen, desde las gotas de lluvia hasta los paracaidistas, las fuerzas de resistencia impiden que la velocidad aumente sin límite alguno e imponen una rapidez máxima o *terminal* que puede obtener un cuerpo que cae.

Una de sus características es que dependen de la rapidez: cuanto más rápido se mueve un objeto, mayor es la fuerza. Por eso no empleamos nuestras fórmulas de la aceleración constante para analizar el movimiento bajo ellas.

Explicamos la técnica con que se resuelven los problemas de fuerzas no constantes, considerando un cuerpo de masa m que se deja caer desde el reposo. Suponemos que la magnitud de la fuerza de resistencia al avance D depende linealmente de la rapidez:

$$D = bv \qquad (4\text{-}17)$$

y siempre actúa en dirección opuesta al movimiento. La constante b se basa en las propiedades del objeto que cae (su tamaño y su forma, por ejemplo), y en las del fluido (aire, en este caso) a través del cual el objeto cae. Nuestra meta consiste en determinar su velocidad en función del tiempo.

La figura 4-10 muestra el diagrama de cuerpo libre que cambia con el tiempo al caer el objeto. Cuando lo soltamos, $D = 0$ (porque $v_y = 0$), y D aumenta a medida que el objeto cae. Mientras D sigue aumentando, en algún momento igualará el peso del objeto, y entonces ninguna fuerza neta actuará sobre él; su aceleración es cero, de modo que su velocidad y la fuerza de resistencia al avance se mantienen constantes. A partir de ese momento el objeto cae con velocidad constante, es decir, con la velocidad terminal.

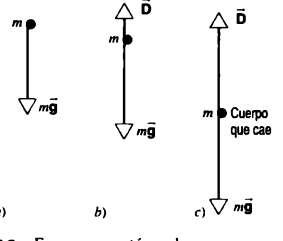


FIGURA 4-10. Fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae en el aire. *a*) En el instante en que se suelta, $v_y = 0$ y no existe una fuerza de resistencia al avance. *b*) Esta fuerza aumenta conforme el cuerpo empieza a ganar velocidad. *c*) Con el tiempo es igual al peso; después permanece siempre igual al peso y el cuerpo cae con su rapidez terminal constante.

Escogemos que el eje y vertical, y la dirección positiva hacia abajo. (La elección de la dirección es arbitraria, y en este caso conviene trabajar con los componentes positivos de la aceleración y la velocidad.) Cuando el peso mg opera hacia abajo y la fuerza de resistencia al avance bv_y lo hace hacia arriba, la fuerza neta será $\Sigma F_y = mg - bv_y$; por tanto, la segunda ley de Newton $\Sigma F_y = ma_y$ nos da

$$mg - bv_y = ma_y \tag{4-18}$$

o bien

$$a_y = g - \frac{bv_y}{m}. \tag{4-19}$$

Nuestro objetivo es determinar la velocidad en función del tiempo. Comenzamos sustituyendo $a_y = dv_y/dt$ en la ecuación 4-19, que nos da

$$\frac{dv_y}{g - bv_y/m} = dt. \tag{4-20}$$

Con $v_y = 0$ en el tiempo $t = 0$, buscamos la velocidad v_y en el tiempo t. En consecuencia, podemos integrar el lado izquierdo de la ecuación 4-20 de 0 a v_y y el derecho del tiempo 0 a t. (Véase la ecuación 5 del apéndice I.) El resultado es

$$-\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg - bv_y}{mg}\right) = t \tag{4-21}$$

y al resolver para v_y obtenemos

$$v_y(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}). \tag{4-22}$$

Ésta es la expresión de la velocidad en función del tiempo.

Es interesante examinar este resultado en los dos casos límite de los valores pequeño y grande de t. La velocidad comienza con $v_y = 0$ cuando $t = 0$. Poco después $t = 0$, cerca del inicio de la caída del proyectil, podemos determinar la velocidad aproximando la función exponencial por medio de $e^{-x} \approx 1 - x$ con un $x(x \ll 1)$ pequeño. Esto nos da

$$v_y(t) \approx \frac{mg}{b}\left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m}\right)\right] = gt \quad (t \text{ pequeño}) \tag{4-23}$$

que concuerda con la ecuación 2-29 cuando $v_{0y} = 0$ (recordando que escogimos que la dirección positiva y hacia abajo). El objeto se encuentra aproximadamente en caída libre al comenzar el movimiento, cuando la velocidad es pequeña y la fuerza de resistencia al avance no se ha acrecentado de modo considerable.

Con un t grande, el exponencial se aproxima a cero ($e^{-x} \to 0$ como $x \to \infty$), y la magnitud de la velocidad a la *rapidez terminal* dada por

$$v_T = \frac{mg}{b}. \tag{4-24}$$

También podemos calcular la rapidez terminal directamente de la ecuación 4-19: cuando la rapidez aumenta hasta alcanzar el punto donde la fuerza de resistencia al avance y el peso son iguales, $a_y = 0$, y la ecuación 4-19 nos da la ecuación 4-24.

Vemos que, conforme a lo previsto, cuanto mayor sea el coeficiente b de la fuerza de resistencia al avance, más pequeña será la rapidez terminal. La de un guijarro que cae en el agua es menor que cuando cae en el aire, porque el coeficiente es mucho mayor en el primer caso.

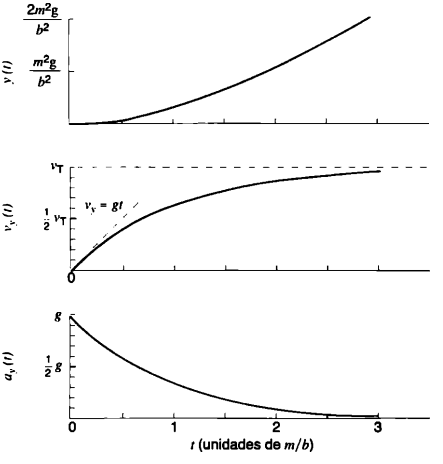


FIGURA 4-11. Posición, velocidad y aceleración de un cuerpo que cae sujeto a una fuerza de resistencia al avance. Nótese que la aceleración comienza en g y termina a cero; la velocidad comienza en cero y se aproxima a v_T. Asimismo, obsérvese que $y(t)$ se vuelve casi lineal con un t grande, como cabe esperar de un movimiento con velocidad constante.

Ahora que contamos con una expresión para $v_y(t)$, podemos diferenciarla para determinar $a_y(t)$ o integrarla y encontrar $y(t)$. (Véase el problema 17.) La figura 4-11 muestra la dependencia de tiempo de y, v_y y a_y.

Una fuerza de resistencia al avance proporcional a v es representativa de la *resistencia viscosa*, fuerza que podría experimentar una partícula pequeña que cae a través de un fluido espeso. En el aire los objetos grandes experimentan una

TABLA 4-1 Algunas velocidades terminales en el aire

Objeto	*Rapidez terminal* (m/s)	*Distancia*[a] de 95% (m)
Lanzamiento de 16 lb	145	2,500
Paracaidismo acrobático (típico)	60	430
Pelota de béisbol	42	210
Pelota de tenis	31	115
Balón de baloncesto	20	47
Pelota de ping-pong	9	10
Gota de lluvia (radio = 1.5 mm)	7	6
Paracaidismo en caída libre	5	3

[a]Ésta es la distancia a la que el cuerpo debe caer del reposo para alcanzar el 95% de su rapidez terminal.

Fuente: Adaptado de Peter J. Brancazio, *Sport Science* (Simon & Schuster, 1984).

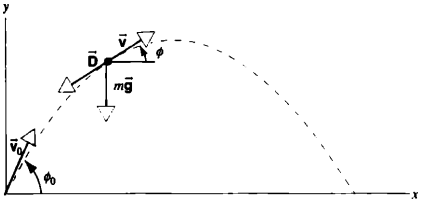


FIGURA 4-12. Proyectil en movimiento. Se lanza con una velocidad v_0 en un ángulo ϕ_0 con la horizontal. Más tarde su velocidad es $\vec{v}$ en un ángulo ϕ. El peso y la fuerza de resistencia al avance (que siempre señala en dirección contraria a $\vec{v}$) se muestran en ese momento.

resistencia aerodinámica al avance, donde D es proporcional a v^2. Este caso es más complicado desde el punto de vista matemático, pero también produce una rapidez terminal (distinta a la calculada para $D \propto v$).

La tabla 4-1 muestra valores medidos típicos de la rapidez terminal de diversos objetos en el aire.

Movimiento de proyectiles con resistencia del aire

Los cálculos de la resistencia al avance también son importantes en el movimiento bidimensional de proyectiles. Una pelota de béisbol, por ejemplo, deja el bat con una rapidez aproximada de 100 mi/h (45 m/s). Esto ya es mayor que su rapidez terminal en el aire cuando la soltamos del reposo (Tabla 4-1). La magnitud de la fuerza de resistencia al avance $D = bv$, puede estimarse a partir del cálculo precedente. En la ecuación 4-24 vemos que la constante b es el peso mg de la pelota (cerca de 1.4 N, lo cual corresponde a una masa de 0.14 kg), dividido entre su rapidez terminal, 42 m/s. Por tanto, $b = 0.033$ N/(m/s). Si la pelota recorre 45 m/s, sentirá una fuerza de resistencia al avance bv con una magnitud aproximada de 1.5 N, que es mayor que su peso y que, por tanto, tiene un efecto considerable en su movimiento.

La figura 4-12 muestra el diagrama de cuerpo libre en un punto particular de la trayectoria de la pelota de béisbol. Igual que todas las fuerzas de fricción, $\vec{D}$ sigue una dirección contraria a $\vec{v}$, y suponemos que no sople viento. Si tomamos

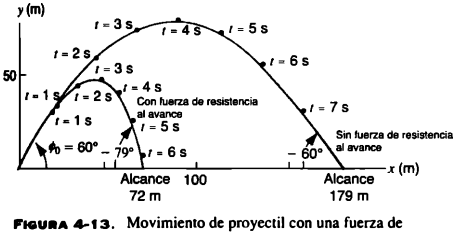


FIGURA 4-13. Movimiento de proyectil con una fuerza de resistencia al avance y sin ella, calculado cuando $v_0 = 45$ m/s y $\phi_0 = 60°$.

$\vec{D} = -b\vec{v}$, podemos emplear las leyes de Newton para encontrar una solución analítica a la trayectoria, un ejemplo de lo que se explica esquemáticamente en la figura 4-13. Cuando se tiene en cuenta la resistencia del aire, el alcance disminuye de 179 m a 72 m y la altura máxima de 78 m a 48 m. Nótese asimismo que la trayectoria ya no es simétrica alrededor de la máxima altura; el movimiento descendente es mucho más pronunciado que el ascendente. Con $\phi_0 = 60°$, el proyectil cae al suelo en un ángulo de $-79°$, y sin resistencia al avanzar lo haría en un ángulo igual a $-\phi_0 = -60°$.

El cálculo ha de efectuarse con métodos numéricos* en otras opciones (más realistas) de la fuerza de resistencia al avance $\vec{D}$. ■

4-5 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire, la magnitud y la dirección de la aceleración son constantes, pero cambian las de la velocidad. A continuación se examina otro caso del movimiento en dos dimensiones en que una partícula se desplaza con una *rapidez* constante en una trayectoria circular. Como veremos luego, tanto la velocidad como la aceleración tienen magnitud constante, pero su dirección cambia continuamente. A esto se le llama *movimiento circular uniforme*. Ejemplos de este tipo de movimiento, son los satélites y los puntos en rotores que giran como los ventiladores o los carruseles. De hecho, en la medida en que nos consideramos partículas, nos hallamos en un movimiento circular uniforme debido a la rotación de la Tierra.

Imagine, por ejemplo, que una pelota gira atada a una cuerda en un plano horizontal como el de la figura 4-14. (Por ahora no se incluyen la fuerza de resistencia al avance ni la de gravedad.) Al hacer girar la pelota, los dedos ejercen fuerza sobre la cuerda (y ésta a su vez lo hace sobre la pelota). Si aflojara un poco la fuerza con que aprieta la cuerda, ésta resbalaría entre sus dedos y la pelota se alejaría del centro del

* Obtendrá más información sobre este cálculo en "Trajectory of a Fly Ball" de Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, enero de 1985, p. 20. Una interesante colección de artículos dedicados a problemas afines, se encuentra en *The Physics of Sports*, editado por Angelo Armenti, hijo (American Institute of Physics, 1992). Véase http://www.physics.uoguelph.ca/fun/JAVA/trajplot/trajplot.html se incluye un interesante programa que permite desplegar las trayectorias de un proyectil en varias opciones de ángulo de lanzamiento y de resistencia al aire.

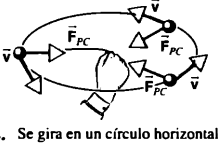


FIGURA 4-14. Se gira en un círculo horizontal una pelota sujeta a una cuerda. Los vectores que representan la velocidad y la fuerza de la cuerda en la pelota se muestran en tres instantes.

círculo; para que no ocurra eso, los dedos deben ejercer una fuerza hacia adentro sobre la cuerda.

Un ejemplo parecido se aprecia en el movimiento de los planetas. Al moverse la Luna en su órbita alrededor de la Tierra, ésta ejerce una fuerza gravitacional que siempre se dirige hacia el centro de nuestro planeta (Fig. 4-15).

En ambos casos, la fuerza tiene magnitud constante pero su dirección cambia a medida que el objeto gira en su trayectoria circular. Como la fuerza siempre apunta hacia el centro del círculo, se le conoce como *centrípeta* (palabra derivada del latín, que significa "buscar el centro"). Como no opera ninguna otra fuerza, la aceleración también debe apuntar hacia el centro del círculo (aceleración centrípeta). A partir de la geometría del movimiento circular, podemos obtener una expresión referente a la aceleración centrípeta.

Conviene señalar que, en el movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad permanece constante, pero la partícula sigue acelerando porque la *dirección* de su velocidad sigue cambiando. A pesar de que acostumbramos asociar la aceleración con el cambio de magnitud de $\vec{v}$, debe haber aceleración para cambiar la dirección de $\vec{v}$.

Estudie la geometría de la figura 4-16, y podrá determinar la relación entre esta aceleración y la magnitud constante de la velocidad. Una partícula se mueve en un círculo de radio r. Creamos un sistema coordenado xy con su origen en el centro del círculo; después examinamos el movimiento de la partícula en dos lugares: en P_1, donde su velocidad es $\vec{v}_1$, y en P_2, donde su velocidad es $\vec{v}_2$. Los puntos P_1 y P_2 están situados simétricamente respecto al eje y, y el radio en los lugares forma un ángulo θ con el eje y.

Las magnitudes de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son iguales, pero tienen direcciones diferentes y tangentes al círculo en el lugar de la partícula. Los componentes son los siguientes:

$$v_{1x} = +v\cos\theta \qquad v_{1y} = +v\,\text{sen}\,\theta$$
$$v_{2x} = +v\cos\theta \qquad v_{2y} = -v\,\text{sen}\,\theta \tag{4-25}$$

donde con v hemos representado la magnitud común de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

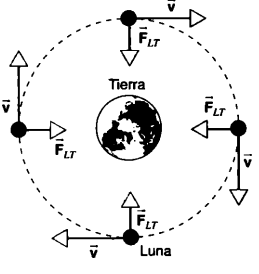


FIGURA 4-15. La Luna se mueve en su órbita alrededor de la Tierra. Los vectores de velocidad y de fuerza se muestran en cuatro instantes. La velocidad siempre es tangente a la trayectoria circular, y la fuerza sobre la Luna debida a la Tierra siempre señala hacia el centro del círculo.

A medida que la partícula se desplaza sobre el arco de P_1 a P_2, recorre una distancia de $2r\theta$ (donde θ se mide en radianes); y si lo hace en un intervalo Δt, su rapidez v es $2r\theta/\Delta t$. Por tanto, podemos expresar el intervalo así

$$\Delta t = \frac{2r\theta}{v}. \tag{4-26}$$

A continuación obtenemos los componentes de la aceleración promedio. Utilizamos la definición que de ella se da en la ecuación 2-14, $\vec{a}_{pro} = \Delta\vec{v}/\Delta t$, donde $\Delta\vec{v}$ significa $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$. El componente x de la aceleración promedio será entonces

$$a_{pro,x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0. \tag{4-27}$$

Como se advierte en la figura 4-16, los componentes x de la velocidad son los mismos en P_1 y P_2, por lo cual no debe sorprendernos que el componente x de la aceleración promedio también sea cero en ese intervalo. El componente y es

$$a_{pro,y} = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta t} = \frac{-v\,\text{sen}\,\theta - v\,\text{sen}\,\theta}{\Delta t}$$
$$= \frac{-2v\,\text{sen}\,\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right). \tag{4-28}$$

Podemos obtener la aceleración instantánea a partir de este resultado, tomando el límite a medida que el intervalo tienda a cero. También podemos dejar que el ángulo θ tienda a cero, de modo que P_1 y P_2 se acerque a P, lo cual nos da

$$a_y = \lim_{\theta\to 0}\left[-\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right)\right] = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right).$$

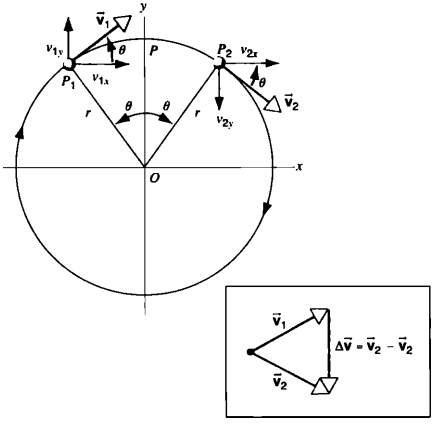


FIGURA 4-16. Una partícula se desplaza con rapidez constante en un círculo de radio r. Se muestran las posiciones P_1 y P_2, donde el radio forma ángulos iguales θ en lados opuestos del eje y. La inserción muestra el vector $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$; éste siempre señala hacia el centro del círculo, sin que importe dónde escojamos los puntos P_1 y P_2.

Con ángulos pequeños sen $\theta \approx \theta$ (en radianes) y, en consecuencia, el límite se aproxima al valor 1. El componente y de la aceleración instantánea en P será entonces $a_y = -v^2/r$; el signo menos indica que la aceleración en P señala en dirección negativa, es decir, hacia el centro del círculo.

P es un punto arbitrario en el círculo. Podríamos haber repetido el cálculo anterior con cualquier punto del círculo y habríamos obtenido el mismo resultado: *la aceleración apunta hacia el centro del círculo y tiene una magnitud* v^2/r. Es un resultado general con cualquier partícula que se mueve en un círculo a velocidad constante; la aceleración centrípeta es

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \tag{4-29}$$

Algunas veces a la aceleración centrípeta se le llama *radial*, porque su dirección siempre es a lo largo de un radio del círculo. En la figura 4-16 se ve que la dirección de $\vec{a}$ es la misma que la de $\Delta\vec{v}$, justo como lo exige la relación vectorial de la ecuación 2-14.

Tanto en caída libre como en el movimiento de proyectiles, $\vec{a}$ tiene dirección y magnitud constantes; podemos utilizar las ecuaciones desarrolladas para la aceleración constante. No podemos emplearlas en el movimiento circular uniforme, porque $\vec{a}$ cambia de dirección y, por tanto, no es constante.

Las unidades de la aceleración centrípeta son las mismas que las de una aceleración resultante de un cambio en la magnitud de la velocidad. Desde el punto de vista dimensional tenemos

$$[a] = \frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(L/T)^2}{L} = \frac{L}{T^2},$$

que son comúnmente dimensiones de aceleración. Por lo tanto, las unidades deben ser m/s^2, km/h^2, o bien, unidades de dimensiones similares L/T^2.

La aceleración debida al cambio de dirección de la velocidad es tan real como aceleración en todos los sentidos, como la atribuible a un cambio en la magnitud de una velocidad. Por definición, aceleración es la variación temporal del cambio de velocidad; por ser un vector, la velocidad puede cambiar de dirección y también de magnitud. Si una magnitud física es un vector, no pueden ignorarse sus aspectos direccionales, porque sus efectos serán tan importantes y reales como los ocasionados por los cambios de magnitud.

Según la segunda ley de Newton en su forma vectorial ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$), la aceleración y la fuerza neta han de tener la misma dirección. En el caso de un movimiento circular con rapidez constante, la fuerza neta debe señalar hacia el centro del círculo. Por ahora escribiremos este resultado en función de las magnitudes: $|\Sigma \vec{F}| = ma$. En un movimiento circular uniforme, $a = a_c = v^2/r$, y por tanto

$$\left|\sum \vec{F}\right| = \frac{mv^2}{r}. \tag{4-30}$$

A la magnitud del lado izquierdo de la ecuación 4.30 se le llama a veces "fuerza centrípeta". Ésta no es una nueva clase de fuerza. Cuando una partícula se desplaza en una trayectoria circular a velocidad constante, varias fuerzas actúan sobre ella. La resultante de todas ellas ha de señalar hacia el centro del círculo, y se le conoce como fuerza centrípeta. Así pues, la segunda ley de Newton nos da la magnitud y la dirección de la aceleración.

En la figura 4-14, la cuerda proporciona la fuerza centrípeta que opera sobre la pelota; en la figura 4-15, la fuerza gravitacional de la Tierra proporciona la que opera sobre la Luna. Llamar "centrípeta" a una fuerza significa simplemente que actúa hacia el centro del círculo, pero nada nos dice de su naturaleza ni del cuerpo que la ejerce. Todas las fuerzas, incluso las de acción centrípeta, deben asociarse siempre a un cuerpo específico del ambiente. La fuerza centrípeta puede ser de cualquier tipo y podría, por ejemplo, deberse a la acción de la gravedad, de cuerdas, de resortes o cargas eléctricas. Como se aprecia en la ecuación 4-30, también puede ser una combinación de dos fuerzas, siempre que la dirección de la fuerza resultante se dirija hacia el centro del círculo.

En la presente sección hemos explicado el movimiento circular uniforme como un ejemplo de un caso en el que las leyes vectoriales son indispensables para entender el movimiento en dos dimensiones. Pueden emplearse métodos vectoriales más generales para describir el caso en que la aceleración tiene componentes radiales y tangenciales. Dichos métodos se describen en el Capítulo 8.

PROBLEMA RESUELTO 4-5. La Luna gira en torno a la Tierra, completando una revolución en 27.3 días. Suponga que la órbita es circular y que tiene un radio $r = 238{,}000$ millas. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ella?

Solución Tenemos $r = 238{,}000$ mi $= 3.82 \times 10^8$ m. Basándonos en el apéndice C, descubrimos que la masa de la Luna es $m = 7.36 \times 10^{22}$ kg. El tiempo en que se completa una revolución, denominado periodo, es $T = 27.3$ d $= 2.36 \times 10^6$ s. Así pues, la rapidez de la Luna (supuestamente constante) será

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82 \times 10^8 \text{ m})}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} = 1{,}018 \text{ m/s}.$$

La fuerza centrípeta proviene de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre la Luna:

$$F_{LT} = \frac{mv^2}{r} = \frac{(7.36 \times 10^{22} \text{ kg})(1{,}018 \text{ m/s})^2}{3.82 \times 10^8 \text{ m}}$$

$$= 2.00 \times 10^{20} \text{ N}.$$

PROBLEMA RESUELTO 4-6. Un satélite con una masa de 1,250 kg debe ser colocado en una órbita circular a una altura $h = 210$ km sobre la superficie terrestre, donde $g = 9.2$ m/s². *a*) ¿Cuánto pesa el satélite en esta altura? *b*) ¿Con qué rapidez tangencial debe ser introducido en su órbita? El radio de la Tierra es $R = 6{,}370$ km.

Solución *a*) El peso del satélite es

$$W = mg = (1{,}250 \text{ kg})(9.2 \text{ m/s}^2) = 1.15 \times 10^4 \text{ N}.$$

b) El peso es la fuerza de gravedad F_{ST} ejercida por la Tierra sobre el satélite. Por ser la única fuerza que actúa sobre el satélite, debe suministrar la fuerza centrípeta. Resolviendo la ecuación 4.30 para

determinar la fuerza tangencial v, obtenemos (con $r = R + h$):

$$v = \sqrt{\frac{F_{ST}r}{m}} = \sqrt{\frac{(1.15 \times 10^4\ \text{N})(6{,}370\ \text{km} + 210\ \text{km})}{1{,}250\ \text{kg}}}$$

$$= 7{,}780\ \text{m/s} = 17{,}400\ \text{mi/h}$$

Con esta velocidad, el satélite completa una órbita cada 1.48 h.

4-6 MOVIMIENTO RELATIVO

En la sección 3-2 explicamos los marcos inerciales y cómo los observadores en movimiento relativo entre ellos deducirán una aceleración idéntica si se encuentran ambos en marcos inerciales. Así pues, estos observadores coincidirán en la aplicación de la segunda ley de Newton.

En la presente sección ampliamos la comparación de observaciones a partir de diversos marcos inerciales recurriendo a consideraciones vectoriales. Examinemos como antes, la descripción del movimiento de una partícula por parte de dos observadores que se encuentran en movimiento uniforme relativo entre ellos. Podrían ser, por ejemplo, una persona en un automóvil que se desplaza a velocidad constante a lo largo de una carretera larga y recta, y otra persona que está en reposo en ella. La partícula que observan pudiera ser una pelota lanzada al aire u otro automóvil también en movimiento.

A los observadores los llamaremos S y S'. Cada uno tiene un marco de referencia correspondiente al cual está conectado un sistema coordenado cartesiano. Para facilitar la explicación supondremos que están situados en el origen de su respectivo sistema coordenado. Imponemos una sola restricción a la situación: *la velocidad relativa entre S y S' ha de ser constante.* Aquí nos referimos a la magnitud y a la dirección. Nótese que la restricción no abarca el movimiento de la partícula que es observada por ambos. La partícula no necesariamente debe moverse con velocidad constante y, de hecho, quizás esté acelerando.

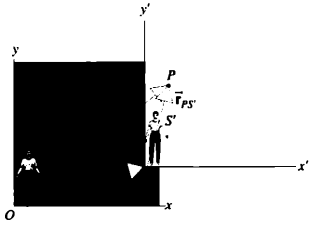


FIGURA 4-17. Los observadores S y S' que se mueven uno respecto a otro, ven a la misma partícula P en movimiento. En el tiempo mostrado, miden la posición de ella respecto a los orígenes de su sistema coordenado, y descubren que son $\vec{r}_{PS}$ y $\vec{r}_{PS'}$. En este momento, el observador S mide la posición de S' respecto al origen O, y descubre que es $\vec{r}_{S'S}$.

La figura 4-17 muestra, en determinado tiempo t, los dos sistemas coordenados que pertenecen a S y S'. Para simplificar las cosas, consideremos el movimiento en dos dimensiones únicamente: los planos comunes xy y $x'y'$ que se muestran en la figura 4-17. El origen del sistema S' está localizado respecto al origen del sistema S por el vector $\vec{r}_{S'S}$. Nótese sobre todo el orden de los subíndices con que se indica el vector: el primero da el sistema que habrá de ubicarse (en este caso, el sistema coordenado de S'), y el segundo nos proporciona el sistema respecto al cual realizamos la localización (en este caso, el sistema coordenado de S). El vector $\vec{r}_{S'S}$ se leería entonces como "la posición de S' respecto a S".

En la figura 4-17 vemos también la partícula P en los planos comunes xy y $x'y'$. Tanto S como S' determina la posición de la partícula P respecto a sus sistemas coordenados. De acuerdo con S, la partícula P está en la posición indicada por el vector $\vec{r}_{PS}$, pero en el marco S', la partícula P se encuentra en $\vec{r}_{PS'}$. De la figura 4-17 deducimos la siguiente relación entre los tres vectores:

$$\vec{r}_{PS} = \vec{r}_{S'S} + \vec{r}_{PS'} = \vec{r}_{PS'} + \vec{r}_{S'S}, \qquad (4\text{-}31)$$

donde hemos aplicado la ley conmutativa de la adición vectorial para intercambiar el orden de los dos vectores. Observemos una vez más el orden de los subíndices. En palabras, la ecuación 4-31 indica: "la posición de P medida desde S es igual a su posición medida desde S', más la posición de S' medida desde S".

Supongamos que la partícula P se desplaza con una velocidad $\vec{v}_{PS}$, medida en S'. ¿Qué velocidad de la partícula medirá S? Para contestar la pregunta, basta tomar la derivada respecto al tiempo de la ecuación 4-31, que nos da

$$\frac{d\vec{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{S'S}}{dt}.$$

La rapidez del cambio de cada vector de posición nos da la velocidad correspondiente, así que

$$\vec{v}_{PS} = \vec{v}_{PS'} + \vec{v}_{S'S}. \qquad (4\text{-}32)$$

Por tanto, en cualquier instante la velocidad de P medida por S es igual a su velocidad medida por S' más la velocidad relativa de S' relativa a S. Aunque hemos explicado las ecuaciones 4-31 y 4-32 en relación con el movimiento en dos dimensiones, las dos se aplican por igual en las tres dimensiones.

La ecuación 4-32 es una ley de la *transformación de velocidades.* Nos permite convertir una medición de velocidad realizada por un observador en un marco de referencia —digamos, S'— en otro marco —por ejemplo, S—, mientras conozcamos la velocidad relativa entre los dos marcos. Es una ley basada firmemente en el sentido común de la experiencia cotidiana, y en los conceptos de espacio y tiempo esenciales para la física clásica de Galileo y Newton. De hecho, a la ecuación 4-32 a menudo se le conoce como la *forma galileana de la ley de transformación de las velocidades.*

Examinaremos sólo el caso tan importantísimo en el cual dos marcos de referencia se mueven con velocidad constante entre sí. Es decir, $\vec{v}_{S'S}$ tiene magnitud y dirección constantes.

Las velocidades $\vec{v}_{PS}$ y $\vec{v}_{PS'}$ que S y S' miden de la partícula P pueden no ser constantes y, desde luego, generalmente no serán iguales entre sí. Pero si un observador —digamos, S'— mide una velocidad constante en el tiempo, los dos términos del lado derecho de la ecuación 4-32 son independientes del tiempo y, por tanto, el lado izquierdo de la ecuación también deberá ser independiente del tiempo. Por tanto, si un observador concluye que la partícula se mueve con velocidad constante, el resto de los observadores hará lo mismo mientras los restantes se hallen en marcos de referencia que se mueven a velocidad constante respecto al marco del primer observador.

Esto lo vemos de manera más formal al derivar la ecuación 4-32:

$$\frac{d\vec{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PS'}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{S'S}}{dt}. \qquad (4\text{-}33)$$

El último término de la ecuación 4-33 es cero, porque suponemos que la velocidad relativa de los dos marcos de referencia es constante. En consecuencia,

$$\frac{d\vec{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PS'}}{dt}.$$

Reemplazamos las dos derivadas de la velocidad con las aceleraciones correspondientes y obtenemos

$$\vec{a}_{PS} = \vec{a}_{PS'}. \qquad (4\text{-}34)$$

Las aceleraciones de P medidas por los dos observadores son idénticas.

La ecuación 4-34 indica directamente por qué en un marco inercial, cualquiera de los observadores puede aplicar con la misma eficacia las leyes de Newton. Si deducen aceleraciones idénticas de la partícula en movimiento, coincidirán en los resultados de aplicar $\vec{F} = m\vec{a}$. Si el observador S realiza pruebas exitosas y averigua que las leyes de Newton son válidas, llegará a la misma conclusión el resto de los observadores cuyo marco de referencia se mueve en relación con S a una velocidad de magnitud y dirección constantes.

PROBLEMA RESUELTO 4-7. La brújula de un avión indica que se dirige al este; su indicador de velocidad (relativa al aire) señala 215 km/h. Un viento estable de 65 km/h sopla hacia el Norte. *a*) ¿Qué velocidad tiene el avión respecto al suelo? *b*) Si el piloto quiere dirigirse al Este, ¿qué dirección deberá tomar? Es decir, ¿qué ha de indicar la brújula?

Solución *a*) En este problema la "partícula móvil", es el avión P. Hay dos marcos de referencia: el suelo (G) y el aire (A). Supondremos que el suelo es nuestro sistema S y que el aire es el sistema S'; mediante un simple cambio de notación podemos escribir la ecuación 4-32 así

$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PA} + \vec{v}_{AG}.$$

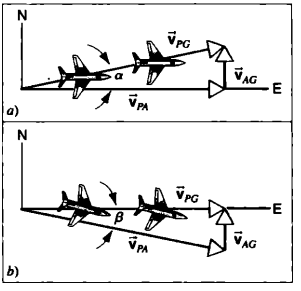


FIGURA 4-18. Problema resuelto 4-7. *a*) Un avión que se dirige al Este, es impulsado al Norte por el viento. *b*) Para mantener su rumbo inicial, habrá de dirigirse contra el viento.

La figura 4-18*a* muestra estos vectores que forman un triángulo recto. Los términos son, en orden sucesivo, la velocidad del avión respecto al suelo, la velocidad del avión respecto al aire y la velocidad del aire respecto al suelo (es decir, la velocidad del viento). Nótese la orientación del avión, que concuerda con la dirección al este que indica su brújula.

La magnitud de la velocidad terrestre (la rapidez relativa al suelo) se calcula por medio de

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AG}^2} = \sqrt{(215\text{ km/h})^2 + (65\text{ km/h})^2} = 225\text{ km/h}.$$

El ángulo α en la figura 4-18*a* se obtiene así

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-1}\frac{65\text{ km/h}}{215\text{ km/h}} = 16.8°.$$

Por tanto, respecto al suelo, el avión vuela a 225 km/h en una dirección al Norte del Este de 16.8°. Nótese que la rapidez relativa al suelo es mayor que la del avión relativa aire.

b) En este caso, el piloto debe dirigirse hacia el viento, de modo que la velocidad del avión respecto al suelo apunte al Este. El viento no cambia y el diagrama vectorial que representa a la ecuación 4-32 es como el de la figura 4-18*b*. Nótese que los tres vectores todavía forman un triángulo recto, igual que en la figura 4-18*a*, sólo que en este caso la hipotenusa es v_{PA} en vez de v_{PG}.

Ahora la rapidez relativa al piso del piloto es

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215\text{ km/h})^2 - (65\text{ km/h})^2} = 205\text{ km/h}.$$

Como indica la orientación del avión en la figura 4-18*b*, el piloto habrá de dirigirse hacia el viento en un ángulo β dado por

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{65\text{ km/h}}{215\text{ km/h}} = 17.6°.$$

Adviértase que, al dirigirse hacia el viento como lo hizo el piloto, la rapidez relativa al piso es ahora menor que la relativa al aire.

OPCIÓN MÚLTIPLE

4-1 Movimiento en tres dimensiones con aceleración constante

1. Un objeto se desplaza en el plano xy con una aceleración que tiene un componente positivo x. En el tiempo $t = 0$, posee una velocidad dada por $\bar{v} = 3\hat{i} + 0\hat{j}$.

   a) ¿Qué puede concluirse sobre el componente y de la aceleración?
   A) El componente y debe ser positivo y constante.
   B) El componente y debe ser negativo y constante.
   C) El componente y debe ser cero.
   D) No puede concluirse nada en absoluto respecto al componente y.

   b) ¿Qué puede concluirse sobre el componente y de la velocidad?
   A) El componente y debe estar aumentando.
   B) El componente y debe ser constante.
   C) El componente y debe estar disminuyendo.
   D) No puede concluirse nada en absoluto respecto al componente y.

   c) ¿Qué puede concluirse sobre la velocidad?
   A) La magnitud de la velocidad debe estar aumentando.
   B) La magnitud de la velocidad debe ser constante.
   C) La magnitud del componente de velocidad debe estar disminuyendo.
   D) No puede concluirse nada en absoluto respecto a la magnitud de la velocidad.

2. Un objeto se desplaza con una aceleración constante $\bar{a}$. ¿Cuál de las siguientes expresiones también es constante?
   A) $d|\bar{v}|/dt$ B) $|d\bar{v}/dt|$
   C) $d(v^2)/dt$ D) $d(\bar{v}/|\bar{v}|)/dt$

4-2 Leyes de Newton en la forma vectorial tridimensional

3. Suponga que la fuerza neta $\bar{F}$ sobre un objeto es una constante no cero. ¿Cuál de las siguientes magnitudes será constante también?
   A) Posición. B) Rapidez.
   C) Velocidad. D) Aceleración.

4. Dos fuerzas de magnitud F_1 y F_2 actúan sobre un objeto. La magnitud de la fuerza neta F_{neta} sobre el objeto se hallará en el intervalo
   A) $F_1 \leq F_{neta} \leq F_2$.
   B) $(F_1 - F_2)/2 \leq F_{neta} \leq (F_1 + F_2)/2$.
   C) $|F_1 - F_2| \leq F_{neta} \leq |F_1 + F_2|$.
   D) $F_1^2 - F_2^2 \leq (F_{neta})^2 \leq F_1^2 + F_2^2$.

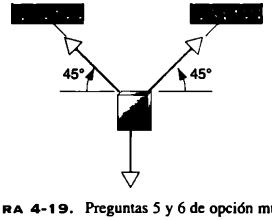


FIGURA 4-19. Preguntas 5 y 6 de opción múltiple.

5. Un objeto pequeño de 2.0 kg está suspendido en reposo de dos cuerdas como se muestra en la figura 4-19. La magnitud de la fuerza que cada una ejerce sobre él es 13.9 N; la magnitud de la fuerza de gravedad es 19.6 N. La de la fuerza neta sobre el objeto es
   A) 47.4 N. B) 33.5 N. C) 13.9 N.
   D) 8.2 N. E) 0 N.

6. La cuerda a la izquierda en la figura 4-19 se rompe repentinamente. En el preciso instante en que eso ocurre, la magnitud de la fuerza neta sobre el objeto es
   A) 47.4 N. B) 33.5 N. C) 13.9 N.
   D) 8.2 N. E) 0 N.

4-3 Movimiento de proyectiles

7. Se lanza un proyectil con la velocidad inicial $\bar{v}_0$, en un ángulo ϕ_0 con la horizontal. Desprecie la resistencia del aire. *a)* ¿En qué parte del movimiento es la fuerza neta sobre el proyectil igual a cero? *b)* ¿En qué parte del movimiento es su aceleración igual a cero?
   A) Antes que alcance su altura máxima.
   B) En su punto más alto.
   C) Después de alcanzar la altura máxima.
   D) En ningún lugar de la trayectoria.

8. Se lanza un objeto al aire con una velocidad inicial dada por $\bar{v}_0 = (4.0\hat{i} + 9.8\hat{j})$ m/s. No tenga en cuenta la resistencia del aire.
   a) ¿En el punto más alto la magnitud de su velocidad es?
   A) 0. B) $\sqrt{4.9^2}$ m/s.
   C) $\sqrt{9.8^2}$ m/s. D) $\sqrt{4.9^2 + 9.8^2}$ m/s.

   b) En $t = 0.5$, la magnitud de la velocidad es
   A) $\sqrt{(4.9 + 9.8/2)^2}$ m/s. B) $\sqrt{4.9^2 + (9.8/2)^2}$ m/s.
   C) $\sqrt{(4.9/2)^2 + 9.8^2}$ m/s. D) $\sqrt{(4.9/2)^2 + (9.8/2)^2}$ m/s.

9. En la Batalla de Tarawa durante la Segunda Guerra Mundial, desde 40 millas en el mar los acorazados disparaban proyectiles balísticos contra las fortalezas japonesas en Betio. Suponiendo que no hubiera resistencia del aire y que las trayectorias se escogieran para obtener el alcance óptimo, *a)* los proyectiles alcanzarían una altitud máxima en un intervalo de
   A) 0 a $\frac{1}{2}$ mi. B) $\frac{1}{2}$ a 2 mi. C) 2 a 5 mi.
   D) 5 a 8 mi. E) 8 a 12 mi.
   antes de regresar al suelo.
   b) ¿Cuál sería la velocidad inicial aproximada de los proyectiles?
   A) 25,000 ft/s. B) 2,500 ft/s.
   C) 250 ft/s. D) 25 ft/s.

10. Un proyectil disparado verticalmente de un cañón llega a una altura de 200 metros antes de regresar al suelo. Si el mismo cañón lo disparara en un ángulo, el alcance máximo sería aproximadamente
    A) 200 m. B) 400 m.
    C) 800 m. D) 1600 m.
    (Suponga que la resistencia del aire es despreciable.)

4-4 Fuerzas de resistencia al avance y el movimiento de proyectiles (Opcional)

11. ¿Cuál gráfica de velocidad-tiempo de la figura 4-20 muestra la de un objeto arrojado verticalmente al aire cuando la resistencia de éste está dada por $D = bv$? La línea punteada denota la gráfica de velocidad si no hubiera esa resistencia.

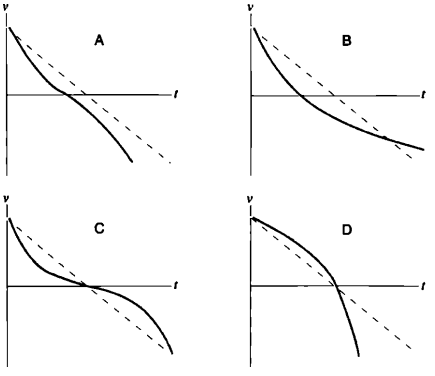


FIGURA 4-20. Pregunta de opción múltiple 11.

12. Se calcula que para arrojar un objeto verticalmente hasta una altura h, hay que lanzarlo con una velocidad inicial ascendente v_0, suponiendo que no exista resistencia del aire. Las líneas punteadas de la figura 4-21 indican el movimiento de acuerdo con este cálculo. ¿Cuál de las gráficas de velocidad-tiempo muestran el movimiento de un objeto lanzado con una velocidad inicial ascendente v_0' que también alcanzará la altura h, pero esta vez con resistencia del aire?

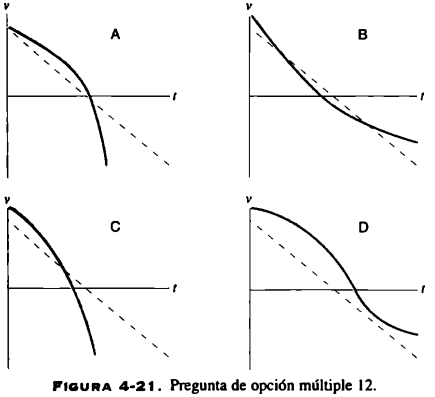


FIGURA 4-21. Pregunta de opción múltiple 12.

13. Un paracaidista salta de un avión. Cae libremente por algún tiempo y luego abre el paracaídas. Poco después que su paracaídas se abre, él
    A) sigue cayendo, pero su velocidad disminuye rápidamente.
    B) se detiene momentáneamente y luego comienza a caer de nuevo, sólo que con mayor lentitud.
    C) de repente asciende y luego comienza a caer otra vez, sólo que con mayor lentitud.
    D) de pronto asciende y luego comienza a caer de nuevo, hasta que finalmente obtiene la misma velocidad que antes de abrirse el paracaídas.

4-5 Movimiento circular uniforme

14. ¿Cuál de los siguientes enunciados es el más correcto?
    A) El movimiento circular uniforme produce una fuerza constante hacia el centro.
    B) El movimiento circular uniforme se debe a una fuerza constante hacia el centro.
    C) El movimiento circular uniforme se debe a una fuerza *neta* de magnitud hacia el centro.
    D) El movimiento circular uniforme se debe a una fuerza *neta* de magnitud constante lejos del centro.

15. Un disco de goma se mueve en un círculo de radio r_0 con una rapidez constante v_0, en una mesa uniforme sin fricción. Al disco se le sujeta una cadena que lo mantiene en el círculo; la cuerda atraviesa un hoyo sin fricción, y por el otro extremo se ata a un objeto colgante de masa M (Fig. 4-22).
    a) Hacemos que el disco de goma se desplace con una rapidez $v' = 2v_0$, pero todavía en un círculo. La masa del objeto colgante permanece inalterada. Ahora la aceleración a' del disco y del radio r' del círculo está dada por
    A) $a' = 4a_0$ y $r' = r_0$. B) $a' = 2a_0$ y $r' = r_0$.
    C) $a' = 2a_0$ y $r' = 2r_0$. D) $a' = a_0$ y $r' = 4r_0$.
    b) El disco continúa moviéndose con una rapidez $v' = 2v_0$ en un círculo, sólo que ahora la masa del objeto colgante se ha duplicado. La aceleración a' del disco y el radio r' del círculo están dados ahora por
    A) $a' = 4a_0$ y $r' = r_0$. B) $a' = 2a_0$ y $r' = r_0$.
    C) $a' = 2a_0$ y $r' = 2r_0$. D) $a' = a_0$ y $r' = 4r_0$.

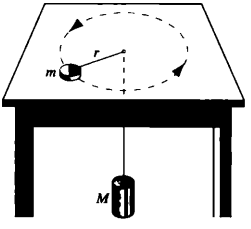


FIGURA 4-22. Pregunta de opción múltiple 15.

4-6 Movimiento relativo

16. Un objeto tiene una velocidad $\bar{v}_1$ relativa al suelo. Un observador que pasa delante de él con una velocidad constante $\bar{v}_0$ respecto al suelo, mide la velocidad del objeto y descubre que es $\bar{v}_2$ (relativa al observador). Las magnitudes de las velocidades están relacionadas por medio de
    A) $v_0 \leq v_1 + v_2$. B) $v_1 \leq v_2 + v_0$.
    C) $v_2 \leq v_0 + v_1$. D) todas las anteriores son verdaderas.

17. *a*) Un niño sentado en un vagón de ferrocarril que se mueve con velocidad constante, arroja una pelota al aire, según la persona sentada a su lado. ¿Dónde caerá la pelota?
    A) Detrás del niño. B) Delante de él.
    C) En sus manos. D) A su lado.
    b) ¿Dónde caerá la pelota si el tren acelera hacia adelante mientras la pelota está en el aire? ¿Y cuando el tren toma una curva?
    A) Detrás de él. B) Delante de él.
    C) En sus manos. D) A su lado.

PREGUNTAS

1. Una partícula se desplaza en un espacio tridimensional con una aceleración constante. ¿Puede el componente z de la aceleración afectar al componente x de su posición? ¿Puede el componente z de la aceleración afectar al componente y de la velocidad?
2. Describa una situación física donde un objeto que se desplace en el plano xy podría tener una aceleración con un componente x constante positivo, y un componente y constante negativo.
3. ¿Puede la aceleración de un cuerpo cambiar de dirección sin que suceda lo mismo con la dirección de su velocidad?
4. Representemos con $\vec{v}$ y $\vec{a}$ la velocidad y la aceleración, respectivamente, de un automóvil. Describa las circunstancias en que *a*) $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son paralelas; *b*) $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son antiparalelas; *c*) $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son perpendiculares entre sí; *d*) $\vec{v}$ es cero pero $\vec{a}$ no lo es; y *e*) $\vec{a}$ es cero pero $\vec{v}$ no es cero.
5. En la figura 4-23 mostramos cuatro fuerzas de igual magnitud. ¿Qué combinación de tres de ellas que actúan juntas sobre la misma partícula, podría mantener la partícula en reposo?

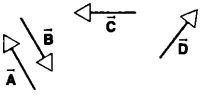


FIGURA 4-23. Pregunta 5.

6. Disparamos una flecha al aire y mantenemos la vista en ella mientras sigue una trayectoria parabólica de vuelo hasta caer al suelo. Observamos que la flecha se gira levemente en el vuelo, de modo que siempre es tangente a su trayectoria de vuelo. ¿A qué se debe eso?
7. En una competencia tres hombres jalan una cuerda a la izquierda hacia A y otros tres jalan hacia B con fuerzas de igual magnitud. Ahora un peso de 5 lb pende verticalmente del centro de la cuerda *a*) Puede el hombre hacer que la cuerda AB quede horizontalmente *b*) Si no, explíquelo. Si la respuesta es sí, determine la magnitud de fuerzas requeridas en A y B para hacerlo.
8. Un tubo en forma de rectángulo con ángulos redondeados se coloca en un plano vertical, como se muestra en la figura 4-24. Se introducen dos bolas de acero en el ángulo superior derecho. Una recorre la trayectoria AB y la otra la trayectoria CD. ¿Cuál de las dos llegará primero al ángulo inferior izquierdo?

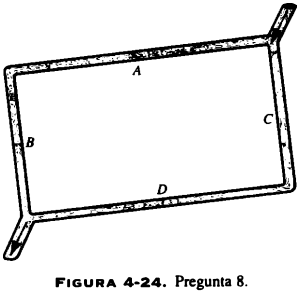


FIGURA 4-24. Pregunta 8.

9. En el salto de longitud, algunas veces llamado salto largo, ¿importa cuán alto salte uno? ¿Qué factores determinan el alcance del salto?
10. ¿Por qué el electrón de un haz proveniente de una pistola de electrones, no cae a la misma distancia por la gravedad que una molécula de agua en la corriente de una manguera? Suponga un movimiento horizontal inicialmente en ambos casos.
11. ¿En qué punto o puntos de su trayectoria alcanza un proyectil su velocidad mínima? ¿Y su velocidad máxima?
12. La figura 4-25 contiene la trayectoria seguida por un avión de la NASA en un vuelo diseñado para simular las condiciones de gravedad baja durante un intervalo corto de tiempo. Prepare un argumento para demostrar que, si el avión sigue una trayectoria parabólica particular, los pasajeros experimentarán ingravidez.

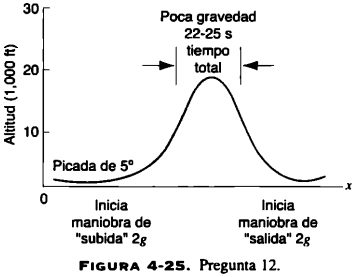


FIGURA 4-25. Pregunta 12.

13. Un palo de golf dispara un golpe arriba del nivel del suelo. El ángulo de lanzamiento que producirá el mayor alcance es menor de 45°, es decir, una trayectoria más plana tiene un alcance más largo. Explique por qué.
14. Considere un proyectil en el punto más alto de su trayectoria. *a*) ¿Cuál es su velocidad en función de v_0 y ϕ_0? *b*) ¿Cuál es su aceleración? *c*) ¿Qué relación tienen la dirección de su aceleración con la de su velocidad?
15. Las trayectorias para tres balones de fútbol pateados se muestran en la figura 4-26. Escoja la trayectoria para la cual *a*) el tiempo de vuelo es el menor, *b*) el componente de la velocidad vertical en el lanzamiento es el mayor, *c*) el componente de la velocidad horizontal en el lanzamiento es máxima y *d*) la rapidez de lanzamiento es mínima. No tenga en cuenta la resistencia del aire.

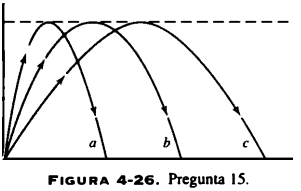


FIGURA 4-26. Pregunta 15.

16. Un rifle tiene la mira calibrada con el cañón horizontal. Demuestre que, para el mismo alcance, disparará demasiado alto

cuando lo haga colina arriba o colina abajo. (Consúltese "A Puzzle in Elementary Ballistics", de Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, abril de 1983, p. 246.)

17. En su libro *Sport Science*, Peter Brancazio, considerando algunos tipos de proyectiles como las pelotas de béisbol y las de golf, escribe lo siguiente: "En igualdad de condiciones, un proyectil se desplazará a mayor distancia en un día caluroso que en un día frío, a mayor altitud que en el nivel del mar, a mayor distancia en aire húmedo que en aire seco". ¿Cómo explica usted tales aseveraciones?

18. Una gráfica de altura en función del tiempo para un objeto lanzado verticalmente es una parábola. La trayectoria de un proyectil lanzado hacia arriba, pero no en dirección vertical, también lo es. ¿Se trata de mera coincidencia? Justifique su respuesta.

19. Las piezas de artillería de largo alcance no están instaladas en el ángulo de "alcance máximo" de 45°, sino en ángulos de mayor elevación, en un intervalo de 55° a 65°. ¿Por qué no se emplea el ángulo de 45°?

20. En el movimiento de proyectiles cuando la resistencia al aire es insignificante, ¿es necesario alguna vez considerar el movimiento tridimensional en vez del bidimensional?

21. ¿En qué condiciones sería necesario considerar el movimiento tridimensional de un proyectil?

22. Explique cómo la elección del ángulo de alcance máximo de un proyectil se vería afectada por la resistencia del aire al movimiento del proyectil que lo cruza.

23. ¿Cuáles gotas de agua caen más rápido: las pequeñas o las grandes?

24. La rapidez terminal de una pelota de béisbol es de 95 mi/h. Sin embargo, la rapidez medida de las pelotas lanzadas a menudo la superan, llegando a las 100 mi/h. ¿A qué se debe eso?

25. Describa el movimiento de un objeto que se dispara verticalmente hacia abajo, con una rapidez inicial mayor que su rapidez terminal.

26. Un madero flota corriente abajo. ¿Cómo calcularía la fuerza de resistencia al avance que opera sobre él?

27. Usted deja caer al mismo tiempo dos objetos de distinta masa desde la parte superior de una torre. Demuestre que, si supone que la resistencia del aire posee el mismo valor constante para los dos, el objeto de mayor masa caerá al suelo antes. ¿Es verosímil esta suposición?

28. ¿Por qué la tabla 4-1 incluye la "distancia de 95%", y no la "distancia de 100%"?

29. ¿Es posible estar acelerando si uno se desplaza a rapidez constante? ¿Es posible tomar una curva con aceleración cero? ¿Y con aceleración constante?

30. Describa cualitativamente la aceleración que actúa sobre una cuenta, la cual al deslizarse por un alambre sin fricción se mueve hacia adentro con rapidez constante sobre una espiral plana.

31. Demuestre que, al tener en cuenta la rotación y la traslación de la Tierra, un libro colocado en la mesa de desplazará más rápidamente por la noche que durante el día. ¿En qué marco de referencia es verdadera esa aseveración?

32. Un aviador al terminar una picada, sigue el arco de un círculo y se dice que ha "sido jalado 3 *g*" al salir de la picada. Explique qué significa esta afirmación.

33. ¿Podría la aceleración de un proyectil representarse en función de un componente radial y uno tangencial en todos los puntos de su movimiento? Si es así, ¿hay alguna ventaja en esta representación?

34. Si la aceleración de un cuerpo es constante en un marco de referencia, ¿será necesariamente constante en el resto de los marcos de referencia?

35. En la plataforma trasera de un tren que se desplaza con velocidad constante, a una mujer se le cae una moneda mientras se inclina sobre el barandal. Describa la trayectoria de la moneda vista *a*) por la mujer en el tren, *b*) por una persona de pie en el suelo cerca de las vías y *c*) una persona en otro tren que se mueve en dirección contraria al primero sobre vías paralelas.

36. Un elevador baja con rapidez constante. A un pasajero se le cae una moneda al piso. ¿Qué aceleraciones deberían observar *a*) el pasajero, y *b*) una persona en reposo respecto a la cabina del elevador?

37. El agua se acumula en una cubeta durante una lluvia estable. ¿Cambiará la rapidez con que se llena si empieza a soplar un viento horizontal constante?

38. Un autobús con una parabrisas vertical se desplaza en un temporal con una rapidez v_b. Las gotas caen verticalmente con una rapidez terminal v_r. ¿Con qué ángulo chocan contra el parabrisas?

39. Las gotas en una lluvia estable caen verticalmente. Para pasar bajo la lluvia de un lugar a otro y encontrar el menor número de ellas, ¿deberíamos movernos con la mayor rapidez posible, con la menor rapidez posible o con alguna rapidez intermedia? (Consúltese "An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", de S. A. Stern, *American Journal of Physics*, septiembre de 1983, p. 815.)

40. ¿Qué está mal en la figura 4-27? El bote navega con el viento.

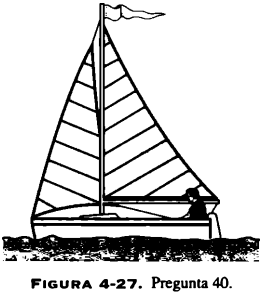


FIGURA 4-27. Pregunta 40.

41. Por la experiencia diaria estamos tan familiarizados con la transformación galileana de la velocidad (Ec. 4-32), que a veces se dice que es "evidentemente correcta, sin que se requiera prueba alguna". Muchas de las refutaciones de la teoría de la relatividad están basadas en este postulado. ¿Cómo refutaría a alguien que recurriera a él?

EJERCICIOS

4-1 Movimiento en tres dimensiones con aceleración constante

1. En un tubo de rayos catódicos, se proyecta horizontalmente un haz de electrones con una velocidad 9.6×10^8 cm/s, en la región situada entre un par de placas horizontales de 2.3 cm de largo. Un campo eléctrico entre las placas causa una aceleración descendente constante a los electrones de magnitud 9.4×10^{16} cm/s^2. Determine *a*) el tiempo que tardarán los electrones en cruzar las placas, *b*) el desplazamiento vertical del haz al atravesar las placas y *c*) los componentes horizontal y vertical de la velocidad del haz cuando emerge de las placas.
2. Un barco rompehielos navega por la superficie de un lago congelado con una aceleración constante producida por el viento. En cierto momento su velocidad es $6.30\hat{\mathbf{i}} - 8.42\hat{\mathbf{j}}$ en m/s. Al cabo de 3 segundos se encuentra instantáneamente en reposo. ¿Cuál es su aceleración durante este intervalo?
3. Una partícula se mueve de modo que su posición en función del tiempo es

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = At\hat{\mathbf{i}} + Bt^2\hat{\mathbf{j}} + Ct\hat{\mathbf{k}},$$

donde $A = 1.0$ m, $B = 4.0$ m/s^2 y $C = 1.0$ m/s. Escriba expresiones de *a*) su velocidad, y *b*) su aceleración en función del tiempo. *c*) ¿Qué forma tiene la trayectoria de la partícula?
4. Una partícula parte del origen cuando $t = 0$ con una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_0 = (3.6 \text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}$. Experimente una aceleración constante $\vec{\mathbf{a}}_0 = -(1.2 \text{ m/s}^2)\hat{\mathbf{i}} - (1.4 \text{ m/s}^2)\hat{\mathbf{j}}$. *a*) ¿En qué tiempo alcanza la partícula su coordenada *x* máxima? *b*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en este tiempo? *c*) ¿Dónde se halla en este tiempo?

4-2 Leyes de Newton en la forma vectorial tridimensional

5. Un cuerpo con masa *m* recibe la acción de dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$, como se indica en la figura 4-28. Si $m = 5.2$ kg, $F_1 = 3.7$ N y $F_2 = 4.3$ N, calcule su aceleración vectorial.

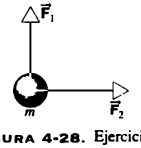


FIGURA 4-28. Ejercicio 5.

6. Un objeto de 8.5 kg pasa por el origen con una velocidad de 42 m/s paralela al eje *x*. Experimenta una fuerza constante de 19 N en dirección de su eje *y* positivo. Calcule *a*) la velocidad, y *b*) la posición de la partícula una vez transcurridos 15 s.
7. Como se muestra en la figura 4-29, un bloque de 5.1 kg es jalado sobre un piso sin fricción por una cuerda que ejerce una fuerza $P = 12$ N en un ángulo $\theta = 25°$ sobre la horizontal. *a*) ¿Qué aceleración tendrá el bloque? *b*) La fuerza *P* aumenta lentamente. ¿Qué valor tiene *P* poco antes que se levante el bloque del piso? *c*) ¿Cuál es la aceleración del bloque poco antes de ser levantado del piso?

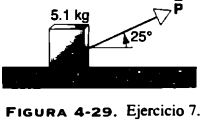


FIGURA 4-29. Ejercicio 7.

8. Un trabajador arrastra una caja por el piso de una fábrica, tirando con una cuerda atada a la caja. La cuerda, que presenta una inclinación de 38.0° sobre la horizontal, ejerce una fuerza de 450 N sobre la caja. El piso ejerce una fuerza horizontal de resistencia de 125 N, como se ve en la figura 4-30. Calcule la aceleración de la caja *a*) si su masa es de 96.0 kg, y *b*) si su peso es de 96.0 N.

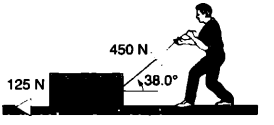


FIGURA 4-30. Ejercicio 8.

9. Un automóvil de 1,200 kg es remolcado hacia arriba en una pendiente de 18° por medio de una cuerda atada a la parte trasera de un camión. La cuerda forma un ángulo de 27° con la pendiente. ¿Cuál es la distancia máxima a que puede remolcarse en los primeros 7.5 s partiendo del reposo, si la cuerda tiene una resistencia a la rotura de 4.6 kN? Ignore todas las fuerzas de resistencia que operan sobre el automóvil (véase Fig. 4-31).

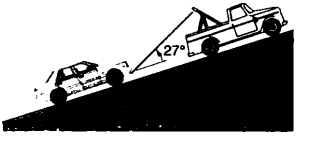


FIGURA 4-31. Ejercicio 9.

10. Una caja de 110 kg se empuja con rapidez constante hacia arriba en una rampa sin fricción de 34°, como se observa en la figura 4-32. ¿Qué fuerza horizontal *F* se requiere? (Sugerencia: Resuelva las fuerzas en los componentes paralelos a la rampa.)

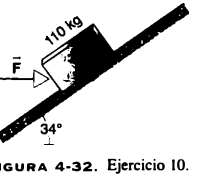


FIGURA 4-32. Ejercicio 10.

11. Antaño, los caballos tiraban de barcazas arrastrándolas por los canales como se ve en la figura 4-33. Suponga que el caballo jala una cuerda que ejerce una fuerza horizontal de 7,900 N en un ángulo de 18° en dirección del movimiento de la barcaza, que cruza el canal en línea recta. Su masa es de 9,500 kg y su aceleración 0.12 m s^2. Calcule la fuerza horizontal ejercida por el agua sobre la barcaza.

FIGURA 4-33. Ejercicio 11.

12. Un avión de propulsión de combate despega en un ángulo de 27.0° con la horizontal, acelerando a 2.62 m/s². Pesa 79,300 N. Calcule *a*) el empuje T del motor sobre el avión y *b*) la fuerza de elevación L ejercida por el aire perpendicularmente a las alas (véase Fig. 4-34). Ignore la resistencia del aire.

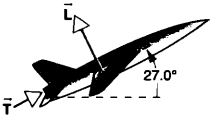


FIGURA 4-34. Ejercicio 12.

4-3 Movimiento de proyectiles

13. Una pelota rueda y se sale del borde de una tabla de una mesa horizontal, a una altura de 4.23 ft. Cae al suelo en un punto a 5.11 ft horizontalmente lejos del borde. *a*) ¿Cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire? *b*) ¿Qué velocidad tiene en el momento en que sale de la mesa?

14. Los electrones, como todas las formas de materia, caen bajo la influencia de la gravedad. Si un electrón es proyectado horizontalmente con una rapidez de 3.0×10^7 m/s (un décimo de la velocidad de la luz), ¿cuánto caerá al recorrer 1.0 m de la distancia horizontal?

15. Se lanza horizontalmente un dardo hacia el centro del blanco, punto P en la tabla, con una rapidez inicial de 10 m/s. 0.19 s más tarde da en el punto Q en el borde, verticalmente debajo de P (véase Fig. 4-35). *a*) ¿Cuál es la distancia PQ? *b*) ¿A qué distancia de la tabla se encontraba el jugador?

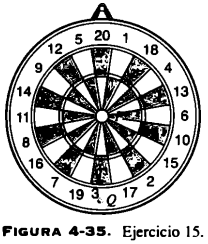


FIGURA 4-35. Ejercicio 15.

16. Arroja usted una pelota a un abismo con una velocidad inicial de 15 m/s en un ángulo de 20° debajo de la horizontal. Obtenga *a*) su desplazamiento horizontal, y *b*) su desplazamiento vertical 2.3 s más tarde.

17. Demuestre que la altura máxima alcanzada por una partícula es

$$y_{\text{máx}} = (v_0 \operatorname{sen} \phi_0)^2/2g.$$

18. Una pelota cae rodando de la parte superior de una escalera con una velocidad horizontal de 5.0 ft/s. Los escalones miden 8.0 in de alto y 8.0 in de ancho. ¿Cuál escalón golpeará primero la pelota?

19. Se arroja una pelota del suelo al aire. A una altura de 9.1 m se observa que su velocidad es $\vec{v} = (7.6 \text{ m/s})\hat{\imath} + (6.1 \text{ m/s})\hat{\jmath}$ (x eje horizontal, y eje vertical y hacia arriba). *a*) ¿Qué altura máxima alcanzará? *b*) ¿Cuál es la distancia horizontal total cubierta por la pelota? *c*) ¿Qué velocidad tendrá la pelota (magnitud y dirección) en el momento de caer al suelo?

20. Si el montículo del pitcher está a 1.25 ft sobre el nivel del campo, ¿puede lanzar una pelota horizontalmente a 92.0 mi/h y aún así mantenerla en la zona de *strike* sobre el plato, situado a 60.5 ft? Suponga que una pelota será *strike* si cae por lo menos 1.30 ft, pero no más de 3.60 ft.

21. Según la ecuación 4-14, el alcance de un proyectil no depende sólo de v_0 y ϕ_0, sino también del valor g de la aceleración gravitacional, el cual cambia de un lugar a otro. En 1936, Jesse Owens estableció la marca mundial del salto en 8.09 m durante los Juegos Olímpicos de Berlín ($g = 9.8128$ m/s²). Suponiendo los mismos valores de v_0 y ϕ_0, ¿en cuánto habría sido diferente su marca si hubiera competido en 1956 en Melbourne ($g = 9.7999$ m/s²)? (Consulte al respecto "The Earth's Gravity", de Weikko A. Heiskanen, *Scientific American*, septiembre de 1955, p. 164.)

22. ¿A qué rapidez inicial debe un basquetbolista lanzar el balón a 55° sobre la horizontal, para encestar un tiro de castigo, como se ilustra en la figura 4-36? El aro de la canasta tiene un diámetro de 18 in. Obtenga otros datos de la figura 4-36.

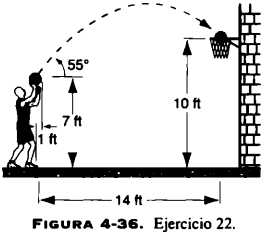


FIGURA 4-36. Ejercicio 22.

23. Un jugador de fútbol americano patea el balón de modo que permanezca en el aire (tiempo de vuelo) 4.50 s, y caiga a una distancia de 50 yd (45.7 m). Si el balón sale de su pie a 5.0 ft (1.52 m) sobre el suelo, ¿cuál será su velocidad inicial (magnitud y dirección)?

24. Cierto avión tiene una rapidez de 180 mi/h y se lanza en picada en un ángulo de 27° debajo de la horizontal cuando suelta un señuelo de radar. La distancia horizontal entre el punto donde se suelta el señuelo y el punto donde cae al suelo es 2,300 ft. *a*) ¿Cuánto dura el señuelo en el aire? *b*) ¿A qué altura volaba el avión cuando soltó el señuelo? (Véase Fig. 4-37.)

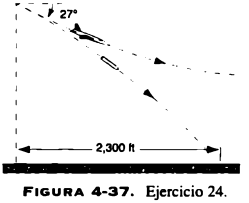


FIGURA 4-37. Ejercicio 24.

25. *a*) Durante un partido de tenis, un jugador sirve a 23.6 m/s en dirección horizontal (velocidad registrada por una pistola de radar); la pelota al salir de la raqueta alcanza una altura de 2.37 m sobre la superficie de la cancha. ¿A qué altura pasa de la red, que se encuentra a 12 m de distancia y a una altura de 0.90 m? *b*) Suponga que el jugador sirve igual que antes, salvo que la pelota sale de la raqueta a 5.0° debajo de la horizontal. ¿Pasa ahora la pelota por encima de la red?

26. Un bateador de béisbol golpea un lanzamiento a una altura de 4.0 ft sobre el nivel del suelo, de modo que su ángulo medido desde la horizontal es 45° y su alcance (horizontal) es 350 ft. La pelota llega a la línea del jardín izquierdo, donde una barda de 24ft está situada a 320 ft del plato de *home*. ¿Librará la barda? Y si lo hace, ¿por cuánto?

27. En un partido de béisbol, un bateador golpea la pelota a una altura de 4.60 ft sobre el nivel del suelo, de modo que su ángulo de elevación es 52.0° con la horizontal. La pelota cae en la tribuna principal a 39.0 ft del nivel del suelo (véase Fig. 4-38). Los asientos de la tribuna tienen una pendiente hacia arriba de 28.0°; los asientos de la parte inferior se hallan a 358 ft del plato de *home*. Calcule la rapidez con que la pelota sale del bate. (No tenga en cuenta la resistencia del aire.)

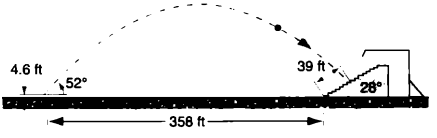


FIGURA 4-38. Ejercicio 27.

28. ¿Cuál es la altura vertical máxima a la cual un beisbolista puede lanzar una pelota, si la distancia máxima a que puede hacerlo es de 60.0 m? Suponga que la pelota se arroja a una altura de 1.60 m con la misma rapidez en ambos casos.

4-4 Fuerzas de resistencia al avance y el movimiento de proyectiles (Opcional)

29. Un pequeño guijarro de 150 g se halla a 3.4 km de profundidad en el mar, y cae con una rapidez terminal constante de 25 m/s. ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre él?

30. Se deja caer un objeto del reposo. Calcule la rapidez terminal suponiendo que la fuerza de resistencia al avance está dada por $D = bv^2$.

31. ¿Cuánto tarda el objeto descrito por la ecuación 4-22 en alcanzar una mitad de su rapidez terminal?

32. Basándose en la tabla 4-1, calcule el valor de b para la gota de agua, suponiendo que la fuerza de resistencia al avance esté dada por $D = bv$. La densidad del agua es 1.0 g cm^3.

33. Una locomotora arrastra 23 vagones por una vía uniforme. Cada vagón posee una masa de 48.6 toneladas métricas, y está sujeto a una fuerza de resistencia al avance $f = 243v$, donde v es la rapidez en m/s y la fuerza f se da en N. En el instante en que la rapidez del tren es 34.5 km/h, la aceleración es 0.182 m s^2. *a*) Calcule la fuerza ejercida por la locomotora en el primer vagón. *b*) Suponga que la fuerza encontrada en la parte *a*) es la máxima que puede ejercer sobre los vagones, entonces, ¿a qué nivel más pronunciado puede la locomotora tirar los vagones con una rapidez de 34.5 km/h? (1 tonelada métrica = 1,000 kg).

4-5 Movimiento circular uniforme

34. En el modelo del átomo de hidrógeno propuesto por Bohr, el electrón gira alrededor de un protón dentro de una órbita circular de radio 5.29×10^{-11} m con una rapidez de 2.18×10^6 m/s. *a*) ¿Cuál es la aceleración del electrón en este modelo del átomo de hidrógeno? *b*) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza neta que opera sobre el electrón?

35. Se hace girar a un astronauta en una centrífuga de 5.2 m de radio. *a*) ¿Cuál es la rapidez si la aceleración es 6.8g? *b*) ¿Cuántas revoluciones por minuto se requieren para producir esta aceleración?

36. Una rueda de carnaval de Ferris tiene 15 m de radio y completa cinco vueltas sobre su eje horizontal por minuto. *a*) ¿Cuáles son de la magnitud y la dirección de la aceleración de un pasajero en el punto más alto? *b*) ¿Cuál es la aceleración en el punto más bajo? *c*) ¿Cuál fuerza (magnitud y dirección) ejerce la rueda de Ferris sobre una persona de 75 kg en el punto más alto y en el más bajo?

37. Se cree que ciertas estrellas de neutrones (extremadamente densas) giran a 1 rev/s, aproximadamente. Si una de ellas posee un radio de 20 km (valor típico), *a*) ¿cuál es la rapidez de un punto en el ecuador de ella?, y *b*) ¿cuál es la aceleración centrípeta del punto?

38. *a*) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un objeto en el Ecuador terrestre debida a la rotación de la Tierra? *b*) Un objeto de 25.0 kg está suspendido de una báscula de resorte en el Ecuador. Si la aceleración en caída libre debida sólo a la gravedad de la Tierra es 9.80 m/s^2, ¿qué indicará la báscula de resorte?

4-6 Movimiento relativo

39. Una persona llega en 90 s a la parte superior de una escalera eléctrica inmóvil caminando 15 m. Cuando se encuentra en ella, que ahora se mueve, llega arriba en 60 s. ¿Cuánto tiempo tardaría en subir caminando con la escalera en movimiento? ¿Depende la respuesta de la longitud de la escalera?

40. La terminal del aeropuerto en Ginebra, Suiza, tiene una "acera móvil" para que los pasajeros atraviesen más rápidamente un largo corredor. Pedro, que camina por él pero no utiliza la acera, tarda 150 s en recorrerlo. Pablo, que simplemente está en ella, cubre la misma distancia en 70 s. María no sólo usa la acera móvil, sino que camina en ella. ¿Cuánto tardará en llegar a su destino? Suponga que Pedro y María caminan a la misma velocidad.

41. Un vuelo transcontinental de 2,700 mi está programado para que tarde 50 min más en los destinos al Oeste que en los destinos al Este. La rapidez del avión de propulsión es de 600 mi/h. ¿Qué suposiciones sobre la velocidad del viento, de Este a Oeste, se hacen al preparar el programa?

42. Un tren se dirige al Sur con una velocidad de 28 m/s (en relación con el suelo) bajo una lluvia que el viento lleva al Sur. La trayectoria de cada gota de lluvia forma un ángulo de 64° con la vertical, medida por un observador a la orilla. En cambio, un observador en el tren ve perfectamente verticales las huellas de la lluvia en el cristal de la ventana. Determine al rapidez de las gotas en relación con la Tierra.

43. Un elevador sube con una aceleración ascendente de 4.0 ft s^2. En un instante su rapidez ascendente es de 8.0 ft/s, y un pemo desprendido cae del techo del elevador a 9.0 ft del piso. Calcule *a*) su tiempo de vuelo del techo al piso, y *b*) la distancia a la que cae en relación con la cabina del elevador.

44. Un avión ligero alcanza una velocidad de vuelo de 480 km/h. El piloto fija un destino 810 km al Norte, pero descubre que el avión debe dirigirse 21° al Este del Norte para llegar allí directamente. Arriba en 1.9 h. ¿Cuál fue la velocidad vectorial del viento?

45. Un acorazado navega al Norte con una velocidad de 24 km/h. Un submarino a 4.0 km de distancia le dispara un torpedo que tiene una rapidez de 50 km/h (véase Fig. 4-39). Si el rumbo del acorazado visto desde el submarino es 20° al Este del Norte *a*) ¿en qué dirección debe dispararse el torpedo para dar en él?, y *b*) ¿cuál será el tiempo de recorrido del torpedo para que lo alcance?

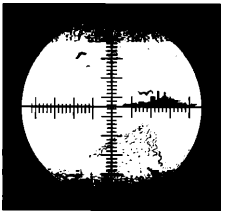


FIGURA 4-39. Ejercicio 45.

PROBLEMAS

1. Una partícula A se desplaza en la línea $y = d$ (30 m) con una velocidad constante $\vec{v}$ (v = 3.0 m/s), dirigida paralelamente al eje positivo x (Fig. 4-40). Una segunda partícula B parte del origen con una rapidez cero y con una aceleración constante $\vec{a}$ (a = 0.40 m/s^2) en el mismo instante en que la partícula A cruza el eje y. ¿Qué ángulo θ entre $\vec{a}$ y el eje positivo y producirá una colisión entre ambas?

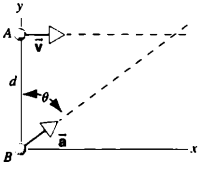


FIGURA 4-40. Problema 1.

2. Se deja caer una pelota de una altura de 39.0 m. El viento sopla horizontalmente y le imparte una aceleración constante de 1.20 m/s^2. *a*) Demuestre que la trayectoria de la pelota es una línea recta, y encuentre los valores de R y θ en la figura 4-41. *b*) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al suelo? *c*) ¿Con qué rapidez lo hace?

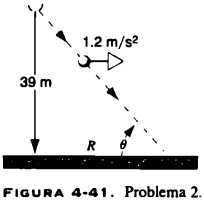


FIGURA 4-41. Problema 2.

3. Un cohete con una masa de 3,030 kg se dispara del reposo desde el suelo en un ángulo de elevación de 58.0°. El motor ejerce un empuje de 61.2 kN en un ángulo constante de 58.0° con la horizontal durante 48.0 s y luego se apaga. Ignore la masa de combustible consumido y también la resistencia aerodinámica al avance. Calcule *a*) la altitud del cohete en el momento de apagado del motor, y *b*) la distancia total entre el punto de disparo y el impacto.

4. Una pelota de béisbol sale horizontalmente de la mano del lanzador con una rapidez de 92.0 mi/h. La distancia al bateador es 60.0 ft. *a*) ¿Cuánto tarda la pelota en recorrer los primeros 30.0 ft en dirección horizontal? ¿Y los segundos 30.0 ft? *b*) ¿Qué distancia cae la pelota debido a la gravedad en los primeros 30 ft de su recorrido horizontal? *c*) ¿Y en los segundos 30.0 ft? *d*) ¿Por qué no son iguales estas cantidades? Desprecie los efectos de la resistencia del aire.

5. Arroja usted una pelota con una rapidez de 25.3 m/s en un ángulo de 42.0° arriba de la horizontal, directamente hacia una pared como se observa en la figura 4-42. La pared está a 21.8 m del punto de lanzamiento. *a*) ¿Cuánto dura en el aire antes de chocar contra la pared? *b*) ¿A qué altura del punto de lanzamiento choca contra la pared? *c*) ¿Cuáles son los componentes vertical y horizontal de su velocidad en el momento de chocar contra la pared? *d*) ¿Ya rebasó el punto más alto de su trayectoria cuando lo hace?

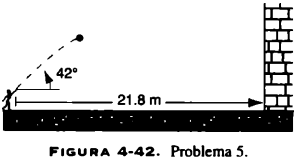


FIGURA 4-42. Problema 5.

6. Un proyectil se dispara desde el suelo en un ángulo ϕ_0 sobre la horizontal. *a*) Demuestre que el ángulo de elevación θ del punto más alto visto desde el punto de lanzamiento se relaciona con ϕ_0 por $\tan\theta = \frac{1}{2}\tan\phi_0$ (véase Fig. 4-43). *b*) Calcule θ cuando ϕ_0 = 45°.

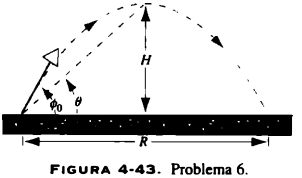


FIGURA 4-43. Problema 6.

7. Se arroja una piedra con una rapidez inicial de 120 ft/s dirigida a 62° sobre la horizontal, hacia un risco de altura h, como se muestra en la figura 4-44. Cae al suelo en A 5.5 s después del lanzamiento. Calcule *a*) la altura h del risco, *b*) la rapidez de la piedra poco antes del impacto en A y *c*) la altura máxima H alcanzada arriba del suelo.

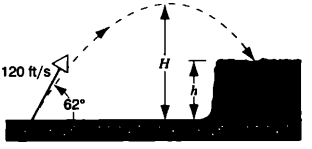


FIGURA 4-44. Problema 7.

8. *a*) En su libro *Dos ciencias nuevas*, Galileo señala que "para elevaciones (ángulos de elevación) mayores o menores de 45° en la misma cantidad, los alcances son iguales". Pruebe esta afirmación (véase Fig. 4-45). *b*) Para una rapidez inicial de 30.0 m/s y un alcance de 20.0 m, determine los dos ángulos posibles de elevación de lanzamiento.

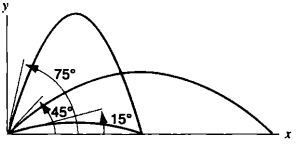


FIGURA 4-45. Problema 8.

9. El pateador de un equipo de fútbol americano puede darle al balón una rapidez inicial de 25 m/s. ¿En qué intervalo angular debe patearlo si debe anotar un gol de campo desde 50 m delante de los postes de la portería, cuya barra horizontal está a 3.44 m sobre el nivel del suelo?
10. Un observador de radar en tierra "vigila" un proyectil que se aproxima. En cierto momento tiene la siguiente información: el proyectil se halla a su máxima altitud y se desplaza horizontalmente con una rapidez v; la distancia en línea recta respecto a él es L; la línea de mira con el proyectil está en un ángulo θ arriba de la horizontal. *a*) Determine la distancia D entre el observador y el punto de impacto en el proyectil. D debe expresarse en función de las cantidades observadas v, L, θ, y el valor conocido de g. Suponga una Tierra plana; asimismo, suponga que el observador se halla en el plano de la trayectoria del proyectil. *b*) ¿Cómo puede saber si pasará sobre la cabeza del observador o si caerá al suelo antes de llegar a él?
11. Demuestre que para un proyectil $d^2(v^2)/dt^2 = 2g^2$.
12. Se lanza un proyectil del origen en un ángulo ϕ_0 con la horizontal; la posición subsecuente está dada por $\vec{r}(t)$. Con ángulos suficientemente pequeños, la distancia desde el origen $r = |\vec{r}|$ siempre aumenta. Pero si un proyectil se lanza casi en dirección vertical, alcanza el punto más alto y luego retorna al origen, de modo que la distancia respecto al origen primero aumenta y luego decrece. ¿Qué ángulo inicial de lanzamiento ϕ_c divide los dos tipos de movimiento? (Véase "Projectiles: Are They Coming or Going?", de James S. Walker, *The Physics Teacher*, mayo de 1995, p. 282.)
13. Un globo aerostático desciende a través de aire quieto con una rapidez constante de 1.88 m/s. Su peso total, incluyendo la carga útil, es de 10.8 kN. Sobre él se ejerce una fuerza constante de flotación hacia arriba de 10.3 kN. También el aire produce una fuerza de resistencia al avance dada por $D = bv^2$, donde v es la rapidez del globo y b es una constante. La tripulación tira al suelo 26.5 kg de lastre. ¿Cuál será su rapidez constante final hacia abajo?
14. Repita el problema 13, pero esta vez suponga que la fuerza de resistencia al avance está dada por $D = bv$. Nótese que es preciso evaluar la constante b.
15. Un cuerpo de masa m cae del reposo a través del aire. Una fuerza de resistencia al avance $D = bv^2$ se opone a su movimiento. *a*) ¿Cuál será su aceleración inicial hacia abajo? *b*) Después de algún tiempo, la rapidez se aproxima a un valor constante. ¿Cuál es esta rapidez terminal v_T? *c*) ¿Cuál es la aceleración descendente del cuerpo cuando $v = v_T/2$?
16. Una barcaza de canal de masa m, se desplaza con una rapidez v_i cuando apaga los motores. La fuerza de resistencia al avance D con el agua está dada por $D = bv$. *a*) Encuentre una expresión del tiempo necesario para que reduzca su rapidez a v_f. *b*) Evalúe el tiempo numéricamente para una barcaza de 970 kg que avanza inicialmente a 32 km/h y disminuye su rapidez a 8.3 km/h; el valor de b es 68 N · s/m.
17. Considere el objeto que cae mencionado en la sección 4-4. *a*) Calcule la aceleración en función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración con t pequeño? ¿Y con t grande? *b*) Determine la distancia a la que cae en función del tiempo.
18. *a*) Suponiendo que la fuerza de resistencia al avance D está dada por $D = bv$, demuestre que la distancia y_{95} de la cual un objeto debe caer del reposo para alcanzar el 95% de su rapidez terminal está dada por

$$y_{95} = (v_T^2/g)(\ln 20 - \tfrac{19}{20}),$$

donde v_T es la rapidez terminal. (Sugerencia: Use el resultado de $y(t)$ obtenido en el problema 17.) *b*) Utilizando la rapidez terminal de 42 m/s de la pelota de béisbol incluida en la tabla 4-1, calcule la distancia de 95%. ¿Por qué el resultado no concuerda con el valor contenido en esa tabla?
19. El tren rápido conocido como TGV Atlantique (Train Grande Vitesse) que del sur de París se dirige a Le Mans, Francia, tiene una rapidez máxima de 310 km/h. *a*) Si toma una curva a esa velocidad y la aceleración que sienten los pasajeros debe limitarse a $0.05g$, ¿cuál es el radio de curvatura de las vías más pequeño que puede tolerarse? *b*) Si hay una curva de 0.94 km de radio, ¿a qué velocidad debe disminuir el tren?
20. Un partícula P se desplaza con rapidez constante en un círculo de radio 3.0 m, y termina una revolución en 20 s (Fig. 4-46). Pasa por O en $t = 0$. Respecto al origen O, determine *a*) la magnitud y la dirección de los vectores que describen su posición

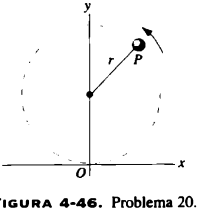


FIGURA 4-46. Problema 20.

5.0, 7.5 y 10 s más tarde; *b*) la magnitud y la dirección del desplazamiento en el intervalo de 5.0 s del quinto al décimo segundo; *c*) el vector de velocidad promedio en este intervalo; *d*) el vector de velocidad instantánea al inicio y al final de este intervalo, y *e*) el vector de velocidad instantánea al comenzar y al finalizar el intervalo. Mida los ángulos en sentido contrario al de las manecillas del reloj para el eje x.

21. Con una cuerda de 1.4 m de largo, un niño gira una piedra en un círculo horizontal a 1.9 m sobre el nivel del suelo. La cuerda se rompe y la piedra vuela horizontalmente, cayendo al suelo a 11 m de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?

22. Una mujer de 1.6 m de altura se mantiene erguida en una latitud de 50° por 24 h. *a*) Durante este intervalo, ¿qué separación existe entre la parte superior de su cabeza y las plantas de sus pies? *b*) ¿En cuánto supera la aceleración en la parte superior de su cabeza a la de las plantas de sus pies? Considere sólo los efectos relacionados con la rotación de la Tierra.

23. Una partícula se mueve en un plano de acuerdo con

$$x = R \operatorname{sen} \omega t + \omega R t$$

$$y = R \cos \omega t + R,$$

donde ω y R son constantes. Esta curva, llamada "cicloide", es la trayectoria trazada por un punto sobre el borde de una rueda que gira sin resbalarse sobre el eje x. *a*) Dibuje la trayectoria. *b*) Calcule la velocidad y la aceleración instantáneas cuando la partícula alcanza su valor máximo y mínimo de y.

24. Cae nieve verticalmente con una rapidez constante de 7.8 m/s. *a*) ¿A qué ángulo respecto a la vertical, y *b*) con que rapidez parecen caer los copos de nieve vistos por el conductor de un automóvil que se desplaza sobre una carretera recta con una rapidez de 55 km/h?

25. Uno de los primeros intentos de calcular la velocidad de la luz consistió en medir la posición de una estrella situada en ángulos rectos respecto a la trayectoria de la Tierra en su órbita (Fig. 4-47). *a*) Si se descubre que el ángulo medido θ se encuentra entre 89°59′39.3″ y 89°59′39.4″, ¿cuál será el intervalo de valores referentes a la velocidad de la luz? *b*) Describa un método razonable para medir este ángulo con la exactitud anterior. *La respuesta a esta pregunta no es tan sencilla como parece a primera vista.*

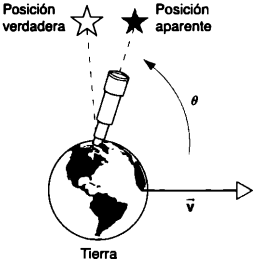


FIGURA 4-47. Problema 25.

26. Un piloto debe volar al Este de A a B y luego al Oeste de regreso a A. La velocidad de vuelo del avión es $\bar{v}$ y la del aire respecto al suelo es $\bar{u}$. La distancia entre A y B es l, y la rapidez de vuelo es constante. *a*) Si $u = 0$ (aire quieto), demuestre que el tiempo del vuelo redondo es $t_0 = 2l/v$. *b*) Suponga que la velocidad del aire sopla al Este (u Oeste). Demuestre entonces que el tiempo de un vuelo redondo será

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}.$$

c) Suponga que la velocidad del viento es hacia el Norte (o el Sur). Muestre que el tiempo para un viaje redondo es:

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}.$$

d) En las partes *b*) y *c*) debe suponer que $u < v$. ¿Por qué?

27. Dos carreteras se intersectan como se ve en la figura 4-48. En el instante mostrado, una patrulla P está a 41 m de la intersección y avanza a 76 km/h. El conductor M se halla a 57 m de allí y se desplaza a 62 km/h. En este momento, ¿cuál es la velocidad (magnitud y ángulo con la línea de mira) del conductor relativa a la patrulla?

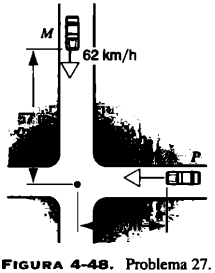


FIGURA 4-48. Problema 27.

28. La policía estatal de New Hampshire utiliza aviones para hacer cumplir los límites de velocidad. Suponga que uno de ellos tiene una velocidad de 135 mi/h en aire sereno. Vuela hacia el Norte, de manera que siempre está arriba de la carretera Norte-Sur. Desde el suelo un observador le avisa por radio al piloto que sopla un viento de 70 mi/h, pero olvida indicarle en qué dirección. El piloto observa que, a pesar del viento, el avión puede cubrir 135 mi a lo largo de la carretera en 1 h. En otras palabras, la velocidad absoluta es la misma que si no soplara el viento. *a*) ¿En qué dirección se desplaza el viento? *b*) ¿Cuál es el rumbo del avión, es decir, el ángulo entre su eje y la carretera?

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. La fuerza sobre una partícula de 5.0 kg, está dada por $F_x = -(20.0\ \mathrm{N/m})x$, y $F_y = -(20.0\ \mathrm{N/m})y$. Muestre su movimiento en una gráfica xy. Use una posición inicial de $x_0 = 2.0$ m, $y_0 = 0$ y una velocidad inicial de $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = 4.0$ m/s. Pruebe varios tamaños de paso para Δt hasta que encuentre una cuya trayectoria inicial devuelva al objeto a 1.0 cm de su posición inicial. ¿Qué forma tiene el movimiento? ¿Cuánto tardó en retornar a su punto de partida? ¿Qué sucede con la trayectoria si utiliza en cambio $v_{0y} = 3.0$ m/s?
2. La aceleración de una partícula está dada por $a_x = -(10.0\ \mathrm{m^2/s^2})x/|x|^3$, y $a_y = -(10.0\ \mathrm{m^2/s^2})y/|y|^3$. La posición inicial de la partícula es $\vec{r}_0 = 5\hat{i}$m, y la velocidad inicial sigue sólo la dirección y. *a*) Usando un tamaño de paso de $\Delta t = 0.1$ s, escoja un valor inicial de v_y, de modo que la solución numérica de la trayectoria es un círculo. Compare su resultado con el valor teórico. *b*) Repita, buscando ahora un valor inicial de v_y, que produzca una trayectoria elíptica con el doble de ancho que de largo. El inciso *b*) admite dos respuestas; encuéntrelas.
3. Desde un risco a 300 m del suelo, se arroja verticalmente hacia arriba una pelota de 150 g, con una rapidez inicial de 25 m/s. En su descenso no toca el borde del risco, y continúa cayendo hasta el suelo. Además de la fuerza de gravedad, la pelota está sujeta a una fuerza de resistencia del aire dada por $D = bv$ con $b = 0.0150$ kg/s. *a*) ¿Cuánto dura la pelota en vuelo? *b*) ¿Cuál es su rapidez poco antes de caer al suelo? *c*) ¿Cuál es la razón de esta rapidez a su rapidez terminal? (Procure aplicar el método de Euler con un intervalo de $\Delta t = 0.001$ s.)
4. La velocidad de un proyectil sujeto a la resistencia de aire se aproxima a una velocidad terminal. Suponga que la fuerza neta es $m\vec{g} - b\vec{v}$, donde b es el coeficiente de resistencia al avance y se considera que el eje y es positivo en dirección ascendente. En la velocidad terminal v_T desaparece la fuerza neta, así que $v_T = -(mg/b)$. Nótese que no tiene un componente horizontal. El proyectil finalmente cae hasta el suelo.

   Utilice un programa de computadora o una hoja de cálculo para "vigilar" un proyectil que se acerca a la velocidad terminal. Considere un proyectil de 2.5 kg lanzado con una velocidad inicial de 150 m/s, en un ángulo de 40° sobre la horizontal. Suponga que el coeficiente de resistencia al avance sea $b = 0.50$ kg/s. Integre con métodos numéricos la segunda ley de Newton, y presente los resultados por cada 0.5 s de $t = 0$ (el tiempo del lanzamiento, al tiempo en que el componente y de la velocidad es 90% de v_T. Grafique $v_x(t)$ y $v_y(t)$ en la misma gráfica. Observe que v_x se acerca a 0, como v_y se aproxima a v_T.

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

En el Capítulo 3 explicamos las leyes de Newton y dimos algunos ejemplos de sus aplicaciones. Los simplificamos a propósito para ilustrar el uso de las leyes. En este proceso se perdieron algunas ideas de la física.

En el presente capítulo incluimos más aplicaciones de las leyes de Newton, sobre todo a la fricción y a otras fuerzas de contacto, al movimiento circular y a las fuerzas no constantes. Por último mostramos cómo el uso de marcos de referencia no inerciales produce efectos susceptibles de analizarse recurriendo a fuerzas inerciales o a seudofuerzas, que, a diferencia de las fuerzas reales, no pueden ser causadas por objetos específicos del ambiente.

5-1 LEYES DE LA FUERZA

Antes de retomar las aplicaciones de las leyes de Newton, conviene que expongamos brevemente la naturaleza de las fuerzas. Con las ecuaciones del movimiento hemos analizado y calculado sus *efectos*, pero éstos nada nos dicen de las *causas* de las fuerzas. Si queremos saber a qué se debe una fuerza, es preciso conocer a fondo las interacciones de los objetos con su ambiente. En el nivel más básico, la naturaleza parece operar a través de fuerzas fundamentales pequeñas. Los físicos han identificado tradicionalmente cuatro fuerzas básicas: 1) *La fuerza gravitacional*, que se origina en presencia de la materia. 2) La *fuerza electromagnética*, que abarca las interacciones eléctricas y magnéticas primarias, y que une los átomos y la estructura de los sólidos. 3) *La fuerza nuclear débil*, que causa ciertos procesos de desintegración entre las partículas fundamentales. 4) La *fuerza nuclear fuerte* que opera entre las partículas fundamentales y se encarga de mantener unido el núcleo.

En la escala microscópica —por ejemplo, dos protones en un núcleo típico—, la intensidad relativa de estas fuerzas será: fuerte (intensidad relativa = 1); electromagnética (10^{-2}); débil (10^{-9}) y gravitacional (10^{-38}). En la escala fundamental, la gravedad es demasiado débil y tiene efectos despreciables. Podemos formarnos una idea general de la debilidad de la gravedad efectuando algunos experimentos comunes; por ejemplo, levantando algunos trozos de papel por medio de un peine con carga electrostática, algunos clavos o levantando grapas con un imán. La fuerza magnética de un imán pequeño, es suficiente para superar la fuerza gravitacional que la Tierra ¡ejerce sobre estos objetos!

La búsqueda de una simplificación aún mayor, impulsó a los físicos a tratar de reducir las fuerzas a menos de cuatro. En 1967, se propuso una teoría según la cual, las fuerzas débiles y electromagnéticas podían considerarse parte de una sola, denominada fuerza *electrodébil*. La combinación o *unificación* de ambas se parece a la unificación que en el siglo XIX se realizó de las fuerzas eléctrica y magnética en una sola fuerza electromagnética. En años recientes se propusieron otras teorías denominadas *teorías de la gran unificación*, que combinan las fuerzas intensas y electrodébiles en un solo modelo; incluso existen las "teorías de todo", que intentan incluir también la gravedad.

Afortunadamente nuestro análisis de los sistemas mecánicos no necesita recurrir a tales teorías. De hecho, todo lo que estudiamos sobre los sistemas mecánicos ordinarios comprende sólo dos fuerzas: gravedad y electromagnetismo. La fuerza de gravedad se manifiesta en la atracción que ejerce la Tierra sobre los objetos y que les confiere peso. La atracción mucho más débil de un objeto de laboratorio casi siempre es despreciable.

Se considera que el resto de las fuerzas tienen un origen electromagnético: las fuerzas de contacto, como la fuerza normal ejercida cuando un objeto empuja a otro, y la fuerza de fricción, producida cuando una superficie roza otra; las fuer-

zas viscosas, como la resistencia al aire; las fuerzas de tensión, como una cuerda estirada; las fuerzas elásticas, como las de un resorte, y muchas otras. En el nivel microscópico, se originan con la fuerza que un átomo ejerce sobre otro. Por fortuna, cuando nos ocupamos de sistemas mecánicos ordinarios, podemos prescindir del aspecto microscópico y reemplazar la subestructura compleja por una sola fuerza efectiva de determinada magnitud y dirección.

5-2 TENSIÓN Y FUERZAS NORMALES*

La figura 5-1*a* muestra a un trabajador que jala con una fuerza $\vec{P}$ una cuerda atada a una caja, acelerándola sobre la superficie que se supone que no tiene fricción. Él no ejerce directamente la fuerza sobre la caja, sino más bien, la ejerce la cuerda. A esta fuerza la llamamos *tensión* $\vec{T}$.

En la figura 5-1*b* se observan los diagramas parciales de cuerpo libre (que no sólo incluye fuerzas horizontales) de la cuerda y de la caja. La cuerda tira de la caja con una tensión $\vec{T}$; por tanto, según la tercera ley de Newton, la caja debe tirar de la cuerda con una fuerza de igual magnitud a $\vec{T}$, pero en dirección opuesta. Suponemos que la cuerda es muy delgada, de modo que la fuerza de tensión siempre opera en dirección a ella. Suponemos, asimismo, que la cuerda tiene una masa despreciable.

Al suponer que el eje x es horizontal con su dirección positiva a la derecha de la figura 5-1, descubrimos que la fuerza neta sobre la cuerda en la dirección x es $\Sigma Fx = P - T$. (Aquí P y T representan, respectivamente, la magnitud de las fuerzas $\vec{P}$ y $\vec{T}$.) Entonces la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma Fx = ma_x$ nos da $P - T = m_{\text{cuerda}}a_x = 0$, porque hemos supuesto que la masa de la cuerda es cero. De ello deducimos que $P = T$.

La fuerza neta sobre la caja en la dirección x es $\Sigma F_x = T$, y la segunda ley de Newton da $T = m_{\text{caja}}a_x$. Por tanto, $a_x = T/m_{\text{caja}} = P/m_{\text{caja}}$. La cuerda delgada y sin masa, simplemente transmite la fuerza aplicada de un extremo a otro sin que cambien la dirección ni la magnitud, es decir, la fuerza $\vec{P}$ que el trabajador ejerce sobre la cuerda es igual a la que ésta ejerce sobre la caja.

Tampoco una cuerda ideal se estira. Supóngase que agregamos otra caja a nuestro sistema, creando la configuración de la figura 5-2*a*. Igual que antes, la magnitud de la tensión $\vec{T}_1$ en la primera cuerda es igual a P. Una vez más, al suponer que el eje x es horizontal y positivo a la derecha, podemos determinar que el componente x de la fuerza neta sobre la caja 1 es $\Sigma F_x = T_1 - T_2 = P - T_2$ y, en forma semejante para la caja 2, $\Sigma F_x = T_2$. Al aplicar la segunda ley de Newton obtenemos:

*Para simplificar la notación en este capítulo, ya no designaremos las fuerzas con subíndices que indican el cuerpo sobre el cual actúa la fuerza y el que la causa. Sin embargo, al estudiar los ejemplos y resolver los problemas, el lector deberá seguir identificando los dos cuerpos para cada fuerza que intervenga.

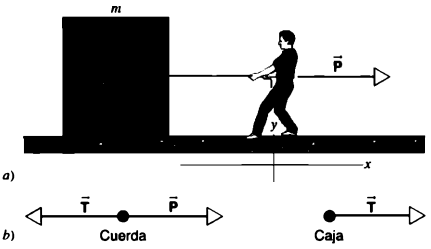


FIGURA 5-1. *a*) Un trabajador tira con una fuerza P de una cuerda atada a una caja. *b*) Diagramas parciales de cuerpo libre de la cuerda y de la caja, que muestran sólo las fuerzas horizontales.

caja 1: $$P - T_2 = m_1a_1x \quad (5\text{-}1)$$

caja 2: $$T_2 = m_2a_{2x} \quad (5\text{-}2)$$

Si la segunda cuerda (que conecta m_1 y m_2) no se estira, entonces m_1 y m_2 se desplazan con la misma velocidad y aceleración. Haciendo $a_{1x} = a_{2x} = a_x$ podemos combinar las ecuaciones 5-1 y 5-2 para encontrar

$$a_x = \frac{P}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}P. \quad (5\text{-}3)$$

Es decir, las dos cajas aceleran como un sistema individual de masa $m_1 + m_2$, al cual aplicamos la fuerza $\vec{P}$. Si consideramos sólo el esfuerzo ejercido por el trabajador, podríamos reemplazar las dos cajas por una sola de masa $m_1 + m_2$.

La fuerza de tensión se produce porque los elementos pequeños de la cuerda tiran del elemento contiguo (y a su vez son jalados por él, según la tercera ley de Newton). De este modo, una fuerza que tira de un extremo de la cuerda se transmite a un objeto situado en el otro extremo. Esta fuerza proviene de la existente entre los átomos, y su origen último es electromagnético.

Como se observa en la figura 5-3*a*, cualquier elemento i de la cuerda experimenta una tensión $\vec{T}$ que actúa en una dirección por el elemento $i - 1$, y una tensión igual que opera en dirección contraria debido al momento $i + 1$. Si cortáramos

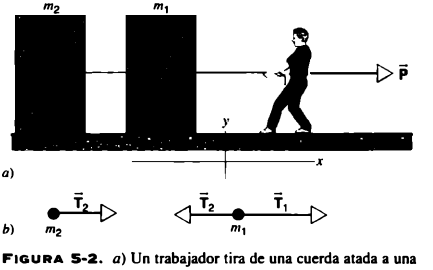


FIGURA 5-2. *a*) Un trabajador tira de una cuerda atada a una hilera de dos cajas. *b*) Diagramas parciales de cuerpo libre de las cajas, que muestran sólo las fuerzas horizontales.

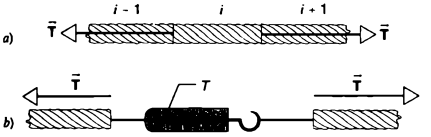


FIGURA 5-3. *a*) Tres elementos pequeños de una cuerda estirada, denotados como $i - 1$, i e $i + 1$. Se muestran las fuerzas que actúan sobre el elemento i. *b*) Si la cuerda se corta de modo que el elemento i sea reemplazado por una báscula de resorte (el resto de la cuerda permanece inalterado), la báscula indicará la tensión T.

la cuerda en un punto cualquiera y la atáramos a una báscula de resorte entre los extremos cortados, la báscula indicaría directamente la magnitud de la tensión T (Fig. 5-3*b*).

Nótese que la báscula de resorte no indica $2T$, a pesar de que una tensión $\vec{T}$ tira en ambas direcciones sobre ella. En la misma forma, cuando colgamos un objeto de peso W en una báscula de resorte, indicará W y no $2W$, aunque existe una fuerza descendente W sobre la báscula proveniente del peso del objeto, y también una fuerza ascendente igual a W en la parte superior de la báscula, debido a lo que la soporta.

PROBLEMA RESUELTO 5-1. La figura 5-4*a* muestra un bloque de masa $m = 15.0$ kg suspendida de tres cuerdas. ¿Qué tensiones hay en ellas?

Solución Primero consideramos que el nudo en la unión de las tres cuerdas es el "cuerpo". En la figura 5.4*b* se ve además el diagrama de cuerpo libre del nudo, que se encuentra en reposo bajo la acción de las tres fuerzas $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$ y $\vec{T}_C$ que se deben a las tensiones de las cuerdas. Al seleccionar los ejes x y y, podemos resolver las fuerzas en sus componentes x y y, como se indica en la figura 5-4*c*. Los componentes de aceleración son cero, por lo cual la aplicación de la segunda ley de Newton al mundo da

componente x: $\Sigma F_x = -T_A \cos 30° + T_B \operatorname{sen} 45° = ma_x = 0$

componente y: $\Sigma F_y = T_A \operatorname{sen} 30° + T_B \operatorname{sen} 45° - T_C = ma_y = 0$

En la figura 5-4*d* se observa el diagrama de cuerpo libre del bloque. Las fuerzas tienen sólo componentes y, por lo que una vez más la aceleración es cero

$$\Sigma F_y = T_C - mg = ma_y = 0.$$

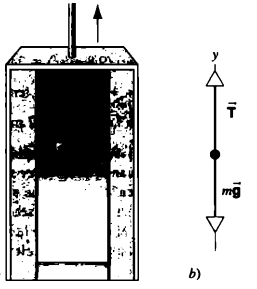


FIGURA 5-5. Problema resuelto 5-2. *a*) Un paquete cuelga de una cuerda en un elevador ascendente. *b*) Diagrama de cuerpo libre del paquete.

De este modo, al resolver para T_c queda

$$T_C = mg = (15.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 147 \text{ N}.$$

Al sustituir el resultado anterior, podemos resolver las dos ecuaciones para obtener las fuerzas que actúan simultáneamente sobre el nudo y encontramos

$$T_A = 108 \text{ N} \quad \text{y} \quad T_B = 132 \text{ N}$$

Verifique estos resultados para cerciorarse de que la suma vectorial de las tres fuerzas aplicadas al nudo son en efecto cero.

PROBLEMA RESUELTO 5-2. Un paquete (con 2.4 kg de masa) atado a una cuerda, cuelga del techo de un elevador (Fig. 5-5*a*). ¿Qué tensión tiene la cuerda cuando el elevador está *a*) bajando con velocidad constante, y *b*) subiendo con una aceleración de 3.2 m/s²?

Solución *a*) El diagrama de cuerpo libre del paquete aparece en la figura 5-5*b*. Dos fuerzas operan sobre el paquete: la ascendente, debida a la tensión en la cuerda, y la descendente, causada por la gravedad de la Tierra. Suponemos que el eje y es vertical y positivo hacia arriba. La fuerza neta en el paquete es $\Sigma F_y = T - mg$. Entonces la segunda ley de Newton ($\Sigma F_y = ma_y$) nos da $T - mg = ma_y$, y resolviendo para la tensión T,

$$T = m(g + a_y).$$

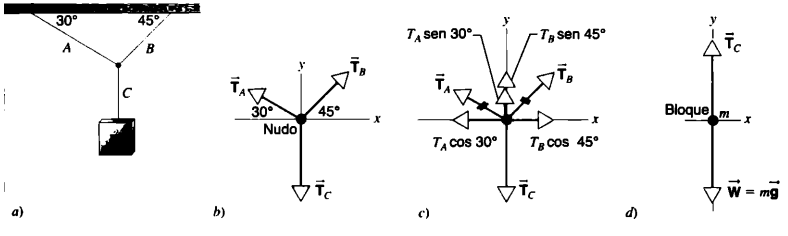


FIGURA 5-4. Problema resuelto 5-1. *a*) El bloque cuelga de tres cadenas A, B y C. *b*) Diagrama de cuerpo libre del nudo que las une. *c*) Diagrama de cuerpo libre del nudo, con $\vec{T}_A$ y $\vec{T}_B$ separados en sus componentes vectoriales x y y. Las líneas dobles en el vector, nos recuerdan que hemos reemplazado el vector por sus componentes. *d*) Diagrama de cuerpo libre del bloque.

Cuando el elevador se mueve con velocidad constante, $a_y = 0$ y, en consecuencia,

$$T = mg = (2.4 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 24 \text{ N}.$$

b) Cuando se desplaza con $a_y = +3.2 \text{ m/s}^2$, la tensión será

$$T = m(g + a_y) = (2.4 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2 + 3.2 \text{ m/s}^2) = 31 \text{ N}.$$

En este caso, el elevador sube y aumenta su rapidez. ¿Cabe esperar que la tensión sea mayor, que cuando el elevador se encuentra en reposo con una velocidad constante? Suponga que el elevador descendiera y frenara, de manera que su aceleración sea ascendente y otra vez igual a $+3.2 \text{ m/s}^2$. ¿Tendría el mismo valor la tensión en la cuerda? ¿Es eso lógico? ¿Cuál sería la tensión si el elevador estuviera en caída libre?

Compare este problema con el problema resuelto 3-7, y explique las posibles semejanzas o diferencias.

La fuerza normal

Consideremos un libro colocado en una mesa, como se aprecia en la figura 5-6*a*. La gravedad ejerce una fuerza descendente, pero el libro no presenta aceleración vertical. Por tanto, la fuerza vertical neta deberá ser cero, y deberá existir una fuerza adicional ascendente que actúa sobre él, que es la *fuerza normal* aplicada al libro por la mesa. En este sentido, el adjetivo "normal" significa "perpendicular": la fuerza normal ejercida por una superficie *siempre* es perpendicular (o normal) a ella misma.

Aunque la fuerza normal mostrada en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5-6*b* es igual y opuesta al peso, *no* es la fuerza de reacción. El peso es la fuerza que ejerce la Tierra en el libro, y su fuerza de reacción es la que ejerce el libro sobre ella. La fuerza de reacción ante la fuerza normal, es la descendente ejercida por el libro sobre la mesa, por lo que aparecería en un diagrama de cuerpo libre de la mesa. Recuerde que las parejas de acción-reacción de la tercera ley de Newton *nunca* actúan sobre el mismo cuerpo, de ahí que las fuerzas N y W que operan sobre el cuerpo no puedan ser una de esas parejas.

Si alguien pusiera una mano en la parte superior del libro y lo empujara hacia abajo con una fuerza P, el libro permanecería en reposo. Con una aceleración de cero, la fuerza neta en el libro ha de ser también cero y, en consecuencia, la fuerza descendente total $W + P$, ha de ser igual a la fuerza ascendente total N. Por tanto, la fuerza normal debe aumentar a medida que lo hace P, ya que $N = W + P$. Con el tiempo, P se vuelve lo bastante grande y excede la capacidad de la mesa para generar la fuerza normal ascendente, es decir, el libro atravesaría la tabla de la mesa.

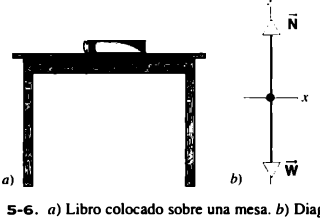


FIGURA 5-6. *a*) Libro colocado sobre una mesa. *b*) Diagrama de cuerpo libre del libro.

La tensión y las fuerzas normales son ejemplo de las fuerzas de *contacto*, en las cuales un cuerpo ejerce una fuerza sobre el otro a causa del contacto entre ellos. Estas fuerzas se originan en los átomos de los cuerpos: cada átomo ejerce una fuerza sobre su vecino (que puede ser un átomo de otro cuerpo). La fuerza de contacto podrá mantenerse, sólo si no es mayor que las fuerzas interatómicas en el interior de uno de los dos cuerpos; de lo contrario, el enlace entre los átomos puede superarse y la cuerda o la superficie se romperán en pedazos.

PROBLEMA RESUELTO 5-3. Una cuerda tira de un trineo de masa $m = 7.5$ kg sobre una superficie horizontal sin fricción (Fig. 5-7*a*). Una fuerza constante de $P = 21.0$ N se aplica a la cuerda. Analice el movimiento si *a*) la cuerda es horizontal, y *b*) forma un ángulo de $\theta = 15°$ con la horizontal.

Solución *a*) El diagrama de cuerpo libre con la cuerda horizontal se muestra en la figura 5-7*b*. La superficie ejerce una fuerza N (la fuerza normal) sobre el trineo. Los componentes de la fuerza neta que actúan sobre él son: $\Sigma F_x = P$ y $\Sigma F_y = N - mg$, y al aplicar la segunda ley de Newton obtenemos

componente x ($\Sigma F_x = ma_x$): $P = ma_x$

componente y ($\Sigma F_y = ma_y$): $N - mg = ma_y$

Como no hay movimiento vertical, el trineo permanece en la superficie y $a_y = 0$. Por tanto,

$$N = mg = (7.5 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 74 \text{ N}$$

La aceleración horizontal es

$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{21.0 \text{ N}}{7.5 \text{ kg}} = 2.80 \text{ m/s}^2.$$

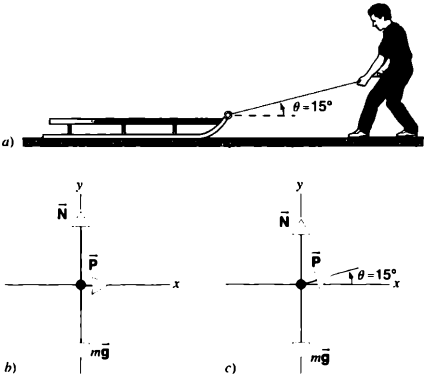


FIGURA 5-7. Problema resuelto 5-3. *a*) Se tira de un trineo por una superficie horizontal sin fricción. *b*) Diagrama de cuerpo libre del trineo cuando $\theta = 0°$. *c*) Diagrama de cuerpo libre del trineo cuando $\theta = 15°$.

Nótese que si como hemos supuesto, la superficie no tiene verdaderamente fricción, a la persona le será difícil continuar aplicando esta fuerza al trineo durante mucho tiempo. Después de 30 s con esta aceleración, el trineo se desplazará a 84 m/s (188 mi/h).

b) Cuando la fuerza de tracción no es horizontal, el diagrama de cuerpo libre es el de la figura 5-7*c*, y los componentes de la fuerza neta son: $\Sigma F_x = P\cos\theta$ y $\Sigma F_y = N + P\,\text{sen}\,\theta - mg$. Entonces la segunda ley de Newton nos da

componente x ($\Sigma F_x = ma_x$): $P\cos\theta = ma_x$

componente y ($\Sigma F_y = ma_x$): $N + P\,\text{sen}\,\theta - mg = ma_y$

Supongamos por un momento que el trineo permanece en la superficie, es decir, que $a_y = 0$. Por tanto

$$N = mg - P\,\text{sen}\,\theta = 74\text{ N} - (21.0\text{ N})(\text{sen }15°) = 69\text{ N},$$

$$a_x = \frac{P\cos\theta}{m} = \frac{(21.0\text{ N})(\cos 15°)}{7.5\text{ kg}} = 2.70\text{ m/s}^2.$$

Una fuerza normal siempre será perpendicular a la superficie de contacto; con las coordenadas escogidas como en la figura 5-7*b*, N debe ser positiva. Si aumentamos P sen θ, N disminuirá, y en algún momento será cero. En ese momento el trineo abandonará la superficie bajo la influencia del componente ascendente de P, y necesitaremos analizar su movimiento vertical. Con los valores de P y θ que hemos utilizado, el trineo permanece en la superficie y $a_y = 0$.

Nótese que a_x es más pequeña en el inciso *b*) que en el *a*). ¿Puede explicarlo?

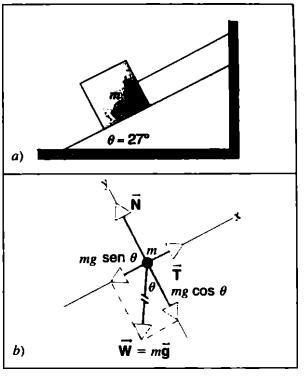


FIGURA 5-8. Problema resuelto 5-4. *a*) Una masa m está sostenida en reposo por una cuerda sobre un plano inclinado sin fricción. *b*) Diagrama de cuerpo libre de m. Nótese que el sistema coordenado xy está inclinado, de modo que el eje x es paralelo al plano. El peso $m\vec{g}$ ha sido separado en sus componentes vectoriales; la línea doble que cruza el vector $m\vec{g}$ nos recuerda que éste ha sido sustituido por sus componentes.

PROBLEMA RESUELTO 5-4. Un bloque de masa $m = 18.0$ kg, está sostenido por una cuerda en un plano inclinado con un ángulo de 27° sin fricción (Fig. 5-8*a*). *a*) Calcule la tensión de la cuerda y la fuerza normal que el plano ejerce sobre el bloque. *b*) Analice el movimiento subsecuente después de cortar la cuerda.

Solución *a*) El diagrama de cuerpo libre del bloque se ve en la figura 5-8*b*. Sobre el bloque actúan la fuerza normal $\vec{N}$, su peso $\vec{W} = m\vec{g}$ y una fuerza debida a la tensión $\vec{T}$ de la cuerda. Escogemos un sistema coordenado con el eje x sobre el plano, y el eje y perpendicular a él. Con esta elección, dos de las fuerzas ($\vec{T}$ y $\vec{N}$) ya están resueltas en sus componentes, y el movimiento que finalmente se producirá en el plano no tiene más que un componente. El peso se separa en su componente x $-mg$ sen θ, y en su componente y $-mg\cos\theta$. La fuerza neta en la dirección x, será entonces $\Sigma F_x = T - mg$ sen θ, y en la dirección y, será $\Sigma F_y = N - mg\cos\theta$.

En el caso estático, $a_x = 0$ y $a_y = 0$. Entonces la segunda ley de Newton nos da $\Sigma F_x = ma_x = 0$, y $\Sigma F_y = ma_y = 0$, así que

$$T - mg\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \text{y} \quad N - mg\cos\theta = 0.$$

Examine las ecuaciones anteriores. ¿Son razonables? ¿Qué sucede en el límite $\theta = 0°$? Parece que la tensión es cero. ¿Esperaría usted que lo fuera si el bloque estuviera en reposo sobre una superficie horizontal? ¿Qué ocurre con la fuerza normal cuando $\theta = 0°$? ¿Es eso lógico? ¿Que sucede con T y con N en el límite de $\theta = 90°$? Debería hacerse el hábito de plantearse preguntas como las anteriores, antes de realizar operaciones algebraicas para encontrar la solución. En caso de que haya un error, ahora es el momento indicado para detectarlo y corregirlo.

Si resolvemos las ecuaciones,

$$T = mg\,\text{sen}\,\theta = (18.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(\text{sen }27°) = 80\text{ N},$$

$$N = mg\cos\theta = (18.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(\cos 27°) = 157\text{ N}.$$

b) Cuando se corta la cuerda, la tensión desaparece de las ecuaciones y el bloque ya no está en equilibrio. Los componentes de la fuerza neta son ahora $\Sigma F_x = -mg$ sen θ, y $\Sigma F_y = N - mg\cos\theta$. Ahora la segunda ley de Newton aplicada a los componentes x y y nos da

$$-mg\,\text{sen}\,\theta = ma_x \quad \text{y} \quad N - mg\cos\theta = ma_y.$$

Al cortar la cuerda no cambia el movimiento en la dirección y (el bloque no salta y sale del plano), así que $a_y = 0$ igual que antes, y la fuerza normal sigue siendo igual a $mg\cos\theta$ o 157 N. En la dirección x

$$a_x = -g\,\text{sen}\,\theta = -(9.80\text{ m/s}^2)(\text{sen }27°) = -4.45\text{ m/s}^2.$$

El signo negativo indica que el bloque acelera en dirección negativa x, esto es, hacia abajo del plano. Verifique los límites $\theta = 0°$ y $\theta = 90°$. ¿Corresponden a sus expectativas?

Otras aplicaciones

En esta sección estudiaremos otras aplicaciones de las leyes de Newton. Los ejemplos se refieren a dos objetos que han de analizarse por separado, aunque no en forma totalmente independiente, porque el movimiento de un objeto está restringido por el del otro, como cuando están unidos entre sí por una cuerda de longitud fija. Estudie los ejemplos y fíjese en las opciones independientes de los sistemas coordenados que se utilizan con objetos separados.

PROBLEMA RESUELTO 5-5. Dos bloques de masa diferente m_1 y m_2, están conectados por una cuerda que pasa sobre una polea ideal (cuya masa es despreciable y que gira con una fricción también despreciable), como se aprecia en la figura 5-9. (Al arreglo, conjunto

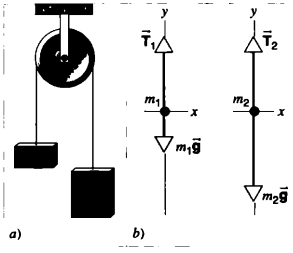


FIGURA 5-9. Problema resuelto 5-5. *a)* Diagrama de la máquina de Atwood que consta de dos bloques suspendidos conectados por una cuerda que pasa arriba de la polea. *b)* Diagrama de cuerpo libre de m_1 y m_2.

también se le llama *máquina de Atwood.**) Supongamos que m_2 es mayor que m_1. Encuentre la tensión y la aceleración de los bloques.

Solución Escogemos el sistema coordenado con el eje positivo y hacia arriba; sólo hay que considerar los componentes y de las fuerzas y de las aceleraciones. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 5-9*b*. Para m_1, la fuerza neta es $\Sigma F_y = T_1 - m_1g$; para m_2, $\Sigma F_y = T_2 - m_2g$. Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección y a ambos bloques, obtenemos

bloque 1: $$T_1 - m_1g = m_1a_{1y}$$

bloque 2: $$T_2 - m_2g = m_2a_{2y}$$

donde a_{1y} y a_{2y}, son las aceleraciones respectivas de m_1 y m_2. Si la cuerda carece de masa y no se estira, y si la polea también carece de masa y no tiene fricción, la tensión tendrá la misma magnitud en toda la cuerda, y las magnitudes de la aceleración de los bloques serán iguales. (La polea ideal no altera la magnitud de la tensión ni la aceleración de uno a otro lado de la cuerda; su única función consiste en modificar las direcciones.) Hacemos $T_1 = T_2 = T$, el valor común de la tensión en la cuerda. Si con a representamos la magnitud común de las aceleraciones, $a_{1y} = a$ (un número positivo, porque el bloque con menos masa 1 se desplaza hacia arriba), y $a_{2y} = -a$ (un número negativo, porque el bloque con más masa se desplaza hacia abajo). Al efectuar las sustituciones y resolver simultáneamente ambas ecuaciones, nos queda

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g \quad \text{y} \quad T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g. \qquad (5\text{-}4)$$

Veamos lo que sucede en los casos límite: $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $g = 0$ y $m_1 = m_2$. Nótese que $m_1g < T < m_2g$, y asegúrese de entender por qué esto debe ser verdadero. Si el sistema acelera, la tensión de la cuerda *no* será igual al peso de ninguno de los bloques.

* George Atwood (1745-1807) fue un matemático inglés que inventó este aparato en 1784, para demostrar las leyes del movimiento acelerado y para medir g. Hizo pequeña la diferencia entre m_1 y m_2, y de ese modo logró "disminuir" el efecto de la caída libre y medir el tiempo del movimiento del peso que cae con un reloj de péndulo, la forma más precisa de medir los intervalos en su época.

PROBLEMA RESUELTO 5-6. En la figura 5-10*a*, vemos un bloque de masa m_1 sobre una superficie horizontal sin fricción. Tira de él una cuerda de masa despreciable atada a un bloque suspendido de masa m_2. La cuerda pasa por una polea cuya masa es despreciable, y cuyo eje gira con una fricción también despreciable. Determine la tensión de la cuerda y la aceleración de los bloques.

Solución Las figuras 5-10*b* y *c* muestran los diagramas de cuerpo libre de los dos bloques.

En el bloque 1 actúa una fuerza normal debida a la superficie por la gravedad, y por una fuerza debida a la tensión de la cuerda. Los componentes de la fuerza neta en el bloque 1 son $\Sigma F_x = T_1$, y $\Sigma F_y = N - m_1g$, por tanto, al aplicar la segunda ley de Newton a él obtenemos:

$$T_1 = m_1a_{1x} \quad \text{y} \quad N - m_1g = m_1a_{1y}.$$

Esperamos que el bloque 1 no se mueva en la dirección y, de modo que $a_{1y} = 0$.

En el bloque 2 no hay fuerzas en la dirección x. La fuerza neta en la dirección y es $\Sigma F_y = T_2 - m_2g$, y con la segunda ley de Newton se obtiene

$$T_2 - m_2g = m_2a_{2y}.$$

Si la cuerda tiene masa despreciable, y si la polea es ideal (sin fricción y de masa insignificante), la magnitud de las fuerzas de tensión T_1 y T_2 son iguales; con T representamos el valor común de la tensión. Si la cuerda no se estira, la magnitud de la aceleración de los bloques será igual; expresando con a el valor común de la aceleración, hacemos $a_{1x} = a$, y $a_{2y} = -a$. Ahora tenemos dos ecuaciones:

$$T = m_1a \quad \text{y} \quad T - m_2g = m_2(-a).$$

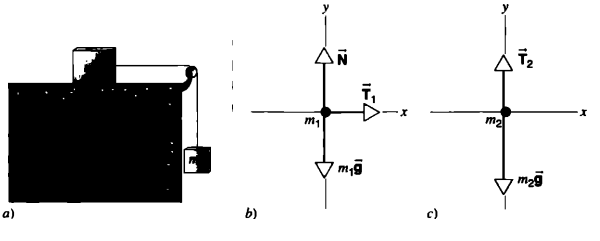


FIGURA 5-10. Problema resuelto 5-6. *a)* Se tira del bloque m_1 sobre una superficie horizontal lisa con una cuerda que pasa sobre la polea y que está atada al bloque m_2. *b)* Diagrama de cuerpo libre del bloque m_1. *c)* Diagrama de cuerpo libre del bloque m_2.

Resolviéndolas simultáneamente nos queda

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{y} \quad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{5-5}$$

Conviene considerar los casos límite de los resultados anteriores. ¿Qué sucede cuando m_1 es cero? Cabría esperar que la cuerda estuviera floja ($T = 0$), y que m_2 se hallara en caída libre ($a = g$). La ecuación predice correctamente estos límites. Cuando $m_2 = 0$, no hay una fuerza horizontal en el bloque 1 y éste no acelera; una vez más las ecuaciones ofrecen la predicción correcta.

Nótese que $a < g$, como cabría esperar. Asimismo, vea que T es menor que mg, como se supone cuando el bloque acelera hacia abajo (consúltese el problema resuelto 5-2).

¿Se comportan correctamente las ecuaciones 5-5 en el límite $g = 0$?

PROBLEMA RESUELTO 5-7. En el sistema que aparece en la figura 5-11*a*, un bloque (de masa $m_1 = 9.5$ kg) se desliza en un plano inclinado sin fricción en un ángulo $\theta = 34°$. Dicho bloque está sujeto por una cuerda a un segundo bloque (de masa $m_2 = 2.6$ kg). El sistema se suelta del reposo. Determine la aceleración del bloque y la tensión en la cuerda.

Solución El diagrama de cuerpo libre de los bloques 1 y 2 aparece en las figuras 5-11*b* y *c*. Escogemos los sistemas coordenados que se muestran, de manera que un eje coordenado sea paralelo a la aceleración prevista de los cuerpos. Como en los ejemplos anteriores, esperamos que la tensión tenga una valor común y que el movimiento vertical de m_2 y el que se da en el plano de m_1, puedan ser descritos por aceleraciones de la misma magnitud. Suponemos arbitrariamente que m_1 se desplaza en la dirección positiva x (si nos equivocamos en esta suposición, a resultará negativa). Los componentes de la fuerza neta en m_1 son $\Sigma F_x = T - m_1 g \operatorname{sen} \theta$, y $\Sigma F_y = N - m_1 g \cos \theta$, y la segunda ley de Newton nos da (con $a_1x = a$ y $a_1y = 0$):

$$T - m_1 g \operatorname{sen} \theta = m_1 a \quad \text{y} \quad N - m_1 g \cos \theta = 0.$$

Para m_2, el componente y de la fuerza neta es $\Sigma F_y = T - m_2 g$, y la segunda ley de Newton es (con $a_{2y} = -a$)

$$T - m_2 g = m_2(-a).$$

Al resolver simultáneamente tenemos

$$a = \frac{m_2 - m_1 \operatorname{sen} \theta}{m_1 + m_2} g \tag{5-6a}$$

y

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \operatorname{sen} \theta). \tag{5-6b}$$

Nótese que estos resultados se reproducen en las ecuaciones 5-5 del problema resuelto 5-6, si resolvemos $\theta = 0$ (así que el bloque 1 se desplaza en dirección horizontal) y las ecuaciones 5-4 del problema resuelto 5-5 si hacemos $\theta = 90°$ (de modo que el bloque 1 se desplace en dirección vertical).

Al sustituir números tenemos

$$a = \frac{2.6 \text{ kg} - (9.5 \text{ kg})(\operatorname{sen} 34°)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}}(9.80 \text{ m/s}^2) = -2.2 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración resulta ser negativa, lo cual significa que la suposición inicial sobre la dirección del movimiento estaba equivocada. El bloque 1 se desliza hacia abajo del plano, y el 2 se mueve hacia arriba. Como las ecuaciones dinámicas no contienen fuerzas dependientes de la dirección del movimiento, esta conjetura inicial incorrecta no influye en las ecuaciones y podemos aceptar como correcto el valor final. En términos generales, no sucederá esto cuando consideremos las fuerzas de fricción que actúan en dirección contraria a la del movimiento.

En lo tocante a la tensión de la cuerda, obtenemos

$$T = \frac{(9.5 \text{ kg})(2.6 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}}(1 + \operatorname{sen} 34°) = 31 \text{ N}.$$

Este valor es mayor que el peso de m_2 ($m_2 g = 26$ N), que es compatible con el hecho de que la aceleración de m_2 sea ascendente.

5-3 FUERZAS DE FRICCIÓN*

Un bloque de masa m que se mueve con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ en una mesa horizontal larga se detendrá finalmente. Esto significa que, mientras se desplaza, experimenta una aceleración promedio $\vec{a}_{pro}$ que está dirigida en dirección contraria a su movimiento. Si (en un marco inercial) vemos que un cuerpo acelera, siempre relacionaremos su movimiento con una fuerza definida a partir de la segunda ley de Newton. En este caso señalamos que la mesa ejerce una fuerza de *fricción*, cuyo valor promedio es $m\vec{a}_{pro}$ sobre el bloque deslizante. En general, por fricción entendemos una interacción de contacto entre sólidos. Con otros términos (véase Secc. 4-4) describimos los efectos semejantes a la fricción producidos por líquidos y gases.

En realidad, siempre que la superficie de un cuerpo se desliza sobre la de otra, ejerce una fuerza de fricción entre sí. Ésta tiene una dirección contraria a su movimiento en relación con el

* Véase "Friction at the Atomic Scale", de Jacqueline Krim, *Scientific American*, octubre de 1996, p. 74.

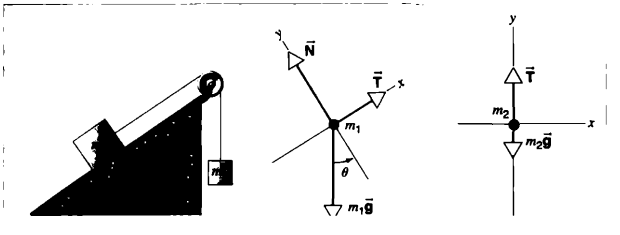


FIGURA 5-11. Problema resuelto 5-7. *a*) El bloque m_1 se desliza sobre un plano inclinado sin fricción. El bloque m_2 cuelga de una cuerda atada a m_1. *b*) Diagrama de cuerpo libre de m_1. *c*) Diagrama de cuerpo libre de m_2.

otro cuerpo. Las fuerzas de fricción se oponen automáticamente a este movimiento relativo y nunca lo favorecen. Pueden existir entre superficies aunque no haya movimiento relativo.

Hasta ahora hemos ignorado estos efectos, pero la fricción es sumamente importante en nuestra vida cotidiana. Si se deja que funcione sin restricciones, hace que todos los ejes giratorios se detengan. En un automóvil, cerca de 20% de la fuerza del motor se emplea para contrarrestarla. La fricción causa desgaste y adhesión de las partes móviles; gran parte del esfuerzo de ingeniería se centra en reducirla. Por otra parte, sin fricción no podríamos caminar; no podríamos sostener un lápiz en la mano y, si pudiéramos hacerlo, no podríamos escribir; tampoco sería posible el transporte sobre ruedas tal como lo conocemos hoy.

Queremos expresar las fuerzas de fricción en función de las propiedades del cuerpo y de su ambiente, es decir, queremos conocer la ley que las rige. A continuación consideraremos el deslizamiento (no el rodamiento) de una superficie seca (no lubricada) sobre otra. Como veremos luego, la fricción en el nivel microscópico es un fenómeno complicado en extremo. Las leyes de fuerza que gobiernan la fricción del deslizamiento en seco son empíricas y ofrecen predicciones aproximadas. No tienen la elegante simplicidad ni exactitud que encontramos en la ley de la fuerza de gravitación (Cap. 14), y tampoco se parecen a la ley de la fuerza electrostática (Cap. 25). Sin embargo, dada la enorme diversidad de superficies, es interesante señalar que muchos aspectos del comportamiento friccional pueden entenderse cualitativamente con base en unos cuantos mecanismos simples.

Consideremos un bloque en reposo sobre una mesa horizontal como el de la figura 5-12*a*. Le atamos un resorte para medir la fuerza horizontal $\vec{F}$ necesaria para ponerlo en movimiento. Descubrimos que no se moverá aunque le apliquemos una fuerza pequeña (Fig. 5-12*b*). Decimos que la fuerza aplicada está equilibrada por una fuerza opuesta de fricción $\vec{f}$ ejercida sobre él, por la mesa que actúa sobre la superficie de contacto. Al aumentar la fuerza aplicada (Figs. 5-12*c* y *d*), observamos un valor de la fuerza a la que el bloque "romperá el reposo", respecto de la superficie y empezará a acelerar (Fig. 5-12*e*). Al reducir la fuerza una vez iniciado el movimiento, vemos que es posible mantenerlo en movimiento uniforme sin aceleración (Fig. 5-12*f*). La figura 5-12*g* contiene los resultados de un experimento en que se midió la fuerza de fricción. Se aplica una fuerza creciente F comenzando en $t = 2$ s, tras lo cual aumenta con la fuerza aplicada y el objeto permanece en reposo. Cuando $t = 4$ s, de repente el objeto comienza a desplazarse y la fuerza de fricción se torna constante, independientemente de la fuerza aplicada.

Se da el nombre de *fricción estática*, a las fuerzas de fricción que actúan unas sobre otras entre las superficies en reposo. La fuerza máxima de la fricción estática (correspondiente al máximo con $t = 4$ s en la figura 5-12*g*) será la misma que la fuerza más pequeña necesaria para iniciar el movimiento. Una vez iniciado, las fuerzas de fricción que operan entre las superficies suelen disminuir, de modo que se necesita una fuerza más pequeña para mantener el movimiento uniforme (correspondiente a la fuerza casi constante cuando $t > 4$ s en la figura 5-12*g*). A las fuerzas que actúan entre superficies en el movimiento relativo, se les conoce como fuerzas de *fricción cinética*.

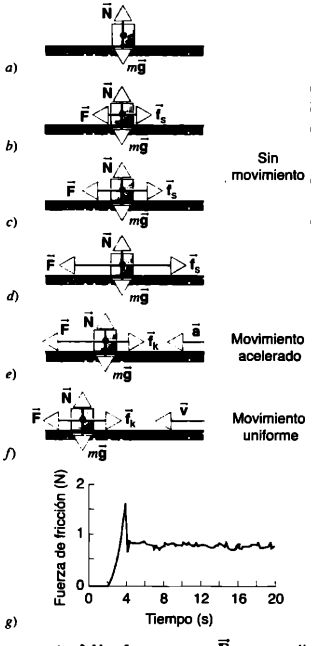


FIGURA 5-12. (*a-d*) Una fuerza externa $\vec{F}$, que se aplica a un bloque en reposo, es contrarrestada por una fuerza de fricción igual pero opuesta $\vec{f}$. A medida que aumenta $\vec{F}$, $\vec{f}$ también lo hace hasta que $\vec{f}$ alcanza cierto valor máximo. *e*) Entonces el bloque "se separa" acelerando a la izquierda. *f*) Si queremos que el bloque se mueva con velocidad constante, habrá que reducir la fuerza aplicada $\vec{F}$ del valor máximo que tenía antes que comenzara a moverse. *g*) Resultados experimentales; aquí la fuerza aplicada $\vec{F}$ aumenta de cero a partir de $t = 2$ s aproximadamente, y el movimiento comienza de repente en cerca de $t = 4$ s. Se dan detalles del experimento en "Undergraduate Computer-Interfacing Proyects", de Joseph Priest y John Snyder, *The Physics Teacher*, mayo de 1987, p. 303.

La fuerza máxima de fricción estática entre un par de superficies secas sin lubricar, está sujeta a dos leyes empíricas: 1) Es aproximadamente independiente del área de contacto en límites amplios. 2) Es proporcional a la fuerza normal.*

La relación de la magnitud de la fuerza *máxima* de la fricción estática a la magnitud de la fuerza normal, se conoce como *coeficiente de fricción estática* de las superficies en

*Las dos leyes de la fricción fueron descubiertas experimentalmente por Leonardo da Vinci (1452-1519). Su formulación fue excelente, pues la realizó dos siglos antes que Newton desarrollara el concepto de fuerza. Las expresiones matemáticas de estas leyes y el concepto de coeficiente de fricción se deben a Charles Augustin Coulomb (1736-1806), a quien se le conoce mejor por sus estudios de electrostática (véase Capítulo 25).

TABLA 5-1 Coeficientes de fricción[a]

Superficies	μ_s	μ_k
Madera sobre madera	0.25 – 0.5	0.2
Vidrio sobre vidrio	0.9 – 1.0	0.4
Acero sobre acero, en superficies limpias	0.6	0.6
Acero sobre acero, en superficies lubricadas	0.09	0.05
Caucho sobre concreto seco	1.0	0.8
Esquí de madera encerada sobre nieve seca	0.04	0.04
Teflón sobre teflón	0.04	0.04

[a] Los valores son aproximados y sirven como estimaciones exclusivamente. Los coeficientes reales de fricción de un par cualquiera de superficies dependen de condiciones como su limpieza, temperatura y humedad.

cuestión. Si f_s representa la magnitud de la fuerza de la fricción estática, podemos escribir

$$f_s \leq \mu_s N, \tag{5-7}$$

donde μ_s es el coeficiente de la fricción estática, N es la magnitud de la fuerza normal. El signo de igualdad aparece sólo cuando f_s posee su valor máximo.

La fuerza de la fricción cinética f_k entre superficies secas y sin lubricar está sujeta a las dos mismas leyes que la fricción estática: 1) Es aproximadamente independiente del área de contacto en límites amplios. 2) Es proporcional a la fuerza normal. Además es bastante independiente de la rapidez relativa con que las superficies se mueven una sobre otra.

La relación de la magnitud de la fuerza de fricción cinética a la fuerza normal, se llama *coeficiente de fricción cinético*. Si f_k representa la fuerza de fricción cinética, entonces:

$$f_k = \mu_k N, \tag{5-8}$$

donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética.

Tanto μ_s y μ_k son constantes adimensionales, pues son la relación de (la magnitud de) dos fuerzas. En general, en un par de superficies $\mu_s > \mu_k$. Los verdaderos valores de μ_s y μ_k, dependen de la naturaleza de las dos superficies en contacto. Casi siempre podemos considerarlas constantes (en un par cualquiera de superficies) en las fuerzas y velocidades que comúnmente encontramos. Tanto μ_s y μ_k pueden ser mayores que la unidad, aunque por lo general son menores que 1. La tabla 5-1 muestra algunos valores representativos de μ_s y μ_k.

FIGURA 5-13. Sección amplificada de una superficie de acero bien pulida. La escala vertical de las irregularidades tiene varios miles de diámetros atómicos. La sección se cortó en ángulo, de modo que la escala vertical está exagerada respecto a la escala horizontal por un factor de 10.

Nótese que las ecuaciones 5-7 y 5-8 son relaciones entre las *magnitudes exclusivamente* de las fuerzas normal y de fricción. Éstas siempre son directamente perpendiculares entre sí.

El fundamento microscópico de la fricción

En la escala atómica, hasta la superficie más pulida dista mucho de ser plana. Por ejemplo, en la figura 5-13 se muestra un perfil muy ampliado de una superficie de acero que podría considerarse muy bien pulida. Es fácil deducir lo siguiente: cuando ponemos en contacto dos cuerpos, el área microscópica de contacto es mucho menor que la real de la superficie; en un caso particular, las superficies pueden hallarse fácilmente en la razón de $1{:}10^4$.

La superficie (microscópica) de contacto es proporcional a la fuerza normal, porque los puntos de contacto se deforman plásticamente bajo los grandes esfuerzos que aparecen en ellos. Muchos de los puntos de contacto se "sueldan en frío". Este fenómeno, denominado *adhesión de superficie*, se debe a que en los puntos de contacto las moléculas de la superficie opuestos están tan cercanas, que ejercen una gran fuerza intermolecular entre sí.

Cuando se tira de un cuerpo (un metal por ejemplo) a través de otro, la resistencia de fricción se relaciona con la ruptura de estos millares de soldaduras diminutas, que continuamente se reconfiguran a medida que se efectúan más contactos aleatorios (véase Fig. 5-14). Los experimentos con trazadores radiactivos han demostrado que, en el proceso de rompimiento, los fragmentos pequeños de una superficie metálica pueden desprenderse y adherirse a otras superficies. Si la rapidez relativa de dos superficies es bastante grande, puede producirse una fusión local en algunas áreas de contacto aunque la superficie en su conjunto se sienta sólo un poco caliente. Los fenó-

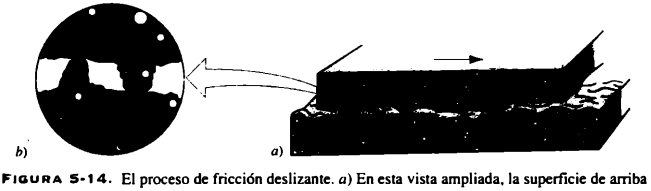


FIGURA 5-14. El proceso de fricción deslizante. *a*) En esta vista ampliada, la superficie de arriba se desliza hacia la derecha sobre la superficie de abajo. *b*) Un detalle que muestra dos sitios donde se ha realizado la soldadura en frío. Es necesaria una fuerza para romper estas soldaduras y mantener el movimiento. Si la fuerza normal aumenta, se compactan las superficies, de manera que se forman más soldaduras y aumenta la fuerza de fricción.

menos de "adhesión y deslizamiento" son la causa de los ruidos que las superficies secas producen cuando resbalan una sobre otra como, por ejemplo, el chirrido del gis en el pizarrón.

El coeficiente de fricción depende de muchas variables: naturaleza de los materiales, acabado de la superficie, películas de ésta, temperatura y grado de contaminación. Por ejemplo, si ponemos dos superficies metálicas muy limpias en una cámara con un gran vacío para que no se formen capas superficiales de óxido, el coeficiente de fricción se incrementa a valores enormes, y las superficies se "sueldan" firmemente unas con otras. La entrada de una pequeña cantidad de aire en la cámara, de modo que puedan formarse capas de óxido en las superficies opuestas, reduce el coeficiente a su valor "normal".

La fuerza de fricción que se opone al *rodamiento* de un cuerpo sobre otro, es mucho menor que la que lo hace contra el deslizamiento; esto da una ventaja a la rueda sobre el trineo. La fricción disminuye en gran medida porque, en el rodamiento, las soldaduras del contacto microscópico se separan al "descascararse" y no se separan por "cortes" como sucede en la fricción deslizante. Así disminuye de modo considerable la fuerza de fricción.

La resistencia en una fricción seca deslizante puede reducirse de manera importante por medio de la lubricación. Es una técnica que se utilizaba en el antiguo Egipto para mover los bloques con que se construyeron las pirámides. Un método todavía más eficaz, es introducir una capa de gas entre las superficies deslizantes; dos ejemplos de ello son la vía de aire de laboratorio, y el cojinete soportado por gas. Podemos disminuir aún más la fricción, colgando un objeto por medio de fuerzas magnéticas. Los trenes levantados por medios magnéticos, actualmente en vías de desarrollo, pueden viajar a alta velocidad casi sin fricción.

PROBLEMA RESUELTO 5-8. Un bloque se halla en reposo en un plano inclinado, formando un ángulo θ con la horizontal, como en la figura 5-15*a*. Al elevar el ángulo de inclinación, se comprueba que el deslizamiento apenas comienza en un ángulo de inclinación $\theta_s = 15°$. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la inclinación?

Solución Las fuerzas que operan sobre el bloque, supuestamente una partícula, se muestran en la figura 5-15*b*. El peso del bloque es $m\vec{g}$, la fuerza normal ejercida sobre él por la superficie inclinada es $\vec{N}$, y la fuerza de fricción ejercida por la superficie es $\vec{f}_s$. Nótese que la fuerza resultante ejercida sobre el bloque por la superficie, $\vec{N} + \vec{f}_s$ ya no es perpendicular a la superficie de contacto, como en el caso de las superficies sin fricción ($\vec{f}_s = 0$). El bloque se encuentra en reposo, de modo que la segunda ley de Newton nos da $\Sigma \vec{F} = 0$.

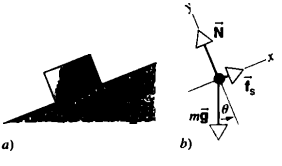


FIGURA 5-15. Problema resuelto 5-8. *a*) Bloque en reposo sobre un plano inclinado. *b*) Diagrama de cuerpo libre del bloque.

Separando el peso en sus componentes x y y (véase Fig. 5-8), descubriremos que los componentes de la fuerza neta son $\Sigma F_x = f_s - mg \operatorname{sen} \theta$ y $\Sigma F_y = N - mg \cos \theta$. Si el bloque está en reposo, su $a_x = 0$ y, $a_y = 0$ y la segunda ley de Newton da

$$f_s - mg \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \text{y} \quad N - mg \cos \theta = 0.$$

En el ángulo θ_s, donde comienza el deslizamiento, f_s tiene su valor máximo de $\mu_s N$. Al evaluar f_s y N partiendo de las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\mu_s = \frac{f_s}{N} = \frac{mg \operatorname{sen} \theta_s}{mg \cos \theta_s} = \tan \theta_s = \tan 15° = 0.27.$$

Por tanto, la medición del ángulo de inclinación donde inicia el deslizamiento, ofrece una método experimental simple para calcular el coeficiente de la fricción estática entre dos superficies. Adviértase que la determinación no depende del peso del objeto.

Podemos utilizar argumentos similares para demostrar lo siguiente: el ángulo de inclinación θ_k necesario para mantener una *rapidez constante* del bloque conforme se resbala hacia abajo del plano. Una vez iniciado el movimiento al darle un ligero empujón, está dado por

$$\mu_k = \tan \theta_k,$$

donde $\theta_k < \theta_s$. Con ayuda de una regla que mida la tangente del ángulo de inclinación, podemos determinar μ_s y μ_k para una moneda que resbale por nuestro libro hacia abajo.

PROBLEMA RESUELTO 5-9. Consideremos un automóvil que se desplaza sobre una carretera horizontal recta con una rapidez v_0. El conductor aplica los frenos y lo detiene sin patinar. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es μ_s, ¿cuál será la distancia más corta a que podemos frenar el automóvil?

Solución Las fuerzas que actúan sobre el automóvil se indican en la figura 5-16. Se supone que el automóvil se desplaza en la dirección positiva x. Si suponemos que f_s es una fuerza constante, tendremos un movimiento uniformemente desacelerado.

Nuestro plan consiste en usar las leyes de Newton para calcular la aceleración del automóvil, y luego las ecuaciones de la cinemática estudiadas en el Capítulo 2 para determinar la distancia de frenado. Basándonos en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5-16*b*, obtenemos las ecuaciones componentes de la fuerza neta, $\Sigma F_x = -f_s$ y $\Sigma F_y = N - mg$ y, en consecuencia, de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$-f_s = ma_x \quad \text{y} \quad N - mg = ma_y = 0,$$

donde hemos hecho $a_y = 0$, porque el automóvil no se mueve en dirección vertical. A partir de las ecuaciones anteriores y de la fuerza de la fricción estática ($f_s = \mu_s N$) obtenemos

$$a_x = -\frac{f_s}{m} = -\frac{\mu_s N}{m} = -\frac{\mu_s (mg)}{m} = -\mu_s g.$$

Si el automóvil arranca con una velocidad v_{0x}, termina con una velocidad $v_x = 0$, podremos utilizar la ecuación 2-26 ($v_x = v_{0x} + a_x t$) para calcular el tiempo de frenado $t = -v_{0x}/a_x = v_0/\mu_s g$. Entonces la distancia de frenado $d = x - x_0$, puede obtenerse con la ecuación 2-28 ($x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) empleando el siguiente valor de t:

$$d = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = v_0\left(\frac{v_0}{\mu_s g}\right) + \tfrac{1}{2}(-\mu_s g)\left(\frac{v_0}{\mu_s g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}.$$

Cuanto más alta sea la velocidad inicial mayor será la distancia necesaria para detenerse; de hecho, la distancia varía como el cua-

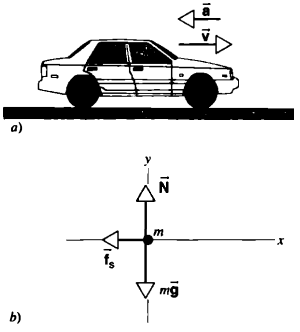


FIGURA 5-16. Problema resuelto 5-9. *a*) Un automóvil que desacelera. *b*) Diagrama de cuerpo libre del automóvil, considerado como una partícula. Para facilitar la explicación, se supone que todas las fuerzas actúan en un punto común. En realidad, las fuerzas $\vec{N}$ y $\vec{f}_s$ son la suma de las que ejerce la carretera sobre cada una de las cuatro llantas.

drado de la velocidad inicial. Asimismo, con un mayor coeficiente de fricción estática entre las superficies, se requerirá menor distancia para detenerse.

Hemos empleado el coeficiente de fricción estática en este problema y no el de fricción cinética, porque suponemos que no hay deslizamiento entre las llantas y la carretera. Además, hemos supuesto que interviene la fuerza máxima de la fricción estática ($f_s = \mu_s N$), porque en el problema se desea conocer la distancia más corta del frenado. Claro que la distancia sería mayor con una menor fuerza de fricción estática. La técnica correcta de frenado requerida en este caso, consiste en mantener el automóvil a punto de deslizarse. (Los vehículos equipados con sistemas de frenado antibloqueo, mantienen esta condición de modo automático.) Habrá deslizamiento si la superficie es plana y si los frenos se aplican totalmente. En este caso μ_k reemplaza μ_s, y la distancia necesaria para detenerse aumentará porque μ_k es menor que μ_s.

A continuación se expone un ejemplo específico: si $v_0 = 60$ mi/h = 27 m/s, y $\mu_s = 0.60$ (valor típico), obtendremos

$$d = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27\ \text{m/s})^2}{2(0.60)(9.8\ \text{m/s}^2)} = 62\ \text{m}.$$

Nótese que este resultado no depende de la masa del automóvil. En los automóviles de transmisión en las llantas traseras, con motor enfrente, se acostumbra "disminuir el peso" de la cajuela a fin de mejorar la seguridad cuando se conduce en carreteras con hielo. ¿Por qué es compatible esta práctica con el resultado de que la distancia de frenado no depende de la masa del vehículo? (*Sugerencia:* Véase el ejercicio 10.)

PROBLEMA RESUELTO 5-10. Repita el problema resuelto 5-7, teniendo en cuenta la fuerza de fricción entre el bloque 1 y el plano. Utilice los valores $\mu_s = 0.24$ y $\mu_k = 0.15$.

Solución Igual que en el problema resuelto 5-7, suponemos que el bloque 1 se desplaza hacia abajo del plano, por lo cual la fuerza de fricción opera hacia arriba de él. La figura 5-17*a* ilustra el diagrama de cuerpo libre de m_1. Al descomponer las fuerzas sobre m_1 en sus componentes, obtenemos $\Sigma F_x = T + f - m_1 g \operatorname{sen}\theta$ y $\Sigma F_y = N - m_1 g \cos\theta$, y la segunda ley de Newton da

$$T + f - m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 a \quad \text{y} \quad N - m_1 g \cos\theta = 0,$$

donde hacemos $a_{1x} = a$ y $a_{1y} = 0$, igual que en el problema resuelto 5-7. La fuerza neta en el bloque 2 es $\Sigma F_y = T - m_2 g$, y con $a_{2y} = -a$ la segunda ley de Newton da

$$T - m_2 g = m_2(-a)$$

Si hacemos $f = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos\theta$, y resolvemos las dos ecuaciones restantes para a y T, obtendremos

$$a = \frac{m_2 - m_1(\operatorname{sen}\theta - \mu_k \cos\theta)}{m_1 + m_2} g, \qquad (5\text{-}9a)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \operatorname{sen}\theta - \mu_k \cos\theta). \qquad (5\text{-}9b)$$

Nótese que, en el límite cuando $\mu_k \to 0$, las ecuaciones 5-9 se reducen a las ecuaciones 5-6 del problema resuelto 5-7.

Calculemos ahora los valores numéricos de a y T:

$$a = \frac{2.6\ \text{kg} - 9.5\ \text{kg}(\operatorname{sen} 34° - 0.15 \cos 34°)}{2.6\ \text{kg} + 9.5\ \text{kg}}(9.80\ \text{m/s}^2)$$

$$= -1.2\ \text{m/s}^2,$$

$$T = \frac{(9.5\ \text{kg})(2.6\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{9.5\ \text{kg} + 2.6\ \text{kg}}(1 + \operatorname{sen} 34° - 0.15 \cos 34°)$$

$$= 29\ \text{N}.$$

El valor negativo de a concuerda con la manera de formular las ecuaciones; el bloque desciende por el plano como sucedió en el problema resuelto 5-7, pero con menos aceleración que en el caso sin fricción (2.2 m/s^2).

La tensión de la cuerda es menor que en el caso sin fricción (31 N). El bloque 1 acelera hacia abajo con menor rapidez cuando no había fricción que cuando hay fricción, así que tira con fuerza distinta de la cuerda atada al bloque 2.

Otra pregunta que es preciso contestar, es si el sistema se moverá o no: ¿Existe suficiente fuerza hacia abajo del plano para superar la fricción estática y el movimiento? Cuando al inicio el sistema se halla en reposo, la tensión de la cuerda será igual al peso de m_2, o (2.6 kg) (9.8 m/s^2) = 26 N. La fricción estática máxima, que se opone a la tendencia a descender por el plano, es $\mu_s N = \mu_s m_1 g \cos\theta$ = 19 N. El componente del peso de m_1 que actúa hacia abajo del plano es $m_1 g \operatorname{sen}\theta$ = 52 N. Por consiguiente, hacia abajo del plano ope-

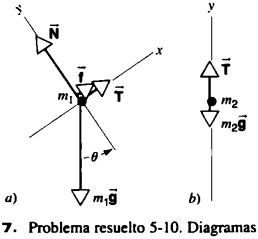


FIGURA 5-17. Problema resuelto 5-10. Diagramas de cuerpo libre de la figura 5-11, en el caso de fricción sobre el plano.

ra una fuerza más que suficiente (52 N) para superar la tensión total y fuerza de fricción estática (26 N + 19 N = 45 N), por lo que el sistema efectivamente se mueve. El lector deberá ser capaz de demostrar que no habrá movimiento si el coeficiente de fricción estática es mayor que 0.34.

5-4 LA DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Según señalamos en la sección 4-5, cuando un objeto de masa m se desplaza en un círculo de radio r con rapidez uniforme v, experimenta una aceleración radial o centrípeta de magnitud v^2/r. En la presente sección vamos a estudiar el movimiento circular proveniente de varias fuerzas que actúan sobre un objeto. La segunda ley de Newton debe aplicarse a este caso en forma vectorial: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$. Dado que $\vec{a}$ siempre está en la dirección radial, la fuerza neta ha de ser radial también. Su magnitud ha de estar dada por

$$\left|\sum \vec{F}\right| = ma = \frac{mv^2}{r}. \qquad (5\text{-}10)$$

Cualquiera que sea la naturaleza de las fuerzas que operan sobre el objeto en el movimiento circular uniforme, la resultante de todas ellas deberá: 1) Estar en la dirección radial. 2) Tener una magnitud mv^2/r. Aunque la magnitud de la velocidad del objeto permanezca constante, existe aceleración y, en consecuencia, una fuerza neta porque la *dirección* de la velocidad está cambiando.

Los siguientes ejemplos ilustran las aplicaciones de las leyes de Newton al movimiento circular uniforme.

El péndulo cónico

La figura 5-18 muestra un cuerpo pequeño de masa m que gira en un círculo horizontal con velocidad constante v en el extremo de una cuerda de longitud L. Conforme el cuerpo gira alrededor, la cuerda se desliza por la superficie de un cono imaginario. A este arreglo se le conoce como *péndulo cónico*. Calculemos el tiempo necesario para que el cuerpo complete una revolución.

Si la cuerda forma un ángulo θ con la vertical, el radio de la trayectoria circular será $R = L \operatorname{sen} \theta$. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m, son su peso $m\vec{g}$ y la tensión $\vec{T}$ de la cuerda, como se indica en la figura 5-18*b*. Podemos separar $\vec{T}$ en cualquier instante en un componente radial y otro vertical

$$T_r = -T \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad T_z = T \cos \theta. \qquad (5\text{-}11)$$

El componente radial es negativo si definimos la dirección radial positiva hacia fuera desde el centro del círculo.

Utilizando el sistema coordenado de la figura 5-18*b*, podemos escribir los componentes de la fuerza neta en el cuerpo así: $\Sigma F_r = T_r = -T \operatorname{sen} \theta$ y $\Sigma F_z = T \cos \theta - mg$. Puesto que el cuerpo no presenta aceleración vertical, escribimos el componente z de la segunda ley de Newton en la forma

$$T \cos \theta - mg = 0. \qquad (5\text{-}12)$$

El componente radial de esta ley es $\Sigma F_r = ma_r$. La aceleración radial es $a_r = -v^2/R$ negativa, porque opera radialmente hacia

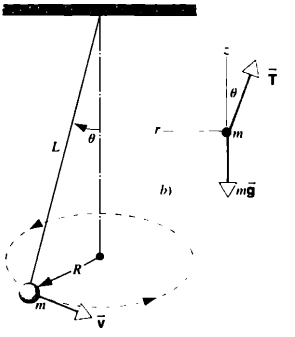


FIGURA 5-18. El péndulo cónico. *a*) Un cuerpo de masa m suspendido de una cuerda de longitud L se mueve en círculo; la cuerda describe un cono circular recto de semiángulo θ. *b*) Diagrama de cuerpo libre del cuerpo.

adentro y hemos supuesto que la dirección radial hacia afuera es positiva. En este caso la segunda ley de Newton nos da

$$-T \operatorname{sen} \theta = ma_r = m\left(\frac{-v^2}{R}\right). \qquad (5\text{-}13)$$

Al eliminar T entre las dos ecuaciones anteriores, podemos resolver para obtener la rapidez del cuerpo:

$$v = \sqrt{Rg \tan \theta}. \qquad (5\text{-}14)$$

Si con t representamos el tiempo de una revolución completa del cuerpo,

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

o

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan \theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}}.$$

Sin embargo, $R = L \operatorname{sen} \theta$, así que

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}. \qquad (5\text{-}15)$$

Esta ecuación nos da la relación entre t, L y θ. Obsérvese que t, denominado *periodo* del movimiento, no depende de m.

Si $L = 1.2$ m y $\theta = 25°$, ¿cuál es el periodo del movimiento? Tenemos

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{(1.2 \text{ m})(\cos 25°)}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 2.1 \text{ s}.$$

El rotor

En muchos parques de diversiones encontramos un mecanismo llamado rotor. Es un aparato cilíndrico hueco que puede hacerse girar alrededor del eje vertical central del cilindro. Una persona entra en él, cierra la puerta y se para contra la pa-

red. El rotor va aumentando paulatinamente su velocidad a partir del reposo hasta que, a una rapidez preestablecida, el piso debajo de la persona se abre hacia abajo dejando ver un foso profundo. La persona no cae sino que permanece "pegada" a la pared del rotor. ¿Qué velocidad rotacional mínima se requiere para evitar que caiga?

Las fuerzas que actúan sobre la persona, se muestran en la figura 5-19. Su peso es $m\vec{g}$, la fuerza de fricción estática entre ella y la pared del rotor es $\vec{f}_s$, y $\vec{N}$ es la fuerza normal que ejerce la pared (que como veremos luego genera la fuerza centrípeta necesaria). Como hicimos en el cálculo anterior, resolvemos las fuerzas en componentes radiales y verticales, con la dirección radial positiva hacia afuera del eje de rotación y con el eje positivo z hacia arriba. Entonces los componentes de la fuerza neta en la persona son $\Sigma F_r = -N$ y $\Sigma F_z = f_s - mg$. Nótese que $\vec{N}$ suministra la fuerza centrípeta en este caso.

La aceleración radial es $a_r = -v^2/R$, y la aceleración vertical es $a_z = 0$. Así pues, los componentes radial y vertical de la segunda ley de Newton dan

$$-N = ma_r = m\left(\frac{-v^2}{R}\right) \qquad \text{y} \qquad f_s - mg = ma_z = 0.$$

Si escribimos $f_s = \mu_s N$ y sustituimos $N = mv^2/R$ a partir de la primera ecuación y $f_s = mg$ a partir de la segunda, podemos resolver para v y obtener

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}. \qquad (5\text{-}16)$$

La ecuación anterior relaciona el coeficiente de fricción necesario para que un objeto en la pared no caiga y la velocidad tangencial del objeto contra la pared. Nótese que el resultado no depende del peso de la persona.

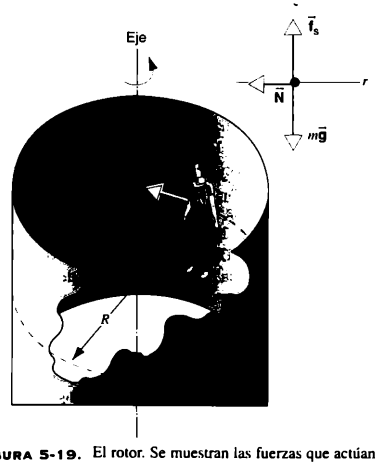


FIGURA 5-19. El rotor. Se muestran las fuerzas que actúan sobre la persona.

En realidad, el coeficiente de fricción entre el material textil de la ropa y una pared típica de rotor (lona) es de 0.40, aproximadamente. En un rotor típico el radio mide 2.0 m, así que v deberá ser de unos 7.0 m/s. La circunferencia de una trayectoria circular es $2\pi R$ = 12.6 m y en 7.0 m/s, tarda t = 12.6 m/(7.0 m/s) = 1.80 s en completar una revolución. En consecuencia, el rotor debe girar con una rapidez mínima de 1 revolución/1.80 s = 0.56 revolución/s, unos 33 rpm, es decir, la rapidez de rotación de un tocadiscos.

La curva con peralte

Supongamos que el bloque de la figura 5-20*a* representa un automóvil o un vagón de ferrocarril que se desplaza con rapidez constante v en un camino *plano*, alrededor de una curva que tiene un radio de curvatura R. Además de dos fuerzas verticales —el peso $m\vec{g}$ y una fuerza normal $\vec{N}$—, una fuerza horizontal $\vec{P}$ debe actuar sobre el vagón. La fuerza $\vec{P}$ genera la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento en círculo. En el caso de un automóvil, esta fuerza proviene de la fuerza de fricción lateral ejercida por la carretera sobre las llantas; en el caso del vagón de ferrocarril, proviene de las vías que ejercen una fuerza lateral sobre los bordes internos de las ruedas. No se tiene la garantía de que sean lo bastante grandes siempre, y ambas causan desgaste innecesario. Por eso, el nivel de

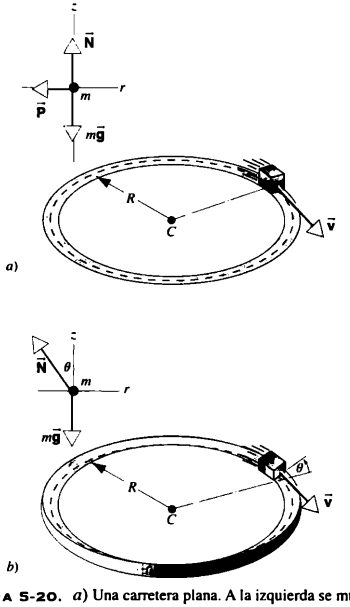


FIGURA 5-20. *a*) Una carretera plana. A la izquierda se muestra un diagrama del cuerpo libre del objeto en movimiento. La fuerza centrípeta debe provenir de la fricción entre las llantas y la carretera. *b*) Una de carretera con peralte. No se necesita fricción para cubrir la curva sin peligro.

la carretera *tiene pendiente* (peralte) en las curvas, como se observa en la figura 5-20*b*. En este caso, la fuerza normal $\vec{N}$ no sólo tiene un componente vertical como antes, sino además un componente horizontal que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular uniforme. En consecuencia, no se requieren más fuerzas laterales en un camino que tenga un peralte adecuado para los vehículos que van a determinada velocidad.

Cuando no hay fricción, el ángulo correcto θ del peralte se obtiene de la manera siguiente. Como de costumbre, comenzamos con la segunda ley de Newton, y nos referimos al diagrama de cuerpo libre de la figura 5-20*b*. Los componentes radial y vertical de la fuerza neta sobre el cuerpo en movimiento son $\Sigma F_r = -N \operatorname{sen} \theta$ y $\Sigma F_z = N \cos \theta - mg$. Igual que antes, la aceleración radial es $a_r = -v^2/R$ y la vertical es $a_z = 0$, así que podemos escribir los componentes de la segunda ley como

$$-N \operatorname{sen} \theta = ma_r = m\left(\frac{-v^2}{R}\right)$$

y

$$N \cos \theta - mg = ma_z = 0.$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores para sen θ y cos θ, y dividiendo las expresiones resultantes, obtenemos

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}. \tag{5-17}$$

Nótese que el ángulo apropiado del peralte, depende de la velocidad del automóvil y de la curvatura de la carretera, mas no depende de la masa del automóvil. Con determinado ángulo de la curva con peralte, todos los automóviles podrán viajar con seguridad. En una curva dada, la carretera tiene un peralte en un ángulo correspondiente a la rapidez promedio esperada. Se acostumbra marcar las curvas con letreros que indican la velocidad para la cual se le puso peralte a la carretera. Si los vehículos la rebasan, la fricción entre las llantas y la carretera, deberá generar la fuerza centrípeta adicional necesaria para tomar la curva con seguridad.

Verifique la fórmula del peralte para los casos límite $v = 0$, $R \to \infty$, v grande y R pequeña. Asimismo, nótese que la ecuación 5-17 al ser resuelta para v, arroja los mismos resultados que los obtenidos de la rapidez de movimiento de un péndulo cónico. Compare las figuras 5-18*b* y 5-20*b*, señalando sus semejanzas.

5-5 FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO (Opcional)*

En el Capítulo 2 analizamos el frenado de un automóvil, suponiendo que la aceleración era constante. En la práctica, rara vez lo es. En muchas circunstancias, sobre todo a altas velocidades, aplicamos los frenos lentamente al inicio y luego con mayor fuerza conforme el automóvil empieza a detenerse. Por tanto, la fuerza de frenado depende del tiempo durante el intervalo en que el automóvil disminuye su velocidad, de modo que la aceleración $a(t)$ depende de cómo los apliquemos.

Aunque la fuerza no es constante, podemos utilizar las leyes de Newton para analizar el movimiento, pero no podemos usar las ecuaciones del Capítulo 2 para determinar la posición y la velocidad en función del tiempo, porque se obtuvieron para la aceleración constante. Para facilitar la explicación, ahora suponemos que las fuerzas y el movimiento se hallan en una dimensión que sería la dirección x. Podemos obtener el componente x de la fuerza neta $F_x(t)$ en la forma habitual, mediante el diagrama de cuerpo libre y luego seguir escribiendo $a_x = dv_x/dt$, y aplicando la segunda ley de Newton:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(t)}{m}$$

o

$$dv_x = \frac{F_x(t)}{m}\, dt. \tag{5-18}$$

Supóngase que un objeto comienza su movimiento en $t = 0$ con una velocidad inicial v_{0x}. ¿Cuál es su velocidad v_x en el tiempo t? Integramos la ecuación 5-18 de la izquierda entre v_{0x} y v_x, y la de la derecha entre 0 y t:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t \frac{F_x(t)}{m}\, dt.$$

$$v_x - v_{0x} = \frac{1}{m}\int_0^t F_x(t)\, dt$$

así que

$$v_x(t) = v_{0x} + \frac{1}{m}\int_0^t F_x(t)\, dt. \tag{5-19}$$

Observe que esto se reduce a la ecuación 2-26, si F_x es una constante ($= ma_x$), de manera que puede extraerse de la integral.

Continuando en la misma forma con $v_x = dx/dt$, podemos obtener la posición en función del tiempo

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)\, dt. \tag{5-20}$$

Esto se reduce a la ecuación 2-28 cuando F_x es una constante, y de ser así, $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$.

Cuando tenemos una fuerza que depende del tiempo, con las ecuaciones 5-19 y 5-20 podemos obtener las expresiones analíticas de $v_x(t)$ y $x(t)$. En la sección 4-4 vimos cómo hacerlo de modo similar con una fuerza que dependía de la velocidad. Muchas veces, sobre todo cuando no se cuenta con expresiones analíticas de las integrales, será necesario o conveniente emplear métodos numéricos o computacionales.

PROBLEMA RESUELTO 5-11. Un automóvil de masa $m = 1{,}260$ kg, se desplaza a 105 km/h (cerca de 65 mi/h o 29.2 m/s). El conductor comienza a aplicar los frenos, de modo que la magnitud de la fuerza de frenado aumenta linealmente con el tiempo a una velocidad de 3,360 N/s. *a)* ¿Cuánto tiempo transcurre antes que el automóvil se detenga? *b)* ¿Qué distancia recorre al hacerlo?

* Esta sección requiere conocimiento del cálculo integral y puede posponerse hasta que el estudiante esté más familiarizado con los métodos de integración.

Solución *a)* Si suponemos que la dirección de la velocidad es la dirección positiva x, podemos representar la fuerza de frenado como $F_x = -ct$, donde $c = 3{,}360$ N/s. (El signo negativo indica que la dirección es opuesta a la de la velocidad). Usando la ecuación 5-19 obtenemos

$$v_x(t) = v_{0x} + \frac{1}{m}\int_0^t (-ct)\,dt = v_{0x} - \frac{ct^2}{2m}.$$

Para calcular el tiempo t_1 cuando el automóvil se detiene, hacemos esta expresión para $v_x(t)$ igual a cero y despejamos t:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2v_{0x}m}{c}} = \sqrt{\frac{2(29.2\text{ m/s})(1{,}260\text{ kg})}{3{,}360\text{ N/s}}} = 4.68\text{ s}.$$

b) Para determinar la distancia que el automóvil recorre en este tiempo, necesitamos una expresión de $x(t)$, para lo cual es preciso integrar $v_x(t)$ de acuerdo con la ecuación 5-20:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(v_{0x} - \frac{ct^2}{2m}\right) dt = x_0 + v_{0x}t - \frac{ct^3}{6m}.$$

Al evaluar la expresión anterior en $t = t_1$ (haciendo x_0 a 0), obtenemos

$$x(t_1) = 0 + (29.2\text{ m/s})(4.68\text{ s}) - \frac{(3{,}360\text{ N/s})(4.68\text{ s})^3}{6(1{,}260\text{ kg})} = 91.1\text{ m}.$$

La figura 5-21 muestra la dependencia de x, v_x y a_x respecto al tiempo. En contraste con el caso de la aceleración constante, $v_x(t)$ no es una recta.

Con este método de frenado, casi todo cambio de velocidad ocurre cerca del final del movimiento. En el primer segundo después de aplicar los frenos es apenas de 1.3 m/s (cerca de 3 mi/h); en cambio, en el último segundo el cambio es de 11.2 m/s (cerca de 25 mi/h).

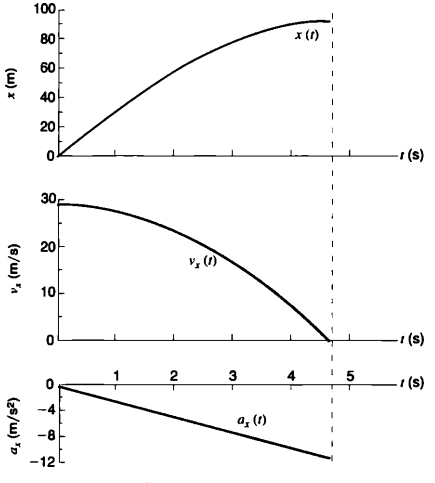


FIGURA 5-21. Problema resuelto 5-11. Se muestran la posición $x(t)$ y la velocidad deducidas $v_x(t)$, correspondientes a $a_x(t)$ que varían linealmente con el tiempo. La línea punteada marca el instante ($t = 4.68$ s) en que el automóvil se detiene.

(Recuérdese que en el caso de la aceleración constante, el cambio de velocidad es el mismo en intervalos iguales.) ¿Tiene alguna ventaja frenar de este modo? ¿Tiene algunas desventajas?

5-6 MARCOS NO INERCIALES Y SEUDOFUERZAS (Opcional)

Hasta ahora en el estudio de la mecánica clásica, hemos supuesto que las mediciones y observaciones se efectuaron desde un marco de referencia inercial. Éste es uno de los conjuntos de marcos de referencia definidos por la primera ley de Newton: a saber, el conjunto en que el cuerpo no acelerará ($\vec{a} = 0$) si no hay cuerpos generadores de fuerza en el ambiente ($\Sigma\,\vec{F} = 0$). Siempre toca a nosotros escoger el marco de referencia; por eso, si seleccionamos sólo marcos inerciales, no limitaremos en absoluto nuestra capacidad de aplicar la mecánica clásica a los fenómenos naturales.

Pero si nos parece útil, podemos aplicar la mecánica clásica desde el punto de vista de un observador en un *marco no inercial*, es decir, en un marco conectado a un cuerpo que acelera visto desde un marco inercial. Los marcos de un automóvil que acelera o de un carrusel que gira, son ejemplos de marcos no inerciales.

Si queremos aplicar la mecánica clásica en los marcos no inerciales, es necesario introducir otras fuerzas conocidas como *seudofuerzas* (llamadas también fuerzas inerciales). A diferencia de las fuerzas que hemos venido examinando, no es posible relacionarlas con un objeto del ambiente del cuerpo sobre el que operan; tampoco podemos clasificarlas en ninguna de las categorías mencionadas en la sección 5-1. Más aún, desaparecen si contemplamos el cuerpo desde una marco inercial. No son más que simples medios que nos permiten aplicar la mecánica clásica en forma normal a eventos si insistimos en verlos desde un marco de referencia no inercial.

Examinemos el ejemplo de un observador S' que viaja en una camioneta a una velocidad constante. La camioneta contiene una larga vía de aire con un deslizador de 0.25 kg que descansa en un extremo (Fig. 5-22*a*). El conductor aplica los frenos y la camioneta empieza a desacelerar. Un observador S en el piso mide la aceleración constante de la camioneta como -2.8 m/s^2. Así pues, el observador S', en la camioneta, se encuentra en un marco de referencia no inercial cuando la camioneta comience a desacelerar. Ve el deslizador moverse hacia adelante de la vía de aire con una aceleración de $+2.8$ m/s^2 (Fig. 5-22*b*). ¿Cómo podrían los dos utilizar la segunda ley de Newton para explicar el movimiento del deslizador?

El análisis es sencillo para el observador S en tierra, quien se halla en un marco de referencia inercial. El deslizador, que ha venido moviéndose hacia adelante con velocidad constante antes que la camioneta empezara a frenar, simplemente sigue haciéndolo. Desde la perspectiva de S, el deslizador no acelera y, en consecuencia, ninguna fuerza horizontal necesita actuar sobre él.

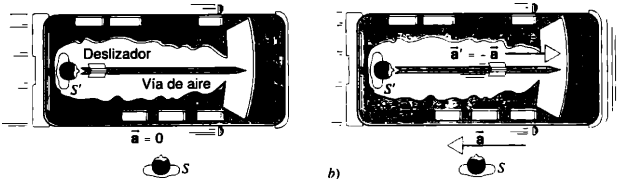


FIGURA 5-22. *a*) Desde el suelo el observador S ve al observador S' que viaja en una camioneta a velocidad constante. La camioneta se dirige hacia la derecha, que suponemos que es la dirección positiva x. Los dos observadores están en marcos de referencia inerciales. *b*) La camioneta frena con aceleración constante a según el observador S. El observador S', ahora en un marco de referencia no inercial, ve el deslizador avanzar en su vía de aire con la aceleración constante $\bar{\mathbf{a}}' = \bar{\mathbf{a}}$. El observador S' explica este movimiento en función de una seudofuerza.

Con todo, el observador S' ve acelerar el deslizador, y no encuentra un objeto en el ambiente del deslizador que haya ejercido fuerza sobre él y que le imprima la aceleración hacia adelante. Para que la segunda ley de Newton sea aplicable, el observador S' deberá suponer que una fuerza (en este caso una seudofuerza) opera sobre el deslizador. Desde el punto de vista de S', la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ ha de ser igual a $m\bar{\mathbf{a}}'$, donde $\bar{\mathbf{a}}'$ ($= -\bar{\mathbf{a}}$) es la aceleración del deslizador medido por S'. El componente x de esta seudofuerza es

$$F'_x = ma'_x = (0.25 \text{ kg})\,(2.8 \text{ m/s}^2) = 0.70 \text{ N},$$

y su dirección es la misma que $\bar{\mathbf{a}}'$, es decir, se dirige hacia el frente de la camioneta. Es una fuerza muy real desde la perspectiva de observador S', y no es evidente para el observador situado en el suelo S, quien no necesita introducirla para explicar el movimiento del deslizador.

Una indicación de que las seudofuerzas no son newtonianas, es que violan la tercera ley de Newton. Si queremos aplicarla, S' debe encontrar una fuerza de reacción ejercida *por* el deslizador *sobre* algún otro cuerpo. No es posible encontrarla y, en consecuencia, se viola la tercera ley.

Las seudofuerzas son muy reales para quienes las experimentan. Imagine que viaja en un automóvil que está tomando una curva hacia la izquierda. Para un observador en tierra, el vehículo está experimentando una aceleración centrípeta, de ahí que constituya un marco de referencia no inercial. Si tiene asientos acojinados de vinil, el viajero se deslizará hacia el asiento de la derecha. Ello es algo muy natural para el observador en tierra, quien se halla en un marco inercial; el cuerpo simplemente trata de obedecer la primera ley de Newton y se desplaza en línea recta, y es el carro el que se desliza a la izquierda debajo del pasajero. Desde el punto de vista del marco de referencia inercial del automóvil, hay que atribuir el movimiento deslizante a una seudofuerza que tira del pasajero hacia la derecha. A este tipo de seudofuerza, se le conoce como *fuerza centrífuga*, es decir, que se *aleja* del centro.

Ahora el lector se sube a un carrusel y está nuevamente en un marco de referencia acelerado, y por lo mismo no inercial, donde los objetos se alejan del eje de rotación bajo la influencia de la fuerza centrífuga. Si sostiene una pelota en la mano, le parecerá que la fuerza horizontal neta en ella es cero, pues la fuerza centrífuga hacia afuera es equilibrada por la fuerza aplicada hacia adentro que la mano ejerce sobre la pelota. Para un observador en tierra, quien está en un marco de referencia inercial, la pelota se mueve en círculo, acelerando hacia el centro bajo la influencia de la fuerza *centrípeta* que usted ejerce con la mano. Para él no existe fuerza centrífuga, porque la fuerza neta en la pelota *no* es cero: acelera en forma radial hacia el interior.

Las seudofuerzas pueden ser la base de aparatos prácticos. Tomemos el caso de la centrífuga, uno de los instrumentos más útiles del laboratorio. A medida que una mezcla de sustancias se mueve rápidamente en círculo, las sustancias más voluminosas experimentan una fuerza centrífuga mayor mv^2/r, y se alejan del eje de rotación. Así pues, la centrífuga se vale de una seudofuerza para separar las sustancias por masa, del mismo modo que el espectrómetro de masa (Secc. 3-4) usa una fuerza electromagnética para separar los átomos por masa.

Existe otra seudofuerza que se conoce como fuerza de *Coriolis*. Supóngase que rueda una pelota hacia adentro con velocidad constante, en una línea radial pintada en el piso de un carrusel. En el momento en que la suelta en el radio r, tiene la velocidad tangencial adecuada (la misma que usted) para estar en movimiento circular. Conforme se mueve hacia el interior, adquirirá una rapidez tangencial menor para conservar el movimiento circular con la misma velocidad que el ambiente circundante. Como no es posible perder rapidez tangencial (suponemos poca fricción entre la pelota y el piso), rebasa un poco la línea pintada que representa una rapidez rotacional uniforme. En otras palabras, en su marco de referencia no inercial que gira, usted podría señalar que una seudofuerza lateral —la de Coriolis— hizo que la pelota se desviara constantemente de la línea al rodar hacia adentro. No existe dicha fuerza para un observador en tierra que se encuentre en un marco inercial: la pelota se mueve en línea recta con una rapidez determinada por los componentes de su velocidad en el momento de soltarla.

Quizás el ejemplo más común de los efectos de la fuerza de Coriolis, es el movimiento de la atmósfera alrededor de los centros de alta o baja presión. La figura 5-23 ilustra un diagrama de un centro de baja presión en el hemisferio norte.

Como la presión es menor que el ambiente, el aire fluye radialmente hacia el interior en todas direcciones. Al girar la Tierra (lo cual la convierte en marco no inercial), el efecto se parece al de la pelota en el carrusel: el aire que entra desde el Sur rebasa un poco una línea imaginaria trazada en la Tierra que gira, mientras que el aire procedente del Norte (como una pelota que rueda hacia afuera en el carrusel) se rezaga detrás de ella. El efecto total, es que el aire gira alrededor del centro de baja presión en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Este efecto de Coriolis es, pues, la causa de la circulación de los vientos en un ciclón o huracán. Los efectos se invierten en el hemisferio sur.

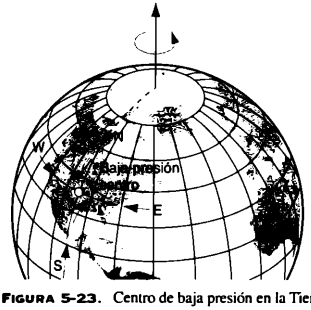
En el movimiento de los proyectiles de mortero, es necesario corregir el efecto de Coriolis de la Tierra que gira. En un proyectil con alcance de 10 km, el efecto de Coriolis puede ocasionar una deflexión hasta de 20 m. Las correcciones se incorporan a los programas de computadora con que se controlan la dirección y el disparo de armas de largo alcance. Sin embargo, las cosas pueden salir mal, como descubrió la Armada Inglesa en una batalla de la Primera Guerra Mundial, librada cerca de las islas Falkland. Los manuales de control de disparos, estaban destinados al hemisferio norte, y las islas Falkland se encuentran en el hemisferio sur, donde la corrección de Coriolis tendría la dirección contraria. Los proyectiles caían a unos 100 m del blanco, porque la corrección del efecto se realizaba en la dirección equivocada.

Así pues, en los problemas mecánicos tenemos dos opciones: 1) Seleccionar una marco de referencia *inercial* y considerar sólo las fuerzas "reales", es decir, las que pueden relacionarse a cuerpos bien definidos en el ambiente. 2) Escoger un marco de referencia *no inercial* y no sólo las fuerzas "reales", sino las seudofuerzas definidas de modo adecuado. Aunque casi siempre optamos por la primera alternativa, en ocasiones escogemos la segunda; ambas son totalmente equivalentes y la decisión depende de la conveniencia. ■

5-7 LIMITACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON (Opcional)

En los cinco primeros capítulos explicamos un sistema para analizar el comportamiento mecánico de una amplia gama de aplicaciones. Con un poco más que las ecuaciones de las leyes de Newton, podemos diseñar grandes rascacielos y puentes colgantes, e incluso planear la trayectoria de una nave interplanetaria (Fig. 5-24). La mecánica newtoniania, que ofrece estas herramientas de cálculo, fue el primer avance verdaderamente revolucionario en la física teórica.

A continuación damos un ejemplo de nuestra fe en las leyes de Newton. Vemos que galaxias y grupos de ellas giran, y por observación podemos deducir la velocidad de rotación. Esto nos permite calcular la cantidad de materia que debe haber en la galaxia o galaxias para que la gravedad soporte la fuerza centrípeta correspondiente a la rotación. Sin embargo, la cantidad de materia que logramos observar con el telescopio, es mucho menos de la esperada. Por ello, se ha propuesto que existe una "materia oscura" adicional que no podemos ver con el telescopio, pero que debe haber para proporcionar la fuerza



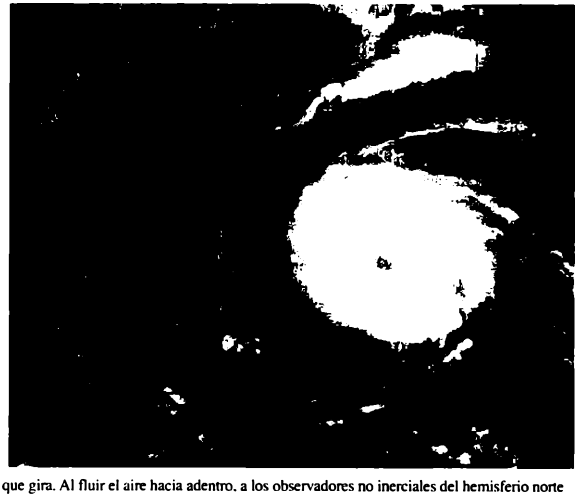


FIGURA 5-23. Centro de baja presión en la Tierra que gira. Al fluir el aire hacia adentro, a los observadores no inerciales del hemisferio norte les parece que lo hace en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Un ejemplo de este tipo de presión es el huracán (fotografía).

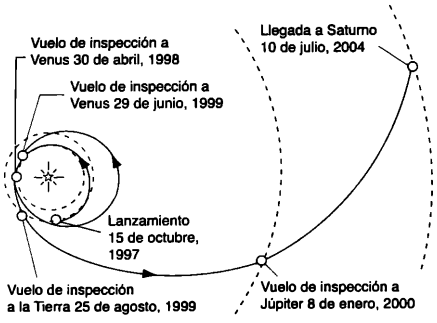


FIGURA 5-24. Trayectoria de la misión Cassini a Saturno, lanzada de la Tierra el 15 de octubre de 1997. La capacidad de calcular este tipo de trayectorias con precisión milimétrica, representa un triunfo de los métodos de la mecánica clásica. Los cuatro vuelos de inspección planetaria, sirven para obtener "asistentes de la gravedad" que aumentan la velocidad de la nave espacial (véase Secc. 6-1) y le permiten llegar a Saturno. Si desea mayor información acerca de la misión, consulte el sitio Web http://www.jpl.nasa.gov/cassini.

gravitacional requerida. Todavía no se ofrece una opción convincente del tipo o naturaleza de esa materia, de ahí que hayan sido propuestas otras explicaciones de la evidente incongruencia entre la cantidad de materia observada en las galaxias, la que se considera necesaria para cumplir con las leyes de Newton. Según una hipótesis, nuestros cálculos son incorrectos porque las leyes de Newton no se cumplen en las condiciones que se dan en escala muy grande, es decir, cuando las aceleraciones son muy pequeñas (varias veces por debajo de 10^{-10} m/s^2). En particular, se ha propuesto que, para estas aceleraciones tan pequeñas, la fuerza es proporcional a a^2 y no a a.

La figura 5-25 muestra los resultados de una prueba experimental de esta hipótesis. Los datos no caerían en línea recta, si las fuerzas dependieran de la aceleración a alguna potencia que no fuera 1. A partir de este experimento tan preciso, podemos concluir que con aceleraciones aproximadas de 10^{-10} m/s^2, la fuerza es proporcional a la aceleración y se cumple la segunda ley de Newton.

En el siglo XX hubo tres adelantos revolucionarios: la teoría especial de la relatividad de Einstein (1905), su teoría general de la relatividad (1915) y la mecánica cuántica (hacia 1925). Según la relatividad especial, no podemos aplicar las leyes de Newton a las partículas que se desplazan con velocidades cercanas a la de la luz. La relatividad general, prueba que no es posible aplicarlas en la proximidad de objetos extremadamente masivos. La mecánica cuántica nos enseña que no podemos extrapolarlas a objetos tan pequeños como los átomos.

La relatividad especial, que ofrece una concepción del espacio y del tiempo totalmente distinta a la de Newton, puede aplicarse en todas las circunstancias, tanto con velocidades altas como bajas. En el límite de las primeras, se demuestra que la dinámica de la relatividad especial se reduce directamente a las leyes de Newton. Asimismo, la relatividad general puede aplicarse a fuerzas gravitacionales tanto fuertes como débiles, pero sus ecuaciones se reducen a ellas tratándose de átomos individuales, donde se predice cierta aleatoriedad del comportamiento, o a los objetos ordinarios que contienen enorme cantidad de átomos; en este caso, la aleatoriedad se reparte de manera proporcional y desaparece, dándonos nuevamente las leyes de Newton.

En los dos últimos decenios se logró otro avance revolucionario. Éste se refiere a los sistemas mecánicos cuyo comportamiento se califica de *caótico*. Una de las características de Newton, es su capacidad de predecir el comportamiento futuro de un sistema, si conocemos las fuerzas que intervienen y el movimiento inicial. Por ejemplo, basándonos en la posición y la velocidad inicial de una sonda espacial sometida a las fuerzas gravitacionales provenientes del Sol y los planetas, podemos calcular su trayectoria exacta. Consideremos ahora una rama que flota en una corriente turbulenta. Su trayectoria corriente abajo resulta totalmente impredecible, a pesar de que sobre ella actúan siempre fuerzas gobernadas por la mecánica newtoniana. Si soltamos dos ramas al mismo tiempo en la corriente, posiblemente las encontremos muy lejos una de otra corriente abajo. Uno de los temas de la dinámica caótica, es que los cambios pequeños en las condiciones iniciales de un problema pueden acrecentarse de modo considerable y ocasionar diferencias en los resultados predichos. Con frecuencia se recurre a ella en los pronósticos del clima, y se ha dicho que el aleteo de una mariposa en Japón podría relacionarse con la aparición de un huracán en el Golfo de México.

Estos movimientos caóticos ocurren no sólo en los sistemas complejos como una corriente turbulenta, sino también en los sistemas físicos simples: un péndulo, un grifo que gotea lentamente o un circuito eléctrico oscilatorio. En la década de 1960, se descubrió que tras el comportamiento aparentemen-

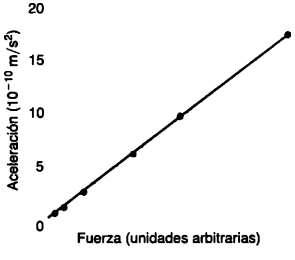


FIGURA 5-25. Resultados de un experimento para probar si la segunda ley de Newton se cumple en las aceleraciones pequeñas por debajo de 10^{-9} m/s^2. La recta muestra que la aceleración es proporcional a la fuerza aplicada hasta 10^{-10} m/s^2, así que la ley de Newton es válida, incluso con aceleraciones tan pequeñas.

te caótico de estos sistemas se ocultan un orden y regularidad, cuyo estudio constituye la esencia de una nueva rama de la ciencia: la del *caos*.* Se han encontrado aplicaciones de sus leyes no sólo en los sistemas físicos, sino además en los sistemas biológicos. Inclusive algunas ramas de la ciencia social, como la economía y la dinámica poblacional, muestran un comportamiento caótico.

Los cálculos que combinan la mecánica newtoniana de las partículas con la teoría del caos, indican que la órbita de Plutón es caótica en una escala temporal de decenas de millones de años (poco tiempo en comparación con la edad del sistema solar —cerca de 4,500 millones de años—, pero mucho tiempo comparado con el periodo orbital de Plutón alrededor del Sol, cerca de 250 años). La teoría del caos sirve para explicar dos propiedades del cinturón de asteroides (situado entre la órbita de Marte y la de Júpiter) que no podría explicarse en el marco de la mecánica tradicional de Newton: 1) Muchos asteroides se alejan de lo que deberían ser órbitas estables, algunos de los cuales se convierten en meteoritos que caen en forma constante sobre la Tierra. 2) Dentro del cinturón se hallan varios huecos donde el número de asteroides es pequeño o cero, o ninguno. Fue apenas en la última década cuando las computadoras de alta velocidad permitieron que los cálculos detallados de la dinámica de estos sistemas se acompañaran de las escalas temporales necesarias para observar un comportamiento tan extraño; y conforme se efectúan más cálculos, se descubren nuevas aplicaciones de esta área tan fascinante. ■

* Véase *Chaos-Making a New Science*, por James Gleick (Penguin Books, 1987).

OPCIÓN MÚLTIPLE

5-1 Leyes de la fuerza

5-2 Tensión y fuerzas normales

1. Una báscula de resorte está sujeta a cuerdas en ambos extremos; las cuerdas cuelgan sobre poleas sin fricción y están conectadas a pesas de 20 N como se ve en la figura 5-26. La lectura en la báscula se aproximará más a
   A) 0 N B) 10 N C) 20 N D) 40 N

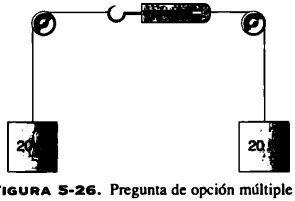


FIGURA 5-26. Pregunta de opción múltiple 1.

2. ¿Cuál de los siguientes enunciados es el más correcto?
   A) La fuerza normal es lo mismo que el peso.
   B) La fuerza normal es diferente del peso, pero siempre tiene la misma magnitud.
   C) La fuerza normal es diferente del peso, pero los dos forman un par de acción-reacción, según la tercera ley de Newton.
   D) La fuerza normal es diferente del peso, pero los dos tienen la misma magnitud en ciertos casos.
3. Una caja de madera está sobre una mesa. La fuerza normal en ella proveniente de la mesa es de 75 N. Una segunda caja idéntica se coloca arriba de la primera. La fuerza normal que en la primera ejerce la mesa
   A) disminuirá. B) se mantendrá en 75 N.
   C) aumentará a 150 N. D) aumentará a 300 N.
4. Una mujer puede permanecer de pie con zapatos de carrera, o con tacones altos puntiagudos en una superficie plana. Suponiendo que su masa total sea igual sin importar los zapatos que use, la fuerza normal que el suelo ejerce sobre ellos es
   A) mayor en caso de los zapatos de carrera por una superficie mayor de contacto con el suelo.
   B) igual en ambos pares de zapatos.
   C) mayor con los tacones puntiagudos por la menor superficie de contacto con el suelo.
   D) exclusivamente dependiente de si está de pie con las rodillas dobladas.
5. Una cuerda *real* cuelga del techo en un extremo. El otro se mece con libertad. Si la masa de la cuerda es de 100 g, la tensión será
   A) 0.98 N en todo lo largo de la cuerda.
   B) 0.49 N en todo lo largo de la cuerda.
   C) 0.98 N en la parte inferior de la cuerda, y variará linealmente hasta llegar a cero en la parte superior.
   D) 0.98 N en la parte superior de la cuerda, y variará linealmente hasta llegar a cero en la parte inferior.
6. Un pájaro de peso W está posado en el centro de un cable estirado de masa despreciable. En la mitad el cable forma un ángulo pequeño con la horizontal. ¿Qué podemos concluir sobre la tensión T en el alambre?
   A) T, $W/2$ B) $W/2 \leq T \leq W$ C) $T > W$
   D) Hace falta más información para contestar la pregunta.

5-3 Fuerzas de fricción

7. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto respecto al peso de un objeto y la fuerza de su fricción cinética?
   A) El peso siempre es mayor que la fuerza de fricción.
   B) El peso siempre es igual a la fuerza de fricción.
   C) El peso es menor que la fuerza de fricción en objetos bastante ligeros.
   D) El peso puede ser mayor o menor que la fuerza de fricción.

8. Un bloque de 2.0 kg está en una superficie plana donde μ_s = 0.80 y μ_k = 0.60. Se le aplica una fuerza de 13.7 N paralela a la superficie.

a) Si el bloque se hallaba inicialmente en reposo,

A) permanecerá en reposo y la fuerza de fricción será de aproximadamente 15.7 N.

B) permanecerá en reposo y la fuerza de fricción será de aproximadamente 13.7 N.

C) permanecerá en reposo y la fuerza de fricción será de 11.8 N.

D) comenzará a deslizarse con una fuerza neta aproximada de 1.9 N.

b) Si el bloque se hallaba inicialmente en movimiento y si la fuerza aplicada de 13.7 N sigue la dirección del movimiento,

A) acelerará bajo una fuerza neta aproximada de 1.9 N.

B) se desplazará con rapidez constante.

C) desacelerara con una fuerza neta de 1.9 N sobre él.

D) desacelerará bajo una fuerza neta de 11.8 N.

9. Dos bloques similares de madera están atados uno detrás de otro, y se tira de ellos por una superficie plana. La fricción es despreciable. La fuerza necesaria para jalarlos con una rapidez constante es *F*. Si un bloque está encima del otro, la nueva fuerza requerida para tirar de ellos con rapidez constante será aproximadamente

A) $F/2$. B) F. C) $\sqrt{2}F$. D) $2F$.

10. Los sistemas de frenado automático (ABS) instalados en los automóviles, evitan que las llantas se traben cuando dejan de girar, reduciendo luego la fuerza de frenado hasta que empiezan a girar otra vez. Sabiendo que $\mu_s > \mu_k > \mu_{rodando}$, un automóvil equipado con este sistema

A) siempre se detendrá en una distancia más corta.

B) se detendrá en una distancia más corta en pavimento seco, no así en pavimento húmedo.

C) se detendrá aproximadamente en la misma distancia.

D) siempre se detendrá en una distancia más corta que otro automóvil que frene trabando las llantas.

11. Un bloque de madera con un peso de 1.0 kg está sobre otro idéntico que se halla en la parte superior de una mesa plana de plástico. El coeficiente de fricción estática entre las superficies de madera es μ_1, y entre la madera y el plástico es μ_2.

a) Se aplica la fuerza horizontal *F* sólo al bloque superior, y aumenta hasta que el bloque de arriba empieza a deslizarse. El de abajo se deslizará con el de arriba si y sólo si

A) $\mu_1 < \frac{1}{2}\mu_2$. B) $\frac{1}{2}\mu_2 < \mu_1 < \mu_2$.

C) $\mu_2 < \mu_1$. D) $2\mu_2 < \mu_1$.

b) Ahora se aplica una fuerza horizontal *F* sólo al bloque de abajo, y esta fuerza aumenta hasta que comienza a deslizarse. ¿En qué condiciones se deslizará el bloque de arriba junto con el de abajo?

A) Si $\mu_1 > 0$ el bloque de arriba se deslizará independiente de μ_2

B) $\frac{1}{2} < \mu_1 < \mu_2$ C) $\mu_2 < \mu_1$ D) $2\mu_2 < \mu_1$

5-4 La dinámica del movimiento circular uniforme

12. Una motocicleta se desplaza alrededor de un círculo vertical con una rapidez constante, bajo la influencia de la fuerza de gravedad $\vec{W}$, de la fuerza de fricción entre las ruedas y la pista $\vec{f}$, y la fuerza normal entre las ruedas y el círculo $\vec{N}$.

a) ¿Cuál de las siguientes cantidades tiene una magnitud constante?

A) $\vec{N}$ B) $\vec{N} + \vec{f}$ C) $\vec{f} + \vec{W}$ D) $\vec{N} + \vec{W} + \vec{f}$

b) ¿Cuáles de las siguientes magnitudes, cuando no son cero, se dirigen siempre hacia el centro del círculo?

A) $\vec{f}$ B) $\vec{W}$ C) $\vec{f} + \vec{W}$ D) $\vec{N} + \vec{f}$

13. Un automóvil atraviesa terreno escarpado. Por un instante su movimiento en la cumbre de la colina se parece al movimiento circular con el centro de curvatura debajo de la carretera. El movimiento en el fondo de una hondonada es instantáneamente similar al movimiento circular con el centro de curvatura por encima de la carretera. En cualquier momento tres fuerzas operan sobre el automóvil: el peso $\vec{W}$, la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de fricción $\vec{f}$ de las llantas con la carretera. Sus magnitudes están dadas, respectivamente, por *W*, *N* y *f*.

a) Cuando el automóvil se halla en la parte superior de una colina, ¿cuál de las siguientes fuerzas da la magnitud de su fuerza centrípeta?

A) N B) $W + N$ C) $W - N$ D) $N - W$

b) Cuando el automóvil se encuentra en el fondo de una hondonada, ¿cuál de las siguientes fuerzas da la magnitud de la fuerza centrípeta?

A) N B) $W + N$ C) $W - N$ D) $N - W$

5-5 Fuerzas dependientes del tiempo

5-6 Marcos no inerciales y seudofuerzas (Opcional)

5-7 Limitaciones de las leyes de Newton (Opcional)

REGUNTAS

1. Puede tirar de un carretón con una cuerda, pero no puede empujarlo con ella. ¿Existe lo que se conoce como tensión "negativa"?
2. Existe un límite después del cual, al pulir más una superficie, la resistencia friccional aumenta en vez de disminuir. Explique por qué.
3. Una caja más pesada que usted está colocada en un piso áspero. El coeficiente de fricción estática entre ella y el piso es igual al que existe entre las suelas de sus zapatos y el piso. ¿Puede empujar la caja a través del piso? (Véase Fig. 5-27.)
4. En el béisbol, un jugador puede llegar a la base más rápido si corre que si se desliza. Explique la causa de esto. ¿Entonces por qué se desliza?
5. ¿Cómo podría llegar a la orilla una persona que permanece en una capa de hielo totalmente sin fricción que cubre una laguna? ¿Podría hacerlo caminando, rodando, moviendo los brazos o pataleando? ¿Cómo podría colocársele en esa posición?
6. ¿Por qué las llantas se adhieren a la carretera mejor en terreno plano que cuando suben o bajan una colina?

FIGURA 5-27. Pregunta 3.

7. ¿Por qué en la parte trasera de los automóviles deportivos se instalan superficies planas, llamadas frenos aerodinámicos? Están diseñadas de modo que el aire que fluye por ellas ejerza una fuerza hacia abajo.
8. Dos superficies están en contacto, pero se encuentran en reposo una respecto a otra. Sin embargo, cada una ejerce una fuerza de fricción sobre la otra. Explique.
9. Su automóvil patina por la línea del centro en una carretera cubierta de hielo. ¿Debería girar las ruedas frontales en dirección del patinado o en dirección opuesta *a*) cuando quiere evitar una colisión con un automóvil que se aproxima, y *b*) cuando no hay ningún otro automóvil cerca, pero usted quiere recobrar el control del volante? Suponga una transmisión en las ruedas traseras, y luego una transmisión en las ruedas delanteras.
10. ¿Por qué las conductores de automóviles de carreras aceleran cuando atraviesan una curva?
11. Vuela usted un avión a una altitud constante, y quiere dar una vuelta de 90°. ¿Por qué se ladea para hacerlo?
12. Cuando un perro mojado se sacude el agua, la gente cerca de él suele mojarse. ¿Por qué el agua se desprende de él en esta forma?
13. Seguramente el lector habrá observado (como lo hizo Einstein) que, cuando agita una taza de té, las hojas de té que flotan dejan residuos en el centro de la taza y no en el borde externo. ¿Puede explicar esto? (Einstein lo explicó.)
14. Suponga que necesita medir si una tabla de la mesa en un tren es verdaderamente horizontal. Si usa un nivel de burbuja, ¿podrá determinar esto cuando el tren baje una depresión o la suba? ¿Cuando se desplaza por una curva? (*Sugerencia*: Hay dos componentes horizontales.)
15. En el péndulo cónico, ¿qué sucede con el periodo y la rapidez cuando $\theta = 90°$. ¿Por qué este ángulo no puede obtenerse físicamente? Explique el caso cuando $\theta = 0°$.
16. Colocamos una moneda en un tocadiscos. El motor arranca, pero la moneda se desprende antes que alcance la rapidez final de rotación. Explique por qué.
17. Un automóvil viaja por una carretera campestre que se asemeja a la pista de una montaña rusa. Si se desplaza con rapidez uniforme, compare la fuerza que ejerce sobre una sección horizontal de la carretera con la que ejerce sobre ella en la cumbre y en el fondo de una colina. Explique.
18. Maneja una camioneta con velocidad uniforme en una carretera recta. Un balón de playa está en el centro del piso y un balón lleno de helio flota arriba, tocando el techo del vehículo. ¿Qué le sucede a los dos si usted *a*) da vuelta en una esquina con velocidad constante, o *b*) aplica los frenos?
19. ¿Cómo afecta la rotación de la Tierra la medición del peso de un objeto situado en el Ecuador?
20. Explique por qué la rotación de la Tierra influye en la medición del peso de un objeto situado en el Ecuador.
21. Los astronautas de un vehículo en el espacio orbital, quieren llevar un registro diario de su peso. ¿Sabe cómo podrían hacerlo, teniendo en cuenta que son "ingrávidos"?
22. Explique por qué la pregunta "¿Cuál es la velocidad lineal de un punto del ecuador?", exige una suposición respecto al marco de referencia utilizado. Demuestre cómo la respuesta cambia a medida que modificamos los marcos.
23. ¿En qué se distinguen los marcos de referencia inerciales y los que difieren sólo por la traslación o rotación de los ejes?
24. Un pasajero en el asiento delantero de un automóvil se desliza hacia la puerta cuando el conductor efectúa un viraje repentino. Describa las fuerzas en el pasajero y en el automóvil en ese instante, si el movimiento es visto desde un marco de referencia *a*) conectado a la Tierra, y *b*) conectado al automóvil.
25. ¿Debe preocuparse por el efecto de Coriolis cuando juega tenis o golf? Si su contestación es negativa, explíquela.
26. Suponga que está de pie en el balcón de una alta torre, viendo hacia el Este. Suelta un objeto para que caiga al suelo (véase Fig. 5-28). Suponga además que puede ubicar con mucha precisión el punto del impacto. ¿Caerá el objeto al suelo en *a*, verticalmente debajo del punto de partida, en *b* al Este o en *c* al Oeste? El objeto fue soltado del reposo; la Tierra gira de Oeste a Este.

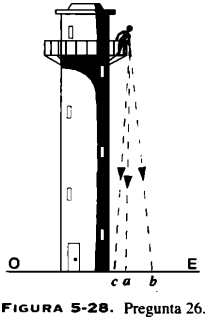


FIGURA 5-28. Pregunta 26.

27. Con un argumento cualitativo, demuestre que, debido a la rotación de la Tierra, en el hemisferio norte un viento que sopla de Norte a Sur se desviará hacia la derecha. ¿Y qué sucede con un viento que sopla de Sur a Norte? ¿Cuál es la situación en el hemisferio sur?

EJERCICIOS

5-1 Leyes de la fuerza

5-2 Tensión y fuerzas normales

1. Una esfera con carga negativa y de masa 2.8×10^{-4} kg está colgada de una cuerda. Una fuerza eléctrica actúa horizontalmente sobre ella, de modo que la cuerda forma un ángulo de 33° con la vertical cuando está en reposo. Calcule *a*) la magnitud de la fuerza eléctrica, y *b*) la tensión de la cuerda.
2. Un elevador de 6.200 lb es tirado hacia arriba por un cable con una aceleración de 3.8 ft/s^2. *a*) ¿Cuál es la tensión del cable? *b*) ¿Cuál es la tensión cuando el elevador acelera hacia abajo a ft/s^2, pero sigue moviéndose hacia arriba?
3. Una lámpara cuelga verticalmente de una cuerda en un elevador que desciende. El elevador tiene una desaceleración de 2.4 m/s^2 antes de detenerse. *a*) Si la tensión de la cuerda es 89 N, ¿cuál es la masa de la lámpara? *b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda

cuando el elevador sube con una aceleración ascendente de 2.4 m/s^2?

4. Un elevador y su carga tienen una masa combinada de 1,600 kg. Determine la tensión del cable de sostén cuando se hace que el elevador, que inicialmente descendía a 12.0 m/s, se detenga con una aceleración constante en una distancia de 42.0 m.
5. Un hombre de 110 kg baja al suelo desde una altura de 12 m, sosteniéndose de una cuerda pasada por una polea y unida a una bolsa de arena de 74 kg. *a*) ¿Con qué velocidad cae el hombre al suelo? *b*) ¿Hay algo que pueda hacer para reducir la rapidez con que cae?
6. Un mono de 11 kg trepa por una cuerda sin masa atada a un tronco de 15 kg sobre una rama sin fricción. *a*) ¿Con qué aceleración mínima debe el mono trepar por la cuerda, de modo que levante el tronco del suelo? Si después de lograrlo, el mono deja de trepar y se cuelga de la cuerda, ¿cuál será *b*) su aceleración, y *c*) la tensión de la cuerda?
7. La figura 5-29 muestra una sección de un sistema alpino de un teleférico. La masa permitida en cada teleférico con ocupantes es 2,800 kg. Los teleféricos que se deslizan por un cable de sostén, son tirados por otro cable conectado a cada poste. ¿Qué diferencia de tensión hay entre las secciones contiguas del cable de tracción, si los teleféricos aceleran hasta alcanzar 0.81 m/s^2 y una inclinación de 35°?

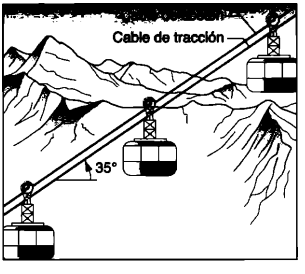


FIGURA 5-29. Ejercicio 7.

8. El hombre de la figura 5-30 pesa 180 lb; la plataforma y la polea conectada a ella sin fricción pesan un total de 43 lb. Ignore el peso de la cuerda. ¿Con qué fuerza debe el hombre tirar de la cuerda hacia arriba para levantarse junto con la plataforma a 1.2 ft/s^2?

FIGURA 5-30. Ejercicio 8.

5-3 Fuerzas de fricción

9. El coeficiente de fricción estática entre el teflón y los huevos revueltos es de 0.04 aproximadamente. ¿Cuál es el ángulo más pequeño desde la horizontal que hará que los huevos resbalen en el fondo de una sartén recubierta con teflón?
10. Suponga que sólo las llantas traseras de un automóvil pueden acelerarlo y que la mitad del peso total del automóvil está sostenida por ellas. *a*) ¿Cuál es la aceleración máxima alcanzable si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es μ_s? *b*) Suponga que $\mu_s = 0.56$ y obtenga un valor numérico de esta aceleración.
11. ¿Cuál es la aceleración máxima que puede generar un corredor, si el coeficiente de la fricción estática entre los zapatos y la carretera es 0.95?
12. Una fuerza de fricción de 470 N disminuye la velocidad de un beisbolista (Fig. 5-31) con una masa de 79 kg que se desliza en una base. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre él y el suelo?

FIGURA 5-31. Ejercicio 12.

13. Con una barra horizontal se sostiene un objeto de 75 kg entre dos paredes como se ilustra en la figura 5-32. Las fuerzas iguales F ejercidas por la barra contra las paredes, pueden modificarse por ajuste de la longitud de la barra. Sólo la fricción entre los extremos de ella y de las paredes sostiene el sistema. El coeficiente de fricción estática entre ambas es 0.41. Encuentre el valor mínimo de las fuerzas F para que el sistema permanezca en reposo.

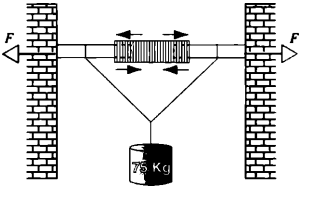


FIGURA 5-32. Ejercicio 13.

14. Un baúl de 53 lb (= 240 N) está en el piso. El coeficiente de fricción estática entre ellos es 0.41 y el de fricción cinética es 0.32. *a*) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima con que una persona debe empujarlo para que empiece a desplazarse? *b*) Una vez en movimiento, ¿qué fuerza horizontal debe aplicar la persona para que siga desplazándose con velocidad constante? *c*) Si por el contrario, la persona continuara empujando con la fuerza aplicada para iniciar el movimiento, ¿qué aceleración alcanzaría el baúl?
15. El coeficiente de fricción estática entre las llantas de un automóvil y una carretera seca es 0.62. La masa del automóvil es 1,500 kg. ¿Qué fuerza máxima de frenado puede obtenerse *a*) en una carretera plana, y *b*) en una que tenga una pendiente de 8.6°?
16. Una casa está construida en la cumbre de una colina con una pendiente de 42°. El desprendimiento de material en la superficie de la pendiente indica que el gradiente de pendiente debe reducirse. Si el coeficiente de fricción de la tierra en el terreno es 0.55, ¿con qué ángulo adicional ϕ (véase Fig. 5-33) debe regraduarse la superficie de la pendiente?

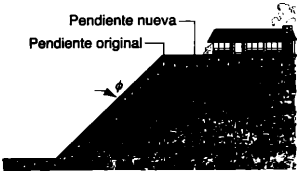


FIGURA 5-33. Ejercicio 16.

17. Una caja de 136 kg descansa en el piso. Un trabajador trata de empujarla aplicando horizontalmente una fuerza de 412 N. *a*) Suponga que el coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es 0.37, y demuestre que la caja no se mueve. *b*) Un segundo trabajador ayuda empujando la caja hacia arriba. ¿Qué fuerza vertical mínima debe aplicar este trabajador para que la caja comience a desplazarse por el piso? *c*) Si el segundo trabajador aplica una fuerza horizontal en vez de vertical, ¿qué fuerza mínima, además de la original de 412 N, ha de ejercerse para mover la caja?
18. Un estudiante quiere determinar los coeficientes de fricción estática y de fricción cinética entre una caja y un tablón. Coloca la caja sobre el tablón y poco a poco eleva un extremo de él. Cuando el ángulo de inclinación con la horizontal alcanza 28.0°, la caja empieza a resbalar y en 3.92 s se desliza 2.53 m hacia abajo por el tablón. Encuentre los coeficientes de fricción.
19. El calor de fricción generado por un esquí en movimiento es el factor principal que favorece el desplazamiento en esquíes. El esquí se adhiere al principio, pero una vez el movimiento funde la nieve debajo de él. Al ser encerado, el esquí repele mejor el agua y disminuye la fricción con la capa de ésta. En una revista se dice que un nuevo tipo de esquí plástico repele aún mejor el agua y que, en una pendiente suave de 203 m en los Alpes, el esquiador acorta el tiempo de 61 a 42 s con ellos. Suponiendo una pendiente de 3.0°, calcule el coeficiente de fricción cinética en cada caso.
20. Un bloque se desliza por un plano inclinado con un ángulo de pendiente θ, y una velocidad constante. Después es proyectado hacia arriba del mismo plano con una rapidez inicial v_0. *a*) ¿A qué distancia hacia arriba se moverá el bloque antes de detenerse? *b*) ¿Volverá a deslizarse hacia abajo?
21. Un trozo de hielo se desliza del reposo hacia abajo de una pendiente rugosa de 33.0° en el doble del tiempo que tarda en hacerlo hacia abajo por una pendiente de 33.0° sin fricción y de la misma longitud. Calcule el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y la pendiente rugosa.
22. En la figura 5-34, *A* es un bloque de 4.4 kg y *B* es un bloque de 2.6 kg. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre *A* y la mesa son 0.18 y 0.15. *a*) Determine la masa mínima del bloque *C* que debe colocarse en *A* para evitar que se deslice. *b*) De repente se desprende de *A* el bloque *C*. ¿Qué aceleración tiene el bloque *A*?

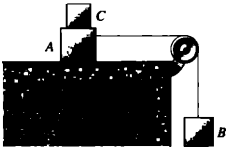


FIGURA 5-34. Ejercicio 22.

23. Una fuerza horizontal de 46 N (véase Fig. 5-35) actúa sobre un bloque de 4.8 kg en un plano inclinado de 39°. El coeficiente de fricción cinética entre ambos es 0.33. *a*) ¿Qué aceleración tiene el bloque si sube por el plano? *b*) Con la fuerza horizontal todavía en acción, ¿a qué distancia hacia arriba del plano llegará si tiene una rapidez inicial ascendente de 4.3 m/s? *c*) ¿Qué sucede con el bloque después que alcanza el punto más elevado?

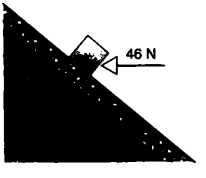


FIGURA 5-35. Ejercicio 23.

24. Un bloque de acero de 12 kg se encuentra en una mesa horizontal. El coeficiente de fricción estática entre ambos es 0.52. *a*) ¿Qué magnitud de la fuerza horizontal comenzará a moverlo? *b*) ¿Qué magnitud de una fuerza que actúe hacia arriba 62° respecto a la horizontal empezará a moverlo? *c*) Si la fuerza actúa hacia abajo a 62° de la horizontal, ¿qué magnitud puede tener sin hacer que el bloque se desplace?
25. Un trabajador arrastra una caja de 150 lb por un piso, tirando de una cuerda inclinada 17° sobre la horizontal. El coeficiente de fricción estática es 0.52 y el de fricción cinética es 0.35. *a*) ¿Qué tensión de la cuerda se necesita para comenzar a moverla? *b*) ¿Cuál es la aceleración inicial de la caja?
26. Un alambre se quebrará bajo tensiones superiores a 1.22 kN. Si el alambre, no necesariamente horizontal, se usa para arrastrar una caja por el piso, ¿cuál será el peso máximo que puede mover si el coeficiente de fricción estática es 0.35?

27. El bloque B de la figura 5-36 pesa 712 N. El coeficiente de fricción estática entre él y la mesa es 0.25. Determine el peso máximo del bloque A con el cual el bloque B permanece en reposo.

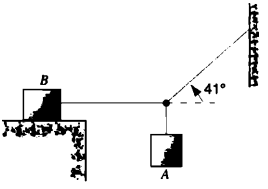


FIGURA 5-36. Ejercicio 27.

28. El bloque m_1 de la figura 5-37 tiene una masa de 4.20 kg, y el bloque m_2 una masa de 2.30 kg. El coeficiente de fricción cinética entre m_2 y el plano horizontal es 0.47. El plano inclinado no presenta fricción. Calcule *a*) la aceleración del bloque, y *b*) la tensión de la cuerda.

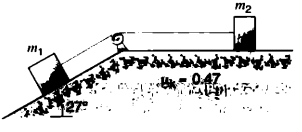


FIGURA 5-37. Ejercicio 28.

29. En la figura 5-38, el objeto B pesa 94.0 lb y el objeto A pesa 29.0 lb. Entre el objeto B y el plano, el coeficiente de fricción estática es 0.56 y el de fricción cinética es 0.25. *a*) Determine la aceleración del sistema si al inicio B está en reposo. *b*) Determine la aceleración si B sube por el plano. *c*) ¿Cuál es la aceleración si B baja por el plano? El plano tiene una inclinación de 42.0°.

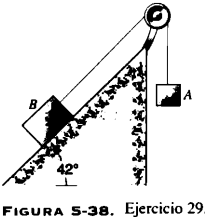


FIGURA 5-38. Ejercicio 29.

30. Una caja se desliza hacia abajo por un canal inclinado en ángulo recto como en la figura 5-39. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el material de que está hecho es μ_k. Calcule la aceleración de la caja.

FIGURA 5-39. Ejercicio 30.

31. Una losa de 42 kg se encuentra en un piso sin fricción. Un bloque de 9.7 kg está arriba de ella, como se muestra en la figura 5-40. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la losa es 0.53, y el de fricción cinética es 0.38. Sobre el bloque actúa una fuerza horizontal de 110 N. ¿Cuáles son las aceleraciones resultantes de *a*) el bloque, y *b*) la losa?

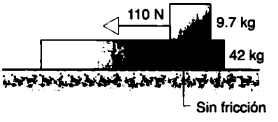


FIGURA 5-40. Ejercicio 31.

5-4 La dinámica del movimiento circular uniforme

32. Durante una competencia de carreras de trineo en los Juegos Olímpicos a una velocidad de 60 mi/h, un equipo europeo toma una curva con un radio de 25 ft. ¿Qué aceleración experimentan los conductores *a*) en ft/s², y *b*) en unidades de g?

33. Un automóvil de 2,400 lb (= 10.7 kN) que se desplaza a 30 mi/h (= 13.4 m/s) trata de tomar una curva sin peralte y con un radio de 200 ft (= 61.0 m). *a*) ¿Qué fuerza de fricción se requiere para mantenerlo en su trayectoria circular? *b*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se necesita entre las llantas y la carretera?

34. Una curva circular de una carretera está diseñada para automóviles que se desplacen a 60 km/h (= 37 mi/h). *a*) Si el radio de la curva es 150 m (= 490 ft), ¿cuál es el ángulo correcto de peralte de la carretera? *b*) Si la curva no tuviera peralte, ¿cuál sería el coeficiente mínimo de fricción entre las llantas y la carretera que evitaría que los automóviles derraparan a esta velocidad?

35. Un péndulo cónico se forma conectando un guijarro de 53 g a una cuerda de 1.4 m. El guijarro oscila alrededor de un círculo de radio 25 cm. *a*) ¿Qué rapidez tiene el guijarro? *b*) ¿Cuál es su aceleración? *c*) ¿Qué tensión tiene la cuerda?

36. Con una rapidez constante de 8.7 m/s, un ciclista (Fig. 5-41) recorre un círculo cuyo radio es de 25 m. La masa combinada de él y la bicicleta es 85 kg. Calcule la fuerza —magnitud y ángulo con la vertical— que ejerce la carretera sobre la bicicleta.

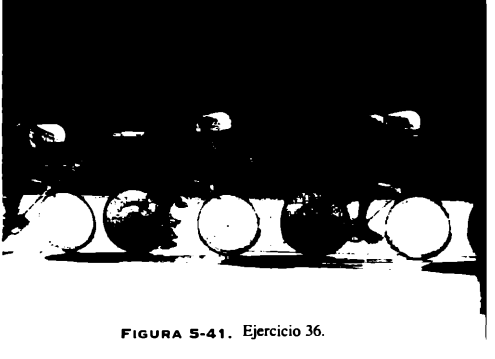


FIGURA 5-41. Ejercicio 36.

37. En el modelo del átomo de hidrógeno propuesto por Bohr, el electrón gira en una órbita circular alrededor del núcleo. Si el radio es 5.3×10^{-11} m y el electrón efectúa 6.6×10^{15} rev/s, determine *a*) su rapidez, *b*) su aceleración y *c*) la fuerza que actúa sobre él. (Esta fuerza es el resultado de la atracción entre el núcleo de carga positiva y el electrón de carga negativa.)

38. Un niño coloca una canasta de comida campestre en el borde exterior de un carrusel que tiene 4.6 m de radio y que completa un giro cada 24 s. ¿Qué magnitud debe tener el coeficiente de fricción estática para que la canasta permanezca en el carrusel?

39. Un disco de masa *m* en una mesa sin fricción, está conectado a un cilindro de masa *M* mediante una cuerda introducida en un hoyo de la mesa (véase Fig. 5-42). Calcule la rapidez con que el disco debe moverse en un círculo de radio *r* para que el cilindro permanezca estático.

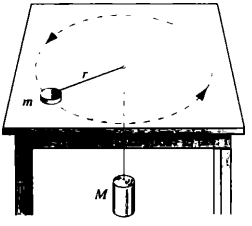


FIGURA 5-42. Ejercicio 39.

40. En un manual del conductor se indica lo siguiente: un conductor que vaya a 48 km/h y que quiera frenar lo más rápidamente posible, recorrerá 10 m antes de pisar el freno. El vehículo recorre otros 21 m más antes de frenar. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción se supone en estos cálculos? *b*) ¿Cuál es el radio mínimo para dar la vuelta en una esquina a 48 km/h sin derrapar?

41. En una carretera, una curva con peralte está diseñada para automóviles que circulen a 95 km/h. El radio de la curva es de 210 m. El tráfico se desplaza por la carretera a 52 km/h en un día lluvioso. *a*) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción entre las llantas y la carretera que permitirá a los automóviles tomar la curva sin derrapar? *b*) Con este valor del coeficiente de fricción, ¿cuál es la rapidez más grande a que puede tomarse la curva sin derrapar?

42. Un estudiante de 150 lb en una rueda Ferris que gira sin detenerse, está sentado en una báscula que indica 125 lb en el punto más alto. *a*) ¿Cuál será la lectura de la báscula en el punto más bajo? *b*) ¿Cuál será la lectura en el punto más alto si la rapidez de la rueda se duplicara?

43. Se coloca un objeto pequeño a 13.0 cm del centro de un tocadiscos. Se observa que permanece en la mesa cuando gira a $33\frac{1}{3}$ rev/min, pero se desliza hacia afuera cuando lo hace a 45 rev/min. ¿En qué límites debe encontrarse el coeficiente de fricción estática entre el objeto y la superficie del tocadiscos?

44. Un avión vuela en un círculo horizontal con una rapidez de 482 km/h. Las alas tienen una inclinación de 38.2° con la horizontal (véase Fig. 5-43). Calcule el radio del círculo en que vuela. Suponga que la fuerza centrípeta se obtiene totalmente de la fuerza de elevación perpendicular a la superficie del ala.

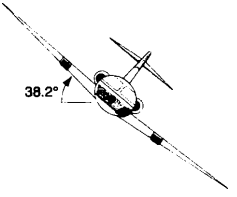


FIGURA 5-43. Ejercicio 44.

45. Un rabihorcado cruza velozmente en una trayectoria circular horizontal. Se estima que su ángulo de pendiente tiene 25° y que tarda 13 s en completar un círculo. *a*) ¿Con qué velocidad vuela? *b*) ¿Cuál es el radio del círculo? (Consúltese "The Amateur Scientist" de Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1985, p. 122.)

46. Un avión a escala de masa 0.75 kg vuela a rapidez constante en un círculo horizontal en un extremo de una cuerda de 33 m y a una altura de 18 m. El otro extremo está atado al suelo. El avión efectúa 4.4 rev/min y el empuje es perpendicular a las alas sin pendiente. *a*) ¿Cuál es su aceleración? *b*) ¿Qué tensión tiene la cuerda? *c*) ¿Qué empuje ascendente producen las alas?

47. Suponga que el kilogramo patrón pese exactamente 9.80 N en el nivel del mar en el Ecuador, si la Tierra no girase. Después tenga en cuenta el hecho de que sí gira, así que en un día este objeto se desplaza en un círculo cuyo radio es de 6.370 km (el de la Tierra). *a*) Determine la fuerza centrípeta necesaria para mantener en movimiento el kilogramo que se desplaza en una trayectoria circular. *b*) Calcule la fuerza ejercida por él sobre una báscula de resorte de donde está suspendido en el Ecuador (su peso).

5-5 Fuerzas dependientes del tiempo

48. La posición de una partícula con masa de 2.17 kg que se desplaza en línea recta está dada por

$$x = (0.179\ \text{m/s}^4)t^4 - (2.08\ \text{m/s}^2)t^2 + 17.1\ \text{m}.$$

Calcule *a*) la velocidad, *b*) la aceleración y *c*) la fuerza sobre la partícula en el tiempo $t = 7.18$ s.

49. Una partícula de masa *m* está sujeta a una fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}(t)$, dada por $\vec{\mathbf{F}}(t) = F_0(1 - t/T)\hat{\mathbf{i}}$; es decir, $F(t)$ es igual a F_0, en $t = 0$, y disminuye linealmente a cero en el tiempo T. La partícula pasa por el origen $x = 0$ con una velocidad $v_0\hat{\mathbf{i}}$. Demuestre que en el instante $t = T$, $F(t)$ se hace cero, que la rapidez v y que la distancia x recorrida están dadas por $v(T) = v_0 + a_0T/2$, y $x(T) = v_0T + a_0T^2/3$, donde $a_0 = F_0/m$, es la aceleración inicial. Compare los resultados anteriores con las ecuaciones 2-26 y 2-28.

5-6 Marcos no inerciales y seudofuerzas (Opcional)

5-7 Limitaciones de las leyes de Newton (Opcional)

PROBLEMAS

1. Un bloque de masa m_1 en un plano inclinado que sin fricción forma un ángulo θ_1 con la horizontal, está conectado por un cordón sobre una polea ideal pequeña, a otro bloque de masa m_2 en un plano sin fricción en un ángulo θ_2 (véase Fig. 5-44). *a*) Demuestre que la aceleración de cada bloque es

$$a = \frac{m_1 \operatorname{sen} \theta_1 - m_2 \operatorname{sen} \theta_2}{m_1 + m_2} g,$$

y que la tensión de la cuerda es

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (\operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2).$$

b) Evalúe la aceleración y la tensión de $m_1 = 3.70$ kg y $m_2 = 4.86$ kg, donde $\theta_1 = 28°$ y $\theta_2 = 42°$. ¿En qué dirección se mueve m_1 sobre el plano? *c*) Utilizando los valores m_1, θ_1 y θ_2 antes dados, ¿con qué valores de m_2 hace que m_1 acelere hacia arriba del plano? ¿Hacia abajo del plano? ¿No acelera?

FIGURA 5-44. Problema 1.

2. Alguien ejerce una fuerza F directamente hacia arriba del eje de la polea de la figura 5-45. Suponga que la polea y la cuerda no tienen masa, y que el cojinete no tiene fricción. Dos objetos, m_1 de 1.2 kg de masa y m_2 de 1.9 kg de masa, están conectados a los lados opuestos de la cuerda que pasa por arriba de la polea. El objeto m_2 está en contacto con el piso. *a*) ¿Cuál es el valor máximo que la fuerza $\vec{F}$ puede tener para que m_2 permanezca inmóvil en el piso? *b*) ¿Qué tensión tiene la cuerda si la fuerza ascendente F es de 110 N? *c*) Con la tensión determinada en el inciso *b*), ¿qué aceleración tiene m_1?

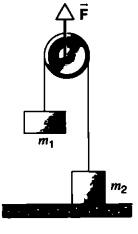


FIGURA 5-45. Problema 2.

3. Dos partículas de masa m, están conectadas por una cuerda ligera de longitud $2L$, como se ve en la figura 5-46. Una fuerza constante $\vec{F}$ está aplicada en el punto medio de la cuerda ($x = 0$), en ángulo recto con la posición inicial de la cuerda. Demuestre que la aceleración de las dos masas en la dirección de 90° con $\vec{F}$ está dada por

$$a_x = \frac{F}{2m} \frac{x}{(L^2 - x^2)^{1/2}}$$

donde x, es la distancia perpendicular de una de las partículas desde la línea de acción de $\vec{F}$. Explique la situación cuando $x = L$.

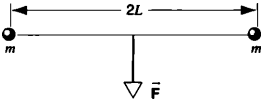


FIGURA 5-46. Problema 3.

4. Una fuerza horizontal F de 12 lb, empuja un bloque que pesa 5.0 lb contra un muro vertical (Fig. 5-47). El coeficiente de fricción estática entre éste y el bloque es 0.60, y el de fricción cinética es 0.40. Suponga que el bloque no se mueve al inicio. *a*) ¿Empezará a moverse? *b*) ¿Qué fuerza ejerce el muro sobre el bloque?

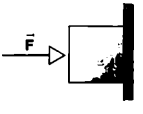


FIGURA 5-47. Problema 4.

5. Un bloque de 7.96 kg se halla en un plano con una inclinación de 22.0° con la horizontal, como se aprecia en la figura 5-48. El coeficiente de fricción estática es 0.25 y el de fricción cinética es 0.15. *a*) ¿Cuál es la fuerza mínima F paralela al plano, que impedirá que se deslice hacia abajo por el plano? *b*) ¿Cuál es la fuerza mínima F que comenzará a desplazarlo hacia arriba del plano? *c*) ¿Qué fuerza F se requiere para moverlo hacia arriba con una velocidad constante?

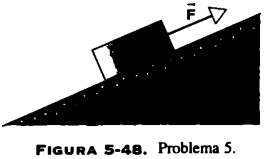


FIGURA 5-48. Problema 5.

6. Un trabajador quiere apilar arena en una superficie circular de su patio. El radio del círculo es R. No debe desbordarse arena hacia el área circundante (véase Fig. 5-49). Demuestre que el volumen máximo de arena que puede acumularse así es $\pi \mu_s R^3/3$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática de arena sobre arena. (El volumen del cono es $Ah/3$, donde A es la superficie base y h es la altura.)

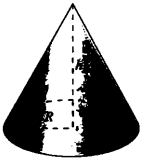


FIGURA 5-49. Problema 6.

7. El mango de un trapeador de masa m forma un ángulo θ con la dirección vertical (véase Fig. 5-50). Sea μ_k el coeficiente de fricción cinética entre él y el piso, y μ_s el coeficiente de fricción estática entre ambos. No tenga en cuenta la masa del mango. *a*) Calcule la magnitud de la fuerza F en el mango, que se necesita para deslizarlo con una velocidad uniforme por el piso. *b*) Demuestre que, si θ es menor que cierto ángulo θ_0, no podrá hacerse que el trapeador se deslice por el piso por grande que sea la fuerza dirigida a lo largo del mango. ¿Cuál es el ángulo θ_0?

FIGURA 5-50. Problema 7.

8. En la figura 5-51 se muestra la sección transversal de un corte de carretera que penetra en el costado de una montaña. La línea continua AA' representa un débil plano de estratificación sobre el cual puede producirse un deslizamiento. El bloque B directamente sobre la carretera, está separado de la roca superior por una hendidura profunda (llamada *fractura*), de modo que sólo la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie de la falla impide el probable deslizamiento. La masa del bloque es 1.8×10^7 kg, el ángulo de inclinación del plano de falla es 24°, y el coeficiente de fricción estática entre él y el bloque es 0.63. *a*) Demuestre que el bloque no se deslizará. *b*) El agua se filtra en la fractura, ejerciendo una fuerza hidrostática F paralela a la inclinación del bloque. ¿Qué valor mínimo de F desencadenará un deslizamiento?

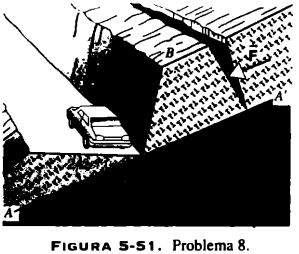


FIGURA 5-51. Problema 8.

9. Los dos bloques, $m = 16$ kg y $M = 88$ kg que aparecen en la figura 5-52, pueden moverse libremente. El coeficiente de fricción estática entre ellos es $\mu_s = 0.38$, pero la superficie debajo de M no tiene fricción. ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima F que se requiere para sostener m frente a M?

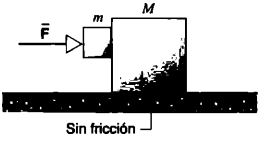


FIGURA 5-52. Problema 9.

10. Dos objetos con masa $m_1 = 1.65$ kg y $m_2 = 3.22$ kg, conectados por un palo sin masa paralelo a la pendiente por donde se deslizan, como se muestra en la figura 5-53, descienden por el plano con m_1 detrás de m_2. El ángulo de la pendiente es $\theta = 29.5°$. El coeficiente de fricción cinética entre m_1 y la pendiente es $\mu_1 = 0.226$; entre m_2 y la pendiente el coeficiente correspondiente es $\mu_2 = 0.127$. Calcule *a*) la aceleración común de los dos objetos, y *b*) la tensión del palo. *c*) ¿Cuáles son las respuestas a *a*) y *b*) si m_2 sigue a m_1?

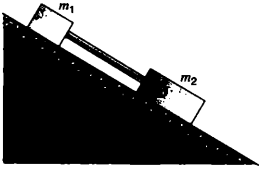


FIGURA 5-53. Problema 10.

11. Una cuerda sin masa se coloca sobre una polea de radio r a fin de levantar del piso un objeto de peso W, como se observa en la figura 5-54. El coeficiente de fricción deslizante entre la cuerda y la polea es μ. Demuestre que la tracción mínima descendente sobre la cuerda que se necesita para levantar el objeto es

$$F_{\text{abajo}} = We^{\pi\mu}.$$

(*Sugerencia*: Este problema requiere métodos del cálculo integral.)

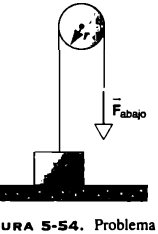


FIGURA 5-54. Problema 11.

12. Un bloque de 4.40 kg se coloca arriba de otro de 5.50. Para que el de arriba se deslice sobre el de abajo que se mantiene en su sitio, hay que aplicarle una fuerza de 12.0 N al de arriba. El arreglo de bloques se pone ahora sobre una mesa horizontal sin fricción (véase Fig. 5-55). Calcule *a*) la fuerza horizontal máxima F que puede aplicarse al bloque de abajo para que los dos se desplacen juntos, *b*) la aceleración resultante de ellos y *c*) el coeficiente de fricción estática entre los bloques.

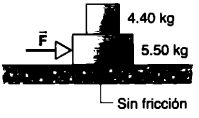


FIGURA 5-55. Problema 12.

13. Conduce usted un automóvil a una rapidez de 85 km/h, cuando observa una barrera en la carretera 62 m adelante. *a*) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática entre las llantas y la carretera que le permitirá detenerse sin chocar contra la barrera? *b*) Suponga que va a 85 km/h en un gran estacionamiento vacío. ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática que le permitiría virar el automóvil en un círculo de 62 m de radio, y evitar así una colisión con un muro situado 62 m adelante?

14. Un automóvil va a velocidad constante en una carretera recta pero escarpada. Una sección tiene una cresta y una depresión de 250 m de radio (véase Fig. 5-56). *a*) En el momento que pasa por la cresta, la fuerza normal es la mitad del peso de 16 kN del automóvil. ¿Cuál será la fuerza normal en él cuando cruza el fondo de la depresión? *b*) ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza sin dejar la carretera en la cumbre de la colina? *c*) Si se desplaza a la rapidez de *b*), ¿cuál será la fuerza normal en el automóvil cuando cruza por el fondo de la depresión?

FIGURA 5-56. Problema 14.

15. Se coloca una pequeña moneda en un tocadiscos horizontal plano. Se observa que el aparato efectúa exactamente tres revoluciones en 3.3 s. *a*) ¿Qué rapidez tiene la moneda cuando a una distancia de 5.2 cm del centro del tocadiscos se desplaza sin deslizar? *b*) ¿Cuál es su aceleración (magnitud y dirección) en el inciso *a*)? *c*) ¿Cuál es la fuerza de fricción que actúa sobre la moneda en el inciso *a*) si la moneda tiene una masa de 1.7 g? *d*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y el tocadiscos si se observa que ésta se resbala cuando está a más de 12 cm del centro del tocadiscos?

16. Cierta cuerda puede soportar una tensión máxima de 9.2 lb sin romperse. Un niño le ata una piedra de 0.82 lb en un extremo y, sosteniendo en las manos el otro, hace girar la piedra en un círculo vertical de 2.9 ft de radio, aumentado lentamente la velocidad hasta que la cuerda se rompe. *a*) ¿En qué parte de la trayectoria de la piedra se rompe la cuerda? *b*) ¿Qué rapidez alcanza en el momento en que se produce la rotura?

17. Una pelota de 1.34 kg se ata a una varilla vertical rígido por medio de dos cuerdas sin masa, cada una de 1.70 m de longitud. Las cuerdas están unidas al palo en dos puntos a una distancia de 1.70 m. El sistema gira alrededor del eje del palo, las dos cuerdas están muy tensas formando un triángulo equilátero con el palo, según se observa en la figura 5-57. La tensión en la cuerda de la parte superior es 35.0 N. *a*) Determine la tensión en la cuerda de la parte inferior. *b*) Calcule la fuerza neta sobre la pelota en el momento indicado en la figura. *c*) ¿Cuál es la rapidez de la pelota?

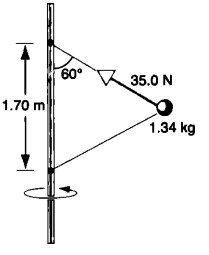


FIGURA 5-57. Problema 17.

18. Un cubo muy pequeño de masa m se coloca en el interior de un embudo (véase Fig. 5-58) que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad constante de ω revoluciones por segundo. La pared del embudo forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el cubo y el embudo es μ_s, y el centro de cubo se halla a una distancia r del eje de rotación. Calcule *a*) los valores máximos, y *b*) mínimos de ω, en los cuales el cubo no se moverá respecto al embudo.

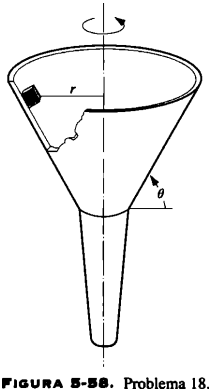


FIGURA 5-58. Problema 18.

19. Debido a la rotación de la Tierra, una plomada puede no colgar exactamente en dirección de la fuerza gravitacional ejercida sobre ella, sino que puede desviarse un poco de esa dirección. *a*) De-

muestre que la deflexión θ en radianes en un punto de latitud L, está dada por

$$\theta = \left(\frac{2\pi^2 R}{gT^2}\right) \operatorname{sen} 2L,$$

donde R, es el radio de la Tierra y T, el periodo de su rotación. *b)* ¿En qué latitud es máxima la deflexión? ¿De cuánto es? *c)* ¿Cuál es la deflexión en los polos? ¿Y en el Ecuador?

20. Una partícula de masa m se encuentra en reposo en $x = 0$. En el tiempo $t = 0$, una fuerza dada por $F = F_0 e^{-t/T}$ se aplica en la dirección $+x$; F_0 y T son constantes. Cuando $t = T$, se elimina la fuerza. En el instante en que se hace esto, a) ¿qué rapidez tiene la partícula?, y *b)* ¿dónde está?

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Un automóvil se desplaza con rapidez constante, mientras tira de un bloque de madera de masa $m = 200$ kg con una cuerda elástica. La fuerza ejercida sobre el bloque de madera por la cuerda depende de la longitud de esta última y está dada por $F = 400(l - 10)$, donde F se mide en newtons cuando l se mide en metros. Sin embargo, esta fuerza es 0 si $l < 10$ m. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el suelo es $\mu_s = 0.60$, y el de fricción cinética es $\mu_k = 0.50$. Diseñe un programa de computadora para evaluar numéricamente el movimiento del bloque en las siguientes situaciones: *a)* suponga que el bloque se halla inicialmente en reposo, y que el automóvil está a 10 m de distancia y alejándose de él con una rapidez constante de 5 m/s. *b)* Suponga que el bloque está inicialmente en reposo, y el automóvil a 10 m de distancia y alejándose de él con una rapidez constante de 20 m/s.

2. Partiendo del reposo, una persona empuja por un piso áspero una caja de 95 kg aplicando una fuerza de $F = 200e^{-0.15t}$, donde F se mide en newtons y t en segundos. La fuerza disminuye exponencialmente, porque la persona se cansa. Mientras la caja se desplaza, una fuerza constante de fricción de 80 N se opone al movimiento. *a)* ¿Cuánto tiempo después del inicio se detiene la caja? *b)* ¿Qué tan lejos llega? *c)* ¿Qué tan precisos son sus resultados? (Le recomendamos utilizar el método de Euler con un intervalo inicial de $\Delta t = 0.01$ s. Repita el proceso, pero esta vez use un intervalo de $\Delta t = 0.001$ s. Compare los resultados para obtener una estimación de su exactitud.)

CAPÍTULO 6

MOMENTO*

Las leyes de Newton sirven para resolver una amplia diversidad de problemas en dinámica. Pero existe una clase de problemas en los cuales, aunque podamos aplicar las leyes como las hemos definido, no conocemos muy bien las fuerzas para analizar el movimiento. Estos problemas incluyen colisiones entre dos objetos.

En el presente capítulo aprenderemos a analizar este tipo de colisiones. Al hacerlo, descubriremos que necesitamos otra variable dinámica denominada momento lineal. *Veremos que la ley de conservación del momento lineal, una de las leyes fundamentales de la física, puede usarse para estudiar las colisiones de objetos desde la escala de partículas subatómicas hasta la escala de las galaxias.*

6-1 COLISIONES

En una colisión, dos objetos ejercen fuerza uno sobre otro durante un intervalo de tiempo medible, de manera que podemos dividir el movimiento en tres partes: antes, durante y después de la colisión. Durante ella, los objetos ejercen fuerza uno sobre el otro; según la tercera ley de Newton, las fuerzas son de igual magnitud y de dirección contraria. Suponemos que son mucho más grandes que las que ejercen sobre ellos otros objetos del ambiente. El movimiento de los objetos (o por lo menos de uno de ellos) cambia abruptamente durante la colisión, así que podemos distinguir con relativa claridad la situación antes de la colisión y después de ella.

Por ejemplo, cuando un bate golpea una pelota, el tiempo entre el inicio y el final de la colisión puede determinarse con mucha exactitud. El bate está en contacto con la pelota durante un intervalo muy corto en comparación con el tiempo que miramos la pelota. En la colisión ejerce una gran fuerza sobre la pelota (Fig. 6-1). Esta fuerza varía con el tiempo en una forma compleja que podemos medir con dificultad. La pelota y el bate se deforman durante la colisión. Se da el nombre de fuerzas *impulsivas* a las que actúan por un tiempo breve en comparación con el de observación del sistema.

Cuando una partícula alfa (núcleo ^{4}He) choca con otro núcleo (Fig. 6-2), la fuerza que uno ejerce sobre el otro puede ser una fuerza electrostática repulsiva asociada a las cargas de las partículas. Éstas pueden entrar en contacto directo entre sí, pero todavía podemos referirnos a la interacción como una colisión, porque una fuerza relativamente grande que opera por un tiempo corto en comparación con aquél durante el cual

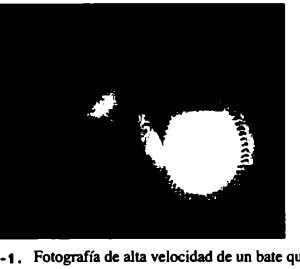


FIGURA 6-1. Fotografía de alta velocidad de un bate que golpea una pelota de béisbol. Nótese la deformación de la pelota que indica la gran fuerza impulsiva ejercida por el bate.

* También es llamado *momentum*, cantidad de movimiento o ímpetu.

FIGURA 6-2. Una partícula alfa choca con un núcleo de helio en una cámara de niebla. La mayor parte de las partículas incidentes (provenientes de la izquierda) cruzan sin chocar.

la partícula alfa está bajo observación, produce un efecto importante en el movimiento de dicha partícula.

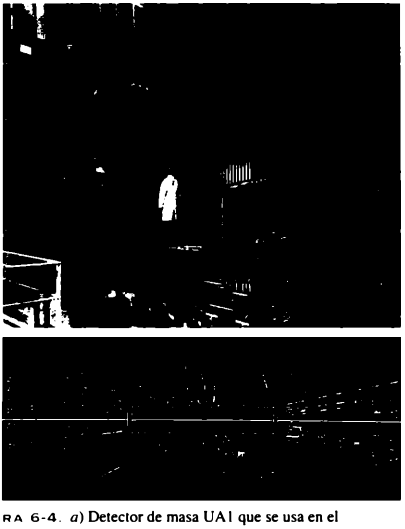
Inclusive, podemos hablar de una colisión entre dos galaxias (Fig. 6-3) si estamos preparados para observarlas en una escala temporal del orden de millones o miles de millones de años. (Sin embargo, una alternativa más factible, consiste en acortar este periodo tan largo construyendo modelos por computadora.)

Las colisiones entre partículas elementales constituye la fuente principal de información sobre su estructura interna. Cuando dos partículas chocan con gran energía, a menudo los productos de la colisión son muy diferentes de las partículas originales (Fig. 6-4). Algunas veces se producen cientos de partículas. Podemos reconstruir el fenómeno original, estudiando las trayectorias de las partículas que se dispersan y aplicando las leyes fundamentales.

En una escala diferente, los que estudian los accidentes de tránsito también tratan de reconstruir las colisiones. Con los patrones de trayectoria e impacto de los vehículos (Fig. 6-5), a menudo es posible deducir detalles tan importantes como la velocidad y la dirección del movimiento de los dos vehículos antes de chocar.

Otra clase de colisión, es la que tiene lugar entre una sonda espacial y un planeta, denominada "efecto de tirador": la rapidez de la sonda puede aumentarse en un "encuentro cercano" con un planeta (en movimiento). La sonda no lo toca en realidad, pero queda bajo su influencia gravitacional durante un periodo breve, en comparación con lo que dura el viaje de la sonda. Así pues, se justifica llamar "colisiones" a esos encuentros. Por ejemplo, el encuentro de Venus y la Tierra con

FIGURA 6-3. Dos galaxias en colisión.



a)

b)

FIGURA 6-4. *a)* Detector de masa UA1 que se usa en el colisionador de protones-neutrones del CERN, instalación de investigación de física nuclear cerca de Ginebra, Suiza.
b) Reconstrucción por computadora de las trayectorias de las partículas producidas en la colisión de protón-protón. Este tipo de reconstrucciones se emplearon en 1983 para confirmar la existencia de las partículas de muy corta duración denominadas W y Z; se comprobó así una teoría que considera la fuerza electromagnética y a la fuerza nuclear débil como aspectos distintos de una fuerza individual más básica.

la nave Cassini (véase Fig. 5-24) aumentó la rapidez de la nave espacial en el equivalente de 75 toneladas del combustible necesario para lanzar un cohete. La nave espacial no hubiera llegado a Saturno sin esta ayuda de la gravedad (véase Prob. 14).

En principio debería ser posible analizar las colisiones anteriores aplicando la segunda ley de Newton. Dado el movimiento inicial de los objetos y la fuerza que opera entre ellos, en función del tiempo podríamos usar los métodos del Capítulo 5 para determinar la velocidad y posición de los objetos en colisión. Sin embargo, existen dos razones que no permiten hacerlo con las colisiones de las figuras 6-1 a 6-5: 1) en algunas colisiones no sabemos la forma exacta de la expresión de la fuerza entre los objetos, y 2) los objetos en colisión se componen de muchas partículas, por lo que resulta demasiado complicado llevar un control de las aplicaciones de las leyes de Newton a las fuerzas entre las partículas del objeto en colisión y a cada partícula.

Éste es el problema básico: tenemos dos objetos con diferente velocidad inicial, los cuales originalmente estaban tan distantes que ninguno de los dos ejercía una fuerza mesurable sobre el otro. Con el tiempo se aproximan uno al otro y cada

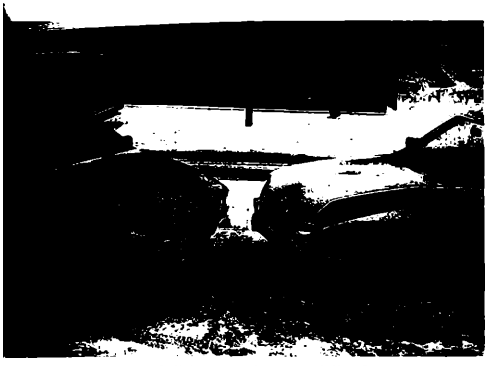


FIGURA 6-5. Colisión entre dos automóviles. Los expertos en reconstrucción de accidentes recurren a la conservación del momento para calcular las velocidades antes del choque.

uno ejerce fuerza sobre el otro, alterando así su movimiento. La fuerza ocurre en un tiempo relativamente corto en comparación con el del movimiento total de los objetos. Por último, se separan otra vez con nuevos movimientos y dejan de interactuar. Observamos el movimiento antes de la colisión y después de ella, pero durante la breve colisión no observamos ni medimos lo que sucede.

Si conocemos los movimientos iniciales, ¿podremos determinar el movimiento final aunque desconozcamos la fuerza que cambia el movimiento? Aunque parezca sorprendente, la respuesta es ¡afirmativa! En la siguiente sección se define otra variable dinámica que nos permitirá analizar esta clase de colisiones.

6-2 MOMENTO LINEAL

Para analizar las colisiones, necesitamos una nueva variable dinámica, el *momento lineal* de un cuerpo. (Más adelante introduciremos una variable similar del movimiento rotacional, llamada momento *angular*. Por ahora designaremos simplemente como "momento" el momento lineal.) El momento $\vec{p}$ de un cuerpo, se define como el producto de su masa por su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{6-1}$$

Al igual que el producto de un vector y de un escalar, el momento también debe ser un vector. La ecuación 6-1 indica que la dirección de $\vec{p}$ es la misma que la dirección de $\vec{v}$. Puesto que $\vec{p}$ depende de $\vec{v}$, *el momento (como la velocidad) depende del marco de referencia del observador, y siempre debemos especificar el marco.*

En su famoso libro *Principia*, Newton expresó la segunda ley del movimiento en función del momento (al que llamó "*cantidad de movimiento*"). Formulada en la terminología moderna, la segunda ley se define así:

La rapidez de cambio del momento de un cuerpo es igual a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y sigue la dirección de la fuerza.

En forma simbólica, se expresa así

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{6-2}$$

Aquí $\Sigma\,\vec{F}$ representa la fuerza resultante que opera sobre la partícula.

En una partícula de masa constante, esta forma de la ley equivale a la forma $\Sigma\,\vec{F} = m\vec{a}$, que hemos venido utilizando hasta ahora. En otras palabras, si m es constante,

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Las relaciones $\Sigma\,\vec{F} = m\vec{a}$ y $\Sigma\,\vec{F} = d\vec{p}/dt$ en una partícula individual son completamente equivalentes en la mecánica clásica.

La equivalencia de $\Sigma\,\vec{F} = m\vec{a}$ y $\Sigma\,\vec{F} = d\vec{p}/dt$ depende, como vemos en la ecuación anterior, de que la masa sea una constante para que la derivada sea cero $d(m\vec{v})/dt = m(d\vec{v}/dt)$. Supondremos lo anterior, que m = cte, en los problemas que vamos a explicar en este capítulo. En la sección 7-6 se incluyen las aplicaciones de las leyes de Newton a sistemas donde cambia la masa, como el cohete que expele gases de combustión.

6-3 IMPULSO Y MOMENTO

En esta sección examinaremos la relación existente entre la fuerza que opera sobre un cuerpo durante una colisión y el cambio de su momento. La figura 6-6 muestra cómo la magnitud de una fuerza podría variar con el tiempo durante una colisión. La fuerza se ejerce sólo en la colisión, la cual comienza en el tiempo t_i y termina en el tiempo t_f. La fuerza es cero antes y después de la colisión.

Basándonos en la segunda ley de Newton en la forma de la ecuación 6-2 ($\Sigma\,\vec{F} = d\vec{p}/dt$), podemos escribir el cambio

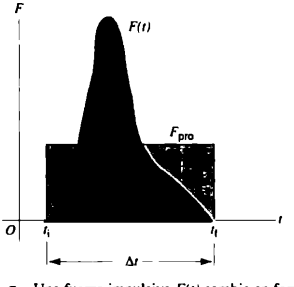


FIGURA 6-6. Una fuerza impulsiva $F(t)$ cambia en forma arbitraria con el tiempo durante una colisión que dura de t_i a t_f. El área bajo la curva $F(t)$ es el impulso J, y el rectángulo acotado por la fuerza promedio F_{pro} tiene la misma área.

del momento $d\vec{p}$ de una partícula en el intervalo dt, durante el cual una fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ actúa sobre ella como

$$d\vec{p} = \sum \vec{F}\, dt.$$

Si queremos determinar el cambio total del momento durante toda la colisión, integramos sobre el tiempo de la colisión, comenzando en el tiempo t_i (cuando el momento es $\vec{p}_i$), y terminando en el tiempo t_f (cuando el momento es $\vec{p}_f$):

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}\, dt \qquad (6\text{-}3)$$

El lado izquierdo de la ecuación 6-3 representa el cambio del momento, $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$. El lado derecho define una nueva magnitud denominada *impulso*. En cualquier fuerza arbitraria $\vec{F}$, el impulso $\vec{J}$ se define como

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt. \qquad (6\text{-}4)$$

El impulso depende de la magnitud de la fuerza y de su duración. Es un vector y, como se observa en la figura 6-3, tiene las mismas unidades y dimensiones que el momento.

El lado derecho de la ecuación 6-3 es el impulso de la fuerza *neta*, $\vec{J}_{neto} = \int \Sigma\vec{F}\, dt$. Por tanto, podemos escribir esta ecuación como

$$\vec{J}_{neto} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i. \qquad (6\text{-}5)$$

La ecuación 6-5 es la expresión matemática del *teorema del impulso-momento:*

> *El impulso de la fuerza neta que actúa sobre una partícula durante un intervalo determinado, es igual al cambio de momento de la partícula durante el intervalo.*

Como una relación vectorial, la ecuación 6-5 tiene tres ecuaciones componentes:

$$\begin{aligned} J_{neto,\,x} &= \Delta p_x = p_{fx} - p_{ix}, \\ J_{neto,\,y} &= \Delta p_y = p_{fy} - p_{iy}, \\ J_{neto,\,z} &= \Delta p_z = p_{fz} - p_{iz}, \end{aligned} \qquad (6\text{-}6)$$

Aunque en este capítulo usamos la ecuación 6-5 sólo en situaciones donde intervienen fuerzas impulsivas (es decir, de corta duración comparadas con el tiempo de observación), ese límite no está incorporado en la ecuación. La ecuación 6-5 es tan general como la segunda ley de Newton de donde la obtuvimos. Por ejemplo, podríamos emplearla para calcular el momento adquirido por un cuerpo que cae en la gravedad de la Tierra.

Definimos el impulso a partir de una fuerza individual, pero el "teorema de impulso-momento" se ocupa del cambio del momento, debido al impulso de la fuerza *neta*, esto es, del efecto combinado de todas las fuerzas que operan sobre la partícula. En el caso de una colisión en que intervienen dos partículas, a menudo no se hace la distinción, porque sobre cada una actúa sólo una fuerza proveniente de la otra. En este caso, el cambio de momento en una partícula es igual al impulso de la fuerza ejercida por la otra.

Se supone que la fuerza impulsiva cuya magnitud está representada en la figura 6-6 tiene una dirección constante. La magnitud de su impulso se indica con el área bajo la curva $F(t)$. Podemos representar esa misma superficie mediante el rectángulo de la figura 6-6, con un ancho Δt y una altura F_{pro}, donde F_{pro} es la magnitud de la *fuerza promedio* que opera durante el intervalo Δt. En consecuencia,

$$J = F_{pro}\, \Delta t. \qquad (6\text{-}7)$$

En una colisión como la de la pelota y el bate en la figura 6-1, es difícil medir $F(t)$, pero podemos estimar Δt (quizá si algunos milisegundos) y obtener un valor razonable de F_{pro}, basándonos en el impulso calculado según la ecuación 6-6 partiendo del cambio de momento de la pelota (véase el problema resuelto 6-1).

Hemos definido la colisión como una interacción que ocurre en un tiempo Δt, la cual es despreciable en comparación con el tiempo que hemos estado observando el sistema. También podemos caracterizarla como un evento donde las fuerzas externas que pueden operar sobre el sistema durante la colisión son despreciables, en comparación con las fuerzas impulsivas de la colisión. Sobre el sistema operan fuerzas externas mientras el bate golpea la pelota, mientras un palo de golf golpea la pelota o una bola de billar choca con otra. Por ejemplo, la gravedad o la fricción pueden ejercer fuerza sobre esos cuerpos; esas fuerzas externas pueden no ser las mismas en cada cuerpo en colisión ni tampoco son neutralizadas necesariamente por otras. Pese a ello, no es riesgoso prescindir de ellas durante la colisión. De ahí que el cambio de momento de una partícula debido a una fuerza externa sea despreciable, en comparación con el de la partícula atribuible a la fuerza impulsiva de la colisión (Fig. 6-7).

Por ejemplo, cuando un bate golpea una pelota, la colisión dura apenas unos milisegundos. Como el cambio de momento de la pelota es grande y el tiempo de la colisión es pequeño, de

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{pro}\, \Delta t \qquad (6\text{-}8)$$

se deduce que la fuerza impulsiva promedio $\vec{F}_{pro}$ es relativamente grande. En comparación con ella, la fuerza externa de

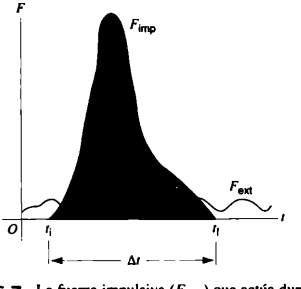


FIGURA 6-7. La fuerza impulsiva (F_{imp}) que actúa durante una colisión suele ser mucho más fuerte que la fuerza externa F_{ext} que posiblemente también esté operando.

la gravedad es despreciable. Durante la colisión podemos ignorar sin peligro esta fuerza al determinar el cambio de movimiento de la pelota; cuanto menos dure la colisión, más probabilidades habrá de que esto sea verdadero.

PROBLEMA RESUELTO 6-1. Una pelota de béisbol (cuyo peso oficial es de unas 5 onzas, es decir, una masa de 0.14 kg) se desplaza horizontalmente con una rapidez de 93 mi/h (cerca de 42 m/s), y es golpeada con un bate (véase Fig. 6-1). Después de la colisión la pelota se desplaza con un ángulo $\phi = 35°$ arriba de su trayectoria incidente, y con una rapidez de 50 m/s. *a*) Determine el impulso (de la fuerza) ejercido sobre la pelota. *b*) Suponiendo que la colisión dure 1.5 ms (0.0015 s), ¿cuál es la fuerza promedio? *c*) Determine el cambio de momento del bate.

Solución *a*) La figura 6-8*a* muestra el vector del momento inicial $\vec{p}_i$ y el vector del momento final $\vec{p}_f$ de la pelota de béisbol. Los componentes del momento final están dados por

$$p_{fx} = mv_f \cos\phi = (0.14\ \text{kg})(50\ \text{m/s})(\cos 35°) = 5.7\ \text{kg}\cdot\text{m/s},$$

$$p_{fy} = mv_f \operatorname{sen}\phi = (0.14\ \text{kg})(50\ \text{m/s})(\operatorname{sen} 35°) = 4.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

En este sistema coordenado, el momento inicial tiene apenas un componente x, cuyo valor (negativo) es

$$p_{ix} = mv_i = (0.14\ \text{kg})(-42\ \text{m/s}) = -5.9\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Ahora el impulso puede obtenerse por medio de la ecuación 6-6:

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = 5.7\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (-5.9\ \text{kg}\cdot\text{m/s}) = 11.6\ \text{kg}\cdot\text{m/s},$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = 4.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - 0 = 4.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

En otros términos, el impulso tiene la magnitud

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(11.6\ \text{kg}\cdot\text{m/s})^2 + (4.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s})^2}$$
$$= 12.3\ \text{kg}\cdot\text{m/s},$$

y opera en una dirección determinada por

$$\theta = \tan^{-1}(J_y/J_x) = \tan^{-1}[(4.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s})/(11.6\ \text{kg}\cdot\text{m/s})] = 19°$$

sobre la horizontal. La figura 6-8*b* muestra el vector de impulso $\vec{J}$, y verifica gráficamente que, como lo exige la definición de la ecuación 6-6,

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{p}_f + (-\vec{p}_i).$$

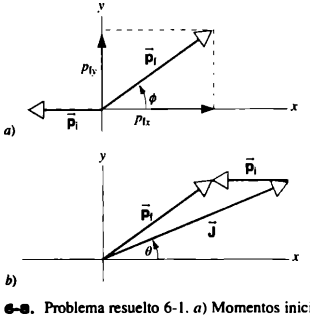


FIGURA 6-8. Problema resuelto 6-1. *a*) Momentos inicial y final de la pelota de béisbol. *b*) La diferencia $\vec{p}_f - \vec{p}_i$ es igual al impulso $\vec{J}$.

b) Usando la ecuación 6-7 obtenemos

$$F_{av} = J/\Delta t = (12.3\ \text{kg}\cdot\text{m/s})/0.0015\ \text{s} = 8200\ \text{N},$$

que es casi 1 ton. Esta fuerza actúa en la misma dirección que $\vec{J}$, es decir, 19° arriba de la horizontal. Nótese que ésta es la fuerza *promedio;* la fuerza *máxima* es mucho mayor, como se aprecia en la figura 6-6. Asimismo, nótese que F_{pro} (= 8,200 N) >> mg (= 1.4 N). Por tanto, podemos afirmar con mucha seguridad, que la fuerza impulsiva supera en mucho la fuerza externa (la gravedad en este caso) y que, por lo mismo, es casi igual a la fuerza neta que opera durante la colisión.

c) Según la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida sobre el bate por la pelota es igual y opuesta a la que ejerce el bate sobre ella. En consecuencia, de acuerdo con la ecuación 6-8, el cambio de momento del bate será igual y opuesto al de la pelota. Por tanto, para el bate,

$$\Delta p_x = -11.6\ \text{kg}\cdot\text{m/s},$$

$$\Delta p_y = -4.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

¿Es éste un cambio grande o pequeño? Para contestar esta pregunta, trate de estimar el momento del bate en movimiento.

PROBLEMA RESUELTO 6-2. Un carreta de masa m_1 = 0.24 kg se desplaza en una pista lineal sin fricción, y con una velocidad inicial de 0.17 m/s. Choca con otra de masa m_2 = 0.68 kg que inicialmente se halla en reposo. La primera lleva una sonda electrónica que registra la magnitud de la fuerza que ejerce una carreta en la otra durante la colisión. El registro de la sonda se ilustra en la figura 6-9. Calcule la velocidad de las dos carretas después de sucedida la colisión.

Solución En este problema nuestra estrategia consiste en calcular el impulso partiendo de la gráfica de fuerzas. El impulso indica el cambio de momento que permite determinar el momento final de las carretas. El impulso $\int F\,dt$ es el área bajo la gráfica de $F(t)$ en la figura 6-9, que puede calcularse como el área de un triángulo:

$$J = \int F\,dt = \tfrac{1}{2}(0.014\ \text{s} - 0.003\ \text{s})(10\ \text{N})$$
$$= 0.055\ \text{N}\cdot\text{s} = 0.055\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Puesto que la gráfica nos da la magnitud de la fuerza, esta integral indica la magnitud del impulso. Suponemos que la dirección del movimiento de la primera carreta es la dirección positiva x. Entonces la fuerza componente x aplicada a la carreta 1 por la carreta 2 es negativa, así que también lo es el componente correspondiente de $\vec{J}$. Da-

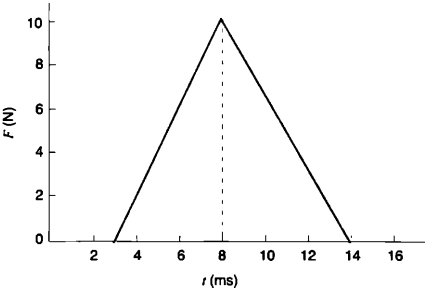


FIGURA 6-9. Problema resuelto 6-2.

do que $J_x = \Delta p_x$, en la primera carreta tenemos $\Delta p_{1x} = -0.055$ kg · m/s, y por eso su momento y velocidad finales son

$$p_{1fx} = p_{1ix} + \Delta p_{1x} = (0.24\ \text{kg})(0.17\ \text{m/s}) - 0.055\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$
$$= -0.014\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$v_{1fx} = \frac{p_{1fx}}{m_1} = \frac{-0.014\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.24\ \text{kg}} = -0.058\ \text{m/s} = -5.8\ \text{cm/s}.$$

De ahí que la carreta 1 se mueve en la dirección negativa x después de la colisión.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza en la carreta 2 es igual y opuesta a la de la carreta 1, por lo cual sigue la dirección positiva x. Dado que tienen igual magnitud, los impulsos también tienen la misma magnitud, sólo que en dirección contraria. En consecuencia, $J_{2x} = \Delta p_{2x} = +0.055$ kg · m/s, por lo que el momento y la velocidad finales de la carreta 2 son

$$p_{2fx} = p_{2ix} + \Delta p_{2x} = 0 + 0.055\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = +0.055\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$v_{2fx} = \frac{p_{2fx}}{m_2} = \frac{+0.055\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.68\ \text{kg}} = +0.081\ \text{m/s} = +8.1\ \text{cm/s}.$$

La carreta 2 se mueve en la dirección positiva x después de la colisión.

6-4 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

En la presente sección se analizan las colisiones entre dos objetos que pueden estar en movimiento. A diferencia del problema resuelto 6-2, pueden desplazarse en cualquier dirección, y por ello hemos de utilizar los vectores que describen el movimiento.

La figura 6-10*a* ilustra gráficamente el problema general. Un cuerpo de masa m_1 se mueve inicialmente con la velocidad $\vec{v}_{1i}$, y el momento $\vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_{1i}$. Choca con el cuerpo 2, que se desplaza con una velocidad $\vec{v}_{2i}$, y con el momento $\vec{p}_{2i} = m_2\vec{v}_{2i}$. Nos concentramos en el movimiento de los dos cuerpos que definimos como nuestro *sistema*. Suponemos que el sistema constituido por ellos está aislado del ambiente, de manera que ninguna fuerza actúa sobre los cuerpos durante la colisión, con excepción de la fuerza impulsiva que uno ejerce sobre el otro. Después de la colisión (Fig. 6-10*b*), m_1 se mueve con la velocidad $\vec{v}_{1f}$, y el momento $\vec{p}_{1f} = m_1\vec{v}_{1f}$; en tanto que m_2 con la velocidad $\vec{v}_{2f}$, y el momento $\vec{p}_{2f} = m_2\vec{v}_{2f}$.

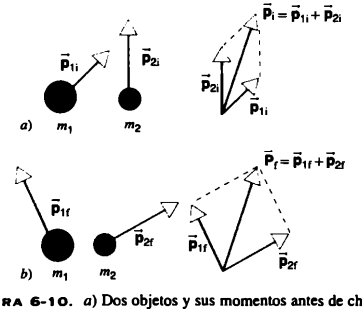


FIGURA 6-10. *a*) Dos objetos y sus momentos antes de chocar. *b*) Los objetos y sus momentos después de chocar. Nótese que los vectores del momento total $\vec{P}_i$ y $\vec{P}_f$ son los mismos antes y después de la colisión.

En un tiempo cualquiera, el momento total del sistema formado por los dos cuerpos es

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \tag{6-9}$$

que podemos evaluar antes, durante y después de la colisión. Al tomar la derivada de tiempo de la ecuación 6-9, obtendremos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \sum \vec{F}_1 + \sum \vec{F}_2, \tag{6-10}$$

donde hemos utilizado la ecuación 6-2 para reemplazar $d\vec{p}/dt$ en los dos cuerpos, por la fuerza neta que actúa sobre ellos. Antes de la colisión ninguna lo hace, de modo que $\Sigma\,\vec{F}_1 = 0$ y $\Sigma\,\vec{F}_2 = 0$ y, por tanto, $d\vec{P}/dt = 0$. De forma similar, después de la colisión $d\vec{P}/dt = 0$, porque tampoco esta vez hay fuerza que opere sobre ellos. Durante la colisión la única fuerza que actúa sobre el cuerpo 1 es $\vec{F}_{12}$, proveniente del cuerpo 2. De modo parecido, $\vec{F}_{21}$ es la única fuerza que opera sobre el cuerpo 2 durante la colisión. $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ forman un par de acción-reacción, por lo cual $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Por tanto, $d\vec{P}/dt = 0$ durante la colisión. Obtenemos pues, el mismo resultado cuando evaluamos la ecuación 6-10 antes, durante y después de la colisión; en todo momento,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \tag{6-11}$$

Si la derivada temporal de una magnitud es cero, la magnitud no cambiará con el tiempo y ha de ser una constante:

$$\vec{P} = \text{constante}. \tag{6-12}$$

En otras palabras, el momento total de m_1 y m_2 antes de la colisión ha de tener igual magnitud y dirección que el momento total de m_1 y m_2 después de ella. Aun cuando $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ cambien a consecuencia de la colisión, su suma vectorial permanece inalterada (como en la figura 6-10).

Otra forma de expresar el resultado anterior, es

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \tag{6-13}$$

donde $\vec{P}_i = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$ es el momento inicial total del sistema antes de la colisión, y donde $\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$ es el momento final total después de ella.

Las ecuaciones 6-11, 6-12 y 6-13 son expresiones matemáticas equivalentes de la *ley de conservación del momento lineal* en un sistema aislado compuesto por dos cuerpos:

Cuando la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema es cero, su momento lineal total permanece constante.

Éste es un resultado general, válido con cualquier tipo de interacción entre los cuerpos. Ni siquiera es necesario que se comporten como partículas para que se cumpla la ley (como en la colisión de la figura 6-5). Aunque obtuvimos el resultado en un sistema de dos cuerpos, la ley de conservación del momento es perfectamente general y se aplica a cualquier

conjunto o sistema de cuerpos en donde las únicas fuerzas existentes, son las que ejercen un cuerpo sobre el otro.

El momento es una magnitud vectorial, y para que el momento mantenga los tres componentes, ha de ser conservado de manera independiente. Por ejemplo, la ecuación 6-12 da

$$P_x = \text{constante}, \quad P_y = \text{constante}, \quad P_z = \text{constante}. \tag{6-14}$$

El componente x total del momento permanece inalterado antes y después de la colisión, lo mismo que los componentes y y z.

Por medio de las leyes de Newton obtuvimos la ley de conservación del momento, por lo cual es válida en cualquier marco de referencia inercial. Los observadores en varios marcos inerciales que observan la misma colisión, quizá no coincidan en los valores de los momentos inicial y final que miden, pero sí estarán de acuerdo con que son iguales. Si el momento se conserva en un marco inercial, se mantendrá en *todos* los marcos inerciales.

Las leyes de conservación son importantes para analizar y comprender los procesos físicos. Permiten comparar el comportamiento de un sistema "antes" y "después", sin que necesitemos conocer a fondo los procesos que ocurren "en el intermedio". Por ejemplo, la ley de conservación del momento lineal no hace suposición alguna respecto al tipo de fuerza que un cuerpo ejerce sobre el otro; el momento lineal total antes de la colisión será igual al momento total después de ella, sin importar el tipo de fuerza que actúa sobre los objetos.

Más adelante abordaremos en esta obra otras leyes de conservación, entre ellas las de la energía, del momento angular y de la carga eléctrica. Son leyes de gran conectividad teórica entre las magnitudes y simetrías de la naturaleza. Por ejemplo, la ley de conservación del momento lineal está relacionada con la simetría *espacial* de la naturaleza; ésta requiere que un experimento efectuado en un lugar produzca un resultado idéntico al obtenido en otro lugar con el mismo experimento. Más adelante explicaremos otra ley de conservación, la de la energía, relacionada a la simetría *temporal* (tiempo): el resultado de un experimento efectuado hoy deberá coincidir con el resultado del mismo experimento efectuado ayer. Debido a tales conexiones, pensamos que las dos leyes de conservación tienen validez universal: si la naturaleza del tiempo y espacio es igual en todos partes del universo, las mismas leyes de conservación habrán de aplicarse en cualquier parte en todo momento.

PROBLEMA RESUELTO 6-3. Federico (m_F = 75 kg) y Gloria (m_G = 55 kg) patinan juntos sobre hielo, con una velocidad común de 3.2 m/s (Fig. 6-11*a*) cuando se empujan uno al otro en dirección perpendicular a su velocidad original. Después de romper el contacto, Gloria patina en una dirección en un ángulo de 32° respecto a su dirección original (Fig. 6-11*b*). ¿En qué dirección patina Federico ahora?

Solución Federico y Gloria constituyen nuestro sistema. Ejercen fuerza uno sobre otro cuando se separan, pero si prescindimos del efecto de las fuerzas externas (como la fricción con el hielo), su momento total antes que se separen ha de ser el mismo que después que se han separado. Los componentes x de los momentos originales son (suponiendo que su movimiento original siga la dirección positiva x):

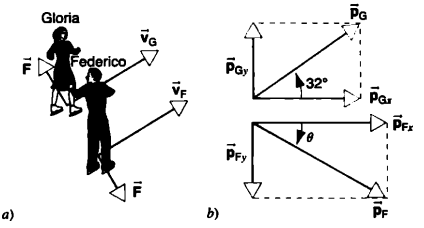


FIGURA 6-11. Problema resuelto 6-3. *a*) Dos patinadores se empujan en una dirección perpendicular a su movimiento original. *b*) Momentos de los patinadores después de haberse separado.

$$p_{Gx} = m_G v_G = (55\ \text{kg})(3.2\ \text{m/s}) = 176\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$p_{Fx} = m_F v_F = (75\ \text{kg})(3.2\ \text{m/s}) = 240\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Después de la separación, el momento de Gloria adquiere un componente y, de modo que su momento total forma un ángulo de 32° con la dirección positiva x:

$$p_{Gy} = p_{Gx} \tan 32° = +110\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Antes que se empujen, el componente y de su momento total es cero. Para que el momento se conserve, el componente total y debe seguir siendo cero después de que se separen. Por tanto, el componente y del momento de Federico ha de ser -110 kg · m/s, y la dirección de su movimiento se obtiene a partir de

$$\tan\theta = \frac{p_{Fy}}{p_{Fx}} = \frac{-110\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{240\ \text{kg}\cdot\text{m/s}} = -0.458$$

o bien,

$$\theta = -25°.$$

Nótese que el componente x del momento de Federico o de Gloria permanece sin cambio con la fuerza de su empujón; ésta se ejerce en la dirección y, por lo que el teorema de impulso-momento (Ec. 6-6) nos indica que una fuerza sobre ellos en la dirección y no puede cambiar el componente x de su momento.

PROBLEMA RESUELTO 6-4. Un hombre cuya masa es de 65 kg, corre sobre un muelle con una rapidez de 4.9 m/s (Fig. 6-12). Salta del muelle a un bote de 88 kg de masa que se desplaza sin fricción en la misma dirección, y con una rapidez de 1.2 m/s. Cuando el hombre está sentado en el bote ¿cuál es su velocidad final?

Solución Cuando el hombre entra al bote, él y el bote se ejercen fuerzas entre sí que les causan adquirir la misma velocidad final (el hombre la disminuye y el bote la aumenta). Si ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema de hombre + bote, el momento total de ambos antes de que salte, ha de ser igual a su momento total después que esté sentado en el bote. Suponemos que del eje positivo x sigue la dirección de la velocidad original del hombre, y como todo el movimiento sigue esa misma dirección, hay que considerar sólo los

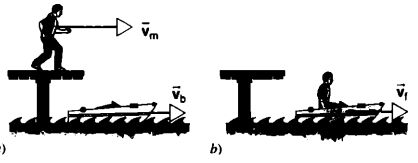


FIGURA 6-12. Problema resuelto 6-4. *a*) Un hombre corre con velocidad $\vec{v}_m$, y salta a un bote que se mueve en la misma dirección con velocidad $\vec{v}_b$. *b*) El hombre y el bote se mueven juntos con velocidad $\vec{v}_f$.

componentes x de todas las velocidades y momentos. Antes de saltar, el hombre tiene un momento $p_{mx} = m_m v_{mx}$, y el bote un momento $p_{bx} = m_b v_{bx}$. El momento inicial total es

$$P_{ix} = p_{mx} + p_{bx} = m_m v_{mx} + m_b v_{bx}$$
$$= (65\ \text{kg})(4.9\ \text{m/s}) + (88\ \text{kg})(1.2\ \text{m/s}) = 424\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Después de saltar se sienta en el bote; los dos se mueven juntos con la misma velocidad v_{fx}. Su momento final combinado es $P_{fx} = m_m v_{fx} + m_b v_{fx} = (m_m + m_b)v_{fx}$. Con $P_{ix} = P_{fx}$, obtenemos

$$v_{fx} = \frac{P_{ix}}{m_m + m_b} = \frac{424\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{65\ \text{kg} + 88\ \text{kg}} = 2.8\ \text{m/s}.$$

6-5 COLISIONES ENTRE DOS CUERPOS

En la presente sección se examinan varios tipos de colisiones entre dos cuerpos, por lo cual nos serviremos de la conservación del momento para relacionar sus movimientos antes de la colisión y después de ella.

La figura 6-13*a* describe gráficamente la colisión general de dos cuerpos. Antes de ella, m_1 se desplaza con velocidad inicial $\vec{v}_{1i}$, y m_2 con una velocidad inicial $\vec{v}_{2i}$. Después de la colisión, las velocidades finales son $\vec{v}_{1f}$ y $\vec{v}_{2f}$, respectivamente. De acuerdo con la conservación del momento, el momento total de m_1 y m_2 *antes* de la colisión, es igual al momento total *después* de ella:

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}. \qquad (6\text{-}15)$$

La ecuación 6-15 también puede escribirse así

$$m_1(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}) = -m_2(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}), \qquad (6\text{-}16)$$

o así

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2. \qquad (6\text{-}17)$$

Los cambios de momento de los dos objetos tienen igual magnitud y signos opuestos, consecuencia necesaria de la ley de conservación del momento. Este resultado se deduce directamente de la tercera ley de Newton: según el teorema de impulso-momento (Ec. 6-5), el cambio de momento uno de los cuerpos, es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre él. Así pues, la ecuación 6-17 puede escribirse como $\vec{J}_1 = -\vec{J}_2$, donde $\vec{J}_1$ significa el impulso de la fuerza en el cuerpo 1 debida al cuerpo 2; en tanto que $\vec{J}_2$ significa el impulso de la fuerza en el cuerpo 2 debida al cuerpo 1. Esta igualdad proviene directamente de la definición de impulso (Ec. 6-4) con $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, como lo establece la tercera ley de Newton.

En algunas colisiones los cuerpos no se separan (Fig. 6-13*b*) y se desplazan con una velocidad final común. Cuando $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_f$, la ecuación 6-15 queda

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f. \qquad (6\text{-}18)$$

Las ecuaciones 6-15 y 6-18 son vectoriales, lo cual significa que la conservación del momento ha de ser válida en todos los componentes como se observa en la ecuación 6-14. Por tanto,

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

y en forma similar con los componentes y y z. Si todo el movimiento tiene lugar en un plano (el plano xy), y si conocemos la velocidad inicial de m_1 y m_2, la ecuación 6-15 nos dará dos relaciones entre las cuatro incógnitas (los componentes x y y de $\vec{v}_{1f}$ y $\vec{v}_{2f}$). Si conocemos *una* de las velocidades finales, podremos determinar la otra; o si conocemos la *dirección* de las dos velocidades finales, podremos calcular su magnitud. En cambio, la ecuación 6-18 tiene sólo dos incógnitas (los componentes x y y de $\vec{v}_f$), así que las dos ecuaciones componentes contenidas en la ecuación 6-18 son suficientes para resolver ambas.

En muchas aplicaciones, m_2 está inicialmente en reposo ($\vec{v}_{2i} = 0$). Esto simplifica un poco los cálculos. La conservación del momento es válida en cualquier marco inercial, por lo cual siempre podemos encontrar un marco de referencia, donde m_2 está en reposo; esto indica que también podemos aplicar la conservación en ese marco, retornando al marco original si queremos evaluar sus velocidades finales en ese marco.

A menudo tenemos una colisión "frontal", donde todo el movimiento se realiza sólo en una dirección, que suponemos

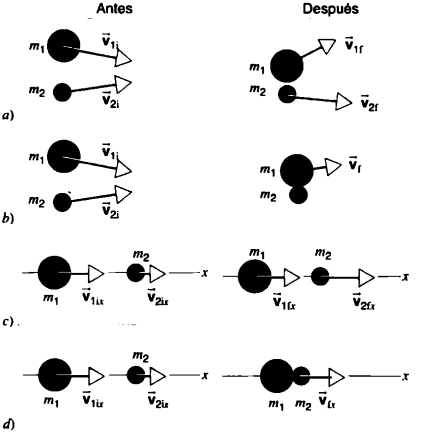


FIGURA 6-13. Velocidades inicial y final en varias colisiones entre dos cuerpos.

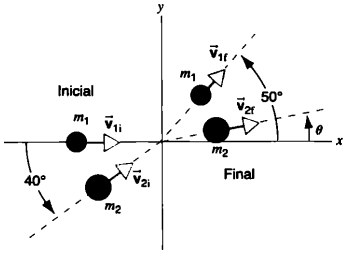


FIGURA 6-15. Problema resuelto 6-8.

PROBLEMA RESUELTO 6-8. Un disco de goma se desliza sin fricción sobre el hielo con una rapidez de 2.48 m/s. Choca con otro que tiene una masa 1.5 veces mayor, y que se desplaza inicialmente con una velocidad de 1.86 m/s en una dirección de 40° respecto a la del primero (Fig. 6-15). Después de la colisión, el primer disco se desplaza con una velocidad de 1.59 m/s en una dirección que forma un ángulo de 50° respecto a su dirección inicial (como se indica en la figura 6-15). Calcule la rapidez y dirección del segundo después de la colisión.

Solución En este problema aplicamos la ley de conservación del momento en su forma "vectorial bidimensional". Definimos el eje x, como la dirección del movimiento inicial del primer disco. Supongamos que el segundo se desliza con una velocidad $\vec{v}_{2f}$, formando un ángulo θ con el eje x. Entonces el componente x de la ecuación de conservación del momento (Ec. 6-15) nos da $m_1v_{1ix} + m_2v_{2ix} = m_1v_{1fx} + m_2v_{2fx}$, o (con $m_1 = m$ y $m_2 = 1.5m$)

$$m(2.48\ \text{m/s}) + 1.5m(1.86\ \text{m/s})\cos 40° = m(1.59\ \text{m/s})\cos 50° + 1.5mv_{2f}\cos\theta,$$

que se reduce a

$$v_{2f}\cos\theta = 2.40\ \text{m/s},$$

y el componente y es $m_1v_{1iy} + m_2v_{2iy} = m_1v_{1fy} + m_2v_{2fy}$, y así

$$m(0) + 1.5m(1.86\ \text{m/s})\,\text{sen}\,40° = m(1.59\ \text{m/s})\,\text{sen}\,50° + 1.5mv_{2f}\,\text{sen}\,\theta,$$

que se reduce a

$$v_{2f}\,\text{sen}\,\theta = 0.38\ \text{m/s}.$$

Al resolver las dos ecuaciones reducidas para las dos incógnitas, obtenemos

$$v_{2f} = 2.43\ \text{m/s}, \qquad \theta = 9.0°.$$

Colisiones unidimensionales en el marco de referencia del centro de masa

Antes en esta sección, analizamos una colisión unidimensional entre dos cuerpos, vista desde un marco arbitrario de referencia inercial. A menudo se opta por un marco fijo en el laboratorio donde observamos la colisión; por ello se le conoce como *marco de referencia de laboratorio.* Pero hay otro marco especial donde la colisión presenta una simetría particular, y el análisis puede efectuarse con relativa facilidad. Este marco, que los físicos emplean comúnmente para analizar la colisión de átomos y de partículas subateómicas, recibe el nombre de *marco de referencia del centro de masa.* (En el capítulo siguiente explicaremos por qué se escogió el nombre.) En el problema resuelto 6-7, el segundo método de análisis se efectuó dentro de este marco donde la nave espacial parecía hallarse en reposo antes de la separación.

La colisión (unidimensional) en el marco del laboratorio, se muestra gráficamente en la figura 6-16*a*. A continuación vamos a analizarla en el marco de referencia del centro de masa. Todas las velocidades siguen la dirección x, así que para facilitar la explicación, eliminamos el subíndice x en las velocidades y momentos; pero no se olvide que se trata de los componentes x de los vectores, y que por lo mismo sus signos han de escogerse de modo uniforme en relación con la dirección definida antes como dirección positiva x. Utilizamos la ecuación 4-32 en una dimensión, por lo que con S representamos el marco de laboratorio y con S' el marco del centro de masa. La velocidad $v_{S'S}$ (la velocidad del marco del centro de masa en relación con la del marco de laboratorio) se representa simplemente como v. Desde la perspectiva de lo observado en el primer marco, las velocidades iniciales de los dos cuerpos en colisión son

$$m_1: \quad v'_{1i} = v_{1i} - v \qquad \text{y} \qquad m_2: \quad v'_{2i} = v_{2i} - v,$$

donde las primas representan magnitudes medidas dentro del marco de centro de masa (S').

Así pues, el momento inicial total de los dos cuerpos en este marco es

$$P'_i = m_1v'_{1i} + m_2v'_{2i} = m_1(v_{1i} - v) + m_2(v_{2i} - v). \qquad (6\text{-}22)$$

Ahora *definimos* el marco del centro de masa como el *marco donde el momento inicial del sistema de los dos cuerpos es cero.* Si queremos determinar el valor de v que hará eso, igualamos $P'_i = 0$ en la ecuación 6-22, resolvemos para v y obtenemos

$$v = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}. \qquad (6\text{-}23)$$

Si viajamos a esta velocidad y observamos la colisión, el movimiento de los dos cuerpos *antes* de ella aparecerá como en la figura 6-16*b*. Aunque su masa tal vez sea distinta, sus momentos son iguales y opuestos, de modo que el momento total es cero.

Puesto que el momento se conserva, el momento total *tras* la colisión ($P'_f = p'_{1f} + p'_{2f}$) también ha de ser cero en el marco del centro de masa, así que después de ella p'_{1f} y p'_{2f} serán iguales y opuestos. Los vectores del momento final pueden ser cualquier longitud, mientras su magnitud sea la misma.

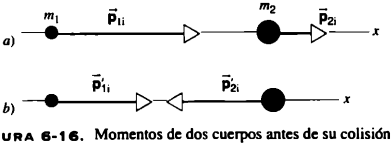


FIGURA 6-16. Momentos de dos cuerpos antes de su colisión en *a*) el marco de referencia original, y *b*) en el marco de referencia del centro de masa.

La línea 1 de la figura 6-17, que es idéntica a la figura 6-16*b*, muestra el momento inicial de los dos cuerpos dentro del marco de referencia del centro de masa. El resultado de la colisión depende de las propiedades de los cuerpos en colisión y de la naturaleza de la fuerza que ejercen uno sobre otro; las líneas 2-5 de la figura 6-17, indican varias posibilidades de los momentos finales p'_{1f} y p'_{2f} dentro del marco de centro de masa. El momento final total es cero en él, de modo que $p'_{1f} = -p'_{2f}$. Sin importar el tipo de colisión, esta simetría aparece dentro del marco de centro de masa.

En el caso representado en la línea 2 de la figura 6-17, los cuerpos simplemente rebotan uno contra otro sin que sus momentos cambien de magnitud, pero se invierte su dirección. A este tipo de colisión se le llama *elástica*. Los objetos sólidos rígidos (como las bolas de billar o los discos de hockey), suelen experimentar colisiones que pueden considerarse elásticas. En las colisiones *inelásticas* (línea 3), los cuerpos rebotan con momentos más pequeños dentro del marco de referencia del centro masa. Es lo que sucede con los cuerpos no rígidos, como la pelota de béisbol de la figura 6-1. Si los cuerpos permanecen unidos después de la colisión (línea 4), los cuerpos rebotan con momentos más pequeños dentro del marco de centro de masa; a esto lo llamamos colisión *completamente inelástica*. Un ejemplo de ello, es la colisión de dos bolas de mastique. Finalmente (línea 5), los cuerpos podrían rebotar con momentos más grandes que su valor inicial. Esto podría ocurrir, por ejemplo, si un resorte enrollado o una carga explosiva fueran liberados entre dos cuerpos en el momento de la colisión.

Colisiones elásticas. Hemos definido una colisión elástica como aquella en que, *dentro del marco de referencia del centro de masa,* la velocidad de los cuerpos cambia de dirección pero no de magnitud. Por tanto, para m_1, $v'_{1f} = -v'_{1i}$, en este marco y de manera similar para m_2. A continuación vamos a servirnos de estos resultados para obtener las expresiones de la velocidad final de dos cuerpos en una colisión elástica dentro del marco de referencia de laboratorio.

Para m_1, las velocidades en los dos marcos están relacionadas por $v'_{1i} = v_{1i} - v$ y $v'_{1f} = v_{1f} - v$, donde v es la velocidad relativa entre los marcos (Ec. 6-23). Al resolver la segunda de las dos ecuaciones para la velocidad en el marco de referencia del laboratorio, obtenemos $v_{1f} = v'_{1f} + v$. Si sustituimos la condición de las colisiones elásticas ($v'_{1f} = -v'_{1i}$) resulta en $v_{1f} = -v'_{1i} + v$. Finalmente, usando la relación entre v'_{1i} y v_{1i}, obtenemos

$$v_{1f} = -(v_{1i} - v) + v = -v_{1i} + 2v$$

$$= -v_{1i} + 2\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2},$$

donde el segundo resultado se obtuvo por medio de la ecuación 6-23. Después de reordenar un poco, nos queda

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}. \qquad (6\text{-}24)$$

Si queremos encontrar v_{2f}, la velocidad final de m_2, podríamos repetir el análisis que nos llevó a la ecuación 6-24, intercambiando los subíndices "1" y "2" en todas partes donde aparezcan. De hecho, podemos limitarnos a efectuar esos cambios en la ecuación 6-24, que nos da

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}. \qquad (6\text{-}25)$$

Las ecuaciones 6-24 y 6-25 son resultados generales de las colisiones elásticas unidimensionales, y nos permiten calcular la velocidad final en *cualquier* marco de referencia inercial a partir de la velocidad inicial en él. A continuación se incluyen algunos casos especiales de interés:

1. *Masas iguales.* Cuando las partículas en colisión poseen masas iguales ($m_1 = m_2$), las ecuaciones 6-24 y 6-25 se convierten simplemente en

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = v_{1i}. \qquad (6\text{-}26)$$

Es decir, las partículas intercambian velocidades: la velocidad final de una de ellas es igual a la de la otra.

2. *Partícula objetivo en reposo.* Otro caso de interés, es aquel en que la partícula m_2 se halla inicialmente en reposo. Entonces $v_{2i} = 0$ y

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \qquad (6\text{-}27)$$

Al combinar este caso especial con el anterior (es decir, una colisión entre partículas de igual masa en que una de ellas está inicialmente en reposo), vemos que la primera se "detiene en seco" y la segunda "arranca" con la velocidad que tenía la primera al principio. A menudo es posible observar este efecto, en las colisiones de pelotas de billar que no giran.

3. *Objetivo masivo.* Si $m_2 >> m_1$, las ecuaciones 6-24 y 6-25 se reducen a

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx v_{2i}. \qquad (6\text{-}28)$$

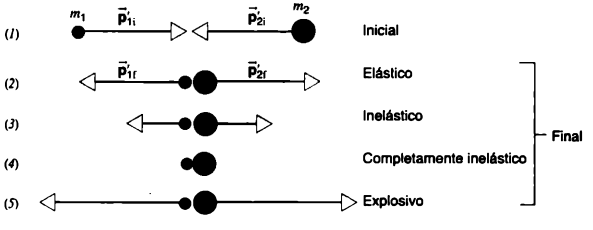


FIGURA 6-17. Momentos de dos objetos en colisión dentro del marco de referencia del centro de masa en varios tipos de colisión. La línea 1 muestra los momentos iniciales en este marco; las líneas 2-5, algunos momentos finales posibles.

Cuando la partícula masiva se desplaza lentamente o está en reposo,

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \qquad \text{y} \qquad v_{2f} \approx 0. \tag{6-29}$$

Es decir, si un proyectil ligero choca con una partícula mucho más masiva en reposo, la velocidad de la partícula ligera se invierte aproximadamente, y la partícula masiva permanece más o menos en reposo. Por ejemplo, una pelota soltada de una altura h, rebota luego de chocar en el suelo con una velocidad invertida. En cambio, si la colisión es perfectamente elástica y no hay resistencia del aire, alcanzará la misma altura h. En forma análoga, un electrón rebota de un átomo (relativamente masivo) en una colisión frontal con su movimiento invertido, mientras que la colisión prácticamente no afecta al átomo objetivo.

4. *Proyectil masivo.* Cuando $m_1 >> m_2$, las ecuaciones 6-24 y 6-25 se transforman en

$$v_{1f} \approx v_{1i} \qquad \text{y} \qquad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i}. \tag{6-30}$$

Si la partícula ligera objetivo está al inicio en reposo (o se desplaza con mucho mayor lentitud que m_1), tras la colisión se moverá con una rapidez del doble a la de m_1. El movimiento de m_1 casi no se ve afectado por la colisión con el blanco mucho más ligero.

En la dispersión de las partículas alfa (Fig. 6-2), a la partícula alfa incidente (cuya masa es unas 7,000 veces mayor que la del electrón), prácticamente no la afectan las colisiones con los electrones de los átomos objetivo (como lo indican las múltiples trayectorias de línea recta en la figura 6-2). Se desvía sólo en los escasos encuentros con el núcleo masivo de un átomo objetivo.

Las ecuaciones 6-26 a 6-30 se cumplen sólo en las colisiones elásticas. En el caso de colisiones parcialmente inelásticas o explosivas, no es posible obtener un conjunto de ecuaciones generales como 6-24 o 6-25 para las velocidades finales, salvo que se cuente con más información sobre el momento de cada partícula que se agrega, o se pierde en el marco de referencia del centro de masa. En el Capítulo 11 veremos cómo las consideraciones basadas en la energía permiten analizar estos tipos de colisión. En las colisiones parcialmente inelásticas o explosivas, la ganancia o pérdida de momento (o energía) por uno de los cuerpos, sirve para deducir las propiedades relacionadas con su interacción. Es una técnica común que se emplea en la física nuclear, donde la información sobre las propiedades de los núcleos se deducen observando el momento de las partículas que se desprenden en las colisiones nucleares.

PROBLEMA RESUELTO 6-9. Una partícula alfa (un núcleo de un átomo de helio, $m = 4.0$ u) acelera a una velocidad de 1.52×10^7 m/s, y choca frontalmente con un núcleo de oxígeno ($m = 16.0$ u) en reposo. Después de la colisión, el núcleo de oxígeno se desplaza con una velocidad de 6.08×10^6 m/s a lo largo de la dirección original del movimiento de la partícula alfa. *a)* ¿Qué velocidad tiene ésta tras la colisión? *b)* ¿Qué tipo de colisión incluida en la figura 6-17 describe este proceso en forma óptima?

Solución *a)* La conservación del momento permite calcular la velocidad de la partícula alfa. La ecuación 6-19 expresa la conservación del momento en las colisiones unidimensionales generales. Suponemos que la dirección positiva x es la de la velocidad inicial de la partícula alfa. Tomando la partícula 1 como la partícula alfa, y la partícula 2 como el oxígeno, podemos escribir la ecuación 6-19 con $v_{2ix} = 0$ así

$$v_{\alpha fx} = \frac{m_\alpha v_{\alpha ix} - m_O v_{Ofx}}{m_\alpha}$$

$$= \frac{(4.0\text{ u})(1.52 \times 10^7\text{ m/s}) - (16.0\text{ u})(6.08 \times 10^6\text{ m/s})}{4.0\text{ u}}$$

$$= -9.12 \times 10^6\text{ m/s}.$$

La partícula alfa rebota en la dirección negativa x.

Nótese que las unidades de masa se cancelan en esta ecuación, de modo que podemos utilizar cualquier unidad adecuada para expresar la masa de las partículas. *b)* La velocidad relativa entre los marcos de referencia del laboratorio y del centro de masa, está dada por la ecuación 6-23:

$$v_x = \frac{m_\alpha v_{\alpha ix} + m_O v_{Oix}}{m_\alpha + m_O} = \frac{(4.0\text{ u})(1.52 \times 10^7\text{ m/s}) + 0}{4.0\text{ u} + 16.0\text{ u}}$$

$$= +0.304 \times 10^7\text{ m/s}.$$

Así pues, el momento inicial de la partícula alfa en el marco del centro de masa será $p'_{\alpha ix} = m_\alpha v'_{\alpha ix} = m_\alpha(v_{\alpha ix} - v_x) = (4.0\text{ u})(1.52 \times 10^7\text{ m/s} - 0.304 \times 10^7\text{ m/s}) = +4.86 \times 10^7\text{ u}\cdot\text{m/s}$. El momento final de la partícula alfa es $p'_{\alpha fx} = m_\alpha v'_{\alpha fx} = m_\alpha(v_{\alpha fx} - v_x) = (4.0\text{ u})(-9.12 \times 10^6\text{ m/s} - 0.304 \times 10^7\text{ m/s}) = -4.86 \times 10^7\text{ u}\cdot\text{m/s}$. Por tanto, $p'_{\alpha ix} = -p'_{\alpha fx}$, y la partícula alfa sólo invierte la dirección de su momento con la magnitud inalterada. Podemos demostrar que el momento del núcleo de oxígeno también sólo se invierte en la colisión. La inversión del momento de ambas partículas, mientras su magnitud permanece igual, caracteriza a la colisión *elástica*.

OPCIÓN MÚLTIPLE

6-1 Colisiones

6-2 Momento lineal

1. ¿Cuál de los siguientes objetos tiene el momento más grande?
A) Una bala disparada con rifle.
B) Un mariscal de campo que corre a la máxima velocidad.
C) Un caballo que corre a unas 2 millas/hora.
D) Un elefante que permanece parado.

2. Una bola de 2 kg que se mueve en línea recta, choca contra el piso a 8 m/s. Si rebota hacia arriba a 6 m/s, ¿qué magnitud tendrá el cambio de su momento?
A) 2 kg · m/s B) 4 kg · m/s
C) 14 kg · m/s D) 28 kg · m/s

3. Un objeto se mueve en un círculo con rapidez constante v. La magnitud de la tasa de cambio de su momento
A) es cero. B) es proporcional a v.
C) es proporcional a v^2. D) es proporcional a v^3.

4. Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es constante, ¿qué podemos concluir respecto a su momento?
A) La magnitud, la dirección o ambas de $\vec{p}$ pueden cambiar.
B) La magnitud de $\vec{p}$ permanece constante, pero su dirección puede cambiar.
C) La dirección de $\vec{p}$ permanece constante, pero su magnitud puede cambiar.
D) La dirección y la magnitud de $\vec{p}$ permanecen fijas.

6-3 Impulso y momento

5. Un objeto se desplaza en un círculo con rapidez constante v. Del tiempo t_i al tiempo t_f, recorre la mitad de la distancia alrededor del círculo. La magnitud del impulso debido a la fuerza neta en él durante este intervalo de tiempo
   A) es cero. B) es proporcional a v.
   C) es proporcional a v^2. D) es proporcional a v^3.

6. Si $\vec{\mathbf{J}}$ es el impulso de una fuerza, ¿qué será $d\vec{\mathbf{J}}/dt$?
   A) El momento. B) El cambio del momento.
   C) La fuerza. D) El cambio de la fuerza.

7. Una fuerza variable actúa sobre un objeto desde $t_i = 0$ a t_f. Su impulso es cero. Puede concluirse que
   A) $\Delta\vec{\mathbf{r}} = 0$ y $\Delta\vec{\mathbf{p}} = 0$.
   B) $\Delta\vec{\mathbf{r}} = 0$, pero posiblemente $\Delta\vec{\mathbf{p}} \neq 0$.
   C) posiblemente $\Delta\vec{\mathbf{r}} \neq 0$, pero $\Delta\vec{\mathbf{p}} = 0$.
   D) posiblemente $\Delta\vec{\mathbf{r}} \neq 0$, y posiblemente $\Delta\vec{\mathbf{p}} \neq 0$.

8. Un automóvil pequeño que recorre una carretera a gran velocidad pierde el control. El conductor tiene dos opciones: chocar con un muro de concreto, o con un camión cargado con 10 toneladas que se aproxima en dirección opuesta también a gran velocidad. ¿Cuál de las opciones produce la colisión más fuerte? Suponga que en ambos casos el automóvil pequeño está en reposo después de la colisión.
   A) La colisión con el camión.
   B) La colisión con el muro de concreto.
   C) Las dos colisiones serán igualmente serias, pues el mismo impulso se aplica al automóvil en ambos casos.
   D) Se necesita más información para evaluar las colisiones.

9. A menudo la policía antimotines utiliza balas de goma en vez de balas de plomo. Suponga que ni unas ni otras penetran en la piel, que tienen la misma masa, el mismo tiempo de contacto y velocidad inicial. La diferencia radica en que las de plomo se "adhieren" y las de goma rebotan. ¿Cuál de los dos tipos de bala causa más "daño"?
   A) La bala de plomo.
   B) La bala de goma.
   C) Las balas causan el mismo daño.
   D) El daño depende de donde golpeen.

6-4 Conservación del momento

10. ¿Puede violarse alguna vez la ley de conservación del momento?
    A) No.
    B) Sí, si hay más de dos partículas.
    C) Sí, cuando las fuerzas entre las partículas varían en el tiempo.
    D) Sí, si las dos partículas permanecen unidas después de una colisión.

11. Un jugador de baloncesto salta para "disparar" una canasta. ¿Se conserva su momento?
    A) Sí, pero sólo si se escoge el sistema correcto.
    B) Sí, pero sólo en la dirección horizontal.
    C) No, porque la velocidad del jugador cambia con el tiempo.
    D) Es una pregunta equivocada, porque la conservación del momento se refiere a objetos que se desplazan a una velocidad constante, y el jugador acelera.

6-5 Colisiones entre dos cuerpos

12. Considere una colisión unidimensional entre un cuerpo de masa m_1 que se mueve en la dirección x positiva, con v_0 que choca con otro de masa m_2 originalmente en reposo. La colisión podría ser completamente inelástica con los dos cuerpos que permanecen unidos, completamente elástica, o en un grado intermedio. Después de la colisión, m_1 se mueve con una velocidad v_1, y m_2 lo hace con una velocidad v_2.

    a) Si $m_1 > m_2$, entonces
    A) $-v_0 < v_1 < 0$ B) $0 < v_1 < v_0$
    C) $0 < v_1 < 2v_0$ D) $v_0 < v_1 < 2v_0$

    b) y
    A) $-v_0 < v_2 < 0$. B) $0 < v_2 < v_0$.
    C) $v_0/2 < v_2 < 2v_0$. D) $v_0 < v_2 < 2v_0$.

    c) Si $m_1 < m_2$ entonces
    A) $-v_0 < v_1 < 0$ B) $-v_0 < v_1 < v_0/2$
    C) $0 < v_1 < v_0/2$ D) $0 < v_1 < v_0$

    d) y
    A) $-v_0 < v_2 < 0$. B) $-v_0 < v_2 < v_0/2$.
    C) $0 < v_2 < v_0/2$. D) $0 < v_2 < v_0$.

PREGUNTAS

1. Justifique el siguiente enunciado: "La ley de conservación del momento lineal, tal como se aplica a una partícula individual, equivale a la primera ley del movimiento de Newton".
2. Una partícula de masa $m = 0$ (neutrino, posiblemente) lleva un momento. ¿Cómo puede ser esto visto de la ecuación 6-1, donde hemos observado que el momento es directamente proporcional a la masa?
3. Aunque la aceleración de una pelota de béisbol después de ser golpeada no depende de quién la golpee, algo de su vuelo debe depender del bateador. ¿Qué es?
4. Explique cómo una bolsa de aire de un automóvil ayuda a proteger al pasajero contra lesiones serias en caso de choque.
5. Se dice que durante una colisión a 30 mi/h, un niño de 10 lb puede ejercer una fuerza de 300 lb contra el asimiento de su progenitor. ¿Cómo se produce una fuerza tan grande?
6. ¿Puede el impulso de una fuerza ser cero, aun cuando ella no lo sea? Explique su respuesta en forma afirmativa o negativa.
7. La figura 6-18 tiene un juego popular de carnaval, en que el concursante trata de ver qué altura alcanza el marcador cuando

FIGURA 6-18. Pregunta 7.

golpea un blanco con un marro. ¿Qué propiedad física mide el juego? ¿Es la fuerza promedio, la fuerza máxima, el trabajo ejecutado, el impulso, la energía transferida, el momento transferido o alguna otra cosa? Explique su respuesta.

8. Un reloj de arena va a ser pesado en una báscula muy sensible, primero cuando la arena cae en un flujo estable de la parte superior al fondo, y luego otra vez después que la parte superior queda vacía. ¿Son iguales o no los dos pesos? Explique su respuesta.
9. Ofrezca una explicación verosímil del rompimiento de tablones de madera o de ladrillos con un golpe de karate. (Consúltese ("Karate Strikes", de Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, octubre de 1975, p. 845.)
10. Explique cómo la conservación del momento se aplica a una pelota de frontón que rebota contra una pared.
11. Un jugador de fútbol americano (momentáneamente en reposo en el campo), recibe un balón al ser tacleado por un corredor del otro equipo. Se produce una colisión (inelástica) y el momento debe conservarse. Dentro del marco de referencia del campo de juego, existe un momento antes de la colisión, pero no parece haber ninguno después de ella. ¿Realmente se conserva el momento lineal? De ser así, explique cómo. De no ser así, explique por qué.
12. Conduce usted por una carretera a 50 mi/h, y lo sigue otro automóvil que va a la misma velocidad. Disminuye la suya a 40 mi/h, pero el otro conductor no lo hace y se produce una colisión. ¿Cuáles son las velocidades iniciales de los automóviles visto desde el marco de referencia *a*) de usted, *b*) del otro conductor y *c*) de un policía que se encuentra apostado en una patrulla al lado de la carretera? *d*) Un juez le pregunta si se estrelló contra el otro conductor o si fue él quien se estrelló contra usted. ¿Qué contestaría si fuese un físico?
13. C. R. Daish escribió que, para los golfistas profesionales, la rapidez inicial con que la pelota sale lanzada de la cabeza del palo es de 140 mi/h, aproximadamente. También asegura: *a*) "Si el Empire State Building pudiera golpearla con la misma rapidez inicial que la cabeza del palo, la velocidad inicial apenas aumentaría cerca de 2%", y *b*) "una vez que el golfista ha comenzado el balanceo, ni el clic de las cámaras fotográficas, ni los estornudos ni cualquier otra cosa influyen en el movimiento de la pelota". ¿Puede aportar argumentos cualitativos que corroboren ambas afirmaciones?
14. Dos bloques cúbicos idénticos que se desplazan en la misma dirección con una velocidad común v, chocan con un tercero que está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. ¿Cuál es el movimiento de los dos bloques después de la colisión? ¿Importa que estén o no en contacto los dos bloques que se mueven inicialmente? ¿Importa que estén unidos? Suponga que las colisiones son: *a*) completamente inelásticas, o *b*) elásticas?
15. En una colisión entre dos cuerpos dentro del marco de referencia del centro de masa, los momentos de las partículas son iguales y opuestos entre sí antes de la colisión y después de ella. ¿Es la línea del movimiento relativo necesariamente la misma en ambos casos? ¿En qué condiciones crecerá la magnitud de sus velocidades? ¿En qué condiciones no cambiará? ¿Y en qué condiciones permanecerá inalterada a raíz de la colisión?

EJERCICIOS

6-1 Colisiones

6-2 Momento lineal

1. ¿A qué velocidad debe ir un Volkswagen de 816 kg para tener el mismo momento que: *a*) un Cadillac de 2,650 kg que va a 16.0 km/h? *b*) ¿Un camión de 9,080 kg que también va a 16.0 km/h?
2. Un camión de 2,000 kg que se dirige al Norte a 40.0 km/h, da vuelta al Este y acelera a 50.0 km/h. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del cambio de su momento?
3. Un objeto de 4.88 kg con una rapidez de 31.4 m/s choca contra una placa de acero en un ángulo de 42.0°, y rebota con la misma rapidez y ángulo (Fig. 6-19). ¿Cuál es el cambio (magnitud y dirección) de su momento lineal?

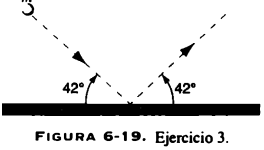


FIGURA 6-19. Ejercicio 3.

6-3 Impulso y momento

4. Va a probarse la defensa de un automóvil nuevo. Se deja que el vehículo de 2,300 kg que avanza a 15 m/s, choque contra un lindero de puente, alcanzando el reposo en un tiempo de 0.54 s. Calcule la fuerza promedio que actúa sobre él durante el impacto.
5. Una pelota de masa m y de rapidez v golpea un muro perpendicularmente, y rebota con una rapidez inalterada. *a*) Si el tiempo de colisión es Δt, ¿cuál será la fuerza promedio ejercida por la pelota sobre el muro? *b*) Evalúe esta fuerza numéricamente en una pelota de goma con masa de 140 g, que se mueve a 7.8 m/s; la colisión dura 3.9 ms.
6. Un golfista golpea una pelota impartiéndole una velocidad inicial de magnitud 52.2 m/s, con una dirección de 30° sobre la horizontal. Suponiendo que su masa sea 46.0 g y que el palo y la pelota estén en contacto durante 1.20 ms, calcule: *a*) el impulso impartido a la pelota, *b*) el impulso impartido al palo y *c*) la fuerza promedio ejercida por éste sobre aquélla.
7. Una pelota de 150 g (peso = 5.30 oz) lanzada con una rapidez de 41.6 m/s (136 ft/s), es golpeada directamente hacia el lanzador con una rapidez de 61.5 m/s (202 ft/s). El bate está en contacto con ella durante 4.70 ms. Calcule la fuerza promedio que el bate ejerce sobre la pelota.

8. Se aplica una fuerza de 984 N de promedio a una bola de acero de 420 g, que se desplaza a 13.8 m/s en una colisión que dura 27.0 ms. Si la fuerza sigue una dirección contraria a la velocidad inicial de la bola, determine la rapidez final de la bola.
9. La figura 6-20 ofrece una representación aproximada de la fuerza en función del tiempo durante la colisión de una pelota de tenis de 58 g con un muro. Su velocidad inicial es 32 m/s perpendicular a él; rebota con la misa velocidad, también perpendicular. ¿Qué valor tiene $F_{máx}$, de contacto durante la colisión?

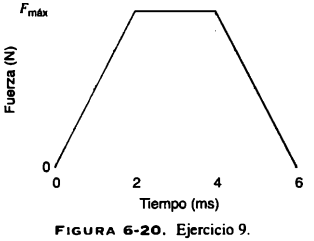


FIGURA 6-20. Ejercicio 9.

10. Dos partes de una nave espacial son separadas al detonar los pernos explosivos que las mantienen unidas. Las masas de las partes son 1,200 y 1,800 kg, respectivamente; la magnitud del impulso dado a cada parte es 300 N · s. ¿Cuál es la rapidez relativa de separación de ambas?
11. Con un mazo se golpea una pelota de criquet que tiene una masa de 0.50 kg, recibiendo el impulso indicado en la gráfica (Fig. 6-21). ¿Cuál será su velocidad poco después que la fuerza se vuelve cero?

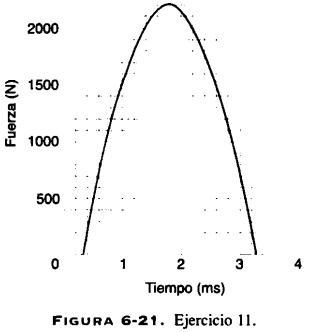


FIGURA 6-21. Ejercicio 11.

12. Un experto en karate rompe una tablón de pino de 2.2 cm de espesor, con un golpe de mano. La fotografía estroboscópica muestra que la mano, cuya masa puede suponerse que sea 540 g, golpea la parte superior del tablón con una rapidez de 9.5 m/s, y se detiene 2.8 cm debajo de ese punto. *a*) ¿Cuánto dura el golpe (suponiendo una fuerza constante)? *b*) ¿Qué fuerza promedio se aplica?
13. Una sonda espacial de 2,500 kg y sin tripulación se desplaza en línea recta con una rapidez constante de 300 m/s. El motor del cohete en la sonda arranca con un empuje de 3,000 N que dura 65.0 s. ¿Cuál es el cambio de momento (magnitud solamente) de la sonda, si el empuje se realiza hacia atrás, hacia adelante o hacia los lados? Suponga que la masa del combustible expelido es despreciable en comparación con la de la sonda espacial.
14. Una pistola dispara 10 pelotillas de 2.14 g por segundo, con una rapidez de 483 m/s. Las pelotillas son detenidas por una pared rígida. *a*) Determine el momento de cada una. *b*) Calcule la fuerza promedio ejercida por el flujo de pelotillas contra la pared. *c*) Si cada pelotilla está en contacto con ella durante 1.25 ms, ¿qué fuerza promedio ejerce sobre la pared durante el contacto? ¿Por qué es ésta diferente de la de *b*)?
15. Tras el lanzamiento de la órbita terrestre, una nave espacial robot con una masa de 5,400 kg se desplaza con velocidad constante a la mitad de su vuelo de seis meses a Marte cuando un ingeniero de la NASA descubre lo siguiente: en vez de recorrer una órbita de 100 km de altura sobre la superficie de Marte, se sigue un curso de colisión con el centro del planeta. Para corregir el curso, ordena un corto empuje de los impulsores transversalmente a la dirección de su movimiento. Los motores de empuje suministran una fuerza de 1,200 N. ¿Cuánto tiempo deberán los impulsores disparar para obtener el curso correcto? Tome los datos necesarios del apéndice C, y suponga que la distancia entre la Tierra y Marte permanece constante en su valor menor posible.

6-4 Conservación del momento

16. Un hombre de 195 lb que está de pie en una superficie de fricción despreciable, patea hacia adelante una piedra de 0.158 lb situada a sus pies, imprimiéndole una rapidez de 12.7 ft/s. ¿Qué velocidad adquiere el hombre al hacer esto?
17. Un hombre de 75.2 kg va en un vagón de 38.6 kg que se desplaza a una rapidez de 2.33 m/s. Salta de él en forma tal, que cae en el suelo con una rapidez horizontal cero. Obtenga el cambio resultante de rapidez del vagón.
18. Un vagón de plataforma de peso W, puede rodar sin fricción sobre una vía horizontal recta. En un principio, un hombre de peso w está de pie en el vagón que se mueve hacia la derecha con una rapidez v_0. ¿Cuánto cambia la velocidad del vagón si el hombre corre a la izquierda (Fig. 6-22), de modo que su rapidez relativa al vagón es v_{rel} poco antes que salte al suelo en el extremo izquierdo?

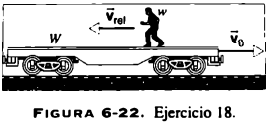


FIGURA 6-22. Ejercicio 18.

6-5 Colisiones entre dos cuerpos

19. Una nave espacial va a 3,860 km/h respecto a la Tierra, cuando el motor agotado del cohete se separa y se envía hacia atrás con una rapidez de 125 km/h respecto al módulo de comando. La masa del motor es cuatro veces la del módulo. ¿Qué velocidad tiene el módulo de comando después de la separación?

20. Los bloques de la figura 6-23 se deslizan sin fricción. ¿Qué velocidad $\bar{v}$ tiene el bloque de 1.6 kg tras la colisión?

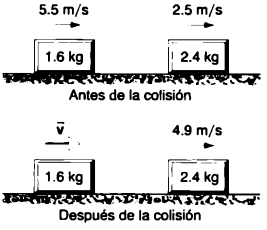


FIGURA 6-23. Ejercicios 20 y 21.

21. Suponga que se invierte la velocidad inicial del bloque de 2.4 kg en figura 6-23, y se dirige directamente hacia el bloque de 1.6 kg. ¿Qué velocidad $\bar{v}$ tendrá el segundo bloque después de la colisión?

22. Se piensa que Meteor Crater en Arizona (véase Fig. 6-24) se formó por el impacto de un meteorito contra la Tierra hace unos 20,000 años. Se estima que su masa es 5×10^{10} kg y que su rapidez era 7.2 km/s. ¿Qué rapidez impartió a la Tierra en una colisión frontal?

FIGURA 6-24. Ejercicio 22.

23. Una bala de 5.18 g que va a 672 m/s golpea un bloque de madera de 715 g en reposo en una superficie sin fricción. La bala sale con una rapidez reducida a 428 m/s. Calcule la velocidad resultante del bloque.

24. Una partícula alfa choca con un núcleo de oxígeno inicialmente en reposo. Se dispersa en un ángulo de 64.0° arriba de su dirección inicial de movimiento, y el núcleo de oxígeno retrocede en un ángulo de 51.0° por debajo de su dirección inicial. La rapidez final del núcleo es 1.20×10^5 m/s. ¿Qué velocidad final alcanza la partícula alfa? (La masa de estas partículas es 4.00 u, y la de un núcleo de oxígeno es 16.0 u.)

25. Chocan dos objetos, A y B. A tiene una masa de 2.0 kg, y B una masa de 3.0 kg. Las velocidades antes de la colisión son $\bar{v}_{iA} = (15\ \text{m/s})\hat{i} + (30\ \text{m/s})\hat{j}$, y $\bar{v}_{iB} = (-10\ \text{m/s})\hat{i} + (5.0\ \text{m/s})\hat{j}$. Después de ella, $\bar{v}_{fA} = (-6.0\ \text{m/s})\hat{i} + (30\ \text{m/s})\hat{j}$. ¿Cuál es la velocidad final de B?

26. Un núcleo radiactivo inicialmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón y un neutrino en ángulo recto entre sí. El momento del electrón es 1.2×10^{-22} kg · m/s, y el del neutrino es 6.4×10^{-23} kg · m/s. Obtenga la dirección y magnitud del momento del núcleo que retrocede.

27. Una barcaza con masa 1.50×10^5 kg, avanza río abajo a 6.20 m/s entre niebla espesa, cuando choca de costado contra otra que cruza el río horizontalmente (véase Fig. 6-25). La segunda barcaza tiene una masa de 2.78×10^5 kg y se desplazaba a 4.30 m/s. Inmediatamente después del impacto, su curso se desvía 18.0° río abajo y su rapidez aumenta a 5.10 m/s. La corriente era prácticamente cero en el momento del accidente. ¿Qué rapidez y dirección de movimiento tendrá la primera barcaza de inmediato después de la colisión?

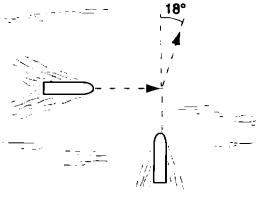


FIGURA 6-25. Ejercicio 27.

28. Una mosca que revolotea es embestida por un furioso elefante que carga a 2.1 m/s. Suponiendo que la colisión sea elástica, ¿con qué rapidez rebotará la mosca? Nótese que el proyectil (el elefante) tiene mucho más masa que el blanco (la mosca).

29. Dos esferas de titanio se acercan entre sí frontalmente con la misma rapidez y chocan en forma elástica. Tras la colisión, una de ellas, cuya masa es 300 g permanece en reposo. ¿Qué masa tiene la otra esfera?

30. En una vía lineal de aire sin fricción, un deslizador con una masa de 342 g que se desplaza con una rapidez inicial de 1.24 m/s, choca con otro de masa desconocida y en reposo. La colisión es elástica. Después de ella, el primer deslizador prosigue su dirección original a 0.636 m/s. *a*) ¿Qué masa tiene el segundo? *b*) ¿Cuál es la rapidez después del impacto?

31. Un objeto con masa de 2.0 kg experimenta una colisión elástica con otro en reposo, y sigue moviéndose en la dirección original, sólo que con la cuarta parte de su rapidez original. ¿Qué masa tiene el objeto golpeado?

32. Un vagón de carga que pesa 31.8 ton y que va a 5.20 ft/s alcanza y choca con otro que pesa 24.2 ton y que se desplaza a 2.90 ft/s en la misma dirección. *a*) Calcule la velocidad de los vagones después de la colisión si quedan pegados. *b*) Si, como es muy improbable la colisión es elástica, calcule su rapidez después de la colisión.

33. Tras una colisión totalmente inelástica, dos objetos de la misma masa y con la misma rapidez inicial viajan juntos a la mitad de la rapidez inicial. Determine el ángulo entre las velocidades iniciales de ambos.

34. Un protón (con masa atómica de 1.01 u) con una rapidez de 518 m/s, choca elásticamente con otro en reposo. El protón original se dispersa 64.0° de su dirección inicial. *a*) ¿Cuál es la dirección de la velocidad del protón objetivo tras la colisión? *b*) ¿Cuál es la velocidad de los dos protones tras la colisión?

35. En el laboratorio una partícula de masa 3.16 kg que se mueve a 15.6 m/s hacia la izquierda, choca frontalmente con otra de 2.84 kg de masa que se desplaza a 12.2 m/s hacia la derecha. Determine la velocidad del centro de masa del sistema de las dos partículas después de la colisión.

PROBLEMAS

1. Una corriente de agua se estrella en una hoja de turbina estacionaria en forma de "disco", como se muestra en la figura 6- 26. La rapidez del agua es u, tanto antes como después de chocar con la superfice curva de la hoja; la masa de agua que se estrella contra ella por unidad de tiempo es constante en el valor μ. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre la hoja.

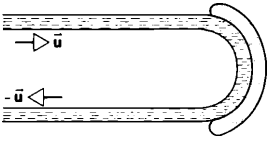


FIGURA 6-26. Problema 1.

2. Un automóvil de 1,420 kg que va a 5.28 m/s, se dirige inicialmente al Norte. Tras completar una vuelta a la derecha de 90° en 4.60 s, el conductor desatento se estrella contra un árbol y el automóvil se detiene en 350 ms. ¿Qué magnitud tiene el impulso impartido al automóvil *a*) durante la vuelta y *b*) durante la colisión? ¿Qué fuerzas promedio actúan sobre él *c*) durante la vuelta y *d*) durante la colisión?
3. Una bola de 325 g con una rapidez v de 6.22 m/s choca contra una pared en un ángulo θ de 33.0°, y luego rebota con la misma rapidez y ángulo (Fig. 6-27). Está en contacto con la pared por 10.4 ms. *a*) ¿Qué impulso experimenta la bola? *b*) ¿Qué fuerza promedio ejerce la bola sobre la pared?

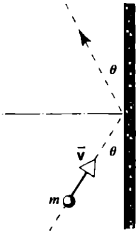


FIGURA 6-27. Problema 3.

4. Se sabe que las balas y otros misiles disparados contra Superman simplemente rebotan en su pecho, como se ve en la figura 6-28. Suponga que un pandillero lo rocía con una andanada de balas de 3.0 g a una frecuencia de 100 bolas/min, y a una velocidad de 500 m/s. Además, suponga que rebotan de manera directa hacia atrás sin que pierdan rapidez. Calcule la fuerza promedio ejercida por la lluvia de balas en el pecho de Superman.
5. Durante una tormenta violenta, granizos del tamaño de canicas (de un diámetro de 1.0 cm) caen con una rapidez de 25 m/s. Se estima que hay 120 granizos por metro cúbico de aire. Ignore el rebote del granizo al hacer impacto. *a*) ¿Qué masa tiene cada granizo? *b*) ¿Qué fuerza ejerce el granizo sobre un techo plano de 10 m × 20 m durante la tormenta? Suponga que, como el hielo, 1.0 cm^3 de granizo tiene una masa de 0.92 g.

FIGURA 6-28. Problema 4.

6. Una cadena uniforme y muy flexible de masa M y de longitud L cuelga de un extremo, de modo que pende verticalmente y el extremo inferior apenas si toca la superficie de una mesa. De repente se suelta el extremo superior, y la cadena cae en la mesa y se enrolla formando un pequeño montón; los eslabones se detienen en el momento en que chocan contra la mesa (véase Fig. 6- 29). Determine la fuerza que en cualquier instante ejerce la mesa sobre la cadena, en función del peso de la cadena que en ese momento ya está en ella.

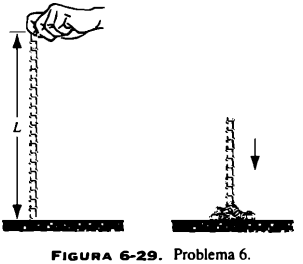


FIGURA 6-29. Problema 6.

7. Ponemos una caja en una báscula que se ajusta para que indique cero cuando la caja está vacía. En seguida vaciamos unas canicas en la caja desde una altura h arriba de su fondo, a una tasa de R (canicas por segundo). Las canicas tienen una masa m. Las colisiones son completamente inelásticas; suponga que las canicas se adhieren a la caja sin botar cuando chocan. Encuentre la lectura del peso en la báscula en el tiempo t, después que las canicas comienzan a llenar la caja. Determine la respuesta numérica cuando $R = 115\ \text{s}^{-1}$, $h = 9.62$ m, $m = 4.60$ g y $t = 6.50$ s.
8. Un vagón plano de 1,930 kg, que puede avanzar por las vías prácticamente sin fricción, permanece inmóvil junto a un andén. Un jugador de fútbol americano de 108 kg corre a lo largo del andén, paralelamente a las vías, a 9.74 m/s. Salta a la parte trasera del

vagón. *a*) ¿Qué velocidad tiene el vagón después que el jugador está a bordo y en reposo en él? *b*) Ahora el jugador comienza a caminar a 0.520 m/s hacia el frente en relación con el vagón. ¿Qué velocidad lleva el vagón mientras el jugador camina?

9. Un peso de 2.9 ton que cae una distancia de 6.5 ft, encaja a una profundidad de 1.5 in un pilote de 0.50 ton en el piso. *a*) Suponiendo que la colisión entre peso y pila sea completamente inelástica, determine la fuerza promedio de resistencia ejercida por el suelo. *b*) Suponiendo que la fuerza de resistencia del suelo permanezca constante en el valor obtenido en *a*), ¿a qué profundidad será sumido el pilote si la colisión fuera elástica? *c*) ¿Qué es más eficaz en este caso: la colisión elástica o la inelástica?
10. Se colocan dos trineos de 22.7 kg a una corta distancia entre sí, uno directamente detrás del otro, como se observa en la figura 6-30. Un gato de 3.63 kg parado en uno de ellos, salta al otro de inmediato regresando al primero. Los dos saltos se realizan a una rapidez de 3.05 m/s en relación con el trineo donde está el gato cuando da el salto. Calcule la rapidez final de los dos trineos.

FIGURA 6-30. Problema 10.

11. Dos vehículos *A* y *B* se dirigen al Oeste y al Sur, respectivamente, rumbo a la misma intersección donde chocan y quedan trabados. Antes de la colisión, *A* (con un peso de 2,720 lb) avanza con una rapidez de 38.5 mi/h, *B* (con un peso de 3,640 lb) tiene una rapidez de 58.0 mi/h. Encuentre la magnitud y dirección de la velocidad de los vehículos (trabados) inmediatamente después de la colisión.
12. Chocan dos bolas *A* y *B*, que tienen masas distintas y desconocidas. *A* se halla inicialmente en reposo, y *B* tiene una rapidez v. Después de la colisión, *B* tiene una rapidez $v/2$, y se desplaza en ángulo recto con su movimiento original. *a*) Determine la dirección en que se mueve la bola *A* después de la colisión. *b*) ¿Puede determinar la rapidez de *A* a partir de la información dada? Explique su respuesta.
13. En un juego de billar la bola blanca choca contra otra que inicialmente se halla en reposo. Después de la colisión, la bola blanca se desplaza a 3.50 m/s a lo largo de una línea que forma un ángulo de 65.0° con su dirección original de movimiento. La segunda bola alcanza una rapidez 6.75 m/s. Usando la conservación del momento, determine: *a*) el ángulo entre la dirección del movimiento de la segunda bola y la dirección original de la bola blanca, y *b*) la rapidez original de ésta.
14. La nave espacial *Voyager 2* (masa m y rapidez v respecto al Sol) se aproxima a Júpiter (masa M y rapidez V respecto al Sol), como se muestra en la figura 6-31. Rodea el planeta y se aleja en dirección contraria. ¿Cuál es su rapidez respecto al Sol, después de este encuentro de tipo "resortera"? Suponga que $v = 12$ km/s y que $V = 13$ km/s (la rapidez orbital de Júpiter), y que se trata de una colisión elástica. La masa de Júpiter es mucho mayor que la de la nave espacial $M >> m$. (Véase "The Slingshot Effect: Explanation and Analogies", de Albert A. Bartlett y Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, noviembre de 1985, p. 466.)

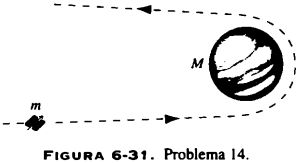


FIGURA 6-31. Problema 14.

15. La cabeza de un palo de golf que se mueve a 45.0 m/s, golpea una pelota (masa = 46.0 g) que se halla en un tee (punto de partida). La masa efectiva de la cabeza es 220 g. *a*) ¿Con qué velocidad sale la pelota del tee? *b*) ¿Con qué velocidad lo haría si duplicáramos la masa de la cabeza? ¿Y si la triplicáramos? ¿Qué conclusiones puede extraer respecto al uso de palos pesados de golf? Suponga que las colisiones sean perfectamente elásticas, y que el golfista puede hacer que estos palos alcancen la misma rapidez en el momento del impacto. Consulte la pregunta 13.
16. Las dos esferas de la derecha de la figura 6-32 están un poco separadas e inicialmente se encuentran en reposo; la de la izquierda es incidente con una rapidez v_0. Suponiendo que se trate de colisiones elásticas frontales: *a*) si $M \leq m$, demuestre que se producen dos colisiones y calcule todas las velocidades finales, y *b*) si $M > m$, demuestre que hay tres colisiones y calcule todas las velocidades finales.

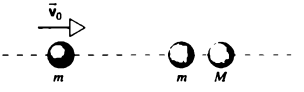


FIGURA 6-32. Problema 16.

17. Una bola con una rapidez inicial de 10.0 m/s choca de manera elástica con dos bolas idénticas, cuyos centros están en una línea perpendicular a la velocidad inicial, y que inicialmente están en contacto entre sí (Fig. 6-33). La primera bola se lanza directamente a los puntos de contacto y ninguna de ellas tiene fricción. Determine las velocidades de las tres bolas después de la colisión. (*Sugerencia*: Si no hay fricción, los impulsos se dirigen a lo largo de la línea de centros de las bolas, normales a las superficies en colisión.)

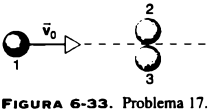


FIGURA 6-33. Problema 17.

18. Demuestre que, en el caso de una colisión elástica de una partícula de masa m_1 con una partícula de masa m_2 inicialmente en reposo: *a*) el ángulo máximo θ_m por donde m_1, puede ser desviado por una colisión que está dada por $\cos^2 \theta_m = 1 - (m_2/m_1)^2$; así que $0 \leq \theta_m \leq \pi/2$, cuando $m_1 > m_2$. *b*) $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, cuando $m_1 = m_2$ y *c*) θ_1 puede asumir todos los valores entre 0 y π, cuando $m_1 < m_2$.
19. Se dispara horizontalmente una bala de 3.54 g contra dos bloques que se hallan en reposo sobre una tabla sin fricción, como se observa en la figura 6-34*a*. La bala atraviesa el primer bloque con una masa de 1.22 kg, y se incrusta en el segundo con una masa de 1.78 kg. Por lo cual se producen las velocidades de 0.630 m/s y de 1.48 m/s, respectivamente, a los bloques como se aprecia en la figura 6-34*b*. Si prescindimos de la masa extraí-

da del primer bloque por la bala, calcule: *a*) la rapidez de ésta de inmediato después de salir del primer bloque, y *b*) la rapidez original de la bala.

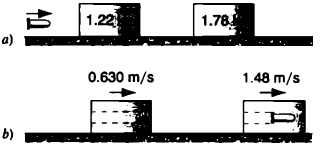


FIGURA 6-34. Problema 19.

20. Se suelta del reposo un bloque de 2.0 kg situado en la parte superior de un plano inclinado de 22° sin fricción y con una altura de 0.65 m (Fig. 6-35). En la parte inferior del plano choca contra un bloque de masa 3.5 kg y se adhiere a él. Los dos bloques se deslizan juntos una distancia de 0.57 m por un plano horizontal antes de detenerse. ¿Cuál es el coeficiente de fricción de la superficie horizontal?

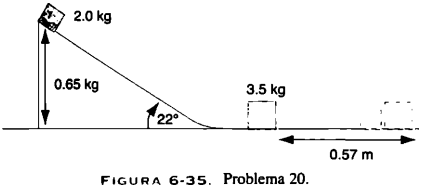


FIGURA 6-35. Problema 20.

21. Dos automóviles *A* y *B* derrapan sobre una carretera congelada al tratar de detenerse ante un semáforo. *A* tiene una masa de 1,100 kg, y *B* una masa de 1,400 kg. El coeficiente de fricción cinética entre las llantas trabadas de ambos vehículos y la carretera es de 0.130. El automóvil *A* logra frenar ante el semáforo, pero *B* no y se estrella contra aquél. Después de la colisión, *A* se detiene 8.20 m adelante del lugar del impacto, y *B* lo hace 6.10 m adelante (véase Fig. 6-36). Los dos conductores metieron freno durante todo el accidente. *a*) Partiendo de la distancia a que los automóviles se desplazaron después de la colisión, calcule su rapidez inmediatamente después del impacto. *b*) Use la conservación del momento para determinar la rapidez con que el automóvil *B* chocó con *A*. ¿Por qué motivos podemos criticar aquí el uso de la conservación del momento?

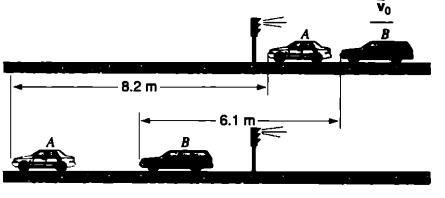


FIGURA 6-36. Problema 21.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Un juguete interesante llamado *Astro Blaster* (véase Fig. 6-37) consta de cuatro bolas de plástico ensartadas en un palo. Cuando éste se deja caer verticalmente, la bola del fondo rebota contra el suelo y luego choca con la de arriba. La segunda choca después con la tercera, la cual lo hace con la cuarta. La rapidez de la bola de la parte superior después de la última colisión es mucho mayor que la rapidez con que la primera bola golpea el suelo. Suponiendo que todas las colisiones sean elásticas, obtenga la razón de las masas de las cuatro bolas que producirá la máxima rapidez final de la cuarta bola, dado que la bola más ligera tiene 1/64 de la masa de la más pesada (*Nota*: Este problema debería resolverse numéricamente, pero también puede resolverse con técnicas analíticas.)

FIGURA 6-37. Problema 1 para resolver por computadora.

CAPÍTULO 7

SISTEMA DE PARTÍCULAS

Hasta ahora hemos tratado los objetos como si fueran partículas de puntos que tienen masa pero no tamaño. En realidad, no se trata de una restricción seria, porque todos los puntos de un objeto en el movimiento traslacional simple se desplazan de manera idéntica, sin que importe si se les trata como partícula o como objeto extendido. No obstante, en muchos cuerpos en movimiento este enfoque no es válido. Por ejemplo, cuando un objeto gira al moverse o cuando sus partes vibran en relación entre sí, no sería válido tratar al objeto entero como si fuera una partícula individual. Aun en esos casos más complicados, hay un punto del objeto cuyo movimiento está bajo la influencia de fuerzas externas que puede analizarse como el de una partícula simple. A este punto se le llama centro de masa. *En el presente capítulo explicamos cómo localizarlo en un objeto y mostramos que las leyes de Newton sirven para describir el movimiento del centro de masa en un sistema complejo.*

7-1 MOVIMIENTO DE UN OBJETO COMPLEJO

La figura 7-1 muestra el movimiento de un bastón que lanzan dos malabaristas. A primera vista el movimiento parece complicado en extremo, y tal vez no sea evidente la manera de aplicar las leyes de Newton para analizarlo. Es cierto que no se comporta como una partícula (todas sus partes *no* se mueven en la misma forma); tampoco es notorio que una parte *cualquiera* del bastón sigue la trayectoria parabólica que cabría esperar en proyectiles similares a partículas.

Nuestra formulación de las leyes de Newton se basa en el comportamiento de las partículas. En ocasiones estamos en condiciones de considerar los objetos complejos como partículas, si todas sus partes se mueven del mismo modo. Como esto no sucede en el movimiento del bastón en la figura 7-1, hemos de encontrar una nueva forma de analizar su movimiento.

Es evidente que el bastón realiza dos tipos de movimiento al mismo tiempo: el movimiento de traslación relacionada con el proyectil, y el movimiento rotacional de un cuerpo rígido (tema que abordaremos a partir del siguiente capítulo). Los dos movimientos combinados pueden parecer complicados, pero el análisis se simplifica una vez más si centramos la atención en un punto especial relacionado con el objeto. Podemos considerar que el movimiento del bastón es una combinación de una trayectoria parabólica de ese punto (como si no hubiera movimiento rotacional), y de una rotación alrededor de ese punto (como si no hubiera movimiento traslacional). A ese punto especial se le llama *centro de masa*. La figura 7-2 muestra una fotografía de exposición de tiempo del movimiento de un bastón con una luz indicadora que marca el centro de

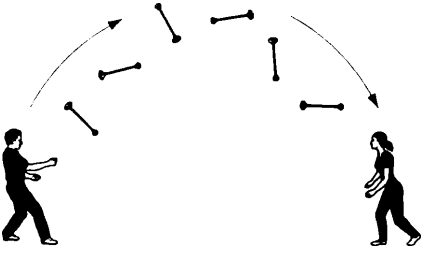


FIGURA 7-1. Movimiento complejo de un bastón al ser lanzado entre dos malabaristas.

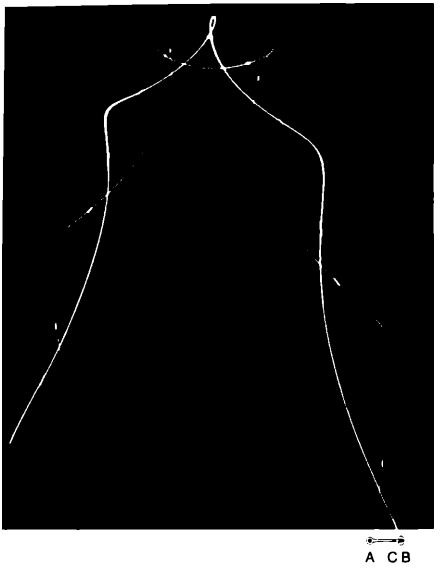


FIGURA 7-2. Fotografía con exposición al tiempo de un bastón lanzado hacia arriba con el movimiento de tres puntos (*A*, *B*, *C*) indicados por las luces. Los puntos *A* y *B* muestran movimientos complejos, mientras que el punto *C* (el centro de masa) sigue una trayectoria parabólica simple. Véase "Center-of-Mass Baton" de Manfred Bucher y otros, *The Physics Teacher*, febrero de 1991, p. 74.

masa. Este punto se desplaza en una trayectoria parabólica simple, pero esa sencilla descripción no puede aplicarse al movimiento de otros puntos de bastón.

En la sección 6-5 nos referiremos al concepto de centro de masa y descubriremos que es útil para analizar las colisiones entre partículas, pero en esa sección no explicaremos cómo localizarlo en un sistema de partículas. En este capítulo vamos a describir la manera de encontrar el centro de masa de un objeto sólido y utilizarlo para convertir el movimiento complejo en otro más simple.

7-2 SISTEMAS DE DOS PARTÍCULAS

Vamos a tratar de simplificar el problema expuesto en la sección anterior. Supondremos que el bastón está compuesto de dos partículas, situadas en los extremos *A* y *B*, conectados por una vara rígida y delgada de longitud fija y de masa despreciable. La masa de la partícula en *B* es el doble de la masa de la partícula en *A*.

Simplificaremos aún más deslizando el bastón en una superficie horizontal sin fricción, en vez de lanzarlo hacia arriba, eliminando así la gravedad en el análisis.

Al usar las leyes de Newton para estudiar el movimiento de un objeto individual que tratamos como partícula, hemos dividido el problema en dos partes: la partícula y su entorno. Con un objeto más complejo (como nuestro bastón de dos partículas), conviene más dividir el problema en un *sistema* y su entorno. El sistema puede constar de un número variable de objetos; podemos definirlo de modo que simplifique el problema, a condición de que efectuemos el análisis de manera uniforme, y de que expliquemos minuciosamente las interacciones entre el sistema y su entorno. A estas interacciones se les conoce como *fuerzas externas*. Se da el nombre de *fuerzas internas*, a las que se dan entre objetos que están totalmente dentro del sistema. En el caso del bastón, definimos que el sistema está formado por dos partículas y la varilla conectora: la gravedad y la fuerza normal se clasificarán entonces como fuerzas externas; la fuerza de tensión ejercida por la varilla en cualquiera de las partículas será la fuerza interna.

Le damos a la varilla un empujón a lo largo de la superficie horizontal sin fricción y luego examinamos su movimiento. La figura 7-3 muestra una serie de "instantáneas" del movimiento de las partículas en *A* y *B* y el centro de masa en *C*. Por supuesto que las partículas en *A* y en B aceleran, por lo cual (según la segunda ley de Newton) han de estar sujetas a una fuerza neta. Sin embargo, el punto *C* no muestra aceleración alguna: su velocidad tiene magnitud y dirección constantes. Ningún otro punto relacionado al bastón se mueve en esta forma simple.

Asimismo es interesante ver el movimiento del bastón desde un marco de referencia que se desplace con la misma velocidad como el punto *C*. (Como veremos luego, es el mismo que el marco de referencia de centro de masa que explicamos en la sección 6-5.) Dentro de este marco, el punto *C* parecerá estar en reposo. La figura 7-4 indica el movimiento resultante con las posiciones del bastón trazadas en los mo-

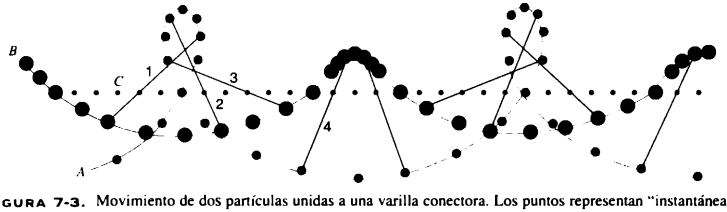


FIGURA 7-3. Movimiento de dos partículas unidas a una varilla conectora. Los puntos representan "instantáneas" que muestran la ubicación de los puntos *A*, *B* y *C* en intervalos sucesivos. El punto *C* de la varilla sigue una trayectoria recta y sus posiciones sucesivas están igualmente espaciadas, lo cual indica que se desplaza con velocidad constante.

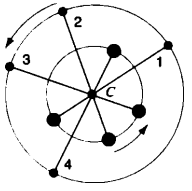


FIGURA 7-4. Si vemos el movimiento en la figura 7-3 desde un marco de referencia que se mueve junto con el punto C, la varilla parece girar alrededor de él y las dos partículas describen círculos de radio distinto.

mentos marcados 1, 2, 3 y 4 en la figura 7-3. El movimiento es una simple rotación en la cual las partículas tienen una rapidez rotacional constante.

Al concentrarnos en el centro de masa C, hemos podido dividir el movimiento del sistema en dos movimientos simples: el centro de masa se desplaza con velocidad constante, y el sistema gira con rapidez rotacional constante alrededor de C. En el siguiente capítulo nos ocuparemos del movimiento rotacional; por ahora nos concentraremos en el movimiento lineal del centro de masa.

Si queremos encontrar la posición del centro de masa, creamos un sistema coordenado en el plano horizontal, como el de la figura 7-5. Con m_1 representamos la masa de la partícula en A, y con m_2 la partícula en B. Los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ localizan m_1 y m_2 en determinado tiempo, en relación con el origen que escogimos para el sistema coordenado. Así pues, el centro de masa es localizado en ese momento por el vector $\vec{r}_{cm}$:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{7-1}$$

o por

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}. \tag{7-2}$$

El centro de masa es un punto fijo en cualquier objeto sólido cuya ubicación es determinada por la forma en que se distribuye la masa del objeto.

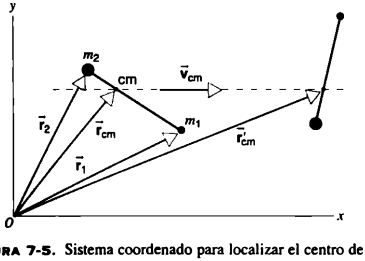


FIGURA 7-5. Sistema coordenado para localizar el centro de masa de nuestro sistema en un momento particular. Más tarde el centro de masa estará en $\vec{r}'_{cm}$.

En un momento posterior (como se ve en la figura 7-5), el sistema se ha desplazado a otro sitio y el centro de masa también ha cambiado de lugar. Si queremos entender por qué el movimiento del centro de masa es especial, calcularemos su velocidad y su aceleración:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}}{m_1 + m_2} \tag{7-3}$$

o bien

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \tag{7-4}$$

y

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\dfrac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\dfrac{d\vec{v}_2}{dt}}{m_1 + m_2} \tag{7-5}$$

o

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}. \tag{7-6}$$

En la ecuación 7-6 vemos por qué el movimiento del centro de masa de nuestro sistema es muy simple. La figura 7-6 muestra diagramas de cuerpo libre de las dos partículas y de la varilla (supuestamente sin masa). En ambas partículas el componente vertical de la aceleración es cero; en consecuencia, el componente vertical de la fuerza neta es cero también, y las magnitudes de la fuerza normal y del peso son iguales. Entonces la fuerza neta en m_1 es $\vec{F}_{1r}$ (la fuerza en m_1 debida a la varilla de conexión), y con la segunda ley de Newton se obtiene $\vec{F}_{1r} = m_1\vec{a}_1$. En forma parecida, para m_2, $\vec{F}_{2r} = m_2\vec{a}_2$. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza en m_1 debida a la varilla de conexión es igual y opuesta a la ejercida en la varilla de conexión por m_1, o $\vec{F}_{1r} = -\vec{F}_{r1}$; de manera semejante, $\vec{F}_{2r} = -\vec{F}_{r2}$. Al combinar los resultados anteriores, el numerador de la ecuación 7-6 se convierte en $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{1r} + \vec{F}_{2r} = -\vec{F}_{r1} + (-\vec{F}_{r2}) = -(\vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2})$. Por último, como supusimos que la varilla de conexión no tiene masa, la fuerza neta en ella debe ser cero ($\Sigma\,\vec{F}_{varilla} = m_{varilla}\vec{a}_{varilla} = 0$ porque $m_{varilla} = 0$), véase la figura 7-6*b*. Con $\Sigma\,\vec{F}_{varilla} = \vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2}$, el numerador de la ecuación 7-6 queda

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = -(\vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2}) = -\Sigma\,\vec{F}_{varilla} = 0.$$

Tenemos, pues $\vec{a}_{cm} = 0$, y el centro de masa se mueve con velocidad constante.

En esta explicación hemos supuesto que ninguna fuerza neta actúa sobre el sistema ($\vec{F}_{1r}$ y $\vec{F}_{2r}$ son fuerzas *internas* que

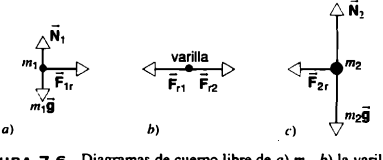


FIGURA 7-6. Diagramas de cuerpo libre de *a*) m_1, *b*) la varilla conectora y *c*) m_2.

una parte del sistema ejerce sobre la otra). Ahora supongamos que hay una fuerza externa en cada partícula, quizás una fuerza de fricción debida a la superficie. La fuerza neta en cada partícula será entonces la suma vectorial de la fuerza externa más la fuerza interna debida a la varilla:

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{1r} \quad \text{y} \quad \sum \vec{F}_2 = \vec{F}_{2,ext} + \vec{F}_{2r}. \quad (7\text{-}7)$$

Así pues, cuando analizamos la ecuación 7-6, obtenemos

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \sum \vec{F}_1 + \sum \vec{F}_2$$
$$= \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{1r} + \vec{F}_{2,ext} + \vec{F}_{2r}. \quad (7\text{-}8)$$

Una vez más $\vec{F}_{1r} + \vec{F}_{2r} = 0$, y al definir la *fuerza externa neta* como $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{2,ext}$, la ecuación 7-8 se reduce a $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \sum \vec{F}_{ext}$. Al emplear la ecuación 7-6 obtenemos

$$\sum \vec{F}_{ext} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{cm}. \quad (7\text{-}9)$$

Lo anterior se parece mucho a la segunda ley de Newton, sólo que se aplica a algo inexistente: una partícula de masa $m_1 + m_2$ situada en el centro de masa.

Resumiendo las conclusiones referentes al sistema de dos partículas, hemos visto que podemos simplificar el análisis si descomponemos los movimientos complejos en un movimiento del centro de masa del sistema, y otro alrededor del centro de masa. Cuando ninguna fuerza externa opera sobre el sistema, el centro de masa se desplazará con velocidad constante. Cuando exista una fuerza externa, podremos determinar el movimiento del centro suponiendo que la fuerza externa neta actúa sobre una partícula que se halla en el centro de masa y que tiene una masa igual a la masa total del sistema. En la siguiente sección desarrollaremos expresiones más generales que nos lleven a las mismas conclusiones concernientes a sistemas todavía más complejos.

PROBLEMA RESUELTO 7-1 *a*) Supóngase que el bastón de la figura 7-3 se encuentra en reposo sobre el eje x, con la partícula más masiva m_2 (= $2m$) en la coordenada x, y con la menos masiva m_1 (= m) en la coordenada $x + L$ (donde L es la longitud de la varilla que conecta las partículas) como se indica en la figura 7-7*a*. Encuentre el centro de masa. *b*) Ahora suponga que m_2 está en el origen y que la varilla forma un ángulo de 45° entre los ejes x y y (Fig. 7-7*b*). Encuentre posición del centro de masa.

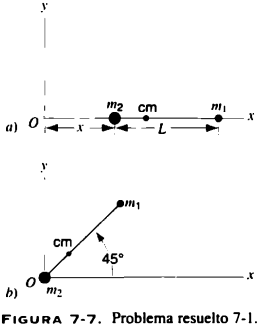


FIGURA 7-7. Problema resuelto 7-1.

Solución *a*) Con $y_1 = 0$ y $y_2 = 0$, la ecuación 7-2 da $y_{cm} = 0$. La coordenada x del centro de masa se obtiene también de la ecuación 7-2.

$$x_{cm} = \frac{(m)(x + L) + (2m)(x)}{m + 2m} = x + \frac{L}{3}.$$

El centro se masa se halla sobre la varilla a una distancia $L/3$ de la partícula más masiva.

b) En este caso $x_1 = L/\sqrt{2}$, $y_1 = L/\sqrt{2}$, $x_2 = 0$ y $y_2 = 0$ y, en consecuencia, tenemos

$$x_{cm} = \frac{(m)(L/\sqrt{2}) + (2m)(0)}{m + 2m} = \frac{L}{3\sqrt{2}},$$

$$y_{cm} = \frac{(m)(L/\sqrt{2}) + (2m)(0)}{m + 2m} = \frac{L}{3\sqrt{2}}.$$

Una vez más el centro de masa está sobre la varilla de conexión y a $\frac{1}{3}$ de su longitud respecto a la partícula más masiva.

7-3 SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

En esta sección generalizaremos los resultados de la sección anterior a los sistemas de tres dimensiones que tienen más de dos partículas.

Consideramos un sistema constituido por N partículas de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$. La masa total es

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum m_n. \quad (7\text{-}10)$$

Cada partícula del sistema puede representarse mediante su masa m_n (donde $n = 1, 2, \ldots N$), su posición en la coordenada $\vec{r}_n$ (cuyos componentes son x_n, y_n y z_n), su velocidad $\vec{v}_n$ (cuyos componentes son v_{nx}, v_{ny} y v_{nz}) y su aceleración $\vec{a}_n$. La fuerza neta en la partícula m_n es $\sum \vec{F}_n$, que será en general diferente de una partícula a otra. Esta fuerza puede provenir en parte de las otras partículas $N - 1$, y en parte, de un agente externo.

El centro de masa del sistema puede definirse por medio de la extensión lógica de la ecuación 7-1:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$

o bien

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_n\vec{r}_n. \quad (7\text{-}11)$$

En términos de los componentes, la relación vectorial de la ecuación 7-11 puede escribirse así

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_nx_n, \quad (7\text{-}12a)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_Ny_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_ny_n, \quad (7\text{-}12b)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_N z_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_n z_n. \qquad (7\text{-}12c)$$

Al tomar la derivada de la ecuación 7-11, obtenemos la velocidad del centro de masa:

$$\vec{\mathbf{v}}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{cm}}{dt}$$
$$= \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\mathbf{r}}_2}{dt} + \cdots + m_N \frac{d\vec{\mathbf{r}}_N}{dt}\right)$$

o

$$\vec{\mathbf{v}}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + m_N\vec{\mathbf{v}}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_n\vec{\mathbf{v}}_n. \qquad (7\text{-}13)$$

Al derivar de nuevo, determinamos la aceleración del centro de masa:

$$\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\vec{\mathbf{a}}_1 + m_2\vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + m_N\vec{\mathbf{a}}_N)$$
$$= \frac{1}{M}\sum m_n\vec{\mathbf{a}}_n. \qquad (7\text{-}14)$$

Podemos reescribir así la ecuación 7-14

$$M\vec{\mathbf{a}}_{cm} = m_1\vec{\mathbf{a}}_1 + m_2\vec{\mathbf{a}}_2 + \cdots + m_N\vec{\mathbf{a}}_N$$

o bien

$$M\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \sum \vec{\mathbf{F}}_1 + \sum \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots + \sum \vec{\mathbf{F}}_N. \qquad (7\text{-}15)$$

donde el último resultado se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton, $\sum \vec{\mathbf{F}}_n = m_n\vec{\mathbf{a}}_n$ a cada partícula individual. Así pues, la fuerza total que actúa sobre un sistema de partículas, es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa. La ecuación 7-15 no es más que la segunda ley de Newton para el sistema de N partículas tratadas como una partícula individual de masa M situada en el centro de masa, que se desplaza con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{cm}$ y que experimenta una aceleración $\vec{\mathbf{a}}_{cm}$.

Conviene simplificar un poco más la ecuación 7-15. Podemos dividir la fuerza que actúa en cada partícula del sistema en fuerzas internas provenientes de la interacción con otras que forman parte del sistema, y en fuerzas externas, las cuales se originan en el entorno del sistema en cuestión. Una partícula cualquiera m_n puede experimentar una fuerza aplicada en ella por la partícula m_k que escribimos como $\vec{\mathbf{F}}_{nk}$. Esta fuerza es una entre muchas que forman $\sum \vec{\mathbf{F}}_n$, la fuerza total en m_n. En forma análoga, la fuerza total en la partícula m_k incluye un término $\vec{\mathbf{F}}_{kn}$, debido a la interacción con la partícula m_n. Con base en la tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{F}}_{nk} = -\vec{\mathbf{F}}_{kn}$; así que las dos fuerzas se cancelan cuando sumamos las fuerzas en la ecuación 7-15. De hecho, todas las fuerzas internas forman parte de las parejas de acción-reacción y se cancelan. (En el Capítulo 3 advertimos al lector que este tipo de fuerzas han de aplicarse a diversas partículas y que, por lo mismo, no se oponen entre sí en una partícula. Con ello no estamos violando esa advertencia, pues aplicamos la acción a una partícula y la reacción a otra. La distinción establece que sumamos para obtener la fuerza neta que opera en las *dos* partículas. En tal caso, se cancelan efectivamente los componentes de la acción y reacción que todavía se aplican a distintas partículas.)

Lo único que queda en la ecuación 7-15, es el total de todas las fuerzas *externas*, por lo que se reduce a

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\vec{\mathbf{a}}_{cm}, \qquad (7\text{-}16)$$

que puede escribirse así en función de sus componentes

$$\sum F_{ext,x} = Ma_{cm,x}, \qquad \sum F_{ext,y} = Ma_{cm,y},$$

y

$$\sum F_{ext,z} = Ma_{cm,z}. \qquad (7\text{-}17)$$

Podemos resumir este resultado tan importante como sigue:

El movimiento traslacional total de un sistema de partículas puede analizarse mediante las leyes de Newton, como si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa, y como si la fuerza externa total se aplicase en ese punto.

Un corolario se sigue de inmediato en el caso $\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = 0$:

Si la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es cero, el centro de masa se moverá con velocidad constante.

Son resultados generales que se aplican igualmente bien a grupos de partículas individuales a medida que éstas son unidas por fuerzas internas, como en un objeto sólido. También éste puede estar realizando algún tipo de movimiento complicado, pero el centro de masa se mueve de acuerdo con la ecuación 7-16. Considere, por ejemplo, el movimiento del bastón de la figura 7-1, el cual gira al irse desplazando. No obstante, su centro de masa sigue una trayectoria parabólica simple. Por lo que respecta a la fuerza externa (la gravedad), el sistema se comporta como si fuera una partícula de masa M situada en el centro de masa. Así pues, se reduce un problema complicado a dos relativamente simples: la trayectoria parabólica del centro de masa, y una rotación alrededor del mismo centro de masa.

Otro ejemplo, es el sistema Tierra-Luna que se mueve bajo la gravedad solar (la fuerza externa). La figura 7-8 muestra que el centro de masa del sistema sigue una órbita estable al-

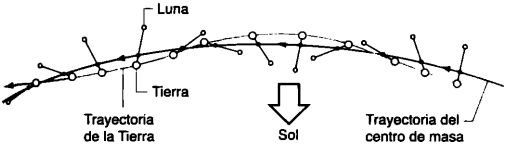


FIGURA 7-8. El centro de masa del sistema Tierra-Luna sigue una órbita casi circular alrededor del Sol; mientras la Tierra y la Luna giran alrededor de su centro de masa común, como el bastón de la figura 7-3. Este efecto, que causa un ligero "tamboleo" en la órbita terrestre, aparece muy exagerado en la figura. El centro de masa del sistema se halla dentro de la Tierra, por lo cual ésta siempre se superpone a la trayectoria orbital del centro de masa.

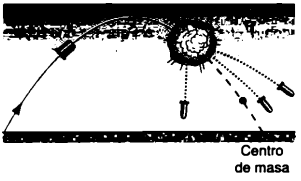


FIGURA 7-9. Un proyectil describe una trayectoria parabólica (línea gruesa). Una explosión lo rompe en tres fragmentos, que se desplazan de modo que su centro de masa sigue la trayectoria original.

rededor del Sol; es la que seguiría una partícula de masa $m_{\text{Tierra}} + m_{\text{Luna}}$. La Tierra y la Luna también giran alrededor de su centro de masa, resultando una pequeña oscilación de la primera alrededor de la órbita estable. Los datos del apéndice C nos permiten demostrar que el centro de masa de ese sistema se halla dentro de la Tierra (véase Ej. 1).

En la figura 7-9 se observa el movimiento de un proyectil que se divide en tres fragmentos. En efecto, una explosión libera los tres, pero como la explosión produce sólo fuerzas internas no afecta al movimiento del centro de masa. Éste continúa siguiendo la trayectoria parabólica como si no hubiera ocurrido la explosión, hasta que uno o más fragmentos experimentan una fuerza externa; por ejemplo, la proveniente de resistencia atmosférica, o la del impacto con el suelo.

PROBLEMA RESUELTO 7-2. La figura 7-10*a* muestra un sistema de tres partículas inicialmente en reposo de masas $m_1 = 4.1$ kg, $m_2 = 8.2$ kg y $m_3 = 4.1$ kg. Sobre ellas actúan fuerzas externas netas diferentes que tienen magnitudes $F_1 = 6$ N, $F_2 = 12$ N y $F_3 = 14$ N. La dirección de las fuerzas se ilustra en la figura. ¿Dónde está el centro de masa de este sistema y cuál es su aceleración?

Solución La posición del centro de masa está marcado por un punto en la figura. Como se indica en la figura 7-10*b*, este punto lo tratamos como si fuera una partícula real, le asignamos una masa M igual a la del sistema de $m_1 + m_2 + m_3 = 16.4$ kg, y suponemos que todas las fuerzas externas se aplican en ese punto. El centro de masa se obtiene a partir de las ecuaciones 7-12*a* y 7-12*b*:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$$
$$= \frac{1}{16.4\text{ kg}}[(4.1\text{ kg})(-2\text{ cm}) + (8.2\text{ kg})(4\text{ cm}) + (4.1\text{ kg})(1\text{ cm})] = 1.8\text{ cm},$$
$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3)$$
$$= \frac{1}{16.4\text{ kg}}[(4.1\text{ kg})(3\text{ cm}) + (8.2\text{ kg})(2\text{ cm}) + (4.1\text{ kg})(-2\text{ cm})] = 1.3\text{ cm}.$$

El componente x de la fuerza externa neta que actúa sobre el centro de masa es (Fig. 7-10*b*)

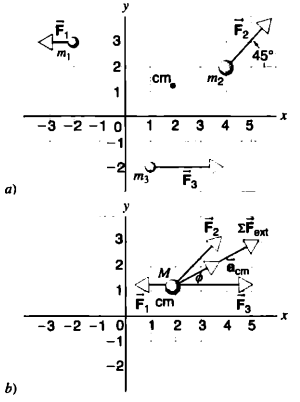


FIGURA 7-10. Problema resuelto 7-2. *a*) Las fuerzas indicadas operan sobre tres partículas colocadas en reposo en las posiciones de la figura. El centro de masa del sistema está marcado. *b*) El movimiento traslacional del sistema puede representarse por el de una partícula de masa total M situada en el centro de masa y sobre la cual actúan las tres fuerzas externas. Se indican la fuerza y la aceleración resultantes del centro de masa. (Los ejes x y y están marcados en centímetros.)

$$\sum F_{\text{ext},x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$= -6\text{ N} + (12\text{ N})(\cos 45°) + 14\text{ N} = 16.5\text{ N},$$

y el componente y es

$$\sum F_{\text{ext},y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$
$$= 0 + (12\text{ N})(\text{sen}45°) + 0 = 8.5\text{ N}.$$

En consecuencia, la fuerza neta tiene una magnitud de

$$|\sum \vec{F}_{\text{ext}}| = \sqrt{(F_{\text{ext},x})^2 + (F_{\text{ext},y})^2} = \sqrt{(16.5\text{ N})^2 + (8.5\text{ N})^2} = 18.6\text{ N}$$

y forma un ángulo con el eje x dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\sum F_{\text{ext},y}}{\sum F_{\text{ext},x}} = \tan^{-1}\frac{8.5\text{ N}}{16.5\text{ N}} = 27°.$$

Ésta es la dirección del vector de aceleración. Según la ecuación 7-16, la magnitud de la aceleración del centro de masa está dada por

$$|\vec{a}_{\text{cm}}| = \frac{F_{\text{ext}}}{M} = \frac{18.6\text{ N}}{16.4\text{ kg}} = 1.1\text{ m/s}^2.$$

Si las fuerzas externas son constantes, la aceleración del centro de masa lo será también, aun cuando cambien con el tiempo las fuerzas internas (y, por tanto, la aceleración de las partículas individuales).

PROBLEMA RESUELTO 7-3. Desde el suelo se lanza un proyectil de masa 9.6 kg con una velocidad inicial de 12.4 m/s en un ángulo de 54° sobre la horizontal (Fig. 7-11). En algún momento después del lanzamiento, una explosión lo fragmenta en dos partes. Una parte, de masa 6.5 kg, es observada 1.42 s después del lanzamiento a una altura de 5.9 m y a una distancia horizontal de 13.6 m del punto de lanzamiento. Encuentre la ubicación del segundo fragmento en ese mismo tiempo.

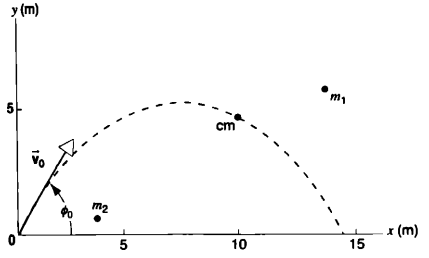


FIGURA 7-11. Problema resuelto 7-3. La línea punteada muestra la trayectoria parabólica del centro de masa de los dos fragmentos. Las posiciones del centro de masa y de los dos fragmentos se muestran en $t = 1.42$ s.

Solución De acuerdo con la ecuación 7-16, el movimiento de los dos fragmentos puede analizarse en función del movimiento del sistema combinado. Por tanto, cuando $t = 1.42$ s después del lanzamiento, el centro de masa de los dos fragmentos deberá hallarse en el mismo lugar donde hubiera estado el proyectil original en caso de no haber explotado. Encontremos primero la posición. La del proyectil original cuando $t = 1.42$ s, puede obtenerse mediante las ecuaciones 4-10 con $v_{0x} = v_0 \cos \phi_0 = (12.4 \text{ m/s})\cos 54° = 7.3$ m/s y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = (12.4 \text{ m/s})\operatorname{sen} 54° = 10.0$ m/s. Con el origen del sistema coordenado en el punto inicial de lanzamiento, tenemos

$$x = v_{0x}t = (7.3 \text{ m/s})(1.42 \text{ s}) = 10.4 \text{ m},$$
$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (10.0 \text{ m/s})(1.42 \text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(1.42 \text{ s})^2 = 4.3 \text{ m}$$

El movimiento del centro de masa del sistema de los dos fragmentos es el mismo que el del sistema combinado original, por lo cual el centro de masa de los fragmentos cuando $t = 1.42$ s, ha de hallarse en $x_{cm} = 10.4$ m, $y_{cm} = 4.3$ m. Se nos da la ubicación de un fragmento, m_1, en ese tiempo: $x_1 = 13.6$ m, $y_1 = 5.9$ m. Podemos encontrar la del otro que tiene una masa $m_2 = M - m_1 = 9.6 \text{ kg} - 6.5 \text{ kg} = 3.1$ kg, resolviendo las ecuaciones 7-12*a* y 7-12*b* para x_2 y y_2.

$$x_2 = \frac{Mx_{cm} - m_1x_1}{m_2} = \frac{(9.6 \text{ kg})(10.4 \text{ m}) - (6.5 \text{ kg})(13.6 \text{ m})}{3.1 \text{ kg}} = 3.7 \text{ m},$$

$$y_2 = \frac{My_{cm} - m_1y_1}{m_2} = \frac{(9.6 \text{ kg})(4.3 \text{ m}) - (6.5 \text{ kg})(5.9 \text{ m})}{3.1 \text{ kg}} = 0.9 \text{ m}.$$

La figura 7-11 muestra la posición del fragmento m_2.

Si conocemos la velocidad de un fragmento, podemos aplicar métodos similares para obtener la del otro (véase Ej. 12).

En nuestro análisis hemos supuesto que la gravedad es la única fuerza externa que actúa sobre el sistema, lo cual nos permite representar el movimiento del centro de masa de los dos fragmentos, como la trayectoria parabólica de un proyectil en la gravedad de la Tierra. Si un fragmento choca contra el suelo, habría una fuerza adicional en el problema (la del suelo sobre el fragmento), y el centro de masa seguirá una trayectoria distinta. Para utilizar este método en nuestro caso, tendríamos que conocer la fuerza ejercida por el suelo.

7-4 CENTRO DE MASA DE LOS OBJETOS SÓLIDOS

Es demasiado aburrido determinar el centro de masa de un objeto sólido por medio de las ecuaciones 7-12 y sumar todos los átomos del sistema. Así pues, optamos por dividirlo en elementos diminutos de masa δm_n. A medida que los elementos se vuelven infinitesimalmente pequeños, las sumas de las ecuaciones 7-12 se transforman en integrales:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \sum x_n \, \delta m_n = \frac{1}{M} \int x \, dm, \qquad (7\text{-}18a)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \sum y_n \, \delta m_n = \frac{1}{M} \int y \, dm, \qquad (7\text{-}18b)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \to 0} \sum z_n \, \delta m_n = \frac{1}{M} \int z \, dm. \qquad (7\text{-}18c)$$

En la forma vectorial (compare la ecuación 7-11), las ecuaciones anteriores pueden escribirse así:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm. \qquad (7\text{-}19)$$

En muchos casos es posible utilizar argumentos basados en geometría o en simetría para simplificar el cálculo del centro de masa de los objetos sólidos. Si uno tiene *simetría esférica*, el centro deberá hallarse en el centro geométrico de la esfera. (No es necesario que su densidad sea uniforme; por ejemplo, una pelota de béisbol tiene simetría esférica aunque se componga de capas de materiales diversos. Su centro de gravedad está en su centro geométrico. Cuando nos referimos a la simetría esférica, queremos decir que la densidad puede variar con r, pero que debe tener la misma variación en todas direcciones.) Si un sólido posee *simetría cilíndrica* (es decir, si su masa se distribuye simétricamente alrededor de un eje), el centro de masa ha de hallarse sobre el eje. Si su masa está distribuida simétricamente alrededor de un plano, el centro ha de encontrarse en él.

A menudo encontramos objetos sólidos irregulares que pueden dividirse en varias partes. Podemos localizar el centro de masa de ellas y luego, tratando cada parte como una partícula situada en su propio centro de masa, podemos encontrar el de la combinación.

A manera de ejemplo, considere la placa triangular de la figura 7-12. La dividimos en muchas tiras paralelas a la base

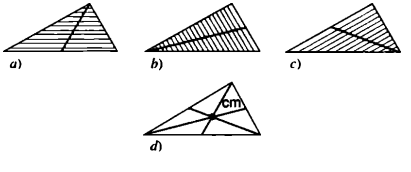


FIGURA 7-12. En *a*), *b*) y *c*), el triángulo está dividido en franjas delgadas, paralelas a cada uno de los tres lados. El centro de masa ha de encontrarse sobre las líneas divisorias simétricas que aparecen en la figura. *d*) El punto, el único punto común de las tres líneas, es la posición del centro de masa.

del triángulo, como se indica en la figura 7-12*a*. El centro de masa de cada tira ha de estar en su centro geométrico y, por consiguiente, el centro de masa de la placa ha de localizarse en alguna parte de la línea que conecta los centros de las tiras. (Sustituya cada tira con una masa puntual situada en el centro de masa de la tira. La hilera de las masas puntuales forma un objeto unidimensional cuyo centro de masa con seguridad se halla en su longitud.) Al repetir el procedimiento con tiras trazadas paralelamente a los otros dos lados (Figs. 7-12*b* y 7-12*c*), obtenemos dos líneas adicionales que han de incluir también el centro de masa de la placa. Si sobreponemos las tres líneas como en la figura 7-12*d*, comprobaremos que hay un solo punto en común, el cual por tanto deberá ser el centro de masa.

PROBLEMA RESUELTO 7-4.
La figura 7-13*a* muestra una placa metálica circular de radio $2R$, de donde se extrajo un disco de radio R. Designemos el objeto como X. Su centro de masa aparece como un punto sobre el eje x. Determine la ubicación del punto.

Solución El objeto X tiene simetría alrededor del eje x, es decir, la parte encima del eje es la imagen especular de la parte situada debajo de él. Debido a esta simetría, el centro de masa ha de estar sobre el eje x. Más aún, como la parte mayor del objeto X se halla a la derecha del eje y que a la izquierda, el centro de masa debe estar a la derecha de este eje. Es, pues, muy razonable, que el punto X represente el centro de masa del objeto X.

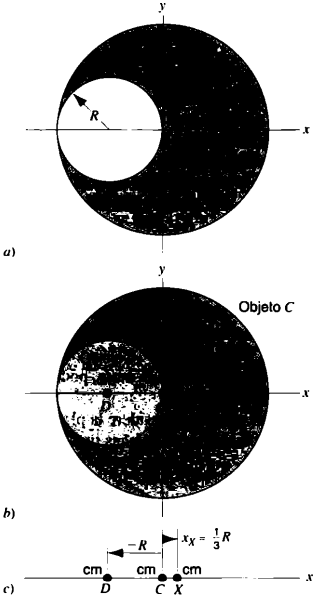


FIGURA 7-13. Problema resuelto 7-4. *a*) El objeto X es un disco metálico de radio $2R$, con un hoyo de radio R cortado en él. *b*) El objeto D es un disco metálico que llena el hoyo en el objeto X; su centro de masa se encuentra en $x_D = -R$. El objeto C es el disco compuesto formado por los objetos X y D; su centro de masa se halla en el origen. *c*) Centros de masa de los tres objetos.

La figura 7-13*b* muestra el objeto X, su hoyo lleno con un disco del mismo material de radio R, al que llamamos objeto D. Denotemos como objeto C el gran disco uniforme así formado. Según la simetría, el centro de masa del objeto C está en el origen del sistema coordenado, como se aprecia en la figura.

Al encontrar el centro de masa de un objeto compuesto, podemos suponer que la masa de sus componentes está concentrada en los centros individuales. Por tanto, el objeto C puede ser tratado como equivalente a dos partículas que representan los objetos X y D. La figura 7-13*c* indica la posición de los centros de masa de los tres objetos.

La posición del centro de masa del objeto C, está dado en la ecuación 7-12*a* como

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

donde x_D y x_X son las posiciones de los centros de masa de los objetos D y X, respectivamente. Al observar que $x_C = 0$ y al resolver para x_X, obtenemos

$$x_X = -\left(\frac{m_D}{m_X}\right) x_D.$$

La razón m_D/m_X ha de ser la misma que la de las superficies de los objetos D y X (suponiendo que la placa tenga densidad y espesor uniformes). Es decir,

$$\frac{m_D}{m_X} = \frac{\text{área de } D}{\text{área de } X} = \frac{\text{área de } D}{\text{área de } C - \text{área de } D}$$
$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}.$$

Con $x_D = -R$ obtenemos

$$x_X = \tfrac{1}{3}R.$$

PROBLEMA RESUELTO 7-5. Se dobla una tira delgada de material y se le da forma de un semicírculo de radio R (Fig. 7-14). Determine su centro de masa.

Solución Este caso tiene simetría alrededor del eje y (es decir, por cada partícula a la izquierda del eje y hay otra en un lugar simétrico a la derecha de dicho eje). Por tanto, el centro de masa deberá estar

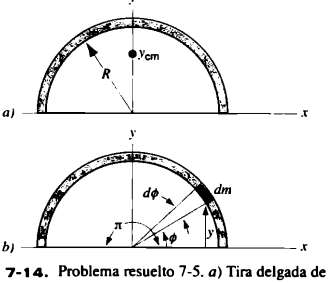


FIGURA 7-14. Problema resuelto 7-5. *a*) Tira delgada de metal doblado en forma de un semicírculo. *b*) Un elemento de la tira de masa dm situado en la coordenada angular ϕ.

sobre el eje y, esto es, $x_{cm} = 0$. Sin embargo, no hay simetría alrededor del eje x, por lo cual debemos utilizar la ecuación 7-18*b* para encontrar y_{cm}. Con el uso de una coordenada angular se simplifica la integración que habrá de realizarse. Considere el elemento pequeño de masa dm que aparece en la figura 7-14*b*. Subtiende un ángulo $d\phi$; como la masa total M de la tira subtiende un ángulo π (un círculo completo subtendrá un ángulo 2π), la masa dm debe ser la pequeña fracción de M, como $d\phi$ es de π. En otras palabras, $dm/M = d\phi/\pi$ o $dm = (M/\pi)d\phi$. El elemento dm se halla en la coordenada $y = R$ sen ϕ. En este caso, escribimos la ecuación 7-18*b* así

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{\pi}(R \operatorname{sen}\phi)\frac{M}{\pi}\,d\phi$$
$$= \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi = \frac{2R}{\pi} = 0.637R.$$

El centro de masa está aproximadamente a dos terceras partes del radio sobre el eje y. Nótese que, como se advierte en este caso, el centro de masa no necesita estar dentro del volumen ni el material de un objeto.

PROBLEMA RESUELTO 7-6. Una bola de masa m y de radio R, está dentro de una concha esférica de la misma masa m y radio interno $2R$. La combinación se halla en reposo sobre la parte superior de una mesa como se ve en la figura 7-15*a*. Se suelta la bola rueda hacia adelante y hacia atrás en el interior, hasta que finalmente se detiene en el fondo como se indica en la figura 7-15*c*. ¿Cuál será el desplazamiento d de la concha durante el proceso?

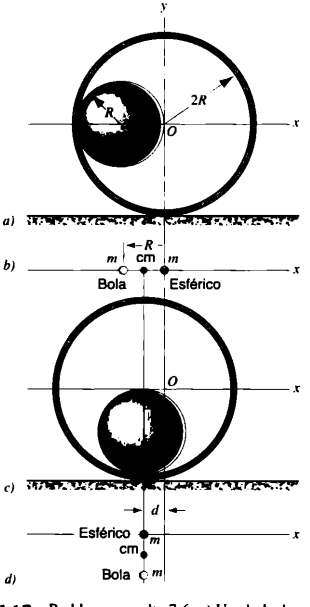


FIGURA 7-15. Problema resuelto 7-6. *a*) Una bola de radio R se suelta de su posición inicial y rueda libremente dentro de un cascarón esférico de radio $2R$. *b*) Centro de masa de la bola: del cascarón y de su combinación. *c*) Estado final después que la bola se ha detenido. El cascarón se ha desplazado de modo que la coordenada horizontal del centro de masa del sistema permanece en su lugar. *d*) Centro de masa de la bola, del cascarón y de su combinación.

Solución Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el sistema bola-concha, son la fuerza hacia abajo de la gravedad y la fuerza normal ejercida verticalmente hacia arriba por la masa. Ninguna de ellas posee un componente horizontal $\Sigma F_{ext,x} = 0$. De acuerdo con la ecuación 7-16, el componente de aceleración $a_{cm,x}$ del centro de masa también ha de ser cero. Por tanto, la posición horizontal del centro del sistema deberá permanecer fijo, y la concha habrá de moverse de modo que asegure que esto sucederá.

Podemos representar la bola y la concha mediante partículas individuales de masa m situadas en sus centros respectivos. La figura 7-15*b* muestra el sistema antes de soltar la bola, la figura 7-15*d* después que se detiene en el fondo de la concha. Decidimos que el origen coincida con la posición inicial del centro de la concha. En la figura 7-15*b* vemos que, respecto a este origen, el centro de masa del sistema bola-concha está a una distancia $\frac{1}{2}R$ a la izquierda, a la mitad entre las dos partículas. La figura 7-15*d* indica que el desplazamiento de la concha está dado por

$$d = \tfrac{1}{2}R.$$

La concha debe recorrer esta distancia hacia la izquierda mientras la bola se detiene.

La bola se detiene por acción de la fuerza de fricción que opera entre ella y la concha. ¿Por qué esa fuerza no afecta a la ubicación final del centro de masa?

7-5 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Supóngase que tenemos un sistema que tiene N partículas. Éstas poseen las masas m_n ($n = 1, 2, \ldots, N$), y se desplazan con velocidades $\vec{v}_n$ y con momentos $\vec{p}_n = m_n\vec{v}_n$. Así pues, el momento total $\vec{P}$ del sistema será

$$\vec{P} = \sum_{n=1}^{N}\vec{p}_n = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N$$
$$= \sum_{n=1}^{N} m_n\vec{v}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N, \qquad (7\text{-}20)$$

que, según la ecuación 7-13, puede escribirse:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}. \qquad (7\text{-}21)$$

Aquí $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$, es la masa total del sistema. La ecuación 7-21 ofrece una definición distinta pero equivalente del momento total de un sistema de partículas:

El momento total de un sistema de partículas, es igual al producto de la masa total de un sistema y la velocidad de su centro de masa.

Suponiendo una masa constante M, la derivada del momento es

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}, \qquad (7\text{-}22)$$

por medio de la ecuación 7-14. La comparación de la ecuación 7-22 con la ecuación 7-16, $\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$, nos permite escribir la segunda ley de Newton para un sistema de partículas como

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \tag{7-23}$$

La ecuación 7-23 establece que, en un sistema de partículas, la fuerza externa neta es igual a la rapidez de cambio del momento lineal del sistema. Esta ecuación es la generalización de una expresión de una partícula $\Sigma \vec{F} = d\vec{p}/dt$ (Ec. 6-2), a un sistema de muchas partículas. La ecuación 7-23 se reduce a la ecuación 6-2 (en el caso especial de una sola partícula), puesto que sólo las fuerzas externas pueden operar sobre un sistema de una partícula.

La ley de conservación del momento lineal, que en la sección 6-4 obtuvimos para un sistema de dos partículas, se aplica también a uno de muchas partículas, como se advierte inmediatamente en la ecuación 7-23: si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, $d\vec{P}/dt = 0$, por consiguiente el momento lineal total $\vec{P}$ del sistema permanece constante.

Si vemos el sistema desde un marco de referencia que se mueva con el centro de masa, dentro del marco la velocidad $\vec{v}'_n$ de una partícula en el sistema será

$$\vec{v}'_n = \vec{v}_n - \vec{v}_{cm}. \tag{7-24}$$

Dentro de este marco de referencia, si usamos la ecuación 7-13, el momento total es

$$\begin{aligned}\vec{P}' &= \sum_{n=1}^{N} m_n\vec{v}'_n = \sum_{n=1}^{N} m_n\vec{v}_n - \sum_{n=1}^{N} m_n\vec{v}_{cm} \\ &= M\vec{v}_{cm} - \vec{v}_{cm}\sum_{n=1}^{N} m_n \\ &= M\vec{v}_{cm} - \vec{v}_{cm}M = 0,\end{aligned} \tag{7-25}$$

por lo cual el marco de referencia del centro de masa, es además el marco donde el momento total es cero. Ello justifica que en la sección 6-5 hayamos elegido la velocidad del centro de masa (compare la ecuación 6-23 con la 7-4) para el marco de referencia en el cual se ve la colisión de dos partículas: sólo en él es cero el momento total de las partículas en colisión antes y después de ella.

Hasta ahora hemos examinado sólo sistemas cuya masa total M permanezca constante. Hay que tener mucho cuidado al aplicar la ecuación 7-23 a sistemas cuya masa pueda cambiar. En la sección 7-6 se explica cómo utilizar la ecuación 7-23 cuando se analizan sistemas de masa variable.

PROBLEMA RESUELTO 7-7. Con una rapidez v de 1,100 m/s, se dispara en dirección horizontal una andanada de balas cuya masa m es de 3.8 g, contra un gran bloque de madera de masa M (12 kg), el cual inicialmente está en reposo sobre una mesa horizontal (véase Fig. 7-16). Si el bloque puede deslizarse sin fricción por ella, ¿qué rapidez adquirirá una vez que haya absorbido ocho balas?

Solución Por ahora consideraremos sólo la dirección horizontal que definimos como el eje x positivo hacia la derecha en la figura 7-16.

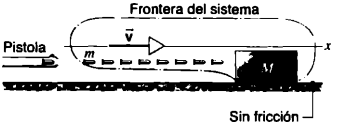


FIGURA 7-16. Problema resuelto 7-7. Una pistola dispara una lluvia de balas contra un bloque de madera. Analizamos el sistema que definimos como el bloque, más las balas que vuelan.

El componente x de la ecuación 7-23 es $\Sigma F_{ext,x} = dP_x/dt$. La fuerza externa neta en el bloque tiene un componente horizontal diferente de cero (debido a las balas), y la fuerza externa neta en la bala tiene un componente horizontal (debido al bloque). Pero si decidimos que el sistema incluya el bloque y las balas, las fuerzas entre ellos serán internas. Ninguna fuerza externa horizontal neta opera en él y por lo mismo el componente x del momento ha de permanecer constante. Hemos identificado la frontera de este sistema en la figura 7-16. El momento inicial (horizontal), medido mientras las balas vuelan y el bloque está en reposo, es

$$P_{i,x} = N(mv),$$

donde mv es el momento de una bala y $N = 8$. El momento horizontal final, medido cuando todas las balas están en el bloque y éste se desliza por la mesa con velocidad horizontal V es

$$P_{f,x} = (M + Nm)V.$$

La conservación del momento exige que

$$P_{i,x} = P_{fx}$$

o bien

$$N(mv) = (M + Nm)V.$$

Al resolver para V se obtiene

$$\begin{aligned}V &= \frac{Nm}{M + Nm}v = \frac{(8)(3.8 \times 10^{-3}\ \text{kg})}{12\ \text{kg} + (8)(3.8 \times 10^{-3}\ \text{kg})}(1{,}100\ \text{m/s}) \\ &= 2.8\ \text{m/s}.\end{aligned}$$

En la dirección vertical, las fuerzas externas son el peso de las balas, el peso del bloque y la fuerza normal en él. Mientras las balas vuelan, adquieren un pequeño componente de momento vertical a causa de la acción de la gravedad. Cuando chocan contra el bloque, éste debe ejercer una fuerza con un componente horizontal y vertical en cada bala. Junto con la fuerza vertical en la bala que se necesita para convertir su momento vertical en cero, deberá de haber (según la tercera ley de Newton) un aumento correspondiente en la fuerza normal que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque. El incremento no sólo se debe al peso de la bala incrustada; hace una contribución adicional debido a la rapidez de cambio del momento vertical de la bala. Cuando todas las balas se detienen respecto al bloque, la fuerza normal será igual a los pesos combinados del bloque y de las balas incrustadas.

Con el fin de simplificar la solución de este problema, hemos supuesto que las balas se disparan con tanta rapidez, que las ocho están en el aire antes que la primera dé en el bloque. ¿Puede resolver el problema sin hacer esta suposición?

Suponga que se agranda la frontera del sistema para que abarque la pistola, la cual está fija a la Tierra. ¿Cambia el momento horizontal de este sistema antes de disparar y después de hacerlo? ¿Hay una fuerza horizontal externa?

PROBLEMA RESUELTO 7-8. Como se advierte en la figura 7-17, un cañón con una masa M de 1,300 kg dispara una bola de 72 kg en dirección horizontal, con una rapidez v de 55 m/s respecto al cañón. Éste está montado de modo que retroceda libremente. *a)* ¿Qué velocidad V tiene el cañón respecto a la Tierra? *b)* ¿Qué velocidad v_E tiene la bola respecto a la Tierra?

Solución *a)* Se establece un sistema coordenado con un eje positivo x a la derecha de la figura 7-17. Nuestro marco de referencia está fijo en relación con la Tierra.

Escogemos el cañón y la bola como nuestro sistema. Al hacerlo, las fuerzas relacionadas al disparo del cañón serán internas al sistema y no es necesario ocuparnos de ellas. Las fuerzas externas que operan sobre el sistema no tienen componentes horizontales. Por tanto, el componente horizontal del momento lineal total ha de permanecer inalterado mientras el cañón dispara.

En función de los vectores, $\vec{v}_E = \vec{v} + \vec{V}$, es decir, la velocidad de la bola respecto a la Tierra es igual a su velocidad respecto al cañón más la velocidad de éste respecto a la Tierra. En la dirección horizontal tenemos $v_{Ex} = v_x + V_x$, donde como se aprecia en la figura, esperamos que el componente x de $\vec{V}$ sea negativo.

En el marco de referencia de la Tierra, el componente horizontal del momento inicial P_{ix} es cero. Después que el cañón dispara, el momento final del sistema en relación con la Tierra es el de la bola más el cañón que retrocede:

$$P_{fx} = MV_x + mv_{Ex} = MV_x + m(v_x + V_x).$$

Con $\Sigma F_{ext,x} = 0$, debemos tener $P_{ix} = P_{fx}$ y, por tanto,

$$MV_x + m(v_x + V_x) = 0.$$

Al resolver para V_x, obtenemos

$$V_x = -\frac{mv_x}{M + m} = -\frac{(72\text{ kg})(55\text{ m/s})}{1{,}300\text{ kg} + 72\text{ kg}} = -2.9\text{ m/s}.$$

El signo negativo nos indica que el cañón retrocede a la izquierda en la figura 7-17, según lo previsto.

b) En relación con la Tierra, el componente horizontal de la velocidad de la bola es

$$v_{Ex} = v_x + V_x$$
$$= 55\text{ m/s} + (-2.9\text{ m/s}) = 52\text{ m/s}.$$

Debido al retroceso, la bola se desplaza un poco más lentamente respecto a la Tierra de lo que lo haría sin retroceso. Nótese que en este problema, es importante seleccionar el sistema (cañón + bola) adecuadamente, y conocer a la perfección el marco de referencia (la Tierra o el cañón que retrocede) a la que se refieren las mediciones.

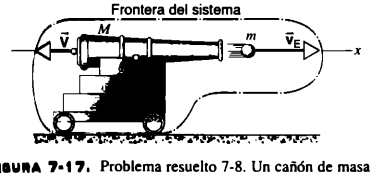


FIGURA 7-17. Problema resuelto 7-8. Un cañón de masa M dispara una bola de masa m. Las velocidades de la bola y el cañón en retroceso se muestran en un marco de referencia fijo respecto a la Tierra. Se supone que las velocidades son positivas a la derecha.

7-6 SISTEMAS DE MASA VARIABLE* (Opcional)

Imagine que la carreta que sostiene el cañón de la figura 7-17 soporta también una gran pila de bolas. Al disparar el cañón varias veces, la carreta (que suponemos se mueve sin fricción) retrocede a la izquierda y con cada retroceso aumenta su rapidez. En la frontera del sistema trazada en la figura 7-17, sabemos que el momento horizontal total debe ser cero y que el sistema no tiene una fuerza horizontal. Pero la afirmación anterior deja de ser verdadera si consideramos un sistema que incluya sólo el cañón más la carreta. El momento del cañón aumenta cada vez que se dispara, y conviene utilizar el conocido lenguaje de la física newtoniana para explicar el cambio de momento, a través de la acción de una fuerza adecuada. En este caso, la que acelera el cañón es una fuerza de reacción: en virtud de su carga explosiva, el cañón empuja las bolas para lanzarlas y la fuerza de reacción (las bolas que empujan el cañón hacia atrás) lo desplazan a la izquierda.

A medida que el cañón dispara varias veces, la masa total de la carreta disminuye según la cantidad de bolas lanzadas. Los métodos del problema resuelto 7-8 no pueden utilizarse directamente para resolver este problema, porque la masa M del objeto en retroceso es distinta cada vez que el cañón dispara.

En este ejemplo, llamamos sistema de "masa variable", al sistema S compuesto por el cañón más la carreta (que incluye las bolas no disparadas). Por supuesto, el sistema más grande S' formado por el cañón, más todas las bolas disparadas, es un sistema de masa constante y un sistema de momento constante (sin fuerza externa). Sin embargo, el sistema más pequeño S no tiene masa constante. Más aún, las bolas lanzadas contienen momento, y se da un flujo neto de momento de S que causa su aceleración.

El ejemplo anterior nos da una imagen mental razonablemente aceptable de cómo funciona un cohete. El combustible se quema y expele con gran rapidez; los productos de la combustión corresponden a las bolas de cañón. El cohete (menos el combustible consumido) experimenta una aceleración que depende de la rapidez con que se queme el combustible y de la rapidez con que se lance.

El análisis de sistemas similares al cohete *no* tiene por objeto examinar la cinemática del sistema entero S'. Por el contrario, nos concentramos en un subsistema particular S y preguntamos cómo se mueve a medida que se redistribuye la masa dentro del sistema entero S' y la masa de S cambia. La masa total dentro de S' permanece constante, pero podemos suponer que el subsistema particular S cambie su estado de movimiento conforme gana o pierde masa (y momento).

La figura 7-18 muestra una vista esquemática de un sistema generalizado. En el tiempo t, el subsistema S tiene una masa M, y se desplaza con velocidad $\vec{v}$ dentro del marco iner-

* Véase en "Force, Momentum Change, and Motion" de Martin S. Tiersten, *American Journal of Physics*, enero de 1969, p. 82, una excelente referencia general sobre los sistemas de masa fija y variable.

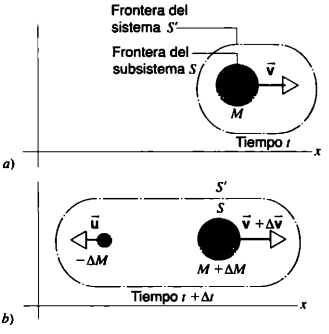


FIGURA 7-18. *a)* Un sistema S' en el tiempo t, consta de una masa M que se desplaza con la velocidad $\vec{v}$. *b)* En el tiempo Δt más tarde, la masa original M ha expulsado una masa $-\Delta M$. La masa restante $M + \Delta M$, que llamamos subsistema S, se mueve ahora con velocidad $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.

cial de referencia desde donde observamos. En el tiempo $t + \Delta t$, la masa de S ha cambiado de ΔM (magnitud negativa, en el caso de la masa expulsada) a $M + \Delta M$, mientras que la masa del sistema entero S' cambió en una cantidad correspondiente $-\Delta M$. Ahora el sistema S se mueve con una velocidad $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, y la materia expulsada lo hace con la una velocidad $\vec{u}$, ambas medidas desde nuestro marco de referencia.

Para generalizar en lo posible la situación, también consideramos una fuerza externa que puede actuar sobre el sistema entero. En el caso de un cohete, no es la fuerza la que lo impulsa (que es una fuerza interna del sistema S'), sino la fuerza debida a algún agente externo, quizá la gravedad o el arrastre atmosférico. El momento total del sistema entero S' es $\vec{P}$, y la segunda ley de Newton puede escribirse

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \tag{7-26}$$

En el intervalo Δt, el cambio del momento $\Delta\vec{P}$ es

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i, \tag{7-27}$$

donde $\vec{P}_f$, es el momento final del sistema S' en el tiempo $t + \Delta t$ y $\vec{P}_i$, el momento inicial de S' en el tiempo t, los cuales están dados por

$$\vec{P}_i = M\vec{v}, \tag{7-28a}$$

$$\vec{P}_f = (M + \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + (-\Delta M)\vec{u}. \tag{7-28b}$$

Por los cuales, el cambio de momento de S' será

$$\begin{aligned}\Delta\vec{P} &= \vec{P}_f - \vec{P}_i \\ &= (M + \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + (-\Delta M)\vec{u} - M\vec{v}.\end{aligned} \tag{7-29}$$

Al reescribir la derivada en la ecuación 7-26 como un límite y al sustituir $\Delta\vec{P}$ por esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ext} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(M + \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + (-\Delta M)\vec{u} - M\vec{v}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + (\vec{v} - \vec{u})\frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta\vec{v}\frac{\Delta M}{\Delta t} \right] \\ &= M\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u})\frac{dM}{dt}.\end{aligned} \tag{7-30}$$

Nótese que, al tomar el límite, desaparece el último término en los corchetes, porque $\Delta\vec{v} \to 0$ como $\Delta t \to 0$. En la ecuación 7-30, M es la masa del subsistema S en el tiempo t, y $d\vec{v}/dt$ es su aceleración conforme gana o pierde masa a una velocidad $\vec{u}$ (en nuestro marco de referencia) y con una rapidez $|dM/dt|$. Si $dM/dt > 0$, aumenta la masa del subsistema; si $dM/dt < 0$, la masa (del subsistema) disminuye.

Podemos escribir la ecuación 7-30 en una forma más didáctica como

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{v}_{rel}\frac{dM}{dt}, \tag{7-31}$$

donde $\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$ es la velocidad de la materia ganada o perdida respecto al subsistema S. Por ejemplo, si el subsistema S es un cohete, $\vec{v}_{rel}$ es la velocidad de los gases expulsados *relativos al cohete*. Ésta es una cantidad razonable que debe introducirse, porque la rapidez de los gases expulsados es una característica fundamental del diseño de un motor de cohete, y no debería expresarse en una forma que dependa de un marco de referencia que no sea el propio cohete.

La ecuación 7-31 indica que la aceleración $d\vec{v}/dt$ del subsistema S (el cohete, por ejemplo), está determinada en parte por la fuerza externa neta, y en parte por el momento que transfiere la masa ganada o perdida. Nótese que $\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$ apunta hacia la izquierda en la figura 7-18; como dM/dt es negativa para un cohete, el segundo término de la ecuación 7-31 está representado por un vector que apunta hacia la derecha y que, por tanto, acelera el subsistema en esa dirección. A este término se le llama *fuerza propulsora* o *empuje* del cohete, y puede interpretarse, como la fuerza que los gases expulsados ejerce sobre él. Este empuje puede aumentarse disminuyendo la rapidez del gas expulsado o la velocidad de expulsión.

Si una masa se expele a velocidad y rapidez constantes en relación con S, el empuje será constante pero no la aceleración, porque M va disminuyendo. Si $dM/dt = 0$, y por lo mismo la masa del subsistema no cambia, la ecuación 7-31 se reduce a la conocida fórmula de la segunda ley de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$.

La analogía entre un cohete y el culatazo de una pistola se observa en la figura 7-19. En todos los casos el momento se conserva en el sistema entero, y consta del de la masa expulsada (balas o combustible), más el del objeto que la expulsa. Cuando nos concentramos en la pistola o en el cohete dentro de un sistema mayor, vemos que su masa cambia y que una fuerza lo impulsa; un culatazo en el caso de una pistola, y un empuje en el caso del cohete. Si contemplamos el sistema desde un marco de

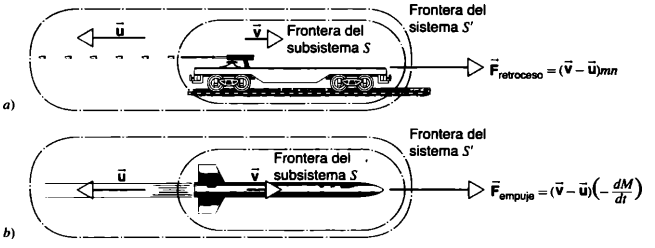


FIGURA 7-19. *a)* Una ametralladora dispara una andanada de balas con una rapidez de n por unidad de tiempo. El momento total del sistema S' permanece constante, pero el subsistema S experimenta una fuerza de retroceso que cambia su momento. El cambio de momento en el tiempo dt, es exactamente igual al momento opuesto $mn\vec{u}\,dt$ que llevan las balas. *b)* El cohete expulsa un flujo de productos de combustión. El momento total del sistema S' permanece constante, pero el subsistema S experimenta un empuje que cambia su momento. El cambio de momento en el tiempo dt, es exactamente igual al momento opuesto $\vec{u}\,dM$ que lleva el gas expulsado.

referencia en el centro de masa, con el paso del tiempo habrá más masa lanzada y se habrá desplazado más a la izquierda en la figura 7-19, lo cual significa que el objeto deberá moverse a la derecha para conservar fijo el centro de masa.

PROBLEMA RESUELTO 7-9. Una nave espacial con una masa total de 13,600 kg, se desplaza respecto a cierto marco de referencia inercial con una rapidez de 960 m/s en una región de gravedad despreciable. Enciende los motores de sus cohetes para generar una aceleración paralela a la velocidad inicial. Los cohetes expulsan gas a una velocidad constante de 146 kg/s, con una rapidez constante (en relación con la nave) de 1,520 m/s, y se mantienen encendidos hasta que se queman y expulsan 9,100 kg de combustible. *a)* ¿Qué empuje producen los cohetes? *b)* ¿Qué velocidad alcanza la nave después que han consumido todo el combustible?

Solución *a)* El empuje está dado por el último término de la ecuación 7-31. Su magnitud es

$$F = \left| v_{rel} \frac{dM}{dt} \right| = (1{,}520 \text{ m/s})(146 \text{ kg/s}) = 2.22 \times 10^5 \text{ N}.$$

b) Si suponemos que la dirección positiva x es la de la velocidad inicial de la nave, podemos escribir la ecuación 7-31 (con $\Sigma \vec{F}_{ext} = 0$) así:

$$M \frac{dv_x}{dt} = v_{rel,x} \frac{dM}{dt}.$$

Como el gas se expulsa respecto al cohete en una dirección contraria a su velocidad (que es la dirección positiva x), $v_{rel,x}$ es negativa. Puesto que dM/dt también lo es, el lado derecho de la ecuación es positiva y la velocidad de la nave aumenta. Al reescribir la ecuación como $dv_x = v_{rel,x}\,(dM/M)$, podemos integrar en el lado izquierdo de la velocidad inicial de 960 m/s a la velocidad final que queremos determinar. En la derecha integramos desde la masa inicial (13,600 kg) a la masa final (13,600 kg − 9,100 kg = 4,500 kg)

$$\int_{v_{ix}}^{v_{fx}} dv_x = v_{rel,x} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

que podemos evaluar como

$$v_{fx} - v_{ix} = v_{rel,x} \ln \frac{M_f}{M_i}. \qquad (7\text{-}32)$$

Al resolver para v_{fx} obtenemos

$$v_{fx} = 960 \text{ m/s} + (-1{,}520 \text{ m/s}) \ln \frac{4{,}500 \text{ kg}}{13{,}600 \text{ kg}} = 2{,}640 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA RESUELTO 7-10. Con una velocidad de 0.134 kg/s cae arena de un tanque alimentador estacionario a una banda transportadora que se mueve con una rapidez de 0.96 m/s, según se aprecia en la figura 7-20. ¿Qué fuerza neta debe aplicarse a la banda para que se mueve con rapidez constante?

Solución Decidimos que la dirección del movimiento de la correa sea la dirección positiva x, y en el laboratorio fijamos el sistema coordenado que localiza nuestro marco inicial de referencia (donde el tanque alimentador está en reposo). El sistema S' incluye la banda y toda la arena del tanque. El subsistema S representa la banda y sólo la arena que ha caído en él. La masa de S aumenta ($dM/dt > 0$) a medida que sigue cayendo más arena en la banda.

Podemos aplicar la ecuación 7-31 a esta situación, con $dv_x/dt = 0$ (porque la banda se mueve con velocidad constante), y también con

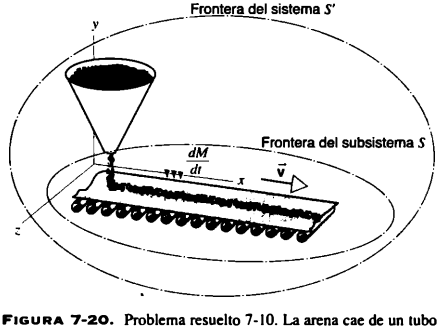


FIGURA 7-20. Problema resuelto 7-10. La arena cae de un tubo alimentador con una rapidez dM/dt en la banda transportadora que se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ dentro del marco de referencia del laboratorio.

$u_x = 0$, porque la arena que cae no tiene un componente de velocidad en la dirección x. Por tanto, $v_{rel,x} = -v_x$, es decir, un observador que fuera en la banda, podría ver salir la tierra del tanque alimentador (también el tanque) y desplazarse en la dirección negativa x. Al resolver para la fuerza externa neta, encontramos

$$\sum F_{ext,x} = -v_{rel,x}\frac{dM}{dt} = v_x\frac{dM}{dt} = (0.96\ \text{m/s})(0.134\ \text{kg/s})$$
$$= 0.129\ \text{N}.$$

La fuerza tiene un componente positivo x, es decir, debe aplicarse en la dirección del movimiento de la banda para aumentar de 0 a 0.96 m/s el componente x de la velocidad en cada grano de arena que caiga en la banda.

PCIÓN MÚLTIPLE

7-1 Movimiento de un objeto complejo

7-2 Sistemas de dos partículas

1. Dos discos sin fricción están unidos por una banda de goma. Uno de ellos es proyectado sobre una mesa de aire, la banda se tensa y el segundo disco sigue aleatoriamente al primero. El centro de masa de este sistema de dos partículas se halla
   A) en una distancia fija respecto a uno de los discos.
   B) generalmente entre los dos discos.
   C) en una distancia de uno de los discos, que es una relación fija a la que existe entre los dos discos.
   D) algunas veces más cerca de un disco y otras más cerca del otro.

2. Dos objetos se desplazan por una superficie. El centro de masa existe sólo si
   A) los dos objetos están conectados físicamente.
   B) la superficie es plana.
   C) la superficie no tiene fricción.
   D) existe siempre un centro de masa.

3. Dos objetos se hallan en una superficie plana y sin fricción. No están conectados ni se tocan. Una fuerza F se aplica a *uno* de ellos que se mueve con aceleración a. ¿Cuál de los siguientes enunciados es el más correcto?
   A) El concepto de centro de masa no puede aplicarse, porque la fuerza externa no actúa sobre los dos objetos.
   B) El centro de masa se mueve con una aceleración que podría ser mayor que a.
   C) El centro de masa se mueve con una aceleración que debe ser igual que a.
   D) El centro de masa se mueve con una aceleración que debe ser menor que a.

4. Dos objetos de masas desiguales están conectados por una cuerda ligera que pasa por encima de una polea. A uno de los objetos se le da velocidad inicial hacia arriba. El centro de masa de los dos objetos
   A) se acelerarán hacia arriba o hacia abajo dependiendo de la masa relativa de los dos objetos.
   B) se acelera hacia arriba sólo si ha llegado al punto más alto.
   C) se acelera hacia abajo a un valor menor que g.
   D) se acelera hacia abajo con valor de g.

5. Dos objetos de igual masa están conectados por un resorte comprimido. Se lanza el objeto combinado verticalmente al aire. En el punto más alto de la trayectoria se suelta el resorte, por lo cual uno de los objetos es proyectado aún más alto en el aire; el resorte permanece unido al otro objeto. Poco después de soltarse el resorte, el centro de masa de los objetos
   A) se desplaza y acelera hacia arriba.
   B) se desplaza hacia arriba pero acelera hacia abajo.
   C) se desplaza hacia abajo pero acelera hacia arriba.
   D) se desplaza y acelera hacia abajo.
   E) No cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

7-3 Sistemas de muchas partículas

6. Tres objetos están en una mesa. Podemos determinar el centro de masa
   A) combinando los tres de acuerdo con la ecuación 7-12.
   B) combinando los dos objetos más ligeros, primero según la ecuación 7-12 y llamándolos "partícula" nueva, y luego combinando el tercer objeto con ella.
   C) combinando primero los dos objetos más pesados, primero llamándolos "partícula" nueva, y después combinando con ella el tercer objeto.
   D) cualquiera de los métodos anteriores son equivalentes.

7. Siete patos idénticos vuelan al Sur con rapidez constante. Un cazador le dispara a uno; éste muere de inmediato y cae al suelo. Los otros seis siguen volando al Sur con la rapidez original. Después que un pato ha caído al suelo, el centro de masa de los siete
   A) se dirige al Sur con la rapidez inicial, sólo que ahora está un poco rezagado de los otros.
   B) se dirige al Sur, sólo que a $\frac{6}{7}$ de su rapidez original.
   C) se dirige al Sur, sólo que a $\frac{1}{7}$ de su rapidez original.
   D) se detiene con el pato muerto.

8. Mida la altura a que una persona puede saltar por la que alcanza su cabeza sobre el nivel del suelo. ¿Puede alguien saltar más alto con las manos fijas arriba de la cabeza o en sus costados?
   A) Con las manos fijas sobre la cabeza.
   B) Con las manos fijas en los costados.
   C) El resultado es el mismo en ambos casos.
   D) La respuesta depende del tamaño relativo de las manos de la persona en comparación con su masa global.

7-4 Centro de masa de los objetos sólidos

9. Un cuerpo sólido tiene un centro de masa en su interior. Se perfora un hoyo en una parte del cuerpo, pero no cerca del centro de masa. Una vez hecho el hoyo, el centro de masa del resto del cuerpo se desplaza de su posición original
   A) lejos del hoyo. B) hacia el hoyo.
   C) no la deja. D) en dirección aleatoria.

10. Considere el problema resuelto 7-6. Se suelta la bola interna que rueda durante un tiempo corto dentro de la concha esférica antes de detenerse. Durante ese tiempo el centro de masa
    A) se mueve horizontal y verticalmente.
    B) se mueve horizontal y verticalmente, pero vuelve a la posición horizontal original cuando el sistema se detiene.
    C) se mueve sólo de manera vertical.
    D) se mueve verticalmente pero hacia abajo, porque el centro de masa nunca se mueve hacia arriba.

7-5 Conservación del momento en un sistema de partículas

11. Un sistema de N partículas está libre de fuerzas externas.
    a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero respecto a la magnitud del momento total del sistema?
    A) Debe ser cero.
    B) Podría ser no cero, pero ha de ser constante.
    C) Podría ser no cero y tampoco constante.
    D) La respuesta depende de la naturaleza de las fuerzas internas del sistema.
    b) ¿Cuál de los siguientes enunciados ha de ser verdadero respecto a la suma de las *magnitudes* de los momentos de las partículas en el sistema?
    A) Debe ser cero.
    B) Podría ser no cero, pero ha de ser constante.
    C) Podría ser no cero y tampoco constante.
    D) Podría ser cero, aunque la magnitud de momento total no sea cero.
12. Con una rapidez inicial v_0 un vagón aislado de ferrocarril de masa M va sobre una vía recta y sin fricción. Pasa debajo de un puente cuando una caja llena de N bolas de boliche, cada una con una masa m, cae del puente en la plataforma del vagón. La caja se rompe y las bolas rebotan en el interior del vagón, pero ninguna sale de él.
    a) ¿Se conserva en esta colisión el momento del sistema de vagón + bolas de boliche?
    A) Sí, el momento se conserva íntegramente.
    B) Sólo se conserva el componente del momento en la dirección vertical.
    C) Sólo se conserva el componente del momento paralelo a la vía.
    D) No se conservan los componentes.
    b) ¿Cuál es la velocidad promedio del sistema vagón + bolas de boliche un poco después de la colisión?
    A) $(M + Nm)v_0/M$ B) $Mv_0/(Nm + M)$
    C) Nmv_0/M
    D) La rapidez no puede determinarse, porque no se dispone de suficiente información.
13. Un vagón aislado de ferrocarril, que originalmente se desplaza con una rapidez v_0 en una vía recta, plana y sin fricción, contiene gran cantidad de arena. Se descompone una válvula de escape en el fondo del vagón, y la arena comienza a salir y *a caer* en el suelo en línea recta.
    a) ¿Se conserva el momento en este proceso?
    A) Se conserva el momento sólo del vagón.
    B) Se conserva el momento del vagón + la arena que queda en él.
    C) Se conserva el momento del vagón + *toda* la arena, la que queda en él y la que sale.
    D) Ninguno de los tres sistemas anteriores tiene conservación del momento.
    b) ¿Qué sucede con la rapidez del vagón a medida que la arena se sale y cae?
    A) El vagón empieza a rodar más rápido.
    B) El vagón mantiene su velocidad.
    C) El vagón comienza a reducir su velocidad.
    D) El problema no puede resolverse, porque no se conserva el momento.

7-6 Sistemas de masa variable* (Opcional)

PREGUNTAS

1. Un canotista en una laguna tranquila puede llegar a la orilla tirando con fuerza de la cuerda atada a la proa de la canoa. ¿Cómo explica esto? (Realmente puede hacerse.)
2. ¿Cómo podría una persona sentada en una superficie horizontal sin fricción salirse de ella?
3. Una caja se encuentra en una superficie plana y sin fricción. Un pequeño cañón de resorte, capaz de disparar una masa de barro, se introduce en la caja en una cuerda amarrada al techo. Antes de disparar el cañón, el centro de masa del cañón, del barro y de la caja está fijo en un punto A. El cañón dispara; la masa de barro sale del cañón y se pega a la pared de la caja. ¿Se mueve el centro de masa del cañón, del barro y de la caja? Explique su respuesta.
4. ¿El centro de masa de un objeto está necesariamente dentro de él? Si su respuesta es negativa, dé ejemplos.
5. La figura 7-21 muestra *a)* un prisma triangular isósceles, y *b)* un cono circular recto cuyo diámetro tiene la misma longitud que la base del triángulo. El centro de masa de este último, es una tercera parte de la distancia entre la base y la cúspide, mientras que el del cono es apenas una cuarta parte. ¿Puede explicar la diferencia?

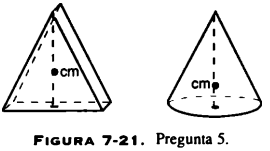


FIGURA 7-21. Pregunta 5.

6. ¿Cómo se relaciona el concepto de centro de masa con el de centro geográfico de un país? ¿Y con su centro demográfico? ¿Qué conclusión puede extraer del hecho de que el centro geográfico y el centro demográfico sean diferentes?
7. ¿Dónde se encuentra el centro de masa de la atmósfera terrestre?

8. El centro de masa de una lata llena de refresco está aproximadamente en el centro. *a*) Parte del refresco se consume y la lata vuelve a colocarse en la mesa. ¿Qué sucede con el centro de masa del sistema lata + refresco? *b*) Con el tiempo se consume todo el refresco y la lata vuelve a colocarse en la mesa. ¿Qué sucede con el centro de masa de la lata? Consulte el problema 5.
9. Un escultor aficionado decide esculpir un pájaro (Fig. 7-22). Para su fortuna, logra que el modelo final no se mueva. Está formado por una hoja gruesa de metal de espesor uniforme. De los puntos mostrados en la figura, ¿cuál tiene mayor probabilidad de ser el centro de masa?

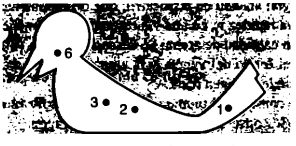


FIGURA 7-22. Pregunta 9.

10. Alguien afirma que cuando un saltador hábil libra la barra, su centro de masa pasa por debajo de ella. ¿Es posible eso?
11. Una bailarina de ballet al realizar un gran salto (véase Fig. 7-23) parece flotar horizontalmente en la posición central de su salto. Demuestre cómo puede mover sus piernas en el vuelo para que, aunque su centro de masa siga la trayectoria parabólica esperada, la parte superior de su cabeza se mueva más o menos en dirección horizontal. (Véase "Physics of Dance" de Kenneth Laws, *Physics Today*, febrero de 1985, p. 24.)

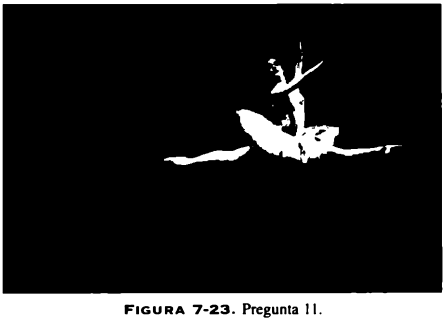


FIGURA 7-23. Pregunta 11.

12. ¿Puede un velero ser impulsado por el aire que sopla contra las velas desde un ventilador instalado en él? Explique su respuesta.
13. Si sólo una fuerza externa puede cambiar el estado de movimiento del centro de masa de un cuerpo, ¿por qué la fuerza interna de los frenos puede detener un automóvil?
14. Un hombre está de pie en una gran capa de hielo resbaladizo; sostiene en una mano un petardo encendido. Lo arroja en un ángulo (es decir, no verticalmente) al aire. Describa de manera breve y con la mayor exactitud posible, el movimiento del centro de masa del petardo y el del centro de masa del sistema formado por el hombre y el petardo. Sería muy útil describirlos durante los siguientes periodos: *a*) después que arroje el petardo pero antes que explote; *b*) entre la explosión y el primer fragmento del petardo que caiga en el hielo; *c*) entre el primer fragmento que caiga en el hielo y el último, y *d*) durante el tiempo en que los fragmentos caen al suelo, pero sin que ninguno haya llegado al borde del hielo.
15. Arroja usted un cubo de hielo con una velocidad $\bar{v}$ hacia un espacio sin gravedad y vacío. El cubo se funde poco a poco y se transforma en agua, y luego hierve y se convierte en vapor. *a*) ¿Es un sistema de partículas todo el tiempo? *b*) Si lo es, ¿es el mismo sistema de partículas? *c*) ¿Pasa el movimiento del centro de masa por cambios abruptos? *d*) ¿Cambia el momento lineal total?
16. Una caja vacía está sobre una mesa sin fricción. Perfora usted un hoyo pequeño en una cara para que entre aire (véase Fig. 7-24). ¿Cómo se moverá la caja? ¿Qué argumento utilizó para llegar a su respuesta?

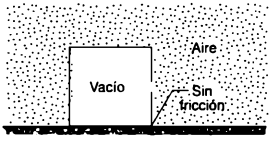


FIGURA 7-24. Pregunta 16.

17. Un vagón de plataforma se halla al inicio en reposo. Lo ocupan N personas de peso w cada una. Si corren una tras otra paralelamente a las vías con una velocidad relativa v_{rel} y si saltan de él, ¿le imparten mayor velocidad que si todos corrieran y saltaran al mismo tiempo?
18. ¿Se le ocurren otros sistemas de masa variable además de los ejemplos que se dan en el libro?
19. No es correcto emplear la ecuación $\Sigma\, \bar{F}_{ext} = d(M\bar{v})/dt$ con un sistema de masa variable. Para demostrarlo, *a*) ponga la ecuación en la forma $(\Sigma\, \bar{F}_{ext} - M d\bar{v}/dt)(dM/dt) = \bar{v}$, y *b*) pruebe que un lado de ella tiene el mismo valor en todos los marcos de referencia inerciales donde el otro no lo tenga. Por tanto, generalmente la ecuación no será válida. *c*) Demuestre que la ecuación 7-31 no origina contradicción alguna.
20. En 1920, un importante periódico criticó en un artículo los innovadores experimentos con cohetes que realizó Robert H. Goddard; se rechazaba la idea de que un cohete pudiera operar en el vacío: "El profesor Goddard, en su 'cátedra' del Clark College y con el apoyo del Smithsonian Institution, no conoce la relación entre acción y reacción; tampoco conoce la necesidad de tener algo mejor que un vacío contra el cual reaccionar. Sería absurdo decir eso. Da la impresión de que sólo ignora los conocimientos que normalmente se imparten en los planteles de enseñanza media". ¿Por qué este argumento es erróneo?
21. La velocidad final de la última etapa de un cohete multietapas es mucho más elevada que la de un cohete de una sola etapa que tenga la misma masa total y suministro de combustible. Explique este hecho.
22. ¿Puede un cohete alcanzar una velocidad mayor que la de los gases de escape que lo impulsan? Explique su respuesta, ya sea afirmativa o negativa.
23. ¿Hay métodos posibles de propulsión en el espacio exterior que no sean los cohetes? Si los hay, ¿cuáles son y por qué se emplean?

24. La ecuación 7-32 sugiere que la rapidez de un cohete puede aumentar sin límite si se quema bastante combustible. ¿Es razonable esto? ¿Cuál es el límite de aplicabilidad de la ecuación 7-32? ¿En qué parte del desarrollo para obtener la ecuación 7-32 introdujimos el límite? (Consúltese "The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with Variable Rest Mass", de Kalman B. Pomeranz, *American Journal of Physics*, diciembre de 1964, p. 955.)

EJERCICIOS

7-1 Movimiento de un objeto complejo

7-2 Sistemas de dos partículas

1. ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el centro de masa del sistema Tierra-Luna? (En el apéndice C obtenga la masa de la Tierra y de la Luna, y la que existe entre sus centros. ¿Es interesante comparar la respuesta con el radio terrestre?)
2. Demuestre que la relación de las distancias x_1 y x_2 de las dos partículas a partir del centro de masa es la relación inversa de sus masas, esto es, $x_1/x_2 = m_2/m_1$.
3. Un Plymouth con masa de 2,210 kg, recorre un tramo recto de la carretera a 105 km/h. Lo sigue un Ford con masa de 2,080 kg que avanza a 43.5 km/h. ¿Con qué velocidad se mueve el centro de masa de los dos vehículos?
4. Dos patinadores, uno con una masa de 65 kg y el otro con una masa de 42 kg, están agarrados de un palo de 9.7 m de largo y de masa despreciable sobre una pista de hielo. Partiendo de los extremos del palo, tirando de él se acercan hasta encontrarse. ¿Qué distancia recorrerá el patinador de 42 kg?
5. Dos partículas P y Q están inicialmente en reposo a una distancia de 1.64 m. P tiene una masa de 1.43 kg y Q una masa de 4.29 kg. Las dos partículas se atraen con una fuerza constante de 1.79×10^{-2} N. Sobre el sistema no operan fuerzas externas. *a*) Describa el movimiento del centro de masa. *b*) ¿A qué distancia de la posición original de P chocarán las partículas?
6. Con una arma se dispara una bala a una velocidad inicial de 466 m/s, en un ángulo de 57.4° con la horizontal. En la parte más elevada de la trayectoria, la bala explota y produce dos fragmentos de igual masa. Uno de ellos, cuya rapidez inmediatamente después de la explosión es cero, cae en dirección vertical. ¿A qué distancia de la pistola caerá el otro fragmento, suponiendo que el terreno sea plano?
7. Un perro que pesa 10.8 lb está en un bote y se encuentra a 21.4 ft de la orilla. Camina 8.50 ft hacia ella y luego se detiene. El bote pesa 46.4 lb, y podemos suponer que no hay fricción con el agua. ¿A qué distancia se hallará de la orilla al final de este tiempo? (*Sugerencia*: El centro de masa del bote + perro no se mueve. ¿Por qué?) La orilla también está a la izquierda en la figura 7-25.

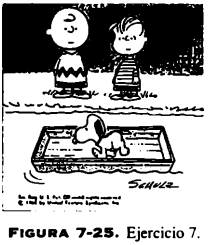


FIGURA 7-25. Ejercicio 7.

8. En el lago George, Ricardo, que tiene una masa de 78.4, y Judith quien pesa menos, disfrutan el atardecer en una canoa de 31.6 kg. Cuando está en reposo en aguas tranquilas, cambian de asientos que están a 2.93 m de distancia y simétricos respecto al centro de la canoa. Ricardo se da cuenta de que la canoa se movió 41.2 cm en relación con un tronco sumergido y calcula la masa de Judith. ¿Cuál es?
9. Un hombre de 84.4 kg está de pie en la parte trasera de un barco rompehielos de 425 kg; éste cruza el hielo a 4.16 m/s, que puede considerarse sin fricción. Decide caminar hacia el frente del barco de 18.2 m de largo, y lo hace con una rapidez de 2.08 m/s relativa al barco. ¿Qué distancia cubre el barco a través del hielo mientras él camina?

7-3 Sistemas de muchas partículas

10. ¿Dónde está el centro de masa de las tres partículas que aparecen en la figura 7-26?

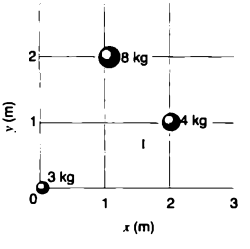


FIGURA 7-26. Ejercicio 10.

11. En una molécula de amoniaco (NH_3), los tres átomos de hidrógeno (H) forman un triángulo equilátero; la distancia entre los centros de los átomos es 16.28×10^{-11} m, de modo que el centro del triángulo está 9.40×10^{-11} m respecto a cada átomo. El átomo de nitrógeno (N) se encuentra en la cúspide de la pirámide, y los tres hidrógenos constituyen la base (véase Fig. 7-27). La distancia nitrógeno/hidrógeno es 10.14×10^{-11} m, y la relación de masa atómica nitrógeno/hidrógeno es 13.9. Localice el centro de masa respecto al átomo de nitrógeno.

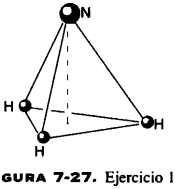


FIGURA 7-27. Ejercicio 11.

12. Considere el problema resuelto 7-3. Se observa que el fragmento de 6.5 kg se desplaza $t = 1.42$ s, con una velocidad cuyo componente horizontal es 11.4 m/s, en la misma dirección que el lanzamiento del proyectil original, y cuyo componente vertical es 4.6 m/s hacia abajo. Calcule la velocidad del fragmento de 3.1 kg en ese momento.

7-4 Centro de masa de los objetos sólidos

13. Tres varillas delgadas de longitud L están dispuestas en una U invertida, como se aprecia en la figura 7-28. Las dos en los brazos de la U tienen una masa M; la tercera tiene una masa $3M$. ¿Dónde está el centro de masa del sistema?

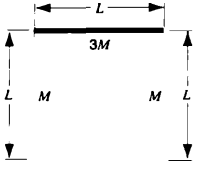


FIGURA 7-28. Ejercicio 13.

14. La figura 7-29 contiene una losa compuesta con las dimensiones 22.0 cm × 13.0 cm × 2.80 cm. Una mitad está hecha de aluminio (densidad = 2.70 g/cm^3), y la otra de hierro (densidad = 7.85 g/cm^3) como se muestra en la figura. ¿Dónde se halla el centro de masa de la losa?

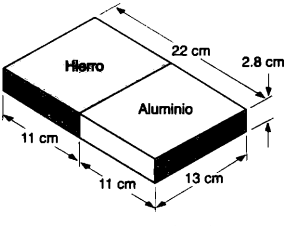


FIGURA 7-29. Ejercicio 14.

15. Una caja abierta en la parte superior, tiene forma de cubo con una longitud de borde de 40 cm, y está hecha de una placa metálica delgada. Encuentre las coordenadas del centro de masa de la caja respecto al sistema coordenado de la figura 7-30.

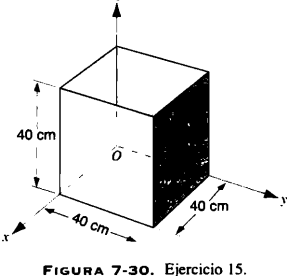


FIGURA 7-30. Ejercicio 15.

7-5 Conservación del momento en un sistema de partículas

16. Un vaso en reposo explota en tres pedazos. Dos de ellos, uno con el doble de masa que el otro, saltan perpendicularmente entre sí con la misma velocidad de 31.4 m/s. El tercero tiene el triple de masa del pedazo más ligero. Determine la magnitud y la dirección de su velocidad de inmediato después de la explosión. (Especifique la dirección, dando el ángulo con la línea de recorrido del pedazo más pequeño.)

17. Cada minuto, una ametralladora especial de juguete de un celador dispara 220 balas de goma de 12.6 g, con una velocidad inicial de 975 m/s. ¿Cuántas balas habrá disparado contra un animal de 84.7 kg que se lanza contra el celador a una velocidad de 3.87 m/s, a fin de detener al animal? (Suponga que las balas se desplazan horizontalmente y que caen al suelo después de dar en el blanco.)

18. Un vagón de plataforma avanza por una vía plana sin fricción a una rapidez de 45 m/s. En el carro está montado un cañón que apunta hacia adelante, y que dispara balas de 65 kg con una velocidad inicial de 625 m/s. La masa total del vagón, del cañón y del gran suministro de bolas es de 3,500 kg. ¿Cuántas bolas deben dispararse para que el vagón se aproxime lo más posible a un paro total?

19. Doce contenedores de 100.0 kg de piezas de cohete en el espacio vacío, están sujetos de manera poco firme con correas atadas en un punto común. El centro de masa de los 12 contenedores se encuentra originalmente en reposo. Una masa de 50 kg de "sustancia espacial pegajosa" que va a 80 m/s, choca contra uno de ellos y se adhiere a él. *a*) Suponiendo que ninguna de las correas se rompa, calcule la rapidez del centro de masa de los 12 contenedores después de la colisión con la sustancia espacial. *b*) Suponiendo ahora que no rompa la correa del contenedor golpeado, determine la rapidez del centro de masa de los 12 contenedores después de la colisión.

7-6 Sistemas de masa variable* (Opcional)

20. Un cohete en reposo en el espacio, donde prácticamente no existe gravedad, tiene una masa de 2.55×10^5 kg, de la cual 1.81×10^5 kg es combustible. El motor lo consume con una rapidez de 480 kg/s, y la rapidez de descarga es 3.27 km/s. Se enciende el motor durante 250 s. *a*) Determine el empuje del motor del cohete. *b*) ¿Cuál es la masa del cohete después de la combustión del motor? c) ¿Cuál es la velocidad final alcanzada?

21. Considere un cohete en reposo en el espacio vacío. ¿Cuál debe ser su relación de masa (relación de la masa inicial a la final) para que, tras encender el motor, la rapidez del cohete sea *a*) igual a la velocidad de descarga, y *b*) igual al doble de la velocidad de descarga?

22. Durante una misión lunar, a mitad del curso hay que efectuar una corrección de 22.6 m/s en la velocidad de la nave que va a 388 m/s. La rapidez de descarga del motor es de 1,230 m/s. ¿Qué fracción de la masa inicial de la nave debe desecharse como gases de escape?

23. Se lanza en dirección vertical un cohete de masa 1.11×10^5 kg, 8.70×10^4 kg de la cual es combustible. Éste se quemará con una rapidez constante de 820 kg/s. Con respecto al cohete, ¿cuál es la rapidez mínima de descarga que permite la elevación en el lanzamiento?

24. Un tobogán de 5.4 kg que contiene 35 kg de arena, se desliza del reposo por una pendiente congelada de 93 m de largo con una inclinación de 26° debajo de la horizontal. La tierra se escurre

de la parte posterior del tobogán a 2.3 kg/s. ¿Cuánto tarda el tobogán en llegar al fondo de la pendiente?

25. Un vagón de carga, abierto en la parte superior, pesa 9.75 ton métricas y se desliza por una vía plana con fricción despreciable a 1.36 m/s cuando empieza a llover fuerte. Las gotas caen verticalmente respecto al suelo. ¿Qué rapidez alcanza el vagón cuando ha recibido 0.50 ton métricas de lluvia? ¿Qué suposición se requiere para contestar la pregunta?

PROBLEMAS

1. Un hombre de masa m se sujeta a una escalera de cuerdas suspendida debajo de un globo aerostático de masa M (véase Fig. 7-31). Éste es estacionario respecto al suelo. *a*) Si el hombre empieza a trepar la escalera con una rapidez v (respecto a ella), ¿se moverá el globo? *b*) ¿Cuál es el estado de movimiento después que el hombre deja de trepar?

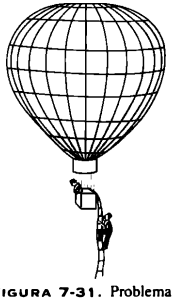


FIGURA 7-31. Problema 1.

2. Dos cuerpos constituidos por pesos de un conjunto, están conectados por un cable que pasa sobre una polea sin fricción y con un diámetro de 56.0 mm. Ambos se encuentran en el mismo nivel. Cada uno tiene originalmente una masa de 850 g. *a*) Localice su centro de masa. *b*) Se transfieren 34 g de un cuerpo a otro, pero se impide que los cuerpos se muevan. Localice el centro de masa. *c*) Ahora se sueltan los dos cuerpos. Describa el movimiento del centro de masa y determine su aceleración.

3. Una cadena uniforme y flexible de longitud L, con un peso por unidad de longitud λ, pasa por una clavija pequeña y sin fricción (véase Fig. 7.32). Se suelta de la posición de reposo con una longitud de la cadena x que cuelga de un lado, y con una longitud $L - x$ en el otro lado. Determine la aceleración a en función de x.

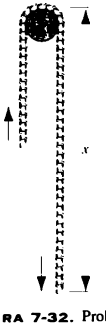


FIGURA 7-32. Problema 3.

4. Un cañón y un suministro de bolas están dentro de un vagón sellado de longitud L, como se indica en la figura 7-33. El cañón dispara hacia la derecha; el vagón retrocede a la izquierda. Las bolas permanecen en el vagón después de golpear la pared lejana. *a*) Después que todas las bolas han sido disparadas, ¿cuál es la mayor distancia a que el vagón puede haberse movido de su posición original? *b*) ¿Cuál es su rapidez después de disparar todas las bolas?

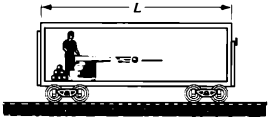


FIGURA 7-33. Problema 4.

5. Un tanque cilíndrico de almacenamiento está inicialmente lleno con gasolina para avión. Después se vacía a través de una válvula colocada en el fondo (véase Fig. 7-34). *a*) A medida que se extrae gasolina, describa cualitativamente el movimiento del centro de masa del tanque y sus contenidos remanentes. *b*) ¿Qué altura x tendrá la gasolina en el tanque cuando su centro de masa y sus contenidos remanentes alcanzan su punto más bajo? Exprese su respuesta en función de H, la altura del tanque; M, *su masa*, y m, la masa de la gasolina que puede contener.

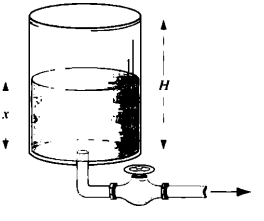


FIGURA 7-34. Problema 5.

6. Localice el centro de masa de una placa semicircular homogénea. Suponga que R es el radio del círculo.

7. Un cañón de 1.400 kg que dispara un proyectil de 70.0 kg con una rapidez inicial de 556 m/s, se coloca con un ángulo de elevación de 39.0° arriba de la horizontal. El cañón está montado en rieles sin fricción, de manera que retrocede libremente. *a*) ¿Qué rapidez tiene el proyectil respecto a la Tierra? *b*) ¿A qué ángulo con el suelo se lanza el proyectil? (*Sugerencia*: El componente horizontal del momento permanece inalterado al dispararse el cañón.)

8. Una plataforma de cohete con una masa de 2,870 kg, se desplaza a 252 m/s sobre unos rieles. En cierto momento, una paleta de la plataforma se introduce en una pileta de agua situada entre las vías, y vierte agua en un tanque vacío de la plataforma. Determine la rapidez de la plataforma después de haber vaciado 917 kg de agua.
9. Para mantener en movimiento una banda transportadora cuando lleva equipaje, se requiere una mayor fuerza impulsora que cuando está vacía. ¿Qué fuerza adicional se necesita si la banda se mueve con una rapidez constante de 1.5 m/s, y si el equipaje se pone y se extrae en un extremo de la banda a 20 kg/s? Suponga que el equipaje se deposita verticalmente en la banda; las personas que recogen el equipaje lo toman, y lo colocan en reposo respecto a sí mismas antes de quitarlo de la banda.
10. Se prepara un cohete de 5,860 kg para dispararlo verticalmente. La rapidez de descarga es de 1.17 km/s. ¿Cuánto gas debe expelerse cada segundo para obtener el empuje necesario *a*) que supere el peso del cohete, y *b*) que le dé una aceleración inicial hacia arriba de 18.3 m/s^2? Nótese que, a diferencia de la situación descrita en el problema resuelto 7-9, la gravedad está presente aquí como una fuerza externa.
11. Dos barcazas largas flotan en la misma dirección en aguas tranquilas, una con una rapidez de 9.65 km/h y la otra con una rapidez de 21.2 km/h. En el momento en que se encuentran una al lado de la otra, con palas se arroja carbón de una a otra con una rapidez de 925 kg/min (véase Fig. 7-35). ¿Qué fuerza adicional deben generar los motores de las barcazas si se quiere que ninguna cambie de velocidad? Suponga que siempre se palea en perfecta dirección lateral, y que las fuerzas de fricción entre las barcazas y el agua no dependen de su peso.

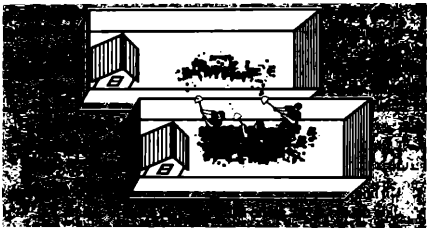


FIGURA 7-35. Problema 11.

12. Una cuerda flexible inextensible de longitud L, se enrolla en un tubo suave donde encaja ajustado. El tubo tiene un doblez en ángulo recto y está colocado en el plano vertical, de modo que un brazo es vertical y el otro horizontal. Inicialmente en $t = 0$, una longitud y_0 de la cuerda cuelga en el brazo vertical. Se suelta la cuerda y resbala por el tubo, de modo que en un tiempo subsecuente t se desplaza con una rapidez dy/dt, donde $y(t)$ es la longitud de la cuerda que entonces cuelga verticalmente. *a*) Demuestre que, en términos del problema de masa variable, $v_{rel} = 0$ y que, por tanto, la ecuación del movimiento tiene la forma $m dv/dt = F_{ext}$. *b*) Demuestre que la ecuación específica del movimiento es $d^2y/dt^2 = gy/L$. *c*) Demuestre que

$$y = (y_0/2)(e^{\sqrt{g/L}\,t} + e^{-\sqrt{g/L}\,t})$$

es una solución de la ecuación del movimiento —por sustitución en *b*)— y explique la solución.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Un cohete de tamaño mediano tiene una masa de 4,000 kg cuando está vacío, y puede contener 27,000 kg de combustible y oxidante. El motor consume combustible con una rapidez de 230 kg/s, y la rapidez de los gases de escape es una constante de 2,500 m/s. Suponga que el cohete se lanza verticalmente, y que la fricción del aire es mínima. Resuelva numéricamente para la trayectoria del cohete. Incluya los efectos provocados por la variación de la

$$g = (9.8\ \text{m/s}^2)\left(\frac{R_E}{R_E + y}\right)^2,$$

aceleración en caída libre con la altitud, donde y es la altitud del cohete sobre el suelo y R_E es el radio de la Tierra. *a*) ¿A qué altitud ocurre la extinción? *b*) ¿Cuál es la rapidez del cohete en esa altitud? *c*) ¿Cuál será el punto más alto de la trayectoria?

CINEMÁTICA ROTACIONAL

Hasta ahora hemos estudiado exclusivamente el movimiento traslacional *de los objetos. Analizamos los cuerpos rígidos sólidos (como un bastón lanzado), y los sistemas donde las partes del cuerpo están en movimiento relativo (por ejemplo, un cañón y la bola que arroja).*

El movimiento más general de un cuerpo rígido incluye movimientos rotacionales y traslacionales; en este capítulo comenzaremos considerándolo. Describiremos ante todo, la rotación con las variables apropiadas y las relacionaremos entre sí; esta cinemática rotacional *es el tema del capítulo. En los dos siguientes relacionaremos el movimiento rotacional y la interacción de un objeto con su ambiente (dinámica rotacional).*

8-1 MOVIMIENTO ROTACIONAL

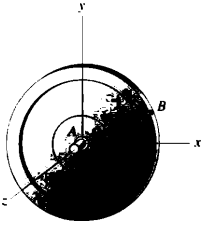
La figura 8-1 muestra una bicicleta fija de ejercicio. El eje de la rueda delantera que gira está fijo en el espacio; definamos el eje z de nuestro sistema coordenado como eje de la rueda. Un punto arbitrario P en la rueda, es una distancia perpendicular r respecto al punto A en el eje z. La línea AB se traza desde A a través de P. El movimiento del punto P traza el arco de un círculo a medida que la rueda gira. No necesariamente lo hace con una rapidez constante, porque el sujeto podría cambiar la velocidad con que pedalea.

El movimiento de la rueda es un ejemplo de *rotación pura de un cuerpo rígido*, que se define así:

> *Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura si todos sus puntos (como P en la figura 8-1) lo hacen en una trayectoria circular. El centro de estos círculos ha de estar en una línea recta común denominada eje de rotación (el eje z en la figura 8-1).*

También podemos caracterizar el movimiento de la rueda por la línea de referencia AB en la figura 8-1. A medida que

a)



b)

FIGURA 8-1. *a)* La rueda de una bicicleta fija de ejercicio constituye un ejemplo de la rotación pura de un cuerpo rígido. *b)* Coordenadas con que se describe la rotación de la rueda. El eje de rotación, que es perpendicular al plano xy, es el eje z. Un punto arbitrario P situado a una distancia r del eje A se mueve en un círculo de radio r.

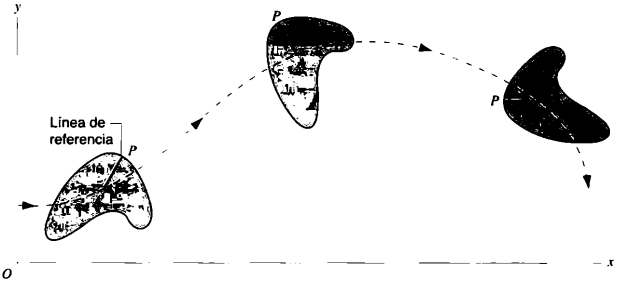


FIGURA 8-2. Cuerpo rígido arbitrario en movimiento de rotación y de traslación. En este caso especial bidimensional, el movimiento de traslación se confina al plano xy. La línea punteada indica la trayectoria en el plano xy correspondiente al movimiento traslacional del eje de rotación, el cual es paralelo al eje z a través del punto A. La línea AP denota el movimiento de rotación.

gira la rueda, esta línea recorre cierto ángulo en el plano xy. Otra forma de definir la rotación pura es la siguiente:

> *Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura, si una línea de referencia perpendicular al eje (como AB en la figura 8-1) se desplaza a través del mismo ángulo en determinado intervalo de tiempo como cualquier otra línea de referencia perpendicular al eje del cuerpo.*

En el caso de la rueda de una bicicleta ordinaria, la línea AB podría representar uno de los rayos (supuestamente radiales) de la rueda. Así pues, la definición anterior significa lo siguiente: tratándose de una rueda en rotación pura, si un rayo gira cierto ángulo $\Delta\phi$ en un intervalo temporal Δt, cualquier otro también deberá girar $\Delta\phi$ en el mismo intervalo.

El movimiento general de un cuerpo rígido incluirá los componentes rotacionales y traslacionales, como por ejemplo: en el caso de una rueda de una bicicleta *en movimiento*. Un punto P de la rueda se mueve en un círculo según un observador situado en el mismo marco de referencia que ella (por ejemplo, el que va en la bicicleta); en cambio, otro observador describirá el movimiento en forma diferente. En casos aún más complejos, como el de una bamboleante pelota de fútbol americano en el aire, puede haber una combinación de movimiento traslacional, de movimiento rotacional alrededor de un eje, y una variación en la dirección de este último. En términos generales, la descripción tridimensional de un cuerpo rígido requiere seis coordenadas: tres para localizar el centro de masa, dos ángulos (como latitud y longitud) para orientar el eje de rotación, y un ángulo para describir las rotaciones alrededor de él. La figura 8-2 muestra un cuerpo rígido arbitrario tridimensional que se mueve de manera rotacional y traslacional. En este caso se necesitan sólo tres coordenadas: dos para el centro de masa, y una para la coordenada angular de una línea de referencia en el cuerpo.

En el presente capítulo vamos a estudiar sólo el movimiento rotacional puro. (En el siguiente abordaremos el caso más complicado de la combinación de la rotación y la traslación.) Nos ocuparemos sólo de objetos rígidos en los cuales no se observa movimiento relativo de las partes a medida que el objeto gira; se excluye, por ejemplo, un líquido dentro de un contenedor que gira.

8-2 LAS VARIABLES ROTACIONALES

En la figura 8-3*a* vemos un cuerpo de forma arbitraria que gira alrededor del eje z. Podemos señalar exactamente en qué parte del marco de referencia se halla el cuerpo que gira, si conocemos la posición de cualquier punto P del cuerpo en ese marco. Por tanto, en la cinemática de este problema, hemos de considerar sólo el movimiento (bidimensional) de un punto en un círculo de radio r, igual a la distancia perpendicular de P al punto A sobre el eje z. La figura 8-3*b* muestra una sección del cuerpo paralela al plano xy que incluye al punto P.

El ángulo ϕ de la figura 8-3*b*, es la posición angular de la línea de referencia AP respecto al eje x'. *De modo arbitrario*

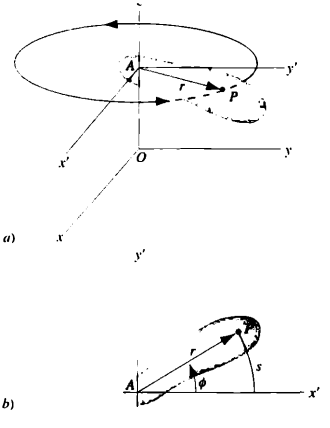


FIGURA 8-3. *a*) Cuerpo rígido arbitrario que gira alrededor del eje z. *b*) Sección transversal del cuerpo. Los ejes x' y y' son paralelos a los ejes x y y, respectivamente, pero cruzan por el punto A. La línea de referencia AP que conecta un punto P del cuerpo al eje, se localiza instantáneamente en el ángulo ϕ respecto al eje x'. El punto P se mueve por una longitud de arco s a medida que la línea AP gira en el ángulo ϕ.

decidimos que el sentido positivo de la rotación sea en sentido contrario al de las manecillas del reloj; así que (en la figura 8-3*b*) ϕ aumenta en esa rotación y disminuye en la del sentido de las manecillas del reloj, según un observador que esté más lejos sobre el eje positivo z que el objeto que gira.

Conforme el objeto gira, el punto P se mueve en un arco de longitud s, como se observa en la figura 8-3*b*. La longitud del arco y el radio (la distancia de P al eje de rotación), determinan el ángulo en que gira la línea de referencia:

$$\phi = s/r. \tag{8.1}$$

Los ángulos así definidos se dan en unidades de *radianes* (rad). El ángulo ϕ, por ser la razón de dos longitudes, es un número puro y carece de dimensiones. Pero sí posee unidades (radianes, en este caso). Cuando la longitud del arco es numéricamente igual a r, entonces $\phi = r/r = 1$ radián. Con frecuencia podemos tratar los radianes como "unidad" en las ecuaciones e introducir la unidad cuando se necesite. Claro que no todas las ecuaciones que son la razón de dos longitudes (como la ecuación 8-1) medirán los ángulos y requerirán ¡medida en radianes!

Puesto que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, de la ecuación 8-1 se deduce que si la partícula se mueve en una longitud de arco de una circunferencia, deberá trazar un ángulo de 2π rad. Por tanto,

$$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ radianes} = 360°,$$

o bien

$$1 \text{ radián} = 57.3° = 0.159 \text{ revoluciones}.$$

A menudo podemos expresar los ángulos y magnitudes rotacionales asociadas en unidades como radianes, en grados o revoluciones. Pero cuando una ecuación combina magnitudes angulares y lineales, como en la ecuación 8-1, las variables angulares han de expresarse *siempre* en radianes.

Supongamos que el cuerpo de la figura 8-3*b* gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el tiempo t_1, la posición angular de la línea AP es ϕ_1, y en el tiempo posterior t_2 es ϕ_2. Esto se indica en la figura 8-4, la cual tiene las posiciones de P y de la línea de referencia en esos tiempos; se omitió el diagrama del cuerpo para simplificar la explicación.

El *desplazamiento angular* de P es $\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$ durante el intervalo temporal $t_2 - t_1 = \Delta t$. Definimos la *velocidad angular promedio* ω_{pro} de la partícula P en este intervalo, como

$$\omega_{pro} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \tag{8-2}$$

La *velocidad angular instantánea* ω, es el límite al que tiende esta razón conforme Δt se acerca a cero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

o bien

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}. \tag{8-3}$$

La velocidad angular puede ser positiva o negativa según ϕ aumente o disminuya. (Más adelante demostraremos que ω es una magnitud vectorial, la cual puede tener componentes positivos o negativos en relación con un eje particular, igual que

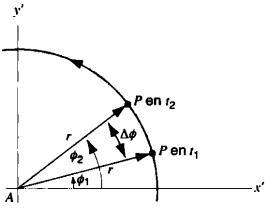


FIGURA 8-4. La línea de referencia AP de la figura 8-3*b* se halla en la coordenada angular ϕ_1, en el tiempo t_1, y en la coordenada angular ϕ_2 en el tiempo t_2. En el intervalo temporal $\Delta t = t_2 - t_1$; por tanto, el desplazamiento angular neto es $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

la velocidad traslacional $\bar{v}$. Como en el caso del movimiento de traslación cuando empleamos la designación "velocidad angular", nos referimos a la velocidad angular *instantánea*. Cuando nos referimos a la *rapidez angular*, indicamos la magnitud de la velocidad angular.

Esta última tiene las dimensiones del tiempo inverso (T^{-1}); es decir, que sus unidades pueden ser radianes por segundo (rad/s) o revoluciones por segundo (rev/s).

En un cuerpo rígido en rotación pura, la velocidad angular es la misma en todos sus puntos. Las líneas como AP en la figura 8-3, que están fijas en el cuerpo y que corren perpendiculares al eje de rotación de cualquier punto del cuerpo, giran con la misma velocidad angular.

Si la velocidad promedio de P no es constante, el punto tendrá aceleración angular. Supongamos que ω_1 y ω_2 son las velocidades angulares instantáneas en los tiempos t_1 y t_2, respectivamente; entonces la *aceleración angular promedio* α_{pro} del punto P se define así

$$\alpha_{pro} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{8-4}$$

La *aceleración angular instantánea*, es el límite de esta razón a medida que Δt se tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

o

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{8-5}$$

La aceleración angular puede ser positiva o negativa, ya sea que la velocidad angular aumente o disminuya. Cuando hablamos de "aceleración angular", nos referimos a la *instantánea*. Sus dimensiones son el tiempo inverso al cuadrado (T^{-2}) y sus unidades podrían ser rad/s^2 o rev/s^2. Como ω es igual en todos los puntos de un cuerpo rígido, de la ecuación 8.5 se infiere que también α deberá ser igual en todos los puntos; por tanto, α es como ω; esto es, características del cuerpo como un todo.

En vez de la rotación de un cuerpo rígido, podríamos haber examinado el movimiento de una partícula en una trayectoria circular. Es decir, P en la figura 8-4 puede representar una

partícula de masa m, limitada a moverse en un círculo de radio r (quizá sostenida por una varilla rígida sin masa de longitud r, que se hace girar sobre el eje z). Todos los resultados derivados de esta sección son válidos sin importar si consideramos P como un punto matemático o una partícula física; por ejemplo, podríamos referirnos a la velocidad o a la aceleración angular de la *partícula P* a medida que gira alrededor del eje z. Más tarde, convendrá considerar el cuerpo rígido que gira de la figura 8-3 como un grupo de partículas, las cuales giran alrededor del eje z con la misma velocidad y aceleración angulares.

PROBLEMA RESUELTO 8-1. La hoja de un ventilador gira inicialmente con una rapidez angular de 48.6 rpm (revoluciones por minuto). Posteriormente reduce su velocidad hasta que finalmente se detiene en un tiempo de 32 segundos después de realizar un total de 8.8 revoluciones. Calcule *a*) la velocidad angular promedio, y *b*) la aceleración angular de la hoja.

Solución *a*) Al detenerse el ventilador, el desplazamiento neto $\Delta\phi$ es 8.8 revoluciones en un tiempo $\Delta t = 32$ s. La velocidad angular promedio se obtiene de la ecuación 8-2:

$$\omega_{\text{pro}} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{8.8 \text{ rev}}{32 \text{ s}} = 0.28 \text{ rev/s}.$$

b) La velocidad angular inicial es $\omega_i = 48.6$ rev/min $= 0.81$ rev/s. La velocidad angular final ω_f es 0. La velocidad angular promedio está dada por la ecuación 8-4:

$$\alpha_{\text{pro}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 0.81 \text{ rev/s}}{32 \text{ s}} = -0.025 \text{ rev/s}^2.$$

En este problema es muy aceptable expresar la magnitud angular en revoluciones. Sin embargo, como veremos luego, en las ecuaciones que combinan las variables angulares y lineales (como la ecuación 8-1), las variables angulares *siempre* deben expresarse en radianes.

En analogía con la cinemática traslacional, la velocidad angular positiva y la aceleración angular negativa indican que va disminuyendo la velocidad del ventilador. En lo relativo a la cinemática traslacional, hubo que definir una dirección del sistema coordenado para darles sentido a las magnitudes positiva y negativa. En la siguiente sección demostraremos que las variables rotacionales se comportan como vectores, y que definir en forma similar un sistema coordenado, nos permite relacionar los valores positivo y negativo con la dirección de la rotación en el sistema coordenado.

PROBLEMA RESUELTO 8-2. Una rueda en un eje fijo (como el de la bicicleta de ejercicio en la figura 8-1) gira de modo que la velocidad angular instantánea de una línea de referencia pintada sobre un radio está dada en función del tiempo por $\omega = At + Bt^2$, donde $A = 6.2$ rad/s^2 y $B = 8.7$ rad/s^3. *a*) Si la línea de referencia está inicialmente en $\phi = 0$ cuando $t = 0$, localice su posición angular cuando $t = 2.0$ s. *b*) ¿Cuál es la aceleración angular instantánea de la línea de referencia en $t = 0.50$ s?

Solución *a*) Para obtener ϕ de ω, debemos resolver una integral. Si escribimos la ecuación 8-3 como $d\phi = \omega\, dt$, podremos integrar para obtener $\phi = \int d\phi = \int \omega\, dt$ o

$$\phi = \int (At + Bt^2)\, dt = \tfrac{1}{2}At^2 + \tfrac{1}{3}Bt^3 + C,$$

donde C es la constante de integración que debe determinarse partiendo de la condición inicial. A fin de tener $\phi = 0$ cuando $t = 0$, hay que hacer $C = 0$. Al evaluar la expresión resultante cuando $t = 2.0$ s, se obtiene

$$\phi = \tfrac{1}{2}(6.2 \text{ rad/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 + \tfrac{1}{3}(8.7 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^3 = 35.6 \text{ rad}.$$

La rueda gira 35.6 radianes, es decir, 5.7 revoluciones en 2.0 s. *b*) Si queremos obtener la aceleración angular a partir de la velocidad angular, se encuentra la derivada que se especifica en la ecuación 8-5:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(At + Bt^2) = A + 2Bt.$$

La evaluación de la expresión anterior en $t = 0.50$ s, nos da $\alpha = 6.2$ rad/s^2 + 2(8.7 rad/s^3)(0.50 s) = 14.9 rad/s^2.

8-3 LAS MAGNITUDES ROTACIONALES COMO VECTORES

Cuando nos ocupamos del desplazamiento, velocidad y aceleración en el movimiento traslacional tanto en una como en varias dimensiones, el primer paso será establecer siempre un sistema coordenado y especificar la dirección positiva de los ejes. Sólo así estaremos en condiciones de definir lo que significa ser positivo o negativo para esos componentes. Es un paso necesario porque se representan con vectores. Otras magnitudes como masa o temperatura no aportan información direccional; son escalares y su valor no depende de la elección del sistema coordenado.

Por eso preguntaremos ahora, si las variables de la cinemática angular (desplazamiento, velocidad y aceleración angulares) se comportan como vectores. De ser así, habrá que especificar un sistema coordenado y definir las variables en relación con él. Para representar como vector una magnitud física, no sólo ha de tener magnitud y dirección; debe además obedecer las leyes de la adición vectorial. Sólo mediante experimentos podemos averiguar si las variables angulares las cumplen o no.

Comenzaremos con el desplazamiento angular $\Delta\phi$, el cual especifica el ángulo en que gira un cuerpo. Una ley particular que deben seguir los vectores, es la conmutatividad de la adición. Para dos vectores arbitrarios hemos de tener $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$, es decir, el orden de los vectores no afecta a su suma. Examinemos esta ley en el caso de los desplazamientos angulares. Aplicaremos dos rotaciones sucesivas $\Delta\phi_1$ y $\Delta\phi_2$ a un objeto, como el libro que aparece en la figura 8-5, y que inicialmente se halla en el plano yz. Como se advierte en la figura 8-5*a*, primero giramos mediante un desplazamiento $\Delta\phi_1$, una vuelta de 90° alrededor del eje x, y luego mediante un desplazamiento $\Delta\phi_2$, una vuelta de 90° alrededor del eje z. En la figura 8-5*b* indicamos gráficamente la situación si se invierte el orden de las dos rotaciones: primero $\Delta\phi_2$ (90° alrededor del eje z), y luego $\Delta\phi_1$ (90° alrededor del eje x). Como se ve, las posiciones finales del libro son muy distintas. Así pues, en este caso podemos concluir, que $\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 \neq \Delta\phi_2 + \Delta\phi_1$, y que por lo mismo *los desplazamientos angulares finitos no pueden representarse como magnitudes vectoriales.*

La situación cambia cuando hacemos más pequeños estos desplazamientos. En la figura 8-5 (*c* y *d*) se muestra el

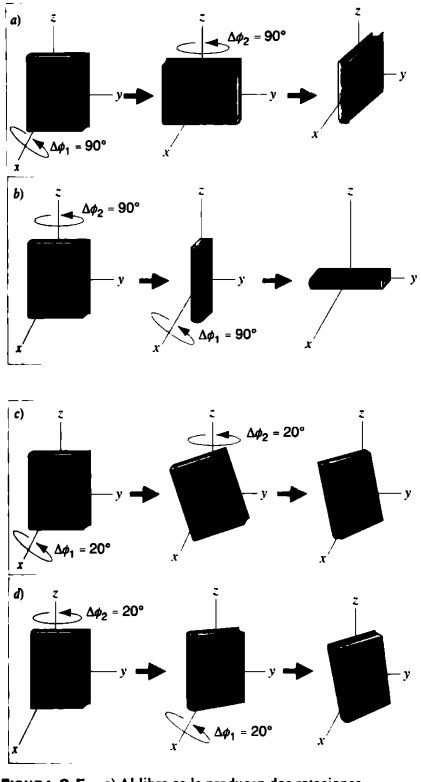


FIGURA 8-5. *a)* Al libro se le producen dos rotaciones sucesivas: $\Delta\phi_1 = 90°$ alrededor del eje x, y $\Delta\phi_2 = 90°$ alrededor del eje z. *b)* Si se invierte el orden de las rotaciones, la posición final del libro será distinta. *c)* Ahora el libro se gira igual que en *a)*, sólo que en dos ángulos más pequeños: $\Delta\phi_1 = 20°$ alrededor del eje x, y $\Delta\phi_2 = 20°$ alrededor del eje z. *d)* Si se invierte el orden de rotaciones en *c)*, la posición final se asemeja más a la de *c)*.

efecto de rotaciones sucesivas de 20°; ahora las posiciones finales del libro se aproximan casi a la identidad. Cuanto más pequeño hacemos el ángulo de rotación, más se parecen. Si el desplazamiento angular es infinitesimal, las posiciones serán idénticas y el orden de las rotaciones ya no influirá en el resultado final, es decir, $d\phi_1 + d\phi_2 = d\phi_2 + d\phi_1$. En consecuencia, *las rotaciones angulares infinitesimales pueden representarse como vectores.*

También pueden ser vectores, las magnitudes definidas a partir de los desplazamientos angulares infinitesimales. Por ejemplo, la velocidad angular es $\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$. Dado que $d\vec{\phi}$ es un vector y dt es un escalar, el cociente $\vec{\omega}$ será un vector. Por tanto, la *velocidad angular puede representarse como vector.* Así, en la figura 8-6*a* representamos la velocidad angular $\vec{\omega}$ del cuerpo rígido en rotación por medio de una flecha trazada sobre el eje de rotación; en la figura 8-6*b* representamos en la misma forma la rotación de una partícula P alrededor de un eje fijo. La longitud de la flecha se hace proporcional a la magnitud de la velocidad angular. El sentido de la rotación determina la dirección a que apunta sobre el eje. Por convención, si los dedos de la *mano derecha* se enrollan alrededor del eje en dirección de la rotación del cuerpo, el pulgar extendido señalará en dirección del vector de la velocidad angular (Fig. 8-6*c*). Por consiguiente, en la rueda de la figura 8-1, el vector de velocidad angular señala perpendicularmente hacia la página (en la dirección negativa z) en caso de que el ciclista pedalee hacia adelante. En al figura 8-3*b*, $\vec{\omega}$ es perpendicular a la página y señala hacia afuera de la página, correspondiente a la

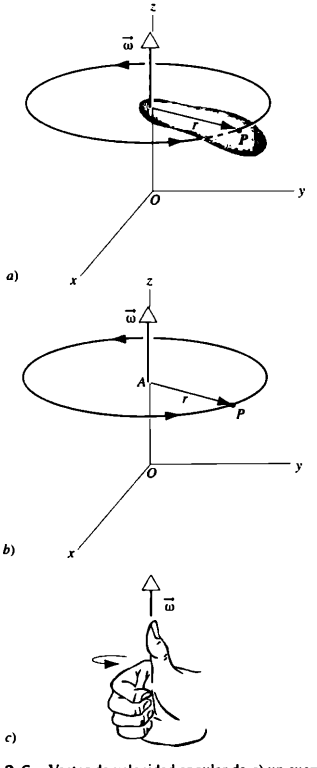


FIGURA 8-6. Vector de velocidad angular de *a)* un cuerpo rígido que gira, y *b)* una partícula que gira, tomados ambos alrededor de un eje fijo. *c)* La regla de la mano derecha determina la dirección del vector.

rotación en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Nótese que el objeto no se mueve en dirección del vector de la velocidad angular. Este último representa la velocidad angular del movimiento rotacional que tiene lugar en el plano perpendicular a él.

También la aceleración angular es una magnitud vectorial. Esto se deduce de la definición $\bar{\alpha} = d\bar{\omega}/dt$, donde $d\bar{\omega}$ es un vector y dt un escalar. Más adelante encontraremos otras magnitudes rotacionales que son vectores, como el par de torsión y el momento angular. El uso de la regla de la mano derecha para definir la dirección de los vectores $d\bar{\phi}$, $\bar{\omega}$ y $\bar{\alpha}$, nos lleva a un formalismo congruente de los vectores en todas las magnitudes rotacionales.

8-4 ROTACIÓN CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

En el movimiento traslacional de una partícula o de un cuerpo rígido en una dirección fija, como el eje x, hemos visto (en el Capítulo 2) que el tipo más simple de movimiento, es en el que la aceleración a_x es cero. El siguiente tipo más simple, corresponde a a_x = una constante (que no sea cero); en este movimiento obtuvimos las ecuaciones 2-26 y 2-28 que describen la velocidad y posición en función del tiempo.

En el movimiento rotacional de una partícula o de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo (que suponemos que es el eje z), el tipo más simple de movimiento es aquel en que la aceleración angular α_z es cero (como el movimiento circular uniforme). El siguiente tipo más simple de movimiento, en que α_z = una constante (que no sea cero), corresponde exactamente al movimiento traslacional con a_x = una constante (que no sea cero). Como en el caso anterior, podemos obtener ecuaciones que den la velocidad ω y el desplazamiento angulares ϕ en función del tiempo t. Estas ecuaciones pueden obtenerse mediante los métodos con que obtuvimos las ecuaciones traslacionales, o simplemente pueden escribirse sustituyendo las magnitudes correspondientes de las ecuaciones traslacionales por las magnitudes angulares.

Primero obtenemos la expresión de ω_z en función de t. Comenzamos reescribiendo la ecuación 8-5 así:

$$d\omega_z = \alpha_z dt.$$

A continuación integramos el lado izquierdo desde ω_{0z} (la velocidad angular en el tiempo $t = 0$) hasta ω_z (la velocidad angular en el tiempo t), y en la derecha desde el tiempo 0 al tiempo t:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega_z = \int_0^t \alpha_z dt = \alpha_z \int_0^t dt,$$

donde el último paso puede darse *sólo* cuando la aceleración angular α_z sea constante. Al efectuar la integración, obtenemos

$$\omega_z - \omega_{0z} = \alpha_z t$$

o

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t. \qquad (8\text{-}6)$$

Éste es el análogo rotacional de la ecuación 2-26 ($v_x = v_{0x} + a_x t$). Nótese que podríamos obtener la expresión rotacional, sustituyendo ω_z para v_x, y α_z para a_x en la expresión traslacional.

Al hacer $\omega_z = d\phi/dt$ en la ecuación 8-6 y volverla a integrar, obtenemos una expresión del desplazamiento angular en caso de aceleración angular constante:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_0^t (\omega_{0z} + \alpha_z t)\, dt,$$

o

$$\phi = \phi_0 + \omega_{0z} t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2, \qquad (8\text{-}7)$$

que es semejante al resultado correspondiente del movimiento traslacional con aceleración constante, ecuación 2-28 ($x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$).

El sentido positivo de las magnitudes angulares ω_z y α_z, está determinado por la dirección en que aumenta ϕ. En la ecuación 8-3 vemos que ω_z es positiva, si ϕ está aumentando con el tiempo (esto es, el objeto gira en dirección contraria a la de las manecillas del reloj). Asimismo, en la ecuación 8-5 vemos que α_z es positiva, ω_z está aumentando con el tiempo (aunque ω_z sea negativa y se vuelva menos negativa). Las expresiones anteriores se parecen a las convenciones correspondientes de signos para las magnitudes lineales. En la figura 8-3*b* vemos que esta relación de la velocidad ω_z positiva con el desplazamiento angular ϕ creciente es compatible con la aplicación de la regla de la mano derecha. Si los dedos de la mano derecha se enrollan en dirección del desplazamiento creciente ϕ, el pulgar señalará hacia fuera de la página, es decir, en la dirección positiva z, lo cual indica que ω_z es positiva.

La rotación de una partícula (o de un cuerpo rígido) *alrededor de un eje fijo*, tiene correspondencia formal con el movimiento traslacional de una partícula (o cuerpo rígido) *en una dirección fija*. Las variables cinemáticas son ϕ, ω_z y α_z en el primer caso, y x, v_x y a_x en el segundo. Estas magnitudes corresponden en parejas: ϕ a x, ω_z a v_x y α_z a a_x. Nótese que las magnitudes angulares difieren dimensionalmente de las correspondientes magnitudes lineales por un factor de longitud. Además, considere que las seis pueden tratarse como componentes de vectores unidimensionales en este caso especial. Por ejemplo, en cualquier instante una partícula puede desplazarse en una u otra dirección sobre su trayectoria recta, correspondiente a un valor positivo o negativo de v_x; asimismo, puede girar en una u otra dirección alrededor de su eje fijo, correspondiente a un valor positivo o negativo de ω_z.

Cuando en el movimiento traslacional levantamos la restricción de que el movimiento se realice en una línea recta, y consideramos el caso general de movimiento en tres dimensiones en una trayectoria curva, los componentes correspondientes x, v_x y a_x han de ser reemplazados por los vectores $\bar{r}$, $\bar{v}$ y $\bar{a}$. En la sección 8-5 veremos en qué medida las variables cinemáticas rotacionales se manifiestan como vectores, cuando eliminamos la restricción de un eje fijo de rotación.

PROBLEMA RESUELTO 8-3. Comenzando del reposo en el tiempo $t = 0$, una muela de molino tiene una aceleración angular constante de 3.2 rad/s^2. En el tiempo $t = 0$ la línea de referencia AB en la

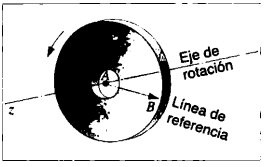


FIGURA 8-7. Problema resuelto 8-3. La línea de referencia AB es horizontal en $t = 0$, y gira con la muela de molino en el plano xy.

figura 8-7 es horizontal. Determine *a*) el desplazamiento angular de la línea AB (y, por tanto, de la muela), y *b*) la rapidez angular de la muela 2.7 s más tarde.

Solución *a*) Escogemos un sistema coordenado para que $\vec{\omega}$ esté en la dirección positiva z (de modo que la muela de molino y la línea AB giren en el plano xy).

Cuando $t = 0$, tendremos $\phi_0 = 0$, $\omega_{0z} = 0$ y $\alpha_z = 3.2\ \text{rad/s}^2$. Por tanto, después de 2.7 s, la ecuación 8-7 nos da

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2\\ &= 0 + (0)(2.7\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(3.2\ \text{rad/s}^2)(2.7\ \text{s})^2\\ &= 11.7\ \text{rad} = 1.9\ \text{rev}.\end{aligned}$$

b) Según la ecuación 8-6,

$$\begin{aligned}\omega_z &= \omega_{0z} + \alpha_z t = 0 + (3.2\ \text{rad/s}^2)(2.7\ \text{s})\\ &= 8.6\ \text{rad/s} = 1.4\ \text{rev/s}.\end{aligned}$$

PROBLEMA RESUELTO 8-4. Supóngase que se apaga la energía que mueve la muela de molino del problema resuelto 8-3 cuando está girando con una rapidez angular de 8.6 rad/s. Una pequeña fuerza de fricción en el eje causa una desaceleración angular constante, y la muela de molino finalmente se detiene en un tiempo de 192 s. Determine *a*) la aceleración angular, y *b*) el ángulo total a que se gira durante la reducción de la velocidad.

Solución *a*) Dado que $\omega_{0z} = 8.6$ rad/s, $\omega_z = 0$ y que $t = 192$ s, obtenemos α_z a partir de la ecuación 8-6:

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t} = \frac{0 - 8.6\ \text{rad/s}}{192\ \text{s}} = -0.045\ \text{rad/s}^2.$$

Aquí el valor negativo de α_z, muestra que disminuye la magnitud de ω_z (es decir, que es positivo).

b) De acuerdo con la ecuación 8-7, tenemos

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2\\ &= 0 + (8.6\ \text{rad/s})(192\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-0.045\ \text{rad/s}^2)(192\ \text{s})^2\\ &= 822\ \text{rad} = 131\ \text{rev}.\end{aligned}$$

8-5 RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES LINEALES Y ANGULARES

En la sección 4-5 explicamos la velocidad y aceleración lineales de una partícula que se mueve en un círculo. Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas se desplazan en un círculo. Por ello, podemos describir su movimiento en variables lineales o angulares. La relación entre unas y otras nos permite pasar de una descripción a otra, lo cual es muy útil.

Consideremos una partícula en P de un cuerpo rígido, a una distancia perpendicular r respecto al eje que pasa por A, como se aprecia en la figura 8-3*a*. La partícula se desplaza en un círculo de radio r. La posición angular ϕ de la línea de referencia AP se mide respecto al eje x o x', según se indica en la figura 8-3*b*. La partícula recorre una distancia s en el arco, cuando el cuerpo gira por un ángulo ϕ, tal que

$$s = \phi r, \tag{8-8}$$

donde ϕ se da en radianes.

Al derivar ambos lados de la ecuación anterior respecto al tiempo y al observar que r es constante, obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\, r.$$

Sin embargo, ds/dt es la rapidez lineal (tangencial) v_T de la partícula en P, y $d\phi/dt$ es la rapidez angular ω del cuerpo que gira, así que

$$v_T = \omega r. \tag{8-9}$$

Ésta es la relación existente entre las *magnitudes* de la velocidad lineal tangencial y la velocidad angular. La rapidez lineal de una partícula en movimiento circular, es producto de la rapidez angular y de la distancia r de una partícula con el eje de rotación.

Al derivar la ecuación 8-9 respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{dv_T}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\, r.$$

Pero dv_T/dt es la magnitud del componente *tangencial* a_T de la aceleración de la partícula (véase sección 8-6), y $d\omega/dt$ es la magnitud de la aceleración angular del cuerpo que gira; así que

$$a_T = \alpha r. \tag{8-10}$$

Por tanto, la magnitud del componente tangencial de la aceleración lineal de una partícula en el movimiento circular, es el producto de la magnitud de la aceleración angular y de la distancia r de la partícula respecto al eje de rotación.

En la sección 4-5 vimos que el componente *radial* (o centrípeto) a_R de la aceleración es v_T^2/r de la partícula que se mueve en un círculo. Lo anterior puede expresarse en función de la rapidez angular, empleando la ecuación 8-9. De lo anterior tenemos que

$$a_R = \frac{v_T^2}{r} = \omega^2 r. \tag{8-11}$$

La aceleración resultante $\vec{a}$ del punto P, se muestra en la figura 8-8.

Las ecuaciones 8-8 a 8-11, nos permiten describir el movimiento de un punto en un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo en variables *angulares* o *lineales*. Podríamos preguntar por qué necesitamos variables angulares cuando ya estamos familiarizados con las lineales equivalentes. La respuesta es que la descripción angular ofrece una clara ventaja sobre la lineal cuando hay que considerar varios puntos del mismo cuerpo que gira. En él, los puntos que están a varias

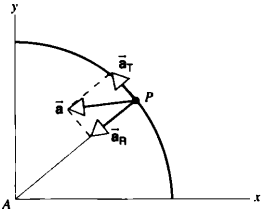


FIGURA 8-8. Componentes radiales y tangenciales de la aceleración de una partícula en el punto P, de un cuerpo rígido que gira alrededor del eje z.

distancias del eje, no presentan el mismo desplazamiento, rapidez o aceleración *lineales*, pero *todos* los puntos de un cuerpo rígido que giran alrededor de un eje fijo tienen igual desplazamiento, rapidez o aceleración *angulares* en cualquier instante. Por medio de variables angulares, es posible describir en forma simple el movimiento del cuerpo entero.

En la figura 8-9 hay un ejemplo interesante de la relación entre variables lineales y angulares. Cuando una chimenea se viene abajo por una carga explosiva colocada en su base, a menudo se despedazará al caer, y la rotura comenzará en el lado que da hacia abajo.

Antes de la rotura, la chimenea es un cuerpo rígido, mismo que gira alrededor de un eje cercano a su base con cierta aceleración angular α. De acuerdo con la ecuación 8-10, la parte superior tiene una aceleración tangencial α_T dada por αL, donde L es la longitud de la chimenea. El componente vertical de α_T, puede rebasar fácilmente g (la aceleración de caída libre). En otras palabras, la parte superior de la chimenea cae con una aceleración vertical mayor, que la de un ladrillo que caiga libremente.

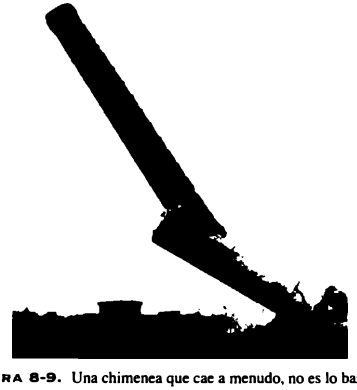


FIGURA 8-9. Una chimenea que cae a menudo, no es lo bastante fuerte para imprimir la aceleración tangencial de gran radio necesaria para que el objeto entero gire como un cuerpo rígido con aceleración angular constante. Una explicación de este fenómeno, se da en "More on the Falling Chimney" de A. A. Bartlett, *The Physics Teacher*, septiembre de 1976, p. 351.

Lo anterior ocurre sólo a condición de que la chimenea siga siendo un cuerpo rígido individual. Dicho en términos más sencillos, su parte inferior (la cual actúa a través del cemento que mantiene unidos los ladrillos), debe "tirar hacia abajo" de la parte superior para que la chimenea caiga tan rápido. Este esfuerzo cortante a menudo supera lo que puede soportar el cemento, y entonces la chimenea se rompe. Ésta se ha convertido ahora en dos cuerpos rígidos: la parte superior está en caída libre, y llega al suelo más tarde de lo que lo habría hecho en caso de que la chimenea no se hubiera roto.

PROBLEMA RESUELTO 8-5. Si el radio de la muela de molino del problema resuelto 8-3 es 0.24 m, calcule *a*) la rapidez lineal o tangencial de un punto en el borde, *b*) la aceleración tangencial de un punto del borde y *c*) la aceleración radial de un punto en el borde al cabo de 2.7 s. *d*) Repita lo anterior con un punto a la mitad respecto al borde, es decir, con $r = 0.12$ m.

Solución Tenemos $\alpha = 3.2$ rad/s^2, $\omega = 8.6$ rad/s después 2.7 s y $r = 0.24$ m. Entonces

a) $v_T = \omega r = (8.6 \text{ rad/s})(0.24 \text{ m}) = 2.1$ m/s,

b) $a_T = \alpha r = (3.2 \text{ rad/s}^2)(0.24 \text{ m}) = 0.77$ m/s^2,

c) $a_R = \omega^2 r = (8.6 \text{ rad/s})^2(0.24 \text{ m}) = 18$ m/s^2.

d) Las variables *angulares* son las mismas en este punto con $r = 0.12$ m, que en un punto del borde. En otras palabras, una vez más $\alpha = 3.2$ rad/s^2 y $\omega = 8.6$ rad/s. Empleando las ecuaciones 8-9 a 8-11 con $r = 0.12$ m, obtenemos para este punto

$$v_T = 1.0 \text{ m/s}, \qquad a_T = 0.38 \text{ m/s}^2, \qquad a_R = 8.9 \text{ m/s}^2.$$

Las anteriores son la mitad de su valor respectivo en el punto del borde. Las variables lineales aumentan en proporción con el radio a partir del eje de rotación.

Una vez más, nótese lo siguiente: en las ecuaciones que comprenden *exclusivamente* variables angulares, podemos expresar las magnitudes angulares en cualquier unidad angular (grados, radianes, revoluciones), a condición de que se proceda con uniformidad. Por el contrario, en ecuaciones donde se combinan magnitudes angulares y lineales (como en las ecuaciones 8-8 a 8-11), las magnitudes angulares *deben* expresarse en radianes, como lo hicimos en este problema resuelto. Y ello se debió a que las ecuaciones 8-9 a 8-11 se basaban en la ecuación 8-8, que en efecto define una medida en radianes.

PROBLEMA RESUELTO 8.6. Un pulsar, es una estrella de neutrones que gira rápidamente, resultado del colapso gravitacional de una estrella ordinaria que consumió toda su provisión de combustible. Los pulsares emiten luz u otro tipo de radiación electromagnética en un haz estrecho, que puede ser barrido por la Tierra una vez en cada revolución. Cierto pulsar tiene un periodo rotacional de $T = 0.033$ s, y un radio de $r = 15$ km. ¿Cuál es la rapidez tangencial de un punto en su Ecuador?

Solución La rapidez angular es

$$\omega = \frac{2\pi \text{ radianes}}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0.033 \text{ s}} = 190 \text{ rad/s}.$$

y la rapidez tangencial es

$$v_T = \omega r = (190 \text{ rad/s})(15 \text{ km}) = 2{,}900 \text{ km/s}.$$

Es interesante señalar, que esto representa cerca del 1% de la velocidad de la luz y casi cuatro órdenes de magnitud más grandes que la rapidez tangencial en un punto del Ecuador terrestre.

8-6 RELACIONES VECTORIALES ENTRE VARIABLES LINEALES Y ANGULARES (Opcional)

En la sección anterior explicamos las relaciones entre la velocidad angular ω, la velocidad tangencial v_T, la aceleración angular α, la aceleración tangencial a_T y la aceleración radial (o centrípeta) a_R. Todas estas magnitudes se representan por medio de vectores, por lo que a continuación vamos a examinar sus relaciones en forma vectorial.

A menudo hemos comprobado que conviene expresar los vectores en función de sus componentes, empleando los vectores unitarios. En las coordenadas rectangulares (cartesianas) éstos son $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, que identifican, respectivamente, las direcciones x, y, z (consúltese el apéndice H). Al analizar el movimiento rotacional, conviene más utilizar otros vectores unitarios que identifiquen las direcciones radial y tangencial. Suponemos que en la figura 8-3 se describe la rotación, y nos concentraremos en una partícula arbitraria del cuerpo que gira. Esta partícula en el punto P, describe una trayectoria circular paralela al plano xy, es decir, su velocidad tangencial tiene sólo los componentes x y y. (Su velocidad angular señala en la dirección z, como ya se indicó.)

La figura 8-10*a* tiene la partícula que gira, y los vectores radial y tangencial que designamos como $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\phi$. El vector unitario radial $\hat{\mathbf{u}}_r$, señala en dirección de r creciente, esto es, radialmente hacia afuera del centro del círculo. El vector unitario tangencial $\hat{\mathbf{u}}_\phi$, señala en dirección de ϕ creciente, tangente al círculo y en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Igual que $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\phi$ no tienen dimensiones, debido a que poseen longitud unitaria y son perpendiculares entre sí. A diferencia de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, la dirección de $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\phi$ cambia a medida que la partícula se mueve alrededor del círculo. Cuando tomamos derivadas de expresiones que contienen $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\phi$, habremos de tener en cuenta este cambio de dirección. Por el contrario, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ han de tratarse como constantes en la diferenciación.

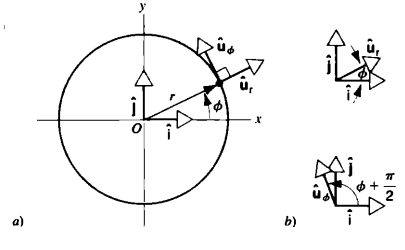


FIGURA 8-10. *a*) Partícula que se mueve en el sentido contrario al de las manecillas del reloj en un círculo o radio r. *b*) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\phi$ y su relación con $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$.

Por medio de la figura 8-10*b*, podemos expresar $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\phi$ en función de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\hat{\mathbf{u}}_r = (\cos\phi)\hat{\mathbf{i}} + (\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{j}}, \tag{8-12a}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\phi = (-\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{i}} + (\cos\phi)\hat{\mathbf{j}}. \tag{8-12b}$$

La velocidad de la partícula tiene sólo un componente tangencial (ningún componente radial), así que puede escribirse en forma vectorial, como su magnitud multiplicada por el vector unitario en la dirección tangencial:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_T\,\hat{\mathbf{u}}_\phi. \tag{8-13}$$

Como en general el objeto que gira puede tener aceleración angular, podrán cambiar tanto la magnitud de la velocidad tangencial como su dirección.

La aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de la partícula, se calcula en la forma habitual como $d\vec{\mathbf{v}}/dt$:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d(v_T\hat{\mathbf{u}}_\phi)}{dt} = \frac{dv_T}{dt}\hat{\mathbf{u}}_\phi + v_T\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\phi}{dt}. \tag{8-14}$$

En el primer término, la derivada dv_T/dt no es más que la aceleración tangencial a_T. Si queremos evaluar el segundo término, hay que encontrar una expresión para la derivada del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_\phi$. Por medio de la ecuación 8-12*b* obtenemos

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\phi}{dt} = -\frac{d(\operatorname{sen}\phi)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d(\cos\phi)}{dt}\hat{\mathbf{j}}. \tag{8-15}$$

Ahora $d(\operatorname{sen}\phi)/dt = (\cos\phi)d\phi/dt = \omega\cos\phi$, donde $\omega = d\phi/dt$ (Ec. 8-3). De modo semejante, $d(\cos\phi)/dt = -\omega\operatorname{sen}\phi$. Al efectuar estas sustituciones en la ecuación 8-15 y al eliminar los factores comunes, obtenemos

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\phi}{dt} = -\omega[(\cos\phi)\hat{\mathbf{i}} + (\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{j}}] = -\omega\hat{\mathbf{u}}_r, \tag{8-16}$$

donde utilizamos la ecuación 8-12*a* en el último paso. Podemos escribir la ecuación 8-14 como

$$\vec{\mathbf{a}} = a_T\hat{\mathbf{u}}_\phi - v_T\omega\hat{\mathbf{u}}_r. \tag{8-17}$$

El primer término en la ecuación 8-17, es la aceleración tangencial $\vec{\mathbf{a}}_T = a_T\hat{\mathbf{u}}_\phi$, un vector con magnitud a_T que señala en la dirección tangencial (la de ϕ creciente). Podemos escribir el segundo término en forma más instructiva, por medio de la ecuación 8-11: $-v_T\omega\hat{\mathbf{u}}_r = -v_T(v_T/r)\,\hat{\mathbf{u}}_r = -(v_T^2/r)\,\hat{\mathbf{u}}_r$. Según la ecuación 8-11, la magnitud v_T^2/r, es la aceleración radial (o centrípeta) a_R. Esta última podemos representarla en forma vectorial como $\vec{\mathbf{a}}_R = -a_R\hat{\mathbf{u}}_r$, donde el signo menos indica que el vector apunta en dirección de r decreciente, es decir, hacia el centro del círculo. En función de $\vec{\mathbf{a}}_T$ y $\vec{\mathbf{a}}_R$, la ecuación 8-17 es

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_R. \tag{8-18}$$

Estos tres vectores de la aceleración se indican en la figura 8-8.

Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{a}$

La relación espacial de los vectores angulares $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ con los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$, puede escribirse en forma compacta usando el *producto vectorial cruz*, el cual se define y explica en el apéndice H. El producto vectorial cruz de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{C}$, que se escribe como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Este vector $\vec{C}$ tiene dos propiedades importantes en nuestra exposición: 1) la magnitud de $\vec{C}$ es AB sen θ, donde A es la magnitud de $\vec{A}$, B es la magnitud de $\vec{B}$ y θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. 2) El vector $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en una dirección determinada por la regla de la mano derecha (apéndice H).

La figura 8-11*a* muestra la partícula que gira, así como los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{v}$ que representan su velocidad angular y lineal. El vector $\vec{R}$ localiza la partícula respecto al origen de un sistema coordenado xyz. Como se advierte en la figura, la partícula describe un círculo de radio $r = R$ sen θ.

Examinemos ahora el producto vectorial cruz $\vec{\omega} \times \vec{R}$. Según la definición de ese producto, su magnitud es ωR sen $\theta = \omega r$, que equivale a la magnitud de la velocidad tangencial v_T, según la ecuación 8-9. La figura 8-11*a* muestra que la dirección de este producto cruz es el mismo que la dirección de $\vec{v}$: si giramos los dedos de la mano derecha de $\vec{\omega}$ a $\vec{R}$ a través del ángulo θ, el índice señalará en la dirección de $\vec{v}$. Así habremos demostrado que la magnitud y dirección del producto cruz $\vec{\omega} \times \vec{R}$ son idénticas a las de $\vec{v}$, y que por lo mismo podemos escribir

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \tag{8-19}$$

Ésta es la forma vectorial de la ecuación 8-9.

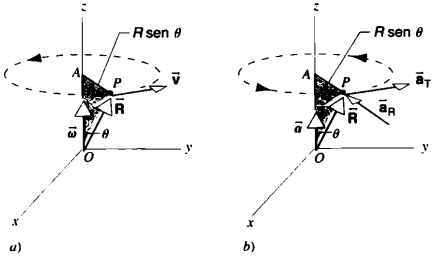


FIGURA 8-11. *a*) En la figura 8-3*a*, una partícula en el punto P de un cuerpo rígido que gira, está situada en $\mathbf{R}$ respecto al origen O. Tiene una velocidad angular $\vec{\omega}$ (dirigida en el eje z), y una velocidad tangencial $\vec{v}$. *b*) La partícula en P tiene una aceleración angular $\vec{\alpha}$ en el eje z. También tiene una aceleración tangencial $\vec{a}$, y una aceleración radial $\vec{a}_R$.

A continuación, evaluaremos la aceleración tomando la derivada de la ecuación 8-19. Al hacerlo, hemos de tener cuidado y conservar el orden de los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{R}$, ya que es importante en lo relativo con el producto cruz ($\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$). Aplicando el método habitual y tomando la derivada de un producto, tenemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt}. \tag{8-20}$$

Nótese que en ambos términos en la derecha de la ecuación 8-20, $\vec{\omega}$ viene antes que $\vec{R}$ y, por tanto, hemos de conservar el orden de $\vec{\omega}$ y $\vec{R}$.

Consideremos el primer término en la derecha de la ecuación 8-20. Igual que la ecuación lineal análoga $a = dv/dt$, la ecuación $\alpha = d\omega/dt$ (Ec. 8-5), se aplica a cualquier componente de $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ y, en consecuencia, también con los vectores: $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. En el último término de la ecuación 8-20, $d\vec{R}/dt$ es igual a la velocidad $\vec{v}$ de la partícula. Al hacer estas sustituciones en la ecuación 8-20, tenemos

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{8-21}$$

Conforme a la regla con que se calcula la magnitud de un producto cruz, la del primer término $\vec{\alpha} \times \vec{R}$ es αR sen $\theta = \alpha r$, que no es más que la aceleración tangencial a_T según la ecuación 8-10. Para encontrar la dirección de este producto vectorial, señalamos que la expresión $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$, indica que $\vec{\alpha}$ ha de tener la misma dirección que $d\vec{\omega}$. Con un eje fijo de rotación, que hemos supuesto, $\vec{\omega}$ siempre señala en la misma dirección (a lo largo del eje de rotación), por lo cual, cualquier cambio de $\vec{\omega}$ deberá indicar en dirección del eje. Por tanto, $\vec{\alpha}$ sigue la misma dirección que $\vec{\omega}$, es decir, en el eje z como se aprecia en la figura 8-11*b*. La regla de la mano derecha aplicada a los productos cruz, establece que $\vec{\alpha} \times \vec{R}$ está en dirección de la tangente al círculo en el lugar de P. Como $\vec{\alpha} \times \vec{R}$ tiene la misma magnitud y dirección que la aceleración tangencial $\vec{a}_T$, debemos tener $\vec{\alpha} \times \vec{R} = \vec{a}_T$.

La magnitud del producto vectorial cruz en el segundo término de la ecuación 8-21 ($\vec{\omega} \times \vec{v}$) es ωv_T, porque el ángulo entre los dos vectores es 90° como se ve en la figura 8-11*a*. Usando la ecuación 8-9, podemos escribir esto como $\omega v_T = \omega^2 r$, que es la aceleración radial (Ec. 8-11). La regla de la mano derecha aplicada a los productos vectoriales (Fig. 8-11*a*), establece que $\vec{\omega} \times \vec{v}$ señala radialmente hacia dentro en P. El producto $\vec{\omega} \times \vec{v}$ tiene la magnitud y dirección de la aceración radial; de ahí que $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_R$. Al hacer esta sustitución en la ecuación 8-21 ($\vec{\alpha} \times \vec{R} = \vec{a}_T$ y $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_R$), obtenemos de nuevo la ecuación 8-18.

Así pues, las ecuaciones 8-19 y 8-21 nos dan las relaciones vectoriales entre las variables angulares y lineales. La elegancia de expresiones tan compactas, consiste en que como todas las ecuaciones vectoriales, contienen información sobre las magnitudes *y las direcciones* de las relaciones.

OPCIÓN MÚLTIPLE

8-1 Movimiento rotacional

1. Tiene usted un globo pequeño montado, de manera que puede girar sobre el eje polar y, puede girar alrededor de un eje horizontal (en forma tal que el polo Sur quede arriba). Dele un giro rápido alrededor del eje polar y luego, antes que se detenga, un giro rápido alrededor del eje horizontal. ¿Tiene el globo puntos que estén en reposo?
   A) Hay dos puntos fijos en el globo que están en reposo.
   B) Hay dos puntos que se hallan instantáneamente en reposo, pero que se desplazan alrededor del globo en evidente forma aleatoria.
   C) En algunos momentos dos puntos están en reposo instantáneamente y en otros ninguno lo está.
   D) No hay puntos en reposo mientras el globo siga girando.

2. Una rueda de bicicleta se mueve sobre una superficie plana. En un instante cualquiera la rueda
   A) experimenta un movimiento rotacional puro.
   B) experimenta un movimiento traslacional puro.
   C) experimenta un movimiento traslacional y rotacional.
   D) experimenta un movimiento que puede ser descrito con las respuestas A) o C).

3. Considere la física de cuerpos rígidos en una dimensión mayor o menor que tres. ¿Cuántas coordenadas se requieren para especificar la posición y orientación de un cuerpo rígido
   a) si el espacio es bidimensional?
   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5
   b) si el espacio es unidimensional?
   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3
   c) si el espacio es cuatridimensional?
   A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

8-2 Las variables rotacionales

8-3 Las magnitudes rotacionales como vectores

4. ¿De qué manera $\vec{\omega}$ apunta hacia la Tierra?
   A) Paralela al eje NS y señalando al Norte.
   B) Paralela al eje NS y señalando al Sur.
   C) Paralela al eje NS y señalando al Este.
   D) Paralela al eje NS y señalando al Oeste.

8-4 Rotación con aceleración angular constante

5. Dos discos de radios $r_1 > r_2$ giran libremente y por separado alrededor de un eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano de cada uno de ellos. Ambos parten del reposo y experimentan la misma aceleración angular durante igual tiempo. ¿Cuál de los discos tendrá la mayor velocidad angular final?
   A) El disco 1.
   B) El disco 2.
   C) Los dos tendrán la misma velocidad angular.
   D) La respuesta depende de la masa de los discos.

8-5 Relaciones entre las variables lineales y angulares

6. Partiendo del reposo, un disco acelera uniformemente con una aceleración angular α. La magnitud de la aceleración *lineal* de un punto en el borde del disco
   a) crece con el tiempo t a medida que
   A) t B) t^2 C) t^3 D) t^4
   cuando $\alpha t^2 \ll 1$ y
   b) crece a medida que
   A) t B) t^2 C) t^3 D) t^4
   si $\alpha t^2 >> 1$.

8-6 Relaciones vectoriales entre las variables lineales y angulares (Opcional)

7. Una cucaracha de masa m se halla en reposo en un tocadiscos horizontal que gira con una velocidad angular $\vec{\omega}$. Su posición es *fija* relativo al tocadiscos y está dada por el vector $\vec{r}$ que se mide del eje del tocadiscos a la cucaracha. Considere el vector descrito por $m\vec{\omega} \times (\vec{v} \times \vec{r})$.
   a) ¿En qué dirección señala este vector?
   A) Hacia el eje de rotación.
   B) En otra dirección distinta al eje de rotación.
   C) Tangente a la trayectoria circular trazada por la cucaracha.
   D) En dirección vertical.
   b) Las dimensiones de este vector son las mismas que las de
   A) el ángulo de aceleración. B) la fuerza.
   C) el momento lineal. D) la velocidad al cuadrado.
   c) Este vector es proporcional a
   A) mvr. B) mr^2. C) mv^2/r. D) mr/v^2.
   donde v es la rapidez de la cucaracha medida desde un marco de referencia no rotacional.

8. La fuerza de Coriolis (véase Secc. 5-6) es una seudofuerza que se presenta en los sistemas coordenados en rotación (como la Tierra). Está dada por $-2\,m\vec{\omega} \times \vec{v}$, donde $\vec{\omega}$ es la velocidad rotacional de la Tierra, y $\vec{v}$ es la velocidad de una partícula medida desde el marco de referencia terrestre (no inercial).
   a) Se lanza un proyectil del Ecuador rumbo al Norte. La dirección de la fuerza de Coriolis en este proyectil es
   A) al Este. B) al Oeste. C) arriba.
   D) abajo. E) cero.
   b) Se lanza un proyectil del Ecuador con rumbo al Este. La dirección de la fuerza de Coriolis en él es
   A) al Norte. B) al Sur. C) arriba.
   D) abajo. E) cero.
   c) Se lanza un proyectil del Ecuador verticalmente hacia arriba. La dirección de la fuerza de Coriolis en el proyectil es
   A) al Norte. B) al Sur. C) al Este.
   D) al Oeste. E) cero.

   (Véase el ejercicio 34.)

REGUNTAS

1. En la sección 8-1 dijimos que, en general, se requieren seis variables para localizar un cuerpo rígido respecto a determinado marco de referencia. ¿Cuántas se necesitan para localizar el cuerpo de la figura 8-2 en relación con el marco de referencia xy que aparece en ella? Si el número no es seis, explique la diferencia.
2. La rotación del Sol puede monitorearse localizando las manchas solares, es decir, tormentas magnéticas que parecen manchas oscuras contra el disco brillante. En la figura 8-12*a* vemos las posiciones iniciales de cinco manchas, y en la figura 8-12*b* su posición una rotación más tarde. ¿Qué podemos concluir sobre la naturaleza física del Sol con base en estas observaciones?

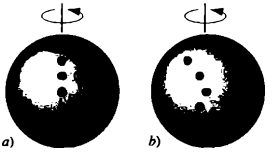


FIGURA 8-12. Pregunta 2.

3. ¿En qué sentido es el radián una medida "natural" del ángulo y el grado una medida "arbitraria" de la misma magnitud? ¿Qué ventajas ofrece, pues, el uso de radianes sobre el uso de grados?
4. ¿Podrían las magnitudes ϕ, ω_z y α_z expresarse en grados y no en radianes en las ecuaciones 8-6 y 8-7?
5. Un cuerpo rígido puede girar alrededor de un eje fijo. ¿Puede tener una aceleración angular que no sea cero, aun cuando su velocidad angular sea (quizás instantáneamente) cero? ¿Cuál es el equivalente lineal de esta pregunta? Dé ejemplos físicos que ilustren la situación angular y lineal.
6. Un golfista balancea un palo y da un golpe inicial desde el tee. ¿Tienen todos los puntos del palo la misma velocidad angular en cualquier momento mientras el palo está en movimiento?
7. ¿Debe el vector que representa la velocidad angular de una rueda que gira alrededor de un eje fijo estar necesariamente sobre éste? ¿Podría representarse como meramente paralelo al eje, pero situado en cualquier parte? Recuerde que podemos deslizar un vector de desplazamiento en su propia dirección o trasladarlo a los costados sin que cambie su valor.
8. Gire un libro como se indica en la figura 8-5, sólo que esta vez use desplazamientos angulares de 180° y no de 90°. ¿Qué conclusión saca sobre las posiciones finales del libro? ¿Lo hace cambiar de opinión sobre si los desplazamientos angulares (finitos) pueden tratarse como vectores?
9. Un pequeño cubo está contenido dentro de un cubo más grande, como se ve en la figura 8-13. Los vértices del cubo pequeño están unidos a los vértices correspondientes del cubo grande por medio de una cuerda elástica; es un ejemplo simple de *espinor*. Demuestre que el cubo interno puede girarse 360° y que las cuerdas no pueden desenredarse; pero *sí puede* hacerse si se gira 720°.

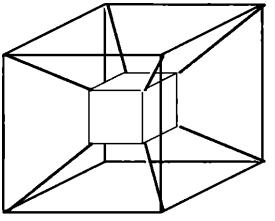


FIGURA 8-13. Pregunta 9.

10. ¿Es válida la relación $\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \Delta\phi_2 + \Delta\phi_1$, si $\Delta\phi_1$ y $\Delta\phi_2$ se refieren a ejes de rotación diferentes? ¿Lo es si se trata de diferentes rotaciones alrededor del mismo eje?
11. El planeta Venus (véase Fig. 8-14) describe una órbita circular alrededor del Sol y completa una revolución cada 225 días. Venus también gira alrededor de un eje polar y completa una rotación cada 243 días. El sentido (dirección) del movimiento rotacional es opuesto, pero paralelo al del movimiento orbital. *a*) Describa un vector que represente la rotación de Venus alrededor de su eje. *b*) Describa el vector que representa la velocidad angular de Venus alrededor del Sol. *c*) Describa la velocidad angular resultante obtenida al sumar las velocidades angulares orbital y rotacional.

FIGURA 8-14. Pregunta 11.

12. Un disco gira libremente con una velocidad angular variable. En un punto de su borde *a*) ¿Puede $a_T = 0$, si $a_R \neq 0$? *b*) ¿Puede $a_R = 0$, si $a_T \neq 0$? *c*) ¿Puede $a_T = 0$ y $a_R = 0$?
13. ¿Por qué conviene expresar en rev/s^2 la aceleración angular en la ecuación 8-7 ($\phi = \phi_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$), pero no en la ecuación 8-10 ($a_T = \alpha r$)?

14. Cuando decimos que un punto en el Ecuador de la Tierra tiene una rapidez de 2π rad/día, ¿qué marco de referencia tenemos en mente?
15. Si tenemos en cuenta la rotación y traslación de la Tierra, ¿se mueve un árbol más rápidamente de día o de noche? ¿En relación con qué marco de referencia contestó? (La rotación y traslación de la Tierra se realizan en la misma dirección.)
16. Una rueda gira alrededor de su eje. Considere un punto en el borde. Cuando la rueda gira con velocidad angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? Cuando gira con aceleración angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? ¿Cambian con el tiempo las magnitudes de estas aceleraciones?
17. Suponga que le piden determinar la distancia recorrida por una aguja en un disco de vinilo. ¿Qué información necesita? Explique desde el punto de vista de los marcos de referencia *a*) fijos en el cuarto, *b*) fijos en el disco que gira y *c*) fijos en el brazo del tocadiscos.
18. ¿Qué relación existe entre las velocidades angulares de un par de engranajes de diferente radio?

EJERCICIOS

8-1 Movimiento rotacional

1. Un cuerpo rígido existe en un espacio de n dimensiones. ¿Cuántas coordenadas se requieren para especificar la posición y orientación de este cuerpo en el espacio?

8-2 Las variables rotacionales

2. Demuestre que 1 rev/min = 0.105 rad/s.
3. El ángulo que recorre el volante de un generador durante el intervalo t está dado por

$$\phi = at + bt^3 - ct^4,$$

donde a, b y c son constantes. ¿Cuál es la expresión de su *a*) velocidad angular, y *b*) aceleración angular?

4. El Sol se halla a 2.3×10^4 ly (años luz) del centro de nuestra galaxia (Vía Láctea), y se mueve en un círculo alrededor de ese centro con una rapidez de 250 km/s. *a*) ¿Cuánto tarda el Sol en completar una revolución alrededor del centro galáctico? *b*) ¿Cuántas revoluciones ha realizado desde que se formó hace unos 4.5×10^9 años?
5. Una rueda gira con una aceleración angular α_z dada por

$$\alpha_z = 4at^3 - 3bt^2,$$

donde t es el tiempo, en tanto que a y b son constantes. Si la rueda tiene una velocidad angular inicial ω_0, escriba las ecuaciones de *a*) la velocidad angular, y *b*) el ángulo recorrido en función del tiempo.

6. ¿Cuál es la rapidez angular de *a*) en el segundero, *b*) en el minutero y *c*) el horario de un reloj?
7. Un buen lanzador de béisbol puede arrojar la pelota hacia el bateador a 85 mi/h con un efecto de 1,800 rev/min. ¿Cuántas revoluciones realiza la pelota antes de llegar al bateador? Por razones de simplicidad, suponga que la trayectoria de 60 ft es recta.
8. Un clavadista efectúa 2.5 revoluciones completas de la plataforma de 10 m al agua de la alberca. Suponiendo que la velocidad inicial sea cero, calcule la velocidad angular promedio de su clavado.
9. Una rueda tiene ocho rayos y un radio de 30 cm. Está montada sobre un eje fijo y gira a 2.5 rev/s. Quiere usted disparar una flecha de 24 cm paralela al eje que atraviese la rueda sin que golpee ninguno de los rayos. Suponga que éstos y la flecha son muy delgados (véase Fig. 8-15). *a*) ¿Qué rapidez mínima debe tener la flecha? *b*) ¿Importa a qué parte entre el eje y el borde de la rueda apunte? De ser así, ¿cuál es el mejor sitio?

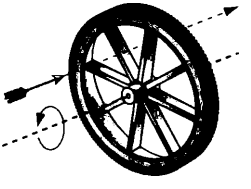


FIGURA 8-15. Ejercicio 9.

8-3 Las magnitudes rotacionales como vectores

10. Un planeta P gira alrededor del Sol, describiendo una órbita circular con el Sol en el centro, que es coplanar y concéntrica a la órbita circular de la Tierra E alrededor del Sol. P y E giran en la misma dirección. Los tiempos necesarios para la revolución de P y E alrededor del Sol son T_P y T_E. Supongamos que T_S, es el tiempo necesario para que P complete una revolución alrededor del Sol en relación con E: demuestre $1/T_S = 1/T_E - 1/T_P$. Suponga que $T_P > T_E$.
11. Repita el problema anterior y obtenga una expresión de T_S cuando $T_P < T_E$.

8-4 Rotación con aceleración angular constante

12. Un tocadiscos que gira a 78 rev/min disminuye su velocidad y se detiene 32 s después de apagar el motor. *a*) Calcule su aceleración angular (constante) en rev/min^2. *b*) ¿Cuántas revoluciones realiza el motor durante este tiempo?
13. La rapidez angular de un motor automotriz aumenta uniformemente de 1,170 a 2,880 rev/min en 12.6 s. *a*) Encuentre la aceleración angular en rev/min^2. *b*) ¿Cuántas revoluciones efectúa el motor en este lapso?
14. Como parte de una inspección de mantenimiento, se hace que el compresor de un motor de un avión a propulsión gire como se

indica en la figura 8-16. ¿Cuántas revoluciones realiza durante la prueba?

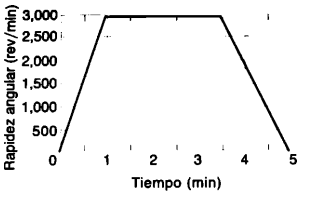


FIGURA 8-16. Ejercicio 14.

15. El volante de un motor gira a 25.2 rad/s. Cuando se apaga el motor, el volante desacelera con una rapidez constante y se detiene después de 19.7 s. Calcule *a*) la aceleración angular (en rad/s^2) del volante, *b*) el ángulo (en rad) que gira el volante hasta detenerse y *c*) las revoluciones que efectúa para detenerse.

16. Mientras espera usted para abordar un helicóptero, se da cuenta de que el movimiento del rotor cambió de 315 a 225 rev/min en 1.00 min. *a*) Calcule la aceleración promedio durante el intervalo. *b*) Suponiendo que la aceleración permanece constante, calcule cuánto tardará el rotor en detenerse. *c*) ¿Cuántas revoluciones efectuará el rotor después de su segunda observación?

17. Una rueda termina 90 rev en 15 s, y su rapidez angular al final del periodo es 10 rev/s. *a*) ¿Cuál fue su rapidez angular al comenzar el intervalo de 15 s, suponiendo que la aceleración angular fuera constante? *b*) ¿Cuánto tiempo transcurrió entre el tiempo en que la rueda estaba detenida y el inicio del intervalo de 15 s?

18. Una rueda de polea de 8.14 cm de diámetro tiene una cuerda de 5.63 m de largo enrollada en su periferia. Partiendo del reposo, se le imprime una aceleración angular de 1.47 rad/s^2. *a*) ¿Qué ángulo debe girar la rueda para que se desenrolle la cuerda? *b*) ¿Cuánto tarda en desenrollarse?

19. Un volante completa 42.3 rev al pasar de una rapidez angular de 1.44 rad/s reposo total. *a*) Suponiendo una aceleración constante, ¿qué tiempo se requiere para que se detenga? *b*) ¿Cuál es su aceleración angular? *c*) ¿Cuánto tiempo tarda en completar la primera mitad de 42.3 rev?

20. Partiendo del reposo en $t = 0$, una rueda experimenta una aceleración angular constante. Cuando $t = 2.33$ s, su velocidad angular es de 4.96 rad/s. La aceleración continúa hasta que $t = 23.0$ s, y entonces se detiene de improviso. ¿Qué ángulo gira la rueda en el intervalo $t = 0$ a $t = 46.0$ s?

8-5 Relaciones entre las variables lineales y angulares

21. ¿Qué rapidez angular tiene un automóvil que realiza una vuelta circular de radio 110 m a 52.4 km/h?

22. Un punto en el borde de una muela de 0.75 m de diámetro, cambia uniformemente de rapidez de 12 a 25 m/s en 6.2 s. ¿Cuál es su aceleración angular durante ese intervalo?

23. ¿Cuáles son *a*) la rapidez angular, *b*) la aceleración radial y *c*) la aceleración tangencial de una nave espacial que efectúa una vuelta circular de radio 3,220 km con una rapidez constante de 28,700 km/h?

24. Una varilla roscada con 12.0 vueltas/cm y 1.18 cm de diámetro está montada horizontalmente. Se le atornilla una barra con un hoyo roscado para acoplarse a ella (véase Fig. 8-17). La barra gira a 237 rev/min. ¿Cuánto tardará la barra en recorrer 1.50 cm en la varilla?

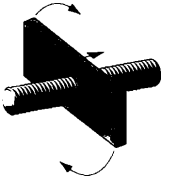


FIGURA 8-17. Ejercicio 24.

25. *a*) ¿Cuál es la rapidez angular alrededor del eje polar en un punto de la superficie terrestre a una latitud Norte de 40°? *b*) ¿Cuál es la rapidez lineal? *c*) ¿Qué valores tiene un punto en el Ecuador?

26. Un volante de giroscopio de radio 2.83 cm acelera partiendo del reposo a 14.2 rad/s^2, hasta alcanzar una rapidez angular de 2,760 rev/min. *a*) ¿Qué aceleración tangencial tiene un punto en el borde del volante? *b*) ¿Cuál es su aceleración radial en este punto cuando el volante gira a su máxima velocidad? *c*) ¿Qué distancia recorre un punto del borde durante la aceleración?

27. Si una hélice de avión de radio 5.0 ft (1.5 m) gira a 2,000 rev/min, y si el avión es impulsado a una velocidad absoluta de 300 mi/h (480 km/h), ¿qué rapidez tiene un punto del borde de la hélice, visto por *a*) el piloto, y *b*) un observador en el suelo? Suponga que la velocidad del avión es paralela al eje de rotación de la hélice.

28. Las aspas de un molino de viento parten del reposo y giran con una aceleración angular de 0.236 rad/s^2. ¿Cuánto tiempo transcurre antes que un punto del aspa experimente el mismo valor en la magnitud de la aceleración centrípeta y tangencial?

29. Un cuerpo rígido parte del reposo y gira alrededor de un eje fijo con una aceleración angular constante α. Considere una partícula situada a una distancia r del eje. Exprese *a*) su aceleración radial, y *b*) su aceleración tangencial en función de α, r y del tiempo t. *c*) Si la aceleración resultante de la partícula en algún instante forma un ángulo de 57.0° con la aceleración tangencial, ¿qué ángulo total giró el cuerpo de $t = 0$ hasta ese instante?

30. Un automóvil que va a 97 km/h tiene ruedas con un diámetro de 76 cm. *a*) Calcule la rapidez angular de las ruedas alrededor del eje. *b*) Se hace que se detenga uniformemente en 30 vueltas de las ruedas. Calcule la aceleración angular. *c*) ¿Qué distancia recorre durante el periodo de frenado?

31. Un tacómetro instalado en la rueda delantera de una bicicleta ofrece una lectura directamente proporcional a la rapidez angular de la rueda. Suponga que está calibrado para una rueda de 72 cm de diámetro, pero que por error se coloca en una con un diámetro de 62 cm. ¿Será errónea la lectura de la rapidez lineal? Y en caso de que

lo sea, ¿en qué sentido y en qué fracción de la velocidad verdadera?

8-6 Relaciones vectoriales entre las variables lineales y angulares (Opcional)

32. Un objeto se mueve en el plano xy, de modo que $x = R \cos \omega t$ y $y = R \operatorname{sen} \omega t$. Aquí x y y son las coordenadas del objeto, t es el tiempo, mientras que R y ω son constantes. *a*) Elimine t entre las ecuaciones para encontrar la ecuación de la curva donde se desplaza el objeto. ¿Cuál es la curva? ¿Qué significa la constante ω? *b*) Derive las ecuaciones de x y de y respecto al tiempo, y obtenga los componentes x y y de la velocidad del cuerpo, v_x y v_y. Combine v_x y v_y para determinar la magnitud y dirección de v. Describa el movimiento del objeto. *c*) Derive v_x y v_y respecto al tiempo para que obtenga la magnitud y dirección de la aceleración resultante.

33. Un objeto rígido que gira alrededor del eje z disminuye su velocidad a 2.66 rad/s^2. Considere una partícula situada en $\vec{r} = (1.83 \text{ m})\hat{j} + (1.26 \text{ m})\hat{k}$. En el instante en que $\vec{\omega} = (14.3 \text{ rad/s})\hat{k}$, calcule *a*) la velocidad de la partícula, *b*) su aceleración. *c*) ¿Qué radio tiene la trayectoria circular de la partícula?

34. En un campo de fútbol americano de Minneapolis, Minnesota, se lanza verticalmente un proyectil de 12 kg hacia arriba, con una rapidez inicial de 35 m/s. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza de Coriolis (consúltense la pregunta 8 de opción múltiple y la sección 5-6) del proyectil poco después del lanzamiento. *b*) ¿Cuál es la dirección aproximada de la fuerza de Coriolis del proyectil mientras se dirige hacia la Tierra? *c*) ¿Retornará el proyectil al punto original de lanzamiento? Si no lo hace, ¿en qué dirección aterrizará en relación con el punto de lanzamiento?

PROBLEMAS

1. La posición angular de un punto en el borde de una rueda giratoria, se describe por medio de $\phi = (4.0 \text{ rad/s})t - (3.0 \text{ rad/s}^2)t^2 + (1.0 \text{ rad/s}^3)t^3$. *a*) ¿Cuál es la velocidad angular en $t = 2.0$ y en $t = 4.0$ s? *b*) ¿Cuál es la aceleración angular promedio del intervalo temporal que comienza en $t = 2.0$ s y termina en $t = 4.0$ s? *c*) ¿Cuál es la aceleración angular instantánea al inicio y final del intervalo?

2. Una rueda con 16 rayos que gira en dirección de las manecillas del reloj se fotografía en película. Ésta pasa por un proyector con una rapidez de 24 cuadros/s que es la adecuada. Sin embargo, en la pantalla da la impresión de girar a 4.0 rev/min en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Calcule la menor rapidez angular posible a que giraba la rueda.

3. El día solar es el intervalo entre dos apariciones sucesivas del Sol arriba de una longitud determinada, es decir, el tiempo que dura una rotación completa de la Tierra respecto a él. El día sideral, es el tiempo que dura una rotación completa de la Tierra en relación con las estrellas fijas, esto es, el intervalo entre dos observaciones sucesivas de arriba de la dirección fija en los cielos, denominada "equinoccio invernal". *a*) Demuestre que hay exactamente un día solar (medio) menos en un año que días siderales (medios) en un año. *b*) Si el día solar (medio) dura exactamente 24 horas, ¿cuánto durará el día sideral (medio)?

4. El pulsar es una estrella de neutrones que gira rápidamente, del cual recibimos pulsos de radio con sincronización exacta; hay un pulso por cada rotación de la estrella. El periodo T de rotación, se obtiene midiendo el tiempo entre pulsos. En la actualidad, el pulsar en la región central de la nebulosa Craba (véase Fig. 8-18) tiene un periodo de rotación de $T = 0.033$ s, y se ha observado que aumenta a una rapidez de 1.26×10^{-5} s/y. *a*) Demuestre que la rapidez angular ω de la estrella, se relaciona con el periodo de rotación $\omega = 2\pi/T$. *b*) ¿Qué valor tiene la aceleración angular en rad/s^2? *c*) Si su aceleración angular es constante, ¿cuándo dejará de girar el pulsar? *d*) El pulsar se originó en la explosión de una supernova acaecida en el año 1054 después de Cristo. ¿Cuál fue el periodo de su rotación en ese momento? (Suponga una aceleración angular constante.)

5. Dos estudiantes efectúan un experimento simple. El primero observa la orientación de un disco estable con una sola marca en el borde. Luego mira a otro lado. El segundo estudiante le da entonces una aceleración rotacional constante de 3.0 rad/s^2 durante 4.0 segundos; después lo detiene con una aceleración angular constante en un tiempo de 0.10 s. Ahora al primer estudiante se le permite observar el disco otra vez. *a*) Desde el punto de vista del primero, ¿qué ángulo se mueve el disco? *b*) ¿Cuál es la velocidad angular promedio?

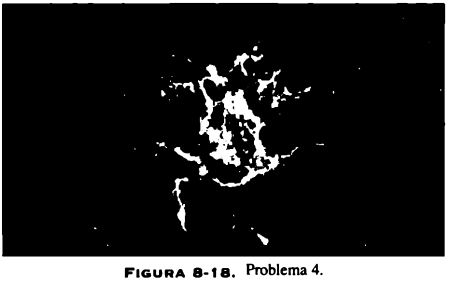


FIGURA 8-18. Problema 4.

6. A un astronauta se le administran pruebas en una centrífuga. Ésta tiene un radio de 10.4 m, y al inicio gira conforme a $\phi = (0.326 \text{ rad/s}^2)t^2$. Cuando $t = 5.60$ s, ¿cuáles son *a*) la rapidez angular, *b*) la rapidez tangencial, *c*) la aceleración tangencial y *d*) la aceleración radial del astronauta?

7. La órbita terrestre alrededor del Sol es casi un círculo. *a*) ¿Cuál es la rapidez angular de la Tierra (considerada como partícula) alrededor del Sol? *b*) ¿Cuál es su rapidez lineal en la órbita? *c*) ¿Cuál es su aceleración respecto al Sol?

8. El volante de un motor de vapor funciona con una rapidez angular constante de 156 rev/min. Cuando se apaga el vapor, la fricción de los cojinetes y del aire lo detienen en 2.20 h. *a*) ¿Cuál es la aceleración angular constante del volante en rev/min^2. *b*) ¿Cuántas revoluciones realizará antes de detenerse? *c*) ¿Cuál es la aceleración lineal tangencial de una partícula a 52.4 cm del eje de rotación, cuando el volante gira a 72.5 rev/min? *d*) ¿Qué magnitud tiene la aceleración total de la partícula en la parte *c*)?

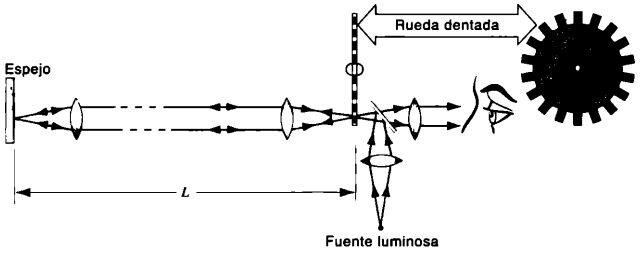


FIGURA 8-19. Problema 9.

9. Un método primitivo con que se mide la velocidad de la luz, consiste en usar una rueda giratoria dentada. El haz luminoso atraviesa una ranura en el borde externo de la rueda, como se indica en la figura 8-19, se dirige posteriormente a un espejo lejano y regresa a la rueda justo a tiempo para cruzar la siguiente ranura de la rueda. La rueda tiene un radio de 5.0 cm y 500 dientes en el borde. Las medidas tomadas cuando el espejo estaba a $L = 500$ m de la rueda, indicaron una velocidad de la luz de 3.0×10^5 km/s. *a)* ¿Cuál fue la rapidez angular (constante) de la rueda? *b)* ¿Qué rapidez lineal tenía un punto en su borde?

10. La rueda A de radio $r_A = 10.0$ cm, está acoplada mediante una banda B a la rueda C de radio $r_C = 25.0$ cm, como se aprecia en la figura 8-20. La rueda A aumenta su rapidez angular a partir del reposo con una rapidez uniforme de 1.60 rad/s^2. Determine el tiempo que la rueda C tarda en alcanzar una rapidez angular de 100 rev/min, suponiendo que la banda no resbale. (*Sugerencia*: Si la banda no resbala, la rapidez lineal de los bordes de las dos ruedas habrá de ser igual.)

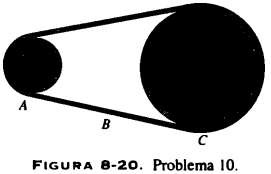


FIGURA 8-20. Problema 10.

11. El disco de un sistema de disco compacto/audio digital, tiene un radio interno y externo en su material grabado (el concierto para violín de Tchaikovsky y de Mendelssohn) de 2.50 y 5.80 cm, respectivamente. En la reproducción se recorre el disco con una rapidez lineal constante de 130 cm/s, comenzando con su borde interno y avanzando hacia afuera. *a)* Si la rapidez angular inicial del disco es 50.0 rad/s, ¿cuál será su rapidez angular final? *b)* Las líneas espirales de grabación están a una distancia de 1.60 μm; ¿cuál es la longitud total de la grabación? *c)* ¿Cuál es el tiempo de reproducción?

12. Un automóvil se dirige al Este por una carretera recta y plana, con una velocidad constante $\vec{v}$. Un observador se encuentra a una distancia b al Norte de la carretera. Calcule su velocidad $\vec{\omega}$ y aceleración $\vec{\alpha}$ angulares medidas por un observador en función del tiempo. Suponga que el vehículo se halla más cerca del observador en el tiempo $t = 0$.

13. Un trineo de cohete se desliza por una pista horizontal recta con una velocidad $\vec{v}(t)$. Un observador a una distancia b de la pista mide la velocidad angular $\vec{\omega}$ y descubre que es constante. *a)* Calcule $\vec{v}(t)$ suponiendo que el trineo está más cerca del observador cuando $t = 0$. *b)* ¿Aproximadamente, en qué tiempo t_c el movimiento del trineo se vuelve imposible desde el punto de vista físico?

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. La fuerza efectiva en un proyectil en movimiento muy cerca de la Tierra es

$$\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v},$$

donde $\vec{g}$ es la aceleración en caída libre, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de la Tierra y $\vec{v}$ es la velocidad del proyectil medido desde el marco de referencia (no inercial) de ella. *a)* Escriba un programa de computadora que determine la trayectoria real de un proyectil de 1.0 kg lanzado verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 100 m/s de un punto en el Ecuador terrestre. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae el proyectil? *b)* Desarrolle un programa de computadora que determine la trayectoria real de un proyectil de 1.0 kg, que es lanzado con una velocidad inicial de 100 m/s en un ángulo de 45° arriba de la horizontal, y que se dirige a un punto del Ecuador terrestre. ¿De qué magnitud es el error causado en el sitio objetivo por la Tierra que gira?

2. Un volante disminuye su velocidad bajo la influencia de una aceleración angular no constate. La posición angular de la línea de referencia del volante está descrita por

$$\phi(t) = (A + Bt + Ct^3)e^{-\beta t}$$

a partir de $t = 0$, cuando el volante comenzaba a reducir su velocidad a $t = T$ al detenerse. Aquí $A = +2.40$ rad, $B = +5.12$ rad/s, $C = -0.124$ rad/s^3 y $\beta = +0.100$ s^{-1}. *a)* Obtenga una expresión de la velocidad angular, y determine el tiempo T en que la velocidad se vuelve cero. *b)* Calcule el ángulo que gira la rueda cuando se hace que se detenga.

DINÁMICA ROTACIONAL

En el Capítulo 8 hemos estudiado la cinemática rotacional y señalado que no contenía características básicas nuevas, pues los parámetros rotacionales ϕ, ω *y* α *se relacionan con los parámetros traslacionales correspondientes* x, v *y* a *en las partículas que constituyen el sistema rotacional. En este capítulo, siguiendo el patrón de nuestro estudio del movimiento traslacional examinaremos las causas de la rotación, tema denominado* dinámica rotacional. *Los sistemas rotacionales están constituidos por partículas, y ya aprendimos a aplicar las leyes de la mecánica clásica a su movimiento. Por tal razón, la dinámica rotacional como la cinemática, no debería contener características que son fundamentalmente nuevas. Sin embargo, igual que en el Capítulo 8, conviene darles una nueva forma a los conceptos del movimiento traslacional, sobre todo los escogidos porque facilitan la descripción de los sistemas rotacionales.*

9-1 LA TORCA

Iniciamos el estudio de la dinámica en el Capítulo 3 definiendo la fuerza en función de la aceleración que produjo cuando actuaba sobre un cuerpo de masa estándar (Secc. 3-3). Entonces pudimos obtener la masa de cualquier otro cuerpo en relación con la masa estándar con sólo medir la aceleración producida cuando la misma fuerza operaba en los dos (Secc. 3-4). Incorporamos nuestras observaciones sobre la fuerza, la masa y la aceleración en la segunda ley de Newton, según la cual: la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es igual a su masa multiplicada por su aceleración.

El procedimiento de la dinámica rotacional es similar. Comenzaremos considerando la aceleración angular producida cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido que puede girar libremente alrededor de un eje fijo. En analogía con el movimiento de traslación, descubriremos que la aceleración angular es proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada. Sin embargo, emerge una característica que no estaba presente en el movimiento de traslación: la aceleración angular depende *también* de *dónde* se aplique la fuerza al cuerpo. Si una fuerza se aplica en varias partes del cuerpo (o incluso en el mismo sitio, pero en distintas direcciones), casi siempre causará aceleraciones angulares distintas.

En la dinámica rotacional la cantidad que tiene en cuenta tanto la magnitud de la fuerza como la dirección, y el sitio donde se aplica se llama *par, torca* o *momento de torsión.* Torca es un término derivado de la palabra latina *torquere*, que significa "torcer"; podemos, pues, concebirla como una torsión en el mismo sentido en que concebimos la fuerza como empuje o tracción. Igual que la fuerza (y que la aceleración angular), la torca es una magnitud vectorial. *En este capítulo examinaremos tan sólo los casos en que el eje rotacional tiene una dirección fija.* Por tanto, será necesario considerar sólo un componente del vector torca. Esta restricción se parece a la explicación dada en el Capítulo 3, al hacer referencia a la dinámica traslacional en una dimensión.

Además, descubrimos que la aceleración angular de un cuerpo en respuesta a determinada torca, depende no sólo de la masa del cuerpo, sino también de cómo esté distribuida respecto al eje de rotación. En una torca obtenemos una aceleración angular cuando la masa está cerca del eje de rotación y otro cuando está lejos de él. Se da el nombre de *inercia rotacional* a la magnitud rotacional que describe la masa de un cuerpo y su distribución respecto al eje de rotación.* A diferencia de la masa, ésta no es una propiedad intrínseca del cuerpo, sino que

*Conocida también como *momento de inercia.*

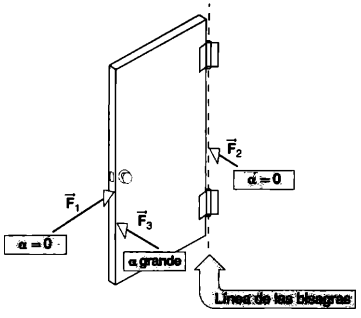


FIGURA 9-1. Al aplicar una fuerza $\vec{F}$ a una puerta, se produce una aceleración angular α que varía con el punto donde se aplica, y con su dirección respecto a la línea de las bisagras. La fuerza $\vec{F}_1$ se aplica en una línea que cruzará por la de las bisagras, sin que produzca aceleración angular (la puerta no se mueve). La fuerza $\vec{F}_2$ se aplica en la línea de las bisagras; tampoco causa aceleración angular. La fuerza $\vec{F}_3$ se aplica en un punto lejano de la línea de las bisagras y en una dirección perpendicular a la línea que conecta el punto de aplicación de $\vec{F}_3$ con la línea de las bisagras; esta fuerza produce la aceleración angular más grande posible.

depende de la elección del eje de rotación. Del mismo modo que la masa puede considerarse como la propiedad de un cuerpo que representa su resistencia a la aceleración lineal, también la inercia rotacional representa su resistencia a la aceleración angular. En la siguiente sección se aborda la inercia rotacional de los cuerpos sólidos; en ésta estudiaremos la torca de un cuerpo debido a la fuerza aplicada.

Una de las experiencias más comunes del movimiento rotacional consiste en abrir una puerta montada con bisagras. Observamos que una fuerza produce diversos niveles de aceleración angular, según la parte de la puerta donde se aplica y la dirección que se le dé (Fig. 9-1). Una fuerza (por ejemplo, $\vec{F}_1$) aplicada en un extremo a lo largo de la puerta, no produce aceleración angular, tampoco una fuerza (por ejemplo, $\vec{F}_2$) aplicada en la línea de las bisagras. Una fuerza (por ejemplo, $\vec{F}_3$) aplicada en ángulo recto en el borde exterior de la puerta produce la aceleración angular más grande.

En la figura 9-2 vemos un cuerpo rígido arbitrario que gira libremente alrededor del eje z. Se le aplica una fuerza $\vec{F}$ en el punto P, que está a una distancia perpendicular r del eje de rotación. La figura 9-3a muestra una sección transversal del cuerpo en el plano xy; el vector $\vec{r}$ en este plano ubica el punto P en relación con el eje. Suponemos que la fuerza $\vec{F}$ también se encuentra en este plano y que, por tanto, tiene sólo los componentes x y y; cualquier componente posible z de la fuerza no tiene efecto en las rotaciones alrededor del eje z, así como tampoco una fuerza vertical aplicada a la puerta en la figura 9-1 ocasiona una aceleración angular alrededor de la línea de las bisagras.

Como se advierte en la figura 9-3b, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ forman un ángulo θ entre sí. La fuerza $\vec{F}$ puede separarse en

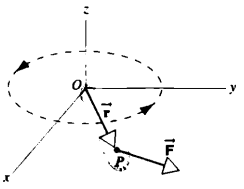


FIGURA 9-2. Un cuerpo rígido puede girar libremente alrededor del eje z. Se aplica una fuerza $\vec{F}$ en su punto P.

sus componentes radiales y tangenciales. El componente radial $F_R = F \cos \theta$, no influye en la rotación del cuerpo alrededor del eje z, como tampoco la fuerza $\vec{F}_1$ en la figura 9-1 logra hacer girar la puerta. Sólo el componente tangencial $F_T = F$ sen θ, produce una rotación alrededor del eje z (como la fuerza $\vec{F}_3$ en la figura 9-1).

Además de la magnitud del componente tangencial de $\vec{F}$, la aceleración angular del cuerpo dependerá de la distancia del eje respecto al cual se aplique la fuerza. Mientras mayor sea la distancia respecto al eje, una aceleración angular más grande ocasionará la fuerza.

Así pues, la aceleración angular depende del componente tangencial de la fuerza y de la distancia del punto en que se aplique respecto al eje de rotación. A la magnitud rotacional que incluye ambos factores se le llama *torca* τ. Su magnitud se define así

$$\tau = rF \text{ sen } \theta. \tag{9-1}$$

La torca tiene dimensiones de fuerza multiplicada por distancia. Su unidad puede ser el newton-metro (N · m) o la libra-pie (lb · ft), entre otras posibilidades.

De acuerdo con la ecuación 9-1, la torca es cero si: 1) $r = 0$, es decir, la fuerza aplicada en o a lo largo del eje de rotación; 2) $F = 0$, es decir, si no hay una fuerza aplicada; o 3) $\theta = 0°$ o $180°$, esto es, si la fuerza se aplica en dirección radial hacia fuera o hacia dentro. En los tres casos, no produce aceleración angular alrededor del eje z.

Si hubiéramos optado por poner el eje de rotación en otra parte del cuerpo, la fuerza aplicada en P podría producir una torca distinta (porque r o θ podría ser diferente). En consecuencia, la torca producida por una fuerza dependerá del eje de rotación que se elija, o también del origen del sistema coordenado. Para aclarar esta elección, siempre nos referiremos al punto alrededor del cual hemos calculado la torca. Por tanto, la ecuación 9-1 define la torca alrededor del punto O. En caso que hubiéramos seleccionado otro punto O' intermedio entre O y P, la torca resultante alrededor de O' tendrá la mitad de la magnitud que la torca alrededor del punto O (porque la distancia r corresponderá a la mitad).

La figura 9-3c indica otra manera de interpretar la torca alrededor de O. El componente de la fuerza perpendicular a $\vec{r}$ se designa como $F_\perp$; es el mismo que el componente tangencial F_T en la figura 9-3b, y tiene la magnitud F sen θ. El componente de $\vec{r}$ perpendicular a $\vec{F}$ se denota como $r_\perp$, y tiene la

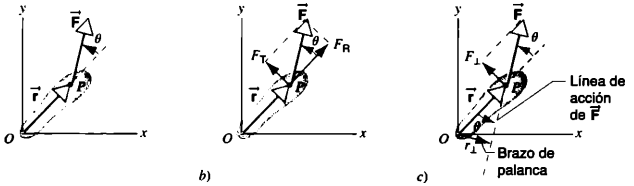


FIGURA 9-3. *a*) Sección transversal en el plano *xy* del cuerpo que aparece en la figura 9-2. La fuerza $\vec{F}$ está en el plano *xy*. *b*) La fuerza $\vec{F}$ se separa en sus componentes radial (F_R) y tangencial (F_T). *c*) El componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$ es $F_\perp$ (identificado también como el componente tangencial (F_T), y el componente de $\vec{r}$ perpendicular a $\vec{F}$ (o a su línea de acción) es $r_\perp$.

magnitud r sen θ. Entonces podemos reescribir la ecuación 9-1 en dos formas:

$$\tau = r(F \text{ sen } \theta) = rF_\perp, \qquad (9\text{-}2a)$$

$$\tau = (r \text{ sen } \theta)F = r_\perp F. \qquad (9\text{-}2b)$$

En la ecuación 9-2*a*, la magnitud de la torca depende del componente de la fuerza perpendicular a $\vec{r}$; si el componente es cero, también la torca es cero. En la ecuación 9-2*b*, la torca depende del *brazo de palanca* $r_\perp$ que, como se ve en la figura 9-3*c*, es la distancia perpendicular del origen a la línea donde actúa $\vec{F}$, llamada *línea de acción* de $\vec{F}$. Si el brazo de palanca de una fuerza es cero, la torca alrededor de O es cero; por ejemplo, el componente radial F_R tiene un brazo de palanca de cero, y por eso no nos da una torca alrededor de O.

La torca como vector

La ecuación 9-1 nos da la magnitud de la torca, pero ésta también tiene una dirección que suponemos que es la del eje alrededor del cual la fuerza produce una rotación. En la figura 9-2, el eje es el eje z. Si una cantidad tiene magnitud y dirección, pensaremos que podemos representarla como vector, con tal que satisfaga las reglas de transformación y de combinación que asociamos a los vectores. La torca satisface estas reglas, por lo cual conviene representar la torca como vector.

Si queremos localizar la torca es preciso combinar el vector $\vec{r}$ y el vector $\vec{F}$ en otro vector $\vec{\tau}$. Una forma de combinar los vectores arbitrarios $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en un tercero $\vec{C}$, consiste en utilizar el *producto vectorial* (llamado también *producto cruz*), escrito como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ (y que se lee "A cruz B"). El producto cruz de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define como un vector $\vec{C}$ cuya magnitud es $C = AB$ sen θ, donde A es la magnitud de $\vec{A}$, B es la magnitud de $\vec{B}$ y θ es el ángulo menor entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Esta definición ($C = AB$ sen θ) tiene la misma forma que la ecuación 9-1 referente a la torca ($\tau = rF$ sen θ), lo cual nos hace sospechar que la torca puede escribirse como el producto cruz de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

¿Y la dirección del vector determinado por el producto cruz? Se define que la dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ sea perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, como lo determina la regla de la mano derecha: alinee los dedos de la mano derecha con el primer vector ($\vec{A}$) y gire los dedos de $\vec{A}$ a $\vec{B}$ a través del menor de los dos ángulos situados entre ellos. Entonces el pulgar extendido señala en dirección de $\vec{C}$. Nótese que, de acuerdo con esta definición, el producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$ no es el mismo que el producto cruz $\vec{B} \times \vec{A}$; de hecho, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. Los dos productos cruz tienen la misma magnitud y dirección opuesta. En el apéndice H se dan más detalles sobre el producto cruz.

En función de ese producto la torca se expresa así

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (9\text{-}3)$$

De acuerdo con la definición de producto cruz, la magnitud del vector $\vec{\tau}$ dado por la ecuación 9-3 es rF sen θ, conforme a la definición de magnitud de la torca en la ecuación 9-1. Para ejemplificar cómo la regla de la mano derecha determina la dirección del vector de la torca, en la figura 9-4 hemos redibujado los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ a partir de la figura 9-2; el cuerpo rígido no se muestra para simplificar la situación. De acuerdo

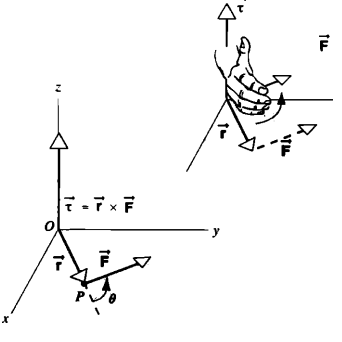


FIGURA 9-4. Una fuerza $\vec{F}$ actúa en el punto P de un cuerpo rígido (que no aparece en la figura). Ejerce una torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ sobre él respecto al origen O. El vector torca apunta en dirección de z creciente; podría trazarse en cualquier parte que escogiéramos, a condición de que sea paralelo el eje z. La inserción muestra cómo se usa la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de la torca. Para simplificar la explicación, podemos deslizar el vector de fuerza lateralmente sin modificar su dirección, hasta que la cola de $\vec{F}$ alcance la de $\vec{r}$.

con la regla de la mano derecha ilustrado en la inserción de la figura, los dedos se alinean con $\vec{r}$ y se gira en el ángulo θ a $\vec{F}$. Entonces el pulgar señala en la dirección del vector torca, que es paralelo al eje z. En función de los componentes de $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$, podemos escribir la torca (véase Apén. H) así

$$\vec{\tau} = (yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}. \quad (9\text{-}4)$$

La torca definida por el producto cruz en la ecuación 9-3, es perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$. En el caso de la figura 9-4, el plano es xy. La torca debe entonces ser perpendicular al plano xy o paralelo al eje z. No es necesario trazar el vector torca *a lo largo* del eje z (como lo hicimos en la figura 9-4); podría colocarlo *en cualquier parte* del sistema coordenado de la figura 9-4, sin alterar la validez de la ecuación 9-3, a condición de que $\vec{\tau}$ permanezca paralela al eje z.

Con el cuerpo rígido y con la fuerza aplicada posicionada como en la figura 9-2, la torca tiene sólo un componente positivo z. La ecuación 9-1 define τ_z en la geometría de la figura 9-2, pero nos da sólo la magnitud de τ_z y no su signo. Bajo la acción de la fuerza aplicada, la velocidad angular del cuerpo rígido aumentará en la dirección indicada en la figura 9-2, que corresponde a una aceleración angular en la dirección z y que tiene un componente positivo z (empleando las definiciones de la sección 8-3 referentes a la dirección de la velocidad angular y a los vectores de aceleración angular). Por tanto, una τ_z positiva, produce una aceleración α_z también positiva. Esto se parece mucho a la relación vectorial en la forma lineal de la segunda ley de Newton, según la cual un componente de fuerza en determinada dirección causa aceleración en ella.

Podemos asignarle un signo algebraico al componente vectorial de una torca *a lo largo* de un eje cualquiera, considerando que el componente de la torca es positivo si produce rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj al ser visto desde el eje seleccionado, y que es negativo si produce rotaciones en el otro sentido. Desde otro punto de vista, si queremos encontrar el signo del componente de un vector torca en un eje cualquiera —digamos en el eje z—, se alinea el pulgar de la mano derecha en la dirección positiva del eje; entonces τ_z es positiva para una fuerza que, cuando opere sola, produzca una rotación en dirección de los dedos de la mano derecha; las torcas negativas son las que originan rotaciones en dirección contraria. La ecuación 9-4 contiene los signos de los componentes.

PROBLEMA RESUELTO 9-1. Un péndulo se compone de un cuerpo de masa $m = 0.17$ kg en el extremo de una varilla rígida de longitud $L = 1.25$ m y de masa despreciable (Fig. 9-5). *a)* ¿Qué magnitud tiene la torca debido a la gravedad alrededor del punto pivote O en el instante en que, como se muestra, se desplaza el péndulo en un ángulo de $\theta = 10°$ respecto a la vertical? *b)* ¿Qué dirección sigue la torca alrededor de O en ese instante? ¿Depende la dirección de que el péndulo sea desplazado a la izquierda o la derecha de la vertical?

Solución *a)* Podemos utilizar directamente la ecuación 9-1 para determinar la magnitud de la torca, con $r = L$ y $F = mg$:

$$\tau = Lmg \text{ sen } \theta = (1.25 \text{ m})(0.17 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 10°)$$
$$= 0.36 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

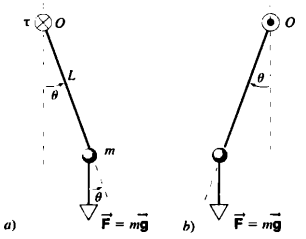


FIGURA 9-5. Problema resuelto 9-1. Péndulo que se compone de un cuerpo de masa m en el extremo de una varilla rígida sin masa de longitud L. *a)* La gravedad ejerce una torca hacia adentro de la página en O, lo cual se indica con el símbolo ⊗ (que denota la cola de una flecha). *b)* Cuando desplazamos el péndulo a la izquierda de la vertical, la torca en O queda hacia afuera de la página, lo cual se indica mediante el símbolo ⊙ (que denota la punta de una flecha.)

b) Con el desplazamiento como se muestra en la figura 9-5*a*, la torca alrededor del pivote entra en el plano del papel. Es necesario que el lector se convenza a sí mismo de que, si desplazamos el péndulo en el lado opuesto de la vertical, la torca tiene la dirección opuesta. Como veremos más adelante en el capítulo, la torca produce una aceleración angular paralela a él. En el primer caso, la aceleración angular hacia adentro del papel tiende a mover el péndulo a su posición de equilibrio. Cuando se desplaza el péndulo en el lado opuesto de la vertical (Fig. 9.5*b*), la torca que ahora sale del papel tiende una vez más a restaurar la posición del equilibrio del péndulo. Verifique las conclusiones anteriores, aplicando la regla de la mano derecha para relacionar el sentido de rotación con la dirección del vector de aceleración angular (supuestamente paralela a la torca).

9-2 INERCIA ROTACIONAL Y LA SEGUNDA LEY DE NEWTON

Sostenga un palo largo en la mano como se indica en la figura 9-6. Al girar la muñeca, podrá hacer lo mismo con el palo alrededor de varios ejes. Descubrirá que se requiere un efecto mucho menor para girar el palo alrededor de un eje en toda su extensión (como en la figura 9-6*a*), que alrededor de un

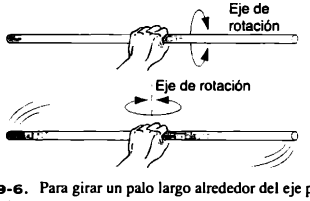


FIGURA 9-6. Para girar un palo largo alrededor del eje paralelo a su longitud, como en *a*), se requiere menos esfuerzo que para girarlo alrededor de un eje perpendicular a su longitud como en *b*). En *a*), las partículas del palo se encuentran más cerca del eje de rotación que en *b*); de manera que en *a*) el palo tiene una inercia rotacional más pequeña.

eje perpendicular a su longitud (como en la figura 9-6*b*). La diferencia se debe a que la *inercia rotacional* no es la misma en ambos casos. A diferencia de la masa de un objeto (la inercia de traslación), que posee un solo valor, la inercia rotacional de un objeto puede variar si escogemos diversos ejes de rotación. Como veremos luego, depende de cómo se distribuya la masa en el eje de rotación. En la figura 9-6*a*, la masa se halla bastante cerca de él; en la figura 9-6*b* está en general mucho más lejos. Esta diferencia da origen a mayor inercia rotacional en esa figura, inercia que experimentamos como una resistencia más fuerte a la rotación. En la presente sección vamos a examinar la inercia rotacional de un partícula o de un grupo de partículas; en la siguiente nos ocuparemos de la de cuerpos sólidos como el palo de la figura 9-6.

Inercia rotacional de una sola partícula

La figura 9-7 muestra una partícula de masa m. Puede girar libremente alrededor del eje z, al cual está unido por una varilla delgada de longitud r y de masa despreciable. Se le aplica una fuerza $\vec{F}$ en una dirección arbitraria en un ángulo θ con la varilla. Según señalamos en la sección 9-1, un componente de fuerza paralelo al eje de rotación (el eje z) no influye en la rotación alrededor del eje, de manera que necesitamos considerar sólo una fuerza que está en el plano xy.

El componente tangencial de $\vec{F}$, es la única fuerza en la partícula que opera en dirección tangencial, por lo cual la fuerza tangencial neta es $\Sigma F_T = F \operatorname{sen} \theta$. La segunda ley de Newton aplicada al movimiento tangencial de la partícula, nos da $\Sigma F_T = ma_T$. Al sustituir $F \operatorname{sen} \theta$ por la fuerza tangencial neta, y también $a_T = \alpha_z r$ (Ec. 8-10) obtendremos

$$F \operatorname{sen} \theta = m\alpha_z r.$$

Si multiplicamos ambos lados por el radio r, el lado izquierdo de la ecuación se convierte en $rF \operatorname{sen} \theta$, el cual es el componente z del par respecto al punto O como se definió en la ecuación 9.1. Por tanto, obtenemos

$$\tau_z = mr^2\alpha_z. \tag{9-5}$$

Esta ecuación establece la proporcionalidad entre el componente z de la torca, y el de la aceleración angular en la rotación alrededor de un eje fijo (el eje z). Es semejante a la segunda ley del movimiento de Newton aplicada al movimiento de traslación en una dimensión (que puede escribirse $F_z = ma_z$), y la magnitud mr^2 de la ecuación 9-5 es análoga a la masa en la ecuación de traslación. Definimos que esta cantidad es la *inercia rotacional* I de la partícula:

$$I = mr^2 \tag{9-6}$$

La inercia rotacional depende de la masa de la partícula, y de la distancia perpendicular entre ella y el eje de rotación. Conforme aumenta la distancia de ella con el eje, la inercia se incrementa aunque la masa no cambie.

La inercia rotacional tiene dimensiones de masa multiplicada por la longitud al cuadrado (ML^2), y sus unidades podrían ser kg · m^2, por ejemplo. Puede variar con la ubicación o dirección del eje de rotación, pero *no* es un vector (sus propiedades direccionales son más complicadas que las de los vectores ordinarios). No obstante, como se definió en la ecuación 9-6, por analogía con la masa puede tratarse como un escalar en las rotaciones alrededor de un solo eje.

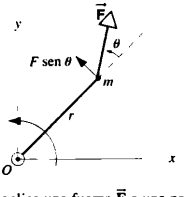


FIGURA 9-7. Se aplica una fuerza $\vec{F}$ a una partícula conectada a una varilla rígida de masa despreciable que gira en el plano xy. La torca debida a $\vec{F}$, está en la dirección positiva z (hacia afuera de la página), como lo indica el símbolo ⊙ en el origen.

Segunda ley de Newton aplicada a la rotación

Una vez dada esta definición de inercia rotacional, podemos examinar más a fondo la relación existente entre la torca y aceleración angular. Lo haremos en un sistema más complejo que puede componerse de muchas partículas. Del mismo modo que la búsqueda de la relación de la fuerza con la aceleración lineal (tema expuesto en el Capítulo 3) nos condujo a la forma traslacional de la segunda ley de Newton, esta explicación nos llevará a su forma rotacional.

Comenzaremos considerando la inercia rotacional de un sistema más complejo formado por muchas partículas. Como antes, aplicamos una sola fuerza a una de ellas. Por ejemplo, la figura 9-8*a* muestra un cuerpo rígido formado por dos partículas de masas m_1 y m_2, que pueden girar libremente en el plano xy alrededor del eje z. Están conectadas al eje por delgadas varillas de masa despreciable que miden de largo r_1 y r_2, respectivamente; una varilla similar las conecta entre sí. Una fuerza externa $\vec{P}$ en el plano xy se aplica a la partícula 1. Las partículas experimentan además una tensión que actúa en las varillas que las unen al origen ($\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$), lo mismo que una tensión que opera en la que las une ($\vec{T}_{1r}$ y $\vec{T}_{2r}$), como se ve en la figura 9-8*b*. Debemos tener $\vec{T}_{1r}$, porque $\vec{T}_{1r}$ (fuerza ejercida en la partícula 1 por la varilla) y $\vec{T}_{r1}$ (fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la varilla) forman una pareja de acción-reacción; y lo mismo ocurre con $\vec{T}_{2r}$ y $\vec{T}_{r2}$, y también porque la fuerza neta en la varilla $\vec{T}_{r1} + \vec{T}_{r2}$ debe ser cero (debido a su masa despreciable), se debe tener $\vec{T}_{1r} = -\vec{T}_{2r}$.

La fuerza neta que actúa sobre la partícula 1 es $\Sigma \vec{F}_1 = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_{1r}$; y en la partícula 2, $\Sigma \vec{F}_2 = \vec{T}_2 + \vec{T}_{2r}$. Tenemos en cuenta los componentes radial y tangencial de las fuerzas y de las aceleraciones. Los componentes de las fuerzas netas aparecen en la figura 9-8*c*. No existe movimiento radial, puesto que las partículas están conectadas al origen por varillas rígidas. Más aún, los componentes radiales de las fuerzas netas $\Sigma \vec{F}_1$ y $\Sigma \vec{F}_2$ no producen una torca alrededor del origen O, porque los brazos de su palanca son cero. Sólo

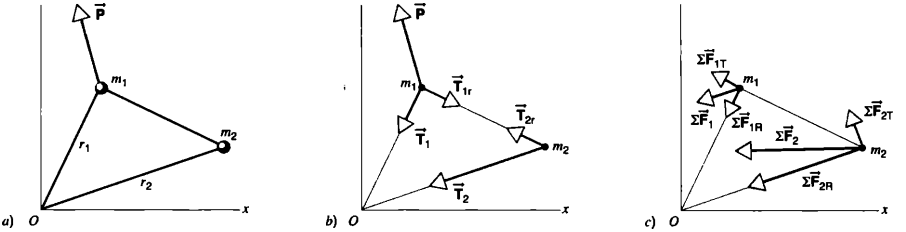


FIGURA 9-8. *a*) Se aplica una fuerza $\vec{P}$ a un cuerpo rígido compuesto por dos partículas conectadas al eje de rotación (el eje z), y entre sí por varillas rígidas de masa despreciable. El sistema entero gira en el plano xy. *b*) Fuerzas que actúan en cada partícula. *c*) Fuerza neta en cada partícula con sus componentes radiales y tangenciales.

los componentes tangenciales de las fuerzas netas contribuyen a la torca neta alrededor de O. La torca neta correspondiente al sistema de dos partículas, es la suma de las torcas netas de cada una de ellas:

$$\begin{aligned}\sum \tau_z &= \sum \tau_{1z} + \sum \tau_{2z} \\ &= (\sum F_{1T})r_1 + (\sum F_{2T})r_2. \end{aligned} \tag{9-7}$$

En cada partícula, la fuerza tangencial neta y la aceleración tangencial se relacionan por medio de la segunda ley de Newton: $\Sigma F_{1T} = m_1 a_{1T}$ y $\Sigma F_{2T} = m_2 a_{2T}$. Al efectuar las sustituciones anteriores en la ecuación 9-7, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum \tau_z &= (\sum F_{1T})r_1 + (\sum F_{2T})r_2 \\ &= (m_1 a_{1T})r_1 + (m_2 a_{2T})r_2 \\ &= (m_1 \alpha_z r_1)r_1 + (m_2 \alpha_z r_2)r_2 \\ &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\alpha_z, \end{aligned} \tag{9-8}$$

donde la tercera línea se obtiene al utilizar la ecuación 8-10 para las aceleraciones tangenciales ($a_{1T} = \alpha_z r_1$ y $a_{2T} = \alpha_z r_2$). Las aceleraciones angulares α_z son iguales en ambas partículas, porque el objeto gira como un cuerpo rígido.

La magnitud $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$ en la ecuación 9-8 es por analogía con la ecuación 9-8, la inercia rotacional *total* en este sistema de dos partículas:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2. \tag{9-9}$$

Podemos simplemente sumar las inercias rotacionales en las rotaciones de dos partículas alrededor de un eje común. La extensión obvia a un objeto rígido formado por N partículas que giran alrededor del mismo eje es

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_N r_N^2 = \sum m_n r_n^2. \tag{9-10}$$

Podemos efectuar una simplificación ulterior en la ecuación 9-8. Retornemos a la figura 9-8*b* para examinar las contribuciones a la torca neta alrededor de O. Las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ no tienen torca alrededor de O, porque sus líneas de acción pasan por O. Más aún, las tensiones $\vec{T}_{1r}$ y $\vec{T}_{2r}$ no contribuyen a la torca neta en el sistema de dos partículas, pues son iguales y opuestas además de que tienen la misma línea de acción. Por tanto, la torca neta alrededor de O, se debe sólo a la fuerza externa $\vec{P}$, y podemos reemplazar $\Sigma \tau_z$ en la ecuación 9-8 por $\Sigma \tau_{ext,z}$, el componente z de la torca alrededor de O debido exclusivamente a la fuerza *externa*. Si efectuamos esta sustitución, y si usamos la ecuación 9-9, podemos escribir así la ecuación 9-8

$$\sum \tau_{ext,z} = I\alpha_z. \tag{9-11}$$

Ésta es la *forma rotacional de la segunda ley de Newton*. Relaciona la *torca externa neta* alrededor de un eje fijo (el eje z en este caso) con la aceleración angular alrededor de él. La inercia rotacional I debe calcularse alrededor del mismo eje.

La ecuación 9-11 se parece mucho a la forma de la segunda ley de Newton aplicada al movimiento traslacional en una dimensión $\Sigma F_z = ma_z$. Sin embargo, se da una diferencia sumamente importante: esta ecuación traslacional es un componente de la ecuación vectorial $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, pero en general no podemos escribirla en esta forma vectorial, porque la inercia rotacional I puede ser diferente en las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z. Esto significa que la inercia rotacional es una magnitud más compleja que la forma escalar simple que hemos venido empleando. No obstante, podemos considerarla un escalar, al utilizar la ecuación 9-11 en las rotaciones alrededor de un solo eje.

En este cálculo hemos supuesto que la fuerza externa se aplica a una de las partículas. En cambio, si la aplicáramos en otra parte del sistema en la figura 9-8*a* (incluso a una de las varillas de conexión), obtendríamos un valor distinto de $\Sigma \tau_{ext,z}$, pero la ecuación 9-11 conserva su validez. Cuando muchas fuerzas externas actúan sobre un cuerpo rígido, podemos sumar las torcas debidas a todas ellas, tomando cada una respecto al mismo eje z.

PROBLEMA RESUELTO 9-2. Tres partículas de masa m_1 (2.3 kg), m_2 (3.2 kg) y m_3 (1.5 kg) están conectadas mediante varillas delgadas de masa despreciable, de modo que se encuentran en los vértices de un triángulo 3-4-5 en el plano xy (Fig. 9-9). *a*) Determine la inercia rotacional alrededor de los tres ejes que son perpendiculares al plano xy, y que pasa por una de las partículas. *b*) Una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 4.5 N se aplica a m_2 en el plano xy, y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcule la aceleración si el sistema gira alrededor de un eje perpendicular al plano xy y que pasa por m_1.

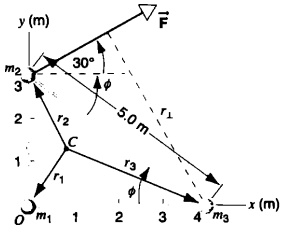


FIGURA 9-9. Problema resuelto 9-2. El punto C marca el centro de masa del sistema constituido por tres partículas.

Solución *a*) Considere primero el eje que pasa por m_1. En las masas puntuales m_1 se encuentra en el eje, por lo cual $r_1 = 0$ y m_1 no contribuyen, a la inercia rotacional. Las distancias de este eje a m_2 y m_3 son $r_2 = 3.0$ m y $r_3 = 4.0$ m. Entonces la inercia rotacional alrededor del eje que pasa por m_1 será (empleando la ecuación 9-10)

$$I_1 = \sum m_n r_n^2 = (2.3\text{ kg})(0\text{ m})^2 + (3.2\text{ kg})(3.0\text{ m})^2 + (1.5\text{ kg})(4.0\text{ m})^2 = 53\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

De modo similar, en el eje que pasa por m_2, tenemos

$$I_2 = \sum m_n r_n^2 = (2.3\text{ kg})(3.0\text{ m})^2 + (3.2\text{ kg})(0\text{ m})^2 + (1.5\text{ kg})(5.0\text{ m})^2 = 58\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

En el eje que pasa por m_3,

$$I_3 = \sum m_n r_n^2 = (2.3\text{ kg})(4.0\text{ m})^2 + (3.2\text{ kg})(5.0\text{ m})^2 + (1.5\text{ kg})(0\text{ m})^2 = 117\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Si se aplica determinada torca al sistema, ¿en las rotaciones alrededor de cuál eje producirá la torca la máxima aceleración angular? ¿La más pequeña?

b) Sólo se requiere el componente z de la torca, puesto que el cuerpo gira alrededor de un eje paralelo al eje z. Podemos emplear la ecuación 9-2*b* ($\tau_z = r_\perp F$) con la magnitud de la torca, de modo que es necesario obtener el valor del brazo del momento $r_\perp$ indicado en la figura 9-9. Partiendo del triángulo con las tres partículas en los vértices, tenemos $\phi = \text{sen}^{-1}\, 3/5 = 37°$. El ángulo entre $\vec{F}$ y la línea que conecta m_3 con m_2 es $30° + 37° = 67°$, por lo cual $r_\perp = 5.0$ sen $67° = 4.6$ m. Entonces la magnitud de la torca alrededor de m_3 será

$$\tau_z = r_\perp F = (4.6\text{ m})(4.5\text{ N}) = 20.7\text{ N}\cdot\text{m}.$$

Dado que las ecuaciones 9-1 y 9-2 dan sólo la magnitud de la torca, debemos decidir si su componente z es positivo o negativo. Bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$, el sistema de la figura 9-9 tenderá a girar en dirección de las manecillas del reloj. Si aplicamos la regla de la mano derecha con los dedos en dirección de las manecillas del reloj, el pulgar apuntará al papel, es decir, en la dirección negativa z. Así pues, concluimos que $\tau_z = -20.7\text{ N}\cdot\text{m}$.

Como es la única torca externa que opera sobre el sistema, la ecuación 9-11 da la aceleración angular por medio de la inercia rotacional alrededor del eje que pasa por m_3 de la parte *a*):

$$\alpha_z = \frac{\sum \tau_{\text{ext},z}}{I_3} = \frac{-20.7\text{ N}\cdot\text{m}}{117\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = -0.18\text{ rad/s}^2.$$

Una vez más el signo negativo indica una aceleración angular en el sentido de las manecillas del reloj empleando la regla de la mano derecha.

PROBLEMA RESUELTO 9-3. En el sistema de tres partículas de la figura 9-9, determine la inercia rotacional alrededor de un eje que sea perpendicular al plano xy, y que cruce su centro de masa.

Solución Primero hay que localizar el centro de masa:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_n x_n}{\sum m_n} = \frac{(2.3\text{ kg})(0\text{ m}) + (3.2\text{ kg})(0\text{ m}) + (1.5\text{ kg})(4.0\text{ m})}{2.3\text{ kg} + 3.2\text{ kg} + 1.5\text{ kg}} = 0.86\text{ m},$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_n y_n}{\sum m_n} = \frac{(2.3\text{ kg})(0\text{ m}) + (3.2\text{ kg})(3.0\text{ m}) + (1.5\text{ kg})(0\text{ m})}{2.3\text{ kg} + 3.2\text{ kg} + 1.5\text{ kg}} = 1.37\text{ m}.$$

Las distancias al cuadrado del centro de masa a las partículas son

$$r_1^2 = x_{\text{cm}}^2 + y_{\text{cm}}^2 = (0.86\text{ m})^2 + (1.37\text{ m})^2 = 2.62\text{ m}^2$$

$$r_2^2 = x_{\text{cm}}^2 + (y_2 - y_{\text{cm}})^2 = (0.86\text{ m})^2 + (3.0\text{ m} - 1.37\text{ m})^2 = 3.40\text{ m}^2,$$

$$r_3^2 = (x_3 - x_{\text{cm}})^2 + y_{\text{cm}}^2 = (4.0\text{ m} - 0.86\text{ m})^2 + (1.37\text{ m})^2 = 11.74\text{ m}^2.$$

Así pues, la inercia rotacional se obtiene directamente de la ecuación 9-10:

$$I_{\text{cm}} = \sum m_n r_n^2 = (2.3\text{ kg})(2.62\text{ m}^2) + (3.2\text{ kg})(3.40\text{ m}^2) + (1.5\text{ kg})(11.74\text{ m}^2) = 35\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Nótese que la inercia rotacional alrededor del centro de masa, es la más pequeña de la que hemos calculado en este sistema (compare los valores en el problema resuelto 9-2). Es un resultado general que probaremos en seguida. Es más fácil girar un cuerpo alrededor de un eje pasando por el centro de masa, que alrededor de cualquier otro eje paralelo.

El teorema de los ejes paralelos

El resultado del problema resuelto anterior, nos lleva a un importante resultado general, el *teorema de los ejes paralelos:*

> *La inercia rotacional de un cuerpo cualquiera alrededor de un eje arbitrario, es igual a la inercia alrededor de un eje paralelo que cruza el centro de masa, más la masa total multiplicada por la distancia al cuadrado entre los dos ejes.*

En términos matemáticos, este teorema se escribe así:

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2. \qquad (9\text{-}12)$$

donde I es la inercia rotacional alrededor del eje arbitrario, I_{cm} es la inercia rotacional alrededor del eje paralelo que cruza el centro de masa, M es la masa total del objeto y h es la

distancia perpendicular entre los ejes. Nótese que los dos ejes han de ser paralelos.

Antes de probar el teorema de los ejes paralelos, vamos a mostrar cómo podría haberse usado para obtener los resultados del problema resuelto 9-2. Comenzamos con la inercia rotacional alrededor del centro de masa, que se obtuvo en el problema resuelto 9-3, $I_{cm} = 35\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. La distancia h entre el eje que cruza el centro de masa y el eje que pasa por m_1 es sólo r_1, cuyo cuadrado se calculó en este problema. Por tanto,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{cm} + Mh^2 \\ &= 35\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 (2.3\ \text{kg} + 3.2\ \text{kg} + 1.5\ \text{kg})(2.62\ \text{m}^2) \\ &= 53\ \text{kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

lo cual concuerda con el resultado de la parte *a*) del problema resuelto 9-2. Recomendamos al lector comprobar que I_2 y I_3 se verifiquen en forma similar.

El teorema de ejes paralelos tiene un corolario muy importante: puesto que el término Mh^2 siempre es positivo, I_{cm} siempre será la inercia rotacional más pequeña en cualquier grupo de ejes paralelos. (Puede no ser la inercia rotacional *absoluta* más pequeña del objeto; un eje que apunte en otra dirección tal vez produzca un valor menor.) Así pues, en las rotaciones en un plano, la elección de un eje que cruce el centro de masa origina permite obtener la máxima aceleración angular de una torca determinada.

Prueba del teorema de ejes paralelos. La figura 9-10 contiene una losa delgada en el plano xy, que puede considerarse un conjunto de partículas. Queremos calcular su inercia rotacional alrededor del eje z, que pasa por el origen O en la figura 9-10, formando ángulos rectos con el plano. Representamos las partículas de la losa por su masa m_n, por sus coordenadas x_n y y_n respecto al origen O, y por sus coordenadas x_n' y y_n' respecto al centro de masa C. La inercia rotacional alrededor del eje que cruza O es

$$I = \sum m_n r_n^2 = \sum m_n (x_n^2 + y_n^2).$$

En relación con O, el centro de masa tiene coordenadas x_{cm} y y_{cm}; partiendo de la geometría de la figura 9-10, vemos que la

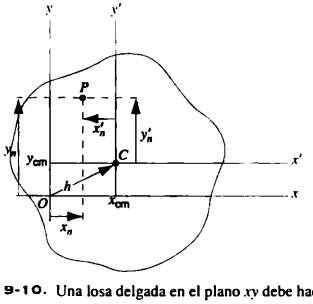


FIGURA 9-10. Una losa delgada en el plano xy debe hacerse girar alrededor del eje z, que es perpendicular a la página en el origen O. El punto C indica su centro de masa. La partícula P se halla en las coordenadas x_n, y_n respecto al origen O, y a las coordenadas x_n', y_n' respecto al centro de masa C.

relación entre las coordenadas x_n, y_n y x_n', y_n' son $x_n = x_n' + x_{cm}$ y $y_n = y_n' + y_{cm}$. Al sustituir estas transformaciones, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \sum m_n [(x_n' + x_{cm})^2 + (y_n' + y_{cm})^2] \\ &= \sum m_n (x_n'^2 + 2x_n' x_{cm} + x_{cm}^2 + y_n'^2 + 2y_n' y_{cm} + y_{cm}^2). \end{aligned}$$

Si reagrupamos los términos, podemos escribir lo anterior así:

$$\begin{aligned} I = \sum m_n (x_n'^2 + y_n'^2) &+ 2x_{cm} \sum m_n x_n' + 2y_{cm} \sum m_n y_n' \\ &+ (x_{cm}^2 + y_{cm}^2) \sum m_n. \end{aligned}$$

La primera sumatoria es simplemente $I_{cm} = \Sigma\, m_n r_n'^2$. Los dos siguientes términos se parecen a las fórmulas con que se calcularon las coordenadas de un centro de masa (Ec. 7-12), pero (como se aprecia en la figura 9-10) se calculan *en* el sistema del centro de masa. Por ejemplo, $\Sigma\, m_n x_n' = M x_{cm}' = 0$, porque $x_{cm}' = 0$, y asimismo $\Sigma\, m_n y_n' = M y_{cm}' = 0$ en el sistema coordenado, centro de masa por definición el centro de masa está en el origen, y por ello estos términos desaparecen. En el último término, con h representamos la distancia entre el origen O y el centro de masa C, de modo que $h^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$ también $\Sigma\, m_n = M$, la masa total. Por tanto,

$$I = I_{cm} + Mh^2,$$

con lo cual se prueba el teorema de los ejes paralelos.

PROBLEMA RESUELTO 9-4. El objeto de la figura 9-11 consta de dos partículas de masas m_1 y m_2, conectadas mediante una varilla ligera de longitud L. *a*) Despreciando la masa de la varilla, calcule la inercia rotacional I de este sistema para rotaciones alrededor del eje perpendicular a la varilla y a una distancia x de m_1. *b*) Demuestre que I es mínima cuando $x = x_{cm}$.

Solución *a*) A partir de la ecuación 9-9 obtenemos

$$I = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2.$$

b) Obtenemos el valor mínimo de I haciendo dI/dx igual a 0:

$$\frac{dI}{dx} = 2m_1 x + 2m_2 (L - x)(-1) = 0.$$

Al resolver, obtenemos el valor de x en que ocurre el mínimo valor de I:

$$x = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Esta expresión es idéntica a la del centro de masa del objeto y, por tanto, la inercia rotacional sí alcanza su valor mínimo cuando $x = x_{cm}$. Esto concuerda con el teorema de ejes paralelos, según el cual I_{cm} ha de ser la inercia rotacional más pequeña entre los ejes paralelos.

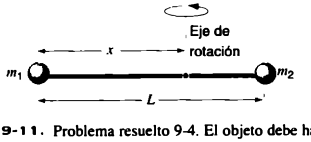


FIGURA 9-11. Problema resuelto 9-4. El objeto debe hacerse girar alrededor de un eje perpendicular a la varilla de conexión y a una distancia x respecto a m_1.

No todos los puntos en que la primera derivada de una función es igual a cero, pueden ser los mínimos de la función; algunos pueden ser los máximos. ¿Puede demostrar por medio de la *segunda* derivada que efectivamente hemos encontrado un mínimo de I?

9-3 INERCIA ROTACIONAL DE LOS CUERPOS SÓLIDOS

Si suponemos que un cuerpo está constituido por varias partículas discretas, podremos calcular su inercia rotacional alrededor de cualquier eje basándonos en la ecuación 9-10, donde la suma incluye todas las partículas. Pero si suponemos que el cuerpo tiene una distribución continua de materia, podremos imaginar que está dividido en muchos elementos de masa pequeña δm_n. Cada elemento δm_n se halla a una cierta distancia perpendicular r_n del eje de rotación. Al considerar cada δm_n como aproximadamente una masa puntual, podremos calcular la inercia rotacional conforme a la ecuación 9-10:

$$I = \sum r_n^2\, \delta m_n. \qquad (9\text{-}13)$$

Pronto llevaremos esto al límite de δm_n infinitesimalmente pequeño, para que la suma se transforme en una integral. Por ahora vamos a explicar la transición al cálculo integral empleando la ecuación 9-13 para aproximar la inercia rotacional de una varilla sólida uniforme que gira alrededor de un eje perpendicular a su punto medio. Esto se ilustra gráficamente en la figura 9-12*a*. La varilla tiene una longitud L y una masa M. Imaginemos que está dividida en 10 partes, cada una con una longitud $L/10$ y una masa $M/10$. Las partes están numeradas de $n = 1$ a $n = 10$, de modo que la *enésima* está a una distancia r_n del eje; en este cálculo suponemos que r_n se mide del eje al centro de la parte. Así pues, las partes en cada extremo tienen $r_1 = r_{10} = 0.45L$, las cercanas a los extremos tienen $r_2 = r_9 = 0.35L$ y las más cercanas al eje tienen $r_5 = r_6 = 0.05L$. Ahora efectuaremos la suma en las 10 partes basándonos en la ecuación 9-13:

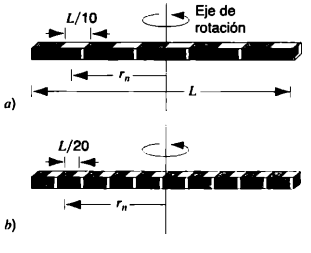


FIGURA 9-12. *a*) La inercia rotacional de una varilla sólida de longitud L que gira alrededor de un eje que pasa por su centro y que es perpendicular a su longitud, puede calcularse aproximadamente dividiéndola en 10 partes iguales, cada una con una longitud $L/10$. Las partes se tratan como masas puntuales a una distancia r_n desde el eje. *b*) Una aproximación más precisa de la inercia rotacional de la varilla, se obtiene dividiendo la varilla en 20 partes.

$$\begin{aligned} I &= r_1^2\, \delta m_1 + r_2^2\, \delta m_2 + \cdots + r_{10}^2\, \delta m_{10} \\ &= (0.1M)(0.45L)^2 + (0.1M)(0.35L)^2 + (0.1M)(0.25L)^2 \\ &\quad + (0.1M)(0.15L)^2 + (0.1M)(0.05L)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

donde en la segunda ecuación los cinco términos incluidos corresponden a la mitad de la varilla y $\cdots$ significa que tenemos cinco términos idénticos en la otra mitad. Evaluamos el total de los factores numéricos y de ese modo obtenemos el resultado

$$I = 0.0825ML^2 = \frac{1}{12.12}ML^2 \qquad \text{(10 partes).}$$

Pronto se hará evidente por qué escribimos el resultado en esa forma.

Supóngase que dividimos la varilla en 20 partes, cada una con una longitud $L/20$ y con una masa $M/20$ (Fig. 9-12*b*). Al repetir el cálculo anterior obtenemos el resultado

$$I = 0.0831ML^2 = \frac{1}{12.03}ML^2 \qquad \text{(20 partes).}$$

A medida que aumentamos el número de partes, ¿se acerca el resultado a un valor límite que podamos considerar como inercia rotacional? En el ejercicio 21 se le pide demostrar el resultado con cualquier número arbitrario N de partes:

$$I = \frac{1}{12}ML^2\left(\frac{N^2-1}{N^2}\right) \qquad (N \text{ partes}) \quad (9\text{-}14)$$

Sin duda lo anterior se acerca a un límite $ML^2/12$ como $N \to \infty$, y podemos asignarlo como el valor de la inercia rotacional de la varilla. Nótese que los coeficientes numéricos cuando $N = 10$ $(\frac{1}{12.12})$ y $N = 20$ $(\frac{1}{12.03})$ indican la aproximación a $N \to \infty$ lím $(\frac{1}{12})$.

El método algebraico anterior se aplica fácilmente en algunos casos, y sirve para crear una imagen en nuestra mente de cómo el cálculo integral divide un objeto sólido en partes infinitesimales y las sumas. En los cálculos referentes a sólidos el método algebraico se complica mucho, y es mucho más fácil aplicar directamente las técnicas del cálculo integral. Tomemos el límite de la ecuación 9-13 a medida que el número de partes se vuelve muy grande o, en forma equivalente, a medida que sus masas δm se hacen extremadamente pequeñas:

$$I = \lim_{\delta m_n \to 0} \sum r_n^2\, \delta m_n,$$

y en la forma habitual la suma se convierte en una integral en el límite:

$$I = \int r^2\, dm. \qquad (9\text{-}15)$$

La integración se realiza sobre el volumen total del objeto, pero muchas veces ciertas simplificaciones geométricas pueden reducirla a términos más manejables.

Retomemos el ejemplo de la varilla que se hace girar alrededor de un eje que pasa por el centro. La figura 9-13 muestra el problema descrito para el método integral. Seleccionamos un elemento *arbitrario* de masa dm situado a una distancia x del eje. (Nos servimos de x como la variable de in-

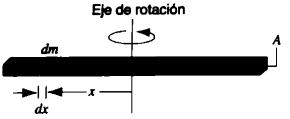


FIGURA 9-13. La inercia rotacional de una varilla sólida se calcula integrándola en su longitud. Un elemento de masa dm se halla a una distancia x perpendicular al eje de rotación.

tegración.) Su masa es igual a su densidad (masa por volumen unitario) ρ, multiplicado por el elemento de volumen dV. Este último es igual al área multiplicada por su espesor dx:

$$dV = A\,dx$$
$$dm = \rho\,dV = \rho A\,dx.$$

Suponemos que la varilla tiene una superficie transversal uniforme A, y una densidad ρ también uniforme e igual a la masa total M dividida entre el volumen total AL: $\rho = M/V = M/AL$. Evaluamos la ecuación 9-15 y obtenemos

$$I = \int r^2\,dm = \int x^2 \frac{M}{AL} A\,dx = \frac{M}{L}\int x^2\,dx.$$

Con $x = 0$ en el punto medio de la varilla, los límites de integración son de $x = -L/2$ a $x = +L/2$. Entonces la inercia rotacional será

$$I = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2\,dx = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{+L/2}$$
$$I = \tfrac{1}{12}ML^2. \qquad (9\text{-}16)$$

El resultado anterior es idéntico al que dedujimos del método algebraico (Ec. 9-14), en el límite $N \to \infty$.

Si queremos girar la varilla alrededor de un eje que cruce un extremo perpendicular en toda su extensión, podemos servirnos del teorema de ejes paralelos (Ec. 9-12). Ya encontramos I_{cm}, y la distancia h entre los ejes paralelos es la mitad de la longitud, así que

$$I = \tfrac{1}{12}ML^2 + M(L/2)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2.$$

A menudo podemos calcular la inercia rotacional de un cuerpo sólido, descomponiéndolo en los elementos de la inercia rotacional conocida. Supóngase, por ejemplo, que tenemos una placa rectangular sólida y uniforme de longitud a y de ancho b, como se advierte en la figura 9-14. Queremos calcular la inercia rotacional alrededor de un eje perpendicular a ella y a través de su centro.

Podemos dividir la placa en varias tiras, cada una de las cuales puede considerarse como una varilla. Tomemos la tira de masa dm, de longitud a y de ancho dx, que se ilustra en la figura 9-14. La masa dm se relaciona con la masa total M, conforme el área superficial de la tira ($a\,dx$) se relaciona con el área superficial total ab:

$$\frac{dm}{M} = \frac{a\,dx}{ab} = \frac{dx}{b}$$
$$dm = \frac{M}{b}\,dx.$$

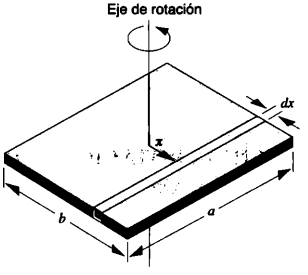


FIGURA 9-14 Una placa rectangular sólida de lados a y b se hace girar alrededor de un eje a través de su centro, y es perpendicular a su superficie. Para calcular la inercia rotacional, suponemos que la placa está dividida en tiras. La tira sombreada puede considerarse una varilla, cuya inercia rotacional alrededor del eje central se calcula por medio del teorema de ejes paralelos.

Según el teorema de ejes paralelos, la inercia rotacional dI de la tira alrededor del eje se relaciona con la de la tira (considerada como una varilla) alrededor de su centro de masa, por la ecuación 9-16 como $dI_{cm} = \frac{1}{12}dm\,a^2$:

$$dI = dI_{cm} + dm\,h^2$$
$$= \tfrac{1}{12}dm\,a^2 + dm\,x^2.$$

La sustitución de dm produce

$$dI = \frac{Ma^2}{12b}dx + \frac{M}{b}x^2\,dx,$$

e I se obtiene de la integral

$$I = \int dI = \frac{Ma^2}{12b}\int dx + \frac{M}{b}\int x^2\,dx.$$

Los límites de la integración en x son de $-b/2$ a $+b/2$. Efectuamos las integraciones y obtenemos

$$I = \tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2). \qquad (9\text{-}17)$$

Nótese que el resultado anterior no depende del espesor de la placa: conseguiríamos los mismos resultados para una pila de placas de masa total M o, en forma equivalente, para una bloque rectangular sólido de las mismas dimensiones superficiales. Nótese asimismo, que el resultado depende de la longitud diagonal de la placa, no de a ni b por separado. ¿Puede explicar esto?

Procediendo en esta forma, podemos evaluar la inercia rotacional prácticamente de cualquier objeto sólido regular. La figura 9-15 contiene algunos objetos comunes y su inercia rotacional. Aunque es relativamente sencillo emplear integrales bidimensionales y tridimensionales, a menudo es posible descomponer un sólido complejo en otros más simples cuya inercia rotacional se conozca, como lo hicimos en el cálculo anterior. El problema 16 al final del capítulo describe este cálculo en el caso de una esfera sólida.

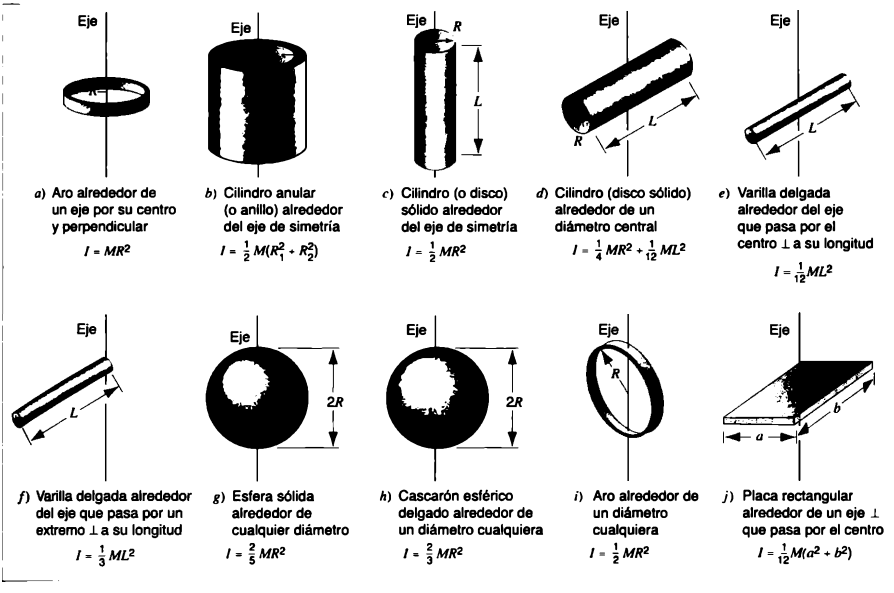


FIGURA 9-15. Inercia rotacional de varios sólidos alrededor de algunos ejes.

PROBLEMA RESUELTO 9-5. Unimos dos esferas sólidas idénticas de masa M y de radio R, y giramos la combinación alrededor de un eje tangente a una esfera y perpendicular a la línea que las conecta (Fig. 9-16). ¿Cuál es la inercia rotacional de la combinación?

Solución Igual que la masa, la inercia rotacional de los objetos sólidos se suman como los escalares, por lo cual el total de las dos esferas es $I = I_1 + I_2$. De acuerdo con el teorema de ejes paralelos, en la primera esfera (la que está más cerca del eje de rotación), tenemos

$$I_1 = I_{cm} + Mh^2 = \tfrac{2}{5}MR^2 + MR^2 = 1.4MR^2$$

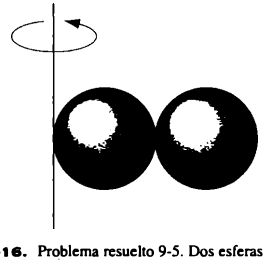


FIGURA 9-16. Problema resuelto 9-5. Dos esferas en contacto se hacen girar alrededor de un eje.

y en la segunda,

$$I_2 = I_{cm} + Mh^2 = \tfrac{2}{5}MR^2 + M(3R)^2 = 9.4MR^2.$$

El total es

$$I = I_1 + I_2 = 10.8MR^2.$$

9-4 LA TORCA DEBIDA A LA GRAVEDAD

En la figura 9-2 se aplicó una fuerza a un punto del cuerpo, y después con la ecuación 9-3 determinamos la torca debida a ella. Supóngase, en cambio, que sostenemos un extremo de un tablón largo y que el otro puede girar alrededor de un eje horizontal (Fig. 9-17). Si la mano no sostuviera el extremo, el tablón giraría alrededor del eje a causa de la fuerza descen-

FIGURA 9-17. Una mano sostiene un extremo de una viga que puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por el otro extremo.

dente de la gravedad. Si lo consideramos un conjunto de partículas punto, la gravedad que actúa hacia abajo produciría una torca en el eje debida al peso de cada partícula. La torca neta en todo el tablón sería la suma de las torcas individuales, pero sería un problema demasiado complicado de resolver.

Por fortuna, casi siempre es posible simplificar el problema. Podemos reemplazar el efecto de la gravedad que opera en todas las partículas de un cuerpo por una fuerza que reúna dos características: 1) Ser igual al peso del objeto, y 2) servir de punto individual denominado *centro de gravedad*. (Como veremos luego, en la generalidad de los casos de interés —y en los que estudiaremos en el libro—, el centro de gravedad de un cuerpo coincide con su centro de masa.) Vamos a probar que la fuerza que opera sobre un objeto, posee las dos características antes mencionadas.

Imagine un cuerpo de masa M (Fig. 9-18) que habrá de dividirse en muchas partículas. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra en la *enésima* partícula de masa m_n es $m_n\vec{g}$. Se dirige hacia el centro de la Tierra. La fuerza neta en el objeto entero proveniente de la gravedad, es la sumatoria de todas las partículas individuales, esto es,

$$\sum \vec{F} = \sum m_n\vec{g}. \qquad (9\text{-}18)$$

Como hemos supuesto que $\vec{g}$ posee el mismo valor en todas las partículas del cuerpo, podemos factorizar $\vec{g}$ en la suma de la ecuación 9-18, y así obtenemos

$$\sum \vec{F} = \vec{g} \sum m_n = M\vec{g} \qquad (9\text{-}19)$$

Lo anterior demuestra la primera de las afirmaciones hechas antes: es posible reemplazar por un solo factor $M\vec{g}$ la fuerza de gravedad resultante que actúa sobre el cuerpo entero.

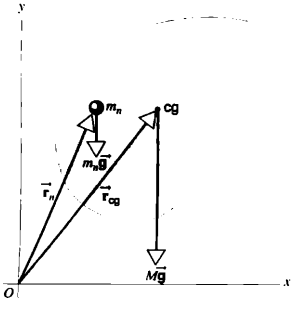


FIGURA 9-18. Las partículas de un cuerpo, como la de masa m_n, experimentan una fuerza gravitacional; por ejemplo, $m_n\vec{g}$. El peso total del cuerpo, aunque se distribuye en todo su volumen como la suma de las fuerzas gravitacionales en ellas, puede reemplazarse con una sola fuerza de magnitud Mg que opere en el centro de gravedad. Si el campo gravitacional es uniforme (es decir, igual para todas las partículas), el centro de gravedad coincidirá con el de masa y, por tanto, $\vec{r}_{cg}$ es igual que $\vec{r}_{cm}$.

En seguida vamos a calcular la torca alrededor de un eje que es perpendicular a la página, y que cruza el punto arbitrario O de la figura 9-18. El vector $\vec{r}_n$ sitúa la partícula de masa m_n en relación con este origen. La torca neta alrededor de este punto debido a la gravedad que actúa sobre todas las partículas es la siguiente:

$$\sum \vec{\tau} = \sum (\vec{r}_n \times m_n\vec{g}) = \sum (m_n\vec{r}_n \times \vec{g}), \qquad (9\text{-}20)$$

donde el último paso se toma colocando el escalar m_n dentro de la sumatoria. Una vez más utilizamos la constancia de $\vec{g}$ para factorizar en la sumatoria procurando no modificar el orden de los vectores $\vec{r}_n$ y $\vec{g}$ para que no cambie el signo del producto cruz. Según la ecuación 7-11, la sumatoria resultante $\Sigma\, m_n\vec{r}_n$, es sólo $M\vec{r}_{cm}$, donde $\vec{r}_{cm}$ es el vector que localiza el centro de masa del cuerpo respecto al origen O. Al tomar estos dos pasos, podemos escribir la ecuación 9-20 así

$$\sum \vec{\tau} = \left(\sum m_n\vec{r}_n\right) \times \vec{g} = M\vec{r}_{cm} \times \vec{g}$$
$$= \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}. \qquad (9\text{-}21)$$

En consecuencia, la torca resultante en el cuerpo es igual a la producida por la fuerza individual $M\vec{g}$ que actúa en el centro de su masa; por eso el centro de gravedad (cg) coincide con el de masa, lo cual prueba la segunda afirmación hecha anteriormente. Un corolario útil de la ecuación 9-21 es el siguiente: *la torca debida a la gravedad respecto del centro de masa es cero.*

El centro de masa y el centro de gravedad

En esta sección hemos utilizado "centro de masa" y "centro de gravedad" como sinónimos. El primero se define para cualquier cuerpo y, conforme a los métodos descritos en el Capítulo 7, puede calcularse partiendo de la distribución de la masa en él. En cambio, el centro de gravedad se define sólo para los cuerpos en un campo gravitacional. Si queremos calcular el centro de gravedad, hay que conocer no sólo la distribución de la masa del cuerpo, sino también la variación de $\vec{g}$ en él. Si $\vec{g}$ no es constante en el cuerpo, el centro de gravedad y el de masa quizá no coincidan; entonces $\vec{g}$ no puede factorizarse en las sumas de las ecuaciones 9-18 y 9-20.

Consideremos el "sistema de pesas" de la figura 9-19, que consta de dos esferas de igual masa conectadas por una varilla de masa despreciable. El eje de la varilla está inclinado en cierto ángulo no cero respecto a la horizontal. El centro de

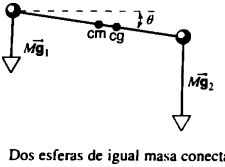


FIGURA 9-19. Dos esferas de igual masa conectadas por una varilla ligera. El centro de masa se halla a la mitad de las esferas. Si la aceleración gravitacional $\vec{g}$ es mayor en el lugar de la esfera de la parte inferior, el centro de gravedad estará más cerca de esa esfera.

masa se encuentra en el centro geométrico del sistema. Si su eje fuera horizontal, el centro de gravedad coincidiría con el de masa. Eso no sucede cuando no lo es. Puesto que g varía un poco con la distancia de la Tierra, la esfera de la parte inferior experimenta mayor fuerza gravitacional que la de la parte superior. Así pues, el centro de gravedad se halla ligeramente por debajo del centro de masa.

Si cambia el ángulo formado con la horizontal o si ponemos el sistema de pesas en un lugar donde g posea un valor diferente, cambiará la ubicación del centro de gravedad (mientras que el centro de masa permanecerá fijo). Así pues, el lugar de este último depende de la orientación del objeto y también de la atracción gravitacional local. En una pesa de 1 m de longitud inclinada en un ángulo de 45° cerca de la superficie de la Tierra, la distancia entre el centro de masa y el de gravedad es de unos 55 nm, mucho menor que la precisión con que normalmente trabajamos y, por lo mismo, enteramente despreciable. Sin temor a equivocarnos, podemos suponer que el centro de gravedad coincide con el de masa.

Si suspendemos un cuerpo de un punto arbitrario, se detendrá en una posición donde la fuerza neta es cero y donde también lo es la torca neta alrededor de un eje cualquiera. Por ser cero la fuerza vertical, el peso descendente ha de ser igual a la fuerza ascendente ejercida en el punto de apoyo. La torca neta también debe ser cero, de modo que las dos fuerzas deben actuar en la misma línea vertical.

Se cumplirán las mismas condiciones si intentamos balancear un metro en la mano. Si comienza a inclinarse al menos un poco, el peso descendente y la fuerza ascendente de la mano no actuarán en la misma línea; sobre el metro operará una torca neta que lo hace girar y caer al suelo. Por tanto, habrá que mover la mano de modo constante para mantener la fuerza ascendente directamente debajo del centro de gravedad del metro.

Esta propiedad nos sirve para localizar el centro de gravedad de un objeto extendido. Pongamos el caso de un cuerpo de forma arbitraria suspendido en un punto S (Fig. 9-20).

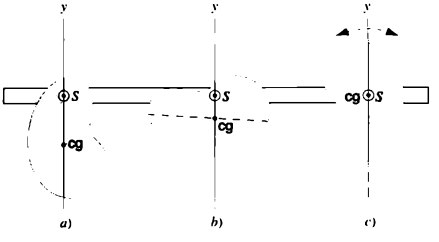


FIGURA 9-20. Un cuerpo suspendido de un punto arbitrario S, como en *a*) y en *b*), estará en equilibrio estable sólo si su centro de gravedad (cg) pende verticalmente debajo de su punto de suspensión S. La línea punteada en *b*) representa la línea vertical en *a*), y muestra que el centro de gravedad puede localizarse suspendiendo el cuerpo sucesivamente en dos puntos diferentes. *c*) Si un cuerpo se suspende de su centro de gravedad, estará en equilibrio cualquiera que sea su orientación.

El punto de apoyo ha de hallarse en la línea vertical con el centro de gravedad. Si trazamos una línea vertical por S, sabremos que el centro ha de encontrarse en alguna parte de la línea. Podemos repetir el procedimiento con una nueva elección del punto S, como en la figura 9-20*b*, y localizar una segunda línea que habrá de contenerlo. En conclusión, el centro de gravedad se encontrará en la intersección de las dos líneas.

Si suspendemos el objeto del centro de gravedad como en la figura 9-20*c* y lo liberamos, el cuerpo permanecerá en reposo sin que importe su orientación. Podemos voltearlo en la dirección que queramos y no cambiará su estado. Esto explica el corolario de la ecuación 9-21: la torca debida a la gravedad es cero alrededor del centro de gravedad, porque $\vec{r}_{cm}$ también lo es en ese punto.

9-5 APLICACIONES DE LAS LEYES DEL EQUILIBRIO DE NEWTON PARA LA ROTACIÓN

Es posible que la fuerza externa que opera sobre un cuerpo sea cero, mientras que la torca externa neta es no cero. Por ejemplo, consideremos dos fuerzas de igual magnitud que operan sobre un cuerpo en direcciones contrarias, pero no en la misma línea. El cuerpo tendrá aceleración angular, pero no en la misma línea. Presentará aceleración angular pero no lineal, ni aceleración traslacional. Asimismo, es posible que la torca externa neta en el cuerpo sea cero, no así la fuerza externa neta (un cuerpo que cae en la gravedad); en este caso existe aceleración traslacional pero no angular. Para que un cuerpo esté en equilibrio, *la fuerza externa neta y la torca externa neta han de ser cero.* En este caso, el cuerpo *no* tendrá ni aceleración angular ni traslacional. Conforme a esta definición, podría tener velocidad lineal o angular, siempre que esa velocidad sea constante. Sin embargo, consideraremos a menudo el caso especial cuando el cuerpo está en reposo.

Tenemos, pues, dos condiciones de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \qquad (9\text{-}22)$$

y

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0. \qquad (9\text{-}23)$$

Las anteriores ecuaciones vectoriales puede reemplazarse por sus tres ecuaciones componentes equivalentes (escalares):

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \qquad (9\text{-}24)$$

y

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0, \qquad (9\text{-}25)$$

donde para facilitar la explicación hemos suprimido el subíndice (ext). En el equilibrio, la suma de los componentes de las fuerzas externas y la suma de los de las torcas externas en los ejes coordenados ha de ser cero. Esto ocurre en cualquier elección de las direcciones de los ejes coordenados.

En las torcas la condición de equilibrio se da en cualquier selección del eje respecto al cual se calculan las torcas. Para demostrar la afirmación anterior, tomamos un cuerpo rígido

donde operan muchas fuerzas. En relación con el origen O, la fuerza $\vec{F}_1$ se aplica en el punto situado en $\vec{r}_1$, la fuerza $\vec{F}_2$ en $\vec{r}_2$, y así sucesivamente. Así pues, la torca neta alrededor del eje que pasa por O es

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_O &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots + \vec{\tau}_N \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N. \qquad (9\text{-}26)\end{aligned}$$

Supóngase que el punto P se encuentra en la posición $\vec{r}_P$ respecto a O (Fig. 9-21). El punto de aplicación de $\vec{F}_1$ respecto a P es $(\vec{r}_1 - \vec{r}_P)$. La torca alrededor de P es

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_P &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_2 \\ &\quad + \cdots + (\vec{r}_N - \vec{r}_P) \times \vec{F}_N \\ &= [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N] \\ &\quad - [\vec{r}_P \times \vec{F}_1 + \vec{r}_P \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_P \times \vec{F}_N].\end{aligned}$$

El primer grupo de términos dentro de los corchetes da $\vec{\tau}_0$, según la ecuación 9-26. Podemos reescribir el segundo grupo reacomodando el factor constante $\vec{r}_P$:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_P &= \vec{\tau}_O - [\vec{r}_P \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N)] \\ &= \vec{\tau}_O - [\vec{r}_P \times (\textstyle\sum \vec{F}_{ext})] \\ &= \vec{\tau}_O,\end{aligned}$$

donde cancelamos el segundo término, porque $\Sigma\, \vec{F}_{ext} = 0$ para un cuerpo en equilibrio traslacional. En consecuencia, la torca alrededor de dos puntos cualesquiera posee el mismo valor cuando el cuerpo está en este tipo de equilibrio.

A menudo nos ocupamos de problemas en que todas las fuerzas se hallan en el mismo plano. En este caso se reducen a tres las condiciones de las ecuaciones 9-24 y 9-25. Resolvemos las fuerzas en dos componentes:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad (9\text{-}27)$$

y si calculamos las torcas alrededor de un punto que se encuentra en el plano xy, todos han de seguir la dirección perpendicular a ese plano. En este caso tendremos

$$\sum \tau_z = 0, \qquad (9\text{-}28)$$

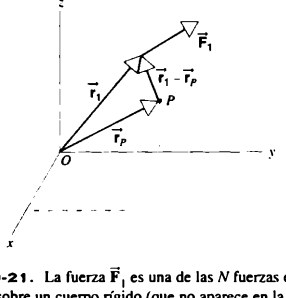


FIGURA 9-21. La fuerza $\vec{F}_1$ es una de las N fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (que no aparece en la figura). El vector $\vec{r}_1$ localiza el punto de aplicación de $\vec{F}_1$ respecto a O, y sirve para calcular la torca de $\vec{F}_1$ alrededor de O. El vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_P$ se usa al calcular la torca de $\vec{F}_1$ alrededor de P.

Optamos por limitarnos a problemas en un plano para simplificar los cálculos; esta condición no impone ninguna restricción fundamental a la aplicación de los principios generales del equilibrio.

Procedimientos para analizar el equilibrio

En los problemas relacionados con el equilibrio, suele interesarnos determinar los valores de una o más fuerzas desconocidas, al aplicar las condiciones que lo rigen (cero fuerza externa neta y cero torca externa neta). A continuación se describen los procedimientos que conviene seguir:

1. *Trazar una frontera alrededor del sistema*, de modo que separe claramente del ambiente el sistema que está considerando.

2. *Trazar un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema y sus puntos de aplicación.* Las fuerzas externas son aquellas que operan a través de la frontera del sistema que dibujó en el paso 1; a menudo abarcan la gravedad, la fricción y las fuerzas ejercidas por alambres o vigas que la cruzan. Las fuerzas internas (las que los objetos del sistema ejercen unos sobre otros) no deberían aparecer en el diagrama. En ocasiones la dirección de una fuerza no será evidente de antemano. Si se imagina realizar un corte en la viga o en el alambre donde atraviesan la frontera, los extremos del corte se separarán tirando si la fuerza opera hacia afuera desde la frontera. En caso de duda, escoja la dirección arbitrariamente; si se equivocó al suponerla, la solución arrojará valores negativos de los componentes de esa fuerza.

3. *Establezca un sistema coordenado y escoja la dirección de los ejes.* Este sistema coordenado servirá para resolver las fuerzas en sus componentes.

4. *Establezca un sistema coordenado y los ejes para resolver las torcas en sus componentes.* En equilibrio, la torca externa neta habrá de ser cero alrededor de *cualquier* eje. A menudo optamos por calcular las torcas alrededor de un punto donde operan varias fuerzas, con lo cual las eliminamos en la ecuación de la torca. Al sumar los componentes de ella, observamos la convención de signos: *la torca en cualquier eje es positiva si al actuar sólo produce una rotación alrededor de ella en sentido contrario al de las manecillas del reloj.* En el presente caso, la regla de la mano derecha puede usarse también para establecer esta convención.

Una vez terminados los pasos anteriores al plantear el problema, la solución se logra utilizando las ecuaciones 9-22 y 9-23 o 9-27 y 9-28, como se explica en el siguiente ejemplo.

PROBLEMA RESUELTO 9-6. Un tablón uniforme de longitud L, cuya masa m es 1.8 kg, descansa con sus extremos sobre dos básculas digitales, como se ve en la figura 9.22*a*. Un bloque, cuya masa M es 2.7 kg, descansa sobre ella, y su centro se halla a una cuarta parte de distancia del extremo izquierdo. ¿Qué nos indican las básculas?

Solución Escogemos como sistema la viga y el bloque tomados juntos. La figura 9-22*b* es un diagrama de cuerpo libre del sistema, que muestra las fuerzas externas que operan sobre ella. El peso de la viga, $m\vec{g}$, actúa hacia abajo en su centro de masa, que se halla en su centro geométrico pues la viga es uniforme. Asimismo, $M\vec{g}$, el peso del bloque, opera hacia abajo en su centro de masa. Las básculas empu-

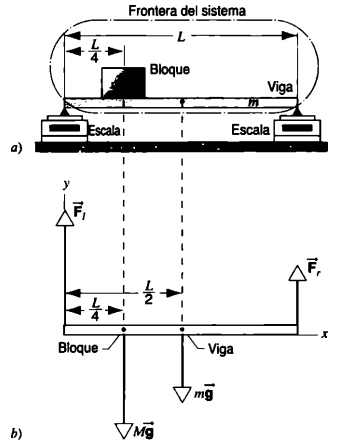


FIGURA 9-22. Problema resuelto 9-6. *a*) Una viga de masa m sostiene un bloque de masa M. Las básculas digitales muestran las fuerzas verticales ejercidas sobre los dos extremos de la viga. *b*) Un diagrama de cuerpo libre muestra las fuerzas que operan sobre el sistema, compuesto por viga + bloque.

jan hacia arriba en los extremos de la viga con las fuerzas $\vec{F}_l$ y $\vec{F}_r$. Sus magnitudes son las lecturas de la báscula que elijamos.

El sistema está en equilibrio estático y, por consiguiente, podemos aplicar las condiciones de las ecuaciones 9-27 y 9-28. Las fuerzas no tienen componentes x, de modo que la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no suministra información alguna. El componente y de la fuerza externa neta es $\Sigma F_y = F_l + F_r - Mg - mg$. Con la condición de equilibrio $\Sigma F_y = 0$ tenemos

$$F_l + F_r - Mg - mg = 0. \qquad (9\text{-}29)$$

Se consigue información adicional sobre las fuerzas desconocidas F_l y F_r a partir de la ecuación de la torca (Ec. 9-28). Optamos por tomar las torcas alrededor del eje a través del extremo izquierdo del tablón. La fuerza F_l tiene un brazo de palanca de cero. Usando la regla de la mano derecha concluimos que F_r produce una torca positiva, y que Mg y mg producen torcas negativas. La torca neta se obtiene multiplicando las fuerzas por su brazo de palanca (en este caso, su distancia respecto al eje escogido): $\Sigma \tau_z = (F_l)(0) + (F_r)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4)$. Con $\Sigma \tau_z = 0$ tenemos

$$F_r L - \frac{mgL}{2} - \frac{MgL}{4} = 0 \qquad (9\text{-}30)$$

o bien

$$F_r = \left(\frac{g}{4}\right)(M + 2m)$$
$$= \tfrac{1}{4}(9.8\ \text{m/s}^2)[2.7\ \text{kg} + 2(1.8\ \text{kg})] = 15\ \text{N}.$$

Nótese que nuestra elección del eje elimina la fuerza F_l en la ecuación de la torca y nos permite resolver directamente la otra fuerza. Si hubiéramos optado por tomar las torcas alrededor de un punto arbitrario cualquiera, habríamos obtenido una ecuación que contendría F_l y F_r, la cual podríamos haber resuelto al mismo tiempo que la ecuación 9.29. Gracias a la elección del eje nos es más fácil simplificar un poco las operaciones algebraicas, pero desde luego de ninguna manera esto modifica la solución final.

Si sustituimos el valor de F_r en la ecuación 9-29 y resolvemos para F_l, obtendremos

$$F_l = (M + m)g - F_r$$
$$= (2.7\ \text{kg} + 1.8\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) - 15\ \text{N} = 29\ \text{N}.$$

Nótese que la longitud de la viga y la altura del centro de masa del bloque no entran en la solución del problema. ¿Es razonable desde el punto de vista físico?

Intente resolver este problema empleando exclusivamente la ecuación de equilibrio de las torcas, una vez con el eje a la izquierda de la viga y otra vez a la derecha de ella. Como el método que acabamos de aplicar al resolverlo, éste da dos ecuaciones que pueden resolverse con las incógnitas F_l y F_r.

PROBLEMA RESUELTO 9-7. Una escalera con una longitud L de 12 m y con una masa m de 45 kg descansa contra una pared. Su extremo superior está a una distancia h de 9.3 m arriba del suelo, como se aprecia en la figura 9-23*a*. El centro de masa está a la tercera parte de la escalera. Un bombero cuya masa M es 72 kg trepa la mitad de ella. Suponga que la pared, no el suelo, no tiene fricción. ¿Qué fuerzas ejercen la pared y el suelo sobre la escalera?

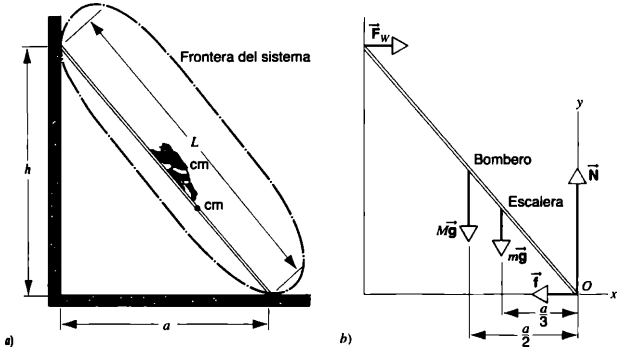


FIGURA 9-23. Problema resuelto 9-7. *a*) Un bombero trepa la mitad de una escalera que se apoya contra un muro sin fricción. *b*) Diagrama de cuerpo libre, que muestra (a escala) todas las fuerzas que intervienen.

Solución La figura 9-23*b* muestra un diagrama de cuerpo libre. La pared ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}_w$ sobre la escalera; no ejerce una fuerza vertical porque se supone que el contacto entre ésta y la pared no tiene fricción. El suelo ejerce una fuerza sobre la escalera con un componente horizontal f debido a la fricción, y con un componente vertical N, la fuerza normal. Escogemos los ejes coordenados como se indica, con el origen O en el punto donde la escalera entra en contacto con el suelo. La distancia a de la pared al pie de la escalera se calcula fácilmente por medio de

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12\text{ m})^2 - (9.3\text{ m})^2} = 7.6\text{ m}.$$

Los componentes x y y de la fuerza neta en la escalera son $\Sigma F_x = F_w - f$ y $\Sigma F_y = N - Mg - mg$. Entonces las ecuaciones 9-27 ($\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$) nos dan

$$F_w - f = 0 \quad \text{y} \quad N - Mg - mg = 0. \qquad (9\text{-}31)$$

Con base en la segunda de las ecuaciones anteriores,

$$N = (M + m)g = (72\text{ kg} + 45\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 1150\text{ N}.$$

Si tomamos las torcas alrededor de un eje que pase por el punto O y sea paralelo a la dirección z, notaremos que F_w da una torca negativa, Mg y mg producen torcas positivas; N y f tienen torcas cero alrededor de O porque sus brazos de torca son cero. Al multiplicar cada fuerza por su brazo de palanca, se obtiene $\Sigma \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) + (N)(0) + (f)(0)$. Por medio de la ecuación 9-28 ($\Sigma \tau_z = 0$), encontramos

$$-F_w h + \frac{Mga}{2} + \frac{mga}{3} = 0. \qquad (9\text{-}32)$$

Esta elección acertada del lugar del eje eliminó dos variables, f y N en el equilibrio de la ecuación de las torcas. Al resolver la ecuación 9-32 para F_w, obtenemos

$$F_w = \frac{ga(M/2 + m/3)}{h}$$
$$= \frac{(9.8\text{ m/s}^2)(7.6\text{ m})[(72\text{ kg})/2 + (45\text{ kg})/3]}{9.3\text{ m}} = 410\text{ N}.$$

Basándonos en la ecuación 9-31 tenemos de inmediato

$$f = F_w = 410\text{ N}.$$

PROBLEMA RESUELTO 9-8. Una viga uniforme de longitud $L = 3.3$ m y de masa $m = 8.5$ kg está embisagrada o empotrada en una pared como se muestra en la figura 9-24*a*. Un alambre conectado a la pared a una distancia $d = 2.1$ m arriba de la bisagra está unido al otro extremo de la viga; su longitud es tal, que la viga forma un ángulo de $\theta = 30°$ con la horizontal. Un cuerpo de masa $M = 56$ kg está suspendido del extremo superior de la viga. Calcule la tensión del alambre y la fuerza que la bisagra ejerce sobre ella.

Solución La figura 9-24*b* contiene todas las fuerzas externas que operan sobre la viga y que hemos escogido como nuestro sistema. Como dos de las fuerzas se dirigen verticalmente hacia abajo, decidimos que los ejes sean horizontal y vertical. La tensión en el alambre y la fuerza ejercida por la bisagra sobre la viga, están representadas por sus componentes horizontal y vertical.

Los componentes de la fuerza neta en la viga son $\Sigma F_x = F_h - T_h$ y $\Sigma F_y = F_v + T_v - Mg - mg$, y la condición de equilibrio de la fuerza (Ec. 9-27) nos da

$$F_h - T_h = 0 \quad \text{y} \quad F_v + T_v - Mg - mg = 0. \qquad (9\text{-}33)$$

Para aplicar la condición de equilibrio en la torca (Ec. 9-28), escogemos el eje en el extremo superior de la viga (¿por qué?), y determinamos la torca neta multiplicando las fuerzas por su brazo de palanca:

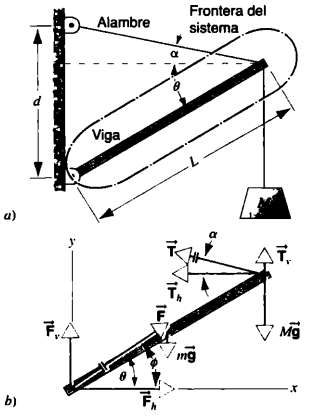


FIGURA 9-24. Problema resuelto 9-8. *a*) Una viga está sostenida por una bisagra contra un muro en su extremo inferior, y por un alambre en su extremo superior. Un objeto de masa M cuelga del extremo superior de ella. *b*) Diagrama de cuerpo libre que muestra las fuerzas que actúan sobre la viga. Una fuerza $\vec{F}$ es ejercida por la bisagra, y la tensión en el alambre produce una fuerza $\vec{T}$.

$\Sigma \tau_z = -(F_v)(L\cos\theta) + (F_h)(L\,\text{sen}\,\theta) + (mg)(\frac{1}{2}L\cos\theta) + (T_v)(0) + (T_h)(0) + (Mg)(0)$. Al hacer esta ecuación igual a 0 y al simplificar, nos queda

$$F_v - F_h \tan\theta - mg/2 = 0. \qquad (9\text{-}34)$$

Hasta ahora tenemos tres ecuaciones en las cuatro incógnitas (F_v, F_h, T_v, T_h). Una cuarta relación se debe a la condición de que T_v y T_h deben sumarse para darnos una tensión resultante $\vec{T}$ dirigida a lo largo del alambre. Éste no puede soportar un componente de la fuerza perpendicular a su larga dimensión. (Ello no sucede con la viga rígida.) La cuarta ecuación es

$$T_v = T_h \tan\alpha, \qquad (9\text{-}35)$$

donde $\tan\alpha = (d - L\,\text{sen}\,\theta)/(L\cos\theta)$.

Al combinar las cuatro ecuaciones obtenemos, después de efectuar las operaciones algebraicas necesarias,

$$F_v = 506\text{ N}, \quad F_h = 804\text{ N}, \quad T_v = 126\text{ N}, \quad T_h = 804\text{ N},$$

Entonces la tensión del alambre será

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 814\text{ N},$$

y la fuerza que la bisagra ejerce sobre la viga será

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 950\text{ N}.$$

Nótese que T y F son mucho más grandes que el peso combinado de la viga y del cuerpo suspendido (632 N).

El vector $\vec{F}$ forma un ángulo con la horizontal de

$$\phi = \tan^{-1}\frac{F_v}{F_h} = 32.2°.$$

Por tanto, el vector de la fuerza resultante que actúa sobre la viga en la bisagra no apunta en dirección hacia ella.

En los ejemplos anteriores, hemos procurado limitar el número de fuerzas desconocidas al de las ecuaciones independientes que las relacionan. Cuando todas operan en un plano, hay sólo tres ecuaciones independientes del equilibrio: una para el equilibrio rotacional alrededor de cualquier eje normal al plano, y otras dos para el equilibrio traslacional en él. Sin embargo, a menudo hay más de tres fuerzas desconocidas. Por ejemplo, si en el problema resuelto 9-7 eliminamos la suposición de una pared sin fricción, tendremos cuatro magnitudes desconocidas, a saber: los componentes verticales y horizontales de la fuerza que actúan sobre la escalera apoyada contra la pared y los de la fuerza que actúan sobre la escalera apoyada en el suelo. Las fuerzas no pueden determinarse, pues contamos sólo con tres ecuaciones. Así pues, habrá que descubrir otra relación independiente entre las fuerzas desconocidas si queremos resolver el problema en forma especial. (En el problema resuelto 9-8, la última ecuación proviene de la propiedad física de uno de los elementos del sistema.) El hecho de tomar las torcas alrededor de un segundo eje no produce una cuarta ecuación independiente; es posible demostrar que se trata de una combinación lineal de la ecuación de la primera torca con las ecuaciones de dos fuerzas, de modo que no contiene nueva información.

Otro ejemplo de una estructura indeterminada, ocurre cuando queremos determinar las fuerzas ejercidas por el suelo en las cuatro llantas de un automóvil, cuando está en reposo sobre una superficie horizontal. Si suponemos que estas fuerzas son normales al suelo, habrá cuatro magnitudes desconocidas. Hay sólo tres ecuaciones independientes que ofrecen las condiciones de equilibrio: una para el equilibrio traslacional en la única dirección de todas las fuerzas, y dos para el equilibrio rotacional alrededor de los dos ejes perpendiculares entre sí en un plano horizontal. Una vez más la solución del problema está indeterminada desde el punto de vista matemático.

Desde luego, como este problema admite una sola solución, hay que encontrar el fundamento físico de la relación independiente adicional entre las fuerzas que nos permita resolverlo. La dificultad desaparece, cuando nos damos cuenta de que las estructuras nunca son perfectamente rígidas como habíamos supuesto antes. En realidad, todas están un poco deformadas. Por ejemplo, las llantas del automóvil y el suelo lo están, lo mismo que la escalera y la pared. Las leyes de la elasticidad y las propiedades elásticas de la estructura ofrecen la relación adicional necesaria entre las cuatro fuerzas. En consecuencia, un análisis completo exige no sólo las leyes de la mecánica de cuerpos rígidos, sino también las de la elasticidad.

9-6 APLICACIONES DE LAS LEYES DE NO EQUILIBRIO DE NEWTON PARA LA ROTACIÓN

En la presente sección eliminamos la restricción de la anterior: la aceleración angular era cero, porque también lo era la torca neta. Aquí vamos a estudiar algunos casos en que la torca neta no cero actúa sobre un cuerpo y le imparte aceleración angular.

En el caso del movimiento lineal en una dimensión, resolver un problema similar aplicando la segunda ley de Newton, $\Sigma F_x = ma_x$, donde un componente de la fuerza neta, produce uno de aceleración sobre el mismo eje coordenado. Con el fin de conservar la analogía con las leyes de movimiento lineal de Newton, mantenemos la restricción de que el cuerpo gire alrededor de un solo eje fijo. Empleamos la forma rotacional de la segunda ley de Newton (Ec. 9-11), $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$, donde (como en la sección anterior) por razones de comodidad suprimimos el subíndice "ext", a sabiendas de que estamos considerando *sólo* las torcas externas en el análisis.

En esta sección vamos a analizar los problemas referentes a la aceleración angular producida por una torca aplicada a un objeto que tiene un eje fijo de rotación. En la siguiente ampliaremos la explicación un poco para incluir casos en que el objeto gira, y además se mueve linealmente (pero conserva el eje de rotación en dirección fija). En el Capítulo 10 estudiaremos las rotaciones en que el eje no sigue una dirección fija.

PROBLEMA RESUELTO 9-9. Un carrusel en el patio de juego es empujado por un adulto que ejerce una fuerza $\vec{F}$ con una magnitud de 115 N en el punto P en el borde, a una distancia de $r = 1.50$ m del eje de rotación (Fig. 9-25). La fuerza se ejerce en una dirección en un ángulo de 32° debajo de la horizontal; su componente horizontal sigue una dirección de 15° hacia adentro desde la tangente en P. *a*) Determine la magnitud del componente de la torca que acelera el carrusel. *b*) Suponiendo que éste puede representarse como un disco de acero de 1.5 m de radio y de 0.40 cm de espesor, y que el niño puede representarse como una "partícula" de 25 kg a 1.0 m del eje de rotación, calcule la aceleración angular resultante del sistema incluyéndolo a él y al carrusel.

Solución *a*) Sólo el componente horizontal de $\vec{F}$ produce una torca vertical. Encontremos $F_\perp$, el componente de $\vec{F}$ sobre la línea horizontal perpendicular a $\vec{r}$. El componente horizontal de $\vec{F}$ es

$$F_h = F \cos 32° = 97.5 \text{ N}.$$

El componente de F_h perpendicular a $\vec{r}$ es

$$F_\perp = F_h \cos 15° = 94.2 \text{ N}.$$

Por tanto, la torca (vertical) sobre el eje de rotación será

$$\tau = rF_\perp = (1.50 \text{ m})(94.2 \text{ N}) = 141 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

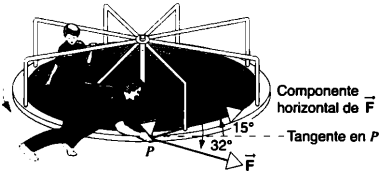


FIGURA 9-25. Problema resuelto 9-9. Un adulto empuja un carrusel en el patio de juego. Se inclina y por eso la fuerza tiene un componente hacia abajo. Además, como el adulto se encuentra fuera del borde, la fuerza se dirige un poco hacia adentro. El componente horizontal de la fuerza, F_h, se encuentra en el plano de la plataforma giratoria y forma un ángulo de 15° con la tangente en P, el punto donde se aplica la fuerza.

El componente de F_h, paralelo a $r(= F_h \text{ sen } 15°)$, no produce ningún par alrededor del eje de rotación, y el componente vertical de F (F sen 32°) origina una torca perpendicular al eje que tendería a ladear la plataforma en rotación fuera del plano horizontal (porque el adulto está empujando la plataforma *hacia abajo*), si a la torca no se opusiera otra igual y contraria procedente de los cojinetes.

b) El carrusel es un disco circular de radio $R = 1.5$ m y de espesor $d = 0.40$ cm. Su volumen es $\pi R^2 d = 2.83 \times 10^4$ cm^3. La densidad del acero es 7.9 g/cm^3, de modo que la masa del carrusel es $(2.8 \times 10^4 \text{ cm}^3)(7.9 \text{ g/cm}^3) = 2.23 \times 10^5$ g $= 223$ kg. En la figura 9-15*c* obtenemos la inercia rotacional de un disco que se hace girar alrededor de un eje perpendicular a su centro:

$$I_m = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2}(223 \text{ kg})(1.5 \text{ m})^2 = 251 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

La inercia rotacional del niño, a quien tratamos como una partícula de masa $m = 25$ kg a una distancia de $r = 1.0$ m del eje de rotación, es

$$I_c = mr^2 = (25 \text{ kg})(1.5 \text{ m})^2 = 25\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

La inercia rotacional total es $I_t = I_m + I_c = 251 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 25 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 = 276 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Ahora la aceleración angular puede determinarse a partir de la ecuación 9-11:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I_t} = \frac{141 \text{ N}\cdot\text{m}}{276 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 0.51 \text{ rad/s}^2.$$

Con base en la dirección de la fuerza que aparece en la figura 9-25, la regla de la mano derecha indica que τ_z y α_z apuntan verticalmente hacia arriba desde el plano del carrusel.

PROBLEMA RESUELTO 9-10. La figura 9-26*a* contiene una polea que puede considerarse como un disco uniforme de masa $M = 2.5$ kg y de radio $R = 20$ cm, montado en un eje horizontal fijo (sin fricción). Un bloque de masa $m = 1.2$ kg cuelga de un cable ligero enrollado alrededor del borde del disco. Determine la aceleración del bloque que cae, la tensión del cable y la aceleración angular del disco.

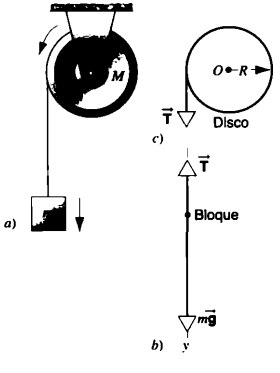


FIGURA 9-26. Problema resuelto 9-10. *a*) Un bloque que cae hace girar al disco. *b*) Diagrama de cuerpo libre del bloque. *c*) Diagrama parcial de cuerpo libre del disco. Las direcciones consideradas positivas se denotan con las flechas en *a*). El eje positivo z está hacia fuera de la página.

Solución En la figura 9-26*b* se ve un diagrama de cuerpo libre del bloque. Nótese que, al dibujarlo para analizar las rotaciones, hay que mostrar las fuerzas y sus puntos de aplicación, pues de lo contrario no podríamos determinar la línea de acción de las fuerzas al calcular la torca correspondiente. Decidimos que el eje y sea positivo hacia abajo, de modo que la fuerza neta es $\Sigma F_y = mg - T$, que es una magnitud positiva si el bloque acelera hacia abajo. Al aplicar el componente y de la segunda ley de Newton ($\Sigma F_y = ma_y$), tenemos

$$mg - T = ma_y.$$

La figura 9-26*c* contiene un diagrama parcial de cuerpo libre del disco. Si decidimos que el eje positivo z esté fuera del plano de la figura, el componente z de la torca neta alrededor de O es $\Sigma \tau_z = TR$ (ni el peso del disco ni la fuerza hacia arriba ejercida en este punto de apoyo contribuyen a la torca alrededor de O, porque sus dos líneas de acción cruzan ese punto). Al aplicar la forma rotacional de la segunda ley de Newton (Ec. 9-11), obtenemos $TR = I\alpha_z$, donde α_z es positiva en la rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Con $I = \frac{1}{2}MR^2$ y $\alpha_z = a_T/R$, obtenemos $TR = (\frac{1}{2}MR^2)(a_T/R)$ o

$$T = \tfrac{1}{2}Ma_T.$$

Como el cable no se resbala ni estira, la aceleración a_y del bloque ha de ser igual a la aceleración tangencial a_T de un punto en el borde del disco. Con $a_y = a_T = a$, podemos combinar las ecuaciones del bloque y del disco para obtener

$$a = g\frac{2m}{M + 2m} = (9.8 \text{ m/s}^2)\frac{(2)(1.2 \text{ kg})}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})} = 4.8 \text{ m/s}^2,$$

y

$$T = mg\frac{M}{M + 2m} = (1.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)\frac{2.5 \text{ kg}}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})}$$
$$= 6.0 \text{ N}.$$

Según lo previsto, la aceleración del bloque que cae es menor que g, y la tensión en el cable (6.0 N) es menor que el peso del bloque suspendido ($mg = 11.8$ N). Comprobamos asimismo, que la aceleración del bloque y la tensión dependen de la masa del disco, pero no de su radio. A manera de verificación, observe que las fórmulas antes derivadas predicen que $a = g$ y que $T = 0$ en el caso de un disco sin masa ($M = 0$). Es lo que esperábamos; el bloque simplemente cae como un cuerpo libre, dejando detrás el cable.

La aceleración angular del disco se deduce de

$$\alpha_z = \frac{a}{R} = \frac{4.8 \text{ m/s}^2}{0.20 \text{ m}} = 24 \text{ rad/s}^2 = 3.8 \text{ rev/s}^2$$

y es positiva, correspondiente a una rotación en dirección de la flecha de la figura 9-26*a*.

En las rotaciones alrededor de un eje fijo, la velocidad y la aceleración angulares tienen sólo un componente, de ahí que sólo ese mismo componente de la torca esté sujeto a las leyes de Newton. Sin embargo, podemos aplicar una fuerza a un cuerpo rígido en cualquier dirección; en general la torca tendrá dos o tres componentes, de los cuales sólo uno produce realmente rotaciones. ¿Qué sucede con los dos restantes?

Consideremos la rueda de bicicleta de la figura 9-27. Dos cojinetes fijan la dirección del eje de la rueda, por lo cual el

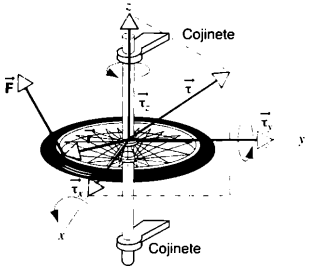


FIGURA 9-27. Un cuerpo rígido, en este caso una rueda, puede girar libremente alrededor del eje z. Una fuerza arbitraria $\vec{F}$ que actúa en un punto del borde, puede producir componentes de la torca en los tres ejes coordenados. Sólo el componente z logra hacer girar la rueda. Los componentes x y y de la torca tenderían a alejar el eje de rotación del eje z. A esta tendencia deben oponerse torcas iguales y opuestas (que no aparecen en la figura) ejercidas por los cojinetes, los cuales sostienen el eje en una dirección fija.

eje de rotación corresponde al eje z. Se aplica una fuerza $\vec{F}$ a la rueda en dirección arbitraria; en general la torca asociada puede tener x, y y z componentes como se ve en la figura 9-27. Cada componente de la torca tiende a causar rotación alrededor de su eje correspondiente. Pero hemos supuesto que el cuerpo está fijo, en forma tal que la rotación sólo es posible alrededor del eje z. No producen movimiento los componentes x y y de la torca. En este caso, los cojinetes sirven para hacer que el sistema gire únicamente alrededor del eje z; por tanto, han de originar torcas que cancelen los componentes x y y de la torca en la fuerza aplicada. Vemos, pues, lo que significa que un cuerpo sea obligado a moverse alrededor de un eje fijo: sólo los componentes de la torca paralelos a él logran hacerlo girar; se supone que los componentes perpendiculares al eje están equilibrados por otras partes del sistema. Los cojinetes *deben* producir torcas con los componentes x y y para mantener fija la dirección del eje de rotación; también *pueden* generar una torca en la dirección z, como en el caso de cojinetes no ideales que ejerce fuerzas de fricción sobre el eje de la rueda. Como el centro de masa de la rueda no se mueve, las fuerzas causadas por los cojinetes han de agregarse a las externas para originar una fuerza neta de cero.

9-7 COMBINACIÓN DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL Y TRASLACIONAL

En la figura 9-28 se muestra una fotografía expuesta en el tiempo de una rueda en movimiento. Es un ejemplo de un movimiento posiblemente complejo en que un objeto experimenta simultáneamente desplazamiento de rotación y de traslación.

En términos generales, los movimientos traslacional y rotacional son independientes por completo. Por ejemplo, consideremos un disco de goma que se desliza por una superficie horizontal (quizás una capa de hielo). Podemos imprimirle sólo un movimiento traslacional (sin rotación) o hacerlo girar en un lugar, de manera que presente sólo movimiento rotacional sin movimiento traslacional. También podemos empujarlo (con cualquier velocidad lineal) y al mismo tiempo hacerlo girar (con cualquier velocidad angular), para que se deslice por el hielo con ambos tipos de movimiento. El centro de masa se mueve en línea recta (aun ante una fuerza externa como la fricción), pero el movimiento de cualquier otro punto del disco puede ser una combinación complicada, como el punto en el borde de la rueda de la figura 9-28.

El disco de goma o la rueda que se mueve representan los casos del movimiento combinado a los cuales limitamos nuestra explicación y que satisfacen dos condiciones: 1) El eje de rotación cruza el centro de masa (que sirve de punto de referencia para calcular la torca y el momento angular), y 2) El eje siempre sigue la misma dirección en el espacio (esto es, el eje en un instante es paralelo al eje en cualquier otro instante). Si las dos condiciones se cumplen, podemos aplicar la ecuación 9-11 ($\Sigma\, \tau_z = I\alpha_z$, empleando exclusivamente torcas *externas*) al movimiento de rotación. Independiente del movimiento de rotación, podemos aplicar al movimiento de traslación la ecuación 7-16 ($\Sigma\, \vec{F} = M\vec{a}_{cm}$, utilizando sólo fuerzas *externas*).

Hay un caso especial de este tipo de movimiento que observamos con mucha frecuencia; lo ejemplifica la rueda de la figura 9-28. Nótese lo siguiente: en el sitio donde el punto iluminado en el borde entra en contacto con la superficie, la luz

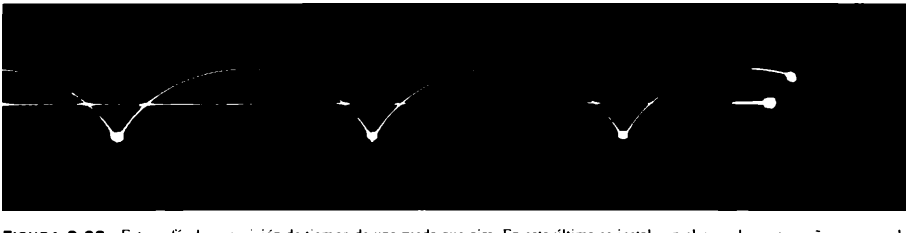


FIGURA 9-28. Fotografía de exposición de tiempo de una rueda que gira. En esta última se instalaron algunas luces pequeñas, una en el centro y otra en el borde. La segunda traza una curva denominada *cicloide*.

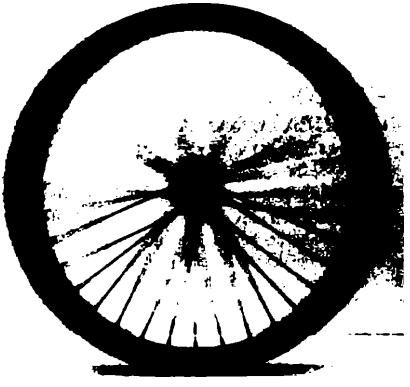


FIGURA 9-29. Fotografía de una rueda de bicicleta que gira. Nótese que los rayos cerca de la parte superior aparecen más borrosos que los cercanos al fondo. Ello se debe a que la parte superior tiene mayor velocidad lineal.

parece particularmente brillante, correspondiente a una larga exposición de la película. En esos momentos el punto se desplaza con mucha lentitud respecto a la superficie, o quizá se encuentre instantáneamente en reposo. Se da el nombre de *rodamiento sin deslizamiento* a este caso especial, en el cual el objeto rueda sobre una superficie de manera que no existe movimiento relativo entre ellos en el punto instantáneo de contacto.

La figura 9-29 muestra otro ejemplo de ello. Obsérvese que los rayos de la rueda de la bicicleta cerca de la parte inferior son más nítidos, que los de la parte superior que aparecen borrosos. Es evidente que la parte superior se desplaza con mayor rapidez que la parte inferior. En el rodamiento sin deslizamiento, la fuerza de fricción entre la rueda y la superficie impide el movimiento relativo en el punto de contacto. Aunque la rueda se mueve, lo que se aplica es la fuerza de fricción *estática*.

No todos los casos de rodamiento sobre una superficie de fricción producen rodamiento sin deslizamiento. Imagine, por ejemplo, un automóvil que intenta arrancar en una calle cubierta de hielo. Al principio, quizá las ruedas giren sin avanzar, de manera que se da rotación pura sin traslación. Si ponemos arena en el hielo, girarán rápidamente y el automóvil avanza hacia adelante. Todavía se observa deslizamiento entre las llantas y el hielo, pero ahora se realiza un poco de movimiento traslacional. Finalmente las llantas dejan de patinar en el hielo y se produce un movimiento relativo entre ambos; es la condición de rodamiento sin deslizamiento.

La figura 9-30 muestra la forma de ver este fenómeno como una combinación del movimiento de rotación y de traslación. En el movimiento traslacional puro (Fig.9-30*a*), el centro de masa C (en todos los puntos de la rueda) se desplaza hacia la derecha con una velocidad v_{cm}. En el movimiento rotacional puro (Fig.9-30*b*) a la rapidez angular ω, todos los puntos del borde presentan rapidez tangencial ωR. Cuando se combinan los dos movimientos, la velocidad resultante del punto B (en el fondo de la rueda) es $v_{cm} - \omega R$. En el rodamiento sin deslizamiento, el punto donde la rueda entra en contacto con la superficie ha de estar en reposo; por tanto, $v_{cm} - \omega R = 0$, o bien

$$v_{cm} = \omega R. \tag{9-36}$$

Obtenemos la figura 9-30*c* al sobreponer el movimiento traslacional y rotacional resultante. Adviértase que la rapidez lineal en la parte superior de la rueda (punto T) es exactamente el doble que la del centro.

La ecuación 9-36 se aplica *sólo* en el caso de rodamiento sin deslizamiento; v_{cm} no es igual a ωR en el caso general de la combinación del movimiento rotacional y el traslacional.

Hay otra forma muy instructiva de analizar este fenómeno: suponemos que el punto de contacto B es un eje instantáneo de rotación, como se aprecia en la figura 9-31. En cada instante hay un nuevo punto de contacto B y, por lo mismo, un nuevo eje de rotación, aunque momentáneamente el movimiento es una rotación pura alrededor de B. La velocidad angular de esta última rotación en torno a B es idéntica a la velocidad angular ω de la rotación alrededor del centro de masa. Puesto que la distancia entre B y T es el doble que la existente entre B y C, una vez más concluimos que la rapidez lineal en T duplica la de C.

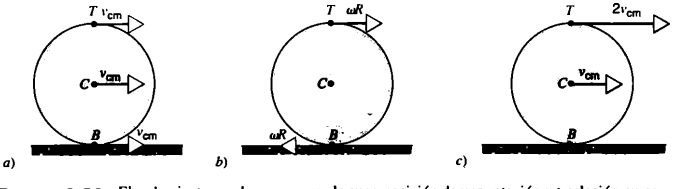


FIGURA 9-30. El rodamiento puede verse como la superposición de una rotación y traslación puras alrededor del centro de masa. *a*) Movimiento traslacional, en que todos los puntos se desplazan con idéntica velocidad lineal. *b*) Movimiento rotacional, en que todos los puntos se desplazan con igual velocidad angular alrededor del eje central. *c*) Superposición de *a*) y de *b*), en que las velocidades en T, C y B se obtuvieron mediante la adición vectorial de los componentes traslacionales y rotacionales.

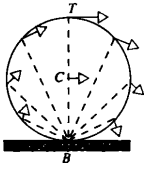


FIGURA 9-31. Puede suponerse que un cuerpo rodante gira alrededor de un eje instantáneo en el punto de contacto B. Los vectores indican la velocidad lineal instantánea de varios puntos.

PROBLEMA RESUELTO 9-11. Un cilindro sólido de masa M y de radio R, parte del reposo y rueda sin deslizamiento por un plano inclinado de longitud L y de altura h (Fig.9-32). Calcule la rapidez de su centro de masa cuando el cilindro llega al fondo.

Solución El diagrama de cuerpo libre de la figura 9-32*b* contiene las fuerzas que actúan sobre el cilindro: el peso $M\vec{g}$, la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de fricción $\vec{f}$. Con base en la elección de los ejes x y y que aparecen en la figura, los componentes de la fuerza neta en el cilindro son $\Sigma F_x = Mg \operatorname{sen} \theta - f$ y $\Sigma F_y = N - Mg \cos \theta$. Si aplicamos la segunda ley de Newton con $a_x = a_{cm}$ y $a_y = 0$, obtendremos las ecuaciones x y y

$$Mg \operatorname{sen} \theta - f = Ma_{cm} \quad \text{y} \quad N - Mg \cos \theta = 0.$$

Si queremos determinar la torca neta alrededor del centro de masa, observamos que las líneas de acción de $\vec{N}$ y $M\vec{g}$ cruzan el centro, de ahí que sus brazos de palanca sean cero. Sólo la fuerza de fricción contribuye a la torca, y por eso $\Sigma \tau_z = -fR$. Entonces la segunda ley de Newton para la rotación nos da

$$-fR = I_{cm}\alpha_z.$$

En la figura 9-32 el eje z está hacia fuera de la página, por lo cual α_z es efectivamente negativa. La condición de rodamiento sin deslizamiento es $v_{cm} = \omega R$; al derivar esta expresión queda $a_{cm} = \alpha R$, que relaciona las magnitudes de a_{cm} y α. Si sustituimos $\alpha_z = -a_{cm}/R$ y $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ (en un cilindro), obtendremos

$$f = -\frac{I_{cm}\alpha_z}{R} = -\frac{(\frac{1}{2}MR^2)(-a_{cm}/R)}{R} = \frac{1}{2}Ma_{cm}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación traslacional obtenemos

$$a_{cm} = \tfrac{2}{3}g \operatorname{sen} \theta.$$

En otras palabras, la aceleración del centro de masa del cilindro que rueda ($\frac{2}{3}g \operatorname{sen} \theta$), es menor de lo que sería si se deslizara por la pendiente ($g \operatorname{sen} \theta$). Este resultado es válido en cualquier instante, sin importar la posición del cilindro en la pendiente.

Por ser constante la aceleración, podemos emplear las ecuaciones del Capítulo 2 para determinar la velocidad. Con $v_{0y} = 0$ y tomando $x - x_0 = L$ (donde el eje x se halla en el plano), las ecuaciones 2-26 y 2-28 se convierten, respectivamente en $v_{cm} = a_{cm}t$ y $L = \frac{1}{2}a_{cm}t^2$. Al resolver la segunda ecuación para el tiempo t, tenemos $t = \sqrt{2L/a_{cm}}$. Con este resultado la primera ecuación nos da

$$v_{cm} = a_{cm}t = a_{cm}\sqrt{\frac{2L}{a_{cm}}} = \sqrt{2La_{cm}} = \sqrt{2L(\tfrac{2}{3}g \operatorname{sen} \theta)} = \sqrt{\tfrac{4}{3}Lg \operatorname{sen} \theta}$$

Con este método se determina también la fuerza de la fricción estática necesaria para el rodamiento:

$$f = \tfrac{1}{2}Ma_{cm} = (\tfrac{1}{2}M)(\tfrac{2}{3}g \operatorname{sen} \theta) = \tfrac{1}{3}Mg \operatorname{sen} \theta.$$

¿Qué sucedería si la fuerza de fricción estática entre las superficies fuera menor?

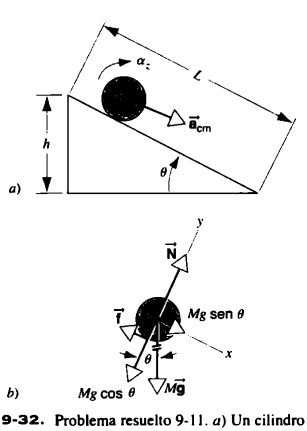


FIGURA 9-32. Problema resuelto 9-11. *a*) Un cilindro rueda pendiente abajo sin resbalar. *b*) Diagrama de cuerpo libre del cilindro.

PROBLEMA RESUELTO 9-12. A un cilindro sólido uniforme de radio R (12 cm) y de masa M (3.2 kg), se le imprime una velocidad inicial angular ω_0 (en el sentido de las manecillas del reloj) de 15 rev/s, y luego se baja a una superficie horizontal uniforme (Fig. 9-33). El coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y la superficie es $\mu_k = 0.21$. En un principio, el cilindro se desliza al desplazarse sobre la superficie, pero después del tiempo t comienza un rodamiento puro sin deslizamiento. *a*) ¿Qué velocidad v_{cm} tiene el centro de masa en el tiempo t? *b*) ¿Cuál es el valor de t?

Solución *a*) La figura 9-33*b* muestra las fuerzas que actúan sobre el cilindro. Los componentes x y y de la fuerza neta son $\Sigma F_x = f$ y $\Sigma F_y = N - Mg$. Durante el intervalo entre el tiempo 0 y el tiempo t mientras ocurre el deslizamiento, las fuerzas son constantes y por

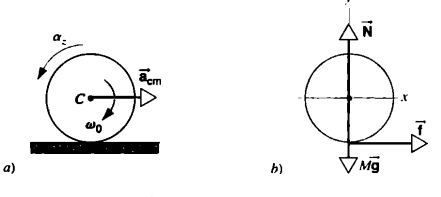


FIGURA 9-33. Problema resuelto 9-12. *a*) El cilindro que gira se desliza inicialmente al rodar. *b*) Diagrama de cuerpo libre del cilindro.

ello la aceleración también ha de serlo. En este intervalo temporal, $v_{fx} = v_{cm}$ y $v_{ix} = 0$. Entonces la aceleración será

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t} = \frac{v_{cm} - 0}{t} = \frac{v_{cm}}{t}.$$

Así, el componente x de la segunda ley de Newton nos da

$$f = Ma_x = \frac{Mv_{cm}}{t}$$

Sólo la fuerza de fricción produce una torca alrededor del centro de masa, por lo cual la torca neta es $\Sigma\ \tau_z = fR$. Con $\omega_i = \omega_0$ y $\omega_f = -v_{cm}/R$ en el instante en que principia el rodamiento sin deslizamiento (los signos de menos indican que el cilindro gira en el sentido de las manecillas del reloj), la aceleración angular es

$$\alpha_z = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{-v_{cm}/R + \omega_0}{t}.$$

La segunda ley de Newton para la rotación da $fR = I_{cm}\alpha_z$. Al sustituir para f y α_z en las dos ecuaciones anteriores, tenemos

$$\left(\frac{Mv_{cm}}{t}\right)R = \frac{\frac{1}{2}MR^2(-v_{cm}/R + \omega_0)}{t}$$

empleando $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ de la figura 9-15. Una vez eliminados los factores comunes, podemos resolver para v_{cm} y encontrar

$$v_{cm} = \tfrac{1}{3}\omega_0 R = \tfrac{1}{3}(15\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev})(0.12\ \text{m}) = 3.8\ \text{m/s}.$$

Nótese que v_{cm} no depende de los valores de M, g ni μ_k. ¿Pero qué ocurriría si alguna de esas magnitudes fuera cero?

b) Con $f = Mv_{cm}/t$ y también $f = \mu_k N = \mu_k Mg$, podemos eliminar f y resolver para t:

$$t = \frac{v_{cm}}{\mu_k g} = \frac{3.8\ \text{m/s}}{(0.21)(9.80\ \text{m/s}^2)} = 1.8\ \text{s}.$$

PROBLEMA RESUELTO 9-13. Un yoyo* de masa total $M = 0.24$ kg consta de dos discos de radio $R = 2.8$ cm, conectados a un delgado eje de radio $R_0 = 0.25$ cm (Fig.9-34*a*). Una cuerda de longitud $L = 1.2$ m está enrollada alrededor del eje. Si los lanzamos hacia abajo con una velocidad inicial de $v_0 = 1.4$ m/s, ¿qué velocidad rotacional tendrá cuando llegue al extremo de la cuerda?

Solución El diagrama de cuerpo libre del yoyo aparece en la figura 9-34*b*. La fuerza neta es $\Sigma\ F_y = Mg - T$ (suponiendo que la dirección descendente sea positiva) y la torca neta alrededor del centro de masa es $\Sigma\ \tau_z = TR_0$ (suponiendo que sean positivos los pares en dirección contraria a las manecillas del reloj). Entonces las formas traslacional y rotacional de la segunda ley de Newton dan

$$Mg - T = Ma_y \quad \text{y} \quad TR_0 = I\alpha_z.$$

*Véase "The Yo-Yo: A Toy Flywheel" de Wolfgang Burger, *American Scientist*, marzo-abril de 1984, p. 137.

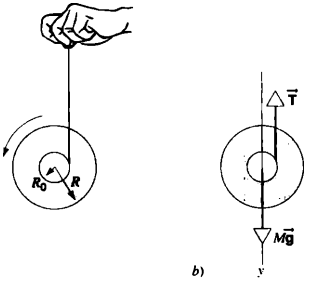


FIGURA 9-34. Problema resuelto 9-13. *a*) Un yoyo cae a medida que la cuerda se desenrolla del eje. *b*) Diagrama de fuerzas.

Suponemos que la cuerda tiene un espesor despreciable y que no resbale al ser desenrollada. El punto donde entre en contacto con el eje está instantáneamente en reposo, como el punto B de las figuras 9-30 y 9-31. Con $v_{cm} = \omega R_0$, se deduce que (en magnitudes exclusivamente) $a_{cm} = \alpha R_0$. En nuestra notación de este problema $a_{cm} = a_y$ (una magnitud positiva), y $\alpha = \alpha_z$ (también una magnitud positiva). En consecuencia, al tomar $a_y = \alpha_z R_0$ y al combinar las ecuaciones de fuerza y de torca para eliminar la tensión, resolvemos para la aceleración angular:

$$\alpha_z = \frac{g}{R_0}\frac{1}{1 + I/MR_0^2}.$$

Para completar la solución, necesitamos la inercia rotacional que no se nos proporciona. Supongamos que el eje delgado hace una contribución insignificante a I (la masa y el radio del eje son pequeños comparados con los discos). Entonces la inercia rotacional es $I = \frac{1}{2}MR^2$ y

$$\alpha_z = \frac{g}{R_0}\frac{1}{1 + R^2/2R_0^2}$$

$$= \frac{980\ \text{cm/s}^2}{0.25\ \text{cm} + (2.8\ \text{cm})^2/2(0.25\ \text{cm})} = 61.5\ \text{rad/s}^2.$$

Para calcular la velocidad angular final a partir de esa aceleración, podemos utilizar la ecuación 8-6 ($\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$), si conocemos el tiempo t que el yoyo tarda en desenrollarse. Esta vez el tiempo puede calcularse con base en la ecuación 8-7, $\phi = \phi_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$. El ángulo que gira el yoyo al desenrollarse la cuerda es $\phi - \phi_0 = L/R_0 = 480$ rad, y la velocidad angular es $\omega_{0z} = v_0/R_0 = (1.4\ \text{m/s})(0.0025\ \text{m}) = 560$ rad/s. Con estas sustituciones, la ecuación 8-7 nos da entonces

$$(30.75\ \text{rad/s}^2)t^2 + (560\ \text{rad/s})t - 480\ \text{rad} = 0.$$

Al resolver esta ecuación cuadrática, encontramos $t = 0.82$ s, o -19 s. El valor positivo tiene significado físico, así que

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t = 560\ \text{rad/s} + (61.5\ \text{rad/s}^2)(0.82\ \text{s}) = 610\ \text{rad/s}.$$

OPCIÓN MÚLTIPLE

9-1 La torca

1. Considere el objeto de la figura 9-2. Invierta el sistema coordenado, de modo que $x \to -x$, $y \to -y$ y $z \to -z$. Claro que en esta transformación $\bar{r} \to -\bar{r}$. ¿Qué sucede con $\bar{\tau}$ y $\bar{F}$?
   A) $\bar{\tau} \to \bar{\tau}$ y $\bar{F} \to \bar{F}$
   B) $\bar{\tau} \to \bar{\tau}$ y $\bar{F} \to -\bar{F}$
   C) $\bar{\tau} \to -\bar{\tau}$ y $\bar{F} \to \bar{F}$
   D) $\bar{\tau} \to -\bar{\tau}$ y $\bar{F} \to -\bar{F}$

2. Una partícula se encuentra en $\bar{r} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}$ (en metros). Una fuerza constante $\bar{F} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 4\hat{k}$ (en newtons) comienza a operar sobre ella. A medida que la partícula acelera bajo la acción de esta fuerza, la torca, medida alrededor del origen,
   A) aumenta. B) disminuye. C) es cero.
   D) es una constante no cero.

3. En una de sus muchas películas de acción, Jackie Chan salta de un edificio amarrado de una cuerda alrededor de la cintura; luego va desenrollándose conforme cae al suelo en forma muy parecida a un yoyo. Suponiendo que su aceleración al suelo fuera una constante mucho menor que g, la tensión en la cuerda sería
   A) casi igual a su peso.
   B) exactamente igual a su peso.
   C) mucho menor que su peso.
   D) exactamente cero.
   (Véase *Who Am I*, protagonizada por Jackie Chan.)

9-2 Inercia rotacional y la segunda ley de Newton

9-3 Inercia rotacional de los cuerpos sólidos

4. ¿Alrededor de qué eje tendría un cubo uniforme su inercia rotacional mínima?
   A) Cualquier eje que cruce el centro del cubo y el de una cara.
   B) Cualquier eje que cruce el centro del cubo y el de un borde.
   C) Cualquier eje que cruce el centro del cubo y un vértice (una diagonal).
   D) Un cubo uniforme tiene la misma inercia rotacional con cualquier eje de rotación que pase por su centro.

9-4 La torca debido a la gravedad

9-5 Aplicaciones de las leyes del equilibrio de Newton por la rotación

5. Una larga varilla recta experimenta varias fuerzas, cada una de las cuales actúa en distinta parte de ella. Todas son perpendiculares a la varilla. Ésta podría estar en equilibrio traslacional, rotacional, en ambos o en ninguno de ellos.
   a) Si un cálculo revela que la torca neta alrededor del extremo izquierdo es cero, podríamos concluir que la varilla
      A) está definitivamente en equilibrio rotacional.
      B) está en equilibrio rotacional, sólo si la fuerza neta que opera sobre ella es cero también.
      C) podría estar en equilibrio rotacional, aun si la fuerza neta no fuera cero también.
      D) podría estar en equilibrio rotacional, aunque la fuerza neta no fuera cero.
   b) Si un cálculo revela que la fuerza neta en la varilla es cero, podría concluirse que la varilla
      A) está definitivamente en equilibrio rotacional.
      B) está en equilibrio rotacional, sólo si se comprueba que es cero la torca neta alrededor de todos los ejes que pasan por un punto cualquiera.
      C) podría estar en equilibrio rotacional si se comprueba que la torca neta alrededor de todos los ejes que pasan por un punto cualquiera es cero.
      D) podría estar en equilibrio rotacional, aunque la torca neta alrededor de un punto cualquier no sea cero.

6. Un adulto empuja un carrusel equilibrado y sin fricción en un patio de juego. Ejerce una fuerza $\bar{F}$ tangente al carrusel, que produce una torca de 240 N · m; la distancia entre el centro y el punto de aplicación de la fuerza es 1.6 m.
   a) ¿Está en equilibrio el carrusel?
      A) Sí, tanto en el movimiento de traslación como en el de rotación.
      B) Sólo en el movimiento de traslación.
      C) Sólo en el movimiento de rotación.
      D) No, ni en el movimiento de traslación ni en el de rotación.
   b) ¿Cuál es la magnitud (si la hay) de la fuerza horizontal ejercida por el eje del carrusel sobre éste?
      A) 348 N B) 240 N
      C) 150 N D) No hay fuerza.

7. Una escalera está en reposo con su extremo superior apoyada en una pared y con su extremo inferior apoyada en el suelo. Un trabajador está a punto de trepar. ¿Cuándo hay más probabilidades de que resbale?
   A) Antes que el trabajador trepe.
   B) Cuando el trabajador está en el peldaño más bajo.
   C) Cuando el trabajador está a la mitad de la escalera.
   D) Cuando el trabajador está en el peldaño de la parte superior.

9-6 Aplicaciones de las leyes de no equilibrio de Newton para la rotación

8. La segunda ley del movimiento traslacional de Newton en el plano xy es $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$; la referente a la rotación es $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$. Tomemos el caso de una partícula que se desplaza en el plano xy bajo la influencia de una sola fuerza.
   A) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ y $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$ deben usarse para analizar el movimiento de esta partícula.
   B) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ o $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$ puede usarse para analizar el movimiento de esta partícula.
   C) Sólo $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ debe usarse para analizar el movimiento de esta partícula.
   D) Sólo $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$ puede usarse para analizar el movimiento de esta partícula.

9-7 Combinación del movimiento rotacional y traslacional

9. Considere cuatro esferas A, B, C y D. A tiene un radio r y una masa m, B tiene un radio $2r$ y una masa m, C tiene radio r y masa $2m$ y D tiene radio r y masa $3m$. Las cuatro pueden colocarse en el mismo punto sobre el mismo plano inclinado, donde rodarán sin resbalar al fondo. La respuesta a las siguientes preguntas también podría ser E: las cuatro son iguales.
   a) ¿Cuál objeto tiene la mayor inercia rotacional?
   b) Si se suelta del reposo, ¿cuál objeto experimentará la torca neta más grande?
   c) Si se suelta del reposo, ¿cuál objeto experimentará la máxima aceleración lineal?

d) Si se deja que ruede pendiente abajo, ¿cuál objeto presentará la mayor rapidez en el fondo?

e) Si se deja que ruede pendiente abajo, ¿cuál objeto llegará al fondo en el menor tiempo?

10. Considere cuatro objetos: A, una esfera sólida; B, un cascarón esférico; C un disco sólido; y D, un aro metálico. Los cuatro poseen la misma masa y radio; podemos colocar los cuatro en el mismo punto del mismo plano inclinado, donde rodarán sin deslizarse al fondo. La respuesta a las siguientes preguntas también podría ser E, los cuatro son iguales.

a) ¿Qué objeto posee la máxima inercia rotacional alrededor de su eje de simetría?

b) Si se suelta del reposo, ¿cuál objeto experimentará la mayor torca neta?

c) Si se suelta del reposo, ¿cuál objeto experimentará la aceleración lineal más grande?

d) Si se le permite rodar pendiente abajo, ¿cuál objeto alcanzará la mayor rapidez en el fondo?

e) Si se le permite rodar pendiente abajo, ¿cuál objeto llegará al fondo en el menor tiempo?

PREGUNTAS

1. Explique por qué la rueda es una invención tan importante.
2. Un yoyo cae en el fondo de su cuerda y luego vuelve a subir. *a*) ¿Invierte su dirección de rotación en el fondo? Explique su respuesta. *b*) ¿Qué lo "impulsa" de nuevo hacia arriba?
3. Un yoyo está en reposo sobre una mesa horizontal y puede rodar libremente (véase Fig. 9-35). Si de la cuerda tira una fuerza horizontal como F_1, ¿en qué dirección rodará? ¿Qué sucede cuando se aplica la fuerza F_2 (su línea de acción cruza el punto de contacto del yoyo con la mesa)? ¿Qué ocurre si se tira de la cuerda con la fuerza F_3?

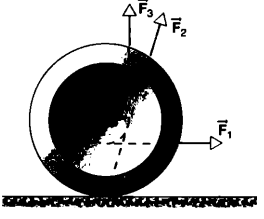


FIGURA 9-35. Pregunta 3.

4. ¿Coinciden en un edificio el centro de masa y el de gravedad? ¿En un lago? ¿En qué condiciones la diferencia entre ambos centros cobra importancia? Dé un ejemplo.
5. Si se lanza un cuerpo rígido al aire sin que gire, no lo hace durante el vuelo siempre que se desprecie la resistencia del aire. ¿Qué significa este sencillo resultado respecto a la ubicación del centro de gravedad?
6. La gimnasta olímpica Mary Lou Retton realizó rutinas extraordinarias en las barras paralelas asimétricas. Un amigo le dice a usted que un análisis meticuloso de las películas de sus rutinas revela que, sin importar lo que hace, en todo momento el centro de gravedad de la gimnasta está arriba de su punto o puntos de apoyo, tal como lo exigen las leyes de la física. Comente la aseveración de su amigo.
7. Párese frente al borde de una puerta abierta, con un pie a cada lado de ella. Se dará cuenta de que no puede permanecer parado sobre los dedos de las piernas. ¿Por qué?
8. Siéntese en una silla de respaldo recto y trate de incorporarse sin inclinarse hacia delante. ¿Por qué no puede hacerlo?
9. Los palos largos le ayudan a un malabarista a caminar por la cuerda floja manteniendo el equilibrio. ¿En qué forma?
10. ¿Existen los cuerpos auténticamente rígidos? De ser así, dé un ejemplo. De lo contrario, explique por qué.
11. Está usted sentado en el asiento de conductor en un automóvil estacionado. Le dicen que las fuerzas que el suelo ejerce hacia arriba en las cuatro llantas son diferentes. Explique los factores que se tienen en cuenta al decidir si esta afirmación es verdadera o no.
12. En el problema resuelto 9-7, si la pared no tuviera fricción, ¿nos proporcionarían las leyes empíricas de la fricción la condición complementaria necesaria para calcular la fuerza adicional (vertical) que la pared ejerce sobre la escalera?
13. ¿Puede considerarse que la masa de un objeto se concentra en su centro de masa cuando se quiere calcular su inercia rotacional? En caso de una respuesta negativa, ofrezca un ejemplo contrario.
14. ¿Alrededor de qué eje es mínima la inercia rotacional de su cuerpo? ¿Alrededor de qué eje por su centro de masa es máxima?
15. Si dos discos circulares del mismo peso y espesor se hacen de metales con distinta densidad, ¿cuál disco —si es que uno de los dos— tendrá la mayor inercia rotacional alrededor de su eje de simetría?
16. Queremos determinar la inercia rotacional de un cuerpo de forma bastante complicada. Ésta hace demasiado difícil el cálculo matemático de $\int r^2\, dm$. Proponga métodos para medir experimentalmente la inercia rotacional alrededor de un eje particular.
17. En la figura 9-36 se muestra la sección transversal de cinco sólidos. Las secciones tienen igual peso y ancho máximo. Los sólidos poseen la misma masa. ¿Cuál presenta la máxima inercia rotacional alrededor de un eje perpendicular que pasa por el centro de masa? ¿Cuál presenta la mínima inercia?

FIGURA 9-36. Pregunta 17.

18. ¿Se cumple la ecuación 9-17 si la losa no es "delgada", es decir, si su espesor es semejante a *a* o *b* (e incluso mayor)?
19. Es posible distinguir un huevo crudo y un huevo hervido haciéndolos girar en una mesa. Explique cómo. Si sostiene con los

dedos un huevo crudo que gira y si lo suelta muy rápidamente, volverá a girar. ¿Por qué?

20. Se han propuesto los volantes para almacenar energía eólica o solar. La cantidad que puede guardarse en cada uno depende de la densidad y de la resistencia a la tensión del material con que esté hecho; con un peso determinado queremos un material fuerte de poca densidad. ¿Puede lograrlo? (Véase "Flywheels" de R. F. Post y S. F. Post, *Scientific American*, diciembre de 1973, p. 17.)

21. Aparte del aspecto, ¿por qué los automóviles deportivos están equipados con rines de rayos?

22. La figura 9-37*a* muestra un metro, con una mitad de madera y la otra de acero, que en el extremo de madera gira en *O*. En *a* se aplica una fuerza al extremo de acero. En la figura 9-37*b*, el metro gira en el extremo de acero en *O'* y la misma fuerza se aplica en el extremo de madera en *a'*. ¿Se obtiene la misma aceleración angular en ambos casos? De no ser así, ¿en qué caso es mayor?

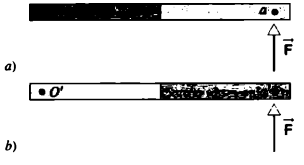


FIGURA 9-37. Pregunta 22.

23. Describa cuantitativamente lo que sucede con el sistema de la figura 9-26 si al soltar el disco se le impone una velocidad angular inicial en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Qué cambios —si los hay— ocurren en la aceleración lineal del bloque o en la aceleración angular del disco? Consúltese el problema resuelto 9-10.

24. Una bala de cañón y una canica ruedan del reposo pendiente abajo. ¿Cuál de las dos llega primero al fondo?

25. Una lata cilíndrica llena de cecina y otra idéntica llena de jugo de manzana ruedan pendiente abajo. Compare sus aceleraciones lineal y angular. Explique la diferencia.

26. Un cilindro sólido de madera rueda por dos pendientes de la misma altura, pero con distinto ángulo de inclinación. ¿Llegará al fondo con la misma rapidez en ambas? ¿Tardará más en rodar por una que por la otra? Explique sus respuestas.

27. Un cilindro sólido de latón y otro también de madera tienen el mismo radio y masa; el de madera es más largo. Los suelta juntos en la parte superior de una pendiente. ¿Cuál llegará primero al fondo? Suponga que después los hace de la misma longitud (y radio), y también de la misma masa perforando un hoyo en el eje del cilindro de latón. ¿Cuál de los dos ganará la carrera ahora? Explique sus respuestas. Suponga que ruedan sin deslizamiento.

28. Formule las tres leyes del movimiento de Newton en términos adecuados para los cuerpos que giran.

29. Dos discos pesados están conectados por una varilla corta de radio mucho menor. El sistema se coloca en una rampa en forma tal, que los discos cuelgan a los costados como en la figura 9-38. Rueda pendiente abajo sin resbalar. *a*) Cerca del fondo de la rampa los discos tocan la mesa horizontal y el sistema arranca con una rapidez traslacional mucho mayor. Explique por qué. *b*) Si el sistema compitiera con un aro (de cualquier radio) pendiente abajo, ¿cuál de los llegaría antes al fondo?

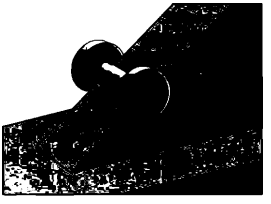


FIGURA 9-38. Pregunta 29.

30. Al cortar un árbol, un leñador practica un corte en el costado que da hacia donde debe caer. Explique por qué. ¿Sería más seguro colocarse detrás del árbol en el lado opuesto de la caída?

31. Comente las siguientes afirmaciones referentes al esquí deportivo. *a*) En las competencias de descenso, conviene que los esquíes no den la vuelta fácilmente. *b*) En el slalom, conviene que lo hagan fácilmente. *c*) Por tanto, en el descenso la inercia rotacional de los esquíes debe ser mayor que la de los del slalom. *d*) Sabiendo que hay poca fricción entre los esquíes y la nieve, ¿cómo ejerce torcas el esquiador para dar vuelta o detener un giro? (Véase "The Physics of Ski Turns" de J. I. Shonie y D. L. Mordick, *The Physics Teacher*, diciembre de 1972, p. 491.)

32. Imagine un palo recto parado en un extremo sobre el hielo (sin fricción). ¿Qué trayectoria seguirá su centro de masa en caso de que caiga?

33. Explique por qué la fricción estática no puede reducir la velocidad de una rueda que se desliza por una superficie plana horizontal. Suponiendo que exista deslizamiento, ¿qué es lo que aminora su velocidad?

34. Con la misma velocidad, Ruth y Roberto pasean en bicicleta en una trayectoria. Las ruedas de la bicicleta de Ruth tienen un diámetro un poco mayor que las de la bicicleta de Roberto. ¿Cómo se relaciona la velocidad angular de sus ruedas? ¿Y la de las partes superiores de las ruedas?

35. Un tambor cilíndrico empujado por un tablón de una posición inicial mostrada en la figura 9-39, rueda hacia adelante por el suelo, una distancia $L/2$ igual a la mitad de la longitud del tablón. Si no hay deslizamiento en el contacto, ¿dónde se encuentra entonces el tablón? ¿Qué distancia ha caminado el hombre?

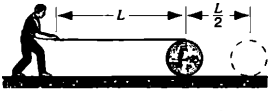


FIGURA 9-39. Pregunta 35.

EJERCICIOS

9-1 La torca

1. Una partícula se halla en las coordenadas $x = 2.0$ m y $y = 3.0$ m. ¿Qué magnitud tiene la torca alrededor de origen cuando sobre la partícula actúa una fuerza de 5.0 N en *a*) la dirección positiva x, *b*) la dirección positiva y *c*) la dirección negativa x?

2. La figura 9-40 muestra las líneas de acción y los puntos de aplicación de dos fuerzas alrededor del origen O; todos los vectores están en el plano de la figura. Imagine que actúan sobre un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje en el punto O y perpendicular al plano de la figura. *a*) Encuentre una expresión de la magnitud de la torca resultante en el cuerpo. *b*) Si $r_1 = 1.30$ m, $r_2 = 2.15$ m, $F_1 = 4.20$ N, $F_2 = 4.90$ N, $\theta_1 = 75.0°$ y $\theta_2 = 58.0°$, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la torca resultante?

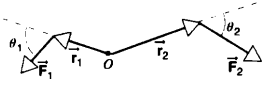


FIGURA 9-40. Ejercicio 2.

3. Vuelva a dibujar la figura 9-40 atendiendo a las siguientes transformaciones: *a*) $\vec{F} \to -\vec{F}$, *b*) $\vec{r} \to -\vec{r}$ y *c*) $\vec{F} \to -\vec{F}$ y $\vec{r} \to -\vec{r}$, indicando en cada caso la nueva dirección de la torca. Verifique la compatibilidad con la regla de la mano derecha.

4. El objeto de la figura 9-41 está fijo en O, y puede girar alrededor de un eje perpendicular al plano de la página. Tres fuerzas operan sobre él en las direcciones señaladas en la figura: $F_A = 10$ N en el punto A, a 8.0 m de O; $F_B = 16$ N en el punto B, a 4.0 m de O, y $F_C = 19$ N en el punto C, a 3.0 m de O. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la torca resultante alrededor de O?

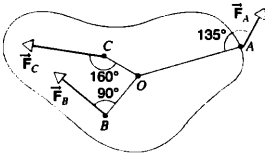


FIGURA 9-41. Ejercicio 4.

5. Dos vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ se encuentran en el plano xy. Sus magnitudes son $r = 4.5$ unidades y $s = 7.3$ unidades. Sus direcciones son, respectivamente, 320° y 85° medidos en dirección contraria a la de las manecillas del reloj partiendo del eje positivo x. Encuentre la magnitud y dirección de $\vec{r} \times \vec{s}$.

6. El vector $\vec{a}$ tiene una magnitud de 3.20 unidades y se halla en el plano yz, a 63.0° del eje $+y$, con un componente positivo z. El vector $\vec{b}$ tiene una magnitud de 1.40 unidades y está en el plano xz, a 48.0° del eje $+x$, con un componente positivo z. Encuentre $\vec{a} \times \vec{b}$.

7. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se hallan en el plano xy. El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es ϕ, que es menor de 90°. Sea $\vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$. Determine la magnitud de $\vec{c}$ y el ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

8. Sea $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$. Supongamos $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. *a*) Encuentre $\mathbf{c}$, expresado en notación de vectores unitarios. *b*) Obtenga el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

9. ¿Cuál es la torca alrededor del origen en una partícula situada en $x = 1.5$ m, $y = -2.0$ m, $z = 1.6$ m, y debida a una fuerza $\vec{F} = (3.5\text{ N})\hat{i} - (2.4\text{ N})\hat{j} + (4.3\text{ N})\hat{k}$? Exprese el resultado en la notación de vectores unitarios.

10. Una partícula se halla en $\vec{r} = (0.54\text{ m})\hat{i} + (-0.36\text{ m})\hat{j} + (0.85\text{ m})\hat{k}$. Una fuerza constante de magnitud 2.6 N actúa sobre ella. Encuentre los componentes de la torca alrededor del origen cuando la fuerza opera en *a*) la dirección positiva x, y *b*) la dirección negativa z.

9-2 Inercia rotacional y la segunda ley de Newton

11. Una pequeña esfera de plomo con una masa de 25 g está conectada al origen por una varilla delgada de 74 cm y de masa despreciable. La varilla gira alrededor del eje z en el plano xy. Una fuerza constante de 22 N en la dirección y actúa sobre la esfera. *a*) Suponiendo que la esfera sea una partícula, ¿cuál será la inercia rotacional alrededor del origen? *b*) Si la varilla forma un ángulo de 40° con el eje positivo x, calcule su aceleración angular.

12. Tres partículas están conectadas a una varilla delgada de 1.00 m de longitud y de masa despreciable que gira alrededor del origen en el plano xy. La partícula 1 (52 g de masa) está unida a una distancia de 27 cm del origen, la partícula 2 (35 g) se encuentra a 45 cm y la partícula 3 (24 g) está a 65 cm. *a*) ¿Cuál es la inercia rotacional del sistema? *b*) Si en cambio la varilla girase alrededor del centro de masa del sistema, ¿cuál sería su inercia rotacional?

13. Dos varillas delgadas de masa despreciable están conectadas rígidamente a sus extremos para formar un ángulo de 90°. Giran en el plano xy, y los extremos unidos forman el pivote en el origen. Se conecta una partícula de 75 g de masa a una de ellas, a una distancia de 42 cm del origen; una partícula de 30 g de masa se conecta a la otra a una distancia de 65 cm del origen. *a*) ¿Cuál es la inercia rotacional del sistema? *b*) ¿Cómo cambiaría la inercia rotacional si las partículas estuvieran unidas a una varilla en las distancias señaladas respecto al origen?

14. Considere el sistema del ejercicio 13 cuando la primera varilla se halla en el eje positivo x y la segunda en el eje positivo y. Una fuerza $\vec{F} = (3.6\text{ N})\hat{i} + (2.5\text{ N})\hat{j}$ actúa sobre las dos. Calcule la aceleración angular resultante.

9-3 Inercia rotacional de los cuerpos sólidos

15. Una hoja del rotor de un helicóptero mide 7.80 m de largo y tiene una masa del 110 kg. *a*) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el perno que conecta la hoja al eje del rotor cuando éste gira a 320 rev/min? (*Sugerencia*: En este cálculo puede suponerse que la hoja es un una masa puntual en el centro de masa. ¿Por qué? *b*) Calcule la torca que debe aplicarse al rotor para que alcance su máxima velocidad a partir del reposo en 6.70 s. No tenga en cuenta la resistencia del aire. (No puede considerarse que la hoja sea una masa puntual en este cálculo. ¿Por qué no? Suponga la distribución de una varilla uniforme.)

16. Las tres hojas del rotor de helicóptero que aparecen en la figura 9-42 miden 5.20 m de largo y tienen una masa de 240 kg. El

rotor gira a 350 rev/min. ¿Qué inercia rotacional tiene el sistema de rotor alrededor del eje de rotación? (Puede considerarse que cada hoja sea una varilla delgada.)

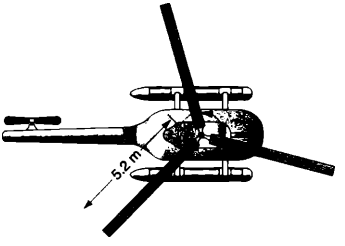


FIGURA 9-42. Ejercicio 16.

17. La figura 9-43 muestra un bloque uniforme de masa M y con longitudes de borde a, b y c. Calcule la inercia rotacional alrededor de un eje que pasa por una esquina, y que es perpendicular a la cara grande del bloque. (*Sugerencia*: véase Fig. 9-15.)

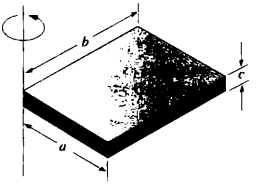


FIGURA 9-43. Ejercicio 17.

18. Calcule la inercia rotacional de un metro con 0.56 kg de masa alrededor de un eje perpendicular a él, y situado en la marca de 20 cm.

19. Dos partículas, con una masa m cada una, son sujetadas entre sí y a un eje de rotación por dos varillas que tienen una longitud L y una masa M, como se ve en la figura 9-44. La combinación gira alrededor del eje de rotación con una velocidad angular ω. Obtenga una expresión algebraica para la inercia rotacional de la combinación alrededor del eje.

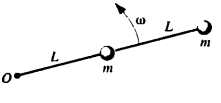


FIGURA 9-44. Ejercicio 19.

20. *a*) Demuestre que un cilindro sólido de masa M y de radio R equivale a un aro delgado de masa M y de radio $R/\sqrt{2}$, en una rotación alrededor de un eje central. *b*) Se da el nombre de *radio de giro* a la distancia radial respecto a un eje donde la masa de un cuerpo podría concentrarse sin alterar su inercia rotacional alrededor de él. Denotemos con k el radio del giro y demuestre que

$$k = \sqrt{I/M}.$$

Obtenemos así el radio del "aro equivalente" en el caso general.

21. La figura 9-45 contiene la varilla sólida a que nos referimos en la sección 9-3 (véase también la figura 9-12), dividida en un número arbitrario de N partes. *a*) ¿Qué masa m_n tiene cada parte? *b*) Demuestre que su distancia respecto al origen de rotación puede escribirse $r_n = (n - 1)L/N + (\frac{1}{2})L/N = (n - \frac{1}{2})L/N$. *c*) Utilice la ecuación 9-13 para evaluar la inercia rotacional de esta varilla, y demuestre que se reduce a la ecuación 9-14. Tal vez necesite las siguientes sumas:

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = N,$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N + 1)/2,$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N(N + 1)(2N + 1)/6.$$

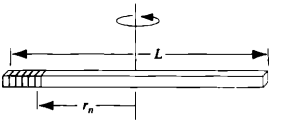


FIGURA 9-45. Ejercicio 21.

9-4 La torca debido a la gravedad

9-5 Aplicaciones de las leyes del equilibrio de Newton para la rotación

22. Se sabe que se necesitan fuerzas de 46 N a ambos lados de cierta nuez para partirla. ¿Qué fuerzas F se requerirán cuando la colocamos en el cascanueces de la figura 9-46?

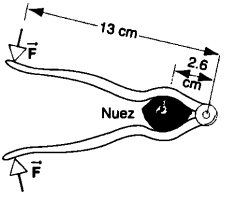


FIGURA 9-46. Ejercicio 22.

23. La Torre Inclinada de Pisa (véase Fig. 9-47) tiene 55 m de altura y 7.0 m de diámetro. La parte superior se aparta 4.5 m de la vertical. Suponiendo que la torre sea un cilindro circular uniforme, *a*) ¿qué desplazamiento adicional medido en la cumbre la pondrá al borde del colapso? *b*) ¿Qué ángulo con la vertical for-

mará la torre en ese momento? (La rapidez actual del movimiento de la cumbre es 1 mm/año.)

FIGURA 9-47. Ejercicio 23.

24. Un cubo permanece en reposo sobre una mesa horizontal, cuando se le aplica una fuerza horizontal perpendicular y al centro de un borde superior. Ahora se aumenta constantemente la fuerza. ¿Se desliza o se vuelca el cubo? El coeficiente de fricción estática entre las superficies es igual a 0.46.

25. En el problema resuelto 9-7, el coeficiente de fricción estática μ_s entre la escalera y el suelo es 0.54. ¿A qué altura de la escalera puede el bombero trepar antes que la escalera empiece a resbalar?

26. Un automóvil estacionado de 1,360 kg de masa tiene una base de ruedas (distancia entre los ejes delantero y trasero) de 305 cm. Su centro de gravedad está 178 cm detrás del eje delantero. Determine *a*) la fuerza ascendente ejercida por el suelo plano sobre las ruedas delanteras (supuestamente iguales), y *b*) la fuerza ascendente ejercida por él sobre las ruedas traseras (supuestamente iguales).

27. Una persona de 160 lb camina por un puente plano y se detiene a tres cuartas partes de la distancia de un extremo. El puente es uniforme y pesa 600 lb. ¿Qué valores tienen las fuerzas verticales que sus soportes ejercen sobre los extremos?

28. Una clavadista de 582 N de peso está en la punta de un trampolín uniforme de 4.48 m y de 142 N de peso. El trampolín está sostenido por dos pedestales separados una distancia de 1.55 m, como se indica en la figura 9-48. Calcule la tensión (o compresión) en los dos pedestales.

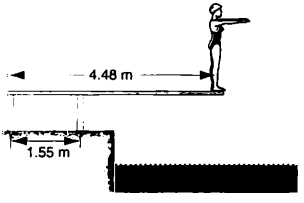


FIGURA 9-48. Ejercicio 28.

29. ¿Qué fuerza mínima F aplicada horizontalmente al eje de la rueda de la figura 9-49 se requiere para levantarla sobre un obstáculo de altura h? Suponga que r es el radio de la rueda, y que W es su peso.

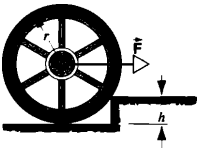


FIGURA 9-49. Ejercicio 29.

30. Un letrero cuadrado uniforme que pesa 52.3 kg y que mide 1.93 m de lado, cuelga de una varilla de 2.88 m y de masa despreciable. Está conectado al extremo de la varilla y a un punto del muro de 4.12 m, como se muestra en la figura 9-50. *a*) Calcule la tensión del cable. *b*) Determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el muro sobre la varilla.

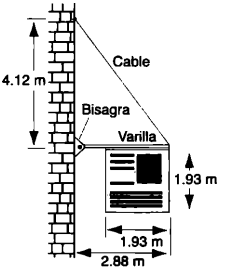


FIGURA 9-50. Ejercicio 30.

31. Un extremo de una viga uniforme que pesa 52.7 lb y que mide 3.12 ft de largo, está sujeto a un muro mediante una bisagra. El otro está sostenido por un alambre que forma ángulos iguales de 27.0° con la viga y el muro (véase Fig. 9-51). *a*) Calcule la tensión del alambre. *b*) Determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza en la bisagra.

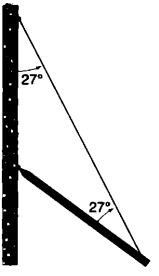


FIGURA 9-51. Ejercicio 31.

32. Un tablón de 274 N y de longitud L = 6.23 m, está en el suelo y en un rodillo sin fricción en la parte superior de un muro de h =

2.87 m de altura (Fig. 9-52). El centro de gravedad se halla en su centro. El tablón permanece en equilibrio con cualquier valor de $\theta \geq 68.0°$, pero resbala si $\theta < 68.0°$. Encuentre el coeficiente de fricción estática entre el tablón y el suelo.

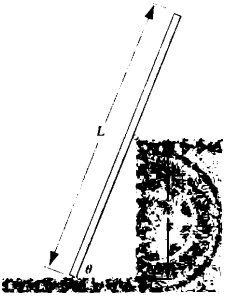


FIGURA 9-52. Ejercicio 32.

9-6 Aplicaciones de las leyes de no equilibrio de Newton para la rotación

33. Un cilindro que tiene una masa de 1.92 kg, gira alrededor de su eje de simetría. Se le aplican fuerzas como se indica en la figura 9-53: F_1 = 5.88 N, F_2 = 4.13 N y F_3 = 2.12 N. Asimismo, R_1 = 4.93 cm y R_2 = 11.8 cm. Determine la magnitud y dirección de la aceleración angular del cilindro.

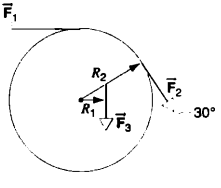


FIGURA 9-53. Ejercicio 33.

34. Un cascarón esférico y delgado tiene un radio de 1.88 m. Una torca aplicada de 960 N·m le imparte una aceleración angular de 6.23 rad/s^2 alrededor del eje que cruza el centro. Calcule *a*) la inercia rotacional del cascarón alrededor del eje de rotación, y *b*) su masa.

35. En el acto de saltar del trampolín, un clavadista cambió su velocidad angular de 0 a 6.20 rad/s en 220 ms. Su inercia rotacional es 12.0 kg · m^2. *a*) Calcule la aceleración angular durante el salto. *b*) ¿Qué torca externa actúa sobre el clavadista cuando salta?

36. La figura 9-54 muestra la enorme puerta blindada de una instalación para prueba de neutrones en el Lawrence Livermore Laboratory; es la puerta con bisagras más pesada del mundo. Tiene una masa de 44,000 kg, una inercia rotacional alrededor de su línea de bisagra de 8.7×10^4 kg · m^2 y un ancho de 2.4 m. ¿Qué fuerza constante, aplicada a su borde externo en ángulo recto con la puerta, puede moverla hasta un ángulo de 90° en 30 s?

FIGURA 9-54. Ejercicio 36.

37. Sobre una polea que tiene una inercia rotacional de 1.14×10^{-3} kg · m^2 y un radio de 9.88 cm, actúa una fuerza aplicada tangencialmente en su borde que varía con el tiempo como $F = At + Bt^2$, donde A = 0.496 N/s y B = 0.305 N/s^2. Si al inicio la polea se encuentra en reposo, determine la rapidez angular después de 3.60 s.

38. Dos bloques idénticos con una masa M, están conectados por una cuerda ligera sobre una polea sin fricción de radio R y de inercia rotacional I (Fig. 9-55). La cuerda no resbala en la polea, y no se sabe si existe o no fricción entre el plano y el bloque deslizante. Cuando se suelta este sistema, se descubre que la polea gira un ángulo θ en el tiempo t, y que la aceleración del bloque es constante. *a*) ¿Cuál es la aceleración angular de la polea? *b*) ¿Cuál es la aceleración de los dos bloques? *c*) ¿Qué tensiones se producen en las secciones superior e inferior de la cuerda? Todas las respuestas pueden expresarse en términos de M, I, R, θ, g y t.

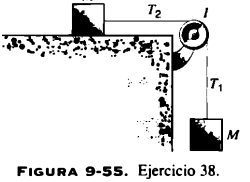


FIGURA 9-55. Ejercicio 38.

39. En la máquina de Atwood, un bloque tiene una masa de 512 g y otro una de 463 g. La polea, que está montada sobre cojinetes horizontales sin fricción, tienen un radio de 4.90 cm. Cuando se suelta del reposo, se observa que el bloque más pesado cae 76.5 cm en 5.11 s. Calcule la inercia rotacional de la polea.

40. Una rueda en la forma de un disco uniforme de 23.0 cm de radio y de 1.40 kg de masa, gira a 840 rev/min en cojinetes sin fricción. Para detenerla, se oprime el freno contra el borde de la rueda con una fuerza de 130 N en dirección radial. La rueda realiza 2.80 revoluciones antes de detenerse. Encuentre el coeficiente de fricción entre el freno y el borde de la rueda.

9-7 Combinación del movimiento rotacional y traslacional

41. Un automóvil que va a 78.3 km/h tiene llantas de 77.0 cm de diámetro. *a*) ¿Cuál es la rapidez angular de las llantas alrededor del eje? *b*) Si se hace que se detenga uniformemente en 28.6 vueltas de las llantas (sin que derrape), ¿cuál será la aceleración angular de ellas? *c*) ¿Cuánto avanza durante el periodo de frenado?

42. Un yoyo (véase Prob. res. 9-13) tiene una inercia rotacional de 950 g · cm^2 y una masa de 120 g. Su radio de eje mide 3.20 mm y su cuerda 134 cm de largo. Rueda del reposo hasta el extremo de la cuerda. *a*) ¿Cuál es su aceleración? *b*) ¿Cuánto tarda en llegar al extremo de la cuerda? *c*) Si el yoyo "duerme" en el fondo de la cuerda en un movimiento giratorio puro, ¿cuál es su rapidez angular en rev/s? *d*) Repita *c*), sólo que esta vez suponga que el yoyo es lanzado hacia abajo con una rapidez inicial de 1.30 m/s.

43. Un aparato para probar la resistencia al deslizamiento en las llantas de automóvil, está construido como se indica en la figura 9-56. Al inicio, la llanta no se mueve y se sostiene en un armazón ligero que gira libremente en los puntos *A* y *B*. La inercia rotacional de la rueda alrededor de su eje es 0.750 kg · m^2, su masa es 15.0 kg y su radio mide 30.0 cm. La llanta está colocada en la superficie de una banda transmisora que se desplaza con una rapidez superficial de 12.0 m/s, de tal manera que *AB* es horizontal. *a*) Si el coeficiente de fricción cinética entre ella y la correa es 0.600, ¿cuánto tiempo tardará la rueda en alcanzar su velocidad angular final? *b*) ¿Qué longitud tendrá la marca del patinazo en la superficie de la banda?

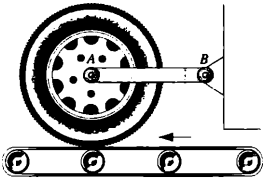


FIGURA 9-56. Ejercicio 43.

PROBLEMAS

1. Una caja en la forma de un cubo de 1.12 m, contiene una maquinaria cuyo diseño es tal, que su centro de gravedad y el de su contenido se encuentra 0.28 m arriba de su centro geométrico. La caja descansa en una rampa que forma un ángulo θ con la horizontal. A medida que θ aumenta desde cero, se alcanzará un ángulo donde la caja comenzará a deslizarse por la rampa o a volcarse. ¿Cuál de los dos casos ocurrirá si el coeficiente de fricción estática es *a*) 0.60? *b*) ¿0.70? En ambos casos indique el ángulo en que suceden los hechos.

2. Como se muestra en la figura 9-57, una cadena flexible de peso *W* cuelga entre dos puntos fijos, *A* y *B* en el mismo nivel. Encuentre *a*) la fuerza que la cadena ejerce en los extremos, y *b*) la tensión en la cadena en el punto más bajo.

FIGURA 9-57. Problema 2.

3. Una esfera uniforme de peso *W* y de radio *r*, está sostenida por una cuerda conectada a un muro sin fricción, a una distancia *L* arriba de su centro como en la figura 9-58. Encuentre *a*) la tensión de la cuerda, y *b*) la fuerza ejercida por el muro en la esfera.

4. Tres trabajadores cargan una viga, uno en un extremo y los dos restantes sosteniéndola entre ellos, en un travesaño colocado en forma tal que la carga se divida igualmente entre los tres. Determine dónde está puesto el travesaño. No tenga en cuenta su masa.

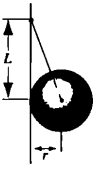


FIGURA 9-58. Problema 3.

5. Un limpiador de ventanas que pesa 74.6 kg, utiliza una escalera de 10.3 kg que mide 5.12 m de largo. Coloca un extremo a 2.45 m de un muro, apoya el extremo superior contra una ventana agrietada y trepa la escalera. Llega a 3.10 m cuando la ventana se rompe. Despreciando de la fricción entre la escalera y la ventana, y suponiendo que la base de la escalera no resbale, calcule *a*) la fuerza que la escalera ejerce sobre la ventana poco antes que ésta se rompa, y *b*) la magnitud y dirección de la fuerza ejercida, sobre la escalera por el suelo poco antes que la ventana se rompa.

6. Como se advierte en la figura 9-59, dos esferas idénticas y uniformes, cada una de un peso *W*, están en reposo en el fondo de un contenedor rectangular fijo. La línea de su centro forma un ángulo θ con la horizontal. Determine las fuerzas que ejercen en las esferas *a*) el fondo del contenedor, *b*) sus lados y *c*) una sobre otra.

7. Una esfera uniforme de peso *W*, se halla en reposo entre dos planos con los ángulos de inclinación θ_1 y θ_2 (Fig. 9-60). *a*) Suponga que no se produce fricción, y determine las fuerzas (dirección y magnitud) que los planos ejercen sobre ella. *b*) ¿Qué cambio realizaría en principio si tuviera en cuenta la fricción?

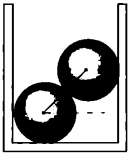


FIGURA 9-59. Problema 6.

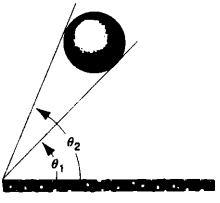


FIGURA 9-60. Problema 7.

8. Una barra horizontal delgada AB de peso despreciable y longitud L, se articula a un muro vertical en A y se sostiene en B mediante un alambre delgado BC, que forma un ángulo θ con la horizontal. El cual tiene un peso W que puede moverse en cualquier parte de la barra como lo define la distancia x respecto al muro (Fig. 9-61). *a*) Encuentre la tensión T en el alambre delgado en función de x. *b*) Determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre ella por la **antieulación** en A. *c*) Con $W = 315$ N, $L = 2.76$ m y $\theta = 32.0°$, calcule la distancia máxima x antes de romperse el alambre, si éste puede soportar la tensión máxima de 520 N.

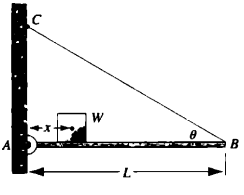


FIGURA 9-61. Problema 8.

9. A continuación se propone un problema muy común (véase, por ejemplo, *Scientific American*, noviembre de 1964, p. 128): se ponen ladrillos uniformes uno sobre otro en forma tal, que presenten el máximo desplazamiento. Se logra haciendo que el centro de gravedad del ladrillo de arriba quede directamente en el borde del que está debajo, combinando el de los dos de arriba directamente sobre el borde del tercero, y así sucesivamente. *a*) Justifique el criterio del desplazamiento máximo; encuentre los desplazamientos mayores de equilibrio para cuatro ladrillos. *b*) Demuestre que, si el proceso se prosigue hacia abajo, se obtendrá un desplazamiento tan grande como se desee. (En el artículo antes citado, Martin Gardner señala: "Con 52 naipes, con el primero colocado de modo que su extremo esté al nivel de un borde de la mesa, la inclinación máxima es un poco más de $2\frac{1}{4}$ longitudes de la carta..."). *c*) Supóngase que en cambio, apilamos ladrillos uniformes de manera que el extremo de uno sea desplazado respecto al que está debajo por una fracción constante, $1/n$, de la longitud de ladrillo L. ¿Cuántos ladrillos N, pueden emplearse en el proceso antes que el montón caiga? Verifique la aceptabilidad de su respuesta cuando $n = 1$, $n = 2$, $n = \infty$.

10. *a*) Demuestre que la suma de las inercias rotacionales de un cuerpo laminar plano alrededor de dos ejes perpendiculares cualesquiera en el plano del cuerpo, es igual a la inercia rotacional del cuerpo alrededor de un eje que pasa por el punto de intersección y que es perpendicular al plano. *b*) Aplique lo anterior a un disco circular para obtener su inercia rotacional alrededor de un diámetro como eje.

11. Pruebe que la inercia rotacional de un cuadrado plano alrededor de una línea trazada por la diagonal, es igual a la que existe alrededor de una línea que se traza por el centro y que cruza dos bordes opuestos como bisector perpendicular. (*Sugerencia*: Consúltese el Prob. 10.)

12. Como se ve en la figura 9-62, se recortaron nueve hoyos cuadrados en una placa cuadrada plana. La placa tiene la longitud de borde L, y los hoyos una longitud a. Éstos se encuentran en el centro de los cuadrados pequeños formados al dividir cada lado del cuadrado en tres secciones iguales. Calcule la inercia rotacional de las rotaciones alrededor de un eje perpendicular a la placa que atraviesa el centro.

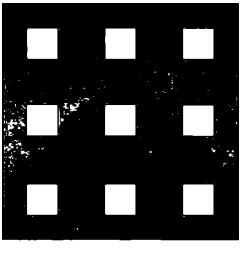


FIGURA 9-62. Problema 12.

13. *a*) Demuestre que en un objeto que puede girar alrededor del eje x, y o z,

$$I_x + I_y + I_z = 2\int r^2\,dm,$$

donde r se mide del origen, *no* del eje de rotación. *b*) ¿Es $I_x + I_y + I_z$ invariante en las rotaciones del sistema coordenado?

14. Con los resultados del problema 13, demuestre que *a*) la inercia rotacional del cascarón esférico de radio R está dada por $I = \frac{2}{3}MR^2$, y *b*) que la inercia rotacional de una esfera sólida está dada por $I = \frac{2}{5}MR^2$. *Sugerencia*: La parte *a*) no exige una integración complicada. La parte *b*) utiliza

$$\frac{dm}{4\pi r^2 dr} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}.$$

15. En este problema tratamos de calcular la inercia rotacional de un disco de masa M y de radio R, alrededor de un eje que pasa por el centro y que es perpendicular a su superficie. Considere un elemento de masa dm en forma de un anillo de radio r y de ancho dr (véase Fig. 9-63). *a)* ¿Qué masa tiene este elemento dm, expresada como fracción de su masa total M del disco? *b)* ¿Cuál es la inercia rotacional dI de este elemento? *c)* Integre el resultado del inciso *b)* para obtener la inercia rotacional del disco entero.

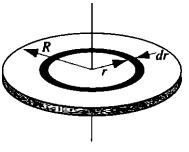


FIGURA 9-63. Problema 15.

16. En este problema nos servimos del resultado del ejemplo anterior, referente a la inercia rotacional de un disco para calcular la de una esfera sólida uniforme de masa M, y de radio R alrededor de un eje que pasa por el centro. Supongamos un elemento dm de la esfera en forma de disco de espesor dz, situado a una altura z arriba del centro (véase Fig. 9-64). *a)* Expresada como parte de la masa total M, ¿cuál es la masa dm del elemento? *b)* Considerando el elemento como un disco, ¿cuál es su inercia rotacional dI? *c)* Integre el resultado *b)* en toda la esfera para calcular su inercia rotacional.

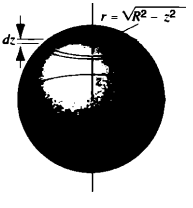


FIGURA 9-64. Problema 16.

17. La figura 9-65 muestra dos bloques de masa m suspendidos en los extremos de una varilla rígida sin peso de longitud $L_1 + L_2$, con $L_1 = 20.0$ cm y $L_2 = 80.0$ cm. La varilla está sostenida en la posición horizontal de la figura y luego se suelta. Calcule la aceleración de los dos bloques cuando empiezan a moverse.

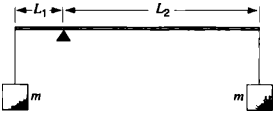


FIGURA 9-65. Problema 17.

18. Una rueda de masa M y de radio de giro k (véase Ej. 20), gira sobre un eje horizontal fijo que cruza su centro. Suponga que éste roza el eje de radio a sólo en el punto más alto, siendo μ_k el coeficiente de fricción cinética. A la rueda se le imprime una velocidad angular inicial ω_0. Suponga una desaceleración uniforme y calcule *a)* el tiempo transcurrido, y *b)* el número de revoluciones antes que la rueda se detenga.

19. Un disco uniforme de radio R y de masa M, gira con una rapidez angular ω_0. Lo colocamos en una superficie horizontal plana; el coeficiente de fricción cinética entre él y la superficie es μ_k. *a)* Determine la torca de fricción en el disco. *b)* ¿Cuánto tardará el disco en detenerse?

20. Un aro que rueda por un plano cuyo ángulo de inclinación es θ, tiene la misma velocidad que un bloque que se desliza por el mismo plano. Demuestre que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano está dado por $\mu_k = \frac{1}{2}\tan\theta$.

21. Una esfera uniforme rueda por una pendiente. *a)* ¿Cuál será el ángulo de inclinación si la aceleración de su centro debe ser $0.133g$? *b)* En este ángulo, ¿cuál será la aceleración de un bloque sin fricción que se desliza pendiente abajo?

22. Un cilindro sólido de longitud L y de radio R tiene un peso W. Dos cuerdas están atadas a su alrededor, una cerca de cada extremo, y los extremos de las cuerdas están sujetos al techo por medio de ganchos. El cilindro es mantenido horizontalmente con las dos cuerdas verticales y luego se suelta (Fig. 9-66). Determine *a)* la tensión de las cuerdas al desenrollarse, y *b)* la aceleración lineal del cilindro al caer.

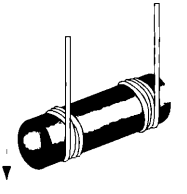


FIGURA 9-66. Problema 22.

23. Demuestre que un cilindro resbalará por un plano con un ángulo de inclinación θ, si el coeficiente de fricción estática entre el plano y el cilindro es menor que $\frac{1}{3}\tan\theta$.

24. Inicialmente, un disco uniforme de masa M y de radio R, se halla de lado en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Por medio de una cuerda atada al borde se le aplica una fuerza constante F en dirección tangencial en su perímetro. Describa el movimiento subsecuente (rotación y traslación) del disco.

25. Una esfera, un cilindro y un aro (con radio R y masa M), parten del reposo y ruedan por la misma pendiente. *a)* ¿Cuál de los tres llega primero al fondo? *b)* ¿Se basa su respuesta en la masa o en el radio de los objetos? Explíquela.

CAPÍTULO 10

MOMENTO ANGULAR

En el Capítulo 9 explicamos la dinámica del movimiento rotacional de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dentro de un marco de referencia inercial. Vimos que la relación unidimensional $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$ en que sólo se consideraron los componentes externos del par sobre el eje de rotación, era suficiente para resolver los problemas dinámicos en este caso especial.

En el presente capítulo continuamos el análisis, y lo ampliamos a situaciones donde el eje de rotación tal vez no esté fijo en un marco de referencia inercial. Para resolver estos problemas de dinámica, desarrollamos y empleamos una relación vectorial tridimensional en el movimiento rotacional, la cual nos recuerda la forma vectorial de la segunda ley de Newton, $\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{P}}/dt$. También nos ocuparemos del momento angular y demostraremos su importancia como propiedad dinámica de la rotación.

Por último, mostraremos que puede aplicarse la importante ley de conservación del momento angular en sistemas sobre los cuales no actúe una torca externa neta.

10-1 MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Hemos descubierto que el *momento lineal* sirve para resolver los problemas del movimiento traslacional de partículas individuales o de sistemas de partículas, entre ellos los cuerpos rígidos. Por ejemplo, el momento lineal se conserva en las colisiones. En una partícula el momento lineal es $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ (Ec. 6-1); en un sistema de partículas es $\vec{\mathbf{P}} = M\,\vec{\mathbf{v}}_{cm}$ (Ec. 7-21), donde M es la masa total del sistema, y $\vec{\mathbf{v}}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa. En el movimiento rotacional, el análogo del momento lineal es el *momento angular*, que definiremos después en el caso especial de una partícula individual. Más adelante ampliaremos la definición para incluir sistemas de partículas, y vamos a demostrar que el momento angular es un concepto del movimiento de rotación tan útil como el momento lineal en el movimiento de traslación.

Consideremos una partícula de masa m y de momento lineal $\vec{\mathbf{p}}$, en una posición $\vec{\mathbf{r}}$ respecto al origen O de un marco de referencia inercial; para facilitar la exposición (véase Fig. 10-1), hemos escogido como plano xy, el definido por los vectores $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$. Definimos el *momento angular* $\vec{\mathbf{l}}$ de la partícula *respecto al origen O* como

$$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}. \tag{10-1}$$

Igual que en el caso de la torca, el momento angular se define en función de un producto vectorial o cruz (véase Ap. H). Nótese que debemos especificar el origen O, a fin de definir el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ en la definición de momento angular.

El momento angular es un vector. Su magnitud está dada por

$$l = rp \operatorname{sen} \theta, \tag{10-2}$$

donde θ es el ángulo menor entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$; su dirección es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. El sentido está dado por la regla de la mano derecha: gire los dedos de la mano derecha de la dirección de $\vec{\mathbf{r}}$ a la de $\vec{\mathbf{p}}$, a través del ángulo más pequeño entre ellos; el pulgar extendido de la derecha apuntará entonces en dirección de $\vec{\mathbf{l}}$ (paralelo al eje z en la figura 10-1).

También escribimos la magnitud de $\vec{\mathbf{l}}$ así

$$l = (r \operatorname{sen} \theta)p = pr_{\perp} \tag{10-3a}$$

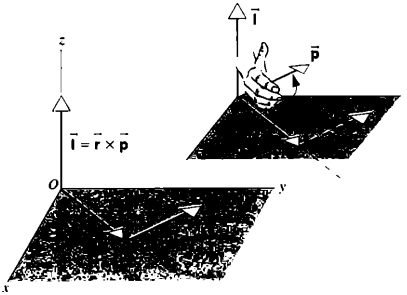


FIGURA 10-1. Una partícula de masa m, localizada en el punto P por el vector de posición $\vec{r}$, tiene un momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. (Para facilitar la explicación, se supone que $\vec{r}$ y $\vec{p}$ se hallan en el plano xy.) Con respecto al origen O, la partícula tiene un momento angular de $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, que en este caso es paralelo al eje z. La inserción muestra el uso de la regla de la mano derecha para obtener la dirección de $\vec{l}$. Nótese que podemos deslizar $\vec{p}$ sin modificar su dirección hasta que $\vec{r}$ y $\vec{p}$ estén cola con cola.

o así

$$l = r(p \text{ sen } \theta) = rp_{\perp}, \qquad (10\text{-}3b)$$

donde $r_{\perp}$ $(= r \text{ sen } \theta)$, es el componente de $\vec{r}$ en ángulos rectos con la línea de acción de $\vec{p}$ y $p_{\perp}$ $(= p \text{ sen } \theta)$, es el componente de $\vec{p}$ en ángulos rectos con $\vec{r}$. La ecuación 10-3b muestra que sólo el componente de $\vec{p}$ perpendicular a $\vec{r}$, contribuye al momento angular. Cuando el ángulo θ entre $\vec{r}$ y $\vec{p}$ es 0° o 180°, no existe un componente perpendicular ($p_{\perp} = p$ sen $\theta = 0$); entonces la línea de acción de $\vec{p}$ cruza el origen y $r_{\perp}$ es cero. En este caso las ecuaciones 10-3a y 10-3b muestran que el momento angular l es cero.

A continuación obtendremos una importante relación entre la torca y momento angular en una partícula individual. Primero derivamos la ecuación 10-1 y obtenemos

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}). \qquad (10\text{-}4)$$

La derivada de un producto vectorial se toma en la misma forma que la de un producto ordinario, salvo que no se debe cambiar el orden de los términos. Tenemos

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Aquí $d\vec{r}/dt$ es la velocidad instantánea $\vec{v}$ de la partícula, y $\vec{p}$ es igual a $m\vec{v}$. Al efectuar estas sustituciones en el primer producto de la derecha obtenemos

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = (\vec{v} \times m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (10\text{-}5)$$

Ahora $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, por ser cero el producto vectorial de dos vectores paralelos. Al reemplazar $d\vec{p}/dt$ en el segundo producto por la fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ que actúa sobre la partícula, tenemos

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \sum \vec{F}.$$

El lado derecho de la ecuación anterior es sólo la torca neta $\Sigma \vec{\tau}$. Por tanto, obtenemos la ecuación

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}, \qquad (10\text{-}6)$$

según la cual *la torca neta que opera sobre una partícula es igual a la tasa de cambio temporal de su momento angular.* En esta ecuación tanto la torca $\vec{\tau}$ como el momento angular $\vec{l}$, deben definirse respecto al mismo origen. La ecuación 10-6 es el análogo rotacional de la ecuación 6-2 ($\Sigma \vec{F} = d\vec{p}/dt$), la cual establece que la *fuerza* neta que opera sobre una partícula es igual a la tasa de cambio temporal de su momento *lineal*.

La ecuación 10-6 como toda ecuación vectorial tridimensional, equivale a tres ecuaciones unidimensionales, a saber:

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \qquad \sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \qquad \sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt}. \qquad (10\text{-}7)$$

Por tanto, el componente x de la torca externa neta está dado por el cambio con el tiempo del componente x del momento angular. Se obtienen resultados similares para las direcciones y y z.

PROBLEMA RESUELTO 10-1. En la figura 10-2, en el punto P se suelta del reposo una partícula de masa m y cae paralela al eje y (vertical). *a*) Encuentre la torca que actúa sobre m en un tiempo cualquiera t respecto al origen O. *b*) Calcule el momento angular de m en un tiempo cualquiera t respecto al mismo origen. *c*) Demuestre que la relación $\Sigma \vec{\tau} = d\vec{l}/dt$ (Ec. 10-6) produce el resultado correcto cuando se aplica a este problema común.

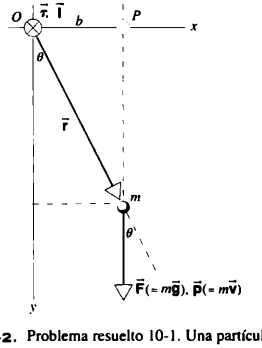


FIGURA 10-2. Problema resuelto 10-1. Una partícula de masa m cae verticalmente del punto P. La torca $\vec{\tau}$ y el momento angular $\vec{l}$ respecto al origen O se dirigen perpendicularmente y entran en la figura, como lo indica el símbolo ⊗ en el punto O. Es la dirección del eje positivo z.

Solución *a)* La torca está dada por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, y su magnitud es

$$\tau = rF \operatorname{sen} \theta.$$

En este ejemplo, $r \operatorname{sen} \theta = b$ y $F = mg$ y, por consiguiente,

$$\tau = mgb = \text{una constante.}$$

Nótese que la torca es simplemente el producto de la fuerza mg multiplicada por el brazo del momento b. La regla de la mano derecha muestra que $\vec{\tau}$ se dirige perpendicularmente hacia la figura y entra en ella (junto con el eje positivo z).

b) El momento angular está dado por la ecuación 10-1, $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$. De acuerdo con la ecuación 10-2, su magnitud es

$$l = rp \operatorname{sen} \theta.$$

En este ejemplo, $r \operatorname{sen} \theta = b$ y $p = mv = m(gt)$, así que

$$l = mgbt.$$

La regla de la mano derecha indica que $\vec{l}$ se dirige perpendicularmente a la figura y entra en ella, lo cual significa que $\vec{l}$ y $\vec{\tau}$ son vectores paralelos. Con el tiempo, el vector $\vec{l}$ cambia sólo de magnitud; su dirección permanece siempre inalterada en este caso.

c) Al escribir la ecuación 10-6 en función de los componentes z, tenemos

$$\sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt}.$$

Al sustituir la expresión para τ_z y l_z basándonos en *a)* y en *b)*, se obtiene

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb,$$

que es una identidad. Así pues, la relación $\tau^{-} = d\vec{l}/dt$ produce el resultado correcto en este caso simple. En efecto, si cancelamos la constante b en los dos primeros términos anteriores, y si sustituimos la cantidad equivalente v_y por gt, nos queda

$$mg = \frac{d}{dt}(mv_y).$$

Dado que $mg = F_y$ y que $mv_y = p_y$, éste es el resultado conocido $F_y = dp_y/dt$. Por tanto, como ya indicamos con anterioridad, las relaciones como $\vec{\tau} = d\vec{l}/dt$, aunque muchas veces útiles, no son postulados básicos ni mecánica clásica nuevos, sino más bien, la reformulación de las leyes de Newton en el caso del movimiento de rotación.

Nótese que las magnitudes de τ y de l dependen de la elección del origen, o sea de b. En particular, $b = 0$, cuando $\tau = 0$ y $l = 0$.

10-2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Hasta ahora nos hemos ocupado de partículas individuales exclusivamente. Si queremos calcular el momento angular total $\vec{L}$ de un *sistema de partículas* alrededor de un punto determinado, habrá que sumar vectorialmente los momentos angulares de todas ellas alrededor de dicho punto. Entonces, en un sistema que contenga N partículas, tendremos

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_N = \sum_{n=1}^{N} \vec{l}_n, \qquad (10\text{-}8)$$

donde la suma (vectorial) se toma en todas las partículas del sistema.

Con el tiempo puede cambiar el momento angular total $\vec{L}$ del sistema alrededor de un punto fijo de referencia (que igual que en la definición básica de $\vec{l}$ en la ecuación 10-1 escogimos como origen del marco de referencia inercial), es decir,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l}_1}{dt} + \frac{d\vec{l}_2}{dt} + \cdots = \sum_{n=1}^{N} \frac{d\vec{l}_n}{dt}.$$

En cada partícula, $d\vec{l}_n/dt = \vec{\tau}_n$, y al efectuar esta sustitución obtenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_n.$$

En otras palabras, la tasa de cambio temporal del momento angular *total* de un sistema de partículas, es igual a la torca neta debido a las fuerzas que actúan sobre ellas.

Entre las torcas que operan sobre el sistema se contarán: 1) las que ejercen sobre las partículas del sistemas las fuerzas internas entre ellas, y 2) las que ejercen las fuerzas externas. Si la tercera ley de Newton se cumple en la forma fuerte —si las fuerzas entre dos partículas no sólo son iguales y opuestas, sino que además se dirigen por la misma línea que las une—, la torca interna total será cero porque también lo es el resultante de cada torca interna de fuerzas de acción-reacción. (Este resultado lo probamos en la sección 9-2, en el caso de sistemas con dos partículas; si consideramos dos partículas a la vez en un sistema de N partículas, podremos demostrar que lo mismo ocurre también en sistemas más complejos.)

Por eso la primera fuente, la torca proveniente de fuerzas internas, no contribuye al cambio de $\vec{L}$. Sólo permanece la segunda fuente (la torca procedente de fuerzas externas), y podemos escribir

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \qquad (10\text{-}9)$$

donde $\Sigma\, \vec{\tau}_{\text{ext}}$ es la suma de las torcas *externas* que actúan sobre el sistema. Expresado lo anterior con palabras: *la torca externa neta que opera sobre un sistema de partículas, es igual a la tasa de cambio temporal del momento angular total del sistema.* La torca y el momento angular se calculan respecto al mismo origen del marco de referencia inercial. En situaciones donde difícilmente surgirá la confusión, para facilitar la explicación suprimimos el subíndice en $\vec{\tau}_{\text{ext}}$.

La ecuación 10-9, es la generalización de la ecuación 10-6 a muchas partículas. Se aplica sin importar si las que constituyen el sistema se mueven en relación recíproca, o si presentan relaciones espaciales fijas como en un cuerpo rígido.

La ecuación 10-9 es análogo rotacional de la ecuación 7-23, $\Sigma\, \vec{F}_{\text{ext}} = d\vec{P}/dt$, según la cual, en un sistema de partículas (cuerpo rígido o no) la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema, es igual a la tasa de cambio temporal de su momento lineal total.

Ampliemos un poco más la analogía entre la forma en que una fuerza cambia su momento lineal y la forma en que la torca cambia su momento angular. Supóngase una fuerza $\vec{F}$ que opera sobre una partícula que se desplaza con momento lineal $\vec{p}$. Podemos resolver $\vec{F}$ en dos componentes, como se

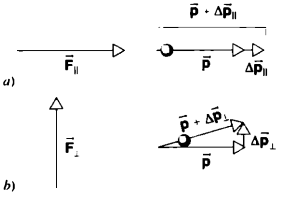


FIGURA 10-3. *a)* Cuando un componente de la fuerza $\vec{F}_{\parallel}$ opera paralelamente al momento lineal $\vec{p}$ de una partícula, este último cambia en $\Delta\vec{p}_{\parallel}$ que es paralelo a $\vec{p}$. *b)* Cuando un componente de la fuerza $\vec{F}_{\perp}$ opera perpendicularmente al momento lineal $\vec{p}$ de una partícula, este último cambia en $\Delta\vec{p}_{\perp}$ que es perpendicular a $\vec{p}$. Ahora la partícula se mueve en dirección de la suma vectorial $\vec{p} + \Delta\vec{p}_{\perp}$.

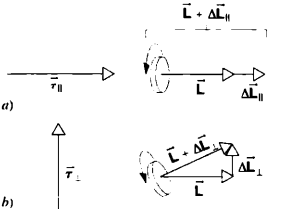


FIGURA 10-4. *a)* Cuando un componente de la torca $\vec{\tau}_{\parallel}$ opera paralelamente al momento angular $\vec{L}$ de un sistema, este último cambia en $\Delta\vec{L}_{\parallel}$ que es paralelo a $\vec{L}$. *b)* Cuando un componente de la torca $\vec{\tau}_{\perp}$ opera perpendicularmente al momento angular $\vec{L}$ de un sistema, este último cambia en $\Delta\vec{L}_{\perp}$ que es perpendicular a $\vec{L}$. Ahora el eje de rotación apunta en la dirección correspondiente a la suma vectorial $\vec{L} + \Delta\vec{L}_{\perp}$.

indica en la figura 10-3: una ($\vec{F}_{\parallel}$) es paralela a la dirección (instantánea) de $\vec{p}$ y otra ($\vec{F}_{\perp}$) es perpendicular a $\vec{p}$. En un pequeño intervalo de tiempo Δt, la fuerza produce un cambio en el momento $\Delta\vec{p}$, determinado de acuerdo con $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$. Por tanto, $\Delta\vec{p}$ es paralelo a $\vec{F}$. La componente $\vec{F}_{\parallel}$ causa un cambio en el momento $\Delta\vec{p}_{\parallel}$ paralelo a $\vec{p}$, que se agrega a $\vec{p}$ y modifica su magnitud pero no su dirección (véase Fig. 10-3*a*). En cambio, la componente perpendicular $\vec{F}_{\perp}$, ocasiona un incremento $\Delta\vec{p}_{\perp}$ que cambia la dirección de $\vec{p}$, pero, cuando $\Delta\vec{p}_{\perp}$ es pequeño en comparación con $\vec{p}$, deja inalterada la magnitud de $\vec{p}$ (véase Fig. 10-3*b*). Un ejemplo de esto último, es una partícula que se desplaza en un círculo con rapidez constante sujeta sólo a una fuerza centrípeta, la cual siempre es perpendicular a la velocidad tangencial.

El mismo análisis se aplica a la acción de una torca, como se ve en la figura 10-4. En este caso, $\vec{\tau} = \Delta\vec{L}/\Delta t$ y $\Delta\vec{L}$ deben ser paralelos a $\vec{\tau}$. Una vez más resolvemos $\vec{\tau}$ en dos componentes $\vec{\tau}_{\parallel}$ paralelo a $\vec{L}$ y $\vec{\tau}_{\perp}$, y perpendicular a $\vec{L}$. La componente de $\vec{\tau}$ paralelo a $\vec{L}$, modifica la magnitud pero no la dirección del momento angular (Fig. 10-4*a*). La componente de $\vec{\tau}$ perpendicular a $\vec{L}$ produce un incremento $\Delta\vec{L}_{\perp}$ perpendicular a $\vec{L}$, que cambia la dirección de $\vec{L}$, mas no su magnitud (Fig. 10-4*b*). Esta última condición es la causa del movimiento de trompos y giroscopios como veremos en la sección 10-5. Al comparar las figuras 10-3 y 10-4, vemos las semejanzas entre la dinámica traslacional y la rotacional.

En la figura 10-5 se da un ejemplo de aplicación de la ecuación 10-9 a la dinámica rotacional. En la figura 10-5*a*, un extremo del eje de un bicicleta que gira descansa libremente en un poste y el otro está sostenido por la mano de un estudiante. Éste empuja tangencialmente la rueda con una fuerza $\vec{f}$ en el borde, a fin de hacerla girar más rápidamente. Tomado alrededor del centro de la rueda, la torca ejercida por él es paralela al momento angular de la rueda; ambos vectores ($\vec{\tau}$ y $\vec{L}$) apuntan hacia el estudiante. El resultado de esta torca es un incremento del momento angular de ella.

En la figura 10-5*b*, el estudiante soltó un apoyo del eje. Ahora examinaremos las torcas alrededor del punto de apoyo restante. Intervienen dos fuerzas: una fuerza normal en el punto de apoyo que no produce ninguna torca alrededor de él, y el peso de la rueda que actúa hacia abajo en el centro de masa. La torca alrededor del punto O debido al peso, es perpendicular a $\vec{L}$ y por eso cambia la dirección de $\vec{L}$, como en la figura 10-4*b*. Pero como la dirección de $\vec{L}$ es también la del eje,* el

* Esto se aplica, sólo si el eje de rotación es también un eje de simetría del cuerpo (véase Secc. 10-3).

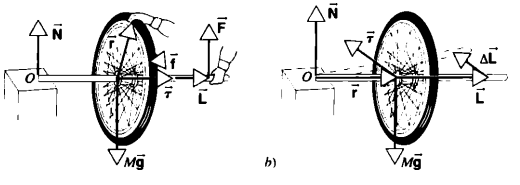


FIGURA 10-5. *a)* Una fuerza tangencial $\vec{f}$ en el borde de la rueda produce una torca $\vec{\tau}$ (alrededor del centro de ella) a lo largo del eje de rotación, aumentando así la magnitud de su velocidad angular, pero dejando inalterada la dirección. *b)* Cuando se suelta el extremo del eje, la torca gravitacional alrededor del punto O apunta hacia el papel —es decir, perpendicularmente al eje rotacional—, como se ve en la figura 10-4*b*. Esta torca cambia la dirección del eje rotacional, y el eje de la rueda se desplaza en el plano horizontal hacia la posición denotada por la línea punteada.

efecto de la fuerza (descendente) de la gravedad, consiste en girarlo lateralmente en el plano horizontal. La rueda girará en esa dirección alrededor del punto de apoyo. ¡Inténtelo! (Si no tiene una rueda de bicicleta montada libremente, puede utilizar un giroscopio y obtener los mismos resultados.)

Tal como la obtuvimos, la ecuación 10-9 se aplica cuando $\vec{\tau}$ y $\vec{L}$ se miden respecto al origen de un marco de referencia inercial. Podríamos preguntar si es aplicable también, si medimos estos dos vectores en relación con un punto arbitrario (digamos, una partícula) en el sistema en movimiento. En términos generales, el punto se desplazaría en forma complicada a medida que el cuerpo o el sistema de partículas se trasladara, se tambaleara y modificara su configuración; la ecuación 10-9 no es aplicable a ese punto de referencia. Pero se aplica si se opta porque el punto de referencia sea el centro de masa del sistema, aunque acelere dentro del marco de referencia inercial (véase Ej. 7). Ésta es otra importante propiedad del centro de masa. Así, podemos dividir el movimiento general de un sistema de partículas en el movimiento traslacional de su centro de masa (Ec. 7-23), y en el movimiento rotacional alrededor de él (Ec. 10-9).

10-3 MOMENTO Y VELOCIDAD ANGULARES

Antes de examinar los casos donde es absolutamente necesario tener en cuenta la naturaleza tridimensional de la velocidad angular, de la torca y del momento angular, vamos a estudiar un ejemplo simple de una partícula en rotación que ilustra un caso en que la velocidad y el momento angulares no son paralelos.

La figura 10-6*a* muestra una partícula de masa m, conectada a un eje rígido y sin masa mediante un brazo, también rígido y sin masa, de longitud r' perpendicular al eje. La partícula se mueve en un círculo de radio r', y suponemos que lo hace con una rapidez constante v. Imaginamos que el experimento se realiza en una región de gravedad despreciable, por lo cual no es necesario tener en cuenta la fuerza de gravedad que opera sobre ella. La única fuerza que lo hace es la centrípeta, ejercida por el brazo que la conecta al eje.

Éste se halla sujeto al eje z por dos cojinetes ideales delgados (sin fricción). El cojinete de la parte inferior, define el origen O del sistema coordenado. El de la parte superior, como veremos luego, es indispensable para evitar que el eje se bambolee alrededor del eje z, lo cual sucede cuando la velocidad angular no es paralela al momento angular.

La velocidad angular $\vec{\omega}$ de la partícula apunta hacia arriba sobre el eje z (o, en forma equivalente, paralelo a él), como se advierte en la figura 10-6*b*. Sin importar en qué parte del eje z se escoja el origen, el vector de velocidad angular será paralelo a él. Su magnitud también es independiente del lugar del origen, pues está dada por $v/(r \text{ sen } \theta) = v/r'$.

El momento angular $\vec{l}$ de la partícula *respecto al origen O* del marco de referencia, está dado por la ecuación 10-1, es decir

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p},$$

donde $\vec{r}$ y $\vec{p}$ $(=m\vec{v})$ se muestran en la figura 10-6*b*. El vector $\vec{l}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$, lo cual significa que $\vec{l}$ *no* es paralelo a $\vec{\omega}$. Nótese que (véase Fig. 10-6*c*) $\vec{l}$ tiene un componente (vectorial) $\vec{l}_z$ paralelo a $\vec{\omega}$, pero que tiene otro componente (vectorial) $\vec{l}_\perp$ perpendicular a $\vec{\omega}$. Éste es un caso en que la analogía entre el movimiento lineal y el circular no es válida: $\vec{p}$ siempre es paralelo a $\vec{v}$, pero $\vec{l}$ *no* lo es siempre a $\vec{\omega}$. Si decidimos que el origen esté en el plano de la partícula que gira, $\vec{l}$ *será* paralelo a $\vec{\omega}$; de lo contrario no lo será.

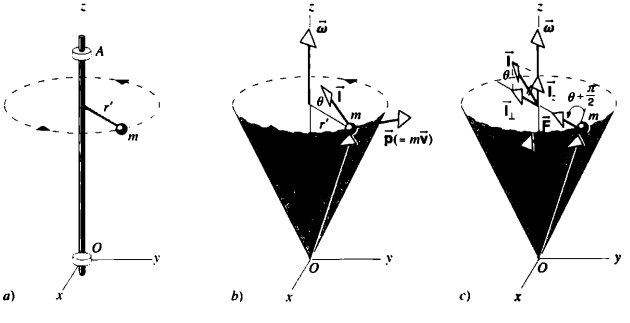


FIGURA 10-6. *a*) A través de un brazo de longitud r', una partícula de masa m, está conectada a un eje fijo mediante dos cojinetes (en O y en A) para girar alrededor del eje z. *b*) La partícula gira con rapidez tangencial v, en un círculo de radio r' alrededor del eje z (se omiten las varillas y los cojinetes para simplificar el dibujo). Se muestra el momento angular $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ alrededor del origen O. *c*) Para que la partícula se mueva en un círculo, se requiere una fuerza centrípeta $\vec{F}$ que actúe como se indica, lo cual da por resultado una torca $\vec{\tau}$ alrededor de O. Para facilitar la explicación, el vector del momento angular $\vec{l}$ y sus componentes a lo largo de z y perpendiculares a ese plano, se dibujan en el centro del círculo.

Examinemos ahora la relación existente entre $\vec{l}_z$ y $\vec{\omega}$ en una partícula que gira. En la figura 10-6*c*, donde hemos trasladado $\vec{l}$ al centro del círculo, obtenemos

$$l_z = l \text{ sen } \theta = rp \text{ sen } \theta = r(mv) \text{ sen } \theta = r(mr'\,\omega) \text{ sen } \theta,$$

usando ($v = r'\omega$), donde ω representa la magnitud de $\vec{\omega}$ que apunta en la dirección z. Al sustituir por r' (radio del círculo donde se desplaza la partícula), el producto r sen θ, nos queda

$$l_z = mr'^2\omega. \qquad (10\text{-}10)$$

Ahora mr'^2 es la inercia rotacional I de la partícula respecto al eje z. Por tanto,

$$l_z = I\omega. \qquad (10\text{-}11)$$

Nótese que la relación vectorial $\vec{l} = I\vec{\omega}$ (que es semejante a la relación lineal $\vec{p} = m\vec{v}$) *no* es correcta en este caso, porque $\vec{l}$ y $\vec{\omega}$ no apuntan en la misma dirección.

¿En qué circunstancias el momento y la velocidad angulares apuntarán en la misma dirección? Para explicar esto vamos a incorporar en el sistema otra partícula de masa m, como se ve en la figura 10-7, para lo cual conectamos otro brazo al eje central de la figura 10-6*a* en el mismo lugar que el primer brazo, sólo que señalando en dirección contraria. El componente $\vec{l}_\perp$ debido a esta segunda partícula, será igual pero opuesto al de la primera, y la suma de los dos vectores $\vec{l}_\perp$ es cero. Sin embargo, los dos vectores $\vec{l}_z$ apuntan en la misma dirección y se suman. Por tanto, en este sistema de dos partículas, el momento angular total $\vec{L}$ es paralelo a $\vec{\omega}$.

Ahora podemos extender el sistema a un cuerpo rígido compuesto de muchas partículas. Si es simétrico alrededor del eje de rotación (es decir, por cada uno de sus elementos, además debe haber otro diametralmente opuesto al primero y estar a la misma distancia del eje de rotación), podremos suponer que está integrado por pares de partículas del primer tipo que hemos explicado. Por ser $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ paralelas en todos los pares, lo son también en los cuerpos rígidos que poseen este tipo de simetría, denominada simetría *axial*.

En estos cuerpos rígidos simétricos, $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ son paralelos, y podemos escribir en forma vectorial

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (10\text{-}12)$$

Pero no olvide que si $\vec{L}$ representa el momento angular *total*, la ecuación 10-12 se aplica *sólo* a cuerpos que tengan simetría alrededor del eje de rotación. Si $\vec{L}$ representa el componente vectorial del momento angular sobre el eje (es decir, $\vec{L}_z$), la ecuación 10-12 será válida con *cualquier* cuerpo rígido, simétrico o no, que gire alrededor de un eje fijo.

En los cuerpos simétricos (como el sistema de dos partículas de la figura 10-7), podemos quitar el cojinete de la parte superior en la figura 10-6a y entonces el eje permanecerá paralelo al eje z. Esto puede verificarse observando la facilidad con que se hace girar un objeto simétrico (por ejemplo, una tapa pequeña sostenida entre el pulgar y el índice). Cualquier asimetría pequeña del objeto requiere un segundo cojinete para mantener el eje en dirección fija; el cojinete debe ejercer una torca en él, pues de lo contrario se bambolearía al girar el objeto como explicaremos al final de esta sección. El problema del bamboleo es muy serio tratándose de objetos que giran a gran velocidad, como los rotores de turbina. Aunque diseñados para ser simétricos, pueden ser ligeramente asimétricos debido, por ejemplo, a pequeños errores en la colocación de las hojas. La simetría se restaura agregando o eliminando metal en sitios apropiados; esto se hace girando la rueda en un dispositivo especial que permite medir el bamboleo, calcular la medida correctiva e indicarla automáticamente. En forma similar, se ponen pesas de plomo en puntos estratégicos de los bordes de las llantas de automóvil, a fin de reducir el bamboleo cuando va a gran velocidad. Al "balancear" las llantas de un automóvil, el mecánico se limita simplemente a verificar que los vectores del momento y de la velocidad angulares de la rueda sean paralelos, reduciendo así el esfuerzo en los cojinetes.

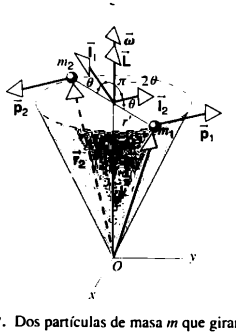


FIGURA 10-7. Dos partículas de masa m que giran como se señala en la figura 10-6, pero en extremos opuestos de un diámetro. En este caso, su momento angular total $\vec{L}$ es paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$.

PROBLEMA RESUELTO 10-2. ¿Qué tiene una magnitud más grande, el momento angular de la Tierra (respecto al centro) relacionado a su rotación sobre el eje, o su momento angular (respecto al centro de su órbita) relacionado a su movimiento orbital alrededor del Sol?

Solución En la rotación sobre su eje, consideramos la Tierra como un esfera uniforme ($I = \frac{2}{5}MR_E^2$). La rapidez angular es $\omega = 2\pi/T$, donde T es el periodo de rotación (24 h = 8.64×10^4 s). Entonces la magnitud del momento angular rotacional alrededor de un eje a través del centro de la Tierra será

$$L_{rot} = I\omega = \tfrac{2}{5}MR_E^2\frac{2\pi}{T}$$

$$= \tfrac{2}{5}(5.98 \times 10^{24}\text{ kg})(6.37 \times 10^6\text{ m})^2\frac{2\pi}{8.64 \times 10^4\text{ s}}$$

$$= 7.06 \times 10^{33}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Para calcular el momento angular orbital, necesitamos la inercia rotacional de la Tierra alrededor de un eje que pase por el Sol. Para ello

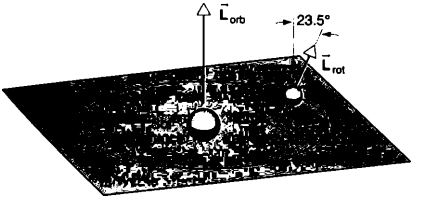


FIGURA 10-8. Problema resuelto 10-2. La Tierra gira en una órbita (supuestamente circular) alrededor del Sol, y también lo hace alrededor de su eje. Los dos vectores del momento angular no son paralelos, porque el eje rotacional de la Tierra está inclinado en un ángulo de 23.5° con la normal al plano de la órbita. Las longitudes de los vectores no se trazan a escala; L_{orb} debería ser mayor que L_{rot} por un factor aproximado de 4×10^6.

podemos tratarla como una "partícula" con un movimiento angular $L = R_{orb}p$, donde R_{orb} es el radio de la órbita, y p es el momento lineal de la Tierra. Una vez más la velocidad angular está dada por $\omega = 2\pi/T$, donde T es ahora el periodo orbital (1 año $= 3.16 \times 10^7$ s). La magnitud del momento angular orbital alrededor del eje que pasa por el Sol es

$$L_{orb} = R_{orb}p = R_{orb}Mv = R_{orb}M(\omega R_{orb}) = MR_{orb}^2\frac{2\pi}{T}$$

$$= (5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(1.50 \times 10^{11}\ \text{m})^2\frac{2\pi}{3.16 \times 10^7\ \text{s}}$$

$$= 2.67 \times 10^{40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

En consecuencia, el momento angular orbital es mucho mayor que el momento angular rotacional.

El vector del momento angular orbital apunta en ángulos rectos al plano de la órbita terrestre (Fig. 10-8), en tanto que el momento angular rotacional se inclina en un ángulo de 23.5° en la normal con el plano. Prescindiendo de la lentísima precesión del eje rotacional, la magnitud y la dirección de los dos vectores permanecen constantes a medida que la Tierra describe su órbita.

PROBLEMA RESUELTO 10-3. En el problema resuelto 9-10, aplicando directamente la ecuación 10-9 ($\Sigma\ \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$), encuentre la aceleración del bloque que cae.

Solución Sobre el sistema de la figura 10-9, compuesto por la polea (supuestamente un disco uniforme de masa M y de radio R), y el bloque de masa m, actúan dos fuerzas externas, la tracción descendente de la gravedad $m\vec{g}$ que opera sobre m, y la fuerza ascendente ejercida por los cojinetes del eje del disco, que escogemos como origen. (La tensión en la cuerda es una fuerza interna y no opera desde el exterior en el sistema de disco + bloque). Sólo la primera de estas fuerzas externas ejerce una torca alrededor del origen; su magnitud es $(mg)R$ y su dirección sigue el eje positivo z en la figura 10-9.

En cualquier instante, el componente z del momento angular del sistema alrededor de origen O es

$$L_z = I\omega + (mv)R,$$

donde $I\omega$ es el momento angular del disco (simétrico), y $(mv)R$ es el momento angular (= momento lineal × brazo del momento) del

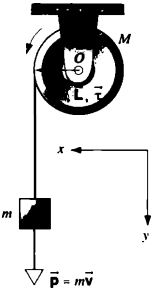


FIGURA 10-9. Problema resuelto 10-3. La velocidad angular, el momento angular y la torca neta apuntan hacia afuera de la página (en la dirección positiva z), como lo indica el símbolo ⊙ en O.

bloque que cae alrededor del origen. Ambas contribuciones a $\vec{L}$ tienen componentes z positivos.

Aplicando $\Sigma\ \vec{\tau}_z = dL_z/dt$ produce

$$(mg)R = \frac{d}{dt}(I\omega + mvR)$$

$$= I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$= I\alpha + mRa.$$

Dado que $a = \alpha R$ y $I = \frac{1}{2}MR^2$, esto se reduce a

$$mgR = (\tfrac{1}{2}MR^2)(a/R) + mRa$$

o bien

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

El resultado anterior es idéntico al del problema resuelto 9-10 según lo previsto, ya que $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ y $\Sigma\tau_z = dL_z/dt$ no son más que formas diferentes de expresar la segunda ley de Newton.

La torca de una partícula que se mueve en una trayectoria circular (Opcional)

Tal vez el resultado imprevisto de que $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ no son paralelos en el caso simple de la figura 10-6, provoque un poco de inquietud. No obstante, concuerda con la relación general $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ de la torca que opera sobre una partícula individual. El vector $\vec{L}$ cambia con el tiempo en ese ejemplo, conforme se desplaza la partícula; el cambio es enteramente de dirección, no de magnitud. A medida que la partícula gira, la magnitud y dirección de $\vec{L}_z$ se mantienen constantes, $\vec{L}_\perp$, pero se modifica su dirección. El cambio de $\vec{L}_\perp$, se debe a la aplicación de una torca. ¿Cuál es la causa de esta última torca?

Para que la partícula siga una trayectoria circular, una fuerza centrípeta debe operar sobre ella como en la figura 10-6c, proporcionada por el brazo de soporte que la conecta al eje. (Hemos prescindido de otras fuerzas externas, la gravedad entre

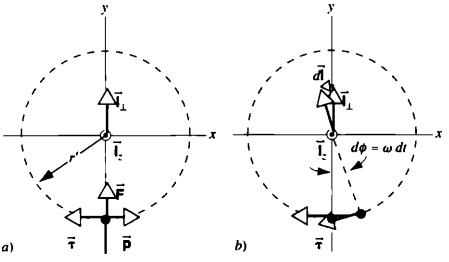


FIGURA 10-10. *a*) Vista bidimensional del plano de la partícula en rotación de la figura 10-6. El componente z del momento angular apunta hacia afuera del papel. *b*) Cuando la partícula gira a través de un ángulo $d\phi$, el componente vectorial $\vec{l}_\perp$ en el plano cambia en $d\vec{l}$. Nótese que $d\vec{l}$ es paralelo a $\vec{\tau}$.

ellas.) La única torca alrededor de O, proviene de $\vec{F}$ y está dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

La torca $\vec{\tau}$ es tangente al círculo (perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$), y sigue la dirección indicada en la figura 10-6*c*, como se verifica mediante la regla de la mano derecha.

Vamos a demostrar ahora que esta torca satisface la forma rotacional de la segunda ley de Newton, $\vec{\tau} = d\vec{l}/dt$. La figura 10-10*a* ofrece una perspectiva bidimensional de la partícula que gira, vista desde arriba en el eje z hacia el plano xy. Al moverse la partícula por el pequeño ángulo $d\phi = \omega\, dt$ (Fig. 10-10*b*), el vector $\vec{l}_\perp$ cambia en el pequeño incremento $d\vec{l}$. En la figura 10-10b se observa que $d\vec{l}$ siempre será paralelo a $\vec{\tau}$, y por ello las direcciones de $d\vec{l}$ y $\vec{\tau}$ son consistentes con $\vec{\tau} = d\vec{l}/dt$. También podemos demostrar que las magnitudes coinciden. Una vez más, en relación con la figura 10-6*c*, la torca alrededor de O es

$$\tau = rF \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + \theta) = rF \cos\theta.$$

En este caso, $\vec{F}$ es la fuerza centrípeta y tiene una magnitud $F = mv^2/r' = m\omega^2 r'$, donde r' es el radio de la trayectoria circular ($r' = r \operatorname{sen}\theta$), de modo que $F = m\omega^2 r \operatorname{sen}\theta$. Por tanto,

$$\tau = m\omega^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta. \qquad (10\text{-}13)$$

Basándonos en la figura 10-10*b*, $dl = l_\perp\, d\phi = l_\perp \omega\, dt$, de donde obtenemos

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp.$$

Con $l = mvr$, $l_\perp = mvr \cos\theta$. La velocidad tangencial v es $\omega r' = \omega r \operatorname{sen}\theta$, así que

$$l_\perp = m\omega r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

y

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp = m\omega^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta. \qquad (10\text{-}14)$$

Al comparar las ecuaciones 10-13 y 10-14, vemos que $\tau = dl/dt$ según lo previsto. ■

Cuerpos simétricos frente a asimétricos (Opcional)

¿En qué se distingue la situación tratándose de cuerpos simétricos y asimétricos que giran? Supóngase lo siguiente: inclinamos la varilla que conecta dos partículas en el cuerpo simétrico de la figura 10-7, en un ángulo arbitrario β respecto al eje central. La figura 10-11 muestra la varilla, el eje y los dos cojinetes (que se supone no tienen fricción) que lo mantienen sobre el eje z. El eje gira a una rapidez angular constante ω alrededor del eje z, de manera que el vector $\vec{\omega}$ apunta en dirección a él. Por experiencia sabemos que este sistema está "desbalanceado" o "ladeado"; si la varilla conectora no estuviera sujeta rígidamente al eje vertical cercano a O, tendería a moverse hasta que el ángulo β fuera de 90°, posición en que el sistema sería simétrico alrededor del eje.

En el instante ilustrado en la figura 10-11, la partícula de la parte superior se dirige a la página y entra en ella en ángulos rectos; la partícula de la parte inferior sale formando ángulos rectos con ella. En consecuencia, los vectores del momento lineal de ambas son iguales pero opuestos, al igual que sus vectores de posición respecto a O. Así pues, al aplicar la regla de la mano derecha en $\vec{r} \times \vec{p}$, descubrimos que $\vec{l}$ es el mismo en ellas y que su suma —el vector del momento angular total $\vec{L}$ del sistema— forma ángulos rectos con la varilla conectora, y está en el mismo plano de la página como se muestra en la figura. Por consiguiente, $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ no son paralelos en ese instan-

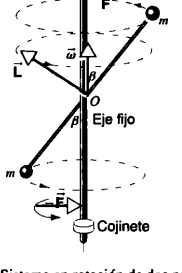


FIGURA 10-11. Sistema en rotación de dos partículas, semejante a la figura 10-7, sólo que el eje de rotación forma un ángulo β con la varilla conectora. El vector del momento angular $\vec{L}$ gira con el sistema, lo mismo que las fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ ejercidas por los cojinetes.

te. Conforme gira el sistema, el vector del momento angular gira alrededor del eje fijo de rotación, aunque su magnitud sea constante.

La rotación de $\vec{L}$ alrededor del eje fijo de la figura 10-11, concuerda perfectamente con la relación fundamental $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. La torca externa en el sistema entero, se debe a las fuerzas laterales no balanceadas que ejercen los cojinetes sobre el eje y que éste transmite a la varilla conectora. La partícula tenderá a moverse afuera hacia la derecha, en el instante mostrado en la figura. Se tirará del eje hacia la derecha contra el cojinete de la parte superior, el cual a su vez ejercerá una fuerza $\vec{F}$ sobre el eje que apunta a la izquierda. Se tirará del eje hacia la izquierda contra el cojinete de la parte inferior, el cual a su vez ejercerá una fuerza $-\vec{F}$ sobre él que apunta a la derecha. A causa de estas fuerzas, la torca $\vec{\tau}$ alrededor de O, apunta perpendicularmente hacia afuera de la página en ángulos rectos con el plano formado por $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$, y en la dirección correcta para explicar el movimiento rotatorio de $\vec{L}$. (Compare esto con la figura 10-6*c*, donde $\vec{\tau}$ era también perpendicular al plano formado por $\vec{l}$ y $\vec{\omega}$.) Nótese que como $\vec{\tau}$ es perpendicular a $\vec{\omega}$, no existe un componente de la aceleración angular $\vec{\alpha}$ en dirección de $\vec{\omega}$, de ahí que la velocidad angular permanezca constante. El sistema seguirá girando de modo indefinido cuando no hay fricción. La fricción en los cojinetes produciría una torca dirigida a lo largo del eje (paralelo a $\vec{\omega}$), que *tendría* un componente de aceleración angular en $\vec{\omega}$ y que, por lo mismo, modificaría la velocidad angular.

Las fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ se hallan en el plano de la figura 10-11 en el instante indicado. Al girar el sistema, estas fuerzas, y por tanto, también el par τ, giran con él, de modo que $\vec{\tau}$ siempre se mantiene en ángulos rectos con el plano formado por $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$. Las fuerzas de rotación $\vec{F}$ y $-\vec{F}$, causan bamboleo en los cojinetes de las partes superior e inferior. A los cojinetes y sus soportes hay que hacerlos lo bastante fuertes para que las produzcan. En un cuerpo simétrico en rotación no se da bamboleo de los cojinetes y el eje gira suavemente. ■

10-4 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

En la ecuación 10-9 descubrimos lo siguiente: en un marco de referencia inercial, la tasa de cambio temporal del momento angular de un sistema de partículas alrededor de un punto fijo (o del centro de masa) es igual a la torca *externa* neta que actúa sobre él, es decir,

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (10\text{-}9)$$

Si la torca externa neta en cuestión es cero, el momento angular del sistema no cambiará con el tiempo ($d\vec{L}/dt = 0$). Por tanto,

$$\vec{L} = \text{a una constante} \quad \text{o} \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f. \qquad (10\text{-}15)$$

En este caso, el momento angular inicial es igual al momento angular final. La ecuación 10-15, es la expresión matemática del *principio de conservación del momento angular.*

Si la torca externa neta que actúa sobre un sistema es cero, su momento angular vectorial total permanecerá constante.

Ésta es la segunda de las grandes leyes de conservación que hemos expuesto. Junto con la conservación del momento lineal, la del momento angular es un resultado general que se aplica a numerosos sistemas. Es válida en el límite relativista y en el cuántico. Nunca se han encontrado excepciones.

Igual que la conservación del momento lineal en un sistema donde la *fuerza* externa neta es cero, ésta se aplica al momento angular total de un sistema de partículas donde la *torca* externa neta es cero. El momento angular de las partículas de un sistema puede cambiar a causa de torcas *internas* (lo mismo que el momento lineal de una partícula en colisión a causa de fuerzas *internas*), pero el total permanece constante.

El momento angular es (como el lineal), una magnitud *vectorial* y, por tanto, la ecuación 10-15 equivale a tres ecuaciones unidimensionales, una para cada dirección coordenada que cruce el punto de referencia. Así pues, la conservación del momento angular ofrece tres condiciones del movimiento de un sistema al que se aplique. *Cualquier componente del momento angular será constante si la correspondiente componente de la torca es cero*; lo cual podría suceder en caso de que lo sea, sólo uno de los tres componentes. Ello significaría que ése será constante y que los otros cambiarán según lo determinen los componentes de la torca en cuestión.

En un sistema compuesto por un cuerpo rígido que gire con una rapidez angular ω alrededor de un eje (el eje z, por ejemplo) fijo dentro de un marco de referencia inercial, tenemos

$$L_z = I\omega, \qquad (10\text{-}16)$$

donde L_z, es el componente del momento angular en el eje de rotación e I, es la inercia rotacional de él. *Si no interviene ninguna torca externa neta, L_z permanecerá constante.* Cuando la inercia rotacional I del cuerpo cambia de I_i a I_f —por ejemplo, debido a un cambio en la distancia de las partes del cuerpo respecto al eje de rotación—, debe existir un cambio compensatorio en ω, de ω_i a ω_f. En este caso, el principio de conservación del momento angular se expresa como $L_{iz} = L_{fz}$ o

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f. \qquad (10\text{-}17)$$

La ecuación 10-17 se aplica no sólo a la rotación alrededor de un eje fijo, sino a la que se da alrededor de un eje que cruce el centro de masa de un sistema que se mueva, de modo que el eje permanezca siempre paralelo a sí mismo (véase la explicación al inicio de la sección 9-7).

La conservación del movimiento angular es un principio que regula multitud de procesos físicos, desde el mundo subatómico hasta el movimiento de acróbatas, clavadistas y bailarines de ballet, así como la contracción de las estrellas que se quedan sin combustible y la condensación de las galaxias. Los siguientes ejemplos muestran algunas de estas aplicaciones.

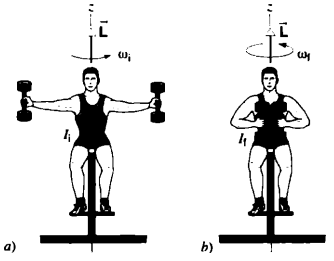


FIGURA 10-12. *a*) En esta configuración el sistema (estudiante + pesas) tiene mayor inercia rotacional y menor velocidad angular. *b*) Aquí el estudiante ha tirado hacia adentro las pesas, produciendo menor inercia rotacional y, por tanto, mayor velocidad angular. El momento angular $\vec{L}$ posee el mismo valor en ambos casos.

La patinadora que gira

Una patinadora de hielo acerca sus brazos al cuerpo para girar más rápidamente y los extiende para girar con mayor lentitud. Al hacer esto está utilizando la ecuación 10-17. Otra aplicación de este principio, se ilustra gráficamente en la figura 10-12. En ella aparece un estudiante sentado en un taburete que gira libremente alrededor de un eje vertical. Supongamos que extiende los brazos con que sostiene las pesas; así lo pondremos en rotación a una velocidad angular ω_i. Su vector de momento angular $\vec{L}$, se halla sobre el eje vertical (eje z) en la figura.

El sistema constituido por el estudiante + taburete + pesas, es un sistema aislado sobre el cual no opera ninguna torca vertical externa. Sin embargo, se conservará el componente vertical del momento angular.

Cuando el estudiante acerca más los brazos (y las pesas) al cuerpo, la inercia rotacional de su sistema se reduce de su valor inicial I_i a otro más pequeño I_f, porque ahora las pesas están más cerca del eje de rotación. Su rapidez angular final, obtenida de la ecuación 10-17 es $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$, que es mayor que la velocidad angular inicial (porque $I_f < I_i$), y el estudiante gira más rápidamente. Si quiere disminuir, basta que vuelva a extender los brazos.

La clavadista de trampolín*

En la figura 10-13*a* vemos a una clavadista que se lanza del trampolín. Al saltar, se empuja un poco hacia adelante para adquirir una pequeña rapidez rotacional, suficiente para zambullirse en el agua al describir su cuerpo media revolución durante el arco.

Mientras está en el aire, sobre ella no actúa ninguna torca externa que modifique el momento angular alrededor de su centro de masa. (La única fuerza externa, la de gravedad, opera *por* el centro de masa y, en consecuencia, no produce torca alguna alrededor de él. No tenemos en cuenta la resistencia del aire, que produciría una torca neta y cambiaría el momento angular.) Cuando coloca su cuerpo en *posición de salto mortal*, disminuye su inercia rotacional y, por tanto, según la ecuación 10-17, su velocidad angular deberá aumentar. El incremento le permite completar $1\frac{1}{2}$ revoluciones, mientras que antes había terminado apenas media (Fig. 10-13*b*). Al final del clavado vuelve a colocarse en la *posición de salto*, y disminuye su rapidez angular al entrar en el agua.

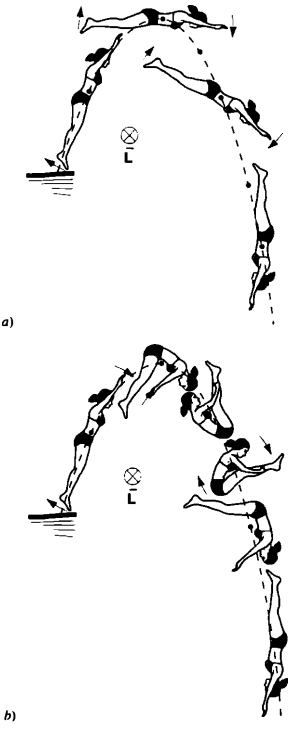


FIGURA 10-13. *a*) Una clavadista salta del trampolín de modo que éste le imparte un momento angular $\vec{L}$. Ella gira alrededor de su centro de masa (indicado por el punto) realizando media revolución a medida que el centro describe una trayectoria parabólica. *b*) Al iniciar la posición del salto mortal, la clavadista reduce la inercia rotacional y así aumenta su velocidad angular, lo cual le permite efectuar $1\frac{1}{2}$ revoluciones. Las fuerzas externas y la torca que operan sobre la clavadista son los mismos en *a*) y en *b*), como lo indica el valor constante del momento angular $\vec{L}$.

*Véase "The Mechanics of Swimming and Diving", de R. L. Page, *The Physics Teacher*, febrero de 1976, p. 72; "The Physics of Somersaulting and Twisting", de Cliff Frohlich, *Scientific American*, marzo de 1980, p. 155.

La rueda de bicicleta que gira

La figura 10-14*a* muestra a una estudiante sentada en un taburete que gira libremente alrededor de un eje vertical. Sostiene una rueda de bicicleta que ha puesto a girar. Cuando la invierte, el taburete empieza a girar (Fig. 10-14*b*).

Ninguna torca neta opera sobre el sistema compuesto por estudiante + taburete + rueda; por tanto, el componente vertical (z) del momento angular total del sistema debe permanecer constante. En un principio, el componente z del momento angular de la rueda en rotación es $+L_w$. Entonces el momento angular inicial del sistema será $L_{iz} = +L_w$. Cuando se invierte la rueda (debido a una torca *interna* en el sistema), el componente z del momento angular total permanecerá constante. Este momento es $L_{fz} = L_s + (-L_w)$, donde L_s es el momento angular de estudiante + taburete, y donde $-L_w$ es el momento angular de la rueda invertida. La conservación del momento angular (sin torca externa) exige que $L_{iz} = L_{fz}$, de modo que la estudiante y el taburete girarán con momento angular $L_s = +2L_w$.

Esta situación también puede considerarse desde el punto de vista de dos sistemas independientes, uno compuesto por la rueda y el otro por la estudiante + taburete. Ninguno de los dos está aislado ahora: las manos del estudiante forman la conexión entre ellos. Cuando trata de invertir la rueda, debe aplicar una torca que cambie el momento angular de ella. Conforme a la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce sobre la rueda para producir la torca, es devuelta por la rueda como una fuerza de reacción sobre la estudiante. Esta fuerza externa en el sistema estudiante + taburete lo hace girar. Desde esta perspectiva, la estudiante aplica una torca externa a la rueda para modificar su momento angular; por su parte, la rueda le aplica una torca a ella para obtener el mismo efecto. Si como lo hicimos antes suponemos que el sistema completo consta de estudiante + taburete + rueda, se tratará de una torca interna que no entra en nuestros cálculos. De cómo definamos el sistema, dependerá si consideraremos interna o externa la torca.

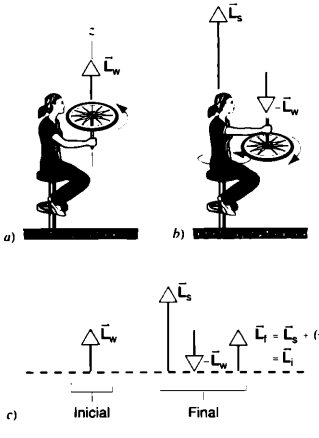


FIGURA 10-14. *a*) Una estudiante sostiene una rueda de bicicleta en rotación. El momento angular total del sistema es $\vec{L}_w$. *b*) Cuando se invierte la rueda, la estudiante comienza a girar. *c*) El momento angular final debe ser igual al inicial.

La estabilidad de los objetos en rotación

Examinemos otra vez la figura 10-3*b*. Un objeto que se desplaza con momento lineal $\vec{p} = M\vec{v}$, presenta *estabilidad direccional*; una fuerza de deflexión da el impulso correspondiente a un incremento lateral del momento $\Delta\vec{p}_\perp$, y entonces se cambia la dirección de movimiento en un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_\perp/p)$. Cuanto más grande sea el momento p, menor será el ángulo θ. La misma fuerza de deflexión desvía menos un objeto que tenga un momento lineal grande, que un objeto que tenga uno pequeño.

En forma muy parecida, el momento angular le da al objeto *estabilidad orientacional*. Un objeto que gire rápidamente (como en la figura 10-4*b*) tiene cierto momento angular $\vec{L}$. Una torca $\vec{\tau}$ perpendicular a $\vec{L}$, cambia en un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_\perp/L)$ la dirección de $\vec{L}$ y, por consiguiente, también la dirección del eje de rotación. Una vez más, cuanto mayor sea el momento angular L, menos logrará una torca modificar la dirección del eje del objeto.

Cuando a un objeto se le imparte un momento angular rotacional alrededor de un eje de simetría, se estabiliza su orientación, lo que hace más difícil que las fuerzas externas la modifiquen. Hay multitud de ejemplos comunes de este efecto. Si a una bicicleta sola le damos un ligero empujón, podrá permanecer de pie una distancia mucho mayor de lo que cabría suponer. En este caso, es el momento angular de las ruedas en rotación lo que le da estabilidad. En este caso los baches y las curvas pequeñas de la carretera, que en otras circunstancias harían caer a un objeto inmóvil balanceado en una base tan estrecha o lo desviarían, producen menos efecto por la tendencia del momento angular de las ruedas a corregir su orientación.*

Se arroja un balón de fútbol americano en un largo pase hacia adelante, de modo que gire alrededor de un eje aproximadamente paralelo a su velocidad de traslación. Se estabiliza así su orientación y se evita el tambaleo, permitiendo lanzarlo con mayor precisión y atraparlo mejor. Mantiene además el perfil más pequeño del balón en esa dirección, con lo cual reduce al mínimo la resistencia del aire y aumenta el alcance.

Es importante estabilizar la orientación de un satélite, sobre todo si utiliza sus impulsores para colocarlo en determinada posición orbital (Fig. 10-15). Podría cambiarse la orientación —por ejemplo—, mediante la fricción proveniente de una tenue atmósfera residual en altitudes orbitales, por

*Véase "The Stability of the Bicycle", de David E. H. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, p. 34.

FIGURA 10-15. Instalación de un satélite de comunicaciones desde el compartimiento de una nave espacial. Se hace que gire alrededor de su eje central (el eje vertical en la fotografía) para estabilizar su orientación en el espacio, a medida que sube por la órbita geosincrónica.

medio del viento solar (haz de partículas cargadas del Sol), o por el impacto de meteoritos diminutos. Para atenuar los efectos de tales encuentros, se hace que la nave gire alrededor de un eje, con lo cual se estabiliza su orientación.

Estrellas que se colapsan (condensan)

La mayoría de las estrellas giran lo mismo que nuestro Sol. Éste cumple un giro sobre su eje aproximadamente una vez al mes. (El Sol es una bola de gases y no gira como un cuerpo rígido; las regiones cercanas a los polos tienen un periodo rotacional de unos 37 días, pero el ecuador gira una vez cada 26 días.) No cae debido a la *presión de radiación*; en esencia, el efecto de colisiones impulsivas de la radiación emergente con los átomos del Sol cuando haya consumido su combustible nuclear, esta presión desaparecerá y el Sol comenzará a colapsarse (condensarse) con una densidad cada vez mayor. En algún momento ésta será tan grande, que los átomos simplemente no podrán apiñarse más y cesará el colapso. Es la etapa de la *enana blanca* en la cual el Sol dejará de existir.

Sin embargo, en las estrellas con tamaño aproximado de 1.4 veces el del Sol, la fuerza gravitacional es tan fuerte, que los átomos no impiden que continúe el colapso. En efecto, son aplastados por la gravedad y el colapso sigue hasta que los núcleos se tocan entre sí. La estrella se ha convertido en un gigantesco núcleo atómico, que recibe el nombre de *estrella de neutrones*. El radio de una de estas estrellas de 1.5 masas solares, mide aproximadamente 11 km.

Supóngase que la estrella comienza su colapso como nuestro Sol, girando una vez al mes. Durante el colapso las fuerzas son evidentemente internas y no pueden modificar el momento angular. Por consiguiente, la ecuación 10-17 relaciona la rapidez angular final con la inicial: $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$. La razón de la inercia rotacional, será igual a la de los cuadrados de los radios: $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. Si el radio inicial midiera más o menos lo mismo que el del Sol (cerca de 7×10^5 km),

$$\frac{I_i}{I_f} = \frac{r_i^2}{r_f^2} = \frac{(7 \times 10^5 \text{ km})^2}{(11 \text{ km})^2} = 4 \times 10^9.$$

En otras palabras, su rapidez rotacional aumenta de una vez al mes a 4×10^9 al mes, lo cual equivale ¡a más de 1,000 revoluciones por segundo!

Las estrellas de neutrones se observan desde la Tierra, porque (una vez más como el Sol) tienen campos magnéticos que atrapan los electrones, y éstos aceleran hasta alcanzar altas velocidades tangenciales conforme gira la estrella. Esos electrones emiten radiación que desde la Tierra aparece como un faro a medida que gira la estrella. Estos intensos pulsos de radiación le valieron a las estrellas de neutrones que giran, el nombre de *pulsares*. La figura 10-16 ilustra la radiación observada en uno de ellos.

La conservación del momento angular se aplica a numerosos fenómenos astrofísicos. Así, la rotación de nuestra galaxia es resultado de una rotación inicial mucho más lenta de la nube de gases de donde se condensó; la rotación del Sol y las órbitas de los planetas provienen de la rotación original del material que formó nuestro sistema solar.

PROBLEMA RESUELTO 10-4. A un astronauta de 120 kg que realiza una "caminata espacial", lo sujetan a una nave mediante una cuerda totalmente extendida de 180 m de largo. La operación no prevista del paquete propulsor, hace que el astronauta adquiera una pequeña velocidad tangencial de 2.5 m/s. Para regresar a la nave, comienza a tirar de la cuerda con una rapidez lenta y constante. ¿Con qué fuerza habrá de tirar a una distancia de *a*) 50 m, y *b*) de 5 m desde la nave? ¿Cuál será su rapidez tangencial en esos puntos?

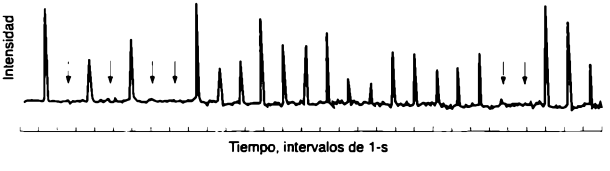


FIGURA 10-16. Pulsos electromagnéticos recibidos en la Tierra de una estrella de neutrones que gira rápidamente. Las flechas verticales indican pulsos demasiado débiles de detectar. El intervalo entre ellos es extraordinariamente constante, pues es igual a 1.187.911.164 s.

Solución Ninguna torca externa actúa sobre el astronauta, de modo que se mantiene la conservación del momento angular. Es decir, el momento angular inicial del astronauta respecto a la nave como origen (Mv_ir_i) cuando comienza a tirar de la cuerda, ha de ser igual al momento angular (Mvr) en cualquier punto del movimiento. Por tanto,

$$Mvr = Mv_ir_i$$

o

$$v = \frac{v_ir_i}{r}.$$

La fuerza centrípeta en cualquier etapa está dada por

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2r_i^2}{r^3}.$$

En un principio la fuerza centrípeta requerida es

$$F = \frac{(120\text{ kg})(2.5\text{ m/s})^2}{180\text{ m}} = 4.2\text{ N (aproximadamente 1 lb)}.$$

a) Cuando el astronauta se encuentra a 50 m de la nave espacial, la rapidez tangencial es

$$v = \frac{(2.5\text{ m/s})(180\text{ m})}{50\text{ m}} = 9.0\text{ m/s},$$

y la fuerza centrípeta es

$$F = \frac{(120\text{ kg})(2.5\text{ m/s})^2(180\text{ m})^2}{(50\text{ m})^3} = 194\text{ N (aproximadamente 44 lb)}$$

b) A 5 m de la nave, la rapidez aumenta en un factor de 10 a 90 m/s; en tanto que la fuerza lo hace con un factor de 10^3 a 1.94×10^5 N, es decir ¡unas 22 ton! Es evidente que el astronauta no puede ejercer una fuerza tan grande para retornar a la nave. Aun cuando fuera jalado hacia la nave por un malacate hacia el interior, la cuerda no resistiría una tensión tan grande; en algún momento se rompería y el astronauta quedaría flotando en el espacio con la rapidez tangencial alcanzada en el momento de la ruptura. Conclusión: los astronautas que efectúan caminatas espaciales no deberían adquirir velocidad tangencial. ¿Cómo podría el astronauta regresar a salvo a la nave?

PROBLEMA RESUELTO 10-5. Una mesa giratoria con un disco de 125 g de masa y 7.2 cm de radio, gira con una rapidez angular de 0.84 rev/s alrededor de un eje vertical (Fig. 10-17*a*). Un disco idéntico que inicialmente no gira, cae repentinamente sobre el primero.

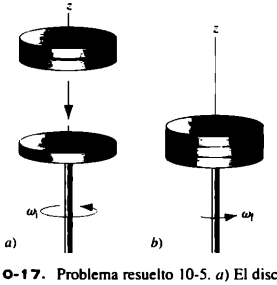


FIGURA 10-17. Problema resuelto 10-5. *a*) El disco gira con una velocidad angular inicial ω_i. *b*) Dos discos idénticos, ninguno de los cuales gira inicialmente, se dejan caer en el primero, y entonces el sistema entero gira con una velocidad angular ω_f.

La fricción entre los dos hace que terminen girando con la misma rapidez. Un tercer disco idéntico que tampoco gira, se deja caer en la combinación, y los tres terminan girando juntos (Fig. 10-17*b*). ¿Qué rapidez angular tiene la combinación?

Solución Este problema es el análogo rotacional de la colisión totalmente inelástica, donde los objetos permanecen unidos (véase Secc. 6-5). No hay una torca externa vertical neta, de ahí que el componente vertical (z) del momento angular sea constante. La fuerza de fricción entre los discos es una fuerza interna que no puede cambiar el momento angular. Se aplica, pues, la ecuación 10-17, y podemos escribir $I_i\omega_i = I_f\omega_f$, o

$$\omega_f = \omega_i\frac{I_i}{I_f}.$$

Sin efectuar cálculos detallados, sabemos que la inercia rotacional de tres discos idénticos alrededor de su eje común, será tres veces mayor que la de uno solo. En consecuencia, $I_i/I_f = \frac{1}{3}$ y

$$\omega_f = (0.84\text{ rev/s})(\tfrac{1}{3}) = 0.28\text{ rev/s}.$$

10-5 EL TROMPO QUE GIRA*

El trompo ofrece lo que acaso es el ejemplo más común del fenómeno descrito en la figura 10-4*b*, donde una torca lateral cambia la dirección, pero no la magnitud de un momento angular. En la figura 10-18*a* se ve un trompo que gira alrededor de un eje. Se supone que el punto de la parte inferior está fijo en el origen O del marco de referencia inercial. Por experiencia, sabemos que el eje del trompo que gira rápidamente se desplazará con lentitud alrededor del eje vertical. A este movimiento se le llama *precesión*, y proviene de la configuración ilustrada en la figura 10-4*b*, suministrando la gravedad la torca externa.

La figura 10-18*b* muestra un diagrama simplificado donde la parte superior ha sido reemplazada por una partícula de masa M situada en su centro de masa. La fuerza gravitacional Mg imprime una torca alrededor de O con una magnitud de

$$\tau = Mgr \operatorname{sen}\theta. \qquad (10\text{-}18)$$

La torca, es perpendicular al eje del trompo, y por lo mismo a $\vec{L}$ (Fig. 10-18*c*). Puede alterar la dirección de $\vec{L}$, pero no su magnitud. El cambio de $\vec{L}$ en un pequeño incremento de tiempo dt está dado por

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \qquad (10\text{-}19)$$

y está en la misma dirección que $\vec{\tau}$, es decir, perpendicularmente a $\vec{L}$. En consecuencia, el efecto de $\vec{\tau}$ consiste en transformar $\vec{L}$ a $\vec{L} + d\vec{L}$, un vector de la misma longitud que $\vec{L}$, sólo que apunta en una dirección ligeramente distinta.

Si el trompo tiene simetría axial y si gira alrededor de su eje con gran rapidez, el momento angular estará a lo largo del eje de rotación de la parte superior. A medida que $\vec{L}$ cam-

* Véase "The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones," de Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1981, p. 185.

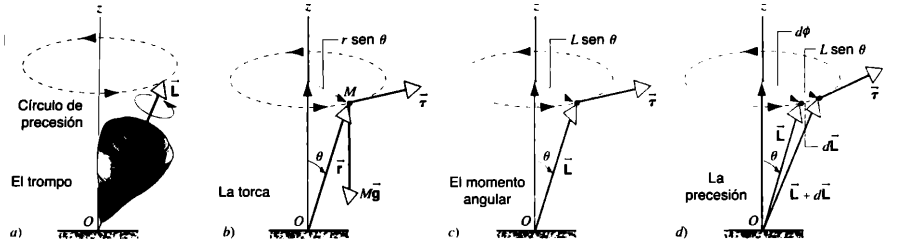


FIGURA 10-18. *a*) Un trompo en rotación muestra precesión alrededor de un eje vertical. *b*) Su peso ejerce una torca alrededor del punto de contacto con el suelo. *c*) La torca es perpendicular al vector del momento angular. *d*) La torca cambia la dirección del momento angular, causando precesión.

bia de dirección, también lo hace el eje. La punta del vector $\vec{L}$ y el eje del trompo describen un círculo alrededor del eje z, como se aprecia en la figura 10-18*a*. Este movimiento es la precesión de la parte superior.

En el tiempo dt, el eje gira un ángulo $d\phi$ (véase Fig. 10-18*d*), y por eso la rapidez angular de precesión ω_p es

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt}. \tag{10-20}$$

En la figura 10-18*d* vemos que

$$d\phi = \frac{dL}{L \operatorname{sen} \theta} = \frac{\tau\, dt}{L \operatorname{sen} \theta}. \tag{10-21}$$

Por tanto,

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\tau}{L \operatorname{sen} \theta} = \frac{Mgr \operatorname{sen} \theta}{L \operatorname{sen} \theta} = \frac{Mgr}{L}. \tag{10-22}$$

La rapidez de precesión es inversamente proporcional al momento angular, y por lo mismo a la rapidez angular rotacional; cuanto más rápidamente gire el trompo, más lenta será su precesión. Por el contrario, conforme la fricción reduzca la rapidez angular rotacional, aumentará la rapidez angular de precesión.

La ecuación 10-22 ofrece la relación entre las magnitudes $\vec{\omega}_p$, $\vec{L}$ y $\vec{\tau}$. Estas magnitudes son vectores, y la relación vectorial entre ellas es

$$\vec{\tau} = \vec{\omega}_P \times \vec{L}. \tag{10-23}$$

El lector deberá ser capaz de demostrar que la relación anterior es compatible con la existente entre magnitudes (Ec. 10-22), y también con las direcciones de los vectores de la figura 10-18. Nótese que el vector $\vec{\omega}_p$ sigue la dirección z en el movimiento de precesión alrededor del eje z.

La precesión suele observarse en los trompos y en los giroscopios. Aun la Tierra puede considerarse un trompo que gira; la tracción gravitacional del Sol y de la Luna sobre las mareas cerca del ecuador, causa una precesión (denominada en astronomía "precesión de los equinoccios"); el eje rotacional terrestre describe la superficie de un cono (como en la figura 10-18) con un ángulo medio $\theta = 23.5°$, y tarda unos 26,000 años en completar el ciclo.

El momento angular del trompo tiene dos componentes: el momento angular rotacional alrededor de su eje de simetría, y el de precesión. El momento angular total, es la suma de esos dos vectores que en general no se hallan en su eje de simetría. Por tanto, no es muy correcta nuestra suposición de que el eje de simetría de ella sigue la dirección del vector del momento angular. Pero si el momento angular de precesión es mucho menor que el rotacional de la parte superior del trompo, se registrará una desviación muy pequeña entre la dirección del eje de simetría y la del momento angular. La desviación causa una ligera oscilación denominada *nutación*, del eje de la parte superior alrededor del círculo de precesión.

10-6 REPASO DE LA DINÁMICA ROTACIONAL

En física, a menudo podemos conocer un tema nuevo por comparación o analogía con otro que ya hayamos aprendido. Por ejemplo, más adelante descubriremos que los fenómenos magnéticos tienen mucho en común con los fenómenos eléctricos, de manera que podemos entender el magnetismo a través de nuestro conocimiento de la electricidad.

En los tres capítulos anteriores hemos expuesto muchas magnitudes rotacionales nuevas, y señalado sus semejanzas con las magnitudes traslacionales correspondientes. Conviene tener presente las semejanzas, pero es igualmente importante recordar las diferencias entre dichas magnitudes y los casos especiales o limitaciones de la aplicabilidad de las ecuaciones rotacionales. Por ejemplo, algunas se aplican tan sólo a la rotación alrededor de un eje fijo en el espacio.

La tabla 10-1 ofrece una comparación entre ambas clases de magnitudes en dinámica.

TABLA 10-1 Repaso y comparación de la dinámica traslacional y rotacional*

Magnitud traslacional		*Número de ecuación*	*Magnitud rotacional*		*Número de ecuación*
Velocidad	$\vec{v} = d\vec{r}/dt$	2-9	Velocidad angular	$\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$	8-3
Aceleración	$\vec{a} = d\vec{v}/dt$	2-16	Aceleración angular	$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$	8-5
Masa	m		Inercia rotacional	$I = \sum mr^2$	9-10
Fuerza	$\vec{F}$		Torca	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	9-3
Segunda ley de Newton	$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$	4-3	Segunda ley de Newton para rotaciones alrededor de un eje fijo	$\sum \tau_{ext,z} = I\alpha_z$	9-11
Condición de equilibrio	$\sum \vec{F}_{ext} = 0$	9-22	Condición de equilibrio	$\sum \tau_{ext} = 0$	9-23
Momento de una partícula	$\vec{p} = m\vec{v}$	6-1	Momento angular de una partícula	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$	10-1
Momento de un sistema de partículas	$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$	7-21	Momento angular de un sistema de partículas	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	10-12
Forma general de la segunda ley de Newton	$\sum \vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt$	7-23	Forma general de la segunda ley de Newton para rotación	$\sum \vec{\tau}_{ext} = d\vec{L}/dt$	10-9
Conservación del momento en un sistema de partículas donde $\sum \vec{F}_{ext} = 0$	$\vec{P} = \sum \vec{p}_n$ = constante	6-12	Conservación del momento angular en un sistema de partículas donde $\sum \tau_{ext} = 0$	$\vec{L} = \sum \vec{l}_n$ = constante	10-15

*Algunas de estas ecuaciones se aplican sólo en condiciones especiales. Asegúrese de que conoce las condiciones antes de utilizar las ecuaciones.

OPCIÓN MÚLTIPLE

10-1 Momento angular de una partícula

1. Una partícula se desplaza con la posición dada por $\vec{r} = 3t\hat{i} + 4\hat{j}$, donde $\vec{r}$ se mide en metros cuando t se mide en segundos. En las siguientes posibilidades considere sólo $t > 0$.
   a) La magnitud de la velocidad lineal de la partícula
   A) aumenta con el tiempo. B) es constante con el tiempo.
   C) disminuye con el tiempo. D) no está definida.
   b) La magnitud del momento lineal de la partícula
   A) aumenta con el tiempo. B) es constante en el tiempo.
   C) disminuye con el tiempo. D) no está definida.
   c) La magnitud de la velocidad angular de la partícula alrededor del origen
   A) aumenta con el tiempo. B) es constante en el tiempo.
   C) disminuye con el tiempo. D) no está definida.
   d) La magnitud del momento angular de la partícula alrededor del origen
   A) aumenta con el tiempo. B) es constante en el tiempo.
   C) disminuye con el tiempo. D) no está definida.
2. Una partícula se desplaza con velocidad constante $\vec{v}$. Su momento angular alrededor del origen es cero
   A) siempre.
   B) exactamente una sola vez.
   C) sólo si su trayectoria atraviesa el origen.
   D) nunca.
3. Una partícula se desplaza con momento constante $\vec{p} = (10\ \text{kg} \cdot \text{m/s})\hat{i}$. Tiene un momento angular alrededor del origen de $\vec{l} = (20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{k}$ cuando $t = 0$ s.
   a) La magnitud de su momento angular
   A) disminuye. B) es constante. C) aumenta.
   D) es posible pero no necesariamente constante.
   b) Su trayectoria
   A) definitivamente atraviesa el origen.
   B) podría cruzar el origen.
   C) no cruzará el origen, pero no se sabe a qué distancia pase de él.
   D) no cruzará el origen, pero puede calcularse *exactamente* a qué distancia pasará de él.

10-2 Sistemas de partículas

4. Dos partículas tienen los momentos angulares $|\vec{l}_1| = 30\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, e $|\vec{l}_2| = 40\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, medidos alrededor del origen. Al inicio la partícula 1 se desplaza en el plano xy, y la partícula 2 lo

hace en el plano yz. Si no hay torcas externas, el momento angular total será una constante de magnitud

A) $|\vec{L}| = 10\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ B) $|\vec{L}| = 50\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

C) $|\vec{L}| = 70\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

D) $10\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \le |\vec{L}| \le 50\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

5. Dos partículas independientes se mueven originalmente con los momentos angulares $\vec{l}_1$ y $\vec{l}_2$ en una región del espacio sin torcas externas. Después, durante un tiempo Δt, una torca externa constante $\vec{\tau}$ actúa sobre la primera, pero *no* sobre la segunda. ¿Qué cambio presenta el momento angular total de las dos?

A) $\Delta\vec{L} = \vec{l}_1 - \vec{l}_2$ B) $\Delta\vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{l}_1 - \vec{l}_2)$

C) $\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\,\Delta t$

D) $\Delta\vec{L}$ para el sistema no está bien definido, porque las partículas no están conectadas.

10-3 Momento y velocidad angulares

6. La velocidad lineal $\vec{v}$ y el momento lineal $\vec{p}$ de un cuerpo
   A) siempre son paralelos.
   B) nunca son paralelos.
   C) son paralelos sólo si $\vec{v}$ es constante.
   D) son paralelos sólo si $\vec{v}$ apunta en ciertas direcciones respecto al cuerpo.
7. La velocidad angular $\vec{\omega}$ y el momento angular $\vec{l}$ de un cuerpo con simetría axial
   A) siempre son paralelos.
   B) nunca son paralelos.
   C) son paralelos sólo si $\vec{\omega}$ es constante.
   D) son paralelos sólo si $\vec{\omega}$ apunta en ciertas direcciones respecto al cuerpo.
8. Un cuerpo, no necesariamente rígido, gira inicialmente con una velocidad angular de magnitud ω_0 y con un momento angular de magnitud L_0. Le sucede algo que hace que ω_0 disminuya lentamente. En consecuencia,
   A) L_0 debe ir disminuyendo.
   B) L_0 podría ser constante o disminuir, pero no aumentar.
   C) L_0 podría ser constante, disminuir o aumentar.
   D) L_0 podría ser constante o aumentar, pero no disminuir.

10-4 Conservación del momento angular

9. Un objeto sólido gira libremente sin experimentar torcas externas. En este caso,
   A) el momento y la velocidad angulares tienen direcciones constantes.
   B) la dirección del momento angular es constante, pero la de la velocidad angular pudiera no serlo.
   C) la dirección de la velocidad angular es constante, pero la del momento angular pudiera no serlo.
   D) Ni el momento ni la velocidad angular han de tener necesariamente una dirección constante.
10. Un profesor de física está sentado en una silla giratoria con los brazos extendidos y sosteniendo una barra de pesas de tamaño mediano. Originalmente, la silla *sin fricción* gira con rapidez angular constante. Luego el profesor acerca más los brazos a su cuerpo.
   a) Cuando acerca los brazos al cuerpo, la velocidad angular
   A) aumenta. B) permanece constante.
   C) disminuye.
   D) cambia, pero su aumento o reducción depende de cómo acerque los brazos al cuerpo.
   b) Cuando acerca los brazos al cuerpo su momento angular,
   A) aumenta. B) permanece constante.
   C) disminuye.
   D) cambia, pero su aumento o reducción depende de cómo acerque los brazos al cuerpo.

10-5 El trompo que gira

11. Dos alambres están conectados a los extremos del eje de la rueda de una bicicleta, de modo que la rueda queda suspendida y puede girar libremente en un plano vertical. Se hace que gire alrededor del eje con gran velocidad. Se corta uno de los alambres que sostienen el eje; vista desde este lado del eje, la rueda gira en dirección de las manecillas del reloj.
   a) Visto desde arriba el eje de la rueda, ¿qué dirección tendrá su precesión?
   A) Dirección de las manecillas.
   B) Dirección contraria a las manecillas del reloj.
   C) La rueda no tendrá precesión, porque no es un trompo que gire.
   b) Antes de cortar uno de los alambres, éstos tienen una tensión de $W/2$, donde W es el peso de la rueda. Luego de cortarlo, la tensión del alambre que todavía está conectado tendrá una tensión
   A) $W/2$. B) ligeramente mayor que $W/2$.
   C) aproximadamente W. D) exactamente W.

10-6 Repaso de la dinámica rotacional

PREGUNTAS

1. Hasta ahora hemos encontrado muchas magnitudes vectoriales: posición, desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, momento y momento angular. ¿Cuáles de ellos se definen independientemente de la elección del origen en el marco de referencia?
2. Un cilindro gira con rapidez angular ω alrededor de un eje que pasa por un extremo, como en la figura 10-19. Escoja el origen apropiado y muestre cualitativamente los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$. ¿Son paralelos estos vectores? ¿Hay que atender aquí a consideraciones de simetría?
3. Cuando aumenta la rapidez angular ω de un objeto, su momento angular puede o no aumentar también. Dé un ejemplo en que se incremente y otro en que no lo haga.

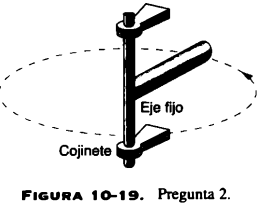


FIGURA 10-19. Pregunta 2.

4. ¿Es posible que el momento angular de un objeto sea cero si su velocidad angular no lo es? ¿Es posible que la velocidad angular de un objeto sea cero si su momento angular no lo es? Explique.
5. Un estudiante está de pie en una mesa giratoria que tiene una rapidez angular ω, mientras sostiene dos pesas con los brazos extendidos. Ambas pesas caen al suelo sin que se mueva ninguna otra cosa. ¿Qué cambio se produce en la rapidez angular del estudiante? ¿Se conserva el momento angular? Explique sus respuestas.
6. Una plataforma circular gira con rapidez angular constante alrededor de un eje vertical. No hay fricción ni torca impulsora. Una cacerola está sobre la plataforma y gira junto con él (véase Fig. 10-20). El fondo de la cacerola está cubierto con una capa de hielo de espesor uniforme, el cual naturalmente también gira con la plataforma. El hielo se derrite, pero el agua no escapa de la cacerola. ¿Es ahora la rapidez angular mayor, igual o menor que la rapidez original? Fundamente su respuesta.

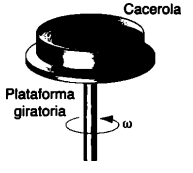


FIGURA 10-20. Pregunta 6.

7. Una plataforma circular gira libremente alrededor de un eje vertical. No hay fricción en el eje de rotación. *a*) Inicialmente en el centro de la plataforma, una cucaracha sale caminando del borde y se detiene. ¿Cómo afectará esto al momento angular del sistema (plataforma y cucaracha)? *b*) Si ésta cae por el borde de la plataforma (sin saltar), ¿cómo influirá esto en la rapidez angular de la plataforma?
8. Un físico famoso (R. W. Wood), muy dado a las bromas prácticas, montó un volante de giro rápido en una maleta que le dio a un portero indicándole que lo siguiera. ¿Qué sucederá cuando el portero llegue rápidamente a una esquina? Explíquelo en función de $\vec{\tau} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$.
9. Una flecha cambia de dirección en el vuelo y es tangente a su trayectoria en todo momento. Pero esto no lo hace un balón de fútbol americano (lanzado con un efecto considerable alrededor de su eje largo). ¿A qué se debe este comportamiento diferente?
10. Un pasador le lanza a un receptor un balón de fútbol americano en espiral. ¿Es constante o casi constante el momento angular? Distinga entre los casos, en que el balón bambolea y en que no lo hace.
11. ¿Puede proponer una teoría simple que explique la estabilidad de una bibicleta en movimiento? Deberá explicar por qué es mucho más difícil balancearse en una bicicleta en reposo que cuando rueda. (Consúltese "The Stability of the Bicycle", de David E.M. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, p. 34.)
12. ¿Por qué una barra larga ayuda a un malabarista a conservar el equilibrio en la cuerda floja?
13. Va caminando usted por un carril estrecho y comienza a perder el equilibrio. Si empieza a caer a la derecha, ¿en qué dirección mueve el cuerpo para recobrar el equilibrio? Explique su respuesta.
14. Los pernos de montaje que sujetan el motor de un avión de propulsión a su estructura, están diseñados para separarse si el motor (de giro rápido) se atasca repentinamente por alguna falla. ¿Por qué se utilizan esos "fusibles estructurales"?
15. Un helicóptero arranca a gran velocidad girando sus hélices. ¿Por qué su cuerpo no gira en dirección contraria?
16. Un avión de un motor debe "ajustarse" para que vuele a ras de suelo. (El ajuste consiste en elevar un alerón y en bajar el otro.) ¿Por qué es necesario esto? ¿Se necesita en un avión bimotor en circunstancias normales?
17. Vista desde atrás, la hélice de un avión gira en dirección de las manecillas del reloj. Cuando el piloto se eleva después de una gran picada, debe aplicar el timón izquierdo en el fondo de ella si quiere mantener la dirección. Explique por qué.
18. Muchos ríos grandes confluyen hacia el Ecuador. ¿Qué efecto tiene el sedimento que llevan al mar en la rotación de la Tierra?
19. Si la población total del mundo se trasladara a la Antártica, ¿incidiría eso en la duración del día? Si la respuesta es afirmativa, explique en qué forma influiría.
20. La figura 10.21*a* muestra a un acróbata impulsado hacia arriba por un trampolín con momento angular cero. Si maniobra con el cuerpo, ¿logrará caer de espaldas como se ve en la figura 10-21*b*? Es interesante mencionar que 38% de los entrenadores de clavados a quienes se les hizo esta pregunta dieron 34% la respuesta equivocada. ¿Qué opina al respecto? (Véase una amplia explicación en "Do Springbaord Divers Violate Angular Momentum Conservation? de Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, julio de 1979, p. 583.)

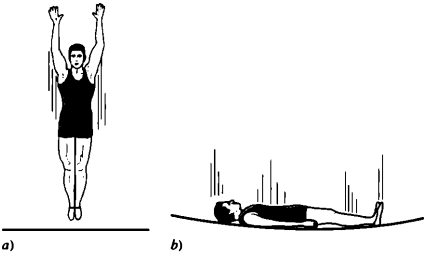


FIGURA 10-21. Pregunta 20.

21. En función del momento angular y de la inercia rotacional, explique exactamente cómo se "mece un columpio" cuando uno está sentado. (Consúltese "How to Get the Playground Swing Going: A First Lesson in the Mechanics of Rotation", de Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1989, p. 106.)
22. ¿Puede mover un "columpio", de modo que dé una vuelta completa desplazándose totalmente alrededor de su apoyo? Suponga (si lo desea) que el asiento está conectado a su sostén mediante una varilla rígida, y no mediante una cuerda ni cadena. Explique su respuesta.
23. Los gatos suelen caer de pie si se les arroja, aun cuando se les deje caer de espaldas. ¿Por qué?
24. Un volante voluminoso puede usarse como efecto estabilizador en un barco. Si se monta con su eje de rotación formando ángulos rectos con la cubierta, ¿qué efecto se produce cuando el barco tienda a balancearse de un lado a otro?

25. Se colapsaría la parte superior de la figura 10-18 si no girara. Presentaría precesión si su momento angular de giro es grande en comparación con el cambio causado por la torca aplicada. ¿Qué ocurre mientras tanto cuando gira lentamente?
26. Un Tippy-Top tiene una sección de una superficie esférica de gran radio en un extremo, y un tronco para girarlo en el otro. Descansa en ella si no se produce giro alguno, pero resbalará y caerá cuando la hagamos girar, de modo que se apoya en su tronco. Explique esto. (Consúltese "The Tippy-Top", de George D. Freier, *The Physics Teacher*, enero de 1967, p. 36.) Si no puede encontrar un Tippy-Top, utilice un huevo cocido; podrá seguir fácilmente el comportamiento de "sostenerse en un extremo" del huevo en rotación, si marca con tinta el extremo "punteado" del huevo.
27. Una rueda de bicicleta que gira en un plano vertical puede sostenerse desde un extremo del eje; éste simplemente presenta precesión. ¿Qué "sostiene" al otro extremo? En otras palabras, ¿por qué no cae la rueda?
28. Suponga que una varilla uniforme se halla en posición vertical en una superficie con fricción despreciable. Después le damos a la varilla un golpe horizontal en su extremo inferior. Describa el movimiento de su centro de masa y de su punto final superior.

JERCICIOS

10-1 Momento angular de una partícula

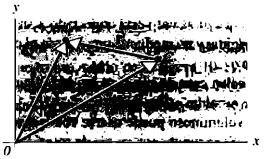
1. Una partícula de 13.7 g de masa se desplaza con una velocidad constante de 380 m/s de magnitud. Al moverse en línea recta pasa a 12 cm del origen. Calcule su momento angular alrededor del origen.
2. Si nos dan r, p y θ, con la ecuación 10-2 podemos calcular el momento angular de una partícula. Sin embargo, algunas veces nos dan en su lugar los componentes (x, y, z) de $\vec{r}$, y (v_x, v_y, v_z) de $\vec{v}$. *a*) Demuestre que entonces, los componentes de $\vec{\mathbf{l}}$ en los ejes x, y y z están dados por

$$l_x = m(yv_z - zv_y),$$
$$l_y = m(zv_x - xv_z),$$
$$l_z = m(xv_y - yv_x).$$

b) Demuestre que si la partícula se mueve sólo en el plano xy, el momento angular resultante tendrá sólo un componente z.
3. Demuestre que el momento angular alrededor de un punto cualquiera de una partícula que se desplace con velocidad constante, no cambia durante todo el movimiento.
4. *a*) Utilice los datos de los apéndices para calcular el momento angular total de todos los planetas debida a su traslación alrededor del Sol. *b*) ¿Qué fracción de él corresponde a Júpiter?
5. Calcule el momento angular alrededor del centro de la Tierra de una persona de 84.3 kg de peso, situada en el ecuador de la Tierra en rotación.

10-2 Sistemas de partículas

6. El momento angular total de un sistema de partículas respecto al origen O de un marco de referencia inercial está dado por $\vec{\mathbf{L}} = \Sigma\,(\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i)$, donde $\vec{\mathbf{r}}_i$ y $\vec{\mathbf{p}}_i$ se miden respecto a O. *a*) Use las relaciones $\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_{cm} + \vec{\mathbf{r}}'_i$, y $\vec{\mathbf{p}}_i = m_i\vec{\mathbf{v}}_{cm} + \vec{\mathbf{p}}'_i$ para expresar $\vec{\mathbf{L}}$ en función de las posiciones $\vec{\mathbf{r}}'_i$, y los momentos $\vec{\mathbf{p}}'_i$ relativos al centro de masa C (véase Fig. 10-22). *b*) Utilice la definición del centro de masa y la de momento angular $\vec{\mathbf{L}}'$ respecto al centro de masa para obtener $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}' + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$. *c*) Demuestre que el resultado anterior puede interpretarse así: el momento angular total, es la suma del momento angular rotacional (momento angular en relación con el centro de masa) y el momento angular orbital (momento angular del movimiento del centro de masa C respecto a O, si toda la masa del sistema estuviera concentrada en C).



7. Sea $\vec{\mathbf{r}}_{cm}$, el vector de posición del centro de masa C en un sistema de partículas respecto al origen O de un marco de referencia inercial, y sea $\vec{\mathbf{r}}'_i$, el vector de posición de la i-ésima partícula con masa m_i, en relación con el centro de masa C. Por tanto, $\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_{cm} + \vec{\mathbf{r}}'_i$ (véase Fig. 10-22). Defina ahora el momento angular del sistema de partículas respecto a dicho centro como $\vec{\mathbf{L}}' = \Sigma\,(\vec{\mathbf{r}}'_i \times \vec{\mathbf{p}}'_i)$, donde $\vec{\mathbf{p}}'_i = m_i\,d\vec{\mathbf{r}}'_i/dt$. *a*) Demuestre que $\vec{\mathbf{p}}'_i = m_i\,d\vec{\mathbf{r}}_i/dt - m_i\,d\vec{\mathbf{r}}_{cm}/dt = \vec{\mathbf{p}}_i - m_i\vec{\mathbf{v}}_{cm}$. *b*) A continuación demuestre que $d\vec{\mathbf{L}}'/dt = \Sigma\,(\vec{\mathbf{r}}'_i \times d\vec{\mathbf{p}}'_i/dt)$. *c*) Combine los resultados de *a*) y de *b*); después por medio de la definición del centro de masa y de la tercera ley de Newton, demuestre que $\vec{\tau}'_{ext} = d\vec{\mathbf{L}}'/dt$, donde $\vec{\tau}'_{ext}$ es la suma de todas las torcas externas que actúan sobre el sistema alrededor de su centro de masa.

10-3 Momento y velocidad angulares

8. La integral temporal de una torca se llama *impulso angular*. *a*) Comenzando con $\vec{\tau} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$, demuestre que el impulso angular resultante es igual al cambio del momento angular. Es el análogo rotacional de la relación entre impulso y momento. *b*) Demuestre que en la rotación alrededor de un eje fijo

$$\int \tau\,dt = F_{prom}\,r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i),$$

donde r es el brazo de momento de la fuerza, F_{av} es el valor promedio de la fuerza durante el tiempo que opera sobre el objeto, y ω_i y ω_f son sus velocidades angulares antes y después de actuar la fuerza.
9. Un disco de afilar con una inercia rotacional 1.22×10^{-3} kg · m², está conectado a un taladro eléctrico cuyo motor genera una torca de 15.8 N·m. Calcule *a*) su momento angular, y *b*) su rapidez angular 33.0 ms después de encendido el motor.
10. Una rueda de 24.7 cm de radio que se desplaza inicialmente a 43.3 m/s, rueda hasta detenerse en 225 m. Calcule *a*) su aceleración lineal, y *b*) su aceleración angular. *c*) Su inercia rotacional es 0.155 kg·m². Calcule la torca que la fricción de rodamiento ejerce sobre

11. Demuestre que $\bar{\mathbf{L}} = I\bar{\boldsymbol{\omega}}$ en el sistema de dos partículas de la figura 10-7.
12. La figura 10-23 contiene un cuerpo rígido simétrico que gira alrededor de un eje fijo. Para facilitar el ejercicio, el origen de las coordenadas está fijo en el centro de masa. Sumando las contribuciones que al momento angular hacen todos los elementos de masa m_i en que se divide el cuerpo, pruebe que $\bar{\mathbf{L}} = I\bar{\boldsymbol{\omega}}$, donde $\bar{\mathbf{L}}$ es el momento angular total.

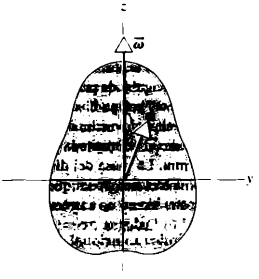


FIGURA 10-23. Ejercicio 12.

13. Un palo uniforme tiene una masa de 4.42 kg y una longitud de 1.23 m. Inicialmente está extendido sobre una superficie horizontal sin fricción, y se le golpea perpendicularmente con un disco que le imparte una fuerza impulsiva horizontal 12.8 N·s a una distancia de 46.4 cm del centro. Determine el movimiento subsecuente del palo.
14. Un cilindro rueda por un plano inclinado de ángulo θ. Aplicando directamente la ecuación 10-9 ($\Sigma\, \bar{\tau}_{ext_z} = d\bar{\mathbf{L}}/dt$), demuestre que la aceleración de su centro de masa es $\frac{2}{3}g$ sen θ. Compare este método con el del problema resuelto 9-11.
15. Dos cilindros de radio R_1 y R_2 y de inercias rotacionales I_1 y I_2, respectivamente, están sostenidos por ejes perpendiculares al plano de la figura 10-24. Inicialmente el cilindro grande gira con velocidad angular ω_0. Al pequeño se le mueve a la derecha hasta que toca al otro, y lo hace girar la fuerza de fricción entre ambos. Con el tiempo termina el deslizamiento, y los dos cilindros giran con rapidez constante en dirección opuesta. Calcule la velocidad angular final ω_2 del cilindro pequeño en función de I_1, I_2, R_1, R_2 y ω_0. (*Sugerencia*: No se conserva el momento angular. Aplique la ecuación de impulso angular a cada cilindro. Consulte el ejercicio 8.)

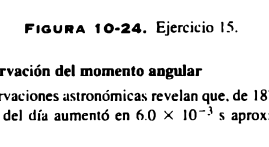


FIGURA 10-24. Ejercicio 15.

10-4 Conservación del momento angular

16. Las observaciones astronómicas revelan que, de 1870 a 1900, la duración del día aumentó en 6.0×10^{-3} s aproximadamente. *a*) ¿Qué cambio fraccional correspondiente se produjo en la velocidad angular de la Tierra? *b*) Suponga que la causa del cambio fue una alteración del material fundido en el núcleo de ella. ¿Qué cambio fraccional resultante en su inercia rotacional podría explicar el inciso *a*)?
17. Suponga que al Sol se le agota el combustible nuclear y que de repente colapsa, formando una estrella enana blanca, cuyo diámetro es igual al de la Tierra. Suponiendo que no se pierda masa, ¿cuál sería entonces el nuevo periodo de rotación del Sol, actualmente de unos 25 días? Suponga que el Sol y la estrella enana son esferas uniformes.
18. En una demostración académica se monta una vía de juguete en una rueda grande que puede girar libremente con una fricción despreciable alrededor de un eje vertical (véase Fig. 10-25). Un tren de juguete de masa m se coloca en la vía y, con el sistema inicialmente en reposo, se enciende la energía eléctrica. El tren alcanza una velocidad estable v respecto a la vía. ¿Cuál es la velocidad angular ω de la rueda, si su masa es M y su radio R? (No tenga en cuenta la masa de los rayos de la rueda.)

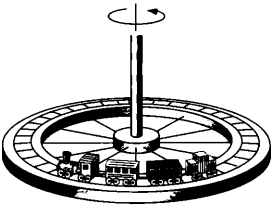


FIGURA 10-25. Ejercicio 18.

19. El rotor de un motor eléctrico tiene una inercia rotacional $I_m = 2.47 \times 10^{-3}$ kg·m^2 alrededor de su eje central. El motor está montado paralelamente al eje de una sonda espacial, cuya inercia rotacional es $I_p = 12.6$ kg·m^2 alrededor de su eje. Calcule las revoluciones que el motor ha de efectuar para mover la sonda 25.0° alrededor de su eje.
20. Un hombre está de pie en una plataforma sin fricción que gira con una rapidez angular de 1.22 rev/s; tiene los brazos extendidos y sostiene un peso en cada mano. Con ellas en esa posición, la inercia rotacional total del hombre, de las pesas y de la plataforma es 6.13 kg·m^2. Si el hombre moviendo las pesas reduce la inercia rotacional a 1.97 kg·m^2, ¿cuál será la rapidez angular resultante de la plataforma?
21. Una rueda con una inercia rotacional 1.27 kg·m^2 gira con una rapidez angular de 824 rev/min en un eje, cuya inercia rotacional es despreciable. Una segunda rueda, inicialmente en reposo y con una inercia rotacional de 4.85 kg·m^2, se acopla de repente al mismo eje. ¿Cuál será la rapidez angular de la combinación resultante del eje y de las dos ruedas?
22. Demuestre que el valor de $I_\perp$ en la figura 10-6*c*, está dado por mvh, donde h es la distancia en el eje z de O al punto de conexión del brazo radial con el eje vertical.
23. Con un centro y con rayos de masa despreciable, una rueda de bicicleta tiene un borde delgado de 36.3 cm de radio y 3.66 kg de masa; puede girar sobre su eje con fricción insignificante. Un hombre sostiene la rueda arriba de la cabeza con el eje vertical, mientras está de pie en una plataforma que puede girar libre-

mente sin fricción; vista desde arriba, la rueda gira en el dirección de las manecillas del reloj con una rapidez angular de 57.7 rad/s, y la plataforma se halla en reposo inicialmente. La inercia rotacional de rueda + hombre + plataforma alrededor de un eje común de rotación es 2.88 kg·m². *a*) De repente las manos del hombre detienen la rueda (en relación con la plataforma). Determine la velocidad angular resultante (magnitud y dirección) del sistema. *b*) El experimento se repite con mucha fricción introducida en el eje de la rueda, la cual partiendo de la misma rapidez angular inicial (57.7 rad/s), poco a poco se detiene (en relación con la plataforma), mientras el hombre sostiene la rueda como se dijo antes. (La plataforma todavía puede girar libremente sin fricción.) Describa lo que sucede con el sistema, proporcionando toda la información cuantitativa que permitan los datos.

24. Una joven de 50.6 kg de masa está de pie en el borde de un carrusel sin fricción de 827 kg de masa y 3.72 m de radio, que no se mueve. Arroja una piedra de 1.13 kg en dirección horizontal tangente al borde externo del carrusel. En relación con el suelo, la rapidez de la piedra es 7.82 m/s. Calcule *a*) la rapidez angular del carrusel, y *b*) la velocidad lineal de la joven después de lanzar la piedra. Suponga que el carrusel es un disco uniforme.

25. En un patio de juego está instalado un carrusel de 1.22 m de radio y de 176 kg de masa. El radio de giro (véase Ej. 9-20) mide 91.6 cm. Un niño de 44.3 kg de masa, corre a una rapidez de 2.92 m/s tangente al borde del carrusel cuando éste está parado y luego salta a él. No tenga en cuenta la fricción entre los cojinetes y el eje del carrusel, y calcule la rapidez angular del carrusel y del niño.

10-5 El trompo que gira

26. Un trompo gira a 28.6 rev/s alrededor de un eje, formando un ángulo de 34.0° con la vertical. Su masa es 492 g y su inercia rotacional es 5.12×10^{-4} kg·m². El centro de masa está a 3.88 cm del punto de pivote. Visto desde arriba, el giro sigue la dirección de las manecillas del reloj. Encuentre la magnitud (en rev/s), y la dirección de la velocidad angular de precesión.

27. Un giroscopio compuesto por un disco giratorio de 48.7 cm de radio, está montado en el punto medio de un eje de 12.2 cm de largo para que gire y realice libremente la precesión. Su velocidad de giro es 975 rev/min. La masa del disco es 1.14 kg y la del eje es 130 g. Determine el tiempo en que se efectúa una precesión si el eje está sostenido en un extremo y es horizontal.

10-6 Repaso de la dinámica rotacional

PROBLEMAS

1. Una partícula P con una masa de 2.13 kg, tiene una posición $\vec{r}$ y una velocidad $\vec{v}$, como se aprecia en la figura 10-26. Sobre ella actúa la fuerza $\vec{F}$. Los tres vectores se encuentran en un plano común. Suponga que $r = 2.91$ m, que $v = 4.18$ m/s y que $F = 1.88$ N. Calcule *a*) el momento angular de la partícula, y *b*) la torca alrededor del origen que actúa sobre la partícula. ¿Qué dirección siguen estos dos vectores?

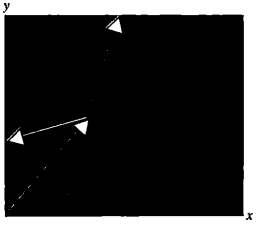


FIGURA 10-26. Problema 1.

2. Dos partículas con una masa m y una rapidez v, van en direcciones opuestas en líneas paralelas separadas por una distancia d. Encuentre una expresión del momento angular total del sistema alrededor de cualquier origen.

3. Para lograr que una bola de billar ruede sin resbalar desde el arranque, el taco debe golpearla no en el centro (es decir, a una altura por arriba de la mesa igual al radio R de la bola), sino exactamente a una altura $2R/5$ arriba del centro. Pruebe este resultado. [Véase un suplemento sobre la mecánica del billar en Arnold Sommerfeld, *Mechanics, Volume 2 of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, Orlando (edición de bolsillo de 1964), pp. 158-161.]

4. El eje de un cilindro en la figura 10-27 está fijo. El cilindro se encuentra inicialmente en reposo. El bloque de masa M se desplaza inicialmente sin fricción y con una rapidez v_1. Pasa sobre el cilindro y ocupa la posición punteada. Cuando entra en contacto con el cilindro se resbala sobre él, pero la fricción es lo bastante grande para que el deslizamiento termine antes que M pierda contacto con el cilindro. Éste tiene un radio R y una inercia rotacional I. Calcule la rapidez final v_2 en función de v_1, M, I y R. Esto puede efectuarse muy fácilmente usando la relación entre impulso y cambio de momento.

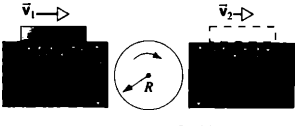


FIGURA 10-27. Problema 4.

5. A una bola de billar, inicialmente en reposo, un taco le imprime un fuerte impulso. El taco se sostiene horizontalmente a una distancia h arriba de la línea de centro, como se ve en la figura 10-28. La bola parte del taco con una rapidez v_0 y, por su "efecto lateral", acaba obteniendo una rapidez final de $9v_0/7$. Demuestre que $h = 4R/5$, donde R es el radio de la bola.

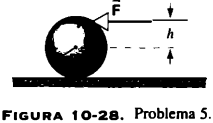


FIGURA 10-28. Problema 5.

6. En el problema 5, imagine que $\vec{F}$ se aplica debajo de la línea de centro. *a*) Demuestre que en este "efecto lateral" es imposible reducir a cero la rapidez hacia adelante sin que aparezca el rodamiento, salvo que $h = R$. *b*) Demuestre que es imposible imprimirle a la bola una velocidad hacia atrás, si $\vec{F}$ no tiene un componente vertical hacia abajo.
7. Un jugador de boliche arroja una pelota de radio $R = 11.0$ cm por el carril, con una rapidez inicial de $v_0 = 8.50$ m/s. La lanza de modo que se desliza cierta distancia antes de comenzar a rodar. No gira en absoluto cuando choca con el carril, y su movimiento es de traslación pura. El coeficiente de fricción cinética entre la bola y el carril es de 0.210. *a*) ¿Cuánto tiempo se desliza? (*Sugerencia*: A medida que la bola se desliza, su rapidez v disminuye y aumenta su rapidez angular ω; el deslizamiento termina cuando $v = R\omega$.) *b*) ¿Qué distancia recorre deslizándose en el carril? *c*) ¿Cuántas revoluciones efectúa antes de comenzar a rodar? *d*) ¿Con qué rapidez se mueve cuando comienza rodar?
8. Un disco plano uniforme de masa M y de radio R, gira alrededor de un eje horizontal por su centro con una rapidez angular ω_0. *a*) ¿Cuál es su momento angular? *b*) Un fragmento de masa m se desprende del borde del disco en un instante tal, que se eleva verticalmente por arriba del punto donde se separó (Fig. 10-29). ¿Qué altura alcanza antes de comenzar a caer? *c*) ¿Cuál es la rapidez angular final del disco roto?

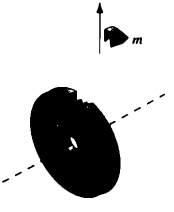


FIGURA 10-29. Problema 8.

9. Si el casco polar se derritiera y el agua retornara a los mares, la profundidad de los océanos aumentaría unos 30 m. ¿Qué efecto tendría eso en la rotación de la Tierra? Realice una estimación del cambio resultante en la duración del día. (Se ha dicho que el calentamiento de la atmósfera ocasionado por la contaminación ambiental, podría hacer que los cascos polares se derritan.)
10. La Tierra se formó hace 4,500 millones de años, con mucha probabilidad como esfera de densidad aproximadamente uniforme. Poco después por el calor emanado de la desintegración de los elementos radiactivos, se derritió gran parte de su centro. Esto permitió que el material más pesado se hundiera hacia el centro, formando un núcleo allí. Hoy podemos imaginar que la Tierra está constituida por un núcleo de 3,570 km de radio y de 10.3 g/cm^3 de densidad, rodeada por un manto de 4.50 g/cm^3 de densidad que se extiende hasta la superficie (con un radio de 6,370 km). Ignoramos la corteza terrestre. Calcule el cambio fraccional en la duración del día debido a la formación del núcleo.
11. Una cucaracha de masa m, corre en dirección contraria a la de las manecillas del reloj alrededor de Susana perezosa (un disco circular montado sobre un eje vertical) de radio R, y de inercia rotacional I con cojinete sin fricción. La rapidez de la cucaracha (en relación con la Tierra) es v, mientras que Susana perezosa gira en dirección de las manecillas del reloj con una rapidez angular ω. La cucaracha encuentra una migaja de pan en el borde y se detiene. Calcule la rapidez angular de Susana perezosa después que la cucaracha se detiene.
12. Dos patinadores, cada uno con una masa de 51.2 kg, se acercan uno a otro en dos trayectorias paralelas a 2.92 m de distancia. Tienen una velocidad igual y opuesta de 1.38 m/s. El primer patinador lleva un palo largo y ligero de 2.92 m de largo, y el segundo lo toma por su extremo cuando pasa cerca de él (véase Fig. 10-30). Suponga que el hielo no tiene fricción. *a*) Describa cuantitativamente el movimiento de los dos patinadores después que están conectados por el palo. *b*) Los patinadores tiran de él y de esa manera reducen a 0.940 m la separación entre ellos. Calcule cuál es su velocidad angular en ese momento.

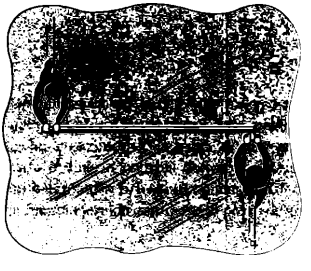


FIGURA 10-30. Problema 12.

CAPÍTULO 11

ENERGÍA 1: TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

Hemos visto cómo las leyes de Newton facilitan la comprensión y el análisis de muchos problemas de mecánica. En este capítulo y en los dos siguientes, vamos a examinar otro método basado en uno de los conceptos verdaderamente fundamentales y universales de la física: la energía.

Hay muchas clases de energía. En el presente capítulo estudiaremos una de ellas: la energía cinética, que se relaciona con un cuerpo por su movimiento. También nos ocuparemos del concepto de trabajo que se relaciona con ella a través del teorema de trabajo-energía. Este teorema, derivado de las leyes de Newton, ofrece una perspectiva diferente del comportamiento de los sistemas mecánicos. En el Capítulo 12 explicaremos una segunda clase de energía —la energía potencial—, y comenzaremos a desarrollar una ley de conservación de la energía. En el Capítulo 13 trataremos la energía en una forma más global y generalizaremos la ley de conservación de la energía, una de las más útiles de la física.

11-1 TRABAJO Y ENERGÍA

La figura 11-1 muestra a una persona en silla de ruedas que la empuja cuesta arriba. Cuando empuja la rueda hacia abajo con una fuerza $\vec{F}$, se produce una torca $\vec{r} \times \vec{F}$ alrededor de un punto instantáneo de contacto entre la rueda y el suelo. La torca la hace rodar hacia adelante. Otra forma de ver el problema, consiste en considerar la fuerza de fricción $\vec{f}$ que la rueda ejerce sobre el suelo (debido al esfuerzo de la persona); la fuerza de reacción $-\vec{f}$, ejercida por la silla sobre el suelo, empuja la silla hacia adelante. Podría trazarse una figura semejante para una persona en bicicleta.

Con el tiempo se siente cansancio en los brazos de la persona en la silla de ruedas o las piernas del que anda en bicicleta, de modo que no pueden mantener la rapidez original cuesta arriba. Quizá se fatiguen tanto, que se detengan por completo. Podemos analizar las fuerzas aplicadas en este problema, basándonos en las leyes de Newton, pero no nos permiten explicar por qué se consume la capacidad de las personas de ejercer una fuerza para avanzar. En otras palabras, *no podemos* pensar que su cuerpo "contenga" una cantidad de fuerza que se agota con el esfuerzo.

En este análisis, es preciso introducir dos conceptos nuevos: *trabajo* y *energía*. Como tantas otras palabras con que describimos los conceptos de la física, no hay que confundir su significado ordinario con las definiciones rigurosas que tienen como magnitudes físicas. El concepto *físico* de trabajo incluye una fuerza ejercida conforme el punto de aplicación va

FIGURA 11-1. Una persona en silla de ruedas la empuja cuesta arriba. La fuerza $\vec{F}$ que ejerce sobre ella, produce una torca alrededor del punto donde la silla hace contacto con el suelo.

recorriendo alguna distancia; una forma de definir la energía de un sistema, consiste en medir su capacidad de realizar trabajo. En el caso del individuo en silla de ruedas, él trabaja porque ejerce una fuerza a medida que la silla avanza alguna distancia. Para que trabaje, debe consumir parte de su suministro de energía —es decir, la energía química almacenada en las fibras musculares—, que se repone de su depósito corporal de energía, mediante el reposo, y que en definitiva proviene de la comida que ingiere.

La energía almacenada en un sistema adopta multitud de formas, entre ellas química, eléctrica, gravitacional o mecánica. En este capítulo vamos a estudiar la relación entre el trabajo y un tipo particular de energía: la del movimiento de un cuerpo, que llamaremos *energía cinética*.

11-2 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

La figura 11-2*a* muestra un bloque de masa m en el momento de ser levantado una distancia vertical h, por un malacate que un motor hace girar. Se eleva el bloque con una velocidad constante; como su aceleración es cero, según la segunda ley de Newton la fuerza neta que actúa sobre él es cero. En consecuencia, la magnitud de la fuerza ascendente $\vec{T}$ ejercida por el motor y el malacate, deberá ser igual a la de la fuerza descendente $m\vec{g}$ debida a la gravedad.

En la figura 11-2*b*, una banda transportadora es operada por un motor para mover un bloque idéntico una distancia L hacia arriba, en una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal. Si el bloque se desplaza a velocidad constante, la fuerza neta será cero otra vez, y por lo mismo la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ pendiente arriba que ejerce la banda, será igual al componente del peso mg sen θ que opera pendiente abajo.

En ambos casos, el resultado final es el mismo: el bloque se levantó una distancia h. Si lo soltamos y permitimos que caiga, llegará al suelo con cierta rapidez v. Podríamos utilizarlo para alcanzar algún objetivo, como clavar una alcayata en el suelo o lanzar un proyectil desde una catapulta. El resultado será el mismo, sin importar la forma en que hayamos alzado el bloque.

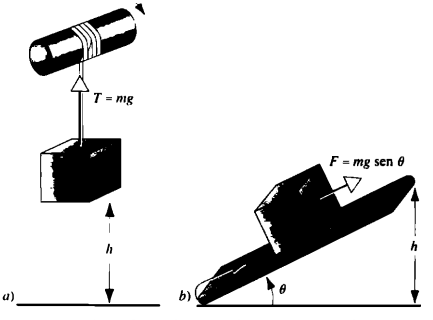


FIGURA 11-2. *a*) Un malacate accionado por motor levanta un peso mg a una distancia h. *b*) Un motor activa una correa transportadora que mueve un peso idéntico por una pendiente hasta que sube una distancia h.

Una vez elevado, podemos apagar los motores y el bloque permanecerá en su sitio. Es decir, encender los motores requiere combustible y energía eléctrica *sólo* para levantar el bloque, no para mantenerlo en su sitio. *En este proceso se gasta en el levantamiento, no en la retención.*

El trabajo W efectuado por una fuerza constante $\vec{F}$ que mueve un cuerpo por un desplazamiento $\vec{s}$ *en dirección de la fuerza*, es el producto de la magnitud de ésta y del desplazamiento.

$$W = Fs \quad (\text{fuerza constante}, \vec{F} \parallel \vec{s}). \qquad (11\text{-}1)$$

En la figura 11-2*a*, el motor ejerce una fuerza de magnitud $T = mg$ para mover el bloque una distancia h. Por estar la fuerza en la dirección del movimiento, según la ecuación 11-1, el trabajo realizado por el motor es $W = Th = mgh$. En la figura 11-2*b* el motor ejerce una fuerza de magnitud $F = mg$ sen θ, al mover el bloque una distancia L; así que el trabajo ejecutado por el motor es $W = (mg \text{ sen } \theta)(L) = mgh$ con $h = L$ sen θ. No es accidental que el motor efectúe la misma cantidad de trabajo en ambos procesos: en los dos invirtió el mismo esfuerzo (trabajo) para levantar el bloque, como se aprecia en los resultados idénticos obtenidos al emplear la caída del bloque para llevar a cabo otra tarea.

En las figuras 11-2*a* y 11-2*b* se ejerció la fuerza paralela a la dirección del movimiento del bloque. Supóngase que en cambio, un trabajador haya aplicado una fuerza horizontal $\vec{F}$ al bloque para empujarlo pendiente arriba. Ahora la fuerza y el desplazamiento siguen distintas direcciones (Fig. 11-3). El componente de fuerza F sen θ perpendicular al plano, no influye en el levantamiento del bloque. Sólo el componente F cos θ en dirección del desplazamiento realiza trabajo en esta acción.

Examinemos el caso arbitrario descrito gráficamente en la figura 11-4. Una cuenta se desliza sin fricción por una delgada varilla horizontal. Pasa de A a B, que representamos mediante el vector de desplazamiento $\vec{s}$. Un agente externo ejerce una fuerza constante $\vec{F}$ sobre ella; $\vec{F}$ forma un ángulo ϕ con el vector de desplazamiento. Sólo el componente de F cos ϕ a lo largo del vector de desplazamiento contribuye al trabajo, de modo que el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ es

$$W = (F \cos \phi)s = Fs \cos \phi \qquad (\text{fuerza constante}). \quad (11\text{-}2)$$

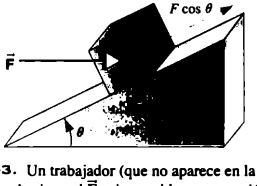


FIGURA 11-3. Un trabajador (que no aparece en la figura) ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre un bloque, empujándolo por la pendiente.

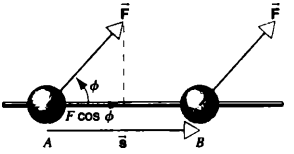


FIGURA 11-4. Una cuenta se desliza por una varilla delgada de A a B. Una fuerza constante $\vec{F}$ que forma un ángulo ϕ con el alambre, actúa sobre ella en todos los puntos entre A y B.

En la ecuación 11-2 se incluye el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$. Puede haber varias fuerzas que operen sobre el objeto; por ejemplo, además de la fuerza $\vec{F}$ en la figura 11-3, vemos la fuerza normal $\vec{N}$, la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ y quizá también la fuerza de fricción $\vec{f}$. Hay que calcular por separado el trabajo correspondiente a las fuerzas que intervienen.

Nótense varias características de la ecuación 11-2:

1. Si $F = 0$, $W = 0$. Debe ejercerse una fuerza para poder realizar un trabajo.

2. Si $s = 0$, $W = 0$. Para que una fuerza efectúe un trabajo, su punto de aplicación ha de recorrer alguna distancia.

3. Si $\phi = 90°$, $W = 0$. Para que una fuerza lleve a cabo un trabajo, un componente suyo deberá actuar en dirección del desplazamiento (o en la dirección opuesta). Si una fuerza siempre es perpendicular a la dirección del movimiento, el trabajo hecho por ella será cero.

4. Cuando $\phi = 0°$, $W = Fs$. Si la fuerza y el desplazamiento siguen la misma dirección, la ecuación 11-2 se reduce a la ecuación 11-1.

5. Cuando $\phi = 180°$, $W = -Fs$. La fuerza realizará trabajo *negativo* si opera en dirección contraria al desplazamiento. Por ejemplo, en la figura 11-2*a*, una fuerza gravitacional mg (que no aparece en ella) opera hacia abajo sobre el bloque. Conforme éste asciende una distancia h, el trabajo que ejecuta es $-mgh$.

En la figura 11-5 se da un ejemplo de estos conceptos. En la figura 11-5*a*, un bloque resbala hacia abajo por un plano. La fuerza gravitacional $m\vec{g}$ efectúa trabajo positivo, la fuerza de fricción $\vec{f}$ trabajo negativo y la fuerza normal $\vec{N}$ trabajo cero. En la figura 11-5*b*, la tensión en la cuerda $\vec{T}$ no es una fuerza constante, porque su dirección cambia aunque su magnitud permanezca constante. Pero si imaginamos una trayectoria circular que habrá de dividirse en una serie de desplazamientos infinitesimales, los pequeños arcos (tangentes al círculo) serán perpendiculares a $\vec{T}$, que actúa en dirección radial. Así pues, el trabajo hecho por la tensión es cero.

Nótese que podemos escribir la ecuación 11-2 como $(F \cos \phi)(s)$, o bien, $(F)(s \cos \phi)$. Ello significa que el trabajo puede calcularse en dos formas que dan el mismo resultado: multiplicamos la magnitud del desplazamiento por el componente de la fuerza en dirección de él, o multiplicamos la magnitud de la fuerza por el componente del desplazamiento en dirección de la fuerza. Las dos formas nos recuerdan una parte importante de la definición de trabajo: debe haber un componente

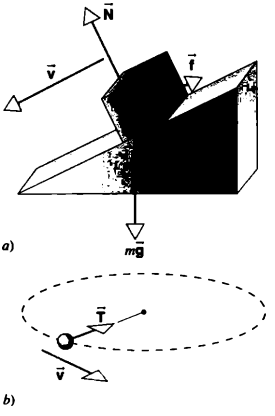


FIGURA 11-5. *a*) Un bloque se desliza hacia abajo por un plano; sobre él operan tres fuerzas: la gravedad ($m\vec{g}$), proveniente de la Tierra; la fricción ($\vec{f}$), proveniente del plano, y la fuerza normal ($\vec{N}$) también proveniente del plano. *b*) Un cuerpo atado a una cuerda gira en un círculo horizontal, sobre el que opera sólo la tensión ($\vec{T}$) debida a la cuerda.

de $\vec{s}$ en dirección de $\vec{F}$, y también un componente de $\vec{F}$ en dirección de $\vec{s}$ (Fig. 11-6).

La definición que dimos del trabajo (Ec. 11-2), muestra que éste es un concepto muy útil en física. Nuestra definición especial de la palabra "trabajo" no corresponde a su uso coloquial. Ello puede causar confusión. Una persona que sostenga un gran peso en reposo en el aire (Fig. 11-7), quizá trabaje

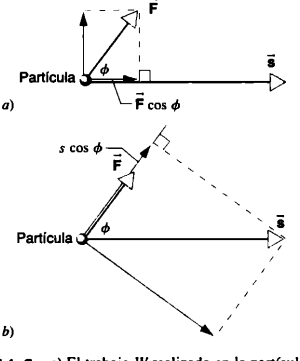


FIGURA 11-6. *a*) El trabajo W realizado en la partícula por la fuerza $\vec{F}$ interpretado como $W = (F \cos \phi)(s)$. *b*) El trabajo W interpretado como $W = (F)(s \cos \phi)$.

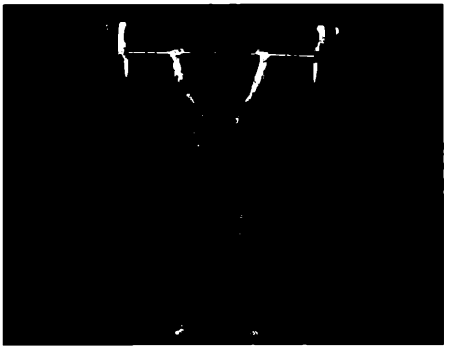


FIGURA 11-7. Un levantador de pesas sostiene un peso arriba de la cabeza. En esta configuración no realiza trabajo alguno, según nuestra definición del trabajo.

duro en el sentido fisiológico, pero desde el punto de vista físico no estará efectuando ningún trabajo sobre la pesa. Esto lo decimos porque la pesa no se mueve.

¿Por qué entonces el levantador de pesas se cansa y termina perdiendo la capacidad de soportar las pesas? Si examinamos sus músculos, descubriremos que se ejecuta trabajo a nivel microscópico, aunque la pesa no se mueve. El músculo no es un soporte sólido, y no puede sostener una carga en forma estática. Las fibras musculares se relajan y contraen varias veces, y se hace trabajo en cada contracción. Este trabajo microscópico consume el suministro interno de energía, y el levantador de pesas poco a poco se agota demasiado y no logra sostenerlas. En el este capítulo no nos ocuparemos de esta forma "interna" del trabajo. Empleamos el término *trabajo* en el sentido estricto de la ecuación 11-2, para que no desaparezca cuando no se mueva el cuerpo sobre el cual actúa la fuerza.

Nótese que, a diferencia de propiedades como masa, volumen o temperatura, el trabajo no es una propiedad intrínseca de los cuerpos. Por ejemplo, no podemos decir que el cuerpo gane, pierda o contenga cierta cantidad de trabajo cuando recorre una distancia mientras una fuerza opera sobre él. El trabajo se asocia a la fuerza que actúa sobre el cuerpo o al agente que la aplica.

La unidad de trabajo depende del que realice una fuerza unitaria, al hacer que el cuerpo recorra una distancia unitaria en dirección de la fuerza. La unidad de trabajo en el SI es el *newton-metro*, denominado *joule* (cuya abreviatura es J). En el sistema inglés es el pie-libra. En el sistema cgs es el dina-centímetro, denominado *erg*. Utilizando las relaciones entre newton, dina y libra y las existentes entre metro, centímetro y pie, obtenemos 1 joule = 10^7 erg = 0.7376 ft · lb.

Una unidad conveniente de trabajo cuando se manejan partículas atómicas o subatómicas es el *electrón-volt* (cuya abreviatura es eV), donde 1 eV = 1.60×10^{-19} J. El trabajo necesario para extraer un electrón externo en un átomo tiene una magnitud típica de varios eV. El que se requiere para extraer un protón o neutrón de un núcleo tiene una magnitud típica de varios MeV (10^6 eV). El que se requiere para acelerar un electrón en el acelerador líneal de 2 millas de largo de Stanford tiene varios GeV (10^9 eV). El que se necesita para acelerar un protón en el acelerador Fermilab tiene aproximadamente 10^{12}eV (1 TeV).

PROBLEMA RESUELTO 11-1. Un bloque de masa m = 11.7 kg se empuja una distancia de s = 4.65 m por una pendiente, de manera que suba una distancia de h = 2.86 m (Fig. 11-8*a*). Suponiendo que las superficies no tengan fricción, calcule cuánto trabajo realizaría en el bloque si aplicara una fuerza paralela a la pendiente para empujarlo hacia arriba con rapidez constante.

Solución En la figura 11-8*b* se ilustra un diagrama de cuerpo libre del bloque. Debemos encontrar primero F, la magnitud de la fuerza que empuja el bloque pendiente arriba. Como el movimiento no es acelerado (suponemos que la rapidez es constante), la fuerza neta paralela al plano deberá ser cero. Escogemos el eje x paralelo al plano, con su dirección positiva hacia arriba. Entonces la fuerza neta en el plano será $\Sigma Fx = F - mg \operatorname{sen} \theta$. Con $a_x = 0$, la segunda ley de Newton nos da $F - mg \operatorname{sen} \theta = 0$, o

$$F = mg \operatorname{sen} \theta = (11.7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)\left(\frac{2.86 \text{ m}}{4.65 \text{ m}}\right) = 70.5 \text{ N}.$$

Entonces, según la ecuación 11-2 con $\phi = 0°$, el trabajo efectuado por $\vec{F}$ es

$$W = Fs \cos 0° = (70.5 \text{ N})(4.65 \text{ m}) = 328 \text{ J}.$$

Nótese que el ángulo ϕ (= 0°) empleado en esta expresión, es el ángulo entre la fuerza aplicada y el desplazamiento del bloque, ambos paralelos a la pendiente. No confunda el ángulo ϕ con el ángulo θ de la pendiente.

Si quisiéramos elevar el bloque verticalmente con rapidez constante sin usar la pendiente, el trabajo que se haga será vertical al componente de la fuerza que ejerzamos sobre el bloque, la cual es igual a mg multiplicada por la distancia vertical h, es decir,

$$W = mgh = (11.7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.86 \text{ m}) = 328 \text{ J},$$

lo mismo que antes. La única diferencia, radica en que la pendiente permite que el bloque lo alce una fuerza más pequeña (F = 70.5 N)

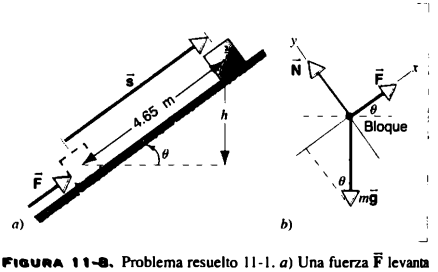


FIGURA 11-8. Problema resuelto 11-1. *a*) Una fuerza $\vec{F}$ levanta un bloque por un plano hacia arriba, a través de un desplazamiento $\vec{s}$. *b*) Diagrama de cuerpo libre del bloque.

que la que se necesitaría sin la pendiente (mg = 115 N). En cambio, la distancia que debe empujarse el bloque pendiente arriba (4.65 m), es mayor que la que lo moveríamos si lo alzáramos directamente (2.86 m.)

PROBLEMA RESUELTO 11-2. Un niño jala un trineo de 5.6 kg, una distancia de s = 12 m con rapidez constante sobre una superficie horizontal. ¿Qué trabajo realiza en él si el coeficiente de fricción cinética μ_k es 0.20, y si la cuerda forma un ángulo de ϕ = 45° con la horizontal?

Solución La situación se describe en la figura 11-9*a* y las fuerzas que actúan sobre el trineo aparecen en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-9*b*. $\vec{F}$ es la tracción del niño, $m\vec{g}$ es el peso del trineo, $\vec{f}$ es la fuerza de fricción y $\vec{N}$ es la fuerza normal que la superficie ejerce sobre el trineo. Si queremos evaluar el trabajo, hay que encontrar primero la magnitud de la fuerza F. Al escoger los ejes x y y en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-9*b*, los componentes de la fuerza neta son $\Sigma F_x = F\cos\phi - f$ y $\Sigma F_y = F \operatorname{sen}\phi + N - mg$. Con $a_x = 0$ y $a_y = 0$, la segunda ley de Newton nos da

$$F\cos\phi - f = 0 \quad \text{y} \quad F\operatorname{sen}\phi + N - mg = 0.$$

La fuerza de fricción se relaciona con la fuerza normal, por medio de $f = \mu_k N$. Al combinar las tres ecuaciones anteriores, podemos eliminar f y N para encontrar una expresión de F:

$$F = \frac{\mu_k mg}{\cos\phi + \mu_k \operatorname{sen}\phi}.$$

Con μ_k = 0.20, mg = (5.6 kg)(9.8 m/s^2) = 55 N, y ϕ = 45° obtenemos

$$F = \frac{(0.20)(55\text{ N})}{\cos 45° + (0.20)(\operatorname{sen} 45°)} = 13\text{ N}.$$

Entonces, con s = 12 m y usando la ecuación 11-2, el trabajo efectuado por el niño sobre el trineo es

$$W = Fs\cos\phi = (13\text{ N})(12\text{ m})(\cos 45°) = 110\text{ J}.$$

El componente vertical de la tracción $\vec{F}$ no realiza trabajo sobre el trineo. Nótese, sin embargo, que aminora la fuerza normal entre el trineo y la superficie ($N = mg - F\operatorname{sen}\phi$) y, en consecuencia, reduce la magnitud de la fuerza de fricción ($f = \mu_k N$).

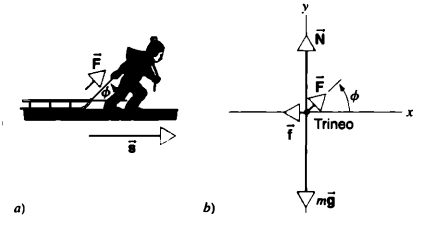


FIGURA 11-9. Problema resuelto 11-2. *a*) Un niño desplaza un trineo una magnitud $\vec{s}$, al tirar con una fuerza $\vec{F}$ de una cuerda que forma un ángulo ϕ con la horizontal. *b*) Diagrama de cuerpo libre del trineo.

¿Realizaría el niño más trabajo, menos trabajo o la misma cantidad de trabajo en el trineo, si $\vec{F}$ se aplicara horizontalmente y no a 45° respecto a la horizontal? ¿Efectúa trabajo en el trineo alguna de las otras fuerzas que actúan sobre él?

El trabajo como producto punto

El trabajo es una magnitud escalar; se caracteriza sólo por una magnitud y un signo. Pero se calcula combinando dos vectores ($\vec{F}$ y $\vec{s}$). En los capítulos 8 al 10 vimos la necesidad de multiplicar dos vectores para obtener un tercero, que expresamos en forma compacta como el producto vectorial o cruz (por ejemplo, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ o $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$). Aquí estamos multiplicando dos vectores para obtener un escalar. Una forma compacta de escribir lo anterior, consiste en hacerlo en función del producto *escalar* o *punto* de los dos vectores.

Consideremos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (Fig. 11-10) separados por un ángulo ϕ. El producto punto de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define en términos de la magnitud de A y B así

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi, \qquad (11\text{-}3)$$

que se lee "A punto B". Claro que podemos escribir lo anterior como $A(B\cos\phi)$ o como $B(A\cos\phi)$, lo cual indica que, el producto punto puede considerarse como el producto de la magnitud de un vector y como el componente del otro en dirección del primero, según se aprecia en la figura 11-10. La magnitud de A y de B siempre es positiva, pero el producto punto puede ser positivo, negativo o cero dependiendo del valor del ángulo ϕ. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí (ϕ = 90°), el producto punto será cero. A diferencia del producto cruz, el orden de los vectores no es importante en él, es decir, $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$. Nótese, asimismo, que el producto punto de un vector consigo mismo, es simplemente la magnitud al cuadrado del vector $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$.

Las propiedades anteriores del producto punto equivalen exactamente a las del trabajo, tal como lo definimos a partir de los vectores $\vec{F}$ y $\vec{s}$. Ello significa que podemos escribir la ecuación 11-2 así

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} \qquad \text{(fuerza constante)}. \qquad (11\text{-}4)$$

Si escribimos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de sus componentes ($\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$), el producto punto será

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad (11\text{-}5)$$

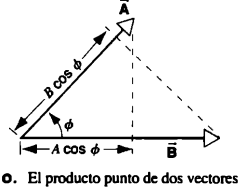


FIGURA 11-10. El producto punto de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, puede considerarse como el producto de la magnitud de un vector y el componente del otro en dirección del primero.

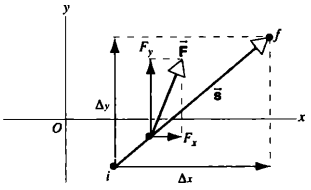


FIGURA 11-11. Aquí una partícula pasa de la ubicación inicial *i* a la ubicación final *f*, a través del desplazamiento $\vec{s}$ a medida que la fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre ella. Cuando la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento $\vec{s}$ siguen direcciones arbitrarias, podemos determinar el trabajo separando $\vec{F}$ y $\vec{s}$ en sus componentes *x* y *y*.

Para derivar la expresión anterior, utilizamos la ecuación 11-3 y encontramos los productos punto de los vectores unitarios: $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ y $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$. Si los vectores de fuerza y de desplazamiento se hallan en el plano *xy* (Fig. 11-11), podemos escribir el trabajo por medio de la ecuación 11-5; con $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ y $\vec{s} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$, tendremos

$$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y \qquad \text{(fuerza constante).} \qquad (11\text{-}6)$$

Los dos términos del lado derecho de la ecuación *no pueden* interpretarse como componente del trabajo. *Éste es un escalar, y los escalares carecen de componentes.* La ecuación 11-6 puede dar la impresión de que el valor del trabajo depende del sitio donde se tracen los ejes coordenados; sin embargo, la ecuación 11-2 muestra que no es así. En términos generales, *el valor del producto punto no depende de la elección de los ejes coordenados.*

Aunque la fuerza $\vec{F}$ es una invariante (tiene la misma magnitud y dirección con cualquier elección del marco de referencia inercial), no lo es el desplazamiento $\vec{s}$ de una partícula en determinado intervalo temporal. Desde distintos marcos, los observadores miden todos la misma $\vec{F}$, pero obtienen valores diferentes de la magnitud y de la dirección del desplazamiento $\vec{s}$. Por ello, el valor determinado para el trabajo, dependerá del marco de referencia inercial del observador. A distintos observadores el trabajo les parecerá positivo, negativo o cero. Este punto lo exponemos más a fondo en la sección 11-6.

11-3 POTENCIA

Al diseñar un sistema mecánico, a menudo hay que tener en cuenta no sólo cuánto trabajo ha de ejecutarse, sino también la rapidez con que debe hacerse. La misma cantidad se realiza al levantar un cuerpo a determinada altura, tanto si tardamos en ello 1 segundo o 1 año. Pero la *rapidez con que se efectúa* es muy diferente en ambos casos.

Definimos *potencia*, como la rapidez con que se lleva a cabo el trabajo. (Aquí consideramos exclusivamente la potencia *mecánica* que se origina en el trabajo mecánico. Una idea más general de potencia como energía aplicada por unidad de tiempo, nos permite ampliar el concepto e incluir la potencia eléctrica, la potencia solar y otras clases.) Si cierta fuerza realiza trabajo *W* en un cuerpo durante un tiempo *t*, la *potencia promedio* debida a ella será

$$P_{\text{pro}} = \frac{W}{t}. \qquad (11\text{-}7)$$

La *potencia instantánea P* es

$$P = \frac{dW}{dt}, \qquad (11\text{-}8)$$

donde *dW*, es la pequeña cantidad de trabajo ejecutado en el intervalo infinitesimal *dt*. Si la potencia es constante en el tiempo, entonces $P = P_{\text{pro}}$ y

$$W = Pt. \qquad (11\text{-}9)$$

La unidad de potencia en el SI es el joule por segundo y se conoce como *watt* (su abreviatura es W):

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s}.$$

Esta unidad se llama así, en honor de James Watt (1736-1819), quien introdujo importantes mejoramientos en los motores de vapor de su época. En el sistema inglés la unidad de potencia es 1 ft · lb/s, aunque una unidad más común, el *caballo de fuerza* (hp), se emplea generalmente para describir la potencia de aparatos como los motores eléctricos o de automóvil. Un caballo de fuerza es 550 ft · lb/s y equivale a unos 746 W.

El trabajo puede expresarse también en unidades de potencia × tiempo. Éste es el origen de la designación *kilowatt-hora*, con que las compañías eléctricas miden cuánto trabajo (en forma de energía eléctrica) se suministra a las casas. Un kilowatt-hora, es el trabajo efectuado en 1 hora por un agente que labore con una rapidez constante de 1 kW.

También podemos expresar la potencia aplicada a un cuerpo en función de su velocidad y de la fuerza que actúa sobre él. En un breve intervalo temporal *dt*, el cuerpo recorre una distancia $d\vec{s}$, y el trabajo efectuado en él es $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Podemos reescribir la ecuación 11-8 como

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt},$$

ecuación que, tras sustituir por $\vec{v}$ por $d\vec{s}/dt$, la velocidad queda así

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \qquad (11\text{-}10)$$

Si $\vec{F}$ y $\vec{v}$ son paralelas entre sí, esto puede escribirse

$$P = Fv. \qquad (11\text{-}11)$$

Nótese que la potencia puede ser negativa si $\vec{F}$ y $\vec{v}$ son antiparalelas. Aplicar potencia negativa a un cuerpo, significa hacer trabajo negativo en él: la fuerza que el agente externo ejerce en el cuerpo, sigue una dirección opuesta a su desplazamiento $d\vec{s}$ y por lo mismo contraria a $\vec{v}$.

PROBLEMA RESUELTO 11-3. Un elevador vacío pesa 5,160 N (1,160 lb). Está diseñado para transportar en 18 segundos, una carga máxima de 20 pasajeros de la planta al vigesimoquinto piso de un edificio. Suponiendo que el peso promedio de un pasajero sea 710 N

(160 lb), y que la distancia entre los pisos sea 3.5 m (11 ft), ¿qué potencia promedio ha de generar el motor del elevador? (Suponga que el trabajo que eleva el elevador se debe al motor y que el elevador no tiene contrapeso.)

Solución Suponemos que el elevador asciende a una velocidad constante, y que es posible prescindir de las distancias recorridas durante la aceleración y la desaceleración. Con una velocidad constante, la fuerza neta es cero, y por ello la fuerza ejercida por el motor tiene igual magnitud que el peso total del elevador y de los pasajeros: $F = 5160\ \text{N} + 20(710)\ \text{N} = 19{,}400\ \text{N}$. El trabajo que debe hacerse es

$$W = Fs = (19{,}400\ \text{N})(25 \times 3.5\ \text{m}) = 1.7 \times 10^6\ \text{J}.$$

Por tanto, la potencia promedio es

$$P_{\text{pro}} = \frac{W}{t} = \frac{1.7 \times 10^6\ \text{J}}{18\ \text{s}} = 94\ \text{kW}.$$

Esto equivale a 126 hp, más o menos la potencia generada por el motor de un automóvil. Por supuesto, las pérdidas por fricción y otras ineficiencias acrecentarán la potencia que el motor debe producir para levantar el elevador.

En la práctica, un elevador suele estar provisto de un contrapeso que cae a medida que asciende la cabina del elevador. La gravedad efectúa un trabajo *positivo* en el contrapeso que cae, y un trabajo *negativo* en el elevador que sube. De ahí que disminuya de modo considerable el trabajo que debe producir el motor, que es igual a la magnitud del trabajo *neto* realizado por la gravedad.

11-4 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Hasta ahora hemos tratado sólo del trabajo ejecutado por una fuerza *constante*. Ni la magnitud ni la dirección de muchas de las que hemos considerado antes, cambian a medida que el cuerpo se mueve; un buen ejemplo de ello, es la gravedad cerca de la superficie de la Tierra. Con todo, la magnitud de muchas otras fuerzas sí cambia con el desplazamiento del cuerpo, de ahí la necesidad de examinar la manera de evaluar el trabajo que llevan a cabo. Suponemos una situación unidimensional: la fuerza tiene sólo un componente x, y la partícula se mueve exclusivamente en la dirección x (positiva o negativa). Primero explicaremos el método general con que se analiza el trabajo realizado por una fuerza variable; después lo aplicaremos al análisis de un tipo importante de fuerza que todavía no hemos estudiado: la que ejerce un resorte cuando se estira o se comprime.

Supongamos que un cuerpo se desplaza por el eje x de x_i a x_f, mientras se le aplica una fuerza $F_x(x)$. Al escribirla como $F_x(x)$, indicamos que su magnitud varía (y posiblemente también su dirección) al ir cambiando su desplazamiento. En este análisis, nuestra estrategia consistirá en dividir el intervalo de x_i a x_f, en muchos intervalos más pequeños. En cada uno supondremos que la fuerza es aproximadamente constante (a pesar de que puede ser distinta en varios intervalos); en consecuencia, el trabajo en uno de ellos, puede calcularse mediante los métodos de las fuerzas constantes que expusimos antes en el capítulo. Con el tiempo los haremos infinitamente numerosos y tan pequeños que se esfumarán; esto nos llevará a los métodos de cálculo.

La curva suave de la figura 11-12, tiene una fuerza arbitraria $F_x(x)$ que opera sobre un cuerpo que pasa de x_i a x_f. Dividimos el desplazamiento total en un número de N intervalos pequeños de igual ancho δx (Fig. 11-12*a*). Consideremos el primer intervalo donde hay un desplazamiento pequeño δx, de x_i a $x_i + \delta x$. Este intervalo lo hacemos tan pequeño, que el componente x de la fuerza sea aproximadamente constante en el valor F_1. Después podemos utilizar la ecuación 11-6 para calcular el trabajo δW_1 de una fuerza en ese intervalo: $\delta W_1 = F_1\,\delta x$. Asimismo, en el segundo intervalo donde el cuerpo se mueve de $x_i + \delta x$ a $x_i + 2\delta x$, la fuerza es casi constante con el componente x F_2, y el trabajo de la fuerza en ese intervalo es $\delta W_2 = F_2\,\delta x$. Continuando así en todos los N intervalos, podemos calcular el trabajo total como la suma de esos términos:

$$\begin{aligned} W &= \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \cdots \\ &= F_1\,\delta x + F_2\,\delta x + F_3\,\delta x + \cdots \end{aligned}$$

o

$$W = \sum_{n=1}^{N} F_n\,\delta x. \qquad (11\text{-}12)$$

Si queremos hacer una mejor aproximación, dividimos el desplazamiento total de x_i a x_f en más intervalos como en la figura 11-12*b*, de modo que δx es más pequeña y que el valor

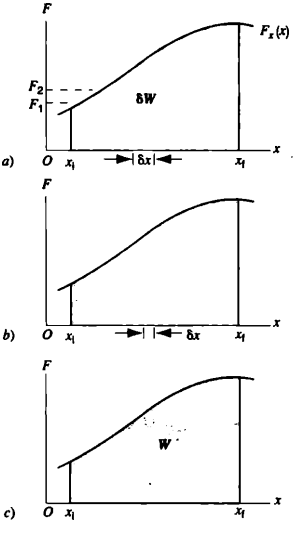


FIGURA 11-12. *a*) Para aproximar el área bajo la curva de la fuerza unidimensional variable $F_x(x)$, la región situada entre los límites x_i y x_f, se divide en varios intervalos de ancho δx. La suma de las áreas de las tiras rectangulares, es más o menos igual al área bajo la curva. *b*) Una mejor aproximación, se consigue empleando un número mayor de tiras más estrechas. *c*) El área real se obtiene en el límite $\delta x \to 0$.

de F_n en cada intervalo representa mejor la fuerza dentro de él. Es evidente que podemos obtener aproximaciones cada vez mejores, si hacemos δx cada vez menor, y así contamos con un número cada vez mayor de intervalos. Podemos conseguir un resultado exacto del trabajo efectuado por Fx, si suponemos que δx tienda a cero, y que los N intervalos lleguen al infinito. Por tanto, el resultado exacto será

$$W = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n \, \delta x. \qquad (11\text{-}13)$$

La relación

$$\lim \sum_{\delta x \to 0}^{N}{}_{n=1} F_n \, \delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\, dx$$

define la integral de F_x respecto a x de x_i a x_f. Desde el punto de vista numérico, la cantidad anterior es idéntica a la superficie existente bajo la curva de la fuerza y el eje x entre los límites x_i y x_f (Fig. 11-12*c*). De ahí que la integral pueda interpretarse gráficamente como un área. Podemos escribir el trabajo total hecho por F_x al desplazar un cuerpo de x_i a x_f, así

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\, dx. \qquad (11\text{-}14)$$

El signo de W se determina automáticamente en la ecuación 11-14, mediante el de F_x y con los puntos extremos del intervalo, x_i y x_f. Por ejemplo, si F_x siempre es positiva y si la partícula se mueve en la dirección positiva x ($x_f > x_i$), W será positivo.

Trabajo realizado por la fuerza de un resorte

En seguida examinamos un ejemplo de una fuerza variable unidimensional, la que ejerce un resorte cuando se le estira o comprime. La figura 11-13 muestra un cuerpo unido a un resorte. Cuando no se aplica fuerza alguna, el resorte no está estirado y el cuerpo se halla en $x = 0$. A esto lo llamamos estado *relajado*. Supóngase que se le aplica una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ al cuerpo, y el resorte se estira (Fig. 11-13*a*) o se comprime (Fig. 11-13*b*). El resorte ejerce una fuerza $\vec{F}_s$ que se opone a ella. La fuerza del resorte a veces recibe el nombre de *fuerza restauradora*, porque siempre opera en una dirección que regresa al cuerpo en su lugar anterior $x = 0$. Supondremos que el cuerpo se desplaza lentamente, de modo que consideraremos que siempre está en equilibrio. En este caso, $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_s$.

¿Cuál es la naturaleza de la fuerza ejercida sobre el cuerpo por el resorte cuando se estira o se comprime? Los experimentos revelan que la fuerza no es constante: cuanto más modifiquemos la longitud del resorte, mayor será la fuerza que ejerce (en forma equivalente, pudiéramos decir que mayor será la fuerza externa que debe aplicarse para cambiar la longitud). También descubrimos lo siguiente: con buena aproximación, en la generalidad de los resortes, la magnitud de esta fuerza varía *linealmente* con la distancia en que se extiende o se comprime respecto a su longitud relajada. En una dimensión, podemos escribir en la siguiente expresión el componente x de la fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo unido a él:

$$F_s = -kx, \qquad (11\text{-}15)$$

que se conoce como *ley de Hooke*. A la constante k de la ecuación 11-15, se le conoce como *constante de fuerza* del resorte (o, algunas veces, como *constante del resorte*), y su unidad en el SI es newtons por metro (N/m). Es una medida de la fuerza necesaria para estirar un resorte en cierta extensión; los resortes más rígidos poseen valores mayores de k. La ecuación 11-15 es válida, mientras no tengamos que estirarlo más allá de ciertos límites.

El signo de menos en la ecuación 11-15, nos recuerda que la dirección de la fuerza del resorte siempre es contraria al

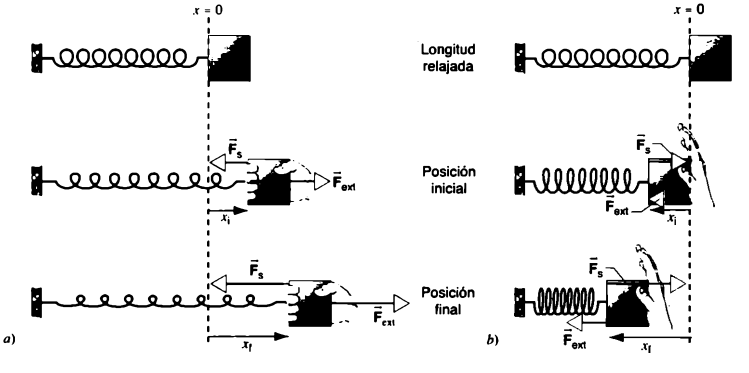


FIGURA 11-13. Un cuerpo sujetado a un resorte se encuentra en $x = 0$, cuando el resorte está relajado. Una fuerza externa hace pasar el cuerpo del desplazamiento inicial x_i al final x_f. El eje x es positivo a la derecha. *a*) Estiramiento. *b*) Compresión.

desplazamiento del cuerpo de su posición cuando el resorte se halla en estado relajado (que definimos como $x = 0$). Cuando está estirado y si usamos el sistema coordenado de la figura 11-13*a*, $x > 0$ y, en consecuencia F_s es negativa, lo cual indica que la fuerza del resorte actúa a la izquierda. Cuando está comprimido como en la figura 11-13*b*, entonces $x < 0$ y $F_s > 0$.

La ecuación 11-14 sirve para calcular el trabajo ejecutado por la fuerza del resorte en la figura 11-13*a*. Estirémoslo de su estado inicial (donde $x = x_i$) a su estado final (donde $x = x_f$). El trabajo que la fuerza del resorte realiza durante este desplazamiento en el cuerpo es:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s\,dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = -\tfrac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \quad (11\text{-}16)$$

La ecuación 11-16 muestra que el trabajo del resorte es negativo cuando $x_f > x_i$, como en el caso de la figura 11-13*a*; la dirección de $\vec{F}_s$ es opuesta al desplazamiento, y por ello el valor negativo de W corresponde a la explicación que se da después de la ecuación 11-2.

Si la fuerza externa comprime el resorte como en la figura 11-13*b*, x_i y x_f son negativos. No obstante, $|x_f| > |x_i|$, y una vez más la ecuación 11-16 muestra que es negativo el trabajo realizado en el cuerpo por el resorte. Así pues, la ecuación 11-16 conserva su validez sin importar cómo se mueve el cuerpo bajo la acción de la fuerza del resorte. Nótese que, según esa ecuación, el trabajo de dicha fuerza es cero si el cuerpo pasa de un desplazamiento positivo $+x$ a un desplazamiento negativo $-x$ de igual magnitud. ¿Puede explicar esto atendiendo a la fuerza ejercida por el resorte?

Si comenzamos a estirar o comprimir en la posición relajada ($x_i = 0$), y movemos el cuerpo una distancia x,

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kx^2. \quad (11\text{-}17)$$

Puesto que x se eleva al cuadrado en la ecuación 11-17, el trabajo efectuado por el resorte en el cuerpo tiene la misma longitud y signo en el estiramiento y la compresión de la misma distancia x.

Con $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_s$, el trabajo de la fuerza externa en el cuerpo es positivo, cuando el que realiza la fuerza del resorte es negativo. Por tanto, $W_{ext} > 0$ en los dos casos de la figura 11-13.

En la figura 11-14 se ve el aspecto que la figura 11-12 tendría con la fuerza del resorte. Las regiones sombreadas representan el trabajo negativo de ella en los dos casos de la figura 11-13. Mediante cálculos geométricos se podría demostrar que las regiones sombreadas corresponden al trabajo de la ecuación 11-16, y que los signos también se dan correctamente.

PROBLEMA RESUELTO 11-4. Un resorte pende verticalmente en estado relajado. Un bloque de masa $m = 6.40$ kg está conectado a él, pero se sostiene en su lugar, de modo que al inicio el resorte no se estira. A continuación se baja lentamente la mano que sostiene el bloque (Fig. 11-15*a*), así que el bloque desciende a velocidad constante hasta que alcanza un punto donde cuelga en equilibrio una vez quitada la mano. En este momento se mide el resorte y se descubre que se estiró una distancia $d = 0.124$ m respecto a la longitud en estado relajado. Calcule el trabajo que durante el proceso efectúa en el bloque *a*) la gravedad, *b*) el resorte y *c*) la mano.

Solución *a*) Partiendo de la condición de equilibrio, podemos encontrar la constante de fuerza del resorte que no está dada en el problema. Suponiendo que el eje y sea positivo ascendente, la fuerza neta en la dirección y en equilibrio (Fig. 11-15*b*) es $\Sigma F_y = kd - mg$. En la posición de equilibrio, $\Sigma F_y = 0$, así que $kd = mg$ o

$$k = mg/d = (6.40\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)/(0.124\text{ m}) = 506\text{ N/m}.$$

Para determinar el trabajo realizado por la gravedad W_g, aclaramos que es una fuerza constante, y que la fuerza y el desplazamiento son paralelos; podemos, pues, utilizar la ecuación 11-1:

$$W_g = Fs = mgd = (6.40\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.124\text{ m}) = +7.78\text{ J}.$$

El resultado es positivo, porque la fuerza y el desplazamiento siguen la misma dirección.

b) Para obtener el trabajo W_s efectuado por el resorte, empleamos la ecuación 11-17 con $x = -d$:

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}(506\text{ N/m})(0.124\text{ m})^2 = -3.89\text{ J}.$$

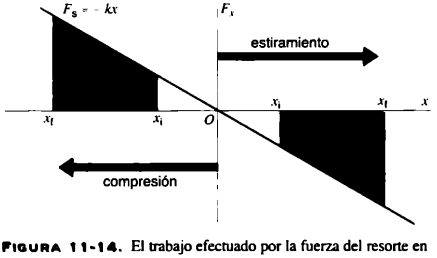


FIGURA 11-14. El trabajo efectuado por la fuerza del resorte en el cuerpo al pasar éste de x_i a x_f, es igual al área bajo la gráfica de $F_s = -kx$ situada entre x_i y x_f. Las áreas sombreadas representan el trabajo negativo efectuado por el resorte en las figuras 11-13*a* y 11-13*b*.

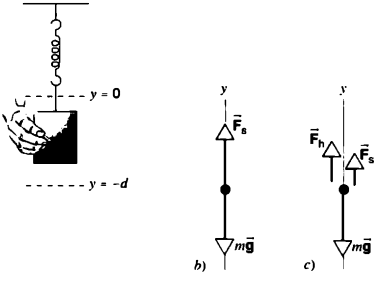


FIGURA 11-15. Problema resuelto 11-4. *a*) Una mano baja un bloque sujetado a un resorte. *b*) Diagrama de cuerpo libre del bloque en su posición de equilibrio. *c*) Diagrama de cuerpo libre del bloque al bajarlo.

El resultado es negativo, porque la fuerza y el desplazamiento siguen direcciones contrarias.

c) Para calcular el trabajo realizado por la mano, se necesita una fuerza ascendente F_h ejercida por ella. A medida que bajemos el bloque con rapidez constante, $a_y = 0$. Con base en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-15*c*, la fuerza neta durante este proceso es $\Sigma F_y = F_s + F_h - mg$, así que $F_h = mg - F_s$. Nótese que, hasta que el bloque alcance su posición de equilibrio, $mg > F_s$, así que $F_h > 0$ como cabría esperar (F_h tiene un componente positivo, y porque actúa hacia arriba). Podemos determinar el trabajo hecho por la mano, mediante una integral como la de la ecuación 11-14: $W_h = \int F_h(y)\,dy$ con $F_h = mg - (-ky)$:

$$W_h = \int_0^{-d} (mg + ky)dy = mg(-d) + \tfrac{1}{2}k(-d)^2 = -3.89\ \text{J}.$$

Nótese que $W_s + W_g + W_h = 0$. ¿Puede explicar esto?

11-5 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE: EL CASO BIDIMENSIONAL (Opcional)

La fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula, puede cambiar de dirección y también de magnitud; la partícula puede desplazarse en una trayectoria curva. Para calcular el trabajo en este caso general, se divide la trayectoria en muchos desplazamientos pequeños $\delta\vec{s}$, tangentes todos a la trayectoria y apuntando en dirección del movimiento. La figura 11-16 muestra dos desplazamientos en una situación particular; muestra asimismo, la fuerza $\vec{F}$ y el ángulo ϕ entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$ en cada lugar. Podemos determinar el trabajo δW realizado sobre la partícula durante un desplazamiento $\delta\vec{s}$ partiendo de

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{s} = F\cos\phi\ \delta s. \qquad (11\text{-}18)$$

Aquí $\vec{F}$ es la fuerza en el sitio de $\delta\vec{s}$. El trabajo que una fuerza variable $\vec{F}$ efectuado en la partícula cuando ésta pasa de *i* a *f* en la figura 11-16, se obtiene aproximadamente sumando los elementos del trabajo realizado en los segmentos lineales que forman la trayectoria de *i* a *f*. Si los segmentos lineales $\delta\vec{s}$ se vuelven infinitesimalmente pequeños, pueden ser reemplazados con diferenciales $d\vec{s}$, y la suma sobre los segmentos lineales se convierte en una integral, como en la ecuación 11-14. Entonces el trabajo se obtiene de

$$W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_i^f F\cos\phi\ ds. \qquad (11\text{-}19)$$

No podemos evaluar esta integral, mientras no podamos decir cómo F y ϕ varían en la ecuación 11-19 de un punto a otro a lo largo de la trayectoria; las dos son funciones de las coordenadas x y y de la partícula en la figura 11-16.

Podemos obtener una expresión equivalente a la ecuación 11-19, escribiendo $\vec{F}$ y $d\vec{s}$ en función de sus componentes. Por tanto, $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$ y $d\vec{s} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}$, así que $\vec{F}\cdot d\vec{s} = F_x\,dx + F_y\,dy$. En esta evaluación recordemos que $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$ y $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} = 0$. Al sustituir este resultado en la ecuación 11-19, obtenemos

$$W = \int_i^f (F_x\,dx + F_y\,dy). \qquad (11\text{-}20)$$

El resultado anterior se parece a la ecuación 11-6, que se obtuvo con fuerzas constantes. La ecuación 11-20 se reduce a ella, cuando la fuerza es constante. Las integrales como las de las ecuaciones 11-19 y 11-20, reciben el nombre de *integrales de línea;* para evaluarlas hay que saber cómo $F\cos\phi$ o F_x y F_y varían a medida que la partícula se desplaza sobre una línea (o curva) de una forma funcional $y(x)$. Es fácil la extensión de la ecuación 11-20 en tres dimensiones.

FIGURA 11-16. Una partícula pasa del punto *i* al punto *f* en la trayectoria aquí mostrada. Durante su movimiento, sobre ella actúa una fuerza $\vec{F}$, cuya magnitud y dirección varían. Conforme $\delta\vec{s} \to 0$, reemplazamos el intervalo por $\delta\vec{s}$, el cual sigue la dirección de la velocidad instantánea, y por lo mismo es tangente a la trayectoria. Ésta se divide en muchos intervalos pequeños $\delta\vec{s}$.

PROBLEMA RESUELTO 11-5. Un objeto pequeño de masa *m*, está suspendido de una cuerda de longitud *L*. Al objeto lo mueve lateralmente una fuerza *F* que siempre es horizontal, hasta que la cuerda finalmente forma un ángulo ϕ_m con la vertical (Fig. 11-17*a*). El desplazamiento se consigue con una pequeña rapidez constante. Determine el trabajo realizado por todas las fuerzas que operan sobre el objeto.

Solución El movimiento es a lo largo de un arco de radio *L*, y el desplazamiento $d\vec{s}$ siempre se da en él. En un punto intermedio del movimiento, la cuerda forma un ángulo ϕ con la vertical, y en el diagrama

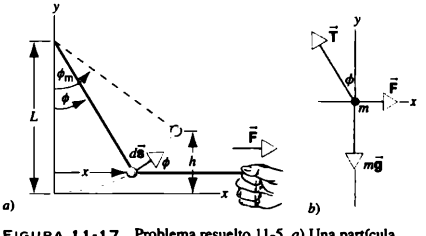


FIGURA 11-17. Problema resuelto 11-5. *a*) Una partícula cuelga de una cuerda de longitud *L* y una fuerza horizontal $\vec{F}$ tira de ella a un lado. El ángulo máximo alcanzado es ϕ_m. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la partícula.

de cuerpo libre de la figura 11-17*b*; al aplicar la segunda ley de Newton, vemos que con $a_x = 0$ y $a_y = 0$

componente x: $F - T \operatorname{sen} \phi = 0,$

componente y: $T \cos \phi - mg = 0.$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores para eliminar T, tenemos

$$F = mg \tan \phi.$$

Dado que F actúa sólo en la dirección x, podemos usar la ecuación 11-20 con $F_x = F$ y $F_y = 0$ para encontrar el trabajo hecho por F. Así

$$W_F = \int F\,dx = \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi\,dx.$$

Para evaluar la integral sobre ϕ, hay que tener una variable de integración simple; optamos por definir x en función de ϕ. En una posición intermedia arbitraria cuando la coordenada horizontal es x, vemos que $x = L \operatorname{sen} \phi$, y por tanto $dx = L \cos \phi\,d\phi$. Al sustituir para dx, podemos llevar a cabo la integración:

$$\begin{aligned} W_F &= \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi\,(L \cos \phi\,d\phi) \\ &= mgL \int_0^{\phi_m} \operatorname{sen} \phi\,d\phi = mgL(-\cos \phi)\Big|_0^{\phi_m} \\ &= mgL(1 - \cos \phi_m). \end{aligned}$$

En la figura 11-17*a*, vemos que $h = L(1 - \cos \phi_m)$ y, por tanto,

$$W_F = mgh.$$

El trabajo W_g realizado por la fuerza gravitacional (constante) mg, puede evaluarse aplicando una técnica similar basada en la ecuación 11-20 (haciendo $F_x = 0$, $F_y = -mg$) para obtener $W_g = -mgh$ (véase Ej. 25). Se emplea el signo menos, porque la dirección del desplazamiento vertical es contraria a la de la fuerza gravitacional. El trabajo W_T hecho por la tensión de la cuerda es cero, ya que $\vec{T}$ es perpendicular al desplazamiento $d\vec{s}$ en todos los puntos del movimiento. Ahora vemos que el trabajo total es cero: $W_{neto} = W_F + W_g + W_T = mgh - mhg + 0 = 0$. ¿Puede explicar esto?

Nótese que en este problema el trabajo (positivo) efectuado por la fuerza vertical $\vec{F}$, cancela efectivamente el trabajo (negativo) ejecutado por la fuerza vertical $m\vec{g}$. Esto puede deberse a que el trabajo es un *escalar:* no tiene dirección ni componentes. El movimiento de la partícula depende del trabajo *total* que se efectúe en ella, o sea, la suma escalar de los valores del trabajo relacionados con cada una de las fuerzas.

11-6 ENERGÍA CINÉTICA Y TEOREMA DE TRABAJO-ENERGÍA

Como vimos en el Capítulo 3, cuando aplicamos una fuerza externa neta a un cuerpo, éste acelera conforme a la segunda ley de Newton. Si la aplicamos en un intervalo medido de distancia o de tiempo, la velocidad del cuerpo pasa de su valor inicial $\vec{v}_i$ a su valor final $\vec{v}_f$.

En el capítulo estudiaremos otra forma de describir la misma situación usando el lenguaje del trabajo y de la energía, no el de la fuerza y aceleración. Ya hemos hablado del trabajo, y de cómo calcular el que realiza una fuerza en varias situaciones. Ahora redondearemos el análisis introduciendo otra clase de energía, la *energía cinética* o del movimiento; vamos a explicar la manera en que la energía cinética de un cuerpo se relaciona con el trabajo hecho en él.

Hasta ahora hemos venido tratando del trabajo efectuado por una fuerza que puede actuar sobre un cuerpo. A continuación queremos examinar el efecto combinado de *todas* esas fuerzas. Por lo pronto, haremos una suposición simplificadora: *sólo fuerzas constantes actúan sobre el cuerpo.* Más adelante demostraremos en esta sección, que se obtiene el mismo resultado cuando intervienen fuerzas variables.

El primer objetivo, es determinar el *trabajo neto* proveniente de todas las fuerzas que operan sobre el cuerpo. Esto podemos hacerlo en dos formas: 1) Calcular la fuerza neta $\vec{F}_{neta} = \Sigma \vec{F}$, y luego calcular el trabajo $W_{neto} = \vec{F}_{neta} \cdot \vec{s}$, hecho por ella en el cuerpo a medida que éste recorre un desplazamiento $\vec{s}$, o 2) Calcular el que realizan las fuerzas individuales ($W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{s}$, $W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{s}$, etc.), sumando después para encontrar el trabajo neto: $W_{neto} = W_1 + W_2 + \cdots$. Los dos métodos producen resultado idéntico, y la elección entre ellos se basa principalmente en la facilidad con que se aplican.

Conforme a la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{neto} = m\vec{a}$. A medida que el cuerpo recorre el desplazamiento $\vec{s}$, esta fuerza neta cambia su velocidad de $\vec{v}_i$ a $\vec{v}_f$. Con fuerzas constantes, la aceleración es constante, y por ello podemos emplear las relaciones de la sección 4-1 entre velocidad y aceleración. Mediante la ecuación 4-1 podemos obtener $\vec{a} = (\vec{v}_f - \vec{v}_i)/\Delta t$, donde Δt es el intervalo temporal para que el cuerpo se mueva a través del desplazamiento $\vec{s}$. Al combinar las ecuaciones 4-1 y 4-2, obtenemos $\vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{v}_i + \vec{v}_f)\Delta t$, que también puede obtenerse de la ecuación 2-7 y la generalización tridimensional de la ecuación 2-27: $\vec{v}_{pro} = \vec{s}/\Delta t = \frac{1}{2}(\vec{v}_i + \vec{v}_f)$. Por tanto, tenemos

$$W_{neto} = \vec{F}_{neta} \cdot \vec{s} = m\vec{a} \cdot \vec{s} = m\frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{\Delta t} \cdot \frac{(\vec{v}_i + \vec{v}_f)\Delta t}{2}. \tag{11-21}$$

Al multiplicar los productos punto tenemos $(\vec{v}_f - \vec{v}_i)\cdot(\vec{v}_i + \vec{v}_f) = \vec{v}_f \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_f$. Una de las propiedades del producto punto de dos vectores, es que no importa el orden de los vectores, es decir, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. (Esto *no* se aplica al producto *cruz.*) De ahí que se cancelen los términos primero y cuarto de la suma. Además, el producto punto de un vector cualquiera, es simplemente el cuadrado de la magnitud del vector como se aprecia en la ecuación 11-3; tenemos pues, $\vec{v}_f \cdot \vec{v}_f = v_f^2$ y $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_i^2$. Al hacer estas sustituciones en la ecuación 11-21, obtenemos

$$W_{net} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2. \tag{11-22}$$

Definimos la magnitud $\frac{1}{2}mv^2$, como la *energía cinética* K de un cuerpo de masa m que se mueve con la rapidez v:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{11-23}$$

La energía cinética tiene las mismas dimensiones que el trabajo y la medimos con las mismas unidades (joule, erg, pie-libra, electrón-volt). Igual que el trabajo, es una cantidad escalar. De hecho, la representamos como un producto punto entre dos vectores: $K = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$, como lo hicimos con el tra-

bajo y la potencia (Ecs. 11-4 y 11-10). Por medio de la ecuación 11-5, también podemos escribir el producto punto en función de los componentes de los vectores, de manera que $K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$. Sin embargo, los términos individuales del lado derecho *no* representan los componentes de la energía cinética. Por ser ésta una cantidad escalar, *no tiene dirección ni componentes.* Nótese asimismo que, a diferencia del trabajo, la *energía cinética no puede ser negativa nunca.*

En términos de las energías cinéticas inicial y final $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$ y $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$, podemos reescribir así la ecuación 11-23

$$W_{neto} = \Delta K = K_f - K_i. \qquad (11\text{-}24)$$

La ecuación 11-24 es la representación matemática de un resultado importante denominado *teorema de trabajo-energía:*

El trabajo neto realizado por las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es igual al cambio de su energía cinética.

Aunque el teorema lo obtuvimos para fuerzas constantes, en general se aplica también a fuerzas no constantes. Más adelante ofreceremos en esta sección una prueba más general. A semejanza de la segunda ley de Newton, que utilizamos al obtenerlo, el teorema se aplica sólo a las partículas o cuerpos que se comportan como ellas. Esta restricción se analiza más a fondo al final de la sección.

La forma del teorema de trabajo-energía se parece al de impulso-momento (Ec. 6-5), $\vec{J}_{neto} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$, a pesar de que se ocupa de cantidades escalares (W y K), y de que esta última se ocupa de vectores ($\vec{J}$ y $\vec{p}$). Los dos se fundamentan en la segunda ley de Newton, y no son más que otra forma de señalar que una propiedad del cuerpo se relaciona con sus cambios de velocidad (energía cinética o momento), debidos a la fuerza neta que opera sobre el cuerpo. Conducen a una importante ley de conservación: el momento de un sistema de partícula permanece constante si el impulso neto es cero, y la energía cinética de un sistema de partículas permanece constante si el trabajo neto es cero.

La energía cinética es una de muchas modalidades de la energía que pueden asociarse a un cuerpo. Por lo regular, una forma de energía se relaciona con un estado o condición del cuerpo: su estado de movimiento, su ubicación (por ejemplo, su altura en la gravedad de la Tierra), su temperatura, el flujo de la corriente eléctrica que lo cruza, etc. Más adelante se hace referencia a éstas y otras clases de energía, junto con una ley de conservación más general que la ecuación 11-24.

La energía puede transferirse de un cuerpo a otro o convertirse de una forma en otra. Una forma en que se realiza esto, consiste en realizar trabajo. Cuando trabajamos en un cuerpo aumentamos su energía cinética. ¿De dónde proviene esa energía? Si lo empujamos con las manos, se origina en el depósito interno de energía corporal; si usamos un motor, se origina en la energía eléctrica, la cual a su vez procede del combustible de la planta eléctrica. Así pues, tenemos otra definición de trabajo:

El trabajo es una forma de transferir energía a un cuerpo, o de un cuerpo debido a una fuerza que actúa sobre él.

Hay otra modalidad de transferir energía entre objetos, que nace de una diferencia de temperatura entre ellos. A este tipo de transferencia se le llama *calor*, y se explica en el Capítulo 13.

Cuando la magnitud de la velocidad de un cuerpo es constante, la energía cinética no cambia, y por lo mismo la fuerza resultante no realiza trabajo. Por ejemplo, en el movimiento circular uniforme, la fuerza resultante se dirige hacia el centro del círculo y siempre forma ángulo recto con la dirección del movimiento. No realiza trabajo en el cuerpo: cambia la dirección de la velocidad de éste pero no su magnitud. Sólo cuando la fuerza resultante tiene un componente en dirección del movimiento, realiza trabajo en la partícula y modifica su energía cinética.

El teorema de trabajo-energía *no* constituye una ley nueva e independiente de la mecánica clásica. Nos hemos limitado a *definir* el trabajo (Ec. 11-2, por ejemplo) y la energía cinética (Ec. 11-23), y simplemente *hemos obtenido* la relación entre ambos partiendo de la segunda ley de Newton. Es un teorema útil para resolver problemas en que el trabajo neto hecho en el cuerpo por las fuerzas externas se calcula fácilmente, y en que queremos calcular la rapidez del cuerpo en ciertas posiciones. Más importante aún, es como punto de partida para proponer una generalización global del concepto de energía, y de la manera en que ésta se almacena o se comparte entre las partes de un sistema complejo. El principio de conservación de la energía es el tema de los dos siguientes capítulos.

Prueba general del teorema de trabajo-energía

El siguiente cálculo ofrece una prueba de la ecuación 11-24 en el caso de fuerzas no constantes en una dimensión, supuestamente la dirección x. Con $F_{neta,x}$ representamos la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. El trabajo neto efectuado por todas las fuerzas externas es $W_{neto} = \int F_{neta,x}\,dx$. Como la velocidad cambia con el lugar y éste con el tiempo, podemos aplicar la regla de la cadena del cálculo y escribir $dv_x/dt = (dv_x/dx)(dx/dt)$. Entonces la fuerza neta puede escribirse así

$$F_{neta,x} = ma_x = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt}$$
$$= m\frac{dv_x}{dx}v_x = mv_x\frac{dv_x}{dx}.$$

Por tanto,

$$W_{neto} = \int F_{neta,x}\,dx = \int mv_x\frac{dv_x}{dx}\,dx = \int mv_x\,dv_x.$$

La variable de integración es ahora la velocidad v_x. Integremos de la velocidad inicial v_{ix} a la final v_{fx}:

$$W_{neto} = \int_{v_{ix}}^{v_{fx}} mv_x\,dv_x = m\int_{v_{ix}}^{v_{fx}} v_x\,dv_x = \tfrac{1}{2}m(v_{fx}^2 - v_{ix}^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_{fx}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{ix}^2.$$

Esto es idéntico a la ecuación 11-24, cuando el movimiento se da sólo en la dirección x y muestra que el teorema de trabajo-energía se cumple incluso, con fuerzas no constantes. El mismo resultado $W_{neto} = \Delta K$, se logra fácilmente con fuerzas no constantes en dos o tres dimensiones.

PROBLEMA RESUELTO 11-6. Un método para determinar la energía cinética de los neutrones en un haz —por ejemplo, el proveniente de un reactor atómico—, consiste en medir cuánto tarda una partícula en cruzar dos puntos fijos que se encuentran a una distancia conocida. A este método se le llama *tiempo de vuelo*. Supóngase que un neutrón recorre una distancia de $d = 6.2$ m en un tiempo de $t = 160\ \mu s$. ¿Cuál es su energía cinética? Su masa es 1.67×10^{-27} kg.

Solución Calculamos la rapidez a partir de

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6.2\ \text{m}}{160 \times 10^{-6}\ \text{s}} = 3.88 \times 10^4\ \text{m/s}.$$

Con base en la ecuación 11-23, la energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(3.88 \times 10^4\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.26 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.9\ \text{eV}.$$

En los reactores nucleares, los neutrones se producen en la fisión nuclear con energías cinéticas típicas de unos cuantos MeV. Un agente externo (conocido como moderador) realizó trabajo negativo en los neutrones del ejemplo, reduciendo con ello su energía cinética en un factor considerable de unos cuando MeV a unos cuantos eV.

PROBLEMA RESUELTO 11-7.
Se suelta un cuerpo de masa $m = 4.5$ g del reposo, desde una altura $h = 10.5$ m sobre la superficie terrestre. Despreciando la resistencia del aire, ¿qué velocidad tendrá poco antes de caer el suelo?

Solución Suponemos que el cuerpo puede tratarse como partícula. Podríamos resolver el problema aplicando el método basado en las leyes de Newton que expusimos en el Capítulo 3, pero optamos por resolverlo por medio del teorema de trabajo-energía. La ganancia de energía cinética es igual al trabajo efectuado por la fuerza resultante, que en este caso es la de gravedad. Es constante y es paralela a la línea de movimiento, de manera que el trabajo que efectúa es

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = mgh.$$

Al inicio el cuerpo tiene una rapidez $v_0 = 0$, y al final una rapidez v. Su ganancia de energía cinética es

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0.$$

Según el teorema de trabajo-energía, $W = \Delta K$ y, por tanto,

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Entonces la rapidez del cuerpo será

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(10.5\ \text{m})} = 14.3\ \text{m/s}.$$

Nótese que el resultado anterior no depende de la masa del objeto, como dedujimos antes por medio de las leyes de Newton.

PROBLEMA RESUELTO 11-8. Un bloque de masa $m = 3.63$ kg resbala por una mesa horizontal sin fricción con una rapidez de $v = 1.22$ m/s. Se detiene al comprimir un resorte que encuentra en su trayectoria. ¿Cuánto se comprimirá el resorte si la constante de fuerza k es 135 N/m?

Solución El cambio de la energía cinética en el bloque es

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Según la ecuación 11-17, el trabajo W efectuado por el resorte en el bloque cuando aquél está comprimido de su longitud en posición relajada y a una distancia d es

$$W = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Al aplicar el teorema de trabajo-energía, $W = \Delta K$, obtenemos

$$-\tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2$$

o

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.22\ \text{m/s})\sqrt{\frac{3.63\ \text{kg}}{135\ \text{N/m}}} = 0.200\ \text{m} = 20.0\ \text{cm}.$$

El teorema de trabajo-energía y los marcos de referencia

Las leyes de Newton son válidas sólo en los marcos de referencia inerciales. (De hecho, la primera ley nos sirve para probar si un marco es inercial o no.) Si comprobamos que es válida en un marco de referencia, lo será también para *todos* los marcos inerciales. Si dos observadores en distintos marcos se mueven con rapidez constante $\vec{\mathbf{v}}$ uno respecto a otro y si ven el mismo experimento, medirán valores idénticos de las fuerzas, de las masas y aceleraciones. Por consiguiente, coincidirán completamente en su análisis utilizando la segunda ley de Newton.

Como obtuvimos el teorema de trabajo-energía de esta ley, podríamos sospechar que igual que en ella, los observadores situados en distintos marcos de referencia inerciales coincidirán en los resultados de su aplicación. No obstante, a diferencia de las fuerzas y de las aceleraciones, en general los desplazamientos medidos por ellos serán distintos; por eso deducirán diversos valores del trabajo y de las energías cinéticas en el experimento.

Aun cuando los dos observadores obtengan diferentes valores numéricos en su respectivo marco de referencia, concordarán en que $W = \Delta K$. El teorema de trabajo-energía, es un ejemplo de una ley *invariante* de la física. Es aquella que tiene la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. Los valores medidos de las magnitudes físicas, como W y K, podrían diferir en los dos marcos, pero las leyes referentes a ellos presentan la misma forma a ambos observadores (y para cualquier observador en todos los marcos inerciales).

PROBLEMA RESUELTO 11-9. Un trabajador ejerce una fuerza $F = 5.63$ N al empujar una caja de masa 12.0 kg que se desplaza sin fricción en un vagón de plataforma (Fig. 11-18*a*). El tren va a una rapidez constante de 15.0 m/s en la misma dirección que el trabajador que empuja la caja. Desde la perspectiva del observador O, que también viaja en el mismo vagón, la caja parte del reposo y el trabajador la empuja una distancia de $s = 2.4$ m. *a*). Calcule la rapidez final de la caja de acuerdo con el observador O. *b*) Calcule el trabajo W' y el cambio de la energía cinética $\Delta K'$ de acuerdo con el observador O'

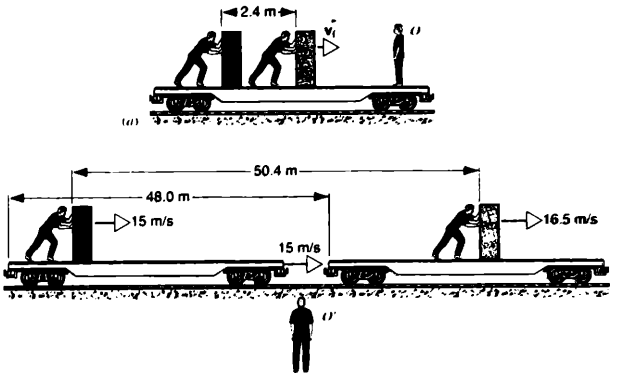


FIGURA 11-18. Problema resuelto 11-9. Un trabajador en un vagón de plataforma empuja una caja hacia adelante, vista por *a*) un observador O en el tren, y *b*) un observador O' en tierra.

que se encuentra en reposo en el suelo, y demuestre que el teorema de trabajo-energía es válido para él.

Solución *a*) Todos los desplazamientos, velocidades y fuerzas se realizan hacia la derecha de la figura 11-18, que tomamos como la dirección positiva x. Desde la perspectiva de O, el trabajo hecho es $W = Fs = (5.63\ \text{N})(2.4\ \text{m}) = 13.5$ J. Entonces el teorema de trabajo-energía nos da $K_f - K_i = W = 13.5$ J. Puesto que $K_i = 0$ según el observador en el vagón, $K_f = 13.5$; por tanto,

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(13.5\ \text{J})}{12.0\ \text{kg}}} = 1.50\ \text{m/s}.$$

b) En la figura 11-18*b* se muestra la situación de acuerdo con O'. Primero calculamos la distancia que recorre el vagón en el tiempo que tarda el trabajador en empujar la caja hacia adelante. Basándonos en el teorema de impulso-momento ($J_x = \Delta px$, escrita en función de los componentes x (véase, Ec. 6-5) aplicado por O, tenemos

$$\Delta t = \frac{\Delta p_x}{F_x} = \frac{mv_x}{F_x} = \frac{(12.0\ \text{kg})(1.50\ \text{m/s})}{5.63\ \text{N}} = 3.20\ \text{s}.$$

Ambos observadores coinciden en la medición de este intervalo temporal. En 3.20 s, el vagón recorre hacia adelante una distancia de $(15.0\ \text{m/s})(3.20\ \text{s}) = 48.0$ m; así que según el observador O', la caja se desplaza una distancia total de $s' = 48.0\ \text{m} + 2.4\ \text{m} = 50.4$ m. Los dos concuerdan en el valor de la fuerza ejercida por el trabajador; por ello desde la perspectiva de O' el trabajo es

$$W' = F's' = (5.63\ \text{N})(50.4\ \text{m}) = 284\ \text{J}.$$

Según O', la rapidez inicial de la caja es $v_i' = 15.0$ m/s (la rapidez del vagón), y su rapidez final es $v_f' = 15.0\ \text{m/s} + 1.5\ \text{m/s} = 16.5$ m/s; así que desde su punto de vista, el cambio de la energía cinética de acuerdo con O' es

$$\begin{aligned}\Delta K' &= K_f' - K_i' = \tfrac{1}{2}mv_f'^2 - \tfrac{1}{2}mv_i'^2\\ &= \tfrac{1}{2}(12.0\ \text{kg})(16.5\ \text{m/s})^2 - \tfrac{1}{2}(12.0\ \text{kg})(15.0\ \text{m/s})^2\\ &= 284\ \text{J}.\end{aligned}$$

En consecuencia, $W' = \Delta K'$ de acuerdo con el observador O'. Nótese que O y O' miden diversos valores del trabajo y del cambio en la energía cinética, pero ambos coinciden en que el trabajo es igual al cambio de ella. Para los dos observadores inerciales, el teorema de trabajo-energía presenta la misma forma.

Limitaciones del teorema de trabajo-energía

Este teorema (Ec. 11-24) lo obtuvimos directamente de la segunda ley de Newton, la cual en la forma en que la hemos enunciado se aplica *sólo a partículas*. Por eso el teorema, tal como lo hemos explicado hasta ahora, se aplica de modo exclusivo a cuerpos que puedan considerarse partículas. Antes vimos que un objeto se comportaba como una partícula si todos sus partes se movían exactamente en la misma forma. Al utilizar el teorema, podemos tratar un objeto extendido como partícula, si la única clase de energía que posee es cinética.

Pongamos el caso de un automóvil de prueba que se estrella frontalmente contra una barrera rígida y pesada de concreto. Su energía cinética disminuye al chocar, se contrae y se detiene. Sin embargo, otras formas de energía aparte de ella intervienen en la situación. Existe la energía interna que aparece cuando la carrocería del vehículo se dobla y se contrae; parte de ella se manifiesta, por ejemplo, como un incremento de la temperatura, y una parte puede ser transferida al ambiente en forma de calor. Nótese que, aunque la barrera puede ejercer una gran fuerza sobre el automóvil durante el choque, la fuerza no realiza trabajo alguno, porque *su punto de aplicación en el automóvil no se mueve*. (Recuerde nuestra definición original de trabajo —dada por la ecuación 11-1 e ilustrada gráficamente en la figura 11-1—: la fuerza debe operar a lo largo de alguna distancia para efectuar trabajo.) Así pues, en este caso $\Delta K \neq 0$, pero $W = 0$; por lo que claramente, la ecuación 11-24 no es aplicable. El vagón *no* se comporta como una partícula: *ninguna* de sus partes se desplaza exactamente en la misma forma.

Por razones similares, desde el punto de vista de trabajo-energía, no es posible tratar como partícula un bloque deslizante sobre el que actúa un fuerza de fricción (a pesar de que *podamos* continuar haciéndolo como en el Capítulo 5, cuando analizamos su comportamiento por medio de las leyes de Newton.) La fuerza de fricción que representamos como una fuerza constante $\vec{f}$, es en realidad muy complicada, pues consiste

en hacer y romper muchas soldaduras microscópicas (véase Secc. 5-3) que deforman las superficies y producen cambios en la energía interna de ellas (que puede aparecer en parte, como un aumento de la temperatura de las superficies). Es difícil explicar estas otras formas de energía y los objetos no se compartan como partículas; de ahí que generalmente sea correcto aplicar esta forma del teorema de energía-trabajo de los cuerpos a las fuerzas de fricción.

En los ejemplos anteriores, debemos ver el automóvil que choca y el bloque deslizante no como partículas, sino como sistemas que contienen gran número de ellas. Aunque sería correcto aplicar el teorema a cada partícula del sistema, resultaría extremadamente complejo hacerlo. En el Capítulo 13 comenzaremos a desarrollar un método más simple para ocuparnos de sistemas complejos de partículas, y mostraremos cómo extender el teorema para aplicarlo a esos casos.

11-7 TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA EN EL MOVIMIENTO ROTACIONAL

Hasta ahora en este capítulo hemos considerado sólo el movimiento de traslación. En la presente sección nos ocuparemos también del trabajo y de la energía cinética de los cuerpos en rotación.

Comenzaremos calculando el trabajo efectuado en un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo, tal como iniciamos este capítulo estudiando el trabajo hecho en un cuerpo que se mueve en una dimensión. La figura 11-19 muestra un cuerpo rígido arbitrario, al que un agente externo aplica una fuerza $\vec{F}$ en un punto P, a una distancia r del eje de rotación. A medida que el cuerpo gira por un ángulo pequeño $d\theta$ alrededor del eje, el punto P recorre una distancia $ds = r\,d\theta$. El componente de la fuerza en dirección del movimiento de P es F sen ϕ, por lo cual el trabajo dW realizado por la fuerza es

$$dW = (F \operatorname{sen} \phi)\, ds = (F \operatorname{sen} \phi)(r\, d\theta) = (rF \operatorname{sen} \phi)\, d\theta.$$

Al observar que rF sen ϕ es también el componente de la torca de la fuerza $\vec{F}$ alrededor del eje z, tenemos $dW = \tau_z\, d\theta$, y en una rotación del ángulo θ_i al ángulo θ_f el trabajo es

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z\, d\theta. \qquad (11\text{-}25)$$

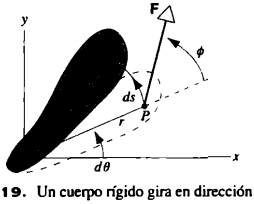


FIGURA 11-19. Un cuerpo rígido gira en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, alrededor de un eje perpendicular a la página (el eje z). Se aplica una fuerza externa $\vec{F}$ (en el plano de la página) en el punto P del cuerpo, a una distancia r del eje de rotación.

Adviértase que la ecuación 11-25, es el análogo rotacional de la ecuación 11-14, sólo que la fuerza ha sido reemplazada por la torca y la coordenada lineal por la coordenada angular.

Si la torca es constante al girar el cuerpo un ángulo $\theta = \theta_f - \theta_i$, el trabajo que efectúa en él será

$$W = \tau_z \theta, \qquad (11\text{-}26)$$

que es análogo a la ecuación 11-1 para la fuerza constante.

La potencia instantánea consumida en el movimiento rotacional, puede obtenerse de la ecuación 11-8:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau_z\, d\theta}{dt} = \tau_z \omega_z \qquad (11\text{-}27)$$

donde $\omega_z = d\theta/dt$, es la velocidad rotacional alrededor del eje z. Es el análogo rotacional de la ecuación 11-11. Nótese que las direcciones de $\vec{\tau}$ y $\vec{\omega}$ son paralelas en la geometría de la figura 11-19 (ambas fuera de la página sobre el eje z). La potencia promedio del movimiento rotacional donde se realiza una cantidad total de trabajo W en un tiempo t, está dada por la ecuación 11-7, $P_{pro} = W/t$.

En las ecuaciones 11-25, 11-26 y 11-27, como en todas las que combinan cantidades angulares y no angulares, *las primeras deben expresarse en una medida de radianes.*

Energía cinética rotacional

En la figura 11-20 vemos un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo, con una rapidez angular ω. Podemos considerar el cuerpo como un grupo de N partículas $m_1, m_2, \ldots$ con rapideces tangenciales $v_1, v_2, \ldots$. Si r_n indica la distancia de la partícula m_n con el eje de rotación, entonces $v_n = r_n\omega$, y su energía cinética será $\frac{1}{2}m_n v_n^2 = \frac{1}{2}m_n r_n^2\omega^2$.

La energía cinética total del cuerpo entero en rotaciones es la suma de las energías cinéticas de todas las N partículas:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_n r_n^2\right)\omega^2 \qquad (11\text{-}28)$$

o, en función de la inercia rotacional $I = \Sigma m_n r_n^2$,

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2. \qquad (11\text{-}29)$$

La expresión anterior, la cual da la energía cinética de un cuerpo rígido de inercia rotacional I que gira con rapidez angular ω, es exactamente análoga a la ecuación 11-23 para la

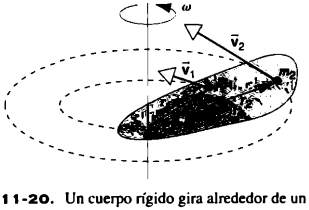


FIGURA 11-20. Un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo. Todas las partículas tienen la misma rapidez angular ω, pero las rapideces tangenciales varían con la distancia r desde el eje de rotación.

TABLA 11-1 Comparación de magnitudes traslacionales y rotacionales relacionadas con la energía

Magnitud traslacional		*Número de ecuación*	*Magnitud rotacional*		*Número de ecuación*
Trabajo*	$W = \int F_x\,dx$	11-14	Trabajo	$W = \int \tau_z\,d\theta$	11-25
Potencia*	$P = F_x v_x$	11-11	Potencia	$P = \tau_z \omega_z$	11-27
Energía cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	11-23	Energía cinética rotacional	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	11-29
Teorema de trabajo-energía	$W = \Delta K$	11-24	Teorema de trabajo-energía	$W = \Delta K$	11-24

*Las ecuaciones se escriben en forma unidimensional a fin de resaltar la simetría entre las magnitudes traslaciones y rotacionales.

energía cinética traslacional, $K = \frac{1}{2}mv^2$. La masa de la ecuación 11-23 se reemplaza por la inercia rotacional, y la rapidez líneal por la rapidez angular.

La energía cinética rotacional que aparece en la ecuación 11-29 no es un nuevo tipo de energía cinética. No es más que la suma de la energía cinética traslacional de todas las partículas del cuerpo. Aunque el cuerpo entero no presente movimiento de traslación, cada partícula posee una velocidad tangencial, y por lo mismo energía cinética. La dirección instantánea de su velocidad cambia al girar el cuerpo, pero la energía cinética depende de v^2 y es escalar, de ahí que ninguna dirección esté asociada a ella. Es, pues, correcto sumar la energía cinética de las partículas del cuerpo que gira. La energía cinética rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$, no es sino un medio práctico de expresar la energía cinética de todas las partículas en un cuerpo rígido.

La forma rotacional del teorema de trabajo-energía es exactamente la misma que la traslacional: $W = \Delta K$, con el trabajo rotacional dado por la ecuación 11-25 u 11-26, y la energía cinética rotacional dada por la ecuación 11-29. En general, el trabajo realizado en un cuerpo, podría acompañarse de movimiento de rotación y de traslación. En este caso, W representa el trabajo total hecho en él, y ΔK deberá incluir la suma de ambos términos, rotacional y traslacional. En el Capítulo 12 estudiaremos la energía cinética en una combinación de movimiento traslacional y rotacional.

En la tabla 10-1 se comparan las magnitudes de traslación y de rotación en la cinemática y en la dinámica. La tabla 11-1 ofrece una comparación adicional de las magnitudes de ambos tipos de movimiento relacionadas con la energía.

PROBLEMA RESUELTO 11-10. Una sonda espacial que navega por una región de gravedad despreciable, gira con una rapidez angular de 2.4 rev/s alrededor de un eje que apunta en la dirección de su movimiento (Fig. 11-21). La nave espacial tiene la forma de una pequeño cascarón esférico de 1.7 m de radio y de 245 kg de masa. Es necesario reducir la rapidez rotacional a 1.8 rev/s disparando para ello, impulsores tangenciales en el "ecuador" de la sonda. ¿Qué fuerza constante deberán ejercer los impulsores, si debe cambiarse la rapidez angular mientras la sonda realiza 3.0 revoluciones? Suponga que el combustible expulsado por los impulsores, es una parte insignificante de la masa de la sonda.

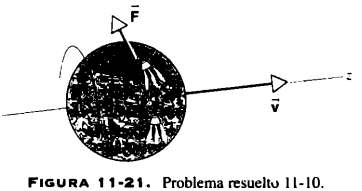


FIGURA 11-21. Problema resuelto 11-10.

Solución En un delgado cascarón esférico encontramos la inercia rotacional alrededor de un eje central, según la figura 9-15:

$$I = \tfrac{2}{3}MR^2 = \tfrac{2}{3}(245\text{ kg})(1.7\text{ m})^2 = 472\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

El cambio de la energía cinética rotacional es

$$\begin{aligned}\Delta K &= \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2\\ &= \tfrac{1}{2}(472\text{ kg}\cdot\text{m}^2)[(2\pi\text{ rad/rev})(1.7\text{ rev/s})]^2\\ &\quad - \tfrac{1}{2}(472\text{ kg}\cdot\text{m}^2)[(2\pi\text{ rad/rev})(2.4\text{ rev/s})]^2\\ &= -2.67\times10^4\text{ J}.\end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación 11-26, el trabajo rotacional de una torc constante es $W = \tau_z\theta$, donde $\tau_z = -RF$ si se aplica tangencialmen te la fuerza F de empuje. El signo menos indica que la torca apunt en la dirección negativa z. Por medio del teorema de trabajo-energí $W = \Delta K$, con $W = -RF\theta$ resolvemos para la fuerza de los impulsores F

$$\begin{aligned}F &= \frac{W}{-R\theta} = \frac{\Delta K}{-R\theta} = \frac{-2.67\times10^4\text{ J}}{-(1.7\text{ m})[(2\pi\text{ rad/rev})(3.0\text{ rev})]}\\ &= 833\text{ N}.\end{aligned}$$

Este problema también podría resolverse, usando las fórmulas de cinemática rotacional para calcular la aceleración angular (constai te), seguida de $\tau_z = I\alpha_z$ para determinar la fuerza.

11-8 ENERGÍA CINÉTICA EN COLISIONES

En el Capítulo 6 analizamos las colisiones entre dos cuerpc aplicando para ello la ley de conservación del momento neal. También resulta muy revelador estudiar la energía cin tica de los cuerpos en colisión.

Vamos a examinar una colisión entre dos cuerpos que desplazan por el eje x. La línea 1 de la figura 11-22a, muest las velocidades antes de la colisión en el marco de referenc del laboratorio, y la figura 11-22b presenta la misma colisi vista desde el marco de referencia del centro de masa.

Primero explicaremos una colisión *elástica*, que en sección 6-5 definimos como aquella en que, dentro del mar de referencia del centro de masa, simplemente se invierte

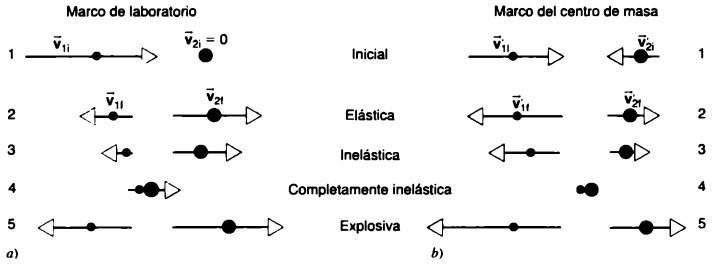


FIGURA 11-22. Colisión unidimensional entre dos objetos vistos desde *a*) el marco de laboratorio, y *b*) el marco del centro de masa. En el marco de laboratorio, m_2 se halla inicialmente en reposo.

dirección de los momentos de los cuerpos. Si lo hacemos, la dirección de sus velocidades también debe invertirse (Fig. 11-22*b*, líneas 1 y 2). Como antes y después de la colisión tienen igual magnitud ($v'_{1i} = v'_{1f}$ y $v'_{2i} = v'_{2f}$), es evidente que en el marco del centro de masa debemos tener $K'_{1i} = K'_{1f}$ para m_1, y $K'_{2i} = K'_{2f}$ para m_2. Así pues, dentro de este marco de referencia la energía cinética inicial *total*, $K'_i = K'_{1i} + K'_{2i}$, es igual a la total final, $K'_f = K'_{1f} + K'_{2f}$.

Dentro del marco de referencia de laboratorio (que describimos empleando coordenadas sin prima), *no* es verdad que las energías cinéticas individuales permanezcan inalteradas, es decir, por lo regular $v_{1i} \neq v_{1f}$ y por eso $K_{1i} \neq K_{1f}$, y en forma parecida para m_2. ¿Qué sucede con la energía cinética *total* de m_1 y m_2 en este caso? Antes de la colisión, la energía cinética inicial *total* es $K_i = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2$, y después la energía cinética final *total* es $K_f = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$. Si usamos las ecuaciones 6-24 y 6-25 con las velocidades finales en la expresión para K_f, luego de efectuar las operaciones algebraicas necesarias obtenemos

$$K_i = K_f \qquad \text{(elástica)}. \qquad (11\text{-}30)$$

La energía cinética individual de los cuerpos en colisión puede cambiar, es decir, en términos generales $K_{1i} \neq K_{1f}$ y $K_{2i} \neq K_{2f}$, pero su suma sí permanece constante ($K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$).

Tenemos, pues, una definición alterna de colisión elástica:

En una colisión elástica, la energía cinética total de los dos cuerpos permanece constante, esto es, la energía cinética total antes de la colisión, es igual a la total después de la colisión.

Vemos que, por lo menos en dos marcos de referencia (el del centro de masa y el de laboratorio), las energías cinéticas inicial y final totales del sistema de dos cuerpos son iguales. De hecho, como el marco de laboratorio es un marco escogido de modo arbitrario, *la energía cinética total permanece constante en todos los marcos de referencia inerciales.* Podemos entender este resultado imaginando que un resorte se encuentra en su longitud relajada entre los dos cuerpos. Cuando chocan comprimen el resorte, y parte de su energía cinética se pierde a causa del trabajo efectuado por el resorte. Cuando el resorte vuelve a expandirse, realiza una cantidad igual de trabajo en ambos, lo cual *aumenta* su energía cinética. Si el resorte regresa a su longitud relajada, no se efectúa trabajo neto en el sistema compuesto por los dos cuerpos y, en consecuencia, la energía cinética *final* total del sistema deberá ser igual a la *inicial*.

Por supuesto, no hay resortes en colisión entre cuerpos reales: *son los objetos que chocan los que se comportan en forma elástica*, como un resorte. Pueden considerarse elásticas las fuerzas interatómicas de los objetos; éstos realizan trabajo unos sobre otros al modificar su energía cinética, pero el trabajo neto efectuado por el sistema entero de ambos es cero. De ahí que también lo sea el cambio de energía cinética en el sistema.

Imaginemos ahora un resorte entre los dos cuerpos en una colisión *inelástica* (compare las líneas 1 y 3 en la Fig. 11-22*b*). Se comprimirá el resorte en la colisión, pero sin que retorne a su plena longitud relajada después de ella. (Quizá hay un mecanismo de "trinquete" que mantiene al resorte un poco comprimido.) Los dos cuerpos realizan trabajo en él al comprimirlo, pero el resorte realiza menos trabajo en ellos cuando vuelve a expandirse. Todos los observadores, cualquiera que sea su marco de referencia, coincidirán en que el resorte permanece ligeramente comprimido al terminar la colisión, de manera que aceptarán que se ha perdido energía cinética (aunque la cantidad de la pérdida variará con el marco de referencia de cada uno). Así pues, podemos caracterizar la colisión inelástica en función de la energía cinética:

En una colisión inelástica, la energía cinética final total es menor que la inicial.

Aunque disminuye la energía cinética total, el momento lineal total permanece constante.

Todas las colisiones entre cuerpos extendidos son inelásticas en cierto grado. Si dejamos caer en una superficie dura una pelota de golf o de tenis, no recobra su altura original al rebotar. La diferencia de altura entre rebotes consecutivos, es una medida de la pérdida de energía cinética en cada colisión con la Tierra.

En las colisiones entre cuerpos reales (sin resortes), ¿dónde queda esta energía cinética? Puede quedar en el trabajo realizado al deformar uno de los cuerpos, o al modificar su forma, como sucede, por ejemplo, en la colisión con una bola de barro. Los objetos reales no se comprimen como un resorte ideal; a menudo intervienen fuerzas de disipación semejantes a la fricción. Parte de la energía servirá para crear una onda de choque o elevar la temperatura de los objetos.

Si dos objetos permanecen juntos, se producirá una *colisión completamente inelástica* (compare las líneas 1 y 4 de la figura 11-22*b*). Este tipo de colisión pierde la cantidad máxima de energía cinética, lo cual es compatible con la conservación del momento.

Por último, imagine una colisión donde el resorte entre los dos cuerpos está comprimido antes de ella, pero se libera cuando chocan. Entonces lo comprimirán más, pero el resorte al expandirse y recuperar su longitud relajada, les suministrará más energía cinética que la que tenían al inicio. Los dos cuerpos pueden realizar trabajo en el resorte al comprimirlo, pero él efectúa *más* trabajo en ellos al ir expandiéndose. Es una colisión *explosiva* o liberadora de energía.

En una colisión explosiva, la energía cinética final total es mayor que la inicial.

Una vez más, el momento lineal permanece constante, aun cuando aumente la energía cinética.

A menudo las colisiones liberadoras de energía ocurren en reacciones nucleares, en las cuales la energía interna almacenada dentro de los núcleos en colisión se transforma en energía cinética. Los núcleos resultantes tras la colisión, tienen menor energía interna y mayor energía cinética total que los originales.

PROBLEMA RESUELTO 11-11. En un reactor nuclear, los neutrones pierden energía al chocar con los núcleos de los átomos de los materiales que pueden haber en el núcleo del reactor. Si un neutrón de masa m_n tiene una energía cinética inicial de 5.0 MeV, ¿cuánta energía cinética perderá cuando tiene una colisión elástica frontal con un núcleo de plomo ($m_{Pb} = 206\ m_n$), de carbono ($m_C = 12\ m_n$) o de hidrógeno ($m_H = m_n$)?

Solución Podemos suponer que los átomos golpeados se hallen inicialmente en reposo (en realidad tienen pequeñas rapideces "térmicas" que son despreciables en comparación con la rapidez de un neutrón). La rapidez final del neutrón incidente en una colisión elástica directa con un núcleo en reposo, está dada por la ecuación 6-24 con $v_{2i} = 0$: $v_{1f} = [(m_1 - m_2)(m_1 + m_2)]v_{1i}$. La energía cinética final del neutrón es

$$K_{1f} = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 = \tfrac{1}{2}m_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_{1i}^2 = K_{1i}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Para una colisión con plomo de energía cinética final del neutrón es

$$K_{1f} = (5.0\ \text{MeV})\left(\frac{m_n - m_{Pb}}{m_n + m_{Pb}}\right)^2$$

$$= (5.0\ \text{MeV})\left(\frac{m_n - 206m_n}{m_n + 206m_n}\right)^2 = 4.9\ \text{MeV},$$

correspondiente a una pérdida de 5.0 MeV − 4.9 MeV = 0.1 MeV. Un cálculo similar en el caso del carbono nos da $K_{1f} = 3.6$ MeV (una pérdida de 1.4 MeV), y en el caso del hidrógeno, $K_{1f} = 0$ (una pérdida de 5.0 mEv, es decir, toda su energía inicial). Por tanto, un neutrón pierde la mayor cantidad de energía en una colisión con un núcleo de hidrógeno, cuya masa se aproxima más a la del neutrón.

Los resultados anteriores explican por qué un material rico en hidrógeno, como el agua o la parafina, son más efectivos al disminuir la rapidez de los neutrones o "moderarlos", que un material pesado como el plomo. A pesar de tener un problema muy simplificado al suponer una colisión unidimensional "directa", extraeremos la misma conclusión básica, si consideramos una colisión bidimensional indirecta: un neutrón perderá más energía en materiales ricos en hidrógeno.

Los neutrones que se liberan en la fisión del uranio en reactores, suelen tener energías cinéticas en el intervalo MeV. Sin embargo, la operación de los reactores requiere que inicien los procesos de una nueva fisión, lo cual ocurre con mucha probabilidad, sólo si se reduce su rapidez a las energías cinéticas dentro del rango de eV. Por ello, los elementos combustibles del uranio han de mezclarse con un material más ligero que sirva de moderador del neutrón.

PROBLEMA RESUELTO 11-12. Un péndulo balístico (Fig. 11-23), es un aparato con el cual se medía la rapidez de las balas antes que se inventasen los cronómetros electrónicos. Es un gran bloque de madera con masa M, que cuelga de dos largos pares de cuerdas. Se dispara una bala de masa m contra él, y la combinación bloque + bala se eleva; su centro de masa alcanza una distancia vertical h, antes que el péndulo se detenga momentáneamente al final de su arco. Suponga que la masa del bloque es $M = 5.4$ kg, y que la masa de la bala es $m = 9.5$ g. *a*) ¿Cuál es la rapidez inicial de la bala si el bloque asciende a una altura de $h = 6.3$ cm? *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se pierde en la colisión?

Solución a) Dividamos el problema en dos partes: 1) La bala que se desplaza con una velocidad v_i, penetra en el bloque y se detiene respecto a él, después de lo cual la combinación bala + bloque se mueve con una rapidez común v_f. Suponemos que ello ocurre muy rápidamente. 2) La combinación que ahora avanza con una rapidez v_f, sube hasta que se detiene. La parte 1 es un ejemplo de una colisión completamente inelástica, en que dos cuerpos en colisión permanecen juntos después de ella. El momento se conserva, y por eso la ecuación 6-20 nos da con $v_{2i} = 0$ (el bloque se halla inicialmente

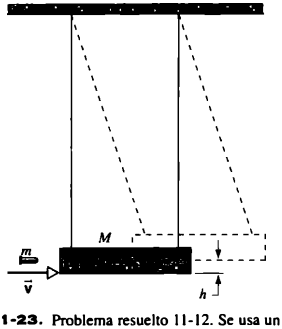


FIGURA 11-23. Problema resuelto 11-12. Se usa un péndulo balístico para medir la rapidez de una bala.

en reposo), $mv_i = (m + M)v_f$. La parte 2 del problema, puede analizarse por medio del teorema de trabajo-energía. El trabajo neto efectuado en la combinación bloque + bala, lo lleva a cabo la gravedad: $W_{neto} = W_g = -(m + M)gh$, y al elevarse y detenerse, el cambio en la energía cinética de la combinación es $\Delta K = 0 - \frac{1}{2}(m + M)v_f^2$. El teorema $W_{neto} = \Delta K$, da entonces

$$-(m + M)gh = -\tfrac{1}{2}(m + M)v_f^2 = -\tfrac{1}{2}(m + M)\left(\frac{mv_i}{m + M}\right)^2,$$

donde el último resultado, se logra al sustituir v_f a partir del resultado de la conservación del momento en la parte 1. Resolviendo para v_i, obtenemos

$$v_i = \left(\frac{M + m}{m}\right)\sqrt{2gh}$$

$$= \left(\frac{5.4\text{ kg} + 0.0095\text{ kg}}{0.0095\text{ kg}}\right)\sqrt{(2)(9.8\text{ m/s}^2)(0.063\text{ m})} = 630\text{ m/s}.$$

Podemos concebir el péndulo balístico, como una especie de transformador que intercambia la gran rapidez de un objeto ligero (la bala) por la baja rapidez —y, por tanto, más fácilmente mensurable— de un objeto masivo (el bloque).

b) Podemos escribir la energía cinética final así

$$K_f = \tfrac{1}{2}(m + M)v_f^2 = \tfrac{1}{2}(m + M)\left(\frac{mv_i}{m + M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv_i^2\left(\frac{m}{m + M}\right).$$

La relación entre la energía cinética inicial y la final es

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{m}{m + M} = \frac{9.5\text{ g}}{9.5\text{ g} + 5.4\text{ kg}} = 0.0018.$$

Sólo 0.18% de la energía cinética inicial permanece después de la colisión. El restante 99.82% se guarda dentro del péndulo como energía interna (quizás en parte como incremento de la temperatura), o se transfiere al ambiente, por ejemplo, en forma de calor o de ondas sonoras.

OPCIÓN MÚLTIPLE

11-1 Trabajo y energía

11-2 Trabajo realizado por una fuerza constante

1. Un estudiante levanta una caja de la mesa y la pone en el piso. Supongamos que el trabajo total que ejecuta sea W. Podemos concluir
   A) $W > 0$. B) $W = 0$. C) $W < 0$.
   D) nada sobre el signo de W.
2. Un objeto de 2.0 kg de masa, realiza un movimiento circular uniforme en una mesa horizontal sin fricción. El radio del círculo es 0.75 m, y la fuerza centrípeta es de 10.0 N.
   a) El trabajo efectuado por esta fuerza cuando el objeto lleva a cabo la mitad de una revolución completa es
   A) 0 J. B) 3.75 J.
   C) 10.0 J. D) 7.5π J.
   b) El trabajo hecho por esta fuerza cuando el objeto realiza una revolución completa es
   A) 0 J. B) 7.5 J.
   C) 20.0 J. D) 15π J.
3. ¿Cuál de las siguientes magnitudes son independientes de la elección del marco de referencia inercial? (Puede haber más de una respuesta correcta.)
   A) Velocidad. B) Aceleración.
   C) Fuerza. D) Trabajo.
4. Los cañones de los barcos de guerra a veces se miden en unidades de energía de *ton-pie*. ¿A qué equivale (aproximadamente) esto en unidades métricas?
   A) 3×10^1 J. B) 3×10^2 J.
   C) 3×10^3 J. D) 3×10^4 J.

11-3 Potencia

5. Un motor que genera potencia constante mueve un automóvil. Cuando éste se acerca a una subida, el conductor cambia a una velocidad más baja. Lo hace para
   A) aumentar la fuerza que impulsa el automóvil hacia adelante.
   B) generar mayor potencia con las llantas.
   C) Tanto A) como B) son correctas.
   D) Ni A) ni B) son correctas.
6. Suponga que la fuerza aerodinámica de resistencia al avance es proporcional a la rapidez. Si se duplica la potencia producida por el motor, la rapidez máxima del automóvil
   A) no cambia.
   B) aumenta en un factor de $\sqrt{2}$.
   C) también se duplica.
   D) aumenta en un factor de cuatro.
7. Un ingeniero quiere diseñar para un edificio, un elevador mejorado. En el diseño original se utilizó un motor capaz de levantar 1,000 kg en una distancia de 20 metros en 30 segundos. El ingeniero quiere un motor que levante 800 kg una distancia de 30 metros en 20 segundos. En comparación con el viejo motor, el nuevo
   A) debería ejercer una fuerza de la misma magnitud, pero ofrecer mayor producción de potencia.
   B) debería ejercer una fuerza de mayor magnitud y ofrecer una producción más grande de potencia.
   C) puede ejercer una fuerza de menor magnitud y ofrecer menor producción de potencia.
   D) puede ejercer una fuerza de menor magnitud, pero debe ofrecer la misma producción de potencia.
   E) puede ejercer una fuerza de menor magnitud, pero debe ofrecer más producción de potencia.

11-4 Trabajo realizado por una fuerza variable

8. La fuerza ejercida por un aparato especial de compresión, está dado por $F_x(x) = kx(x - l)$ cuando $0 \le x \le l$, donde l es la máxima compresión posible, y k es una constante.
   a) La fuerza necesaria para comprimir el aparato una distancia d, es máxima cuando
   A) $d = 0$. B) $d = l/4$. C) $d = l/\sqrt{2}$.
   D) $d = l/2$. E) $d = l$.
   b) El trabajo requerido para comprimir el aparato una distancia d, es máximo cuando
   A) $d = 0$. B) $d = l/4$. C) $d = l/\sqrt{2}$.
   D) $d = l/2$. E) $d = l$.

11-5 Trabajo realizado por una fuerza variable: el caso bidimensional (Opcional)

11-6 Energía cinética y teorema de trabajo-energía

9. Una partícula tiene una energía cinética constante K. ¿Cuál de las siguientes magnitudes *debe* ser constante?
A) Posición. B) Rapidez.
C) Velocidad. D) Momento.

10. Un disco de goma de 0.20 kg se desliza por un piso sin fricción con una rapidez de 10 m/s. Choca contra un muro blando y se detiene.
a) La magnitud de su impulso es
A) 0 kg · m/s. B) 1 kg · m/s.
C) 2 kg · m/s. D) 4 kg · m/s.
b) El trabajo neto efectuado en el disco es
A) −20 J. B) −10 J.
C) 0 J. D) 20 J.

11. Un disco de goma de 0.20 kg se desliza por un piso sin fricción con una rapidez de 10 m/s. Choca contra una pared y rebota con una rapidez de 10 m/s en dirección contraria.
a) La magnitud del impulso en el disco es
A) 0 kg · m/s. B) 1 kg · m/s.
C) 2 kg · m/s. D) 4 kg · m/s.
b) El trabajo neto efectuado en el disco es
A) −20 J. B) −10 J.
C) 0 J. D) 20 J.

12. Dos automóviles se hallan frente a un semáforo. Cuando se pone el siga, el de masa m arranca con una aceleración a; el de masa $2m$ lo hace en la misma dirección con una aceleración $a/2$. ¿Cuál de los dos motores genera más potencia?
A) El automóvil de masa m.
B) El automóvil de masa $2m$.
C) La potencia es la misma en los dos automóviles.

11-7 Trabajo y energía cinética en el movimiento rotacional

13. Cuatro objetos sólidos de la misma masa y radio, giran libremente con la misma rapidez angular. ¿Cuál de ellos requiere más trabajo para *detenerse*?
A) Una esfera sólida que gira alrededor de un diámetro.
B) Una esfera hueca que gira alrededor de un diámetro.
C) Un disco sólido que gira alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.
D) Un aro que gira alrededor de un eje a través de un diámetro.
E) El trabajo necesario es el mismo en los cuatro objetos.

14. Cuatro objetos sólidos de la misma masa y radio, giran libremente con el mismo momento angular. ¿Cuál de ellos requiere más trabajo para *detenerse*?
A) Una esfera sólida que gira alrededor de un diámetro.
B) Un esfera hueca que gira alrededor de un diámetro.
C) Un disco sólido que gira alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.
D) Un aro que gira alrededor de un eje a través de un diámetro.
E) El trabajo necesario es el mismo en los cuatro objetos.

15. Cuatro objetos sólidos con la misma masa y radio, giran libremente con el mismo momento angular. ¿Cuál requiere más trabajo para *detenerse*?
A) Una esfera sólida que gira alrededor de un diámetro.
B) Una esfera hueca que gira alrededor de un diámetro.
C) Un disco sólido que gira alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.
D) Un aro que gira alrededor de un eje a lo largo de un diámetro.
E) El trabajo requerido es el mismo en los cuatro objetos.

11-8 Energía cinética en colisiones

16. Se "pierde" mucha energía cinética inicial en el péndulo balístico (Prob. res. 11-12). Teniendo en cuenta esto, podemos concluir
A) que la rapidez calculada de la bala es probablemente demasiado baja.
B) que la rapidez calculada de la bala es probablemente demasiada alta.
C) que la rapidez calculada de la bala es probablemente correcta, sólo si la colisión era elástica.
D) que la rapidez calculada de la bala es probablemente correcta, porque en la colisión se conservó el momento.

PREGUNTAS

1. ¿Se le ocurren otras palabras como trabajo, cuyo significado coloquial sea distinto de su significado científico?
2. Explique por qué uno se cansa físicamente cuando empuja contra una pared, no la mueve y, por tanto, no realiza trabajo en ella.
3. Suponga que tres fuerzas constantes actúan sobre una partícula conforme pasa de una posición a otra. Pruebe que el trabajo efectuado en ella por la resultante de las tres fuerzas es igual a la suma del que realiza cada una, calculado por separado.
4. El plano inclinado (Prob. res. 11-1), es una "máquina" simple que permite hacer trabajo aplicando una fuerza menor de la que se requeriría sin la máquina. Lo anterior se aplica también a una cuña, a una palanca, a un tornillo, a una rueda dentada y a una combinación de poleas (Prob. 3). Sin embargo, lejos de ahorrarnos trabajo, este tipo de máquinas requieren en la práctica, que hagamos un poco más de trabajo con ellas que si no las usáramos. ¿A qué se debe eso? ¿Por qué las utilizamos?
5. En una competencia en que dos equipos tiran de una cuerda, uno de ellos cede poco a poco ante el otro. ¿Qué trabajo se realiza y quién lo lleva a cabo?
6. ¿Por qué es mucho más fácil recorrer una milla en bicicleta en el nivel del suelo, que correr la misma distancia? En ambos casos podemos transportar nuestro peso una milla; en el primero hay que transportar la bicicleta, y además hacerlo en ¡menos tiempo! (Consúltese *The Physics Teacher*, marzo de 1981, p. 194.)
7. Suponga que la Tierra gira alrededor del Sol describiendo una órbita perfectamente circular. ¿Realiza el Sol trabajo en la Tierra?
8. Levanta usted lentamente del piso una bola de boliche y la pone sobre una mesa. Dos fuerzas actúan sobre la bola: su peso, de magnitud mg, y la fuerza ascendente que le aplica de la misma magnitud. Las dos suman cero, de modo que al parecer no se realiza trabajo alguno. Pero, por otra parte, sabe que ha efectuado trabajo. ¿Qué salió mal?
9. ¿Por qué un automóvil rebasa con tanta facilidad un camión cargado cuando van cuesta arriba? Claro que el camión es más pe-

sado, pero su motor es proporcionalmente más potente (¿no es así?) ¿Qué se debe considerar al elegir el diseño de la potencia de un motor de camión y de uno de automóvil?

10. ¿La potencia necesaria para levantar y colocar una caja en una plataforma depende de la rapidez con que se alce?
11. Levanta usted algunos libros de un estante bajo y los pone en un estante más alto en el tiempo Δt. ¿El trabajo realizado depende de *a*) la masa de los libros, *b*) de su peso, *c*) de la altura del estante de arriba, *d*) del tiempo Δt y *e*) de que los levante lateral o directamente hacia arriba?
12. Se habla mucho de la "crisis de energía". ¿Sería más correcto hablar de una "crisis de potencia"?
13. Corta usted un resorte a la mitad. ¿Qué relación tiene la fuerza constante k del resorte original con la de sus mitades?
14. Los resortes A y B son idénticos, salvo que el primero es más rígido que el segundo, esto es, $K_A > K_B$. ¿En cuál de los dos se consume más trabajo, si los estiramos *a*) la misma cantidad, y *b*) con igual fuerza?
15. Realizamos trabajo al recoger un libro del piso y ponerlo en una mesa. Pero su energía cinética no cambia. ¿Se viola aquí el teorema de trabajo-energía? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
16. ¿Es válido el teorema de trabajo-energía si la fricción actúa sobre un objeto? Explique su respuesta.
17. El trabajo efectuado por la fuerza neta en una partícula es igual al cambio de energía cinética. ¿Puede suceder que el que realiza una de las fuerzas componentes sea mayor que el cambio de energía cinética? Dé ejemplos si su respuesta es afirmativa.
18. La marca mundial del salto con garrocha es 5.5 m. ¿Podría mejorarse —digamos— a 8 m usando una garrocha bastante larga? Explique su respuesta afirmativa o negativa. ¿A qué altura podría elevarse un atleta?
19. Un objeto ligero y otro pesado poseen igual energía cinética de traslación. ¿Cuál de los dos tiene un momento más grande?
20. ¿Puede un cuerpo tener energía cinética sin momento? ¿Puede tener momento sin energía cinética?
21. Un objeto de masa m lleva una rapidez inicial v. Lo hace detenerse una fuerza variable que opera en una distancia d durante el tiempo t. Hay dos formas de calcular la magnitud de la fuerza "promedio",

$$F_{pro} = mv/t$$

o

$$F_{pro} = mv^2/2d.$$

¿Son los dos métodos equivalentes? ¿En qué condiciones, si las hay, producirán el mismo promedio? ¿Tenderá un método a producir un resultado mayor y, de ser así, cuál de ellos?

22. Comente los siguientes enunciados: en un choque de automóviles, la fuerza que uno ejerce al ser detenido puede determinarse partiendo de su momento o de su energía cinética. En un caso hay que conocer el tiempo de frenado, y en el otro la distancia de frenado.
23. El acero es más elástico que el hule. Explique el significado de esta afirmación.
24. Explique la posibilidad de que todas las colisiones fueran elásticas, si pudiéramos tener en cuenta los movimientos internos de los átomos de los objetos.
25. Hemos visto que la conservación del momento se aplica sin importar si se conserva o no la energía cinética. ¿Es posible también lo contrario, es decir, la conservación de la energía cinética implica la del momento en la física clásica? (Véase "Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum", de Carl G. Adler, *American Journal of Physics*, mayo de 1976, p. 483.)
26. La siguiente afirmación se tomó de un examen escrito: "La colisión entre dos átomos de helio es perfectamente elástica, por lo cual el momento se conserva". ¿Qué opina de esto?
27. Dos bolas de barro con igual masa y rapidez chocan directamente entre sí, se juntan y se detienen. Ciertamente no se conserva la energía cinética. ¿Qué sucedió con ella? ¿Cómo se conservó el momento?
28. Considere una colisión elástica unidimensional entre un objeto en movimiento A, y otro objeto B inicialmente en reposo. ¿Cómo escogería la masa de B al compararla con la de A, a fin de que B pudiera retroceder con *a*) la máxima rapidez, *b*) el momento máximo y *c*) la mayor energía cinética?
29. Al comentar el hecho de que la energía cinética no se conserve en una colisión totalmente inelástica, un estudiante observó que no se conserva en una explosión, y que este tipo de colisión no es más que el inverso de la explosión. ¿Es útil o válida su observación?
30. ¿Depende la energía cinética de la dirección del movimiento en cuestión? ¿Puede ser negativa? ¿Depende su valor del marco de referencia del observador?
31. ¿Depende del marco de referencia (inercial) del observador el trabajo efectuado por la fuerza neta que opera sobre una partícula? Dé ejemplos si su respuesta es afirmativa.
32. Un hombre que rema en un bote corriente arriba, está en reposo respecto a la orilla. *a*) ¿Realiza trabajo? *b*) Si deja de remar y se dirige corriente abajo, ¿se realiza algún trabajo en él?

EJERCICIOS

11-1 Trabajo y energía

11-2 Trabajo realizado por una fuerza constante

1. Para empujar una caja de 52 kg por el piso, un trabajador aplica una fuerza de 190 N, dirigida 22° debajo de la horizontal. Conforme la caja se desplaza 3.3 m, ¿cuánto trabajo realizan en ella *a*) el trabajador, *b*) la fuerza de gravedad y *c*) la fuerza normal del piso en la caja?
2. Un objeto de 106 kg se mueve inicialmente en una línea recta con una rapidez de 51.3 m/s. *a*) Si lo detenemos con una desaceleración de 1.97 m/s^2, ¿qué fuerza se requiere, qué distancia recorre el objeto y cuánto trabajo lleva a cabo la fuerza? *b*) Conteste las mismas preguntas si la deceleración es 4.82 m/s^2.
3. Para empujar hacia arriba un caja de 25 kg por una pendiente de 27°, un trabajador ejerce una fuerza de 120 N paralela a ella. A medida que la caja se desliza 3.6 m, ¿cuánto trabajo efectúan en ella *a*) el trabajador, *b*) la fuerza de gravedad y *c*) la fuerza normal de la pendiente?
4. Un trabajador empuja un bloque de 58.7 lb (m = 26.6 kg) una distancia de 31.3 ft (9.54 m) por un piso plano, a una rapidez constante y con una fuerza dirigida a 32.0° debajo de la hori-

zontal. El coeficiente de fricción cinética es 0.21. ¿Cuánto trabajo hizo esa persona en el bloque?

5. A una rapidez constante, una maleta de 52.3 kg se empuja hacia arriba de una pendiente de 28.0°, una distancia de 5.95 m, aplicándole una fuerza horizontal constante. El coeficiente de fricción cinética entre la maleta y la pendiente es 0.19. Calcule el trabajo realizado por *a*) la fuerza aplicada, y *b*) la fuerza de gravedad.
6. Un bloque de hielo de 47.2 kg se desliza hacia abajo por una pendiente de 1.62 m de longitud y 0.902 m de altura. Un trabajador empuja el hielo paralelo a la pendiente hacia arriba para que deslice hacia abajo con una velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entra el hielo y la pendiente es de 0.110. Determine *a*) la fuerza ejercida por el trabajador, *b*) el trabajo efectuado por el trabajador sobre el bloque y *c*) el trabajo que realiza la gravedad en el bloque.
7. Utilice las ecuaciones 11-3 y 11-5, para calcular el ángulo entre dos vectores $\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$.
8. Un vector $\vec{a}$ de 12 unidades de magnitud y otro vector $\vec{b}$ de 5.8 unidades de magnitud, apuntan en direcciones con una diferencia de 55°. Encuentre el producto escalar de los dos vectores.
9. Dos vectores, $\vec{r}$ y $\vec{s}$ se encuentran en el plano xy. Sus magnitudes son 4.5 y 7.3 unidades, respectivamente; sus direcciones son 320° y 85° medidas desde el eje positivo x en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. ¿Cuál es el valor de $\vec{r} \cdot \vec{s}$?
10. *a*) Calcule $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, donde $\vec{a} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, y $\vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$. *b*) Encuentre el ángulo entre $\vec{r}$ y el eje $+z$. *c*) Encuentre el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

11-3 Potencia

11. En 3.5 s una mujer de 57 kg sube corriendo una escalera que tiene una elevación de 4.5 m. ¿Qué potencia promedio deberá aplicar?
12. En un funicular para 100 esquiadores, una máquina levanta con rapidez constante a pasajeros que en promedio pesan 667 N a una altura de 152 m. En 55.0 s. Calcule la potencia generada por el motor, suponiendo que no haya pérdidas por fricción.
13. Un nadador se desplaza por el agua con una rapidez de 0.22 m/s. La fuerza de resistencia al avance opuesta a este movimiento es 110 N. ¿Cuánta potencia desarrolla?
14. El *Hindenburg*, un globo aerostático lleno con hidrógeno (véase Fig. 11-24), alcanzaba una velocidad de 77 nudos, con motores que generaban 4,800 hp. Calcule la fuerza de resistencia del aire al avance a esa velocidad.

FIGURA 11-24. Ejercicio 14.

15. ¿Cuánta potencia en caballos de fuerza, debe alcanzar el motor de un automóvil de 1,600 kg que va a 26 m/s (94 km/h) en una carretera plana, si las fuerzas de resistencia suman 720 N?
16. El motor de una bomba de agua está calibrado a 6.6 hp. ¿A qué profundidad de un pozo puede extraerse agua por bombeo con una rapidez de 220 gal/min?
17. Suponga que su automóvil promedia 30 mi/gal de gasolina. *a*) ¿Qué distancia podría recorrer con 1 kW · h de energía consumida? *b*) Si conduce a 55 mi/h, ¿con qué rapidez está consumiendo la energía? El calor de combustión de la gasolina es 140 MJ/gal.
18. ¿Qué potencia desarrolla una afiladora cuya rueda tiene un radio de 20.7 cm y realiza 2.53 rev/s cuando la herramienta que se desea afilar, se sostiene contra la rueda con una fuerza de 180 N? El coeficiente de fricción entre ésta y la herramienta es 0.32.
19. Un elevador totalmente cargado tiene una masa total de 1,220 kg. Debe bajar 54.5 m en 43.0 s. La masa del contrapeso es de 1,380 kg. Calcule en hp la potencia generada por el motor. No tenga en cuenta el trabajo requerido para arrancar y detener el elevador, es decir, suponga que se desplaza con rapidez constante.
20. Un avión de propulsión va a 184 m/s. En cada segundo el motor recibe 68.2 m^3 de aire que tiene una masa de 70.2 kg. Con el aire quema 2.92 kg de combustible por segundo. La energía sirve para comprimir los productos de la combustión y expulsarlos por la parte trasera del motor a 497 m/s respecto al plano. Determine *a*) el empuje del motor del avión, y *b*) la potencia generada (caballo de fuerza).

11-4 Trabajo realizado por una fuerza variable

21. Un objeto de 10 kg se mueve por el eje x. La aceleración en función de su posición aparece en la figura 11-25. ¿Qué trabajo neto se realiza en él cuando pasa de $x = 0$ a $x = 8.0$ m?

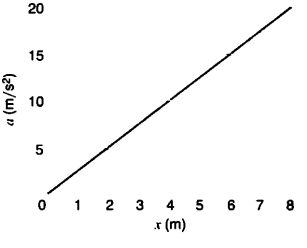


FIGURA 11-25. Ejercicio 21.

22. Sin fricción, un bloque de 5.0 kg se desplaza en línea recta por una superficie horizontal, bajo la influencia de una fuerza que varía con la posición, como se indica en la figura 11-26. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza a medida que el bloque pasa del origen a $x = 8.0$ m?

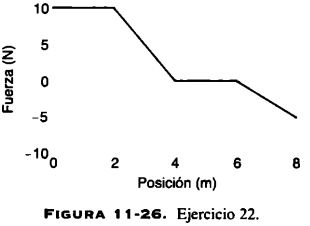


FIGURA 11-26. Ejercicio 22.

23. La figura 11-27 muestra un resorte provisto de un puntero, que cuelga al lado una escala graduada en milímetros. Tres pesas penden de él, una a la vez como se muestra. *a*) Si se le quitan las pesas, ¿qué marca indicará el puntero en la escala? *b*) Calcule el peso *W*.

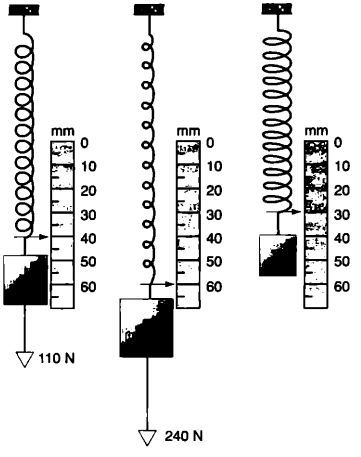


FIGURA 11-27. Ejercicio 23.

24. Un resorte tiene una constante de fuerza de 15.0 N/cm. *a*) ¿Cuánto trabajo se necesita para extenderlo 7.60 mm respecto a su posición relajada? *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para extenderlo otros 7.60 mm?

11-5 Trabajo realizado por una fuerza variable: el caso bidimensional (Opcional)

25. Integre a lo largo del arco, y demuestre que el trabajo efectuado por la gravedad en el problema resuelto 11-5 es igual a $-mgh$.
26. Un objeto de 0.675 kg de masa en una mesa sin fricción está conectado a una cuerda que pasa por un hoyo en el centro del círculo horizontal donde el objeto se mueve con rapidez constante. *a*) Si el radio del círculo es 0.500 m y si la rapidez es 10.0 m/s, calcule la tensión de la cuerda. *b*) Se comprueba lo siguiente: al jalar 0.200 m más de la cuerda hacia abajo por el hoyo, con lo cual el radio se reduce a 0.300 m, se multiplica por 4.63 la tensión original de la cuerda. Calcule el trabajo total efectuado por la cuerda en el objeto durante la disminución del radio.

11-6 Energía cinética y teorema de trabajo-energía

27. Un electrón de conducción en un material de cobre cerca del cero absoluto de temperatura, tiene una energía de 4.2 eV. ¿Cuál es su rapidez?
28. Calcule la energía cinética de los siguientes objetos que se desplazan con determinada rapidez: *a*) un defensa de fútbol americano de m = 110 kg que corre a 8.1 m/s; *b*) una bala de 4.2 g a 950 m/s, y *c*) el portaaviones *Nimitz*, de 91,400 ton a 32.0 nudos.
29. A un protón (núcleo del átomo de hidrógeno) se le acelera en un acelerador lineal. En las etapas de este aparato recibe una aceleración en línea recta a 3.60×10^{15} m/s^2. Si un protón entra en una de ellas moviéndose inicialmente con una rapidez de 2.40×10^7 m/s, y si la etapa tiene 3.50 cm de largo, *a*) calcule su rapidez al final de la etapa, y *b*) la ganancia de energía cinética conseguida de la aceleración. La masa del protón es 1.67×10^{-27} kg. Exprese la energía en electrón-volt.
30. Una fuerza individual actúa sobre una partícula en movimiento rectilíneo. En la figura 11-28 se muestra una gráfica de la velocidad de la partícula en función del tiempo. Encuentre el signo (positivo o negativo) del trabajo efectuado por la fuerza en ella, en los intervalos *AB*, *BC*, *CD* y *DE*.

FIGURA 11-28. Ejercicio 30.

31. Una fuerza opera sobre una partícula de 2.80 kg en forma tal, que la posición de esta última en función del tiempo está dada por $x = (3.0 \text{ m/s})t - (4.0 \text{ m/s}^2)t^2 + (1.0 \text{ m/s}^3)t^3$. *a*) Determine el trabajo realizado por la fuerza durante los primeros 4.0 s. *b*) ¿Con qué rapidez instantánea efectúa trabajo en la partícula en el momento $t = 3.0$ s?
32. Una vez cada año, la Tierra da una vuelta alrededor del Sol. ¿Cuánto trabajo tendría que hacerse en ella para detenerla respecto a él? Consulte en el apéndice C los datos numéricos y desprecie la rotación de la Tierra alrededor de su eje.
33. Un automóvil de 3,700 lb (m = 1,600 kg) parte del reposo en una carretera plana, y alcanza una rapidez de 45 mi/h (72 km/h) en 33 s. *a*) ¿Cuál es su energía cinética al final de los 33 s? *b*) ¿Cuál es la potencia neta promedio que se le suministra durante ese intervalo? *c*) ¿Cuál es la potencia instantánea al cabo de él, suponiendo que la aceleración era constante?

11-7 Trabajo y energía cinética en el movimiento rotacional

34. Una molécula tiene una inercia rotacional de 14,000 u · pm^2 y gira con una rapidez angular de 4.30×10^{12} rad/s. *a*) Exprese la inercia rotacional en kg·m^2. *b*) Calcule la energía cinética rotacional en eV.
35. La molécula de oxígeno tiene una masa total de 5.30×10^{-26} kg y una inercia rotacional de 1.94×10^{-46} kg · m^2 alrededor de un eje que cruza el centro perpendicularmente a la línea que une los átomos. Suponga que está en un gas que tiene una rapidez media de 500 m/s, y que su energía cinética rotacional equivale a dos terceras partes de su energía cinética traslacional. Determine su velocidad angular promedio.
36. En Europa se emplean camiones de reparto que operan por medio de la energía almacenada en un volante. Se carga usando un motor eléctrico que hace que el volante alcance su rapidez máxima de 624 rad/s. El volante es un cilindro sólido y homogéneo con una masa de 512 kg, y con un radio de 97.6 cm. *a*) ¿Cuál es su energía cinética después de ser cargado? *b*) Si el camión opera con una potencia promedio de 8.13 kW, ¿cuántos minutos puede funcionar entre cargas?

37. Una rueda de 31.4 kg con 1.21 m de radio, gira a 283 rev/min. Debemos detenerla en 14.8 s. Determine la potencia promedio requerida. Suponga que la rueda es un aro delgado.

38. Dos ruedas, A y B, están conectadas mediante una banda como se ve en la figura 11-29. El radio de B es el triple del de A. ¿Cuál sería la razón de las inercias de rotación I_A/I_B si *a*) las dos ruedas tienen el mismo momento angular, y *b*) si tienen la misma energía cinética rotacional? Suponga que la correa no presenta deslizamiento.

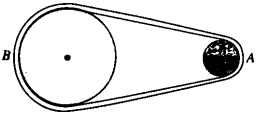


FIGURA 11-29. Ejercicio 38.

39. Suponga que la Tierra es una esfera de densidad uniforme. *a*) Calcule su energía cinética rotacional. *b*) Suponga que ésta puede aprovecharse en usos prácticos. ¿Cuánto tiempo generará la Tierra 1.00 kW de potencia a los 6.17×10^9 habitantes?

11-8 Energía cinética en colisiones

40. La última etapa de un cohete va a una rapidez de 7,600 m/s. Se compone de dos partes que están unidas firmemente, a saber: una caja de cohete con una masa de 290.0 kg y una cápsula para la tripulación, y el equipo con una masa de 150.0 kg. Cuando se suelta la abrazadera, un resorte comprimido separa las dos partes con una rapidez relativa de 910.0 m/s. *a*) ¿Qué rapidez presentan después de haber sido separadas? Suponga que todas las velocidades se dan en la misma línea. *b*) Encuentre la energía cinética total de las dos partes antes y después de separarse, explicando además la diferencia, si es que existe.

41. Un vagón de ferrocarril de 35.0 ton choca con un furgón de cola. Se acoplan y 27.0% de la energía cinética inicial se disipa en forma de calor, sonido, vibraciones, etc. Calcule el peso del furgón.

42. Un cuerpo de 8.0 kg de masa va a 2.0 m/s sin la influencia de ninguna fuerza externa. En cierto momento ocurre una explosión interna que lo divide en dos partes de 4.0 kg de masa cada una; la explosión le imparte al sistema una energía cinética traslacional de 16 J. Ninguna de las partes abandona la línea del movimiento original. Determine la rapidez y la dirección de su movimiento después de la explosión.

43. Demuestre que un neutrón lento (neutrón térmico) que se dispersa 90° en una colisión elástica con un deuterón inicialmente en reposo, pierde dos terceras partes de su energía cinética original. (La masa de un neutrón es 1.01 u; la de un deutrón, 2.01 u.)

44. Cierto núcleo en reposo se desintegra de modo espontáneo en tres partículas. Se detectan dos de ellas; su masa y velocidad se incluyen en la figura 11-30. *a*) ¿Cuál es el momento de la tercera partícula que, según se sabe, tiene una masa de 11.7×10^{-27} kg? *b*) ¿Cuánta energía cinética en MeV se produce en el proceso de desintegración?

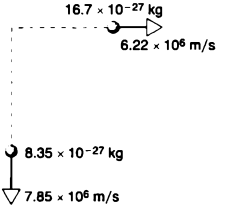


FIGURA 11-30. Ejercicio 44.

PROBLEMAS

1. Los campos eléctricos pueden servir para extraer electrones de los metales. Si se quiere extraer un electrón del tungsteno, el campo eléctrico deberá realizar 4.5 eV de trabajo. Supóngase que la distancia en la que opera es 3.4 nm. Calcule la fuerza mínima que ha de ejercer en el electrón en cuestión.

2. Se usa una cuerda para bajar verticalmente un bloque de masa M una distancia d con una aceleración descendente constante de $g/4$. *a*) Determine el trabajo hecho por la cuerda en el bloque. *b*) Determine el trabajo realizado por la fuerza de gravedad.

3. La figura 11-31 contiene un sistema de poleas diseñado para facilitar el levantamiento de una carga pesada L. Suponga que la fricción puede ignorarse en todas partes y que las poleas a la cual está sujeta tienen un peso total de 20.0 lb. Debe elevarse 12.0 ft una carga de 840 lb. *a*) ¿Cuál es la fuerza mínima aplicada F que puede hacerlo? *b*) ¿Cuánto trabajo debe realizarse contra la gravedad al alzar la carga 12.0 ft? *c*) ¿Qué distancia debe ejercerse la fuerza para que levante la carga 12.0 ft? *d*) ¿Cuánto trabajo debe realizar la fuerza aplicada F para hacerlo?

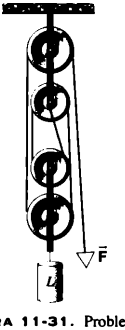


FIGURA 11-31. Problema 3.

4. Un trabajador puede levantar del suelo un bloque de 75 kg y colocarlo en una plataforma de carga o empujarlo del suelo por

una pendiente sin fricción hasta ella. Para levantarlo se requieren 680 J de trabajo. Para empujarlo por la pendiente, se debe aplicar una fuerza mínima de 320 N. Determine el ángulo que la pendiente forma con la horizontal.

5. Un caballo tira de un carro con una fuerza de 42.0 lb en un ángulo de 27.0° con la horizontal, y trota con una rapidez de 6.20 mi/h. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza en 12.0 min? (*b*) Calcule la potencia generada por el caballo (en hp, naturalmente).
6. Un malacate de vapor (Fig. 11-32), arrastra un bloque de granito de 1,380 kg pendiente arriba con una rapidez constante de 1.34 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la pendiente es 0.41. ¿Cuánta potencia deberá suministrar el malacate?

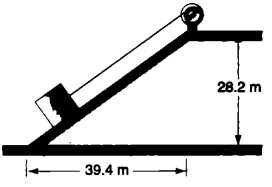


FIGURA 11-32. Problema 6.

7. Demuestre que la velocidad v alcanzada por un automóvil de masa m que es impulsado por la potencia P constante, está dada por

$$v = (3xP/m)^{1/3},$$

donde x es la distancia recorrida desde el reposo.

8. *a*) Demuestre que la potencia producida por un avión que va con velocidad constante v en un vuelo a nivel, es proporcional a v^3. Suponga que la fuerza aerodinámica de resistencia al avance está dada por $D = bv^2$. *b*) ¿En qué factor debe aumentar la potencia de los motores para incrementar en 25% la rapidez del aire?
9. Una escalera mecánica conecta un piso con otro a 8.20 m de altura. Mide 13.3 m de largo, y recorre su extensión a 62.0 cm/s. *a*) ¿Qué potencia debe generar su motor si debe transportar un máximo de 100 personas por minuto, cuya masa promedio es de 75.0 kg? *b*) Un hombre de 83.5 kg sube por la escalera en 9.50 s. ¿Cuánto trabajo realiza el motor en él? *c*) Si diera vuelta a la mitad del ascenso y descendiera por la escalera manteniendo el mismo nivel en el espacio, ¿realizará el motor trabajo en él? De ser así, ¿qué potencia genera al hacerlo? *d*) ¿Hay alguna (otra) forma en que podría caminar por la escalera mecánica sin consumir energía del motor?
10. La potencia de salida de un motor en un trolebús depende de la velocidad y está dada por $P(v) = av(b - v^2)$, donde a y b son constantes, y $P = 0$ cuando $v^2 > b$. *a*) ¿A qué rapidez se da la potencia máxima de salida? *b*) ¿A qué rapidez ejerce el motor su fuerza máxima? *c*) Cuando $v = 0$, la potencia de salida es cero. ¿Significa ello que el motor no estará disponible para mover el trolebús si inicialmente se halla en reposo? Explique su respuesta.
11. La fuerza ejercida sobre un objeto es $\vec{F} = F_0(x/x_0 - 1)\hat{i}$. Calcule el trabajo efectuado al pasarlo de $x = 0$ a $x = 3x_0$, *a*) graficando $F_x(x)$ y encontrando el área bajo la curva, y *b*) evaluando analíticamente la integral.
12. *a*) Estime el trabajo efectuado por la fuerza que aparece en la gráfica (Fig. 11-33) al desplazar una partícula de $x = 1$ m a $x = 3$ m. Perfeccione su método para ver cuánto se aproximó a la respuesta exacta de 6 J. *b*) La curva está dada analíticamente por $F_x = A/x^2$, donde $A = 9\ \text{N}\cdot\text{m}^2$. Muestre cómo calcular el trabajo efectuado por medio de las reglas de integración.

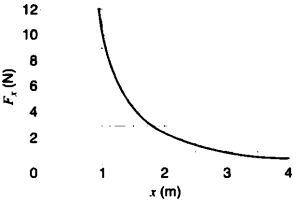


FIGURA 11-33. Problema 12.

13. Un resorte "rígido" tiene una ley de fuerza dada por $F = -kx^3$. El trabajo necesario para estirarlo del estado relajado $x = 0$ a la longitud alargada $x = l$ es W_0. En términos de W_0, ¿cuánto trabajo se requiere para extenderlo de la longitud alargada l a la longitud $2l$?
14. Dos resortes con una fuerza constante k y una longitud relajada l_0, están conectados en una línea recta como se muestra en la figura 11-34. *a*) Encuentre una expresión del trabajo necesario para mover el punto de unión entre los dos resortes a través de una distancia perpendicular x desde el punto de equilibrio. *b*) Use la expansión binomial para encontrar el primer término (diferente de cero) en la expresión del trabajo cuando $x << l_0$.

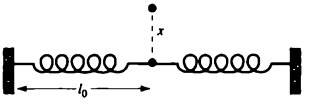


FIGURA 11-34. Problema 14.

15. Cuatro resortes con una fuerza constante k y una longitud no alargada l_0, están conectados como se ve en la figura 11-35. Obedecen la ecuación 11-15 en el estiramiento y en la compre-

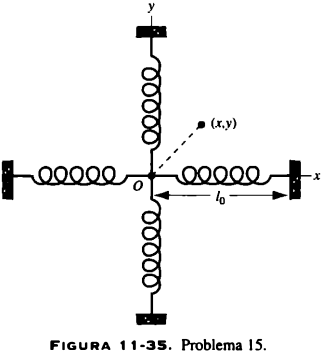


FIGURA 11-35. Problema 15.

sión. Demuestre que el trabajo requerido para pasar el punto de unión de la posición de equilibrio en una línea recta al punto x,y (con $x << l_0$ y $y << l_0$) es $W = kd^2$, donde $d^2 = x^2 + y^2$.

16. Un automóvil de 1,100 kg, va a 46 km/h en una carretera plana. Se aplican los frenos bastante tiempo para consumir 51 kJ de energía cinética. *a*) ¿Cuál es la rapidez final del automóvil? *b*) ¿Cuánta energía cinética debe eliminar los frenos para detenerlo?
17. Un hombre que corre tiene la mitad de la energía cinética que un niño con la mitad de su masa. El hombre aumenta su velocidad en 1.00 m/s, y luego tiene la misma energía cinética que el niño. ¿Cuál era la velocidad original de los dos?
18. Un proyectil de 0.550 kg es lanzado del borde de un risco con una energía cinética inicial de 1,550 J y en su punto más alto alcanza 140 m arriba del punto de lanzamiento. *a*) ¿Cuál es el componente horizontal de su velocidad? *b*) ¿Cuál es el componente vertical de su velocidad justo después del lanzamiento? *c*) En un instante de su vuelo, se descubre que el componente vertical es 65.0 m/s. En ese momento, ¿a qué distancia se encuentra por arriba o por debajo del punto de lanzamiento?
19. Un cometa con una masa de 8.38×10^{11} kg choca contra la Tierra a una velocidad relativa de 30 km/s. *a*) Calcule la energía cinética del cometa en "megatones de dinamita"; la detonación de 1 millón de toneladas de dinamita libera 4.2×10^{15} J de energía. *b*) El diámetro del cráter abierto por una gran explosión es proporcional a la energía explosiva liberada a la potencia un tercio; un megatón de dinamita produce un cráter de 1 km de diámetro, aproximadamente. ¿Qué diámetro tiene el producido por el impacto del cometa? (En el pasado, los efectos atmosféricos provenientes de los impactos fueron quizá la causa de la extinción masiva de muchas especies de animales y plantas; se cree que muchos dinosaurios se extinguieron por este mecanismo.)
20. Un bloque de 263 g se suelta contra un resorte vertical con una constante de fuerza $k = 2.52$ N/cm (Fig. 11-36). Se junta al resorte y éste se comprime 11.8 cm antes de quedar en reposo momentáneo. Mientras está comprimiéndose, ¿cuánto trabajo realizan *a*) la fuerza de gravedad, y *b*) el resorte? *c*) ¿Qué rapidez tiene el bloque poco antes de chocar contra el resorte? *d*) Si se duplica la rapidez inicial del bloque, ¿cuál será la compresión máxima del resorte? Ignore la fricción.

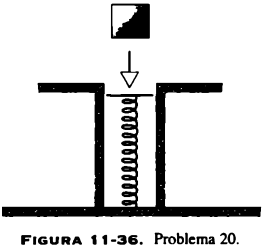


FIGURA 11-36. Problema 20.

21. Un objeto de masa m acelera uniformemente del reposo, y alcanza una rapidez v_f en el tiempo t_f. *a*) Demuestre que el trabajo realizado en él en función del tiempo t en términos de v_f y t_f es

$$W = \frac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2.$$

b) ¿Cuál es la potencia instantánea aplicada al objeto en función del tiempo t?
22. Una varilla uniforme de acero que mide 1.20 m de largo y que tiene una masa de 6.40 kg, tiene conectada en un extremo una bola pequeña de 1.06 kg de masa. Se la hace girar en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por su punto medio. En cierto momento se observa que gira con una rapidez angular de 39.0 rev/s. Debido a la fricción en el eje se detiene en 32.0s. Suponiendo una torca constante de fricción, calcule *a*) la aceleración angular, *b*) la torca de retraso que ejerce la fricción del eje, *c*) la energía cinética que se pierde a causa de la fricción del eje y *d*) el número de revoluciones efectuadas durante los 32.0 s. *e*) Ahora suponga que sabemos que la torca de fricción no es constante. ¿Cuál de las magnitudes *a*), *b*), *c*) o *d*) puede calcularse todavía sin necesidad de información complementaria? Si hay alguna, indique su valor.
23. Un automóvil de 1,040 kg tiene cuatro ruedas de 11.3 kg. ¿Qué parte de la energía cinética total del vehículo se debe a la rotación de ellas alrededor de su eje? Suponga que tienen la misma inercia rotacional que los discos de igual masa y tamaño. Explique por qué no necesita usted conocer el radio de las llantas.
24. Un hombre está de pie en una plataforma que gira con una rapidez angular de 1.22 rev/s; sus brazos están extendidos y él sostiene una pesa en cada mano. Con ellas en esta posición la inercia rotacional del hombre, de las pesas y de la plataforma es 6.13 kg·m². Si al mover las pesas disminuye la inercia rotacional a 1.97 kg · m², *a*) ¿cuál es la rapidez angular resultante de la plataforma, y *b*) ¿cuál es la razón de la nueva energía cinética a la original? Suponga que la plataforma gira sin fricción.
25. En el Capítulo 10, ejercicio 21, se obtuvo la rapidez angular final de dos ruedas acopladas. ¿Qué parte de la energía cinética original se perdió cuando se hizo el acoplamiento?
26. En el Capítulo 10, problema 11, una cucaracha que corría en una Susana perezosa se detiene para comer una migaja de pan. ¿Cuánta energía cinética se pierde?
27. En el Capítulo 10, problema 12, dos patinadores que se sostienen en un poste *a*) originalmente se movían en un círculo de 2.92 m de diámetro, pero *b*) el diámetro se redujo a 0.940 m cuando jalaron al poste. Calcule la energía cinética del sistema en las partes *a*) y *b*). ¿A qué se debió el cambio?
28. Una sonda espacial no tripulada de 2,500 kg, se desplaza en línea recta con una rapidez constante de 300 m/s. En ella, un motor del cohete realiza una combustión dando un empuje de 3,000 N que dura 65.0 s. ¿Qué cambio experimenta la energía cinética de la sonda si el empuje es *a*) hacia atrás, *b*) hacia adelante o *c*) hacia los costados? Suponga que la masa del combustible expulsado es despreciable en comparación con la de la sonda espacial. (Véase también el ejercicio 13 del Capítulo 6.)
29. Una fuerza ejerce un impulso J sobre un objeto de masa m, cambiando su rapidez de v_i a v_f. La fuerza y el movimiento del objeto siguen la misma línea recta. Demuestre que el trabajo ejecutado por la fuerza es $\frac{1}{2} J(v_i + v_f)$.
30. Suponga que las aspas de un helicóptero empujan verticalmente hacia abajo la columna cilíndrica de aire que desplazan al girar. La masa total del helicóptero es 1,820 kg, y las aspas miden 4.88 m de largo. Calcule la potencia mínima necesaria para mantenerlo flotando en el aire. Suponga que la densidad de éste es 1.23 kg/m³.

31. Con una rapidez v_i, se lanza una bola de masa m hacia el cañón de una escopeta de resorte de masa M, que se encuentra inicialmente en reposo en una superficie sin fricción (véase Fig. 11-37). La bola se pega al cañón en el punto de la compresión máxima del resorte. No se pierde energía en la fricción. *a)* ¿Qué velocidad alcanza la escopeta después que la bola se detiene en el cañón? *b)* ¿Qué parte de la energía cinética inicial de la bola se pierde en el trabajo realizado en el resorte?

FIGURA 11-37. Problema 31.

32. Un bloque de masa $m_1 = 1.88$ kg, resbala por una mesa sin fricción a 10.3 m/s. Delante de ella y moviéndose en la misma dirección, un bloque de masa $m_2 = 4.92$ kg se desplaza a 3.27 m/s. Un resorte sin masa y con constante de fuerza $k = 11.2$ N/cm, se sujeta a la parte posterior de m_2, como se aprecia en la figura 11-38. Cuando los bloques chocan, ¿cuál es la compresión máxima del resorte? (*Sugerencia*: En el momento de máxima compresión, los dos bloques se mueven como uno solo; calcule la velocidad indicando que la colisión es completamente inelástica en este punto.)

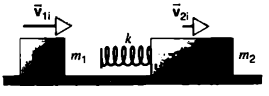


FIGURA 11-38. Problema 32.

33. Chocan dos objetos, A y B. El primero tiene una masa de 2.0 kg, y el segundo de 3.0 kg. Las velocidades antes del choque son $\vec{v}_{iA} = (15\text{ m/s})\hat{i} + (30\text{ m/s})\hat{j}$ y $\vec{v}_{iB} = (-10\text{ m/s})\hat{i} + (5.0\text{ m/s})\hat{j}$. Después de ella, $\vec{v}_{fA} = (-6.0\text{ m/s})\hat{i} + (30\text{ m/s})\hat{j}$. ¿Cuánta energía cinética se ganó o se perdió en la colisión? (véase Cap. 6, Ej. 25.)

34. Suponga que hay dos observadores, uno cuyo cuerpo está sujeto al suelo, y otro cuyo cuerpo está sujeto, digamos, a un tren que avanza con velocidad uniforme u respecto al suelo. Los dos ven que una partícula inicialmente en reposo respecto al tren, es acelerada por una fuerza constante aplicada a ella durante el tiempo t hacia adelante. *a)* Demuestre que para ambos observadores, el trabajo efectuado por la fuerza es igual a la ganancia de energía cinética de la partícula, sólo que para uno la medición de estas cantidades es $\frac{1}{2}ma^2t^2$, para el otro es $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. Aquí, a es la aceleración común de la partícula de masa m. *b)* Explique las diferencia en el trabajo efectuado por la misma fuerza, en función de las distancias en que los observadores miden la fuerza que opera en el tiempo t. Explique las diversas energías cinéticas finales medidas por cada observador, atendiendo al trabajo que la partícula podría hacer al detenerla en relación con el cuerpo del otro observador.

35. En una colisión completamente inelástica, una partícula de masa m_1 que se desplaza con una rapidez v_{1i}, choca directamente con otra de masa m_2, inicialmente en reposo. *a)* ¿Qué energía cinética tiene el sistema antes de la colisión? *b)* ¿Qué energía cinética tiene después de ella? *c)* ¿Qué parte de la energía cinética original se perdió? *d)* Sea v_{cm} la velocidad del centro de masa del sistema. Vea la colisión desde un marco de referencia primado que se mueve con el sistema centro de masa, de modo que $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$ y $v_{2i} = -v_{cm}$. Repita las partes *a)*, *b)* y *c)* como las ve un observador en este marco de referencia. ¿Es la misma en los tres casos la energía cinética que se pierde?

36. Considere una situación como la del Capítulo 6, problema 16 (Fig. 6-32), pero ahora, todas las colisiones pueden ser inelásticas, algunas elásticas y algunas inelásticas; las masas son ahora m, m' y M. Demuestre que, para transferir la energía cinética máxima de m a M, el cuerpo intermedio debería tener una masa $m' = \sqrt{mM}$, es decir, la media geométrica de las masas adyacentes. (Es interesante señalar, que la misma relación se da entre masas de capas sucesivas del aire en el cuerco exponencial de la acústica. (Consúltese "Energy Transfer in One- Dimensional Collisions of Many Objects", de John B. Hart y Robert B. Herrmann, *American Journal of Physics*, enero de 1968, p. 46.)

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. La potencia de salida de un motor en un automóvil controlado por radio de 2.0 kg, depende de su velocidad y está dada por

$$P = v(5 - v)/3$$

donde P se mide en watts y v en m/s. Suponga que el automóvil arranca del reposo, y genere numéricamente una gráfica de posición en función del tiempo y de la velocidad en función del tiempo del vehículo.

CAPÍTULO 12

ENERGÍA 2: ENERGÍA POTENCIAL

En el capítulo anterior iniciamos el estudio de la energía en una introducción al trabajo y a la energía cinética. En éste trataremos de otra clase de energía, la energía potencial, que puede almacenarse en un sistema cuando ciertos tipos de fuerzas actúan entre sus componentes.

Considerando a las energías cinética y potencial de un sistema, tenemos la ley de conservación de la energía mecánica que nos ofrece un medio para entender los problemas mecánicos basándose en las leyes de Newton; pero a menudo nos da ideas nuevas o distintas. A partir de esta ley podemos reanalizar varios problemas del movimiento traslacional y rotacional que resolvimos antes mediante las leyes de Newton. En el siguiente capítulo seguiremos ampliando y enriqueciendo los conceptos de energía en una forma más general de la ley de conservación de la energía.

12-1 FUERZAS CONSERVATIVAS

La energía potencial se define sólo para cierta clase de fuerzas denominadas *fuerzas conservativas.* Antes de definir la fuerza conservativa, vamos a considerar algunos ejemplos del comportamiento de tres fuerzas: la de un resorte, $F_x = -kx$, la gravitacional, $F_y = mg$; y la de fricción, $f = \mu N$. Queremos analizar el trabajo efectuado por ellas cuando una partícula sobre la que operan describe una trayectoria y vuelve a su punto de partida.

1. *Fuerza del resorte.* En la figura 12-1 vemos un bloque de masa m sujetado a un resorte de fuerza constante k; el bloque se desliza por una superficie horizontal sin fricción. Al inicio (Fig. 12-1*a*), un agente externo ha comprimido el resorte de modo que el bloque se desplaza a $x = +d$ desde su posición en $x = 0$ cuando el resorte está relajado. De repente el agente externo se elimina en $t = 0$ y el resorte comienza a efectuar trabajo en el bloque. Al pasar éste de $x = +d$ a $x = 0$, el resorte realiza trabajo $+\frac{1}{2}kd^2$ (Ec. 11-16). De acuerdo con el teorema de trabajo-energía, este trabajo se manifiesta como energía cinética del bloque.

A medida que el bloque cruza $x = 0$ (véase Fig. 12-1*b*), la dirección de la fuerza del resorte se invierte y ahora su acción consiste en disminuir la velocidad del bloque, haciendo trabajo *negativo* en él. Cuando se detiene momentáneamente el bloque en $x = -d$, como en la figura 12-1*c*, el trabajo negativo llevado a cabo por el resorte entre $x = 0$ y $x = -d$ es $-\frac{1}{2}kd^2$. Asimismo, de $x = -d$ a $x = 0$, la fuerza del resorte efectúa trabajo $+\frac{1}{2}kd^2$, y de $x = 0$ de nuevo a $x = +d$ realiza trabajo $-\frac{1}{2}kd^2$. El bloque vuelve a ocupar su posición original (compare las Figs. 12-1*a* y 12-1*e*); al sumar las cuatro contribuciones individuales comprobamos que el trabajo total efectuado en el bloque por la fuerza del resorte en el ciclo completo es cero.

2. *Fuerza de gravedad.* La figura 12-2 muestra un ejemplo de un sistema compuesto por una bola sobre la que opera la gravedad de la Tierra. La bola es proyectada hacia arriba por un agente externo que le imparte una rapidez inicial v_0 y, por tanto, una energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$. Al subir la bola, la Tierra efectúa trabajo en ella y termina deteniéndolo en $y = h$. El trabajo hecho por ella cuando la bola sube de $y = 0$ a $y = h$

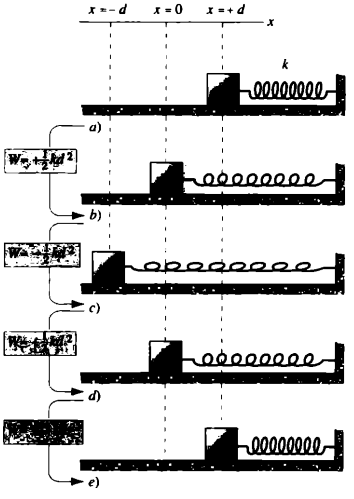


FIGURA 12-1. Un bloque se mueve bajo la acción de la fuerza de un resorte de *a*) $x = +d$ a *b*) $x = 0$, hacia la izquierda, de *c*) $x = -d$ a *d*) $x = 0$, moviéndose a la derecha, y de *e*) de vuelta a $x = +d$. El trabajo efectuado por el resorte entre las parejas de posiciones sucesivas se muestra en las casillas de la izquierda. Nótese que el trabajo total realizado por la fuerza del resorte en el bloque es cero en el viaje redondo.

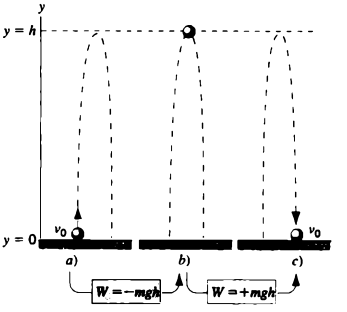


FIGURA 12-2. Se arroja una bola hacia arriba contra la gravedad de la Tierra. En *a*) acaba de dejar su punto de partida, en *b*) alcanzó la parte superior de su trayectoria y, en *c*) retornó a su altura original. El trabajo efectuado por la gravedad entre las parejas de posiciones sucesivas aparece en las casillas del fondo. Nótese que el trabajo total ejecutado por la fuerza de gravedad en la bola es cero en el viaje redondo.

es $-mgh$ (la fuerza constante mg multiplicada por la distancia h, negativa porque la fuerza y el desplazamiento siguen dirección contraria al subir la bola). Al caer de $y = h$ a $y = 0$, la fuerza de gravedad realiza trabajo $+mgh$. El trabajo total ejecutado en la bola por la fuerza de gravedad durante el viaje redondo es cero.

3. *Fuerza de fricción.* En este tercer ejemplo vamos a examinar un disco de masa m situado en el extremo de una varilla delgada pero rígida de longitud R. Le imprimimos una rapidez inicial v_0, y la varilla lo obliga a moverse en un círculo de radio R sobre una superficie horizontal que ejerce una fuerza de fricción en él (véase Fig. 12-3). La única fuerza que efectúa trabajo en el disco es la de fricción, ejercida *por* la superficie *sobre* el fondo del disco. Actúa en dirección contraria a la dirección en que se mueve el disco, por lo cual el trabajo hecho en él siempre es negativo. Después que ha vuelto a su punto de origen, el trabajo ejecutado por la fuerza de fricción no es cero en absoluto; de hecho, el trabajo total del "viaje redondo" es en realidad una magnitud negativa.

Nótese la diferencia entre los tres ejemplos. En los dos primeros (la fuerza del resorte y de la gravedad), el objeto retornaba a su punto de partida una vez terminado el viaje redondo, sin que se efectuara trabajo total en él. En el tercero (la fuerza de fricción), se realiza trabajo total en el objeto durante el viaje redondo. Conviene ponerle nombre a las fuerzas a fin de identificar su diferencia básica de comportamiento. En concreto,

> *Considere el trabajo total efectuado por una fuerza que opera sobre una partícula a medida que ésta se mueve alrededor de una trayectoria cerrada y retorna a su punto de partida. Si es cero, la llamaremos fuerza conservativa. Si la fuerza total del viaje redondo no es cero, la llamaremos fuerza no conservativa.*

La fuerza restauradora elástica (la del resorte) y la gravedad constituyen dos ejemplos de una fuerza conservativa. La fricción es un ejemplo de fuerza no conservativa.

Una segunda forma de averiguar si se trata de una fuerza conservativa o no conservativa se basa en una comparación del trabajo efectuado, cuando el objeto en cuestión se traslada de un lugar a otro siguiendo trayectorias diversas. Por ejemplo, supóngase que movemos paquetes de masa m del sótano al primer piso en un edificio de varios pisos, cada uno con una altura h. Si trasportamos un paquete del sótano al primer piso, la fuerza gravitacional (conservativa) que actúa sobre él realiza trabajo $W_g = -mgh$. En cambio, si primero lo llevamos al quinto piso ($W_g = -5mgh$) y luego lo devolvemos al primero ($W_g = +4mgh$), el trabajo total efectuado por la gravedad durante el proceso entero será $W_g = -mgh$, el mismo que si lo hubiéramos llevado directamente. No importa cuántos puntos intermedios de detención ni cuántas veces recorramos la misma trayectoria, cuando al fin lo pongamos en el primer piso el trabajo total efectuado por la gravedad entre la ubicación original del paquete (el sótano) y su ubicación final (el primer piso) será $-mgh$.

En cambio, consideremos, el comportamiento de la fuerza no conservativa de fricción en el sistema representado en

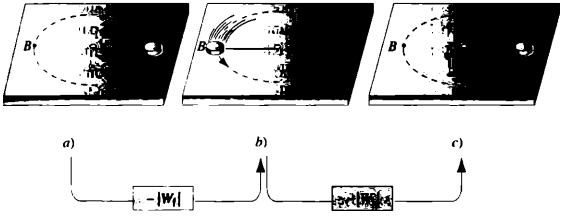


FIGURA 12-3. Un disco se mueve en un círculo sobre una superficie horizontal con fricción. Las posiciones indicadas representan *a*) un punto arbitrario de partida *A*, *b*) media revolución más tarde (en *B*), y *c*) otra media revolución más tarde (de nuevo en *A*). El trabajo efectuado por la fricción entre posiciones consecutivas se indica en las casillas del fondo. Nótese que el trabajo total que la fuerza de fricción efectúa en el disco *no* es cero en el viaje redondo, sino que por el contrario tiene el valor negativo $-2\,|W_f|$.

la figura 12-3, a medida que el disco describe dos trayectorias diferentes, de la posición *A* a la posición *B*. En un caso, recorre media revolución entre ambas posiciones y en el segundo lleva a cabo $1\frac{1}{2}$ revoluciones. Aunque se requiere mucho cuidado para calcular el trabajo hecho por la fuerza de fricción (véase Secc. 13-3), parece evidente que la magnitud del trabajo (negativo) realizado por la fricción es mayor en el segundo caso, porque la fuerza de fricción opera en una distancia más grande. En este caso, el trabajo dependerá de la trayectoria tomada entre las posiciones inicial y final del objeto en cuestión.

Lo anterior nos lleva a la segunda forma de distinguir las fuerzas conservativas.

Considere el trabajo efectuado por una fuerza que actúa sobre un objeto cuando éste pasa de una posición inicial a una posición final en una trayectoria arbitrariamente elegida. Si el trabajo es el mismo en todas las trayectorias, la fuerza será conservativa. En caso contrario, se tratará de una fuerza no conservativa.

Con ayuda de la figura 12-4 podemos demostrar que los dos criterios expuestos para identificar las fuerzas de conservación son equivalentes. En la figura 12-4*a* una partícula se desplaza por una trayectoria cerrada de *a* a *b* y de nuevo a *a*. Si sólo una fuerza de conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ operara sobre la partícula, el trabajo total realizado en ella por la fuerza durante el ciclo debería ser cero. Esto es,

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

o

$$\underbrace{\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}_{\text{Trayectoria 1}} + \underbrace{\int_b^a \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}_{\text{Trayectoria 2}} = 0, \qquad (12\text{-}1)$$

donde $W_{ab,1}$ significa "el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula pasa de *a* a *b* en la trayectoria 1" y $W_{ba,2}$ significa

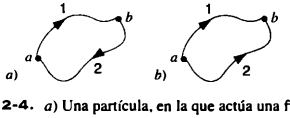


FIGURA 12-4. *a*) Una partícula, en la que actúa una fuerza conservativa, se mueve en círculo iniciando en el punto *a*. *b*) Una partícula comienza en el punto *a* y viaja al punto *b* siguiendo una de las trayectorias posibles.

"el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de *b* a *a* en la trayectoria 2". La ecuación 12-1 es la expresión matemática del *primer* criterio para identificar una fuerza conservativa.

Cuando se invierte la dirección en que se recorre una trayectoria cualquiera, se intercambian los límites de integración y se modifica el signo de desplazamiento; en otras palabras, el trabajo al ir de *a* a *b* se relaciona con el de ir de *b* a *a:*

$$\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int_b^a \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \text{(cualquier trayectoria)}$$

o, en el caso de la trayectoria 2,

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \qquad (12\text{-}2)$$

Al combinar las ecuaciones 12-1 y 12-2, se obtiene

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

o

$$\underbrace{\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}_{\text{Trayectoria 1}} = \underbrace{\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}_{\text{Trayectoria 2}}. \qquad (12\text{-}3)$$

Ésta es la representación matemática de la *segunda* definición de una fuerza conservativa: el trabajo efectuado por la fuerza es el mismo en cualquier trayectoria arbitraria entre *a* y *b*. Por tanto, la primera definición desemboca directamente en la segunda, y (con un argumento similar) ésta a su vez conduce a la primera, de modo que las dos son equivalentes.

12-2 ENERGÍA POTENCIAL

En la sección anterior describimos dos sistemas donde operan las fuerzas conservativa. Este tipo de sistemas tiene algunas características en común: constan por lo menos de dos objetos (el bloque y el resorte o la bola y la Tierra) que interactúan a través de una fuerza (la fuerza elástica o gravedad) que realiza trabajo y transfiere energía entre las partes del sistema a medida que se mueve una respecto a otra.

En situaciones donde una fuerza conservativa opera entre los objetos del sistema, es útil y conveniente definir otra clase de energía: la *energía potencial.* La energía potencial *U* se relaciona a la *configuración* de un sistema. Aquí "configuración" significa cómo las partes de un sistema están situadas o

dispuestas entre sí (por ejemplo, la compresión o estiramiento del resorte en el sistema de bloque-resorte o la altura de la bola en el sistema de bola-Tierra).

Cuando una fuerza conservativa realiza trabajo en un sistema, la configuración de sus partes cambia y por lo mismo la energía potencial pasa de su valor inicial U_i a su valor final U_f. El cambio de la energía potencial relacionada a una fuerza individual lo definimos así:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W, \qquad (12\text{-}4)$$

donde W es el trabajo relacionado por esa fuerza a medida que el sistema pasa de una configuración inicial específica a una configuración final también específica.

Es muy importante recordar que la energía potencial caracteriza al *sistema* y no a sus objetos individuales. Para hablar correctamente deberíamos referirnos a "la energía potencial elástica del sistema de bloque-resorte" o a "la energía potencial gravitacional del sistema de bola-Tierra" (*no* a "la energía potencial elástica del resorte" ni a "la energía potencial gravitacional de la bola"). Sin embargo, se produce el cambio de configuración del sistema bloque-resorte a causa del estiramiento y compresión del resorte. El bloque, supuestamente rígido, no cambia su forma al moverse. Por tanto, a menudo relacionamos la energía potencial del sistema bloque-resorte sólo al resorte. Asimismo, el cambio de configuración del sistema bola-Tierra se debe principalmente al movimiento de la primera, de ahí que a menudo relacionemos la energía potencial de este sistema sólo con la bola. Es verdad que la Tierra retrocede cuando proyectamos la bola hacia arriba, pero por tener mucho mayor masa su desplazamiento es insignificantemente pequeño en comparación con la de la bola.

Vamos, pues, a analizar el caso en que es preciso tener en cuenta el trabajo realizado sólo en un objeto del sistema. Si éste se mueve exclusivamente en la dirección x, su coordenada x es lo único que se requiere para especificar la configuración del sistema. Si con la ecuación 11-14 determinamos el trabajo efectuado por una fuerza en una dimensión, obtendremos

$$\Delta U = U(x_f) - U(x_i) = -W = -\int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx. \qquad (12\text{-}5)$$

La ecuación 12-5 nos permite calcular la diferencia de energía potencial entre dos sitios x_i y x_f de una partícula sobre la que opera una fuerza $F_x(x)$. No obstante, a menudo queremos conocer la energía potencial relacionada a un sitio o configuración arbitraria x respecto a cierta ubicación de referencia x_0:

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_x(x)\,dx. \qquad (12\text{-}6)$$

Sólo las diferencias o cambios de energía potencial son importantes; por eso, si queremos tener un valor conveniente, podemos seleccionar libremente el punto de referencia en cualquier ubicación adecuada y también definir la energía potencial $U(x_0)$ en el punto de referencia. Entonces la función $U(x)$ nos servirá para calcular la energía potencial en cualquier sitio arbitrario del sistema; por ejemplo, en x_1, x_2, y así sucesivamente. Si escogemos otro punto o valor de referencia para $U(x_0)$ entonces $U(x_1)$ y $U(x_2)$ cambiarán, no así las magnitudes de importancia física como $U(x_1) - U(x_2)$. Por consiguiente, el análisis del comportamiento dinámico no depende de la selección de $U(x_0)$.

Tal vez los estados inicial y final del sistema sean el mismo, es decir, la fuerza actúa sobre una partícula que está haciendo un "viaje redondo". Si queremos que la energía potencial tenga significado en tales casos, hemos de tener $\Delta U = U_f - U_i = 0$ porque i y f representan la misma ubicación. Entonces la ecuación 12-4 exige que W sea cero. Como hemos visto, ello sucede sólo tratándose de fuerzas conservativas. En consecuencia, *podemos relacionar la energía potencial sólo con las fuerzas conservativas.* En particular, como $W \neq 0$ en un viaje redondo, no podemos relacionar la energía potencial con la fuerza de fricción.

La inversa de la ecuación 12-6 nos permite calcular la fuerza partiendo de la energía potencial:

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \qquad (12\text{-}7)$$

En la ecuación 12-7 vemos otra manera de concebir la energía potencial: *es una función de la posición cuya derivada negativa es la fuerza.*

Ahora estamos en posibilidades de explicar el cálculo de la energía potencial con dos ejemplos de las fuerzas conservativa estudiadas en la sección 12-1: el sistema de bloque-resorte y el de bola-Tierra.

La fuerza del resorte

Decidimos que la posición de referencia x_0 del bloque en el sistema de bloque-resorte de la figura 12-1 sea aquella en que el resorte se encuentra en estado relajado ($x_0 = 0$) y definimos que la energía potencial del sistema es cero cuando el bloque está en ese sitio [$U(x_0) = 0$]. La energía potencial del sistema se calcula sustituyendo esos valores en la ecuación 12-6 y evaluando la integral de la fuerza del resorte $F_x(x) = -kx$:

$$U(x) - 0 = -\int_0^x (-kx)\,dx$$

o

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \qquad (12\text{-}8)$$

Siempre que desplazamos el bloque una distancia x de su punto de referencia, la energía potencial del sistema será $\frac{1}{2}kx^2$. El mismo resultado se consigue siempre que x es positiva o negativa; en otras palabras, la energía almacenada será la misma cuando el resorte se estire o se comprima determinada magnitud x.

Al diferenciar la ecuación 12-8 vemos que se satisface la ecuación 12-7:

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx = F_x.$$

La fuerza de gravedad

En el sistema de bola-Tierra representamos la coordenada vertical en vez de x y suponemos que la dirección ascendente es positiva. Seleccionamos el punto de referencia $y_0 = 0$ en la superficie de la Tierra y definimos $U(y_0) = 0$ en ese punto. Ahora estamos en condiciones de evaluar la energía potencial $U(y)$ del sistema a partir de la ecuación 12-6 cuando $F_y(y) = -mg$:

$$U(y) - 0 = -\int_0^y (-mg)\,dy$$

$$U(y) = mgy. \qquad (12\text{-}9)$$

Nótese que la ecuación 12-7 se satisface en el caso de esta energía potencial: $-dU/dy = -mg = F_y$

PROBLEMA RESUELTO 12-1. La cabina de un elevador de masa $m = 920$ kg asciende de la planta baja a la parte superior del World Trade Center de Nueva York, situado a una altura de $h = 412$ m sobre el nivel del suelo. ¿Cuál es el cambio de la energía potencial gravitacional del sistema cabina-Tierra?

Solución Con base en la ecuación 12-9 obtenemos

$$\Delta U = mg\,\Delta y = mgh = (920\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(412\text{ m})$$
$$= 3.7 \times 10^6\text{ J} = 3.7\text{ MJ}.$$

El resultado anterior es casi exactamente 1 kW · h; la cantidad equivalente de energía eléctrica cuesta unos cuantos centavos.

En la ecuación 12-4 vemos que la fuerza gravitacional que actúa sobre la cabina realiza un trabajo de -3.7 MJ al subir la cabina. El signo negativo es apropiado, porque la fuerza gravitacional que opera sobre ella y su desplazamiento siguen dirección es contrarias.

PROBLEMA RESUELTO 12-2. Al final de la vía de una terminal de ferrocarril, se impide que los trenes choquen contra la plataforma por medio de un amortiguador montado sobre un resorte rígido de constante de fuerza 1.25×10^8 N/m. Un día un tren choca contra el amortiguador y comprime el resorte una distancia de 5.6 cm cuando se lo detiene. ¿Cuál es la energía potencial guardada en el resorte con esa compresión?

Solución Tomamos $U = 0$ cuando el resorte está relajado ($x = 0$). Entonces, a partir de la ecuación 12-8 tenemos

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(1.25 \times 10^8\text{ N/m})(0.056\text{ m})^2 = 1.96 \times 10^5\text{ J}.$$

12-3 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Ahora que ya explicamos el concepto de energía potencial, podemos combinarlo con el de energía cinética y formular una ley de *conservación de la energía mecánica* que nos dará ideas frescas sobre los problemas de la mecánica.

Consideremos un sistema aislado, es decir, uno en que no haya fuerzas *externas* o, si las hay, no realicen trabajo en él. Según esta definición, formarían un sistema aislado dos discos de goma conectados por un resorte y que se deslizan libremente en una superficie horizontal sin fricción. Sobre él actúan la gravedad y la fuerza normal —ambas externas— pero sin que efectúen trabajo en él.

Aun cuando ninguna fuerza externa afecta a este sistema aislado, las partículas *en su interior* pueden ejercer fuerzas una sobre otra. Esas fuerzas, que llamamos *internas*, realizan trabajo en las partículas a medida que cambia la configuración del sistema. Suponemos que son conservativas, de modo que podemos relacionar una energía potencial a cada una de ellas. Si aumenta o disminuye la longitud del resorte conforme el sistema se desliza por la superficie horizontal sin fricción, su fuerza efectúa trabajo en los discos y modifica su energía cinética.

Para analizar un caso simple consideremos el sistema de bloque-resorte en la figura 12-1*a*, a medida que el bloque pasa de $x = +d$ a $x = 0$. Al expandirse el resorte, la energía cinética del bloque se *incrementa* en ΔK, que según el teorema de trabajo-energía (Ec. 11-24) está dado por

$$\Delta K = W, \qquad (12\text{-}10)$$

donde W es el trabajo (positivo) efectuado en el bloque por la fuerza del resorte. Además, al expandirse éste, la energía potencial del sistema *disminuye* ΔU, que según la definición de energía potencial (Ec. 12-4) está dado por

$$\Delta U = -W. \qquad (12\text{-}11)$$

Por tanto, el aumento de la energía cinética es exactamente igual a la reducción de la energía potencial de este sistema conservativo: $\Delta K = -\Delta U$.

Podemos extender la conclusión anterior al caso más general de un sistema aislado conservativo, constituido por muchas partículas que interactúan entre sí mediante varias fuerzas conservativos, entre ellas las fuerzas elásticas de un resorte, las fuerzas gravitacionales y las eléctricas. El cambio *total* de energía cinética en todas las partículas que integran el sistema tiene la misma magnitud pero signo opuesto que el cambio *total* de la energía potencial del sistema, es decir

$$\Delta K_{\text{total}} = -\Delta U_{\text{total}}.$$

La expresión anterior podemos reformularla —quizá en forma más útil— así:

$$\Delta K_{\text{total}} + \Delta U_{\text{total}} = 0. \qquad (12\text{-}12)$$

Según la ecuación 12-12, en un sistema aislado donde sólo operan fuerzas conservativas, cualquier cambio de su energía cinética total ha de ser equilibrado por un cambio igual y contrario de su energía potencial, así que la suma de estas modificaciones es cero.

Podemos interpretar la ecuación 12-12 como $\Delta(K_{\text{total}} + U_{\text{total}}) = 0$. Es decir, cuando sólo intervienen fuerzas conservativos, el cambio de la magnitud $K_{\text{total}} + U_{\text{total}}$ es cero. Esta magnitud la definimos como la *energía mecánica total* E_{total} del sistema:

$$E_{\text{total}} = K_{\text{total}} + U_{\text{total}}. \qquad (12\text{-}13)$$

Utilizando esta definición de la energía mecánica total, la ecuación 12-12 queda así:

$$\Delta(K_{\text{total}} + U_{\text{total}}) = \Delta E_{\text{total}} = 0. \qquad (12\text{-}14)$$

Para facilitar la explicación eliminamos los subíndices "total", en el entendido de que cuando apliquemos el resultado $\Delta(K + U) = \Delta E = 0$ a un sistema siempre emplearemos los valores *totales* de las diferentes energías del sistema.

Si el cambio de una magnitud cualquiera es cero, la magnitud habrá de permanecer constante y por ello podemos reescribir así la ecuación 12-14:

$$E_i = E_f \quad \text{o} \quad K_i + U_i = K_f + U_f, \qquad (12\text{-}15)$$

donde los subíndices *i* y f indican los estados inicial y final del sistema. Es decir, el valor inicial de la energía mecánica total es igual al valor final.

La ecuación 12-15 es la expresión matemática de la *ley de conservación de la energía mecánica:*

La energía mecánica total permanece constante en un sistema aislado donde sólo intervienen fuerzas conservativas.

Las fuerzas que operan dentro de un sistema pueden transformar la energía cinética en energía potencial, o ésta en aquélla, e incluso el tipo de energía potencial, pero la energía mecánica total permanece constante. Si fuerzas no conservativas, como la fricción, actúan sobre el sistema, esta última *no* es constante; este caso se estudia en el Capítulo 13.

Vamos a considerar una vez más el sistema de bloque-resorte de la figura 12-1 como ejemplo de la conservación de la energía mecánica. En un punto arbitrario del movimiento se extiende o se comprime el resorte una distancia x (respecto a la posición de referencia $x = 0$) y el bloque se desplaza con una rapidez v, de modo que la energía mecánica total es $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Cuando el resorte alcanza su máxima extensión o compresión x_m, el bloque se halla en reposo durante unos instantes; en ese momento toda la energía mecánica es potencial y $E = \frac{1}{2}kx^2_m$. A medida que el resorte retorna a su longitud relajada y que el bloque avanza hacia $x = 0$, la energía potencial disminuye y la energía cinética aumenta hasta que en $x = 0$ la primera llega a su valor máximo de $\frac{1}{2}mv^2_m$, así que $E = \frac{1}{2}mv^2_m$. La figura 12-5 muestra la variación de la energía cinética y potencial al desplazarse el sistema. Nótese que en todas las etapas del movimiento la suma $K + U$ permanece constante.

De modo parecido, a medida que la bola sube al inicio en el sistema bola-Tierra de la figura 12-2, la energía potencial gravitacional crece al disminuir la energía cinética pero la energía mecánica total permanece constante. Suponiendo que $U = 0$ en el punto de lanzamiento, la energía mecánica inicial será $E = \frac{1}{2}mv_0^2$. (Según vimos antes, el movimiento de la Tierra es insignificante en este sistema y por ello podemos relacionar toda la energía cinética a la bola.) En una altura arbitraria y, la energía mecánica total es la suma de la cinética y de la potencial $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$ En su máxima altura h, la rapidez es cero y, por consiguiente, $E = mgh$. En todos los lugares la energía mecánica total posee el mismo valor, aunque pueden compartirla de modo distinto sus partes cinética y potencial. Al ir cayendo la bola, el sistema pierde energía po-

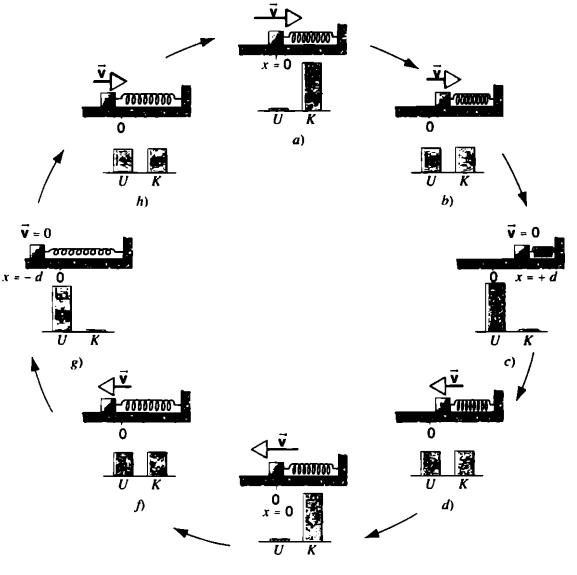


FIGURA 12-5. Un bloque sujeto a un resorte oscila hacia delante y atrás, en una superficie horizontal sin fricción. La energía mecánica E del sistema permanece constante, pero la comparten de modo diferente la energía cinética y la potencial conforme se mueve el sistema. En ciertos momentos (*a, e*) la energía será cinética en su totalidad; en otros (*c, g*) será totalmente potencial, y en otros (*b, d, f, h*) la compartirán las dos formas en partes iguales.

tencial y la bola gana energía cinética, manteniendo constante una vez más la energía mecánica total.

PROBLEMA RESUELTO 12-3. El resorte de una escopeta de trampa es comprimido una distancia d de 3.2 cm respecto a su estado relajado y se pone en el cañón una bola de masa m (12 g). ¿Con qué rapidez saldrá la bola del cañón una vez disparada el arma? La constante de fuerza k del resorte es 7.5 N/cm. Suponga que no existe fricción y que el cañón del arma es horizontal.

Solución El sistema aislado se compone de una bola + resorte, como en el caso de la figura 12-1. La configuración inicial está constituida por la bola en reposo contra el resorte comprimido. Por tanto, $E_i = K_i + U_i = 0 + \frac{1}{2}kd^2$, si usamos la ecuación 12-8 para calcular la energía potencial cuando comprimimos el resorte una distancia d. Cuando el resorte se expanda a su longitud relajada ($x = 0$), su extremo (junto con la bola) se desplaza a la máxima velocidad v_m; cuando se expanda más allá de su longitud relajada, el extremo comienza a reducir su velocidad, pero la bola sigue moviéndose con la rapidez v_m y por eso ya no está en contacto con el resorte. En este momento, $E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}m^2_m + 0$. Entonces la conservación de energía ($E_f = E_i$) nos da

$$\tfrac{1}{2}mv_m^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kd^2.$$

Al resolver para v_m obtenemos

$$v_m = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.032\ \text{m})\sqrt{\frac{750\ \text{N/m}}{12 \times 10^{-3}\ \text{kg}}} = 8.0\ \text{m/s}.$$

PROBLEMA RESUELTO 12-4. Una montaña rusa (Fig. 12-6) levanta lentamente un carro lleno de pasajeros hasta una altura de y = 25 m, y luego acelera cuesta abajo. Despreciando la fricción, ¿con qué rapidez llegará al fondo?

Solución Suponemos que el sistema consta del carro (con sus pasajeros) y de la Tierra. Cumple el criterio de un sistema aislado, porque la vía (que no forma parte del sistema) no efectúa trabajo en el carro (suponemos que no hay fricción, y la fuerza normal de la vía en él no realiza trabajo porque su dirección siempre es perpendicular a su desplazamiento). Cuando el carro está en reposo en la cúspide de la vía, la energía mecánica total es

$$E_i = U_i + K_i = mgy + 0,$$

donde suponemos que $y = 0$ en el fondo de la vía. Cuando el carro llega al fondo, la energía mecánica E_f es

$$E_f = U_f + K_f = 0 + \tfrac{1}{2}mv^2,$$

con la referencia de U escogida de modo que $U = 0$ en $y = 0$. La conservación de la energía significa que $E_i = E_f$ y entonces

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Al resolver para v obtenemos

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(25\ \text{m})} = 22\ \text{m/s}.$$

Es la misma rapidez con que caería al suelo el objeto soltado verticalmente desde una altura de 25 m. La fuerza normal de la via no modifica la rapidez del carro "que cae"; tan sólo cambia su dirección. Nótese que el resultado no depende de la masa del carro ni la de sus ocupantes.

A medida que el carro recorre la montaña rusa, su rapidez aumenta y se reduce cuando cruza los valles y picos de la vía. Mientras ningún pico sea más alto que el punto de partida, el sistema tendrá suficiente energía mecánica para superar cualquier pico intermedio de energía potencial y para llevar el sistema hasta el final.

FIGURA 12-6. Dispositivo para convertir la energía potencial gravitacional en energía cinética.

Este problema nos permite entender fácilmente las ventajas de la técnica basada en la energía. Para aplicar las leyes de Newton habría que conocer la forma exacta de la vía y luego encontrar los componentes de la fuerza y de la aceleración en cada punto. En cambio, la solución por medio de las leyes de Newton nos aportaría más información que la conseguida mediante el método de energía; por ejemplo, el tiempo que el carro tarda en llegar al fondo.

Aplicaciones de la conservación de la energía mecánica

La ley de conservación de la energía mecánica nace de la definición de energía potencial ($W = -\Delta U$) y del teorema de trabajo-energía ($W = \Delta K$), el cual a su vez obtuvimos de la segunda ley de Newton. Podemos, pues, utilizarla para analizar los sistemas de conservación de energía a que las aplicamos con anterioridad. Como ejemplo vamos a reconsiderar algunos problemas resueltos ya por medio de ellas. Explicaremos

exclusivamente problemas de la mecánica lineal, en que las fuerzas son conservativas y los cuerpos se comportan como partículas.

PROBLEMA RESUELTO 12-5. Por medio de la conservación de la energía mecánica, analice la máquina de Atwood (problema resuelto 5-5) para determinar la velocidad y la aceleración de los bloques después de recorrer una distancia y partiendo del reposo.

Solución Repase el problema y el diagrama del cuerpo libre de la figura 5-9. Como nuestro sistema tomamos los dos bloques y la Tierra. Para simplificar la solución supondremos que parten del reposo en el mismo nivel, definido como $y = 0$, el punto de referencia de la energía potencial gravitacional. Por tanto, la energía potencial es cero. La energía cinética inicial también es cero y por ello $E_i = 0$. Una vez liberado el sistema, el bloque 1 sube a la posición $+y$, el bloque 2 baja a la posición $-y$, y los dos se desplazan con rapidez v. Por tanto, las energías mecánicas totales son $\frac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy$ en el bloque 1 y $\frac{1}{2}m_2v^2 - m_2gy$ en el bloque 2. Entonces la conservación de la energía mecánica da $E_f = E_i$, es decir

$$\tfrac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy + \tfrac{1}{2}m_2v^2 - m_2gy = 0.$$

Al resolver para la rapidez v obtenemos

$$v = \sqrt{2\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,gy}.$$

Así pues, el bloque 1 sube con una velocidad $v_y = +v$ y una aceleración $a_y = dv_y/dt$:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{2}\left(2\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,gy\right)^{-1/2}\left(2\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,g\right)\frac{dy}{dt}.$$

Si reemplazamos dy/dt por la expresión de velocidad v_y y si rearreglamos los términos, obtendremos

$$a_y = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,g.$$

Es el mismo resultado que el del problema resuelto 5-5, lo cual demuestra que se consiguen resultado idénticos con los métodos basados en las leyes de Newton y en la conservación de la energía.

PROBLEMA RESUELTO 12-6. Usando la conservación de la energía mecánica, calcule la rapidez de los bloques del problema resuelto 5-6 después que hayan recorrido una distancia L partiendo del reposo.

Solución Repase el problema y la figura 5-10. El sistema se compone de ambos bloques y de la Tierra. En este problema emplearemos la forma de conservación de la energía dada en la ecuación 12-12. La energía cinética inicial es cero, así que el cambio de energía cinética será $\Delta K = K_f = \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_2v^2$, donde v es la rapidez de los bloques luego de recorrer la distancia L. La energía potencial no cambia en el bloque 1 (que se mueve horizontalmente), por lo cual el cambio neto de ella se debe al cambio en la posición vertical del bloque 2, es decir, $\Delta U = m_2g\Delta y = m_2g(-L)$. Entonces la conservación de la energía mecánica nos da

$$\Delta K + \Delta U = \tfrac{1}{2}m_1v^2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2 - m_2gL = 0.$$

Al resolver para la rapidez v obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2m_2gL}{m_1 + m_2}}.$$

Una vez más, deberíamos demostrar que, al diferenciar esta expresión respecto al tiempo (tratando dL/dt como un componente apropiado de la velocidad), se llega a la expresión de la aceleración encontrada en la solución del problema resuelto 5-6.

12-4 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ROTACIONAL

En la sección 11-7 explicamos cómo aplicar los conceptos de trabajo y de energía cinética a los problemas que incluyen movimiento rotacional. También podemos aplicar la conservación de la energía mecánica para analizar el movimiento de sistemas con objetos capaces de girar alrededor de un eje y de realizar además movimiento traslacional. No existe una ley *especial* de conservación para el movimiento rotacional; más bien, las energías cinéticas de la ecuación 12-15 pueden tener términos rotacionales y traslacionales.

PROBLEMA RESUELTO 12-7. Usando la conservación de la energía mecánica, reconsidere el problema resuelto 9-10 y calcule la rapidez del bloque después que del reposo cae una distancia de 0.56 m.

Solución Repase el problema y la figura 9-26. El sistema está compuesto por el bloque, el disco y la Tierra. Si el bloque cae del reposo, $K_i = 0$ de ambos, el bloque y el disco. Sea $y = 0$ la posición inicial del bloque, donde $U_i = 0$; después de caer a la coordenada vertical $-y$, su energía potencial es $U_f = mg(-y)$. La energía cinética final del bloque es $\frac{1}{2}mv^2$ y la del disco es $\frac{1}{2}I\omega^2$. Como la cuerda no se estira, la rapidez del bloque al caer es igual a la rapidez tangencial del disco; por tanto, $\omega = v/R$. Entonces la conservación de la energía mecánica nos da $E_i = E_f$ o

$$0 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I(v/R)^2 - mgy$$

y resolviendo para v (con $I = \frac{1}{2}MR^2$ obtendremos

$$v = \sqrt{\frac{4mgy}{M + 2m}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(1.2\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(0.56\text{ m})}{2.5\text{ kg} + 2(1.2\text{ kg})}} = 2.3\text{ m/s}.$$

El lector debería poder demostrar que la aceleración calculada en el problema resuelto 9-10 produce esta rapidez vertical. Una vez más comprobamos que se consiguen resultados idénticos con los métodos basados en las leyes de Newton y en la conservación de la energía.

Combinación del movimiento rotacional y traslacional

En la sección 9-7 expusimos el análisis de ambos tipos de movimiento aplicando para ello las leyes de Newton. Ahora vamos a considerar otro análisis basado en los métodos de trabajo-energía. Como en la sección 9-7, limitaremos el análisis al caso en que el eje rotacional mantiene la misma dirección en el espacio mientras el objeto se mueve.

Primero demostraremos que, en este caso, la energía cinética de un cuerpo arbitrario puede escribirse como la suma

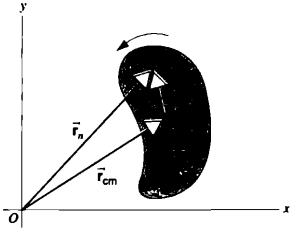


FIGURA 12-7. El centro de masa C de un cuerpo que realiza movimiento de rotación y de traslación se encuentra instantáneamente en la posición $\vec{r}_{cm}$. Una partícula arbitraria P del cuerpo se halla en $\vec{r}_n$ respecto al origen O y en $\vec{r}'_n$ respecto al centro de masa C.

de términos traslacionales y rotacionales independientes. En la figura 12-7 se ve un cuerpo arbitrario de masa M. Por unos instantes el centro de masa C se halla en la posición $\vec{r}_{cm}$ respecto al origen del marco de referencia inercial seleccionado. Una partícula P de masa m_n está en la posición $\vec{r}_n$ respecto al origen y en la posición $\vec{r}'_n$ respecto al centro de masa del cuerpo. El movimiento de traslación se limita al plano xy, es decir, el vector $\vec{v}_n$ que describe el movimiento de m_n tiene sólo los componentes x y y. El cuerpo gira con una velocidad angular instantánea ω alrededor de un eje que cruza el centro de masa y que es perpendicular a la página. Respecto a O, la energía cinética de la partícula de masa m_n es $\frac{1}{2}m_n v^2_n$ y la energía cinética total del cuerpo se consigue mediante la suma de la energía de todas estas partículas:

$$K = \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_n v_n^2. \qquad (12\text{-}16)$$

En la figura 12-7 vemos que $\vec{r}_n = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'_n$. Al derivar encontramos la relación correspondiente entre las velocidades: $\vec{v}_n = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_n$, donde $\vec{v}_n$ es la velocidad de la partícula respecto al origen O, $\vec{v}_{cm}$ es la velocidad del centro de masa y $\vec{v}'_n$ es la velocidad de la partícula respecto a él. Observado desde el marco de referencia del centro de masa, el movimiento es una rotación pura alrededor de un eje que atraviesa el centro de masa; en consecuencia, $\vec{v}'_n$ tiene la magnitud $\omega r'_n$.

La magnitud v^2_n que aparece en la ecuación 12-16 puede escribirse como $\vec{v}_n \cdot \vec{v}_n$ o, utilizando la ecuación de transformación de la velocidad, $\vec{v}_n = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_n$, como $(\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_n) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_n) = \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_n + \vec{v}'_n \cdot \vec{v}'_n$. Entonces la energía cinética proveniente de la ecuación 12-16 puede escribirse así:

$$K = \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_n v_n^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_n(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}'_n + v_n'^2). \qquad (12\text{-}17)$$

Consideremos por separado los tres términos de la suma anterior: 1. en el primer término de la ecuación 12-17, la única magnitud que tiene el índice de sumatoria n es la partícula de masa m_n, y en este término $\Sigma\, m_n = M$, la masa total del cuerpo. (Nótese que v_{cm} sale del símbolo de sumatoria porque no depende del índice n.) Este término se convierte entonces en $\Sigma\, \frac{1}{2}m_n v^2_{cm} = Mv^2_{cm}$. 2. En el segundo término tenemos $\Sigma\, \frac{1}{2}m_n(2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_n) = \vec{v}_{cm} \cdot \Sigma\, m_n\vec{v}'_n$. La magnitud $\Sigma\, m_n\, \vec{v}'_n$ es el momento total de todas las partículas del cuerpo, medio dentro del marco de referencia del centro de masa: $\vec{P} = \Sigma\, m_n\, \vec{v}'_n$, que es cero como se muestra en la ecuación 7-24. 3. El tercer término de la ecuación 12-17 puede simplificarse si recordamos que el movimiento del marco de referencia primado (centro de masa) es una rotación pura, así que $v'_n = \omega r'_n$. El tercer término se convierte entonces en $\Sigma\, \frac{1}{2}m_n v'^2_n = \Sigma\, \frac{1}{2}m_n r'^2 n\omega^2$. Aquí la sumatoria da la inercia rotacional dentro del marco de referencia del centro de masa $I_{cm} = \Sigma\, m_n r'^2_n$ y, en consecuencia, $\Sigma\, \frac{1}{2}m_n v'^2_n = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Con el término medio igual a cero, los dos restantes de la ecuación 12-17 nos darán

$$K = \tfrac{1}{2}Mv^2_{cm} + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2. \qquad (12\text{-}18)$$

La ecuación 12-18 indica que la energía cinética del objeto en movimiento consta de dos términos: uno relacionado a la traslación pura del centro de masa del objeto con una velocidad $\vec{v}_{cm}$ y el otro relacionado a una rotación pura del objeto alrededor del eje que pasa por el centro de masa. Los dos términos son completamente independientes: habría rotación aun sin que hubiera traslación (por ejemplo, como se observó en un marco de referencia que se desplace con una velocidad $\vec{v}_{cm}$). En este caso general, las velocidades $\vec{v}_{cm}$ y $\vec{\omega}$ son independientes entre sí: podemos suministrar cualquier cantidad de energía rotacional y de energía cinética traslacional.

Rodamiento sin deslizamiento. En este caso especial, expuesto ya en la sección 9-7, la rapidez angular y la del centro de masa no son independientes, sino que se relacionan mediante $v_{cm} = \omega R$ en un objeto de radio R. Así pues, la energía cinética total se determina completamente con *cualquiera*, la rapidez traslacional v_{cm}; o la rapidez rotacional ω; y podemos encontrar las expresiones correspondientes de la energía cinética al sustituir en la ecuación 12-18:

$$K = \tfrac{1}{2}Mv^2_{cm} + \tfrac{1}{2}I_{cm}v^2_{cm}/R^2, \qquad (12\text{-}19a)$$

$$K = \tfrac{1}{2}M\omega^2R^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2. \qquad (12\text{-}19b)$$

En ambos casos, sólo un parámetro (v_{cm} o ω) es suficiente para determinar la energía cinética.

Cuando un objeto rueda sin resbalar, se produce una fuerza de fricción ejercida en el punto instantáneo de contacto entre el objeto y la superficie por donde rueda (Fig. 9-33, por ejemplo). Sin embargo, *esta fuerza de fricción no realiza trabajo en el objeto que se mueve* pues el punto en que se aplica no se desplaza. En otras palabras, la fuerza no mueve un punto en el objeto alguna distancia. Por el contrario, la fuerza de fricción se aplica primero en un punto del objeto y luego, al girar éste, en otro punto. Una rueda ideal puede rodar sin deslizamiento por una superficie horizontal con una velocidad constante de traslación y de rotación; si se efectuara trabajo externo en ella (mediante por ejemplo, fricción), su energía cinética cambiaría, pero no es así. Si en cambio *se deslizara*

por la superficie, la fuerza de fricción realizaría trabajo y cambiaría las energías cinéticas de traslación y de rotación.

PROBLEMA RESUELTO 12-8. Usando la conservación de la energía, calcule la rapidez final del cilindro rodante de la figura 9-23 cuando llega al fondo del plano.

Solución. La figura 9-32 incluye las fuerzas que actúan sobre el cilindro rodante. Como nuestro sistema tomamos el cilindro y la Tierra. Aun cuando exista una fuerza de fricción, no realiza trabajo y por eso no puede modificar la energía mecánica. La energía cinética inicial es cero y la energía potencial inicial es $Mgh = MgL \operatorname{sen} \theta$ respecto a la base del plano donde $U = 0$; por tanto, $E_i = K_i + U_i = 0 + MgL \operatorname{sen} \theta$. La energía potencial final es cero (porque ése es el punto de referencia escogido) y la energía cinética está dada por la ecuación 12-19*a* en función de la rapidez traslacional final del centro de masa; por consiguiente, $E_f = K_f + U_f + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}v_{cm}^2/R^2 + 0$. Al hacer $E_f = E_i$ obtenemos

$$\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}v_{cm}^2/R^2 = MgL \operatorname{sen} \theta.$$

Con $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, podemos resolver para v_{cm} para encontrar

$$v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gL \operatorname{sen} \theta},$$

lo cual coincide con el resultado del problema resuelto 9-11.

PROBLEMA RESUELTO 12-9. Calcule la rapidez angular del yoyo del problema resuelto 9-13 empleando la conservación de la energía.

Solución El movimiento del yoyo al desenrollarse y bajar por la cuerda constituye otro ejemplo de la combinación del movimiento rotacional y traslacional. El punto de contacto entre la cuerda y el eje cumple la misma función que el existente entre la rueda y el suelo en el rodamiento sin deslizamiento. Para nuestro sistema tomamos el yoyo y la Tierra. El yoyo tiene la rapidez traslacional inicial v_0 y una rapidez angular final ω, su cambio en energía cinética es (usando la ecuación 12-19*b* para K_f y la ecuación 12-19*a* para K_i).

$$\Delta K = K_f - K_i = (\tfrac{1}{2}M\omega^2R_0^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2) - \left(\tfrac{1}{2}Mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\frac{v_0^2}{R_0^2}\right).$$

Supongamos que el yoyo cae del lugar inicial $y = 0$, donde $U_i = 0$ a la coordenada vertical $-y$, donde $U_f = Mg(-y)$. Entonces el cambio de la energía potencial durante la caída será $\Delta U = -Mgy$. Al hacer $\Delta K + \Delta U = 0$ y al resolver para la rapidez angular final ω obtenemos

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{v_0}{R_0}\right)^2 + \frac{2gy}{R_0^2 + R^2/2}}.$$

Usted deberá demostrar que, al derivar la expresión anterior para ω, tendrá la expresión de α obtenida del problema resuelto 9-13 por medio de las leyes de Newton.

12-5 SISTEMAS CONSERVATIVOS UNIDIMENSIONALES: LA SOLUCIÓN COMPLETA

Nuestra meta al analizar un sistema mecánico a menudo es describir el movimiento de una partícula en función del tiempo. En los capítulos 3 y 4 explicamos cómo resolver este problema aplicando las leyes de Newton, las cuales en una dimensión permiten encontrar la posición y la velocidad como funciones del tiempo. En el presente capítulo hemos resuelto muchos de los mismos problemas empleando la conservación de la energía, que puede darnos la velocidad de los cuerpos de un sistema en una configuración distinta a la inicial. Estos dos métodos —el de dinámica o de fuerza y el de energía— producen resultados idénticos, pero el segundo, tal como lo hemos venido aplicando, no nos da la posición ni la velocidad de los cuerpos en el sistema en función del tiempo. En esta sección explicaremos cómo el método de energía puede extenderse para que suministre esa información.

Suponemos un sistema unidimensional con una fuerza que depende sólo de la posición.* A esta fuerza se relaciona la función de energía potencial $U(x)$, que también depende de las coordenadas. La ecuación 12-13 donde se define la energía mecánica, $E = K + U$, tiene una relación entre x y v_x:

$$U(x) + \tfrac{1}{2}mv_x^2 = E \qquad (12\text{-}20)$$

y resolviendo para v_x obtenemos

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}. \qquad (12\text{-}21)$$

Con cualquier valor de la energía mecánica total E del sistema, de la ecuación anterior se deduce que el movimiento se limita a las regiones del eje x donde $E > U(x)$, porque no podemos permitir una energía cinética negativa ni una velocidad imaginaria.

Si graficamos $U(x)$ en función de x, podremos lograr una buena descripción cualitativa del movimiento, basándonos para ello en la ecuación 12-21. Por ejemplo, consideremos la función de energía potencial representada en la figura 12-8*a*, se trata de la energía potencial de una partícula que se desplaza en una dimensión por el eje x. La relación entre ella y la fuerza está determinada por la ecuación 12-7, $F_x = dU/dx$. La fuerza correspondiente a dicha energía se indica en la figura 12-8*b*. Consideramos varias opciones de la energía mecánica total del sistema. Con un valor particular de la energía (por ejemplo, E_4), la energía cinética en cualquier punto (x_4 por ejemplo) se calcula partiendo de la diferencia entre la energía total y la potencial.

$E = E_0$. Es la menor energía posible del sistema. En este punto $E = U$, de modo que $K = 0$. La partícula ha de encontrarse en reposo en el punto x_0.

$E = E_1$. Con esta energía la partícula puede moverse en la región comprendida entre x_1 y x_2. Dado que la energía cinética es la diferencia entre E y $U(x)$, en la gráfica vemos que en x_0 la partícula tiene su energía cinética máxima y por lo mismo también su rapidez máxima. Su rapidez

* En una dimensión, las fuerzas que dependen sólo de la posición *siempre* son conservativa; ello no ocurre necesariamente en dos o tres dimensiones, según vimos en la sección 12-6. La fuerza gravitacional (constante) pertenece a esa categoría, aunque no depende explícitamente de la posición. Pero la fuerza de fricción (constante) *no* es conservativa porque su dirección depende de la dirección del movimiento y no de la posición; podemos considerarla como una fuerza dependiente de la velocidad.

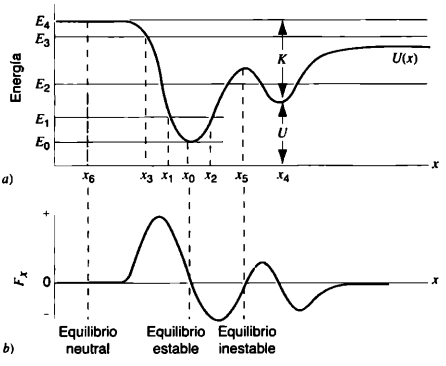


FIGURA 12-8. *a)* Función de energía potencial $U(x)$. *b)* Componente x de la fuerza correspondiente a esa energía potencial.

disminuye al acercarse a x_1 o x_2. En x_1 y x_2 se detiene e invierte su dirección. A los puntos x_1 y x_2 se les conoce como *puntos de retorno* del movimiento.

$E = E_2$. Para la energía E_2 hay cuatro puntos de retorno, y la partícula puede moverse hacia adelante o atrás en cualquiera de las dos depresiones de la función de energía potencial.

$E = E_3$. Con esta energía hay un solo punto de retorno en el movimiento, en x_3. Si inicialmente la partícula se movía en la dirección x negativa, se detendrá en x_3 para moverse luego en la dirección positiva x.

$E = E_4$. Para las energías arriba de E_4 no hay puntos de retorno y la partícula no invierte su dirección. La rapidez cambia conforme a la ecuación 12-21 a medida que la partícula se mueve.

En un punto donde $U(x)$ tiene un valor mínimo, digamos en $x = x_0$, la pendiente de la curva es cero y por ello también lo es la fuerza, es decir, $F_x(x_0) = -(dU/dx)_{x = x_0} = 0$. Una partícula en reposo en este punto permanecerá en ese estado. Más aún, si la desplazamos un poco en una u otra dirección, la fuerza $-F_x(x) = -dU/dx_x$— la tenderá a retornar y oscilará alrededor del punto de equilibrio. De ahí que a éste se le llame punto de *equilibrio estable*. Si la partícula se mueve ligeramente a la izquierda de x_0 (es decir, hacia x más pequeña), la fuerza será positiva y se empujará la partícula a x más grande (esto es, de vuelta hacia x_0. Si la partícula se desplaza a la derecha de x_0, experimentará una fuerza negativa que otra vez la devuelve a x_0.

En el punto donde $U(x)$ tiene un valor máximo, como en $x = x_5$, la pendiente de la curva es cero y, en consecuencia, también lo es la fuerza, es decir, $F_x(x_5) = -(dU/dx)_{x = x_5} = 0$. Una partícula en reposo en este punto permanecerá en ese estado. Pero si la desplazamos de allí inclusive una distancia mínima, la fuerza $F_x(x)$ tenderá a alejarla todavía más de la posición de equilibrio. De ahí que a este punto se le llame punto de *equilibrio inestable*. En el punto de la figura 12-8*b* correspondiente a x_5, al alejarse de x_5 hacia la derecha (en dirección de x más grande) se genera una fuerza positiva que empuja la partícula a x todavía mayor.

En un intervalo donde $U(x)$ es constante, digamos cerca de $x = x_6$, la pendiente de la curva es cero y por eso asimismo lo será la fuerza, es decir, $F_x(x_6) = -(dU/dx)_{x = x_6} = 0$. A esa ubicación se le conoce como *equilibrio neutral*, ya que puede desplazarse ligeramente una partícula sin que experimente una fuerza de repulsión ni de restauración.

Lo anterior indica que si conocemos la función de energía potencial en la región *dex* donde se desplaza el cuerpo, conoceremos mucho sobre el movimiento del cuerpo.

PROBLEMA RESUELTO 12-10. En una molécula diatómica, la función de energía potencial de la fuerza entre dos átomos puede expresarse aproximadamente así:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

donde a y b son constantes positivas y x es la distancia entre los átomos. Determine *a)* la separación de equilibrio entre los átomos, *b)* la fuerza entre ellos, y *c)* la energía mínima necesaria para desintegrar la molécula (es decir, separar los átomos de la posición de equilibrio a $x = \infty$).

Solución *a)* En la figura 12-9*a* mostramos $U(x)$ en función de x. El equilibrio se da en la coordenada x_m, donde $U(x)$ es un mínimo que se calcula a partir de

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_m} = 0.$$

Es decir,

$$\frac{-12a}{x_m^{13}} + \frac{6b}{x_m^7} = 0$$

o

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}.$$

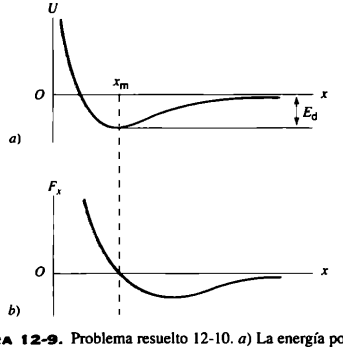


FIGURA 12-9. Problema resuelto 12-10. *a)* La energía potencial y *b)* la fuerza entre dos átomos en una molécula diatómica como función de la distancia x que separa los átomos. Nótese que la energía potencial se toma como cero cuando los átomos están infinitamente separados.

b) Basándonos en la ecuación 12-7 encontramos la fuerza correspondiente a esta energía potencial:

$$F_x(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Graficamos la fuerza en función de la separación existente entre los átomos de la figura 12-9*b*. Cuando la fuerza es positiva (de $x = 0$ a $x = x_m$), los átomos se repelen entre sí (la fuerza se dirige a x creciente). Cuando es negativa (de $x = x_m$ a $x = \infty$), se atraen unos a otros (la fuerza se dirige a x decreciente). En $x = x_m$, la fuerza es cero; es el punto de equilibrio y un punto de equilibrio estable.

c) A la energía mínima necesaria para dividir la molécula en átomos individuales se le llama *energía de disociación*, E_d. En la energía potencial graficada en la figura 12-9*a* vemos que es posible separar los átomos en $x = \infty$, donde $U = 0$, siempre que $E \geq 0$. La energía *mínima* necesaria corresponde a $E = 0$, lo cual significa que los átomos tendrán una separación infinita ($U = 0$) y estarán en reposo ($K = 0$) en su estado final. No obstante, en el estado de equilibrio de la molécula toda su energía es potencial, de modo que (Fig. 19-2*a*) $E = U(x_m)$, es una magnitud negativa. La energía que debe agregarse a la molécula en estado de equilibrio para aumentar su energía partiendo de este valor negativo a cero es la que hemos denominado energía de disociación E_d. Por tanto,

$$U(x_m) + E_d = 0,$$

o

$$E_d = -U(x_m) = -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^6}.$$

Al sustituir el valor de x_{cm} obtenemos

$$E_d = \frac{b^2}{4a},$$

que es una magnitud positiva, como se establece. Esta energía podría suministrarse realizando trabajo externo sobre la molécula, quizá empleando fuerzas eléctricas o aumentando la energía cinética de un átomo de la molécula respecto a la otra.

Solución general de $x(t)$

Si logramos encontrar $x(t)$, la posición como función del tiempo, conoceremos todo lo concerniente al comportamiento futuro de la partícula. Por medio de las leyes de Newton se obtiene esta función calculando primero la aceleración. Vamos a explicar cómo puede aplicarse el método de energía para conseguir lo mismo.

Comenzamos con la ecuación 12-21. Con $v_x = dx/dt$ podemos resolver para dt y así obtener

$$dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}}. \qquad (12\text{-}22)$$

Nótese que las dos variables de la ecuación están separadas, que t aparece sólo a la izquierda y x a la derecha.

Supóngase que la partícula está situada inicialmente en $x = x_0$ cuando $t = 0$ y que alcanza su posición final x en el tiempo t. Podemos, pues, integrar la ecuación 12-22. La integral de la izquierda, $\int_0^t dt$, nos da simplemente t, así que tenemos

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}}. \qquad (12\text{-}23)$$

Al aplicar esta ecuación escogemos el signo + cuando v_x está en la dirección positiva x y el signo − cuando v_x sigue la dirección negativa x. Si v_x cambia de dirección durante el movimiento, hay que dividir la integral en partes individuales + y −.

Una vez terminada la integración de la ecuación 12-23, hay que obtener t en función de x. Entonces casi siempre será posible resolver para x en función de t, ya sea con métodos analíticos o numéricos.

Para ofrecer un ejemplo de este procedimiento resolveremos la ecuación 12-23 en el caso de una partícula sobre la cual actúa una fuerza de resorte, en la cual $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. En $t = 0$, la partícula se encuentra en x_0 y en reposo ($v_x = 0$). En ese punto su energía mecánica es $E = \frac{1}{2}kx_0^2$; como ésta permanece constante, su energía en todos los puntos posee ese valor. En este caso la ecuación 12-23 queda así:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{(2/m)[\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2]}} = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}.$$

La integral es una forma conocida que se encuentra en las tablas de integrales y es igual a $-\cos^{-1}(x/x_0)$:

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left[-\cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\Big|_{x_0}^{x}\right]$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left[-\cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right) + 0\right]$$

dado que $\cos^{-1}(x_0/x_0) = \cos^{-1} 1 = 0$.

Con un poco de manipulación podemos resolver para x y encontrar

$$x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t.$$

Nótese que $\cos(\pm\theta) = \cos\theta$.

El movimiento unidimensional de una partícula sobre la que opera una fuerza de resorte es una oscilación senoidal. En el Capítulo 17 conseguiremos el mismo resultado por medio de las leyes de Newton.

12-6 SISTEMAS TRIDIMENSIONALES CONSERVATIVOS (Opcional)

Hasta ahora hemos explicado la energía potencial y la energía mecánica en sistemas unidimensionales donde la fuerza sigue la línea del movimiento. Es fácil generalizar esto a sistemas de tres dimensiones, en los cuales la fuerza y el desplazamiento presentan direcciones arbitrarias y distintas.

Consideremos un sistema donde una partícula sigue una trayectoria (Fig. 12-10) de un lugar inicial $\vec{r}_i + x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$ a un lugar final en $\vec{r}_f + x_f\hat{i} + y_f\hat{j} + z_f\hat{k}$. La partícula forma parte de un sistema que ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre ella. (Para facilitar la explicación suponemos otra vez que podemos concentrarnos en ella y que no se efectúa trabajo en el resto del sistema.) Con esta fuerza se relaciona una función de energía potencial $U(x,y,z)$; a medida que la partícula se mueve entre

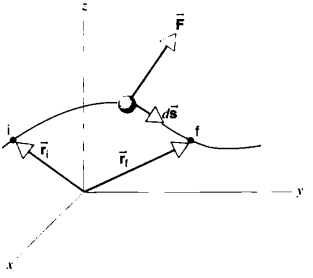


FIGURA 12-10. Una partícula se desplaza por una trayectoria de i a f. Una fuerza conservativa $\vec{F}$ actúa sobre ella.

las posiciones inicial y final, el cambio de energía potencial puede definirse por analogía con la ecuación 12-5:

$$\Delta U = U(x_f, y_f, z_f) - U(x_i, y_i, z_i)$$
$$= -\int_i^f (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz). \qquad (12\text{-}24)$$

Para aplicar esta ecuación hay que especificar antes la trayectoria de i a f; la ecuación relativa a la trayectoria de la partícula da la relación entre dx, dy y dz. Pero como se trata de una fuerza conservativa, se obtiene el mismo valor de ΔU para *toda* trayectoria de i a f. Después podemos aplicar la conservación de la energía mecánica total en tres dimensiones con $E = K + U$ si tomamos $U = U(x,y,z)$ y $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$.

Escrita más compactamente en notación vectorial, la ecuación 12-24 se transforma en

$$\Delta U = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s}, \qquad (12\text{-}25)$$

donde $d\vec{s}$ es un vector de desplazamiento tangente a la trayectoria ($d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$). Aquí $\vec{F} = Fx\hat{i} + Fy\hat{j} + Fz\hat{k}$ donde F_x, F_y y F_z pueden ser funciones de x, y y z. La ecuación 12-25 también se deduce directamente de la ecuación 11-19 ($W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}$) y de la definición de energía potencial (Ec. 12-4, $\Delta U = -W$).

La ecuación 12-7 también puede escribirse en forma tridimensional así.*

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}. \qquad (12\text{-}26)$$

En el lenguaje de vectores decimos que la fuerza conservativa $\vec{F}$ se escribe como el *gradiente* negativo de la energía potencial $U(x,y,z)$. En el movimiento a través del eje x la ecuación 12-26 se reduce a la ecuación 12-7.

*La *derivada parcial* $\partial U/\partial x$ significa que tomamos la derivada de $U(x, y, z)$ respecto a x como si y y z fueran constantes. De modo similar, $\partial U/\partial y$ significa que diferenciamos respecto a y como si x y z fueran constantes.

PROBLEMA RESUELTO 12-11. En cierto sistema de partículas confinado al plano xy, la fuerza tiene la forma $\vec{F}(x, y) = F_x\hat{i} + F_x\hat{j} = -ky\hat{i} - kx\hat{j}$, donde k es una constante positiva. (Esta fuerza empuja una partícula situada en un punto arbitrario (x, y) hacia la línea diagonal $y = -x$. Puede verificarlo trazando esa línea y dibujando los componentes de la fuerza F_x y F_y en varios puntos del plano xy.) *a*) Demuestre que el trabajo efectuado por ella cuando una partícula pasa del origen (0, 0) al punto (a, b) no depende de la trayectoria a lo largo de las tres que aparecen en la figura 12-11. *b*) Suponiendo que esta fuerza es conservativa, encuentre la energía potencial correspondiente $U(x, y)$ de este sistema. Suponga que el punto de referencia es $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y también que $U(0, 0) = 0$.

Solución *a*) El trabajo efectuado en la trayectoria 1 se calcula dividiéndola en dos partes: trayectoria 1*a* de $x = 0$ a $x = a$ sobre el eje x, y trayectoria 1*b* verticalmente del punto $(a, 0)$ al punto (a, b). El trabajo a lo largo de la trayectoria 1*a*, donde $d\vec{s} = dx\hat{i}$, es

$$W_{1a} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx = \int_{x=0}^{x=a} (-ky)\,dx = 0$$

ya que $y = 0$ en la trayectoria 1*a*. A lo largo de la trayectoria 1*b*, $d\vec{s} = dx\hat{j}$ y $x = a$, así que

$$W_{1b} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)\,dy = (-ka)\int_0^b dy = -kab.$$

Por tanto, el trabajo total en la trayectoria 1 es

$$W_1 = W_{1a} + W_{1b} = -kab.$$

En la trayectoria 2 procedemos de manera similar:

$$W_{2a} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)\,dy = 0$$
$$W_{2b} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{x=0}^{x=a} (-ky)\,dx = (-kb)\int_0^a dx = -kab.$$

En la trayectoria 3, $d\vec{s} = dx\hat{i} = dx\hat{j}$ y

$$W_3 = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_i^f (-ky\,dx - kx\,dy).$$

Supongamos que la variable r recorre la línea recta de (0, 0) a (a, b). Con $y = r$ sen ϕ, entonces $dy = dr$ sen ϕ, (porque ϕ es constante a lo largo de la línea). Asimismo, $x = r\cos\phi$ y $dx = dr\cos\phi$. Tratamos r como variable de integración, con valores que van de 0 en el

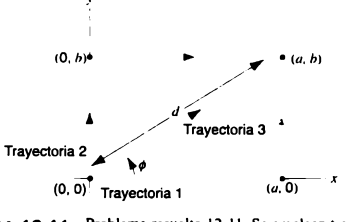


FIGURA 12-11. Problema resuelto 12-11. Se emplean tres trayectorias para evaluar el trabajo realizado al mover una partícula del origen (0, 0) al punto (a, b).

origen a $d = (a^2 + b^2)^{1/2}$ en el punto (a, b). Entonces integral del trabajo W_3 se convierte en

$$W_3 = \int_0^d [-k(r \operatorname{sen} \phi)(dr \cos \phi) - k(r \cos \phi)(dr \operatorname{sen} \phi)]$$

$$= -2k \operatorname{sen} \phi \cos \phi \int_0^d r\,dr = -kd^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi.$$

Con $\operatorname{sen} \phi = b/d$ y $\cos \phi = a/d$, esta expresión se transforma en $W_3 = -kab$. Por tanto, $W_1 = W_2 = W_3$. Esto no prueba que $\vec{F}$ sea conservativa (para llegar a esa conclusión habría que evaluar *todas* las trayectorias), pero sin duda nos hace sospechar que $\vec{F}$ podría ser conservativa. *b)* La energía potencial puede calcularse a partir de la ecuación 12-24, que ya evaluamos al determinar el trabajo realizado en la trayectoria 3. La única diferencia es la necesidad de integrar al punto arbitrario (x, y) y no a (a, b). Simplemente volvemos a designar como punto (x, y) el punto (a, b) y, por tanto,

$$\Delta U = U(x, y) - U(0, 0) = -W = kxy,$$

donde hemos supuesto que $U(0, 0) = 0$. El lector debería poder demostrar que es posible aplicar la ecuación 12-26 a esta función de la energía potencial y obtener así la fuerza $\vec{F}(x, y)$.

Si transformamos un poco la fuerza en $\vec{F} = -k_1 y\hat{i} - k_2 x\hat{j}$, el método de la parte *a)* muestra que esta fuerza no es conservativa cuando $k_1 \neq k_2$ (ejercicio 33). Aun cuando $k_1 = -k_2$, la fuerza sigue siendo no conservativa. Ésta tiene aplicaciones importantes en la concentración magnética de partículas con carga eléctrica, pero no puede representarse mediante una función de energía potencial por no ser conservativa.

OPCIÓN MÚLTIPLE

12-1 Fuerzas conservativas

1. ¿Cuál de las siguientes fuerzas *no* es conservativa?
   A) $\vec{F} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ B) $\vec{F} = 3x\hat{i} + 4y\hat{j}$
   C) $\vec{F} = 3y\hat{i} + 4x\hat{j}$ D) $\vec{F} = 3x^2\hat{i} + 4y^2\hat{j}$
2. ¿Cuál de las siguientes fuerzas es conservativa?
   A) $\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j}$ B) $\vec{F} = yx\hat{i} - xy\hat{j}$
   C) $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j}$ D) $\vec{F} = yx\hat{i} + xy\hat{j}$
3. Dos fuerzas conservativas, $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, actúan sobre un objeto. ¿Qué relación existe entre

$$W_+ = \oint(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\cdot d\vec{s}$$

y

$$W_- = \oint(\vec{F}_1 - \vec{F}_2)\cdot d\vec{s}?$$

(El círculo en el símbolo de la integral significa que hay que evaluarla alrededor de una trayectoria cerrada.)
   A) $W_+ > W_-$ B) $W_+ = W_- \neq 0$
   C) $W_+ > W_- = 0$ D) $W_+ < W_-$

12-2 Energía potencial

4. ¿Cuáles de las siguientes magnitudes no pueden ser negativas nunca?
   A) Masa. B) Tiempo. C) Trabajo.
   D) Energía potencial. E) Energía cinética.
   Puede haber más de una respuesta correcta.

12-3 Conservación de la energía mecánica

5. Tres bloques se encuentran en la parte superior de una rampa inclinada. El bloque *A* se desliza por ella sin fricción; el bloque *B* cae verticalmente sin fricción en el mismo instante.
   a) ¿Cuál de los dos bloques llega primero al fondo?
   A) Bloque *A*. B) Bloque *B*.
   C) Los dos llegan al mismo tiempo.
   D) No se cuenta con suficiente información para contestar.
   b) ¿Cuál de los dos bloques llega al fondo con la mayor rapidez?
   A) Bloque *A*. B) Bloque *B*.
   C) Llegan con la misma rapidez.
   D) No hay suficiente información para contestar la pregunta.
   c) ¿Cuál bloque experimenta la mayor aceleración?
   A) Bloque *A*. B) Bloque *B*.
   C) Experimentan la misma aceleración.
   D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

12-4 Conservación de la energía en el movimiento rotacional

6. Tres objetos rodantes se mueven con la misma rapidez en una superficie horizontal plana. Son un cilindro sólido, una esfera sólida y una esfera hueca. Los tres tienen la misma masa y radio. Después ruedan pendiente arriba. Suponiendo que rueden sin deslizarse, ¿cuál de ellos

   a) rodará hasta el punto vertical más alto por arriba de la superficie plana?
   A) El cilindro sólido. B) La esfera sólida.
   C) La esfera hueca.
   D) Rodará hasta la misma altura.
   b) rodará la distancia más lejana medida a lo largo de la pendiente?
   A) El cilindro sólido. B) La esfera sólida.
   C) La esfera hueca.
   D) Los tres rodarán la misma distancia.
7. Tres objetos rodantes se mueven con la misma rapidez en una superficie plana. Son esferas sólidas: la esfera *A* tiene un radio *r* y una masa *m*, la esfera *B* tiene un radio 2*r* y una masa *m*, la esfera *C* tiene un radio *r* y una masa 2*m*. Después las tres ruedan pendiente arriba. Suponiendo que ruedan sin deslizamiento, ¿cuál *a)* rodará hasta el punto vertical más alto (medido por el cambio de posición del centro de masa)?
   A) La esfera *A*. B) La esfera *B*. C) La esfera *C*.
   D) Los tres rodarán hasta la misma altura.
   b) rodarán la distancia más lejana conforme a lo medido a lo largo de la pendiente.
   A) La esfera *A*. B) La esfera *B*. C) La esfera *C*.
   D) Todos rodarán la misma distancia.
8. Un cilindro y un bloque se encuentran en la parte superior de una rampa inclinada. El cilindro rueda rampa abajo sin deslizamiento; en el mismo instante el bloque cae verticalmente sin fricción.
   a) ¿Cuál objeto llega primero al fondo?

A) El cilindro. B) El bloque.
C) Llegan al mismo tiempo.
D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

b) ¿Cuál objeto llega al fondo con mayor rapidez?
A) El cilindro. B) El bloque.
C) Los tres experimentan la misma aceleración.
D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

9. Con una rapidez inicial v_0, una esfera sólida de masa m y de radio r se proyecta horizontalmente fuera de un cañón sin que gire. Cae de inmediato en una superficie plana donde resbala cierto tiempo, pero finalmente comienza a rodar sin deslizamiento.
a) Para calcular la rapidez final de la esfera hay que aplicar
A) la conservación de energía.
B) la conservación del momento lineal.
C) la conservación del momento angular.
D) por lo menos uno de los principios anteriores.
b) La rapidez final de la esfera depende de
A) el radio.
B) la masa.
C) la masa y el radio.
D) ni de la masa ni del radio.
(Véase también el ejercicio 27.)

12-5 Sistemas conservativos, unidimensionales la solución completa

10. Una partícula con energía total E se mueve en una dimensión en una región donde la energía potencial es $U(x)$.
a) Su rapidez es cero cuando
A) $U(x) = E$. B) $U(x) = 0$.
C) $dU(x)/dx = 0$.
D) $d^2U(x)/dx^2 = 0$.
b) Su aceleración es cero cuando
A) $U(x) = E$. B) $U(x) = 0$.
C) $dU(x)/dx = 0$.
D) $d^2U(x)/dx^2 = 0$.

12-6 Sistemas conservativos tridimensionales

PREGUNTAS

1. Considere la fuerza unidimensional $\vec{F} = f(x)\hat{i}$ donde $f(x)$ es una función de x solamente. ¿Es posible determinar si es una fuerza conservativa si no se dispone de más información? Si se dispone de ella, ¿se trata de una fuerza conservativa?
2. Considere una fuerza bidimensional $\vec{F} = f(x, y)\hat{i} + g(x, y)\hat{j}$, donde $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones sólo de x y y. ¿Es posible determinar si es una fuerza conservativa si no se dispone de más información? Si se dispone de ella, ¿se trata de una fuerza conservativa? ¿Qué sucede si $f(x, y) = f(x)$ y $g(x, y) = g(y)$?
3. Se lanza una bola al aire; en el punto más alto la energía potencial U es máxima. ¿Es cero la derivada de U en el punto más alto? Si no lo es, ¿cómo entonces es U un máximo?
4. Las carreteras de montaña rara vez ascienden directamente las pendientes, sino que lo hacen en forma gradual. Explique por qué.
5. Teniendo en cuenta cómo la energía potencial de un sistema de dos moléculas idénticas se relaciona con la separación de sus centros, explique por qué un líquido que se rocía en una capa delgada posee más energía potencial que la misma masa de líquido en la forma de una esfera.
6. Las garrochas para salto se transformaron cuando las de madera fueron reemplazadas por las de fibra de vidrio. Explique por qué.
7. Usted deja caer un objeto y observa que rebota una vez y media en su altura original. ¿Qué conclusiones se desprenden de ello?
8. Un sismo puede liberar suficiente energía para devastar una ciudad. ¿Dónde se encuentra esta energía un instante antes que comience el sismo?
9. La energía mecánica total de cierto sistema aislado de partículas permanece constante. Si las energías cinéticas individuales de las partículas también son constantes, ¿qué conclusión puede obtenerse acerca de las fuerzas que operan en el sistema?
10. En el problema resuelto 12-4 (véase Fig. 12-6) concluimos que la rapidez de una montaña rusa en el fondo no depende en absoluto de la forma de la vía. ¿Será válido esto en caso de que hubiera fricción?
11. Por medio de los conceptos de trabajo y energía explique cómo un niño mueve un columpio hasta una gran amplitud desde una posición de reposo. (Consúltese "How to Make a Swing Go" de R. V. Hesheth, *Physicis Education*, julio de 1975, p. 367.)
12. Dos discos están conectados por un resorte rígido. ¿Puede presionar bastante el deseo superior hacia abajo, para que cuando libere el resorte éste salte hacia arriba y levante el disco inferior de la mesa (véase Fig. 12-12)? ¿Puede conservarse la energía mecánica en este caso?

FIGURA 12-12. Pregunta 12.

13. Explique la expresión "conservación de la energía" a) tal como se emplea en este capítulo, y *b*) la conexión con "crisis energética" (por ejemplo, apagar las luces). ¿En qué se distinguen los dos usos?
14. ¿Puede la energía cinética traslacional de un sistema convertirse en energía cinética rotacional si no intervienen fuerzas externas? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo; si es negativa, explique por qué no.

15. Se lanza por el carril una bola de boliche que originalmente no giraba; cuando golpea los pinos, rueda sin deslizamiento. ¿Se conserva la energía mecánica total?
16. Dé ejemplos físicos de equilibrio inestable, de equilibrio neutral y de equilibrio estable.
17. Una canica puede balancearse en el borde de un tazón, de manera que con un pequeño empujón podría 1. entrar rodando en él y oscilar en su interior, o 2. salir rodando de él, caer al suelo y romperse. ¿Es esta posición balanceada un punto de equilibrio estable o inestable?
18. ¿Es posible tener un punto de equilibrio que sea inestable y estable a la vez?

JERCICIOS

12-1 Fuerzas conservativas

12-2 Energía potencial

1. En una dimensión, la magnitud de la fuerza gravitacional de atracción entre una partícula de masa m_1 y otra de masa m_2 está dada por

$$F_x(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

donde G es una constante y x es la distancia entre las partículas. *a)* ¿Cuál es la función de energía potencial $U(x)$? Suponga que $U(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$). *b)* ¿Cuánto trabajo se requiere para aumentar la separación de las partículas de $x = x_1$ a $x = x_1 + d$?

2. Demuestre que $W \propto d$ cuando $d << x_1$ en el ejercicio 1. ¿Dónde vio esto antes?
3. Una partícula se desplaza por el eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa que se describe mediante

$$\vec{F} = -\alpha x e^{-\beta x}\hat{i},$$

donde α y β son constantes. Determine la función de energía potencial $U(x)$.

12-3 Conservación de la energía mecánica

4. Cada minuto, 73,800 m^3 de agua pasan por una cascada de 96.3 m de altura. Suponga que un generador hidroeléctrico convierte en energía eléctrica el 58.0% de la energía cinética ganada por el agua al caer; calcule después la salida de potencia del generador. (La densidad del agua es 1,000 kg/m^3).
5. Para desactivar misiles balísticos durante la fase inicial de refuerzo de su vuelo, se ha propuesto equipar con un "cañón de riel electromagnético" a los satélites terrestres de baja órbita. El cañón podría disparar un proyectil maniobrable de 2.38 kg a 10.0 km/s. La energía cinética transportada por el proyectil es suficiente al impactar para desactivar el misil aunque no cargue explosivos. (A este tipo de arma se le conoce como arma de "energía cinética".) Las fuerzas electromagnéticas aceleran el proyectil hasta que alcance la velocidad inicial. Supóngase en cambio que queremos disparar el proyectil empleando un resorte (un arma de "resorte"). ¿Cuál debe ser la constante de fuerza para obtener la rapidez deseada después de comprimir el resorte 1.47 m?
6. Un hombre de 220 lb salta de una ventana hacia una red de incendios 36 ft debajo. La red se estira 4.4 ft antes de detenerlo y devolverlo al aire. ¿Cuál es la energía potencial de la red estirada?
7. Un cubo de hielo muy pequeño se suelta del borde de un tazón hemisférico sin fricción cuyo radio mide 23.6 cm (Fig. 12-13). ¿Con qué rapidez se mueve el cubo en el fondo del tazón?

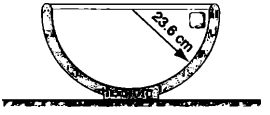


FIGURA 12-13. Ejercicio 7.

8. Con una velocidad inicial de 150 m/s, un proyectil con una masa de 2.40 kg se dispara desde un risco de 125 m de altura, dirigido 41.0° arriba de la horizontal. ¿Cuáles son *a)* su energía cinética al momento de disparar, y *b)* su energía potencial? *c)* Calcule la rapidez del proyectil poco antes que caiga al suelo. ¿Cuáles respuestas dependen de su masa? No tenga en cuenta la resistencia del aire al avance.
9. Un carro de una montaña rusa sin fricción arranca en el punto A de la figura 12-14 con una rapidez v_0. ¿Qué velocidad alcanzará *a)* en el punto B, *b)* en el punto C, y *c)* en el D? Suponga que el carro puede considerarse una partícula y que siempre permanece en la vía.

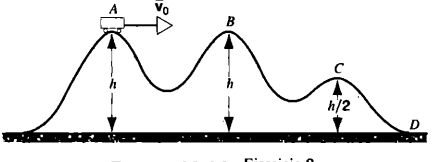


FIGURA 12-14. Ejercicio 9.

10. La figura 12-15 muestra la fuerza en función del estiramiento o compresión del resorte en una pistola de corcho. El resorte se comprime 5.50 cm y sirve para disparar un corcho de 3.80 g de masa. *a)* ¿Qué rapidez tiene el corcho si se libera cuando el resorte cruza su posición relajada? *b)* Ahora suponga que el corcho se pega al resorte, haciendo que éste se extienda 1.50 cm más allá de su longitud sin estiramiento antes que se produzca la separación. ¿Qué rapidez alcanza en este caso el corcho en el momento de ser liberado?

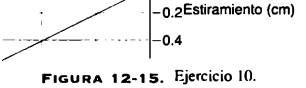


FIGURA 12-15. Ejercicio 10.

11. La figura 12-16 muestra una piedra de 7.94 kg colocada sobre un resorte. La piedra lo comprime 10.2 cm. *a*) Calcule la constante de fuerza del resorte. *b*) La piedra se empuja hacia abajo otros 28.6 cm y luego se suelta. ¿Cuánta energía potencial se guarda en él antes de soltar la piedra? *c*) ¿A qué altura sobre esta nueva posición (la más baja) llegará la piedra?

FIGURA 12-16. Ejercicio 11.

12. La superficie de Estados Unidos continental mide cerca de 8×10^6 km^2 y su elevación promedio unos 500 m. La precipitación pluvial media es de 75 cm. Dos terceras partes de ella retornan a la atmósfera por evaporación, pero el resto termina fluyendo en los mares. Si toda esta agua pudiera aprovecharse para generar electricidad en plantas hidroeléctricas, ¿qué salida promedio de potencia podría obtenerse?

13. Un objeto cae del reposo desde una altura *h*. Determine su energía cinética y su energía potencial en función de *a*) el tiempo, y *b*) la altura. Grafique las expresiones y demuestre que su suma —la energía mecánica total— es constante en ambos casos.

14. En los Juegos Olímpicos de 1996, la saltadora búlgara de altura Stefka Kostadinova estableció una marca para mujeres con un salto de 2.05 m (Fig. 12-17). En igualdad de condiciones, ¿a qué altura hubiera saltado en la Luna cuya gravedad superficial es apenas de 1.67 m/s^2? (*Sugerencia*: La altura que "cuenta" es la distancia vertical que alcanzó su centro de gravedad después que el pie se separó del suelo. Suponga que, en el instante en que sus pies perdieron contacto con él, el centro de gravedad estaba a 110 cm arriba del nivel del suelo. Asimismo, suponga que, al librar la barra, su centro de gravedad tenía la misma altura que ésta.)

FIGURA 12-17. Ejercicio 14.

15. Un bloque de 1.93 kg se coloca sobre un resorte comprimido en una pendiente sin fricción de 27.0° (véase Fig. 12-18). El resorte, cuya constante de fuerza es 20.8 N/cm, se comprime 18.7 cm después de ello, se suelta el bloque. ¿A qué altura de la pendiente llegará el bloque antes de detenerse? Mida su posición final respecto a la que ocupaba antes que lo soltaran.

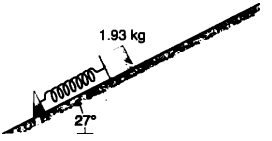


FIGURA 12-18. Ejercicio 15.

16. Se construye un péndulo atando una piedra de 1.33 kg a una cuerda de 3.82 m de largo. Se lanza la piedra perpendicularmente a la cuerda, alejada del suelo, y ésta forma un ángulo de 58.0° con la vertical. Se observa que tiene una rapidez de 8.12 m/s cuando pasa por su punto más bajo. *a*) ¿Qué velocidad tenía la piedra al ser lanzada? *b*) ¿Cuál es el ángulo más grande con la vertical que formará la cuerda durante el movimiento de la piedra? *c*) Usando el punto más bajo del movimiento de giro como el cero de la energía potencial gravitacional, calcule la energía mecánica total del sistema.

17. Un extremo de un resorte vertical se sujeta al techo. Se le pone un peso en el otro y se baja lentamente hasta que alcanza su posición de equilibrio. Demuestre que la pérdida de energía potencial gravitacional del peso es igual a la mitad de la ganancia de energía potencial del resorte. (¿Por qué no son iguales las dos magnitudes?)

18. Desde una altura de 43.6 cm, un bloque de 2.14 kg se deja caer sobre un resorte de constante de fuerza k = 18.6 N/cm, como se ve en la figura 12-19. Encuentre la distancia máxima que se comprimirá el resorte.

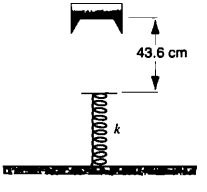


FIGURA 12-19. Ejercicio 18.

19. Dos niños participan en un juego en que tratan de acortar a un caja pequeña en el piso con una canica lanzada desde un arma que se carga con un resorte y que está montada sobre una mesa. La caja está a 2.20 m horizontalmente desde el borde de la mesa (Fig. 12-20). Roberto comprime el resorte 1.10 cm, pero la canica cae 27.0 cm antes del blanco. ¿Cuánto deberá Rita comprimirlo para dar en el blanco?

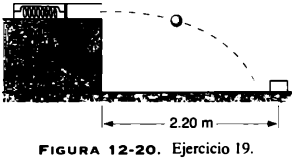


FIGURA 12-20. Ejercicio 19.

20. Tarzán, que pesa 180 lb, se columpia desde un risco en el extremo de una liana de 50 ft (Fig. 12-21). Tarzán caería 8.5 ft de la parte superior del risco hasta el fondo del balanceo. La liana tiene una resistencia a la rotura de 250 lb. ¿Se romperá la liana?

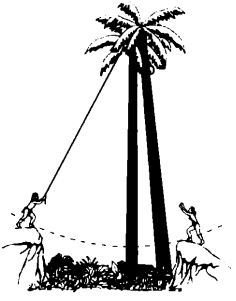


FIGURA 12-21. Ejercicio 20.

21. Dos péndulos con una longitud L presentan la posición inicial indicada en la figura 12-22. Se suelta el primero desde una altura d y choca contra el segundo. Suponga que la colisión es completamente inelástica e ignore la masa de las cuerdas, lo mismo que los posibles efectos de la fricción. ¿A qué altura llega el centro de masa después de la colisión?

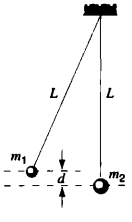


FIGURA 12-22. Ejercicio 21.

12-4 Conservación de la energía en el movimiento rotacional

22. Si R = 12.3 cm, M = 396 g y m = 48.7 g en el problema resuelto 9-10 (Fig. 9-26), calcule la rapidez del bloque después que haya descendido 54.0 cm partiendo del reposo. Resuelva el problema aplicando los principios de conservación de la energía.

23. Un cascarón esférico uniforme gira alrededor de un eje vertical en cojinetes sin fricción (Fig. 12-23). Una cuerda ligera pasa por el ecuador del cascarón, sobre una polea, y está sujeta a un objeto pequeño que por lo demás cae libremente bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué rapidez tiene después de caer una distancia h partiendo del reposo?

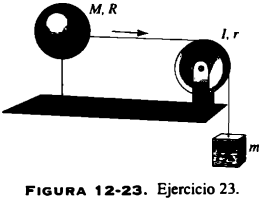


FIGURA 12-23. Ejercicio 23.

24. Un automóvil está equipado con un volante que conserva energía y que al operar se conecta al eje de transmisión, de modo que gira a 237 rev/s cuando va a 86.5 km/h. Su masa total es 822 kg, el volante pesa 194 N y es un disco uniforme de 1.08 m de diámetro. A partir del reposo, el automóvil desciende por una pendiente de 1500 m de largo y de 5.00°. Despreciando de la fricción y la inercia rotacional de las ruedas, calcule *a*) la rapidez del automóvil en el fondo de la pendiente, *b*) la aceleración angular del volante en el fondo de la pendiente y *c*) la potencia que absorbe la rotación del volante en el fondo de la pendiente.

25. Una esfera sólida de 4.72 cm de radio rueda hacia arriba por un plano con un ángulo de inclinación de 34.0°. En el fondo de la pendiente el centro de masa de la esfera tiene una rapidez rotacional de 5.18 m/s. *a*) ¿Qué distancia recorre la esfera al subir por el plano? *b*) ¿Cuánto tarda en regresar al fondo? *c*) ¿Cuántas rotaciones completa durante el viaje redondo?

26. Un cuerpo rueda horizontalmente sin deslizamiento y con una rapidez v. Después rueda cuesta arriba hasta alcanzar una altura máxima h. Si $h = 3v^2/4g$, ¿cuál podría ser ese cuerpo?

27. Una esfera sólida de masa m y de radio r es lanzada horizontalmente fuera de un cañón sin que gire con rapidez inicial v_0. De inmediato cae en una superficie plana, donde resbala cierto tiempo, pero finalmente comienza a rodar sin deslizamiento. Calcule la rapidez final de la esfera. (Véase la pregunta 9 de Opción múltiple.)

12-5 Sistemas conservativos unidimensionales la solución completa

28. Una partícula se mueve en el eje x por una región donde su energía potencial $U(x)$ varía como en la figura 12-24. *a*) Prepare una gráfica cuantitativa de la fuerza $F_x(x)$ que actúa sobre ella, empleando la misma escala del eje x que en la figura 12-24. *b*) La partícula tiene una energía mecánica (constante) E de 4.0 J. Grafique su energía cinética $K(x)$ directamente de la figura 12-24.

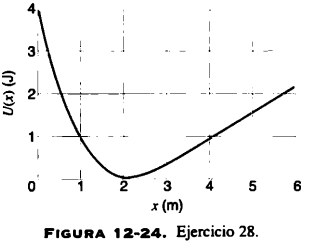


FIGURA 12-24. Ejercicio 28.

29. Una partícula de 2.0 kg de masa se desplaza en el eje x por una región donde su energía potencial $U(x)$ varía como se indica en la figura 12-25. Cuando la partícula está en x = 2.0 m, su velocidad es -2.0 m/s. *a*) Calcule la fuerza que actúa sobre ella en esta posición. *b*) ¿Entre qué límites tiene lugar el movimiento? *c*) ¿Con qué rapidez se desplaza cuando se halla en x = 7.0 m?

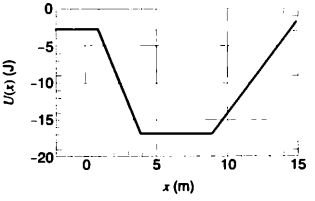


FIGURA 12-25. Ejercicio 29.

12-6 Sistemas conservativos tridimensionales

30. Demuestre que, con la misma rapidez inicial v_0, la rapidez v de un proyectil será igual en todos los puntos con la misma elevación, sin importar el ángulo de lanzamiento. No tenga en cuenta la resistencia del aire.

31. La energía potencial correspondiente a cierta fuerza bidimensional está dada por $U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$. *a)* Obtenga F_x y F_y; describa después la fuerza vectorial en todos los puntos en función de sus coordenadas x y y. *b)* Obtenga F_r y F_θ y describa la fuerza vectorial en todos los puntos en función de las coordenadas polares r y θ. *c)* ¿Se le ocurre un modelo físico de esa fuerza?

32. La energía potencial de una fuerza tridimensional está dada por $U(x, y, z) = -k/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *a)* Obtenga F_x, F_y y F_z y luego describa la fuerza vectorial en los puntos en función de sus coordenadas x, y y z. *b)* Convierta a coordenadas esféricas polares y encuentre F_r.

33. Integre en las tres trayectorias del problema resuelto 12-11 y demuestre después que la fuerza $\vec{F} = -k_1 y\hat{i} - k_2 x\hat{j}$ no es de conservativa cuando $k_1 \neq k_2$.

PROBLEMAS

1. La fuerza en una partícula restringida a moverse en el eje z está dada por

$$F_z(z) = \frac{k}{(z + l)^2} - \frac{k}{(z - l)^2}$$

donde k y l son constantes fijas. Suponga que $U(z) \to 0$ conforme $z \to \infty$. *a)* Encuentre una expresión *exacta* de $U(z)$ cuando $z > l$. *b)* Demuestre que $U(z) \propto 1/z^2$ cuando $z >> l$.

2. Una bola de masa m está sujeta al extremo de una varilla muy ligera de longitud L. El otro extremo gira de modo que la bola puede moverse en un círculo vertical. Se aparta la varilla de la horizontal y se le da un empujón hacia abajo como se muestra en la figura 12-26 de manera que oscila hacia abajo y llega a la vertical erguida. ¿Qué velocidad inicial se le impartió a la bola?

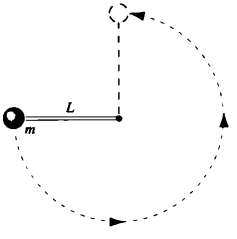


FIGURA 12-26. Problema 2.

3. Una fuerza de 268 N puede comprimir 2.33 cm un resorte ideal sin masa. En la parte superior de una pendiente, un bloque con una masa $m = 3.18$ kg se suelta del reposo como se indica en la figura 12-27; el ángulo de inclinación es 32.0°. Se detiene momentáneamente después de comprimir el resorte 5.48 cm. *a)* ¿Qué distancia recorrió el bloque pendiente abajo en este momento? *b)* ¿Qué rapidez tiene al tocarlo?

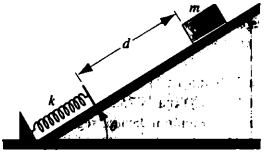


FIGURA 12-27. Problema 3.

4. Se sostiene una cadena en una mesa sin fricción, con una cuarta parte de su longitud colgando sobre el borde como se observa en la figura 12-28. Si su longitud es L y si su masa es m, ¿cuánto trabajo se requiere para volver a colocar en la mesa la porción colgante?

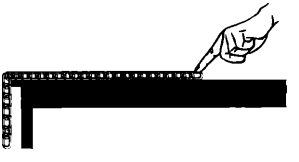


FIGURA 12-28. Problema 4.

5. Un pequeño bloque de masa m resbala por un carril de lazo a lazo como se aprecia en la figura 12-29. *a)* Se suelta del reposo en el punto P. ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre él en el pun-

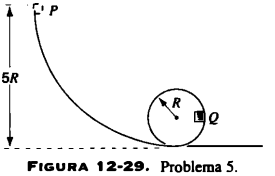


FIGURA 12-29. Problema 5.

to Q? *b*) ¿A qué altura sobre el fondo del lazo deberá ser saltado para que esté al límite mínimo de contacto en el punto más alto del lazo?

6. Un bloque de masa m se encuentra en una cuña de masa M, la cual a su vez está sobre una mesa horizontal, como se muestra en la figura 12-30. Ninguna de las superficies tiene fricción. Si el sistema parte del reposo con el punto P del bloque a una distancia h sobre la mesa, calcule la rapidez de la cuña en el instante en que el punto P toca la mesa.

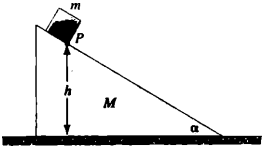


FIGURA 12-30. Problema 6.

7. Sobre un objeto de 1.18 kg actúa una fuerza neta conservativa dada exactamente por $F_x = Ax + Bx^2$, donde $A = -3.00$ N/m y $B = -5.00$ N/m^2. *a*) Determine la energía potencial del sistema cuando $x = 2.26$ m. Suponga que $U(0) = 0$. *b*) El objeto tiene una rapidez de 4.13 m/s en la dirección negativa x cuando se halla en $x = 4.91$ m. Encuentre su rapidez al cruzar $x = 1.77$ m.

8. La cuerda de la figura 12-31 tiene una longitud $L = 120$ cm y la distancia d a la clavija fija es 75.0 cm. Cuando la bola se suelta del reposo en la posición indicada, seguirá el arco de la figura. ¿Con qué rapidez irá *a*) cuando llegue al punto más bajo en su oscilación, y *b*) cuando alcance el punto más alto, después que la cuerda alcanza la clavija?

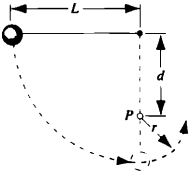


FIGURA 12-31. Problemas 8 y 9.

9. En la figura 12-31 demuestre que, si la bola oscila completamente alrededor de la clavija fija, $d > 3L/5$. (*Sugerencia*: Debe estar en movimiento en la parte superior de su giro, pues de lo contrario caerá.)

10. Bajo la influencia de la gravedad exclusivamente, un bloque de masa m colocado en el extremo de una cuerda oscila en un círculo vertical de radio R. Encuentre la diferencia entre las magnitudes de la tensión de la cuerda en la parte superior y en el fondo del lazo, suponiendo que el bloque se mueve siempre con suficiente rapidez para que la cuerda nunca se afloje.

11. Un niño está sentado arriba de un montículo esférico de hielo (Fig. 12-32). Recibe un pequeñísimo empujón y comienza a resbalar hacia abajo por el hielo. Demuestre que deja el hielo en un punto cuya altura es $2R/3$ si el hielo no tiene fricción. (*Sugerencia*: La fuerza normal desparece cuando el niño abandona el hielo.)

FIGURA 12-32. Problema 11.

12. La partícula m en la figura 12-33 describe un círculo vertical de radio R dentro de una pista. No se produce fricción. Cuando m está en su posición más baja, su velocidad es v_0. *a*) ¿Cuál es el valor mínimo v_m de v_0 para el que m recorrerá el círculo entero sin perder contacto con la pista? *b*) Suponga que v_0 es $0.775v_m$. La partícula subirá por la pista hasta algún punto P donde perderá contacto con ella y recorrerá la trayectoria descrita aproximadamente por la línea punteada. Determine la posición angular θ del punto P.

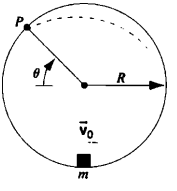


FIGURA 12-33. Problema 12.

13. Un cuerpo rígido consta de tres varillas delgadas idénticas que tienen la forma de la letra H (Fig. 12-34). Gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por una de las patas de la letra H. Se permite que el cuerpo caiga del reposo desde una posición donde el plano de la H es horizontal. ¿Qué rapidez angular tiene el cuerpo cuando el plano de la H es vertical?

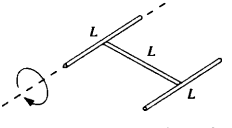


FIGURA 12-34. Problema 13.

14. Una pequeña canica sólida de masa m y de radio r rueda sin deslizamiento por una pista de lazo, como se aprecia en la figura

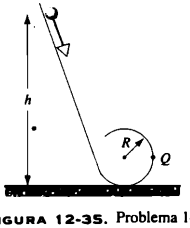


FIGURA 12-35. Problema 14.

12-35, luego de ser soltada del reposo en alguna parte de la sección recta de la pista. *a*) ¿De qué altura mínima arriba del fondo de la pista debemos soltarla para que no salga de ella en la parte superior del lazo? (El radio del lazo a lazo es R; suponga que $R >> r$.) *b*) Si soltamos la canica de una altura $6R$ arriba del fondo de la pista, ¿cuál es el componente horizontal de la fuerza que actúa en el punto Q?

15. Se lanza una partícula horizontalmente a lo largo del interior de un tazón hemisférico sin fricción de radio r, que se conserva en reposo (Fig. 12-36). Queremos determinar la rapidez inicial v_0 requerida para que llegue a la parte superior del tazón. Calcule v_0 en función de θ_0, la posición angular inicial de la partícula.

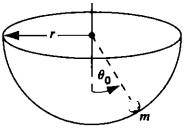


FIGURA 12-36. Problema 15.

16. La figura 12-37*a* muestra un átomo de masa m a una distancia r de un átomo en reposo de masa M, donde $m << M$. En la figura 12-37*b* se observa la función de energía potencial $U(r)$ en varias posiciones del átomo más ligero. Describa el movimiento de éste si *a*) la energía mecánica total es mayor que cero como en E_1, y *b*) si es menor que cero como en E_2. Con $E_1 = 1.0 \times 10^{-19}$ J y $r = 0.30$ nm, calcule *c*) la energía potencial, *d*) la energía cinética, y *e*) la fuerza (magnitud y dirección) que opera sobre el átomo en movimiento.

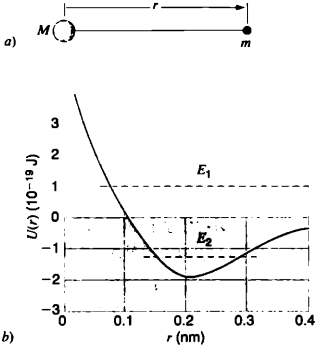


FIGURA 12-37. Problema 16.

17. Una partícula alfa (núcleo de helio) dentro de un gran núcleo está ligado por una energía potencial como la de la figura 12-38. *a*) Construya una función de x que tenga esta forma general con un valor mínimo U_0 si $x = 0$ y con un valor máximo U_1 en $x = x_1$ y $x = -x_1$. *b*) Determine la fuerza entre la partícula alfa y el núcleo en función de x. *c*) Describa los movimientos posibles.

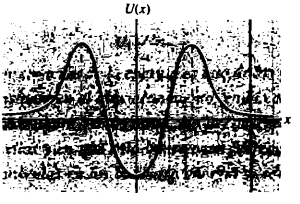


FIGURA 12-38. Problema 17.

18. La así llamada energía potencial de Yukawa

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$$

ofrece una descripción exacta de la interacción entre los nucleones (neutrones y protones, constituyentes del núcleo). La constante r_0 mide unos 1.5×10^{-15} m y la constante U_0 unos 50 MeV. *a*) Encuentre la expresión correspondiente de la fuerza de atracción. *b*) Para mostrar el corto alcance de esta fuerza, calcule su relación cuando $r = 2r_0$, $4r_0$ y $10r_0$ a la fuerza con $r = r_0$.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Una partícula se desplaza por el eje x bajo la influencia de un fuerza conservativa descrita por

$$\vec{F} = -\text{signo}\,(x) F_0 (1 - e^{-\alpha x^2})\hat{\imath}$$

donde signo (x) es $+1$ con $x > 0$, -1 con $x < 0$ y 0 con $x = 0$. Aquí $F_0 = 1$ N y $\alpha = 1$ m^{-2}. Elabore numéricamente una gráfica de la función de energía potencial $U(x)$.

2. Una partícula de 1.0 kg se mueve en un potencial unidimensional descrito por $U(x) = Ax^4$, donde $A = 1$ J/m^4. *a*) La partícula se suelta del reposo en $x = 1$ m; aplique un método numérico apropiado para determinar el tiempo que la partícula tardará en retornar al punto de partida. *b*). La partícula se suelta del reposo en $x = 2$ m; determine cuánto tiempo tardará en regresar al punto de partida. *c*) Prepare una gráfica del tiempo de retorno frente a la posi-

ción inicial para varios valores iniciales entre $x = 0.1$ m y $x = 10$ m. ¿Cuál es la forma funcional de esta gráfica?

3. Una partícula de 1.0 kg se desplaza en un potencial bidimensional descrito por $U(x, y) = A(x^4 + y^4 - 2\alpha x^2 y^2)$, donde $A = 1.00$ J/m^4 y α es una constante adimensional que puede tener cualquier valor entre 0 y 1. La partícula parte del reposo en $x = 1.00$ m, $y = 2.00$ m. *a*) Calcule numéricamente su trayectoria cuando $\alpha = 0$. Grafique la trayectoria en una gráfica *xy*. Tal vez tenga que experimentar con el tiempo que usará para la trayectoria. *b*) Repita el proceso, sólo que esta vez utilice $\alpha = 1$. Grafique la trayectoria y compárela con su respuesta a *a*). Éste es un ejemplo clásico de movimiento caótico.

CAPÍTULO 13

ENERGÍA 3: CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La ley de conservación de la energía es uno de los grandes principios rectores de la física. La energía total permanece constante en el almacenamiento, en la conversión o en la transferencia de energía en los sistemas mecánicos. Hasta ahora hemos estudiado la conservación en los sistemas mecánicos en que no se realiza trabajo externo en ellos y en que sólo intervienen fuerzas conservativas. En el presente capítulo vamos a estudiar sistemas de partículas en los cuales la energía puede modificarse con el trabajo efectuado por fuerzas externas; también vamos a considerar fuerzas no conservativas como la fricción, que podrían actuar entre los objetos del sistema o entre éste y su entorno. Tales extensiones de la ley de conservación de la energía nos llevan a introducir otra forma de ella: la energía interna.

Asimismo, explicaremos un segundo método con que se cambia la energía de un sistema, a saber: la transferencia de calor a través de la frontera del sistema. Esto nos conducirá a desarrollar una forma más general de la ley de conservación de la energía, llamada primera ley de la termodinámica.

13-1 TRABAJO REALIZADO SOBRE UN SISTEMA POR FUERZAS EXTERNAS

En la sección 12-3 definimos la energía mecánica total E de un sistema aislado, como la suma de su energía cinética y potencial, $(K + U)$. La energía potencial procede de las fuerzas que los objetos del sistema ejercen una sobre otra, y suponemos que son conservativas. En un sistema aislado la energía mecánica total permanece constante.

En el presente capítulo vamos a ampliar este método en varios aspectos. Examinaremos sistemas en los cuales: 1) Las fuerzas externas pueden alterar la energía mecánica total; 2) La energía puede guardarse internamente en los movimientos o en las interacciones entre varios átomos o moléculas constitutivas; 3) Pueden intervenir fuerzas no conservativas, sobre todo las de fricción; 4) La energía puede modificarse mediante la transferencia de calor. En los cuatro casos veremos cómo el concepto de energía y la ley de su conservación pueden ampliarse para incluir estos efectos. La exposición aportará más pruebas acerca de la importancia y la gran aplicabilidad de la ley de conservación de la energía en física.

Comenzaremos examinando el efecto de las fuerzas externas que pueden operar sobre un sistema. Al analizar un problema, a menudo conviene dividir la situación física en un sistema y su ambiente. Imagine que trazamos una frontera alrededor de la parte de la situación que definimos como el sistema; dentro de esa frontera puede haber objetos que ejerzan fuerzas de conservación entre sí; a éstas se les representa por medio de su energía potencial. El objeto en el ambiente puede aplicar fuerzas que efectúan trabajo externo W_{ext} en el sistema. La figura 13-1 describe esta situación, donde las fuerzas externas aplicadas por los objetos en el ambiente del sistema producen trabajo que puede cambiar la energía mecánica total $K + U$ del sistema.

Puede suponerse que el trabajo externo ofrezca un medio de transferir energía entre el sistema y el ambiente. El trabajo externo *positivo* efectuado por el ambiente en el sistema introduce energía en éste, aumentando con ello su energía total; en cambio, el trabajo externo *negativo* realizado por el ambiente

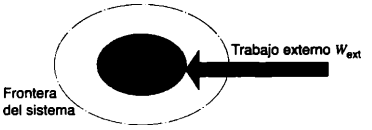


FIGURA 13-1. Un sistema encerrado dentro de la frontera tiene una energía cinética K y una energía potencial U (que representa sólo las interacciones de los componentes en su interior). El ambiente puede intercambiar energía con él realizando trabajo externo W_{ext}. La flecha indica que la energía es transferida hacia el sistema debido al trabajo externo; la energía y el trabajo son escalares y no tienen una dirección asociada.

en el sistema extrae energía de este último, disminuyendo así su energía total.

El trabajo externo no crea energía ni la destruye; no representa más que una *transferencia* de energía. Por ejemplo, si W_{ext} = + 100 J debido al trabajo externo 100 J, de energía se transferirán del ambiente al sistema. En el intercambio, el sistema gana 100 J de energía y el ambiente pierde la misma cantidad; esto es, la energía total del sistema + ambiente permanece inalterada.

Para analizar el caso anterior más a fondo, vamos a examinar un sistema compuesto por varios objetos que pueden tratarse como partículas. El trabajo realizado en cualquiera de ellos puede provenir de las fuerzas ejercidas por los objetos dentro del sistema, y también por los objetos situados fuera de él. Con la expresión *trabajo interno*, designamos el trabajo en la partícula debido a las fuerzas ejercidas por otros objetos dentro del sistema, por lo que continuamos suponiendo que se trata de fuerzas conservativas. Entre las fuerzas internas podrían figurar las de gravitación, las elásticas de resorte y las eléctricas. El *trabajo externo* en la partícula lo realizan las fuerzas aplicadas por los objetos que están fuera de la frontera del sistema. El trabajo neto en determinada partícula n, será entonces el total de las contribuciones internas y externas: $W_{neto,\,n} = W_{int,\,n} + W_{ext,\,n}$. El teorema de trabajo —energía (Ec. 11-24), nos recuerda que dicho trabajo es igual al cambio de su energía cinética: $W_{neto,\,n} = \Delta Kn$.

A continuación consideraremos el sistema entero de muchas partículas. El cambio total de su energía cinética es simplemente, la suma de la que se produce en todas las n partículas: $\Delta K = \Sigma\, \Delta K_n$ y, en forma similar, el trabajo total externo realizado en el sistema, es la suma que efectúan las fuerzas externas en todas las n partículas: $W_{ext} = \Sigma\, W_{ext,\,n}$. Si éstas son conservativas, como hemos supuesto, pueden representarse mediante una función de energía potencial; el cambio *total* de esta última podemos obtenerlo de la ecuación 12-4, basándonos en el trabajo interno total que las partículas realizan unas en otras: $\Delta U = -\, W_{int} = -\, \Sigma\, W_{int,\,n}$. Con $W_{neto,\,n} = W_{int,\,n} + W_{ext,\,n}$ para la partícula n, sumamos sobre todas para calcular el trabajo del sistema entero $\Sigma\, W_{neto,\,n} = \Sigma\, W_{int,\,n} + \Sigma\, W_{ext,\,n}$ o, haciendo las sustituciones anteriores, $\Delta K = -\, \Delta U + W_{ext}$. Entonces podemos escribir

$$\Delta K + \Delta U = W_{ext}. \qquad (13\text{-}1)$$

La ecuación 13-1 es la expresión formal de la situación representada en la figura 13-1: el trabajo externo puede modificar la energía mecánica total $K + U$ del sistema dentro de la frontera. Una vez más, adviértase que el trabajo externo positivo aumenta la energía: si $W_{ext} > 0$, entonces $\Delta(K + U) > 0$. Asimismo, nótese que la ecuación 12-12 ($\Delta K + \Delta U = 0$) es un caso especial de la ecuación 13-1 que se aplica a sistemas aislados (aquéllos donde $W_{ext} = 0$).

A continuación damos un ejemplo de cómo aplicar los resultados anteriores. Supongamos que un bloque de masa m está sujeto a un resorte vertical cerca de la superficie de la Tierra. Soltamos el bloque y, al ir cayendo, la fuerza gravitacional actúa hacia abajo y la fuerza del resorte se ejerce hacia arriba. Podemos escoger la frontera del sistema en cualquier forma adecuada, como se aprecia en la figura 13-2.

1. *Sistema = bloque (Fig. 13-2a).* La fuerza del resorte y la gravedad son fuerzas externas; no hay fuerzas internas en el sistema y, por lo mismo, tampoco energía potencial. En este caso, la energía cinética K del bloque se modifica debido al efecto neto del trabajo externo realizado por el resorte y la gravedad; la ecuación 13-1 se convierte en $\Delta K = W_{resorte} + W_{grav}$.

2. *Sistema = bloque + resorte (Fig. 13-2b).* El resorte está ahora dentro del sistema, por lo cual incluimos su interacción con el bloque mediante la energía potencial de ambos. La gravedad sigue siendo una fuerza externa, así que $\Delta K + \Delta U_{resorte} + W_{grav}$.

3. *Sistema = bloque + Tierra (Fig. 13-2c).* La gravedad es una fuerza interna, pero la fuerza del resorte es externa y, en consecuencia, la ecuación 13-1 se transforma en $\Delta K + \Delta U_{grav} = W_{resorte}$.

4. *Sistema = bloque + resorte + Tierra (Fig. 13-2d).* No existen fuerzas externas que realicen trabajo en el sistema; la fuerza del resorte y la gravedad son internas a él, de modo que $\Delta K + \Delta U_{resorte} + \Delta U_{grav} = 0$, porque $W_{ext} = 0$.

Si por ejemplo, quisiéramos calcular el cambio de rapidez del bloque después que cae cierta distancia, los métodos anteriores darían el mismo resultado, por lo que a menudo se escoge el que se juzga más fácil.

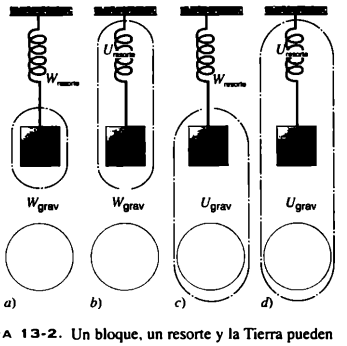


FIGURA 13-2. Un bloque, un resorte y la Tierra pueden agruparse de diversas maneras para definir el sistema y su ambiente.

13-2 ENERGÍA INTERNA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Supongamos que una patinadora de hielo se aleja del barandal en el borde de una pista. Parte del reposo contra el carril y, extendiendo los brazos para alejarse de él, comienza a deslizarse por el hielo.

Vamos a tratar de analizar este ejemplo, aplicando la ley de conservación de la energía mecánica como se indica en la ecuación 13-1 ($\Delta K + \Delta U = W_{ext}$). Definimos el sistema para que incluya únicamente a la patinadora. Entonces, está claro que $\Delta U = 0$ (dentro de él no hay otros objetos que ejerzan fuerzas sobre la patinadora). Los cuerpos del ambiente le aplican tres fuerzas externas. Por supuesto, ni la gravedad ni la fuerza normal realizan trabajo en ella. La tercera es la que ejerce el barandal sobre la patinadora (que es igual y contraria a la que ella ejerce sobre el barandal); esta fuerza tampoco efectúa trabajo, *porque el punto de su aplicación no se mueve.* Así pues, para las tres fuerzas externas $W_{ext} = 0$. Al aplicar la ecuación 13-1 se concluye que $\Delta K = 0$, y esto no concuerda con la observación de que la patinadora se aleja del barandal acelerando. Desde luego, algo falta en este cálculo. ¿De dónde proviene la energía cinética de ella?

Cuando una regla (por ejemplo, la ecuación 13-1) válida y útil en algunos casos parece discrepar con el experimento en otras, los físicos acostumbran tratar de ampliarla en vez de desecharla. En su forma extendida, a menudo es posible aplicar tanto a los ejemplos válidos anteriores como a otros que al parecer se desvían de ella. ¿Cómo ampliamos la ley de conservación de la energía mecánica para que se aplique al ejemplo de la esquiadora?

La conservación de la energía mecánica se derivó de las leyes de Newton expresadas en una forma válida exclusivamente para partículas individuales. En los ejemplos en que la aplicamos en el Capítulo 12, todos los cuerpos del sistema podían tratarse como partículas. Pero la patinadora evidentemente *no* se comporta como una partícula (recuérdese que el comportamiento de las partículas exige que todas las partes del cuerpo se muevan en la misma forma). Al extender la patinadora el brazo mientras empujando se separa del barandal, ninguna de las partes de su cuerpo se mueve del mismo modo y, por tanto, no podemos tratarla como partícula. Hay que tratarla como *un sistema de partículas,* con una estructura interna; dentro de este sistema tiene lugar algo que no podría ocurrir en una partícula individual, pues por definición, ésta carece de estructura interna.

Podemos ampliar el concepto de energía, si postulamos que un sistema compuesto por muchas partículas puede almacenar energía en una forma que llamamos *energía interna* E_{int}. Después extendemos la ecuación 13-1 para que incluya esa nueva forma de energía:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W_{ext}. \qquad (13\text{-}2)$$

¿Cuál es la naturaleza de la energía interna? Muchas veces podemos representarla como la suma de la energía cinética asociada a los movimientos aleatorios de los átomos o de las moléculas (que suelen determinar la temperatura del objeto), y de la energía potencial asociada a las fuerzas entre ellos: $E_{int} = K_{int} + U_{int}$. En la generalidad de los casos, no habrá que considerar las formas que puede asumir la energía interna; simplemente vemos en ella otra clase de energía del sistema.

Consideremos, por ejemplo, un pequeña bola metálica que cae a través de un líquido viscoso como el aceite. Supóngase que alcanza su rapidez terminal, de manera que $\Delta K = 0$ mientras la observamos a lo largo de cierta distancia. Tomamos como nuestro sistema la bola, el contenedor de aceite y la Tierra. Entonces la única energía potencial relacionada con las fuerzas que actúan entre los objetos del sistema es la de gravedad, ΔU_{grav}. Ninguna fuerza externa opera sobre el sistema, por lo cual $W_{ext} = 0$. En este caso, la ecuación 13-2 se convierte en $\Delta U_{grav} + \Delta E_{int} = 0$, o $\Delta E_{int} = -\Delta U_{grav}$. Al caer la bola y al disminuir ΔU_{grav}, aumenta la energía interna; en otras palabras, la pérdida de la energía potencial gravitacional del sistema se equilibra con el incremento de la energía interna, de modo que la energía total del sistema permanece constante. (El incremento, asociado a los cambios del movimiento o configuración de los átomos de la bola y del aceite, podría observarse como un ligero aumento de la temperatura de uno u otro.)

Una explicación similar ayuda a entender por qué una pelota de tenis que parte del reposo no rebota hasta la altura de la cual la dejamos caer. Durante el instante en que toca el suelo, su flexión y su deformación provoca un aumento en su energía interna a costa de la energía cinética; por eso la rapidez poco después de botar es menor que la que tenía antes. De ahí que no puede retornar a su altura original.

Esta explicación nos indica cómo hemos retenido el concepto original de conservación de la energía. En los ejemplos anteriores se transformaba la energía mecánica $K + U$, en energía interna E_{int}, pero la cantidad total permanecía constante.

En seguida, revisaremos el significado de los términos de la ecuación 13-2:

- K, es la energía cinética asociada al movimiento total (traslacional o rotacional) de los cuerpos del sistema; se mide desde un adecuado marco de referencia inercial, generalmente fijo en el laboratorio.
- U, es la energía potencial relacionada con las fuerzas conservativas que los objetos del sistema ejercen uno sobre otro.
- E_{int}, es la energía interna del sistema y, entre otras cosas, incluye la energía cinética y potencial microscópica de los átomos o de las moléculas.
- W_{ext}, es el trabajo realizado por las fuerzas externas que operan sobre el sistema.

Ahora entendemos cómo la inclusión de la expresión energía interna permite analizar el movimiento de la patinadora y preservar el concepto de conservación de la energía. Con base en la ecuación 13-2, todavía con $W_{ext} = 0$ y $\Delta U = 0$, tenemos

$$\Delta E_{int} = -\Delta K. \qquad (13\text{-}3)$$

Para la patinadora, ΔK es positiva y, en consecuencia, ΔE_{int} será negativa según la ecuación (13-3). El aumento de energía cinética se logra a expensas de una reducción de su energía interna que el cuerpo obtiene de los alimentos que ingiere. Nó-

tese que, a pesar de que el punto en que se aplica la fuerza ejercida sobre la patinadora por el barandal no se mueve cuando ella lo empuja, su centro de masa *sí* se mueve cuando dobla y luego extiende los brazos. Este tipo de ejemplo requerirá que examinemos el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas desde el punto de vista de la energía, lo cual haremos en la sección 13-5.

PROBLEMA RESUELTO 13-1. Un aficionado de los Cachorros de Chicago deja caer una pelota de béisbol (de 0.143 kg de masa) desde la cima de Sears Tower, a una altura h de 443 m (1.450 ft). La pelota alcanza una rapidez terminal v de 42 m/s (véase Secc. 4-4). Determine el cambio de la energía interna de la pelota y del aire circundante cuando cae en la superficie terrestre.

Solución Supongamos que el sistema se compone de la pelota, del aire por donde cae y de la Tierra. Ninguna fuerza externa actúa sobre él; la atracción gravitacional de la Tierra, así como la fuerza de resistencia del aire al avance que actúa sobre la pelota son fuerzas internas del sistema tal como lo hemos definido. El cambio de su energía potencial es

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 - mgh$$
$$= -(0.143\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(443\ \text{m}) = -621\ \text{J}.$$

El cambio de energía cinética durante la caída es

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \tfrac{1}{2}(0.143\ \text{kg})(42\ \text{m/s})^2 = 126\ \text{J}.$$

(Despreciamos el movimiento de la Tierra bajo la atracción gravitacional de la pelota.) De acuerdo con la ecuación 13-2, podemos escribir la conservación de la energía como $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0$, porque no se realiza trabajo en el sistema. Al resolver para la energía interna, obtenemos

$$\Delta E_{int} = -\Delta U - \Delta K = -(-621\ \text{J}) - 126\ \text{J} = 495\ \text{J}.$$

Este incremento de energía interna podría observarse al elevarse la temperatura de la pelota y del aire circundante, o quizá como la energía cinética del aire dejado en la estela de la pelota al caer. Si usamos únicamente la ecuación 13-2, no podemos asignar la energía entre esas formas. Para ello hay que aislar la pelota o el aire como nuestro sistema y calcular después el trabajo efectuado por las fuerzas externas que intervienen. Este procedimiento es demasiado complejo para resolverlo aquí, pues requiere conocer la fuerza de resistencia al avance entre la pelota y el aire, así como los detalles del movimiento de ella.

13-3 TRABAJO DE FRICCIÓN

Supongamos que un bloque se desliza por una mesa horizontal hasta que finalmente se detiene debido a la fuerza de fricción que ejerce la mesa. Si definimos que este sistema consta del bloque y de la tabla de la mesa, ninguna fuerza externa realiza trabajo en él (la de fricción es una fuerza interna en este sistema). Al aplicarle la ecuación 13-2, obtenemos

$$\Delta K + \Delta E_{int,\ bloque\ +\ mesa} = 0. \qquad (13\text{-}4)$$

Al disminuir la energía cinética del bloque, se da un incremento correspondiente en la energía interna del sistema de bloque + mesa. El incremento podría observarse como un ligero aumento de la temperatura en las superficies circundantes del bloque y de la mesa. Es una observación frecuente que la fricción entre las dos superficies eleva la temperatura, por ejemplo: al sostener un trozo de metal contra un esmeril o aplicar los frenos a un automóvil o a una bicicleta (aumenta la temperatura de los frenos y de las llantas deslizantes). El mismo efecto se observa al frotarse las manos.

En la sección 5-3 demostramos que es posible analizar los sistemas mecánicos con fricción empleando una fuerza constante de fricción f de igual magnitud al coeficiente de fricción, multiplicado por la fuerza normal. Podríamos sentirnos tentados a escribir la magnitud del trabajo efectuado por la fuerza de fricción como el producto de ésta multiplicado por el desplazamiento que recorre el objeto: $|W_f| = fs$. Pero como veremos luego, esto nos da un valor *incorrecto* del trabajo de fricción. Lo anterior se debe a que la ecuación básica del trabajo realizado en una dimensión por una fuerza constante, $W = Fs$, es correcto sólo si se trata al objeto como una partícula. Los objetos sometidos a fricción deslizante *no pueden* tratarse como partículas desde el punto de vista del trabajo y la energía.

Tomemos un ejemplo en que una cuerda que ejerce una fuerza de tensión de magnitud constante T (Fig. 13-3), tira de un bloque en una mesa horizontal con una velocidad constante. Si la velocidad es constante, la aceleración será cero y por lo mismo la fuerza neta también deberá serlo. Entonces la magnitud de la fuerza de fricción f debe ser igual a la de la tensión T. Tratemos de aplicar la ecuación 13-2 al sistema compuesto sólo por el bloque. Supusimos que éste se desplaza con velocidad constante, de ahí que $\Delta K = 0$. No existe energía potencial en el sistema y el trabajo externo en el bloque proviene de dos fuerzas: la tensión que realiza trabajo positivo W_T, y la fricción trabajo negativo W_f. En este caso, la ecuación 13-2 nos da

$$\Delta E_{int,\ bloque} = W_T + W_f. \qquad (13\text{-}5)$$

En contraste con la ecuación 13-4, aquí la magnitud ΔE_{int} se refiere exclusivamente al bloque.

Supóngase que el bloque se mueve por un desplazamiento s. Entonces $W_T = T_S$ (una magnitud positiva); al sustituir este resultado en la ecuación 13-5 y al resolver para el trabajo de fricción, tenemos

$$W_f = -T_S + \Delta E_{int,\ bloque} = -fs + \Delta E_{int,\ bloque}, \qquad (13\text{-}6)$$

donde el último resultado se consigue porque $T = f$, como dedujimos porque la fuerza neta en el bloque es cero. La ecuación 13-6 muestra claramente que W_f no es igual a $-fs$. De hecho, dado que $\Delta E_{int,\ bloque}$ es una magnitud positiva, debemos tener $|W_f| < fs$. El trabajo representa la energía que se transporta por la frontera del sistema; de acuerdo con la ecua-

FIGURA 13-3. Una cuerda que ejerce una tensión $\vec{T}$ tira de un bloque en una superficie horizontal.

ción 13-6, la magnitud de la energía que es transportada *fuera* del sistema (el bloque) debido al trabajo de fricción es menor que fs, porque parte de la energía permanece dentro del sistema como energía interna. Sin un modelo más detallado de la fuerza de fricción, no podemos llevar más adelante la ecuación 13-6 para calcular el trabajo de fricción, pues ignoramos cuánta energía permanece en el bloque como interna.

La situación no mejora al seleccionar la mesa como nuestro sistema. La aplicación de la ecuación 13-2 a ella nos da $\Delta E_{\text{int, mesa}} = W'_f$; donde W'_f $(= -W_f)$, representa el trabajo de fricción realizado *por* el bloque *en* la mesa, esto es, una magnitud positiva. El trabajo positivo efectuado por la fricción lleva energía a través de la frontera del sistema e incrementa la energía interna de la mesa, pero tampoco en este caso es posible calcular cuánta se transfiere.

Apliquemos en cambio la conservación de energía al sistema compuesto por bloque + mesa. Ahora la fuerza de fricción es interna y no entra en las ecuaciones. La única fuerza externa, es la tensión que realiza el trabajo W_T en el sistema. Entonces la ecuación 13-2 puede escribirse así

$$\Delta E_{\text{int, bloque + mesa}} = W_T. \qquad (13\text{-}7)$$

El trabajo realizado por la fuerza de tensión, es la causa principal del incremento de la energía interna (y, en consecuencia, de la temperatura) del bloque y de la mesa. Sin un modelo muy detallado (y necesariamente complicado) de las propiedades de las dos superficies, no es posible separar el aumento total de la energía interna en $\Delta E_{\text{int, bloque}}$ y $\Delta E_{\text{int, mesa}}$; la ecuación 13-7 da sólo su suma. No podemos emplear la ecuación 13-6 para calcular el trabajo de fricción, si no conocemos exactamente el incremento de energía interna del bloque.

¿Cómo es posible que una fuerza de fricción f, la cual actúa sobre un objeto que se mueve por un desplazamiento s, realice trabajo cuya magnitud es menor que fs? La fuerza de fricción que opera sobre una superficie en deslizamiento no es una sola que se aplique en un solo punto, sino que se debe a muchas más pequeñas que actúan en varios puntos (en la figura 5-14 se indica el carácter microscópico de esta fuerza). Podemos considerarla como el efecto neto de las fuerzas en muchas soldaduras microscópicas, algunas de las cuales ocurren donde las protuberancias o salientes de la mesa se unen a la superficie del bloque y otras donde las protuberancias o salientes del bloque se encuentran con la superficie de la mesa. Al moverse el bloque por un desplazamiento s, sólo las soldaduras en la superficie móvil contribuyen al trabajo; en las situadas en la superficie de la mesa el desplazamiento es cero, y por ello lo es también su aportación al trabajo. Por tanto, una parte de la fuerza de fricción no contribuye al trabajo, y en este modelo no debe sorprendernos que $|W_f| < fs$.*

Este modelo de la fuerza de fricción está muy simplificado y, de hecho, es demasiado complicado tratar de incluir todas las soldaduras microscópicas causantes de la fuerza de fricción. No obstante, de acuerdo con la transferencia de energía por el trabajo representado en la figura 13-1, podemos describir los procesos de fricción como aquellos en que, según como definamos la frontera del sistema, la energía puede ser transferida entre los objetos de un sistema o entre éste y su ambiente; en ambos casos cambia la energía interna de los objetos. Sin un modelo microscópico no sabemos cómo la ganancia total de energía interna se comparte entre los objetos del sistema; por tanto, tampoco podemos calcular el trabajo efectuado por la fuerza de fricción causante de esta transformación.

PROBLEMA RESUELTO 13-2. Un bloque de 4.5 kg se lanza hacia arriba por una pendiente de 30°, con una rapidez inicial v de 5.0 m/s. Se observa que recorre una distancia d = 1.5 m por el plano a medida que su rapidez disminuye gradualmente hasta cero. *a)* ¿Cuánta energía interna gana por fricción el sistema bloque + plano + Tierra en este proceso? *b)* Después el bloque se desliza del reposo al plano. Suponiendo que la fricción produzca la misma ganancia de energía interna en el descenso, ¿qué velocidad tendrá el bloque al cruzar su ubicación inicial?

Solución *a)* Al escoger el sistema de bloque + plano + Tierra, observamos que el cambio de energía potencial en el bloque y en la Tierra está incluido en el término ΔU de la ecuación 13-2. Al igual que en el problema resuelto 13-1, en el cálculo ignoramos los cambios de energía cinética de la Tierra y tenemos en cuenta sólo el de la energía cinética del bloque. El cambio de energía cinética en el sistema es

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i = mgh - 0 = mgd \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= (4.5\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(1.5\text{ m})(\operatorname{sen} 30^\circ) = 33\text{ J}.\end{aligned}$$

El cambio de energía cinética del bloque al pasar del fondo del plano a su parte superior es

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}(4.5\text{ kg})(5.0\text{ m/s})^2 = -56\text{ J}.$$

El cambio de energía mecánica del sistema es

$$\Delta U + \Delta K = 33\text{ J} + (-56\text{ J}) = -23\text{ J}.$$

El sistema pierde 23 J de energía mecánica. Dado que $W_{\text{ext}} = 0$ en este sistema (la fricción y la gravedad operan *dentro* de él tal como lo definimos), la ecuación 13-2 da $\Delta E_{\text{int}} = -(\Delta U + \Delta K) = +23$ J. El sistema gana una energía interna de 23 J, que podría manifestarse como un ligero calentamiento del bloque y del plano.

b) A continuación examinaremos el viaje redondo cuando el bloque asciende primero por el plano y luego retorna a su punto de partida. En la parte *a)* calculamos que la ganancia de energía interna trayecto arriba era de 23 J. Si la parte pendiente abajo produce la misma ganancia de energía interna, el cambio de ésta en el recorrido ascendente y descendente será de 46 J. Puesto que el bloque vuelve al punto de partida, $\Delta U = 0$. Por tanto, en un viaje redondo $\Delta K = -\Delta E_{\text{int}} = -46$ J. Con $\Delta K = K_f - K_i$, tenemos

$$K_f = \Delta K + K_i = -46\text{ J} + 56\text{ J} = 10\text{ J}.$$

La rapidez correspondiente es

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(10\text{ J})}{4.5\text{ kg}}} = 2.1\text{ m/s}.$$

* Una explicación más completa de este modelo se da en "Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction" de B. A. Sherwood y W. H. Bernard. *American Journal of Physics*, noviembre de 1984, p. 1001.

13-4 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La ecuación 13-2 es el primer paso en la transición de una ley de conservación de la energía *mecánica* en un sistema aislado (Ec. 12-15) a una forma más general de ella. El lado izquierdo de la ecuación 13-2, representa el cambio de la energía total del sistema y abarca los términos cinético, potencial e interno. Al encontrar otras formas que puede adoptar la energía (por ejemplo, la electrostática o la magnética), agregamos los términos correspondientes en el lado izquierdo de esta ecuación. El lado derecho indica una forma de modificar la energía del sistema: puede efectuarse trabajo externo en él. (Más adelante en este capítulo, descubriremos que hay una segunda forma de hacerlo: mediante la transferencia de calor.)

La formulación de la ley de conservación de la energía propuesta en la sección 12-3 se limitaba a sistemas aislados (en los cuales las fuerzas externas no realizan trabajo). Abarcaba tan sólo la energía mecánica $K + U$. Exigía que la energía mecánica total permaneciera constante, aunque se permitía que la energía en el interior del sistema cambiara de forma (de cinética a potencial o a la inversa).

Podemos ampliar la formulación anterior e incluir los casos que hemos examinando hasta ahora en el capítulo, para lo cual incluiremos otras formas de energía (la interna, por ejemplo), haremos más flexible la restricción de que sólo puedan actuar fuerzas conservativas en el sistema (la fricción puede operar entre los objetos del sistema) y permitiremos efectuar trabajo externo en él:

La energía puede cambiar de forma en el interior de un sistema. En un sistema aislado la energía total permanece constante; la energía total de un sistema puede cambiarse transfiriendo energía por medio de trabajo externo.

Igual que la conservación del momento lineal o angular, la conservación de la energía es una ley de la naturaleza que no han contradicho ni los experimentos de laboratorio ni la observación.

Podemos definir el sistema en una forma conveniente. Una vez trazada su frontera, consideraremos todas las formas de energía que los objetos de él puedan adoptar: cinética, potencial o interna. Las interacciones entre ellos pueden cambiar la forma de la energía, pero no la energía total. Si queremos saber si la energía total cambia o no, examinamos los objetos en el ambiente del sistema que pueden realizar trabajo en él.

Explicaremos estos principios gráficamente examinando la combinación bloque-resorte que aparece en la figura 13-4. Suponemos que el resorte está comprimido inicialmente, que luego se suelta y que una fuerza de fricción opera entre él y la mesa. Conviene definir el sistema en varias formas, como lo indican sus fronteras trazadas en la figura 13-4. Mostramos las transferencias de energía por las fronteras como flechas que representan el trabajo. La dirección de una flecha indica sólo la de la transferencia correspondiente de energía (hacia dentro y fuera del sistema); el trabajo es una magnitud escalar y por ello no tiene dirección en el espacio.

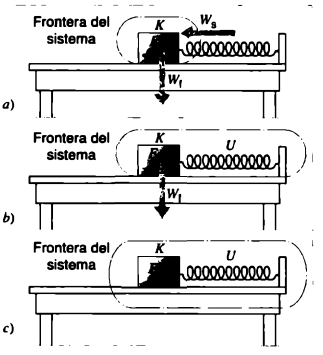


FIGURA 13-4. Un bloque sobre el que actúa un resorte se desliza por una mesa que ejerce una fuerza de fricción. *a*) El sistema se compone sólo del bloque; la fuerza del resorte y la fricción realizan trabajo en él modificando su energía. *b*) El sistema consta ahora del bloque y del resorte, y tiene energía cinética y potencial. *c*) El sistema no incluye en este caso la mesa. La fuerza de fricción es ahora interna y contribuye a la energía interna del sistema.

1. *Sistema = bloque.* Primero definimos que nuestro sistema es el bloque (Fig. 13-4*a*). La figura muestra dos transferencias de energía por la frontera del sistema: el trabajo positivo W_s realizado en el bloque por el resorte y el trabajo negativo W_f efectuado en el bloque por la fuerza de fricción que ejerce la mesa. En este sistema, la conservación de energía (Ec. 13-2) puede escribirse así:

$$\Delta K + \Delta E_{int} = W_s + W_f. \qquad (13\text{-}8)$$

Aquí $\Delta U = 0$, porque el sistema acotado por la frontera no experimenta cambio alguno de energía potencial. El resorte no forma parte de él, de ahí que su energía potencial no se tenga en cuenta; por el contrario, lo consideramos parte del ambiente a través del trabajo W_s que efectúa sobre el sistema. El peso y la fuerza normal también actúan sobre él, pero como no realizan trabajo no intervienen en este análisis de la energía. Nótense las direcciones de las flechas que denotan transferencias de energía en la figura 13-4*a*; la ecuación 13-8 indica que el resorte realizó trabajo positivo; el trabajo negativo de fricción efectuado por la superficie horizontal tiende a reducir la energía del bloque.

2. *Sistema = bloque + resorte.* Supongamos ahora que el sistema consta del bloque y del resorte (Fig. 13-4*b*). Tiene la energía potencial $\Delta U = -W_s$ (asociada a la fuerza del resorte). La fuerza de fricción es la única externa que realiza trabajo en él. En esta definición del sistema, la conservación de la energía se escribe así

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = W_f. \qquad (13\text{-}9)$$

La energía del sistema es ahora $U + K + E_{int}$; en este caso las trasferencias de energía entre el resorte y el bloque no alterna la del sistema. La fuerza del resorte es una *fuerza interna* capaz de transferir energía de una forma a otra en su interior ($U \leftrightarrow K$), pero no puede cambiar la energía *total*. El trabajo negativo (de fricción) realizado por la superficie horizontal puede reducir la energía del sistema.

3. *Sistema = bloque + resorte + mesa.* Por último, vamos a definir el sistema para incluir a la mesa (Fig. 13-4*c*). Ahora no hay una fuerza externa responsable de las transferencias de energía que penetran la frontera del sistema. Con esta definición de sistema, el trabajo externo será cero y, por tanto,

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0. \qquad (13\text{-}10)$$

La fuerza de fricción es interna junto con la del resorte. Dentro del sistema puede transferirse energía mecánica $U + K$ del bloque + resorte a la interna del bloque + mesa, pero la energía total (mecánica + interna) permanece constante. Supóngase, por ejemplo, que soltamos el bloque del reposo con el resorte comprimido. Oscilará por la mesa hasta que se detenga. En este caso $\Delta K = 0$ (porque $K_f = K_i = 0$), de modo que $\Delta E_{int} = -\Delta U$. La energía potencial que originalmente estaba almacenada en el sistema se convierte en la interna; el signo menos indica que ésta aumenta al disminuir la energía potencial. Con base en este análisis, no es posible determinar los cambios individuales de energía interna del bloque y de la mesa, tan sólo la energía total como un todo.

El análisis de la figura 13-4 indica que podemos definir como queramos el sistema al que aplicamos la ley de conservación de la energía. Algunas opciones serán más útiles que otras según el problema de que se trate. Una vez tomada una decisión hay que mantenerla, y siempre hay que determinar claramente si las fuerzas que intervienen y el trabajo que puede efectuarse son internos o externos al sistema.

La fuerza de fricción es un ejemplo de una fuerza disipativa, no conservativa. En un sistema mecánico cerrado como el que se explica aquí, la energía mecánica se transforma en interna por medio de la fuerza de fricción. La energía mecánica *no* se conserva en este caso, pero se compensa con una ganancia equivalente de energía interna.

13-5 ENERGÍA DEL CENTRO DE MASA

La figura 13-5 muestra a la patinadora de hielo de la cual hablamos antes en este capítulo. Ella ejerce una fuerza sobre el barandal y, según la tercera ley de Newton, éste ejerce una fuerza igual y opuesta sobre ella. Esta fuerza que se denota por $\vec{F}_{ext}$ en la figura, acelera a la patinadora del reposo a alguna velocidad final $\vec{v}_{cm}$.

Veamos ahora lo que la conservación de la energía puede enseñarnos respecto a este proceso. Tomando como sistema a la patinadora, observamos que al aplicar la ecuación 13-2 no se produce cambio alguno en la energía potencial de nuestro

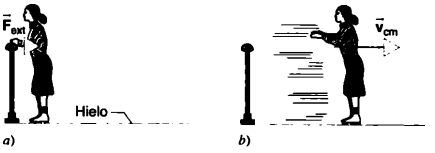


FIGURA 13-5. *a*) Una patinadora se empuja y aleja de un barandal. Éste ejerce una fuerza $\vec{F}_{ext}$ sobre ella, *b*) Después de empujarse, la patinadora se mueve con una velocidad $\vec{v}_{cm}$.

sistema, es decir, $\Delta U = 0$. Además, tampoco se realiza trabajo en él (suponiendo que el hielo no tenga fricción). Aun cuando el barandal ejerce una fuerza sobre la patinadora, no efectúa trabajo porque *no se mueve el punto en que se aplica.* En otras palabras, en relación con la figura 13-1 no se transfiere energía a través de la frontera del sistema. Con $W_{ext} = 0$, la ecuación 13-2 nos da

$$\Delta K + \Delta E_{int} = 0. \qquad (13\text{-}11)$$

Para una patinadora de masa M que parta del reposo, el cambio de energía cinética será $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ (una magnitud positiva) y, por tanto, ΔE_{int} ha de ser negativa. Es decir, la energía cinética que la patinadora obtiene al empujar el barandal y alejarse de él, proviene de una reducción de su almacenamiento de energía interna, no de alguna fuente externa.

En un sistema tan complejo, la ecuación de conservación de la energía aporta poca información. Por ejemplo, la fuerza externa no aparece (porque no realiza trabajo) y, en consecuencia, la ecuación no permite determinarla.

Otra complicación más consiste en que la patinadora no puede ser tratada como una partícula. Para que un cuerpo se comporte como partícula es necesario que todas sus partes se muevan de la misma manera. Y eso no ocurre en el caso de la patinadora: su brazo y su cuerpo se mueven en forma independiente.

En la sección 7-3 aprendimos a analizar un sistema complejo que contenga muchas partículas. En especial, la ecuación 7-16 ($\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$) relaciona la fuerza externa neta que opera sobre un sistema con el movimiento de su centro de masa. Para simplificar la explicación, supondremos que todas las fuerzas y movimientos se dan en la dirección x, y no escribiremos explícitamente el subíndice x en los componentes x de los vectores de fuerza, velocidad y aceleración. Cuando sólo interviene una fuerza externa, la ecuación 7-16 se convierte en $F_{ext} = Ma_{cm}$, donde F_{ext} es el componente x de la fuerza externa neta. Supóngase que el centro de masa se mueve por el pequeño desplazamiento dx_{cm}. Al multiplicar ambos lados por esta cantidad obtendremos

$$F_{ext}dx_{cm} = Ma_{cm}dx_{cm} = M\frac{dv_{cm}}{dt}v_{cm}dt,$$

donde hemos sustituido a_{cm} por dv_{cm}/dt y dx_{cm} por $v_{cm}\,dt$. Lo anterior nos da

$$F_{ext}dx_{cm} = Mv_{cm}dv_{cm}. \qquad (13\text{-}12)$$

Supongamos que el centro de masa pasa de x_i a x_f a medida que la velocidad cambia de $v_{cm,i}$ a $v_{cm,f}$. Al integrar la ecuación 13-12 entre estos límites, encontramos

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext}\,dx_{cm} = \int_{v_{cm,i}}^{v_{cm,f}} Mv_{cm}\,dv_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm,f}^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{cm,i}^2. \tag{13-13}$$

Los términos de la derecha de la ecuación representan la energía cinética K_{cm} de una partícula de masa M que se desplace con la velocidad del centro de masa. Hecha esta identificación, obtenemos

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext}\,dx_{cm} = K_{cm,f} - K_{cm,i} = \Delta K_{cm}. \tag{13-14}$$

En muchos casos de interés, la fuerza externa es constante y puede extraerse de la integral. La integral restante nos proporciona el desplazamiento neto S_{cm} $(= x_f - x_i)$ del centro de masa. En este caso, la ecuación 13-14 queda así

$$F_{ext}\,s_{cm} = \Delta K_{cm}. \tag{13-15}$$

Las ecuaciones 13-14 y 13-15 se parecen al teorema de trabajo energía de una partícula. No obstante, es importante señalar lo siguiente: aunque las magnitudes del lado izquierdo de las ecuaciones anteriores se asemejan al trabajo (y de hecho poseen la dimensión de trabajo), no lo son en el sentido que hemos definido aquí, porque dx_{cm} y s_{cm} no representan el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa.* (En la figura 13-5, por ejemplo, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa era cero, pero s_{cm} no lo es en absoluto.)

Las ecuaciones 13-14 y 13-15 *no* son expresiones de conservación de la energía. La energía cinética traslacional (del movimiento del centro de masa) es la única clase de energía que aparece en ellas. No aparecen otros términos referentes a la energía: trabajo de la energía cinética rotacional, energía potencial y energía interna.

A las ecuaciones 13-14 y 13-15 las llamaremos *ecuaciones de energía del centro de masa (CDM)*, y a la ecuación 13-2 *ecuación de conservación de la energía (CDE)*. Nótese que las primeras se obtienen directamente de la segunda ley de Newton y que, aunque son una formulación útil, no se trata de un principio nuevo e independiente.

Los siguientes ejemplos ilustran la información diferente y a menudo complementaria que aportan las dos clases de ecuación.

1. *Un bloque deslizante.* Un bloque se desliza por una mesa horizontal con una velocidad inicial $\vec{v}_{cm}$ y lo detiene la fuerza de fricción f ejercida sobre él por la tabla de la mesa. El centro de masa del bloque se mueve por un desplazamiento s_{cm}. Las dos ecuaciones de energía nos dan:

CDM (Ec. 3.15): $$-fs_{cm} = -\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \tag{13-16a}$$

CDE (Ec. 13-2): $$W_f = -\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \Delta E_{int,\,bloque}. \tag{13-16b}$$

La ecuación CDM *se parece* al teorema de trabajo-energía, pero no es lo mismo, pues, como hemos visto, fs_{cm} no es la magnitud del trabajo de fricción. En este ejemplo y en los siguientes escribimos CDE (Ec. 13-2) como $W_{ext} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$, así que las dos ecuaciones se asemejan más.

2. *Empujar un metro.* La figura 13-6 contiene el resultado de empujar un metro (inicialmente en reposo) que puede deslizarse libremente por una superficie horizontal sin fricción. Se aplica una fuerza externa constante en la marca de 25 cm. El punto de aplicación recorre la distancia s conforme el centro de masa del metro avanza la distancia s_{cm} (menor que s); el metro adquiere una velocidad del centro de masa v_{cm} y una velocidad rotacional ω. Las dos ecuaciones de energía dan

CDM: $$F_{ext}s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \tag{13-17a}$$

CDE: $$F_{ext}s = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{13-17b}$$

La ecuación CDE incluye el trabajo real $(= F_{ext}s)$ efectuado por la fuerza externa.

3. *Una bola que rueda pendiente abajo.* La figura 13-7 muestra gráficamente esta situación. Suponemos que se da rodamiento sin deslizamiento (Secc. 9-7), de modo que no se mueve el punto instantáneo de contacto entre la pelota y la pendiente (donde opera la fuerza de fricción). La bola parte del reposo y adquiere una velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$ en el fondo de la pendiente.

CDM: $$(Mg \operatorname{sen}\theta - f)s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \tag{13-18a}$$

CDE: $$Mgs_{cm} \operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{13-18b}$$

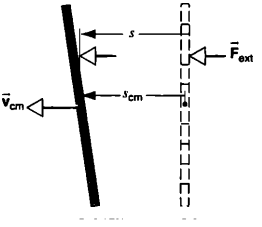


FIGURA 13-6. Una fuerza $\vec{F}_{ext}$ empuja un metro a través de una superficie horizontal sin fricción. Se aplica en la marca de 25 cm. El metro gira, se traslada y no se mueve como partícula. La fuerza se aplica en un desplazamiento s que es mayor que el desplazamiento s_{cm} del centro de masa.

* Algunos autores emplean las expresiones *seudotrabajo* o *trabajo en el centro de masa* para definir el lado izquierdo de la ecuación 13-14. Nosotros preferimos *no* introducir un término estrechamente relacionado con el trabajo para designar una magnitud no relacionada con el significado aceptado de trabajo. Consúltese un resumen muy completo sobre el trabajo y la energía en un sistema de partículas en "Developing the Energy Concepts in Introductory Physics" de A. B. Arons, *The Physics Teacher*, octubre de 1989, p. 506.

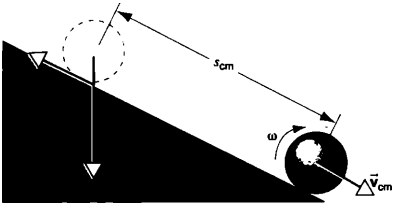


FIGURA 13-7. Una bola rueda pendiente abajo. La fuerza de fricción $\vec{f}$ opera en el punto instantáneo de contacto entre ella y el plano. Una vez que la bola ha recorrido una distancia s_{cm}, su velocidad es $\vec{v}_{cm}$ y también gira con rapidez angular ω.

Hemos aplicado la ecuación CDE al sistema formado sólo por la bola; así que la gravedad aparece como fuerza externa. La fuerza externa neta en la bola es Mg sen $\theta - f$ en la ecuación CDM. Nótese que f aparece en ella a pesar de que no realiza trabajo alguno (y, en consecuencia, no aparece en la ecuación CDE). Nótese también que, si la pelota se deslizara al rodar, la ecuación CDM permanecería inalterada, pero la ecuación CDE incluiría en la izquierda el trabajo de fricción efectuado, y en la derecha la energía interna.

4. *La atleta que salta.* En la figura 13-8 se ve una atleta que primero tiene encogidas las piernas y luego las extiende al saltar. Para simplificar la situación supondremos que, al estirarlas, empuja contra el suelo con una fuerza constante F además de su peso, de modo que el suelo ejerce una fuerza normal constante $N = F + Mg$. En el instante en que sus pies se separan del suelo, el centro de masa aumentó ya s_{cm} y la atleta tienen una velocidad v_{cm}.

CDM: $$(N - Mg)\, s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \qquad (13\text{-}19a)$$

CDE: $$-Mgs_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \Delta E_{int}. \qquad (13\text{-}19b)$$

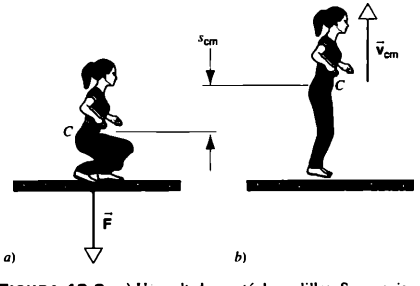


FIGURA 13-8. *a)* Una saltadora está de cuclillas. Se empuja contra el suelo con una fuerza $\vec{F}$ al enderezar las piernas para saltar. *b)* En el momento en que sus pies abandonan el suelo, se desplaza hacia arriba con una velocidad $\vec{v}_{cm}$ y su centro de masa C se elevó una distancia s_{cm}.

La ecuación CDE se aplica al sistema constituido exclusivamente por la atleta. Dado que la fuerza normal no realiza trabajo, tampoco aparece en esta ecuación. El término ΔE_{int} explica todos los cambios de energía interna en el cuerpo de la atleta. Podría incluir, por ejemplo, un término negativo debido a la energía que está almacenada en el cuerpo y que debe consumir para saltar, y un término positivo a partir del incremento de la temperatura de los músculos de sus piernas. Al restar las ecuaciones CDE y CDM, vemos de inmediato que ΔE_{int} debe ser negativa.

PROBLEMA RESUELTO 13-3. Una patinadora de 50 kg se impulsa apartándose de un barandal, como se muestra en la figura 13-5, ejerciendo al hacerlo una fuerza constante de $F = 55$ N. Su centro de masa recorre una distancia $s_{cm} = 32$ cm hasta que pierde contacto con el barandal. *a)* ¿Qué rapidez alcanza su centro de masa al alejarse del barandal? *b)* ¿Cuánto cambia la energía interna almacenada de la patinadora durante este proceso? No tenga en cuenta la fricción entre el hielo y los patines.

Solución *a)* Una vez más tomamos como nuestro sistema a la patinadora. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el barandal ejerce sobre la patinadora una fuerza de 55 N a la derecha en la figura 13-5. Esta fuerza es la única fuerza externa que necesitamos tener presente. Con base en la ecuación CDM (Ec. 13-15), tenemos

$$F_{ext}s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 - 0$$

o

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{ N})(0.32\text{ m})}{50\text{ kg}}} = 0.84\text{ m/s}.$$

b) En seguida aplicamos la ecuación CDE (Ec. 13-2) que, en las condiciones en que la aplicamos a este problema $\Delta U = 0$ y $W_{ext} = 0$, asume la forma

$$\Delta E_{int} = -\Delta K = -\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 = -\tfrac{1}{2}(50\text{ kg})(0.84\text{ m/s})^2 = -17.6\text{ J}.$$

Esta energía interna debería reponerse ingiriendo cerca de $\frac{1}{4}$ de cucharada de soda dietética.

El análisis del problema que acabamos de resolver podría aplicarse íntegramente al problema de un automóvil que acelera del reposo. En este caso, la fuerza externa —ejercida por la carretera sobre el fondo de las llantas— no efectúa trabajo porque su punto de aplicación no se mueve; recuérdese que el fondo de una llanta que rueda sin deslizamiento se halla instantáneamente en reposo. El cambio de su energía interna se refleja en el consumo de gasolina.

PROBLEMA RESUELTO 13-4. La patinadora Juana (50 kg de masa) se impulsa y se aleja de su compañero Jaime (72 kg de masa), quien está de pie con la espalda apoyada contra un muro, como se ve en la figura 13-9*a*. Al inicio los dos tienen los brazos doblados. Se empujan al enderezar los brazos, hasta que finalmente pierden contacto (Fig. 13-9*b*). Jaime ejerce una fuerza constante $F_{ext} = 55$ N a lo largo de una distancia de $s = 32$ cm; es la distancia que recorren sus manos cuando endereza los brazos. En el momento en que se rompe el contacto, el centro de masa de Juana ha cubierto una distancia de $s_{cm} = 58$ cm como resultado de la extensión de *ambos* pares de brazos. *a)* ¿Qué velocidad tiene Juana después de romperse el contacto? *b)* ¿Qué cambio experimenta la energía interna almacenada de los patinadores durante este proceso? Ignore la fricción entre el hielo y el patinador.

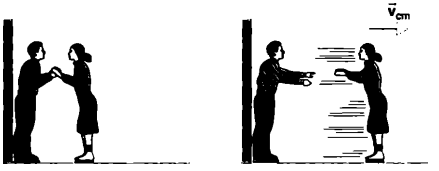


FIGURA 13-9. Problema resuelto 13-4. *a)* Una patinadora (Juana) y su compañero (Jaime) se preparan para ejercer fuerza uno sobre otro extendiendo los brazos. Jaime tiene la espalda apoyada contra un muro, de manera que no se mueve. *b)* Después de extender los brazos, Juana se desplaza con una rapidez v_{cm}.

Solución *a)* Tomamos como nuestro sistema a Juana. Nótese que en este caso se efectúa trabajo externo en el sistema, por lo cual se transfiere energía a través de su frontera. Con base en la ecuación CDM (Ec. 13-15) tenemos

$$\Delta K_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 = F_{ext}\,s_{cm} = (55\text{ N})(0.58\text{ m}) = 31.9\text{ J},$$

así que

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2\,\Delta K_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(31.9\text{ J})}{50\text{ kg}}} = 1.13\text{ m/s}.$$

b) Al aplicar a Juana la ecuación CDE (Ec. 13-2), tenemos

$$\Delta K + \Delta E_{int,\,Juana} = W_{ext},$$

donde W_{ext} ($= F_{ext}s$), es el trabajo externo que Jaime realiza en Juana. Al resolver para el cambio de energía interna de ella y al sustituir $\Delta K = \Delta K_{cm} = F_{ext}s_{cm}$ en la parte *a*), obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta E_{int,\,Juana} &= W_{ext} - \Delta K = F_{ext}s - F_{ext}s_{cm}\\ &= (55\text{ N})(0.32\text{ m}) - (55\text{ N})(0.58\text{ m})\\ &= +17.6\text{ J} - 31.9\text{ J} = -14.3\text{ J}.\end{aligned}$$

Si aplicamos la ecuación CDE a un sistema constituido sólo por Jaime, obtendremos

$$\Delta E_{int,\,Jaime} = W_{ext}.$$

En el caso de Jaime, W_{ext} es negativo. La fuerza que se le aplica proviene de Juana como fuerza de reacción a la producida por él al empujarla. Puesto que la fuerza en él y el desplazamiento de sus manos siguen dirección contraria, el trabajo externo que se realiza en Jaime es negativo. En este caso (véase Fig. 13-1), W_{ext} extrae energía al sistema. En Jaime,

$$\Delta E_{int,\,Jaime} = W_{ext} = -(55\text{ N})(0.32\text{ m}) = -17.6\text{ J}.$$

En consecuencia, para alcanzar su energía cinética final, Juana debe aportar 14.3 J de energía de sus recursos internos. Jaime suministra 17.6 J al efectuar trabajo en ella, energía que naturalmente proviene de *su* depósito interno. Si Jaime no estuviera presente y si Juana obtuviera la misma energía cinética empujando directamente contra el muro, tendría que aportar el total, 31.9 J (=14.3 J + 17.6 J) de su energía cinética, procedente de su depósito interno.

PROBLEMA RESUELTO 13-5. Se lanza un bloque de 5.2 kg en una superficie horizontal, con una velocidad horizontal inicial de 0.65 m/s antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0.12. *a)* ¿Qué cambio experimenta la energía interna del sistema bloque + superficie? *b)* ¿Qué distancia recorre antes de detenerse?

Solución *a)* Al aplicar la conservación de energía, el sistema más útil a considerar es el bloque más la parte de la superficie horizontal por donde se desliza. Al emplear la ecuación 13-2 tenemos $\Delta U = 0$, porque no se produce cambio alguno de energía potencial en la superficie horizontal. Más aún, $W_{ext} = 0$, porque ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema. (A éste lo hemos definido de manera que la fricción es una *fuerza interna.*) Por tanto, la ecuación 13-2 se convierte en

$$\Delta E_{int} = -\Delta K$$

donde ΔK ($K_f - K_i$) es negativa, y corresponde a una pérdida de energía cinética. Al sustituir los valores queda

$$\Delta E_{int} = -(0 - \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2) = +\tfrac{1}{2}(5.2\text{ kg})(0.65\text{ m/s})^2 = +1.1\text{ J}.$$

Este incremento de energía interna del sistema se manifiesta en un pequeño aumento de la temperatura del bloque y de la superficie horizontal. Es difícil calcular cómo la comparten el bloque y la superficie; para evitar en gran medida esta dificultad hemos optado por analizar el sistema combinado de bloque y superficie en vez del bloque solo.

b) En este caso escogemos el bloque como nuestro sistema. No podemos tratarlo como partícula porque intervienen otras transferencias de energía (específicamente, la energía interna) aparte de la cinética traslacional. Al aplicar la ecuación 13-15 tenemos

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm},$$

donde F_{ext}, es la fuerza de fricción externa ($= -\mu Mg$, suponiendo que la dirección del movimiento sea positiva) que actúa sobre el bloque y s_{cm} es el desplazamiento de su centro de masa. Así pues, tenemos

$$(-\mu Mg)(s_{cm}) = 0 - \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

o

$$s_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2\mu g} = \frac{(0.65\text{ m/s})^2}{2(0.12)(9.8\text{ m/s}^2)} = 0.18\text{ m}.$$

Este análisis del problema podría aplicarse íntegramente al de un automóvil que frena y se detiene partiendo de determinada rapidez inicial. En tal caso, el incremento de la energía interna se manifestaría en una elevación de la temperatura de los discos y de las balatas del freno.

13-6 REACCIONES Y DESINTEGRACIONES

La ley de conservación de la energía se aplica comúnmente cuando se analizan varios procesos de reacción y de desintegración en una escala que abarca desde átomos y moléculas (reacciones químicas, formación molecular) hasta núcleos (reacciones de fusión, desintegración radiactiva) y partículas elementales (colisiones de alta energía). En el Capítulo 6 se analizaron las colisiones mediante la ley de conservación del momento lineal y se clasificaron los procesos en elásticos, inelásticos y explosivos. En el Capítulo 11 se explicó cómo entender estas categorías a partir del cambio de la energía cinética de los procesos. Ahora vamos a explicarlos desde la perspectiva de una ley más general de conservación de la energía.

Esta ley más general permite analizar procesos en los que la identidad de los objetos cambia durante la colisión. Pongamos el caso de la reacción nuclear representada por $n + {}^6Li \rightarrow {}^4He + {}^3H$, donde un neutrón incide en un núcleo de litio con un número de masa (cantidad total de protones + neutrones) de 6, y que contiene tres protones y tres neutrones. Terminada la reacción, las partículas observadas son un núcleo de helio con un número de masa de 4 (dos protones y dos neutrones) y un núcleo de hidrógeno con un número de masa de 3 (un protón y dos neutrones). Adviértase que el número total de neutrones permanece inalterado en la reacción: 4 antes de la reacción y después de ella. Asimismo, el número total de protones permanece constante en 3. Pero los protones y los neutrones se rearreglan después de la reacción. Se supone que en los nuevos agrupamientos tienen diferentes interacciones entre sí y, por consiguiente, la energía interna de los agrupamientos puede cambiar durante la reacción.

Ahora vamos a analizar la reacción $A + B \rightarrow C + D$, seleccionando la frontera del sistema de manera que abarque los objetos A y B antes de la colisión, cuando están lo bastante separados para que no interactúen y, por tanto, no haya energía potencial inicial. (A y B pueden tener una energía potencial *interna*, pero no hay energía potencial que se deba a alguna interacción de A con B.) La energía cinética total inicial de este sistema es $K_i = K_A + K_B$; A y B tienen una energía total interna $E_{int,i}$. Durante la reacción pueden ocurrir rearreglos internos, de modo que las partículas finales C y D sean distintas de A y B, pero las partículas finales C + D permanecen dentro de la frontera del sistema y constituyen el sistema tras la reacción. La energía interna total del sistema formado por C y D después de la reacción es $E_{inf,f}$; y la energía cinética total final de este sistema después de la reacción es $K_f = K_C + K_D$; igual que en el estado inicial, suponemos que los objetos en colisión no interactúan y que, por lo mismo, no existe energía potencial final. En la figura 13-10 se ofrece una vista esquemática de la colisión. Suponemos que ningún objeto del ambiente realiza trabajo en los objetos durante la colisión, así que $W_{ext} = 0$.

Al aplicar a este proceso la ley general de conservación de la energía, ecuación 13-2, y suponiendo que $U_i = U_f = 0$, tenemos

$$\Delta K + \Delta E_{int} = 0 \qquad (13\text{-}20)$$

o

$$K_f - K_i = -(E_{int,f} - E_{int,i}) = E_{int,i} - E_{int,f}. \qquad (13\text{-}21)$$

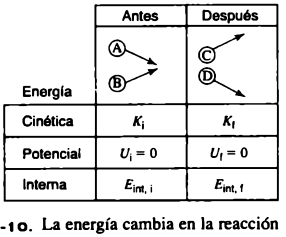


FIGURA 13-10. La energía cambia en la reacción $A + B \rightarrow C + D$.

Si $E_{int,i} > E_{int,f}$, la energía cinética final será mayor que la inicial, lo cual significa que parte de la energía interna de los objetos en colisión se transformó en energía cinética. A estas reacciones se les conoce como *exoenergérticas* (liberadoras de energía), y se asemejan a las colisiones que hemos calificado de "explosivas". Si $E_{int,i} < E_{int,f}$, la energía cinética final será menor que la inicial, porque parte de la original se convirtió en energía interna de las partículas finales. Estas reacciones reciben el nombre de *endoenergérticas* (absorbedoras de energía), y se parecen a las colisiones que calificamos de "inelásticas". En las colisiones elásticas, donde la energía cinética no cambia, debemos tener $E_{int,i} = E_{int,f}$. En la práctica ello significa que la identidad de los cuerpos en colisión no cambia, y que no se da agrupamiento interno de sus constituyentes (es decir, $A + B \rightarrow A + B$).

Procesos de desintegración

Algunos núcleos y partículas elementales son inestables y decaen espontáneamente en dos o más partículas. Por ejemplo, en la desintegración alfa ${}^{235}U \rightarrow {}^{231}Th + {}^4He$, un núcleo de uranio de número de masa 235 se divide en uno de torio de número de masa 231, y en otro de helio de número de masa 4. Al núcleo ${}^4He$ se le conoce comúnmente como *partícula alfa*.

Suponemos que la partícula original A que decae, se halla en reposo ($K_i = 0$); su momento es cero, y por eso su conservación requiere que el momento total de las partículas producto también lo sea. Si la desintegración se da sólo en dos partículas B y C, sus momentos lineales han de ser iguales y opuestos: $m_B v_B = -m_C v_C$, así que $m_B^2 v_B^2 = m_C^2 v_C^2$ o $m_B(2K_B) = m_C(2K_C)$, que nos da

$$K_B/K_C = m_C/m_B. \qquad (13\text{-}22)$$

La energía cinética final K_f, que es justo la energía cinética total de B y C, proviene de la transformación de la energía interna. Con $U_i = 0$ y $U_f = 0$ como antes, se aplica la ecuación 13-21 sólo que con $K_i = 0$ y $K_f = K_B + K_C$:

$$K_B + K_C = E_{int,i} - E_{int,f}. \qquad (13\text{-}23)$$

Claro que como $K_f (= K_B + K_C)$ debe ser positiva, la desintegración se producirá sólo si $E_{int,i} > E_{int,f}$. En este caso se convierte la energía interna en energía cinética.

Si el decaimiento ocurre en dos partículas, podemos resolver al mismo tiempo las ecuaciones 13-22 y 13-23 para obtener las energías cinéticas finales K_B y K_C. Si ocurre en tres o más partículas finales $B + C + D + \ldots$, entonces las ecuaciones de conservación de la energía y de conservación del momento no ofrecen suficiente información para determinar los valores únicos de la energía cinética de las partículas producto. En este caso, las partículas pueden tener una serie continua de energías cuya suma se obtiene mediante la ecuación 13-23.

PROBLEMA RESUELTO 13-6. La reacción de fusión ${}^2H + {}^2H \rightarrow {}^1H + {}^3H$, conocida como reacción d-d (d significa *deuterón*, otro nombre de ${}^2H$, el núcleo de hidrógeno con un número de masa 2), es

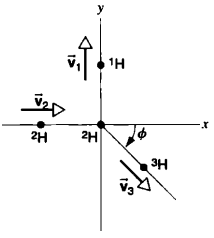


FIGURA 13-11. Problema resuelto 13-6. El incidente ^{2}H choca con un blanco estacionario ^{2}H y produce las partículas ^{1}H y ^{3}H.

importante en la liberación de energía nuclear. La energía interna de las partículas iniciales es mayor que la de las partículas finales en 4.03 MeV. En una reacción, un haz de ^{2}H de 1.50 MeV de energía cinética incide en un blanco de ^{2}H en reposo. Se observa que el protón ^{1}H tiene una energía cinética de 3.39 MeV en dirección de un ángulo de 90° respecto al haz original de ^{2}H (Fig. 13-11). Determine la energía y la dirección del ^{3}H que sale. Las masas son: ^{1}H – 1.01 u, ^{2}H – 2.01 u, ^{3}H – 3.02 u.

Solución: Con base en la ecuación 13-21, la energía cinética final es

$$K_f = -\Delta E_{int} + K_i = 4.03 \text{ MeV} + 1.50 \text{ MeV} = 5.53 \text{ MeV}.$$

La energía cinética final la comparten los núcleos ^{1}H y ^{3}H. Con $K_f = K_1 + K_3$, tenemos

$$K_3 = K_f - K_1 = 5.53 \text{ MeV} - 3.39 \text{ MeV} = 2.14 \text{ MeV}.$$

Atendiendo a la conservación del momento, el momento del ^{2}H original debe ser igual al componente x del momento de ^{3}H, o $m^2v^2 = m^3v^3 \cos\phi$. Utilizando $v = \sqrt{2K/m}$ obtenemos

$$\cos\phi = \frac{m_2v_2}{m_3v_3} = \sqrt{\frac{m_2K_2}{m_3K_3}} = \sqrt{\frac{(2.01 \text{ u})(1.50 \text{ MeV})}{(3.02 \text{ u})(2.14 \text{ MeV})}} = 0.683$$

or $\phi = 46.9°$.

PROBLEMA RESUELTO 13-7. En el proceso de decaimiento alfa $^{226}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}\text{Rn} + {}^4\text{He}$, el radio, elemento radiactivo que se encuentra en la naturaleza, decae y se transforma en el elemento gaseoso radón. La energía interna disminuye 4.87 MeV en el proceso. Si el radio decae a partir del reposo, calcule la energía cinética del radón y de la partícula alfa (^{4}He). Las masas son: ^{226}Ra – 226.0 u, ^{222}Rn – 222.0 u, ^{4}He – 4.00 u.

Solución De acuerdo con la ecuación 13-22, la razón de la energía cinética de las partículas producto es

$$\frac{K_{Rn}}{K_{He}} = \frac{m_{He}}{m_{Rn}} = \frac{4.00 \text{ u}}{222.0 \text{ u}} = 0.0180.$$

La energía cinética total de los productos está dada por la ecuación 13-23:

$$K_f = K_{Rn} + K_{He} = E_{int,i} - E_{int,f} = 4.87 \text{ MeV}.$$

Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones anteriores, nos queda $K_{Rn} = 0.086$ MeV y $K_{He} = 4.78$ MeV. Nótese que la partícula alfa más ligera recibe cerca del 98% de la energía, lo cual es compatible con la conservación del momento.

13-7 TRANSFERENCIA DE ENERGÍA POR CALOR

La figura 13-1 mostró que la energía de un sistema puede modificarse por el trabajo que el ambiente realiza en él. El trabajo es una de las dos formas en que un sistema puede intercambiar energía con el ambiente. La otra es el *calor*.

Como señalamos en la sección 11-1, la definición física de "trabajo" tal vez difiera de su acepción común. Lo mismo sucede con el calor. Éste se define así en física:

> *El calor es una forma en que la energía se transfiere entre un sistema y su ambiente, debido a la diferencia de temperatura entre ellos.*

Con el símbolo Q representamos la transferencia de calor. Por ser éste una forma de energía, se mide en unidades de ella (por ejemplo, en joules).

Se dan dos semejanzas importantes entre el trabajo y el calor:

1. *El calor es energía en tránsito.* Así como nunca hablamos de "la cantidad de trabajo contenida en un cuerpo", tampoco decimos "la cantidad de calor contenida en un cuerpo". Cuando se transfiere calor del sistema A al sistema B, no es correcto decir que "el sistema A tiene menos calor". Más bien, deberíamos decir que "el sistema A tiene menos energía", porque parte de ella se perdió por el calor transferido al sistema B. En forma parecida, si el sistema A realiza trabajo en el sistema B, nunca decimos que "el sistema A tiene menos trabajo", sino que "el sistema A tiene menos energía", porque utilizó parte de ella para efectuar trabajo en el sistema B.

2. *El calor transferido en un proceso depende de cómo se lleve a cabo.* Hemos visto casos en que un sistema puede llevarse de un estado inicial a un estado final mediante varias trayectorias. Si una fuerza no conservativa (digamos la fricción) actúa en él, el trabajo efectuado por ella tendrá en general distintos valores para las trayectorias que llevan del mismo estado inicial al mismo estado final. (En efecto, ésta es una de las formas en que definimos las fuerzas no conservativas en el Capítulo 12.) En este aspecto, la transferencia de calor se asemeja al trabajo no conservativo que puede requerir diversas cantidades de calor transferido para llevar el sistema por varias trayectorias que conecten el mismo estado inicial con el mismo estado final.

Calor y temperatura

En lenguaje coloquial, decimos a menudo "calor", cuando nos referimos a la temperatura o a la energía interna. Cuando "calentamos" un platillo en un horno hasta cierta temperatura, transferimos energía por medio del calor (con el platillo rodeado por un ambiente a temperatura más alta), hasta que alcance la temperatura deseada. Mientras que si lo sacamos del horno y lo ponemos en la mesa, el platillo transferirá energía en forma de calor al ambiente más frío.

Igual que en el trabajo y en el calor, debemos dar una definición exacta de temperatura si queremos una magnitud fí-

sica útil. La definición formal viene en el Capítulo 21, pero aquí ofreceremos un breve resumen para que podamos hablar de ella en relación con los sistemas mecánicos.

El cambio de temperatura de un cuerpo se acompaña de una alteración de la energía cinética traslacional promedio de sus átomos o moléculas. Si aumentamos la energía interna de un cuerpo, sus átomos o moléculas podrían adquirirla en diversas formas —aumento de la energía cinética traslacional, incremento de la energía cinética rotacional o alteración de su configuración (por ejemplo, aumento del espaciamiento promedio)—, de modo que se incrementa su energía potencial. Sólo la parte que aumenta la energía cinética traslacional elevará la temperatura.

Otra manera de considerar la temperatura consiste en verla como un indicador de si dos cuerpos puestos en contacto intercambiarán o no energía en forma de calor. Si su temperatura es la misma, no habrá intercambio. Nótese que, cuando un cuerpo es mucho más grande que el otro, puede tener mucha mayor energía interna total, pero no la transferirá a otro si los dos tienen la misma temperatura. Una forma de transferir calor, son las colisiones entre los átomos o moléculas de los dos cuerpos en la superficie donde están en contacto. Cuando dos cuerpos tienen distintas temperaturas y los ponemos en contacto, las colisiones en la superficie de contacto entre sus átomos o moléculas generalmente transferirán energía de aquél, cuyas partículas tengan en promedio más energía cinética traslacional (el cuerpo con temperatura más alta) a otro, cuyas partículas tengan en promedio menor cantidad de ella (el cuerpo con menos temperatura).

Procure distinguir entre los conceptos de calor y de temperatura. El calor siempre es energía en tránsito entre cuerpos; en tanto que la temperatura es una medida de la energía interna de un cuerpo individual. Podemos elevar la temperatura de un cuerpo sin que se transfiera calor a él (por ejemplo, realizando trabajo en el cuerpo), y podemos transferir calor del ambiente a un cuerpo a una temperatura más elevada sin que cambie la temperatura (por ejemplo, derritiendo hielo sólido a 0 °C hasta convertirlo en agua líquida a 0 °C).

Primera ley de la termodinámica

En la expresión general de conservación de la energía incluida en la ecuación 13-2, omitimos un método de transferencia de energía: el calor. La figura 13-12 muestra una perspectiva más completa de las transferencias de energía en un sistema. La que se encuentra dentro de su frontera, puede cambiar debido al calor transferido al ambiente desde él, o al trabajo efectuando en él o por él. Si incluimos el calor, podemos escribir la ecuación 13-2 así

$$\Delta E_{\text{total}} = Q + W. \qquad (13\text{-}24)$$

En esta ecuación, E_{total} indica todas las formas de energía contenidas dentro de la frontera del sistema: cinética, potencial, interna y, quizás, otras variedades. Para facilitar la explicación, omitimos el subíndice "ext" de W, pero suponemos que designa el trabajo ejecutado en el sistema por su medio externo. La convención de signos de Q se parece a la del trabajo: $Q > 0$

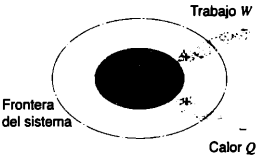


FIGURA 13-12. La energía de un sistema puede modificarse en dos formas: por el trabajo realizado sobre el ambiente, o por éste; y sobre el sistema por el calor transferido hacia el ambiente o desde él. Se indican las convenciones de señales de W y Q: se supone que el trabajo efectuado *en* el sistema y el calor transferido *a* él son positivos, y que ambos incrementan la energía del sistema.

significa que se transfiere calor *a* un sistema y que éste *aumenta* su energía; mientras que $Q < 0$ significa que se transfiere calor *del* sistema y que *disminuye* su energía.*

La ecuación 13-24 es la formulación más general que podemos hacer sobre la conservación de la energía en un sistema. A esta forma se le conoce comúnmente como *primera ley de la termodinámica.* Más adelante en el libro examinaremos una aplicación más detallada de ella a un sistema termodinámico: un gas encerrado en un contenedor. Por ahora vamos a ver cómo se aplica a algunos sistemas mecánicos.

1. *Un bloque se desliza en una superficie plana.* Un bloque resbala en una mesa horizontal plana donde actúa una fuerza de fricción. Tiene una rapidez inicial v, y finalmente se detiene. Primero consideramos el bloque como nuestro sistema. La ecuación 13-24 aplicada a él nos da

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int, bloque}} = W_f + Q. \qquad (13\text{-}25)$$

Aquí $\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}Mv^2$, $\Delta E_{\text{int, bloque}}$ es el aumento de la energía interna del bloque (que se mide por la elevación de la temperatura), W_f es el trabajo (negativo) de fricción realizado en él por la mesa y Q es el calor (negativo) transferido del bloque. Suponemos que el calor transferido al aire sea despreciable, y que la única transferencia proviene del bloque caliente a las regiones más frías de la mesa con las cuales entra en contacto.

A continuación aplicamos la primera ley de termodinámica al sistema de bloque + mesa y obtenemos

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int, bloque}} + \Delta E_{\text{int, mesa}} = 0. \qquad (13\text{-}26)$$

* Es importante señalar, que W representa el trabajo externo efectuado *sobre* el sistema. A veces encontrará la ecuación 13-24 escrita como $\Delta E = Q - W$, donde W representa el trabajo realizado *por* el sistema sobre su ambiente externo. El trabajo realizado por el sistema A sobre el sistema B es el negativo del que hace el sistema B sobre A; ambas formas de la ecuación son correctas. Hemos optado por escribir la ecuación en esta forma para que W siempre represente el trabajo realizado *sobre* el sistema. De lo contrario, habría que definir el trabajo termodinámico como el negativo del trabajo mecánico. Preferimos subrayar la conexión entre mecánica y termodinámica escogiendo una convención uniforme de signos para el trabajo.

Aquí no aparece el trabajo porque es interno al sistema. Tampoco aparece Q por la misma razón, es decir, la transferencia de calor es también interna al sistema (pues no hemos tenido en cuenta la pérdida de calor en el aire circundante). Al combinar las ecuaciones 13-25 y 13-26, obtenemos

$$\Delta E_{\text{int, mesa}} = -W_f - Q. \qquad (13\text{-}27)$$

Tanto W_f como Q son negativos, por lo cual los dos términos de la derecha contribuyen a *incrementar* la energía interna (temperatura) de la mesa; $-W_f$ (magnitud positiva) representa el trabajo de fricción efectuado en la mesa por el bloque, en tanto que $-Q$ (magnitud positiva) representa el calor que el bloque transfiere a la mesa.

2. *Experimento de Joule.* En el siglo XIX, al principio no se comprendió que el calor es una forma de energía. De ahí que se midiera en unidades distintas a las de las unidades estándar de energía. Entre las primeras que se usaron, figuran la caloría (cal) y la unidad térmica británica (BTU), que se relacionan con las del SI (joules) por medio de

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \quad \text{y} \quad 1 \text{ BTU} = 1{,}055 \text{ J}.$$

El uso común del término caloría, se basa actualmente en el contenido energético de la comida; esta "caloría" es en realidad una kilocaloría (1 Cal = 1 kilocaloría = 1.000 cal). Todavía encontramos BTU como medida de la capacidad de un calentador o de un acondicionador de aire para transferir energía en forma de calor entre un cuarto y su ambiente.

La caloría se definió originalmente, como el calor Q que debe transferirse de un gramo de agua para elevar su temperatura de 14.5 °C a 15.5 °C, y al hacerlo, aumentar su energía interna en ΔE_{int}. No se lleva a cabo trabajo externo en el proceso, de modo que podemos escribir la ecuación 13-24 como

$$\Delta E_{\text{int}} = Q. \qquad (13\text{-}28)$$

El experimento de Joule se diseñó para aumentar la temperatura de cierta cantidad de agua realizando trabajo en ella en vez de transferirle calor. Su aparato se muestra en la figura 13-13. Las pesas que caen hacían girar un grupo de paletas que agitaban el agua, con lo cual transformaban en energía interna del agua el trabajo gravitacional W_g en las pesas. Consideramos como nuestro sistema el aparato entero de Joule, permitiendo que las pesas caigan una distancia fija y luego lo detenemos; esperamos a que las paletas pierdan su energía cinética rotacional en el agua. Suponemos que no se transfiere calor a través del contenedor, y que no se disipa energía en las poleas; entonces podemos escribir la ecuación 13-24 así

$$\Delta E_{\text{int}} = W_g. \qquad (13\text{-}29)$$

Con el mismo cambio de energía interna (correspondiente al mismo incremento de temperatura) que en la ecuación 13-28, Joule pudo encontrar la equivalencia entre cierta cantidad de trabajo (medido en joules usando unidades modernas), y la cantidad correspondiente de calor (medido en calorías). A esta relación se le llama *equivalente mecánico del calor:* 1 cal = 4.186 J. Hoy medimos el calor en joules como otras formas de energía y, por tanto, este factor de conversión perdió la importancia que tuvo en la época de Joule. Con todo, su experimento efectuado en 1850, nos dio una orientación al demostrar que el calor como el trabajo, podían concebirse correctamente como un medio de transferir energía.

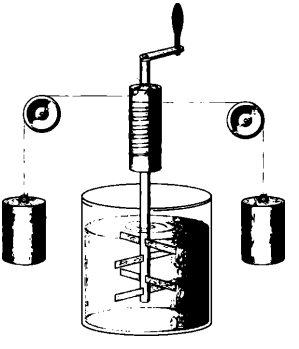


FIGURA 13-13. Aparato con que Joule midió el equivalente mecánico del calor. Las pesas que caen hacen girar las paletas que agitan el agua del recipiente, elevando así su temperatura.

PCIÓN MÚLTIPLE

13-1 Trabajo realizado en un sistema por fuerzas externas

1. Se deja caer una bola del borde de un risco. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto? (*¡Puede haber más de una respuesta correcta!*)

A) La gravedad efectúa trabajo en la bola a medida que ésta cae.
B) La energía potencial gravitacional de la bola disminuye a medida que ésta cae.
C) La energía potencial gravitacional de la Tierra disminuye a medida que la bola cae.
D) La energía potencial gravitacional del sistema bola + Tierra disminuye a medida que la bola cae.

2. Supóngase $\Delta K = +10$ J del bloque en la situación descrita en la figura 13-2. ¿Cuál de los siguientes enunciados podría describir correctamente las transferencias de energía?

A) $W_{\text{resorte}} = +5$ J, $W_{\text{grav}} = +15$ J
B) $\Delta U_{\text{resorte}} = +5$ J, $W_{\text{grav}} = -15$ J
C) $W_{\text{resorte}} = -5$ J, $\Delta U_{\text{grav}} = -15$ J
D) $\Delta U_{\text{resorte}} = -5$ J, $\Delta U_{\text{grav}} = -15$ J

3. Un bloque de madera (2.0 kg de masa) se deja caer desde un trampolín alto de una alberca, y entra en el agua con una rapidez de 10 m/s. Llega a una profundidad de 3.0 m en el agua y se de-

tiene instantáneamente antes de comenzar a elevarse otra vez a la superficie. ¿Qué trabajo efectuó el agua en el bloque durante el descenso de 3 m?

A) − 159 J B) − 100 J
C) − 59 J D) − 41 J

13-2 Energía interna en un sistema de partículas

4. Una bola de 2.0 kg se deja caer desde una altura de 5.0 m. Cae, toca el suelo y rebota a una altura de 3.0 m. ¿Qué puede decirse de $\Delta E_{\text{int, bola}}$ entre su estado inicial y final?

A) $\Delta E_{\text{int, bola}} > 39.2$ J B) $\Delta E_{\text{int, bola}} = 39.2$ J
C) $\Delta E_{\text{int, bola}} < 39.2$ J

5. Esta sección trata de la "energía faltante" que puede guardarse como energía interna en un objeto. ¿Debemos sentir el mismo interés por el "momento faltante" y por el "momento interno"?

A) Sí, pero los efectos serán mucho menores, porque el momento es proporcional a la velocidad, mientras que la energía lo es al cuadrado de la velocidad.
B) Sí, pero los efectos pueden ignorarse, porque a los físicos no les interesan más que los sistemas donde se conserva el momento.
C) No, porque el momento es un vector y, en cambio, la energía es un escalar.
D) No, mientras no se introduzca el "momento potencial".

13-3 Trabajo de la fricción

6. Un cubo de 10 cm de metal está firmemente sujeto a su sitio. Se tira de un segundo cubo idéntico colocado arriba del primero con una rapidez constante por una fuerza también constante de 10 N, como se ve en la figura 13-14.

a) La fuerza de fricción entre los cubos

A) es menor que 10 N.
B) es igual a 10 N.
C) es mayor que 10 N.
D) no puede determinarse sin un modelo detallado de las dos superficies.

b) ¿Cómo se relaciona el cambio de la energía interna del cubo que se mueve, $\Delta E_{\text{int, móvil}}$, con el cambio de la energía interna del cubo fijo $\Delta E_{\text{int, fijo}}$?

A) $\Delta E_{\text{int, móvil}} > \Delta E_{\text{int, fijo}}$
C) $\Delta E_{\text{int, móvil}} = \Delta E_{\text{int, fijo}}$
B) $\Delta E_{\text{int, móvil}} < \Delta E_{\text{int, fijo}}$
D) No existe una relación evidente sin una descripción pormenorizada de la fuerza de fricción.

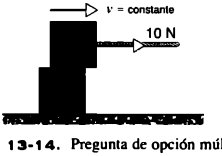


FIGURA 13-14. Pregunta de opción múltiple 6.

7. Un método con que se determina la rapidez de una bala, consiste en dispararla contra un bloque de madera y ver la distancia que ésta recorre en una superficie (véase Prob. 3). Suponiendo (incorrectamente) que la magnitud del trabajo hecho por la fricción sea igual a la fuerza de fricción en el bloque multiplicada por la distancia que se desliza, el valor calculado de la velocidad de la bala será

A) menor que el valor real, porque también cambiará la energía interna del bloque y de la superficie.
B) mayor que el valor real, porque se producirá un cambio en la energía interna del bloque y de la superficie.
C) correcto, porque los errores causados al ignorar los cambios de las energías internas se cancelan por el cometido en la suposición sobre el trabajo realizado por fricción.
D) equivocado, porque la fricción invalida también la conservación del momento.

13-4 Conservación de la energía en un sistema de partículas

8. *a*) Un bloque se desliza del reposo por una cuña inclinada en un ángulo θ con la horizontal. Se produce fricción entre el bloque y la cuña. Cuando el bloque llega al fondo de la cuña, su energía cinética es 3 J, y la gravedad ha realizado + 10 J de trabajo en él. ¿Cuál de los siguientes enunciados describe las transferencias de energía en este sistema?

A) $\Delta E_{\text{int, bloque}} < +7$ J
B) El trabajo de fricción realizado en el bloque por la cuña $= -7$ J
C) El trabajo de fricción realizado en la cuña por el bloque $= +7$ J
D) $\Delta E_{\text{int, bloque}} = +7$ J

b) Suponga que la cuña se desliza libremente en una mesa horizontal sin fricción (todavía hay fricción entre el bloque y la cuña). Se suelta otra vez el bloque del reposo y llega al fondo de la cuña con una energía cinética K después que la gravedad realiza trabajo Wg en él. Se conocen las masas del bloque y de la cuña. Con base en esta información, ¿es posible calcular la rapidez de la cuña?

A) Sí, aplicando la conservación del momento en dirección horizontal.
B) No, porque no sabemos cómo se pierde la energía mecánica por fricción.
C) No, porque la conservación del momento no se aplica cuando intervienen fuerzas de fricción.
D) No, porque la fuerza externa neta sobre el sistema no es cero.

13-5 Energía del centro de masa

9. Dos partículas chocan en forma elástica. En el marco de referencia de laboratorio, una de ellas se halla originalmente en reposo.

a) ¿En cuál marco de referencia es menor la energía cinética total?

A) En el marco de referencia del laboratorio.
B) En el marco de referencia del centro de masa.
C) La energía cinética es la misma en el marco de referencia del laboratorio y del centro de masa.
D) La pregunta no puede contestarse si no se cuenta con más información.

b) ¿En cuál marco de referencia es menor la magnitud del momento total?

A) El marco de referencia del laboratorio.
B) El marco de referencia del centro de masa.
C) El momento es el mismo en el marco de referencia del laboratorio y en el del centro de masa.
D) La pregunta no puede contestarse si no se cuenta con más información.

10. ¿Es la energía cinética rotacional parte de la energía cinética del centro de masa o de la energía interna?
    A) Definitivamente forma parte de la energía cinética del centro de masa.
    B) Definitivamente forma parte de la energía interna.
    C) Podría pertenecer a ambas categorías, según como definamos el sistema.
    D) Podría pertenecer a ambas categorías, porque siempre es posible encontrar un marco de referencia inercial cuando el cuerpo no gira.
    E) No forma parte de la energía del centro de masa ni de la energía interna.

13-6 Reacciones y desintegraciones

11. Consideremos el decaimiento A → B + C + D, donde A se halla inicialmente en reposo. Se conocen la masa de todas las partículas y la energía ΔE_{int} liberada en el decaimiento. Deseamos conocer la rapidez y la dirección de las tres partículas finales. En un experimento se determinan la rapidez y la dirección de B. ¿Qué otros datos experimentales mínimos se necesitan para poder calcular el resto de las variables desconocidas?
    A) No se requieren más datos.
    B) Se necesitan la rapidez y la dirección de C.
    C) Se necesita la dirección o la rapidez de C.
    D) Se necesitan la rapidez de C y de D.

12. La energía cinética de una partícula depende del marco de referencia del observador. En una reacción exoenergética, la energía cinética total final es mayor que la inicial. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto?
    A) Una reacción exoenergértica en un marco de referencia inercial es exoérgica en todos ellos.
    B) Es posible encontrar un marco de referencia donde una reacción exoenergética parezca ser endoenergética.
    C) Es posible encontrar un marco de referencia donde una reacción exoenergética parezca ser elástica.
    D) El cambio neto de la energía cinética tendrá el mismo valor que los marcos de referencia inerciales.

13-7 Transferencia de energía por calor

13. ¿En qué forma la inclusión de la transferencia de energía por el calor afecta a la explicación del bloque en la figura 13-3?
    A) La energía podría transferirse en forma de calor entre el bloque y la mesa, cambiando $E_{int,\ bloque}$ y $E_{int,\ mesa}$, pero manteniendo constantes $E_{int,\ bloque\ +\ mesa}$.
    B) La energía podría transferirse en forma de calor del bloque y de la mesa a su ambiente supuestamente más frío, con lo cual disminuirían $E_{int,\ bloque}$ y $E_{int,\ mesa}$.
    C) Un proceso de tipo A) y B), puede ocurrir al mismo tiempo ocasionando una reducción neta en $E_{int,\ bloque\ +\ mesa}$.

PREGUNTAS

1. En el punto más alto de su trayectoria, una pelota arrojada verticalmente tiene cero energía cinética. ¿Dónde fue a parar la energía? ¿Se ha realizado trabajo externo en la pelota? ¿Tiene ahora la energía la forma de energía potencial en ella? ¿De energía potencial en la Tierra?
2. ¿Qué sucede con la energía potencial que se pierde cuando un elevador desciende de la parte superior de un edificio y se detiene en la planta baja?
3. La figura 13-15 muestra un tubo circular de vidrio sujeto a un muro vertical. El tubo está lleno de agua, salvo por una burbuja de aire que se encuentra temporalmente en reposo en su fondo. Explique el movimiento subsecuente de la burbuja en función de transferencias de energía. Hágalo despreciando las fuerzas viscosas y de fricción y teniéndolas totalmente en cuenta.

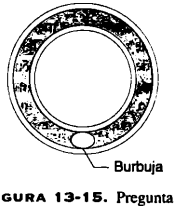


FIGURA 13-15. Pregunta 3.

4. Cuando la patinadora de hielo de la sección 13-2 se impulsa y se aleja del barandal, su energía interna E_{int} disminuye. ¿Qué sucede con esta última cuando patina hasta el barandal y luego se impulsa y se detiene?
5. ¿Puede la energía interna considerarse una forma especial de la energía potencial? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
6. ¿Puede la energía potencial considerarse un caso especial de la energía interna? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
7. Un automóvil va por una carretera. El conductor oprime los frenos y el automóvil se detiene patinando. ¿En qué formas se manifiesta la energía cinética perdida?
8. En la pregunta anterior, suponga que el conductor oprime los frenos de modo que el automóvil no patine ni resbale. En este caso, ¿de qué manera se manifiesta la energía cinética perdida?
9. Un automóvil acelera del reposo alcanzando una rapidez v en condiciones tales, que no patinen las ruedas de tracción. ¿De dónde proviene la energía mecánica del automóvil? En particular, ¿es verdad que se origina en la fuerza de fricción (estática) ejercida por la carretera sobre él?
10. En la ecuación 13-6, W_f representa la transferencia de energía del sistema bloque al sistema mesa. ¿Es $W_f = -\Delta E_{int,\ mesa}$? Explique su respuesta. ¿Puede concluir que $fs = \Delta E_{int}$ siempre que f es una fuerza interna de fricción? De no ser así, dé un ejemplo contrario.
11. En el caso del trabajo hecho contra la fricción, el cambio de energía interna no depende de la velocidad (o marco de referencia inercial) del observador. Es decir, varios observadores asignarán la misma cantidad de energía mecánica transformada en energía interna debido a la fricción. ¿Cómo explicar esto teniendo en cuenta que los observadores miden diversas cantidades de trabajo total efectuado y distintos cambios de energía cinética en general?
12. En un artículo titulado "Energy and the Automobile", que apareció en el número de octubre de 1980 de *The Physics Teacher* (p. 494), el autor (Gene Waring) asegura: "Es interesante señalar que toda la entrada de energía en forma de combustible termina transformándose en energía térmica y en consumirse a lo

largo de su trayectoria". Analice varios mecanismos en que esto tiene lugar. Considere entre otras cosas la pérdida por fricción de la carretera, por la resistencia del aire, por el frenado, por la radio del automóvil, por los fanales, por el acumulador, por el claxon y por otros componentes. Suponga que la ruta es recta y plana.

13. Una planta eléctrica cerca de un río suministra energía a una pequeña ciudad. Si apagamos una lámpara en este sistema cerrado, la conservación de la energía requiere que una cantidad igual de energía, quizá bajo otra forma, aparezca en alguna otra parte del sistema. ¿Dónde y en qué forma aparece la energía?
14. Las bolsas de aire aminoran considerablemente la probabilidad de una lesión en un accidente automovilístico. Explique cómo lo hacen en función de las transferencias de energía.
15. Una bola dejada caer en la Tierra no puede rebotar más alto que el punto de donde se suelta. Sin embargo, el agua que salpica del fondo de la cascada a veces puede elevarse más alto que la parte superior de la caída. ¿A qué se debe eso?
16. Un péndulo oscilante se detiene finalmente. ¿Viola esto la ley de conservación de la energía mecánica?
17. En un artículo científico ("The Energetic Cost of Moving About", de V. A. Tucker, *American Scientist*, julio-agosto de 1975, p. 413) se afirma que caminar y correr son formas extremadamente ineficientes de locomoción y que logran mucha mayor eficiencia las que ejercen las aves, los peces y los ciclistas. ¿Puede proponer alguna explicación?
18. Se comprime un resorte atando firmemente sus extremos. Luego se coloca en ácido y se disuelve. ¿Qué sucede con su energía potencial almacenada?
19. Dado que el lado izquierdo de las ecuaciones 13-14 y 13-15 se parecen tanto a la definición de trabajo dado en las ecuaciones 11-1 y 11-14, ¿por qué no lo llamamos simplemente trabajo y seguimos adelante? ¿Qué ventaja ofrece definir el trabajo en la forma en que lo hacen los físicos? ¿Se llega a la misma respuesta numérica cualquiera que sea la definición?
20. ¿Puede una fuerza externa que no realiza trabajo (por ser estacionario el punto de aplicación) provocar un cambio en la energía cinética *rotacional* del sistema?
21. ¿En qué condiciones, en caso de que se necesite alguna, es correcto decir que el decaimiento $A \rightarrow B + C$ no es más que el inverso de la colisión totalmente elástica $B + C \rightarrow A$?
22. Un estudiante de ciencias de enseñanza media, afirma haber inventado canicas simples de vidrio que chocan con colisiones perfectamente elásticas. Lo demuestra lanzando una canica contra otra; escucha usted el ruido de la colisión, y luego ve que las canicas se separan. Las mediciones repetidas siempre indican que la colisión es elástica en la exactitud que ofrece el equipo. ¿Es elástica la colisión? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
23. Encuentre en el Sol el origen del mayor número posible de fuentes actuales de energía. ¿Se le ocurre alguna que no tenga ese origen?
24. Decimos que las fuerzas internas no aceleran un automóvil, sino más bien, las fuerzas externas que ejercen la carretera. ¿Por qué entonces necesitan motor los automóviles?
25. ¿Puede el trabajo efectuado por fuerzas internas reducir la energía cinética del cuerpo? ¿Pueden aumentarla?
26. *a*) Si efectúa trabajo en un sistema, ¿adquiere éste necesariamente energía cinética? *b*) Si un sistema adquiere energía cinética, ¿significa necesariamente que algún agente externo realizó trabajo en él? Dé ejemplos. (Aquí por "energía cinética" se entiende, la que se asocia al movimiento del centro de masa.)
27. En el problema resuelto 13-3 vimos un ejemplo (una patinadora) en que se manifestaba la energía cinética, pero sin que se ejecutara trabajo externo. Considere el caso contrario. Un destornillador se sostiene firmemente contra una rueda en rotación. Aquí se lleva a cabo trabajo externo, pero sin que cambie la energía cinética. Explique esta aparente contradicción.
28. Un enfadado jugador de hockey arroja un disco contra el hielo. El disco gira alrededor de su centro de masa al deslizarse hasta que finalmente lo detiene la acción de la fricción. Su movimiento de rotación se detiene en el mismo momento en que su centro de masa, ni antes ni después. Explique por qué.

EJERCICIOS

13-1 Trabajo realizado en un sistema por fuerzas externas

1. Se lanza verticalmente hacia arriba un proyectil con una masa de 9.4 kg. Al elevarse, se disipan 68 kJ de energía mecánica a causa de la resistencia del aire al avance. ¿A qué altura habría llegado si hubiéramos hecho despreciable la resistencia (por ejemplo, dándole una forma aerodinámica al proyectil)?
2. Mientras un automóvil de 1,700 kg avanza con una rapidez constante de 15 m/s, el motor suministra 16 kW de potencia para superar la fricción, la resistencia de aire y otros obstáculos. *a*) ¿Qué potencia debe suministrar si el automóvil debe subir una pendiente de 8.0% (8.0 m verticalmente por cada 100 m horizontalmente) a 15 m/s? *b*) ¿A qué pendiente de descenso, expresado en términos porcentuales, se desplazará a 15 m/s?
3. En la situación de la figura 13-2, un bloque de 1.25 kg de masa se suelta del reposo en un punto donde el resorte (de constante de fuerza k = 262 N/m) tiene su longitud relajada. ¿Cuál es la rapidez del bloque después de caer una distancia de 8.4 cm?
4. Un automóvil con pasajeros pesa 16,400 N (3,680 lb), y sube una pendiente de 10° con una rapidez inicial de 70 mi/h (113 km/h) cuando el conductor comienza a aplicar los frenos. El automóvil se detiene luego de recorrer 225 m por la carretera inclinada. Calcule el trabajo efectuado por los frenos al detenerlo, suponiendo que pueden ignorarse las otras transferencias de energía en este problema (entre ellas el calor y la energía interna).

13-2 Energía interna en un sistema de partículas

5. Una bola de 12.2 g de masa se deja caer del reposo a una altura de 76 cm arriba de la superficie de aceite que llena un barril hasta una profundidad de 55 cm. La bola llega al fondo con una rapidez de 1.48 m/s. *a*) Sin tener en cuenta la resistencia del aire, calcule la rapidez de la bola cuando entra en el aceite. *b*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del sistema de bola + aceite?

13-3 Trabajo de la fricción

6. Un oso de 25.3 kg se desliza del reposo 12.2 m por un pino con una rapidez de 5.56 m/s en el fondo. *a*) ¿Cuál es la energía potencial inicial del oso? *b*) Calcule su energía cinética en el fondo. *c*) Suponiendo que no se transfiere otra energía, determine el cambio de energía interna del oso y del árbol.

7. Cuando una nave espacial (de 79,000 kg de masa) retorna a la Tierra de su órbita, entra en la atmósfera a una altitud de 100 millas y con una rapidez de 18,000 mi/h, que se reduce gradualmente a una rapidez de aterrizaje de 190 nudos (220 mi/h). ¿Cuál es la energía total *a*) en el ingreso a la atmósfera, y *b*) al aterrizar? Consulte la figura 13-16. *c*) ¿Qué ocurre con la energía "faltante"?

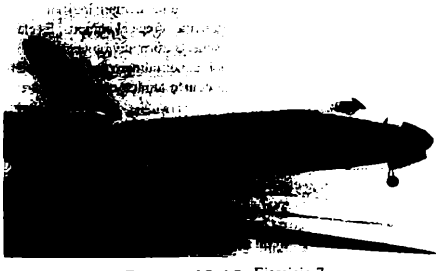


FIGURA 13-16. Ejercicio 7.

8. Un paracaidista que pesa 68 kg cae a una rapidez terminal constante de 59 m/s. ¿Con qué rapidez aumentan la energía interna de él y la del aire circundante?
9. Un río desciende 15 m al pasar por los rápidos. La velocidad del agua es 3.2 m/s luego de entrar en ellos y de 13 m/s al abandonarlos. ¿Qué porcentaje de la energía potencial perdida por el agua al cruzar los rápidos aparece en forma de energía cinética corriente abajo? ¿Qué sucede con el resto de la energía?
10. Durante una avalancha de rocas, una de 524 kg rueda del reposo por una colina en pendiente que mide 488 m de largo y 292 m de alto. La rapidez de la roca al llegar al fondo de la colina es 62.6 m/s. ¿Cuánta energía mecánica pierde la roca durante el deslizamiento debido a la fricción?
11. Un bloque de 4.26 kg empieza a ascender una pendiente de 33.0° a 7.81 m/s. ¿Cuánta distancia recorrerá al deslizarse si pierde 34.6 J de energía mecánica a causa de la fricción?
12. Dos picos cubiertos de nieve se hallan a 862 m y 741 m sobre el nivel del valle situado entre ellos. Un tramo de esquíes se extiende desde la parte superior del pico más alto hasta la de otro más bajo (véase Fig. 13-17). *a*) Un esquiador parte del reposo en el pico más alto. ¿Con qué rapidez llegará al más bajo si se desliza sin utilizar los palos? Suponga que hay mucho hielo, de modo que no se produce fricción. *b*) Después de una nevada, un esquiador de 54.4 kg realiza el mismo recorrido sin usar los palos y apenas llega al pico más bajo. ¿Cuánto aumentan la energía interna de sus esquíes y la nieve sobre la que se desliza?

FIGURA 13-17. Ejercicio 12.

13-4 Conservación de la energía en un sistema de partículas

13. Una pelota pierde 15.0% de su energía cinética cuando rebota contra una banqueta de concreto. ¿Con qué rapidez debemos lanzarla verticalmente desde una altura de 12.4 m para que rebote a esa misma altura? Ignore la resistencia del aire.
14. Una pelota de goma que se deja caer de una altura de 6 ft exactamente rebota (toca el suelo) varias veces, perdiendo 10% de su energía cinética con cada rebote. ¿Tras cuántos rebotes dejaría de elevarse por arriba de 3 ft?
15. Una bola de acero con 0.514 kg de masa se ata a una cuerda de 68.7 cm de largo, y se suelta cuando la cuerda está en posición horizontal. En el fondo de su trayectoria, la bola golpea un bloque de acero de 2.63 kg inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción (Fig. 13-18). En la colisión, una mitad de la energía cinética mecánica se convierte en energía interna y sonora. Calcule las rapideces finales.

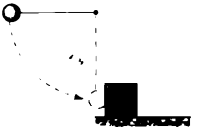


FIGURA 13-18. Ejercicio 15.

13-5 Energía del centro de masa

16. Se agacha usted partiendo de la posición erguida, y al hacerlo baja su centro de masa de 18.0 cm. Después salta verticalmente al aire. La fuerza que el piso ejerce sobre usted mientras salta, equivale a tres veces su peso. ¿Cuál es su rapidez ascendente al pasar por la posición erguida y separarse del suelo?
17. Una mujer de 55.0 kg brinca verticalmente al aire desde una posición inclinada, donde su centro de masa está 40.0 cm arriba del suelo. Al separar los pies del suelo, su centro de masa se halla a 90.0 cm arriba del suelo y sube a 120 cm en la parte más alta del salto. *a*) ¿Qué fuerza ascendente, supuestamente constante, ejerce el suelo sobre ella? *b*) ¿Qué rapidez máxima alcanza?
18. Un jugador de hockey sobre hielo de 116 kg de peso patina a 3.24 m/s hacia el barandal en el borde del hielo, y se detiene agarrándose de él con los brazos extendidos. Durante el proceso de frenado su centro de masa recorre 34.0 cm hacia el barandal. *a*) Calcule la fuerza promedio que debe aplicar al barandal. *b*) ¿Cuánta energía interna pierde?
19. El Consejo de Seguridad Nacional está probando la resistencia a los accidentes de un automóvil nuevo. El vehículo de 2,340 kg es conducido a 12.6 km/h contra una barrera. Durante el impacto, su centro de masa avanza 64.0 cm; la barrera se comprime 8.30 cm. Ignore la fricción entre el automóvil y la carretera. *a*) Calcule la fuerza, supuestamente constante, ejercida por la barrera sobre el automóvil. *b*) ¿Cuánto aumenta la energía interna del vehículo?
20. Supongamos que la energía total de un sistema de N partículas se mide en un marco de referencia arbitrario, tal que $K = \Sigma \frac{1}{2} m_n v_n^2$. En el marco del centro de masa, las velocidades son $v'_n = v_n - v_{cm}$, donde v_{cm} es la velocidad del centro de masa respecto al marco de referencia original. Recordando que $v_n^2 = \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n$, demuestre que la energía cinética puede escribirse

$$K = K_{int} + K_{cm},$$

dónde $K_{int} = \Sigma \frac{1}{2} m_n v_n'^2$ y $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$. Este resultado demuestra que la energía cinética de un sistema de partículas puede dividirse en el término interno y en el de centro de masa. La energía cinética interna se mide en un marco de referencia donde el centro de masa se halla en reposo: por ejemplo, los movimientos aleatorios de las moléculas de gas en un contenedor en reposo dan origen a la energía cinética traslacional interna.

13-6 Reacciones y desintegraciones

21. Un electrón, de masa m, choca directamente con un átomo de masa M que se encuentra en reposo. A causa del choque, una cantidad característica de energía E se guarda en el interior del átomo. ¿Qué rapidez inicial mínima v_0 ha de tener el electrón? (*Sugerencia*: Los principios de conservación producen una ecuación cuadrática para la rapidez final v del electrón y a una ecuación cuadrática para la rapidez final del átomo v. El valor mínimo v_0 se debe a la condición de que el radical de la solución de v y de V sea real.)

13-7 Transferencia de energía por calor

ROBLEMAS

1. Con una rapidez inicial v_0, una piedra de peso w se arroja verticalmente hacia arriba en el aire. Suponga que la fuerza de resistencia del aire al avance f disipa una cantidad fy de energía mecánica a medida que la piedra cubre una distancia y.
a) Demuestre que la altura máxima que alcanza es

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}.$$

b) Demuestre que la rapidez de la piedra al hacer impacto en el suelo es

$$v = v_0\left(\frac{w - f}{w + f}\right)^{1/2}.$$

2. Un objeto pequeño de masa m = 234 g se desliza por una pista con extremos elevados y con una parte central plana, como se aprecia en la figura 13-19. La parte plana tiene una longitud L = 2.16 m. Las partes curvas de la pista no tienen fricción, pero al atravesar la parte plana, el objeto pierde 688 mJ de energía mecánica a causa de la fricción. Se suelta el objeto en el punto A, que está a un altura h = 1.05 m arriba de la parte plana de la pista. ¿Dónde se detendrá finalmente el objeto?

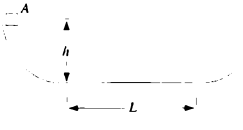


FIGURA 13-19. Problema 2.

3. Una bala de masa 4.54 g se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 2.41 kg en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0.210. La bala se detiene en el bloque que se desplaza 1.83 m. Suponga que el trabajo realizado en él debido a la fricción es 83% de la energía disipada por fricción. *a*) ¿Qué rapidez tiene el bloque inmediatamente después que la bala se detiene dentro de él? *b*) ¿Cuál es su rapidez inicial?
4. Un bloque de 1.34 kg que se desliza por una superficie horizontal choca contra un resorte de constante de fuerza 1.93 N/cm. Lo comprime 4.16 cm de la posición relajada. La fricción entre el bloque y la superficie disipa 117 mJ de energía mecánica, conforme el bloque va deteniéndose. Determine la rapidez del bloque en el momento de la colisión con el resorte.
5. La magnitud de la fuerza de atracción entre el protón de carga positiva y el electrón de carga negativa en el hidrógeno está dada por

$$F = k\frac{e^2}{r^2},$$

donde e es la carga eléctrica del electrón, k es una constante y r es la separación entre el electrón y el protón. Suponga que este último está fijo. Imagine que el electrón se mueve al inicio en un círculo de radio r_1 alrededor del protón y que de repente salta a una órbita circular de radio menor r_2 (véase Fig. 13-20). *a*) Por medio de la segunda ley de Newton calcule el cambio de energía cinética en el electrón. *b*) Usando la relación entre fuerza y energía potencial, determine el cambio de energía potencial del átomo. *c*) ¿Cuánto ha cambiado la energía total del átomo en este proceso? (A menudo esa energía se disipa en forma de radiación.)

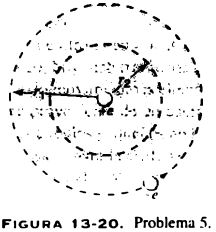


FIGURA 13-20. Problema 5.

6. En la figura 13-21, el cable de un elevador de 4.000 lb se rompe cuando el elevador está detenido en el primer piso, de manera que el fondo está a una distancia d = 12.0 ft arriba de un resorte amortiguador, cuya constante de fuerza es k = 10.000 lb/ft. Un aparato de seguridad sujeta los carriles guía, eliminando 1.000 ft-lb de energía mecánica por cada 1.00 ft que se desplaza el elevador. *a*) Calcule la rapidez del elevador poco antes de chocar con el resorte. *b*) Encuentre la distancia que se comprime este último. *c*) Encuentre la distancia que rebotará el eleva-

dor *d*) Calcule la distancia aproximada que el elevador cubrirá antes de detenerse. ¿Por qué la respuesta no es exacta?

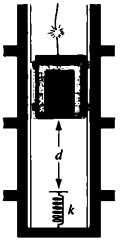


FIGURA 13-21. Problema 6.

7. Un bloque de 10.0 kg se halla originalmente en reposo sobre una mesa sin fricción. Se coloca encima otro de 2.5 kg, y una fuerza de 11.0 N tira del segundo una distancia de 30.0 cm, pero los bloques pueden continuar moviéndose. El coeficiente de fricción entre ellos es $\mu_k = 0.35$. ¿Qué cambio de energía interna experimentan los bloques *a*) entre el inicio cuando están en reposo y el momento en que se suspende la fuerza aplicada; *b*) entre el momento en que se interrumpe y el tiempo en que los dos están en reposo uno respecto a otro?
8. Suponga la reacción A + B → C + D. Demuestre que puede ser una colisión elástica sólo si los cuerpos no cambian.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Un bloque pequeño de masa *m* se halla inicialmente en reposo en el borde de un tazón hemisférico de radio *R*. Partiendo de $\theta = \pi/2$, se desliza hasta el fondo del tazón y sube en el otro lado; pero debido a la energía disipada por fricción no llega al borde antes de volver a resbalar hacia abajo. Grafique numéricamente la posición angular del bloque en función del tiempo. *a*) Como una primera aproximación, resuelva el problema suponiendo que la cantidad de energía disipada es proporcional a la *distancia* total cubierta: $\Delta E_{\text{disipada}} \propto \Delta\theta$. *b*) Para mejorar la aproximación, resuelva el problema suponiendo que la energía disipada también depende del ángulo $\Delta E_{\text{disipada}} \propto \cos\theta\,\Delta\theta$.
2. Suponga que 100 partículas idénticas de 10.0 g están contenidas dentro de un cubo de 1.0 m de lado. Con una hoja de cálculo o con otro medio, utilice un generador de números aleatorios para asignarles las posiciones *x*, *y* y *z*; después asigne al azar los componentes de la velocidad v_x, v_y y v_z (entre −10 y + 10 m/s) a cada una de las 100 partículas. *a*) Calcule la ubicación del centro de masa de las partículas, la energía cinética traslacional del centro, la energía cinética rotacional alrededor del centro y la energía cinética total del sistema. ¿Cómo se relacionan las tres clases de energía? *b*) Repita el proceso con otro conjunto de números aleatorios y prepare un histograma para las tres. En promedio, ¿qué fracción de la energía es interna en este tipo de sistema?

GRAVITACIÓN

Hasta ahora hemos estudiado varias fuerzas: empuje y tracción, fuerzas elásticas, fricción y otras que intervienen cuando un cuerpo entra en contacto con otro. En el presente capítulo vamos a examinar las propiedades de una fuerza muy importante de no contacto, la gravitación, *que es una de las más importantes y (pensamos) universales de la naturaleza. La ley que describe la fuerza gravitacional entre dos cuerpos fue descubierta por Newton en 1665; ha explicado de manera convincente las fuerzas gravitacionales ejercidas sobre los objetos en la Tierra y también el movimiento de los planetas en el sistema solar. Para explicar los efectos en campos gravitacionales fuertes se requiere la moderna teoría de la gravitación, la teoría general de relatividad de Einstein.*

Al estudiar este capítulo debería darse cuenta de que aquí se aplican muchos de los conceptos básicos de la dinámica expuestos en capítulos anteriores. En especial, emplearemos las leyes de fuerza de Newton, la dinámica del movimiento circular, la energía potencial, la conservación de energía y el momento angular.

14-1 ORIGEN DE LA LEY DE GRAVITACIÓN

Dos problemas eran un verdadero enigma, por lo menos en la época de los antiguos griegos: 1) la caída de los cuerpos soltados cerca de la superficie terrestre, y 2) los movimientos de los planetas. Aunque por entonces no había motivos para relacionarlos, hoy sabemos que se deben al efecto de una misma fuerza: la gravitación. De hecho, esta fuerza determina además el movimiento del Sol en nuestra galaxia —la Vía Láctea—, lo mismo que el de la galaxia de nuestro grupo local de galaxias, el del Grupo Local en el Supergrupo Local, y así sucesivamente en todo el universo. En pocas palabras, la fuerza gravitacional, y la ley que la describe, controlan la estructura, el desarrollo y el destino final del universo.

El primer intento serio de explicar los movimientos de los planetas lo realizó Claudio Ptolomeo (siglo II antes de Cristo), quien diseñó un modelo del sistema solar donde los planetas, entre ellos el Sol y la Luna, giraban alrededor de la Tierra. Por desgracia, con el propósito de explicar las complicadas órbitas de los planetas en este marco de referencia geocéntrico, Ptolomeo se vio obligado a introducir epiciclos: un planeta se mueve alrededor de un círculo pequeño cuyo centro lo hace alrededor de otro círculo más grande centrado en la Tierra. Desde luego, hoy rechazaríamos el modelo porque viola la ley de que todo movimiento acelerado debe ser explicado por una fuerza proveniente de un cuerpo de su ambiente; en el centro de los círculos pequeños no hay un cuerpo que genere la fuerza necesaria para la aceleración centrípeta.

No fue sino hasta el siglo XVI cuando Nicolás Copérnico (1473-1543) propuso un modelo heliocéntrico (es decir, centrado en el Sol), donde la Tierra y el resto de los planetas giran alrededor del Sol. Igual que el modelo propuesto por Ptolomeo, el sistema solar de Copérnico todavía se basaba exclusivamente en la geometría porque aún no se conocía el concepto de fuerza. No obstante, representó un innegable avance pues ofreció el marco de referencia correcto a partir del cual se desarrollaría nuestro conocimiento actual del sistema solar.

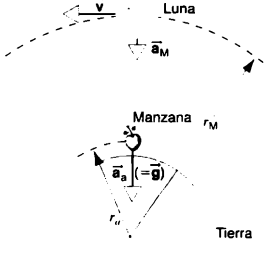
Basándose en un análisis riguroso de los datos observacionales referentes a los movimientos de los planetas, Johannes Kepler (1571-1630) propuso tres leyes (que se explican

en la sección 14-7) que los describen. Sin embargo, eran sólo empíricas, es decir, se limitaban a describir los movimientos sin fundamentarse en las fuerzas. Fue un gran triunfo de la recién inventada ciencia de la mecánica, cuando años después Isaac Newton pudo derivar las leyes de Kepler de sus leyes de la mecánica y formuló la ley de la gravitación. Con este extraordinario avance, pudo utilizar el mismo concepto para explicar el movimiento de los planetas y de los cuerpos que caen cerca de la superficie terrestre.

En 1665, a los 23 años de edad, Newton abandonó la Universidad de Cambridge cuando ésta se cerró debido a la peste. Más tarde escribiría: "Comencé a pensar en la gravedad que se extiende hasta la órbita de la Luna... y comparé la fuerza necesaria para conservarla en su órbita con la fuerza de gravedad en la superficie terrestre, y descubrí que contestaban la pregunta en forma muy satisfactoria". Su amigo William Stukeley escribió que tomó té con Newton bajo los mismos manzanos donde Newton recordaba que se le había ocurrido la idea de la gravitación: "Se debió a la caída de una manzana mientras estaba sentando reflexionando... y así, poco a poco, empezó a aplicar esta propiedad de la gravitación al movimiento de la Tierra y de los cuerpos celestes...".

Ahora, usando los datos modernos veamos cómo Newton podría haber hecho la comparación. La figura 14-1 muestra que la Luna, al describir una órbita circular alrededor de la Tierra, y la manzana, al caer cerca de su superficie, aceleran hacia el centro de la Tierra. La aceleración centrípeta de la Luna ($a_M = v^2/r_M$) puede obtenerse de su rapidez tangencial $v = 2\pi r_M/T$, donde T es el tiempo de una órbita (27.3 d). Usando el valor actual del radio de la órbita lunar (unos 380,000 km) obtenemos $a_M = 0.0027\ \mathrm{m/s^2}$. La aceleración a_a de la manzana es simplemente la aceleración en caída libre g, la razón de estas dos aceleraciones es

$$a_M/a_a = (0.0027\ \mathrm{m/s^2})(9.8\ \mathrm{m/s^2}) = 2.8 \times 10^{-4}.$$



Guiándose por las leyes de Kepler, Newton intentó explicar la diferencia anterior suponiendo que la fuerza gravitacional en estos objetos que produce la aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia respecto al centro de la Tierra. Sirviéndose del valor actual del radio terrestre ($r_a \approx r_E = 6{,}400$ km), su predicción de la razón de las aceleraciones sería

$$a_M/a_a = r_a^2/r_M^2 = (6{,}400\ \mathrm{km})^2/(380{,}000\ \mathrm{km})^2) = 2.8 \times 10^{-4}.$$

En palabras del propio Newton, los dos resultados "dan una respuesta bastante satisfactoria", lo cual significa que la fuerza que causa la caída de la manzana y la fuerza que mantiene a la Luna en su órbita tienen el mismo origen: la gravitación de la Tierra.

Para hacer este cálculo, Newton tuvo que considerar la fuerza gravitacional de la Tierra como si toda su masa estuviera concentrada en su centro, de modo que r_M y r_a se miden del centro de ella (Fig. 14-1). De hecho, esto puede probarse en forma rigurosa (sección 14-5), si suponemos que la Tierra es más o menos esférica (una buena suposición) y que la distribución de su masa puede cambiar con la distancia del centro, pero con una coordenada angular (otra buena suposición, como se aclara en la sección 14-4).

14-2 LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON

Según mencionamos en la sección 5-1, titulada Gravitación, la fuerza que opera entre los cuerpos debida sólo a sus masas es una de las cuatro fuerzas básicas de la física. Actúa en todo el universo: entre cuerpos en la Tierra, donde es débil (como veremos luego) y difícil de medir; entre la Tierra y los cuerpos cercanos, donde es la fuerza que controla nuestra vida; entre las estrellas y las galaxias, donde regula su evolución y su estructura.

Newton fue el primero en proponer una ley de la gravitación basada en la fuerza, que podemos formular en los siguientes términos:

> *Una partícula del universo atrae todas las demás con una fuerza directamente proporcional al producto de su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La dirección de la fuerza sigue la línea que une las partículas.*

La magnitud de la fuerza gravitacional que ejercen, una sobre otra, dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r es

se con g, la aceleración en caída libre en la Tierra, la cual no es universal y tiene otras dimensiones.

La constante gravitacional es un número muy pequeño, lo cual explica por qué normalmente no nos percatamos de la fuerza gravitacional entre los objetos que nos rodean. Por ejemplo, la fuerza entre dos partícula de 1 kg separadas por una distancia de 0.1 m será del orden de 10^{-8} N, más o menos equivalente a una partícula de polvo. No obstante, con aparatos muy sensibles los físicos miden estas fuerzas de atracción entre objetos comunes. Pero en condiciones normales los efectos de esta fuerza se toman significativos, sólo cuando la masa por lo menos de uno de los cuerpos es grande (del tamaño de un planeta).

La ecuación 14-1 se da en la forma de una fuerza de *cuadrados inversos*, porque esta última depende del cuadrado inverso de la distancia. Las fuerzas electromagnéticas también presentan la forma de estas leyes.

Esa ecuación no define ninguna de las tres magnitudes fundamentales (fuerza, masa y distancia) que aparecen en la figura 14-1. En particular, definimos la fuerza y la masa en el Capítulo 3. La fuerza gravitacional no es más que un tipo de fuerza que representa la interacción de una partícula con otra en el ambiente. Como veremos en la siguiente sección, una vez determinado G experimentalmente en un par de cuerpos, es un valor que puede servir después para calcular la fuerza entre otros dos pares cualesquiera.

La fuerza vectorial

La figura 14-2*a* representa la fuerza gravitacional ejercida por dos partículas una sobre otra, que forma una pareja de acción-reacción según la tercera ley de Newton. La primera partícula ejerce una fuerza de atracción $\vec{F}_{21}$ en la segunda a lo largo de la línea que las une; asimismo la segunda partícula ejerce una fuerza $\vec{F}_{12}$ sobre la primera. Las fuerzas siguen direcciones opuestas y siempre tienen la misma magnitud, aunque las dos masas no sean iguales.

Podemos expresar la ley de la gravitación universal en forma vectorial al introducir un *vector unitario* que no tiene unidades ni dimensiones, que tiene una longitud numérica exactamente de 1 y cuya única función consiste en indicar una dirección en el espacio. (Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, que especifican respectivamente las direcciones de los ejes coordenados x, y y z, cumplen funciones parecidas (apéndice H). En el caso de la fuerza gravitacional, decidimos que la dirección del vector unitario sea la de una partícula respecto a otra. Denotamos el vector unitario que apunta a m_1 partiendo de m_2 como $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ (Fig 14-2*b*) y a m_2 partiendo de m_1 como $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ (Fig. 14-2*c*). Podemos expresar estos vectores así

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = \vec{\mathbf{r}}_{12}/r_{12} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{r}}_{21} = \vec{\mathbf{r}}_{21}/r_{21} \qquad (14\text{-}2)$$

donde, por ejemplo, $\vec{r}_{12}$ es el vector de desplazamiento que localiza m_1 respecto a m_2 y r_{12} es su magnitud $|\vec{r}_{12}|$. En la ecuación 14-2 vemos que $|\hat{\mathbf{r}}_{12}| = 1$ y $|\hat{\mathbf{r}}_{21}| = 1$.

En función de los vectores unitarios podemos representar así las fuerzas gravitacionales

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{F}}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}, \qquad (14\text{-}3)$$

como se ve en las figuras 14-2*b* y *c*.

El signo negativo de la ecuación 14-3 muestra que, por ejemplo, $\vec{F}_{12}$ apunta en dirección contraria a $\hat{\mathbf{r}}_{12}$, lo cual indica que la fuerza gravitacional es atractiva: la dirección de $\hat{\mathbf{r}}_{12}$, que es la misma que la del vector desplazamiento $\vec{r}_{12}$, apunta *en otra dirección alejándose de* m_2; en cambio, tratándose de una fuerza de atracción, el vector $\vec{F}_{12}$ apunta hacia m_2, como se aprecia en la figura 14-2*b*. Esta notación es útil cuando un objeto (el Sol, por ejemplo) define el origen de nuestro sistema coordenado. El vector $\vec{r}$ que localiza el otro objeto (por ejemplo, la Tierra) señala *en otra dirección alejándose* del origen, como lo hace el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$; en cambio, en la Tierra la fuerza debida al Sol señala *hacia* el origen.

Al comparar las figuras 14-2*b* y *c*, se ve claramente que $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$, donde las ecuaciones 14-3 muestran que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, verificando así que las fuerzas gravitacionales forman una pareja de acción-reacción.

A menudo tenemos en cuenta la fuerza gravitacional cuando dos o más cuerpos interactúan por ejemplo, la fuerza en la Tierra debida al Sol y a la Luna. En este caso, se calculan la magnitud y la dirección de las fuerzas en el cuerpo debidas unas a otros, empleando primero la ecuación 14-3 y luego la adición vectorial para calcular la fuerza total que ac-

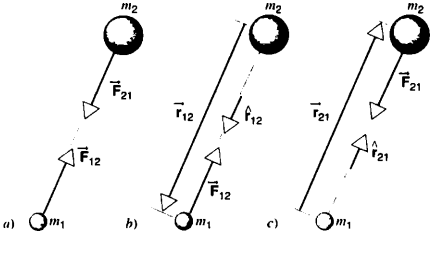


FIGURA 14-2. *a*) Fuerza gravitacional entre dos partículas que forman un par de acción-reacción. *b*) Fuerza gravitacional $\vec{F}_{12}$ ejercida sobre m_1 para m_2 y el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ a m_1 proveniente de m_2. *c*) Fuerza gravitacional $\vec{F}_{21}$ ejercida sobre m_2 para m_1 y vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ para m_2 de m_1.

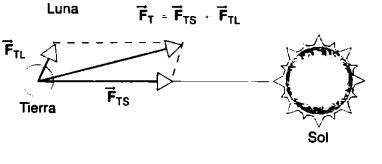


FIGURA 14-3. Fuerza gravitacional en la Tierra debida al Sol y a la Luna en una posición particular. Las distancias no se dan a escala y tampoco los vectores de fuerza (en realidad, F_{TS} es 175 veces más grande que F_{TL}.

túa sobre el cuerpo. La figura 14-3 contiene un ejemplo en el caso de un arreglo particular de Tierra, Sol y Luna. Obtenemos la fuerza de Tierra-Sol $\vec{F}_{TS}$, como si la Luna no existiera y la fuerza Tierra-Luna $\vec{F}_{TL}$ como si el Sol no existiera; sumamos después las fuerzas como vectores y determinamos la fuerza resultante en la Tierra. Este procedimiento se ajusta al *principio de superposición*, según el cual podemos escribir la fuerza neta en el cuerpo X debida a otros N cuerpos como

$$\vec{F}_X = \vec{F}_{X1} + \vec{F}_{X2} + \cdots + \vec{F}_{XN} = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_{Xn}. \quad (14\text{-}4)$$

Es una buena aproximación considerar la Tierra, el Sol y la Luna como partículas cuando se calculan las fuerzas existentes entre ellas, porque su tamaño es pequeño en comparación con las distancias que las separan. Pero si queremos tener en cuenta la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra en un satélite en órbita a 300 km sobre su superficie, no es en absoluto una buena aproximación. Resulta complicado en extremo seguir la ecuación 14-4 y sumar las contribuciones vectoriales hechas a la fuerza en el satélite y debidas a cada partícula en la Tierra. Por fortuna se trata de un procedimiento innecesario. Por medio del cálculo (que Newton desarrolló en parte para este fin) podemos demostrar lo siguiente: en un cuerpo simétrico esféricamente es posible calcular la fuerza gravitacional como si toda la masa está concentrada en una partícula como su centro. Con frecuencia empleamos este resultado importante, que probaremos en la sección 14-5.

PROBLEMA RESUELTO 14-1. Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional que *a*) la Tierra, *b*) la Luna y *c*) el Sol ejercen sobre un melón de masa $m_c = 1.00$ kg en la superficie terrestre.

Solución *a*) La fuerza gravitacional en el melón debida a la Tierra es simplemente el peso de él:

$$F_{mT} = m_c g = (1.00\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 9.8\ \text{N}.$$

b) Para determinar la fuerza debida a la Luna empleamos la ecuación 14-1:

$$F_{mL} = G\frac{m_c m_L}{r_M^2}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.00\ \text{kg})(7.36 \times 10^{22}\ \text{kg})}{(3.82 \times 10^8\ \text{m})^2}$$

$$= 3.36 \times 10^{-5}\ \text{N}.$$

c) Al usar de nuevo la ecuación 14-1 tenemos

$$F_{cS} = G\frac{m_c m_S}{r_S^2}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.00\ \text{kg})(1.99 \times 10^{30}\ \text{kg})}{(1.50 \times 10^{11}\ \text{m})^2}$$

$$= 5.90 \times 10^{-3}\ \text{N}.$$

Claro que la Tierra es la fuerza dominante en el comportamiento de los objetos en su superficie. Nótese que, en un objeto situado en la superficie, la fuerza debida al Sol es mucho mayor que la de la Luna. (Sin embargo, el efecto de marea que tiene la Luna en los mares es mucho mayor que el del Sol. En el problema 5 se explica este efecto.)

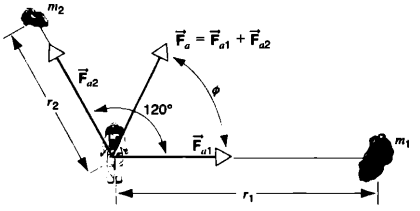


FIGURA 14-4. Problema resuelto 14-2.

PROBLEMA RESUELTO 14-2. Un astronauta con el traje adecuado $m_a = 105$ kg flota por el cinturón de asteroides en una expedición de minería. En cierto momento se halla cerca de dos asteroides de masa $m_1 = 346$ kg ($r_1 = 215$ m) y $m_2 = 184$ kg ($r_2 = 142$ m), como se observa en la figura 14-4. Las líneas que lo conectan a los asteroides forman un ángulo de 120°. En ese instante, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional en el astronauta debido a los dos asteroides? Suponga que él y los asteroides pueden considerarse partículas.

Solución La ecuación 14-1 contiene las magnitudes de las dos fuerzas:

$$F_{a1} = G\frac{m_a m_1}{r_1^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(105\ \text{kg})(346\ \text{kg})}{(215\ \text{m})^2}$$

$$= 5.24 \times 10^{-11}\ \text{N} = 52.4\ \text{pN},$$

$$F_{a2} = G\frac{m_a m_2}{r_2^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(105\ \text{kg})(184\ \text{kg})}{(142\ \text{m})^2}$$

$$= 6.39 \times 10^{-11}\ \text{N} = 63.9\ \text{pN}.$$

Estas dos fuerzas aparecen en la figura 14-4. Con uno de los métodos de componentes o con el del paralelogramo podemos sumar los dos vectores y descubrimos que la magnitud de la fuerza total en el astronauta es

$$F_a = 5.80 \times 10^{-11}\ \text{N} = 58.9\ \text{pN}$$

y su dirección es la que aparece en la figura 14-4($\phi = 69.7°$)

14-3 LA CONSTANTE GRAVITACIONAL G

Parece fácil determinar el valor de G. Lo único que necesitamos hacer es medir la fuerza gravitacional F ejercida por un cuerpo de masa conocida m_1 en un segundo cuerpo de masa conocida m_2 separados por una distancia conocida r. Después podemos calcular G a partir de la ecuación 14-1.

Un sistema a gran escala como el de la Tierra y la Luna o el de la Tierra y el Sol no sirven para determinar G. Las distancias son lo bastante grandes para que los objetos puedan considerarse aproximadamente masas puntuales, pero los valores de sus masas no se determinan de modo independiente. De hecho, como veremos luego, las masas de estos cuerpos se calculan por medio del valor de G.

Debemos, pues, recurrir a una medición a escala pequeña donde utilizamos dos objetos de laboratorio de masa conocida y medimos la fuerza entre ellos. La fuerza es débil y hay

que colocar las masas cerca unas de otras para que la fuerza sea lo más grande posible. Cuando lo hacemos, es posible dejar de considerar las masas como partículas puntuales y no se aplica la ecuación 14-1. Pero hay un caso especial en que podemos emplear la ecuación 14-1 con objetos grandes. Como se probará en la sección 14-5, en las distribuciones de masas esféricas el objeto puede considerarse una masa puntual concentrada en su centro. *No* se trata de una aproximación, sino de una relación exacta.

En 1798, Henry Cavendish realizó la primera determinación de G en un laboratorio, partiendo de la fuerza entre masas esféricas situadas a corta distancia. Se sirvió de un método basado en el equilibrio de torsión, como se aprecia en la figura 14-5. Dos pequeñas bolas de plomo, con una masa m, están sujetas a los extremos de una varilla ligera. Con su eje horizontal, esta pesa rígida se halla suspendida de una delgada fibra vertical. Dos grandes bolas de plomo y de masa M se ponen cerca de los extremos de la pesa, en lados opuestos. Cuando las grandes masas se encuentran en las posiciones A, atraen las masas pequeñas conforme a la ley de gravitación; se ejerce un par sobre la pesa y lo hace girar en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, como se ve desde arriba. La varilla alcanza un posición de equilibrio bajo las acciones contrarias del par gravitacional ejercido por las masas M y por el par restaurador ejercido por la fibra torcida. Cuando las masas grandes se hallan en las posiciones B, la pesa gira en dirección de las manecillas del reloj y alcanza una nueva posición de equilibrio. El ángulo 2θ, que gira a la fibra cuando se mueven las bolas de una posición (AA) a otra (BB), se mide observando la deflexión de un haz luminoso que se refleja contra un pequeño espejo sujetado a la varilla. El par y la fuerza gravitacional pueden calcularse partiendo de θ y de la constante torsional de la fibra (que se obtienen midiendo su periodo de oscilación —sección 17-5).

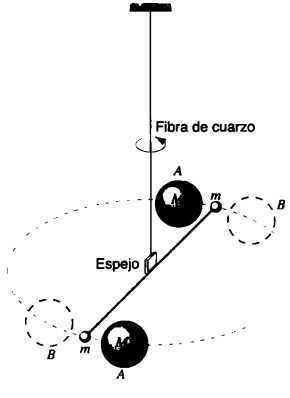


FIGURA 14-5. Vista esquemática del aparato con que Henry Cavendish midió en 1798 la constante gravitacional G. Las esferas grandes de masa M, mostradas en el lugar AA, también pueden moverse al lugar BB.

Se calcula G cuando se conocen los valores de las masas m y M, así como la separación de sus centros.

Los datos originales de Cavendish arrojaron un valor de G de 6.75×10^{-11} N · m²/kg². En casi 200 años desde esa época, muchas veces las mismas técnicas básicas que emplean el equilibrio de torsión se siguen aplicando para volver a obtener esta medición; se obtiene así el valor actualmente aceptado de G,

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2},$$

con una incertidumbre de $\pm\ 0.010 \times 10^{-11}$ N · m²/kg², es decir, cerca de ± 0.15%. Esta precisión no es impresionante frente a los resultados de medir otras constantes físicas; por ejemplo, la masa del electrón se ha medido con una precisión de ± 0.000008% aproximadamente. En los experimentos de laboratorio no es fácil mejorar de modo sustancial la exactitud del valor medido de G debido a su pequeña magnitud y al valor comparativamente pequeño de la fuerza entre los dos objetos. Si se emplean dos esferas de plomo con 10 cm de diámetro (y 6 kg de masa), la fuerza gravitacional máxima entre ellas cuando están lo más cerca posible es de unos 2×10^{-7} N, lo cual corresponde aproximadamente al peso de un trozo de papel de superficie 1 mm².

Esta dificultad al medir G es desafortunada, porque la gravitación es sumamente importante para las teorías referentes al origen y la estructura del universo. Por ejemplo, nos gustaría saber si G es en verdad una constante. ¿Cambia con el tiempo? ¿Depende del estado físico o químico de las masas? ¿Depende de su temperatura? A pesar de muchas investigaciones experimentales, hasta la fecha tales variaciones no se han confirmado de manera inequívoca, aunque continúan perfeccionándose y mejorándose las medidas, así como las pruebas experimentales.*

La masa de la Tierra puede determinarse mediante la ley de gravitación universal y el valor de G calculado partiendo del experimento de Cavendish. Por tal razón se dice que Cavendish fue el primero en "pesar" la Tierra. (En realidad, el título de la obra donde describió su experimento no se refería a la medición de G, sino a la determinación de la densidad de la Tierra basándose en su peso y su volumen.) Considere la Tierra, de masa M_T, y un objeto de masa m en su superficie. La fuerza de atracción está dada por

$$F = mg_0 \quad \text{y} \quad F = \frac{GmM_T}{R_T^2}.$$

Aquí R_T es el radio de la Tierra, que es la separación entre los dos cuerpos, y g_0 es la aceleración en caída libre sobre la superficie terrestre debida exclusivamente a la fuerza gravitacional (consúltese la siguiente sección). La combinación de estas dos ecuaciones nos da

$$M_T = \frac{g_0 R_T^2}{G} = \frac{(9.83\ \mathrm{m/s^2})(6.37 \times 10^6\ \mathrm{m})^2}{6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}}$$
$$= 5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

* Una explicación completa de las mediciones de G se da en "The Newtonian Gravitational Constant: Recent Measurements and Related Studies" de George T. Gillies, *Reports on Progress in Physics*, vol. 60, 1997, p. 151-225.

14-4 GRAVITACIÓN CERCA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE

Supongamos por ahora que la Tierra es esférica y que su densidad depende sólo de la distancia radial con su centro. Entonces, según la ecuación 14-1, la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa en una partícula de masa m, situada en un punto externo a una distancia r del centro de la Tierra, puede escribirse así

$$F = G\frac{M_T m}{r^2},$$

donde M_T es la masa de la Tierra. Con base en la segunda ley de Newton, la fuerza gravitacional también puede escribirse como

$$F = mg_0.$$

Aquí g_0 es la aceleración en caída libre debida exclusivamente a la atracción gravitacional de la Tierra. Si combinamos las dos ecuaciones anteriores obtendremos

$$g_0 = \frac{GM_T}{r^2}. \qquad (14\text{-}5)$$

La tabla 14-1 contiene algunos valores de g_0 en varias altitudes arriba de la superficie terrestre, que se calcularon con esta ecuación. Nótese que, contrario a la impresión de que la gravedad se reduce a cero en un satélite en órbita, obtenemos $g_0 = 8.7\ \text{m/s}^2$ a altitudes típicas de naves espaciales.

La Tierra real se distingue de nuestro modelo en tres aspectos.

1. *La corteza de la Tierra no es uniforme.* Se observan variaciones de la densidad local en todas partes. La medición exacta de las variantes en la aceleración en caída libre suministra información de gran utilidad, por ejemplo, en la búsqueda de petróleo.

2. *La Tierra no es una esfera.* Es más o menos un elipsoide, aplanado en los polos y con protuberancia en el ecuador. Su radio ecuatorial es mayor que su radio polar en 21 km. En consecuencia, un punto en los polos está más cerca del núcleo denso de la Tierra que un punto en el ecuador. Cabe suponer que la aceleración en caída libre aumenta al avanzar, en el nivel del mar, del ecuador hacia los polos. La figura 14-6 muestra que esto es lo que efectivamente ocurre. Los valores medidos de g en la figura incluyen el efecto de la protuberancia del ecuador y los resultantes de la rotación terrestre.

3. *La Tierra gira.* En la sección 3-7 definimos el peso como una medida de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce

TABLA 14-1 Variaciones de g_0 con la altitud

Altitud (km)	*Ubicación*	g_0 (m/s^2)
0	Superficie terrestre	9.83
10	Altitud de autonomía de vuelo	9.80
100	Parte superior de la atmósfera	9.53
400	Órbita de nave espacial	8.70
35,700	Órbita de satélite de comunicaciones	0.225
380,000	Órbita lunar	0.0027

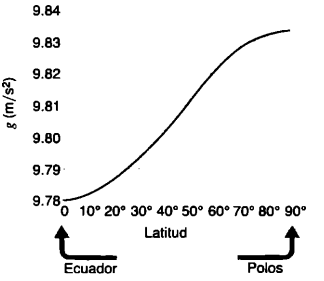


FIGURA 14-6. Variación de g con la latitud al nivel del mar. Cerca del 65% de la variación se debe a la rotación de la Tierra; el 35% restante proviene de la forma ligeramente aplanada de la Tierra.

sobre un cuerpo y explicamos cómo pueden calcularse leyendo una báscula de plataforma donde descanse el cuerpo. La lectura es igual a la magnitud de la fuerza gravitacional de la Tierra *sólo* si la superficie es un marco inercial, lo cual no es del todo cierto en este caso. Veamos ahora qué efecto tiene su rotación en la lectura de la báscula.

La figura 14-7*a* muestra la Tierra en rotación partiendo de un marco inercial colocado en el espacio arriba del polo norte. Un caja de masa m se halla en una báscula de plataforma en el ecuador. Para un observador local la lectura de la báscula indica el peso del cuerpo mg, donde g es el valor local medido de la aceleración en caída libre.

Debido a la rotación de la Tierra, la caja describe un movimiento circular uniforme con radio R_T y con un periodo de rotación T (24 horas). Como señalamos en la sección 4-5, para que un cuerpo presente un movimiento circular uniforme en el radio r y una rapidez tangencial v, es preciso que la aceleración neta (la aceleración centrípeta) tenga una magnitud $a_c = v^2/r$.

La figura 14-7*b* contiene un diagrama de cuerpo libre de la caja. Hay una fuerza ascendente $\vec{N}$ en la caja debido a la

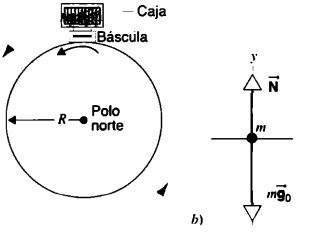


FIGURA 14-7. *a*) Caja situada en la Tierra en rotación, que descansa sobre una báscula de plataforma en el ecuador. La vista se realiza en el eje terrestre de rotación, mirando abajo en el polo norte. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la caja. Ésta presenta movimiento circular uniforme y, por tanto, acelera hacia el centro de la Tierra.

báscula de plataforma (de igual magnitud a la lectura de la escala mg), y la fuerza gravitacional descendente es $m\bar{g}_0$. Suponemos que el eje y es positivo ascendente (donde ascendente indica la dirección radial hacia afuera en el lugar de la caja), así que $\Sigma F_y = N - mg_0$. Entonces la segunda ley de Newton (puntualizando que la aceleración hacia el centro del círculo sigue la dirección negativa y según nuestra elección del eje) nos da

$$N - mg_0 = -ma_c = -mv^2/R_T = -m\omega^2/R_T,$$

donde $\omega = v/R_T = 2\pi/T$ es la rapidez angular de la rotación terrestre. Podemos escribir esta expresión como

$$N = m(g_0 - \omega^2 R_T). \qquad (14\text{-}6)$$

Si suponemos que la magnitud de la fuerza normal N ejercida por la báscula es el peso mg del objeto, obtendremos

$$g_0 - g = \omega^2 R_T = 0.034 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración en caída libre g en el ecuador de la Tierra en rotación es más pequeña que la aceleración en caída libre g_0 apenas en 0.034/9.8 (0.35%) de una Tierra que no gire. En forma equivalente decimos que mg (el peso de un objeto) es menor que mg_0 (la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre él) por una cantidad aproximadamente igual a $m\omega^2 R_T$. Este efecto disminuye al desplazarnos al norte o al sur del ecuador y la diferencia $g_0 - g$ desaparece en los polos.

Como veremos luego en este capítulo, en un satélite en órbita a una altura h arriba de la superficie terrestre y, por tanto, a una distancia $r = R_T + h$ del centro de la Tierra, ω y r están relacionadas de modo que $\omega^2 r = GM_T/r^2$, que es simplemente g_0 como se definió en la ecuación 14-5. Entonces la ecuación 14-6 da $N = 0$, que explica la descripción habitual de los astronautas en órbita como "ingrávidos", aunque $g_0 \neq 0$ para ellos (la fuerza gravitacional de la Tierra no deja de atraerlos).

PROBLEMA RESUELTO 14-3. *a*) Una estrella de neutrones es una estrella colapsada de densidad muy grande. El pulsar centelleante de la nebulosa Cáncer es el ejemplo mejor conocido de muchos. Supongamos una estrella de neutrones con una masa M igual a la del Sol, 1.99×10^{30} kg, y con un radio R de 12 km. ¿Cuál es la aceleración en caída libre sobre su superficie? Ignore los efectos de la rotación. *b*) El asteroide Ceres tiene una masa de 1.2×10^{21} kg y un radio de 470 km. ¿Cuál es la aceleración en caída libre sobre su superficie?

Solución *a*) Con base en la ecuación 14-5 tenemos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30}\ \text{kg})}{(12{,}000\ \text{m})^2}$$

$$= 9.2 \times 10^{11}\ \text{m/s}^2.$$

Aunque los pulsares giran con extrema rapidez, los efectos rotacionales influyen muy poco en el valor de g a causa de su tamaño pequeño. *b*) En el caso del asteroide Ceres tenemos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.2 \times 10^{21}\ \text{kg})}{(4.7 \times 10^5\ \text{m})^2}$$

$$= 0.36\ \text{m/s}^2.$$

Se advierte un profundo contraste entre las fuerzas gravitacionales en la superficie de estos dos cuerpos.

14-5 LOS DOS TEOREMAS DE CASCARONES

Al calcular la fuerza gravitacional ejercida por un cuerpo como la Tierra o el Sol en otro, resultaría demasiado complicado explicar las interacciones de todos los pares de partículas en ellos. Por fortuna, podemos utilizar dos *teoremas de cascarones* que simplifican el análisis de la fuerza gravitacional en ciertos casos.

Consideramos sólo cuerpos donde la distribución de la masa sea *simétricamente esférica*. Es decir, la densidad puede cambiar con el radio, pero en cualquier radio es uniforme en un cascarón delgado. Con mucha aproximación la Tierra y el Sol presentan simetría esférica. En ambos cuerpos la densidad es grande cerca del centro y va disminuyendo hacia la superficie. Los cascarones delgados cerca del centro contienen material de mayor densidad que los que se hallan cerca de la superficie, pero dentro de ellos la densidad posee el mismo valor en todos los puntos.

Con su ley de la gravitación universal y con los recién desarrollados métodos de cálculo, Newton formuló dos teoremas que se aplican a la fuerza gravitacional ejercida por un delgado cascarón esférico de densidad uniforme.

Teorema de capas núm. 1:
Un cascarón con densidad uniforme atrae una partícula externa como si toda la masa del cascarón estuviera concentrada en su centro.

Teorema de capas núm. 2:
Un cascarón esférico con densidad uniforme no ejerce fuerza gravitacional sobre una partícula situada en cualquier punto de su interior.

Puede pensarse que un cuerpo de simetría esférica como la Tierra se compone de una serie de cascarones esféricos delgados con densidad uniforme. Al calcular la fuerza de una partícula en un punto más allá del radio terrestre, los cascarones pueden reemplazarse por una masa equivalente en el centro de la Tierra; por tanto, toda la Tierra se comporta como si fuera una masa puntual localizada en su centro. Por tanto, un corolario del teorema núm. 1 es el siguiente: *Un cuerpo de simetría esférica atrae partículas de afuera como si su masa se concentrara en el centro.*

La importancia del teorema núm. 2 se capta imaginando un túnel perforado a lo largo del diámetro terrestre. A medida que bajamos a él, las partes de la Tierra fuera del radio no ejercen fuerza gravitacional sobre nosotros. Dicho de otra manera, sentimos únicamente el efecto de la parte de la masa terrestre en el interior de una esfera cuyo radio es nuestra distancia del centro de la Tierra. Esta consecuencia del teorema núm. 2 se tiene en cuenta en el problema resuelto 14-4.

Los teoremas de cascarones se aplican sólo con la fuerza del cuadrado inverso. No se aplicarían si la fuerza gravitacional dependiera de la separación r de otra potencia que no fuera -2. En consecuencia, no sería posible reemplazar un cuerpo de simetría esférica por su masa puntual equivalente. De hecho, el segundo teorema ofrece una forma elegante de

probar la ley de cuadrados inversos: colocamos una pequeña masa de prueba en varios lugares dentro de una cascarón esférico y determinamos si la fuerza gravitacional en la masa de prueba debida al cascarón es cero en todo el interior. Tales mediciones efectuadas con la mayor precisión posible no han demostrado desviación alguna con la ley newtoniana. Si escribimos la dependencia respecto a la separación entre las masas como $1/r^{2+\delta}$, —donde $\delta = 0$— en la teoría de Newton, los experimentos habrán fijado un límite superior en δ de 10^{-4}. En cambio, experimentos similares diseñados para probar la ley de cuadrados inversos en las fuerzas eléctricas establecen un límite superior en δ aproximadamente de 10^{-16}.

Pruebas de los teoremas de cascarones (Opcional)

Para probar los teoremas de cascarones se requieren los métodos del cálculo integral. Queremos calcular la fuerza que un cascarón esférico delgado de densidad uniforme ejerce sobre una masa puntual situada fuera o dentro de ella. Nuestra técnica consistirá en imaginar que el cascarón se parte en dos anillos delgados. Determinamos la fuerza ejercida sobre la masa puntual por un anillo arbitrario y luego sumamos (por integración) las fuerzas ejercidas por los anillos, y así obtenemos la fuerza total.

La figura 14-8 contiene un cascarón delgado y el anillo que vamos a considerar. El cascarón tiene una masa total M, un espesor t y una densidad uniforme ρ (masa por unidad de volumen). Una masa puntual m se encuentra en el punto P, a una distancia r del centro del cascarón (punto O). Nuestra meta es calcular la fuerza ejercida en m primero por el anillo y luego por el cascarón entero.

Consideremos el anillo de la figura. Si es muy delgado, todas sus partículas estarán a una distancia x de m. Una partícula en el punto A ejerce una fuerza $\vec{F}_A$ sobre m y una partícula de igual masa en B, en el lado opuesto del anillo, ejerce una fuerza $\vec{F}_B$. Las dos fuerzas poseen igual magnitud y su resultante debe hallarse en la línea PO. Esto se aplicará también a todos los pares de partículas situados diametralmente opuestos en el anillo, así que la fuerza neta ejercida sobre m por el anillo ha de darse en la línea PO (el eje de simetría).

Supongamos un elemento de masa dm_A en el punto A. El componente axial (a lo largo de PO) de la fuerza que este elemento de masa ejerce sobre m es

$$dF_A = G\frac{m\,dm_A}{x^2}\cos\alpha,$$

donde el factor $\cos\alpha$ da el componente axial de la fuerza. Al sumar las contribuciones de todos los elementos de masa en el anillo se obtiene la fuerza total dF que el anillo ejerce sobre m:

$$dF = dF_A + dF_B + \cdots = \frac{Gm}{x^2}(\cos\alpha)(dm_A + dm_B + \cdots)$$

o

$$dF = \frac{Gm\,dM}{x^2}\cos\alpha, \qquad (14\text{-}7)$$

donde dM ($= dm_A + dm_B + \cdots$) es la masa total del anillo.

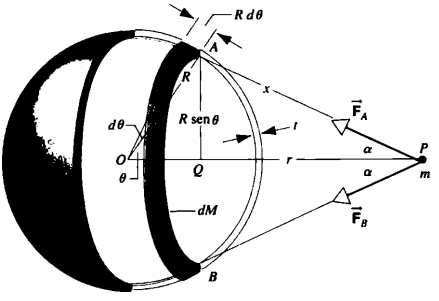


FIGURA 14-8. Atracción gravitacional de una sección de un cascarón esférico de materia en una partícula de masa m en P.

Ahora debemos expresar dM en función de las dimensiones geométricas del anillo. Primero determinamos su volumen dV. Imagine que el anillo se corta y se coloca extendido para que forme un sólido rectangular de altura t (su espesor), de ancho $R\,d\theta$ y de longitud 2π (R sen θ). Por tanto, el volumen es $dV = t(R\,d\theta)(2\pi R \text{ sen } \theta)$. La masa de este anillo es $dM = \rho\,dV$, o

$$dM = 2\pi\rho R^2 \text{ sen } \theta\,d\theta. \qquad (14\text{-}8)$$

Finalmente hay que escoger una variable para la integración. Entre las tres variables de la figura 14-8, (x, α y θ), optamos por eliminar α y θ, dejando x como la única variable sobre la cual podemos planear la integración. En la figura vemos que $PQ = x\cos\alpha$, y también que $PQ = r - R\cos\theta$, así que

$$\cos\alpha = \frac{r - R\cos\theta}{x}. \qquad (14\text{-}9)$$

Al aplicar la ley de cosenos al triángulo AOP, obtenemos $x^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$ o

$$R\cos\theta = \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}. \qquad (14\text{-}10)$$

Ahora introducimos la ecuación 14-10 en la ecuación 14-9 y luego en la ecuación 14-7 sustituimos por el resultado de $\cos\alpha$ en la ecuación 14-7 todavía no eliminamos todas las variables con excepción de x, porque la ecuación 14-8 indica que dM depende de θ. Si queremos eliminar esta variable, hay que diferenciar la ecuación 14-10 y encontrar

$$\text{sen } \theta\,d\theta = \frac{x}{rR}\,dx. \qquad (14\text{-}11)$$

Podemos emplear la ecuación 14-11 para eliminar θ en la ecuación 14-8 y sustituir después el resultado de dM en la ecuación 14-7. El resultado es

$$dF = \frac{\pi Gt\rho mR}{r^2}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx. \qquad (14\text{-}12)$$

Ésta es la fuerza ejercida por el anillo circular dM sobre la partícula m en P.

Si queremos calcular la fuerza total en m debida al cascarón entero, hay que sumar los efectos debidos a todos los ani-

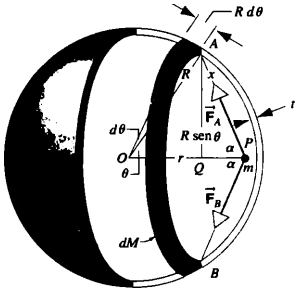


FIGURA 14-9. Atracción gravitacional de una sección de un cascarón esférico de materia en una partícula de masa m, en el punto P, dentro del cascarón.

llos en que imaginamos que se parte la capa. Esto requiere una integral en x, que fluctúa entre $r - R$ y $r + R$:

$$F = \int dF = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx.$$

Es fácil evaluar la integral y obtener el valor $4R$. Entonces la fuerza se convierte en

$$F = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2}(4R) = G\frac{mM}{r^2}, \qquad (14\text{-}13)$$

donde $M = 4\pi R^2 t\rho$ es la masa total del cascarón. La ecuación 14-13 es exactamente la expresión de la fuerza que la partícula de masa M situada en el centro de la capa ejercería sobre la partícula de masa m ubicada en P. Con esto se prueba el primer teorema de la capa.

La prueba del segundo teorema se basa en la geometría de la figura 14-9, ahora con el punto P dentro de la capa. El desarrollo es exactamente el mismo hasta el último paso, sólo que ahora el límite inferior de la integral es $R - r$ en vez de $r - R$. Este cambio pequeño hace que el valor de la integral sea cero y, por tanto, $F = 0$, lo cual prueba el segundo teorema del cascarón. (En el problema 17 se ofrece otro método de demostrar el segundo teorema.)

Las pruebas anteriores se aplican sólo a la geometría esférica y cuando la densidad del cascarón es uniforme. Puede aplicarse a una esfera sólida aunque la densidad cambie de un cascarón al siguiente, con tal que permanezca uniforme en todos. ■

PROBLEMA RESUELTO 14-4. Supóngase que pudiera cavarse un túnel a través de la Tierra de un lado a otro sobre un diámetro, como se ve en la figura 14-10. En la superficie se deja caer del reposo una partícula de masa m en el túnel. *a)* ¿Qué fuerza hay en la partícula cuando se encuentra a una distancia r del centro? *b)* ¿Qué velocidad tiene cuando está a una distancia r del centro? Evalúe la rapidez en $r = 0$. No tenga en cuenta las fuerzas de fricción y suponga que la Tierra posee una densidad uniforme.

Solución *a)* A partir del teorema núm. 2 concluimos que la fuerza gravitacional en la partícula se debe exclusivamente a la porción de la Tierra que se halla dentro de la esfera de radio r; a partir del teorema núm. 1 del cascarón concluimos que es posible suponer que la masa está concentrada en el centro de la Tierra. Sea M la masa dentro de

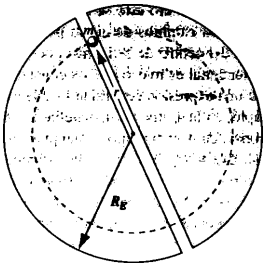


FIGURA 14-10. Problema resuelto 14-4. Una partícula se mueve en un túnel a través de la Tierra.

la esfera de radio r y sea M_T la masa total de la Tierra (de radio R_T). Entonces la fracción de la masa hasta el radio interior r es igual que la fracción del volumen en el radio interior de r (esto sucede sólo si la densidad es uniforme, como hemos supuesto). Por tanto,

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \quad \text{o} \quad M = M_T \frac{r^3}{R_T^3}.$$

Si consideramos que esta masa está concentrada en el centro, descubrimos que la fuerza gravitacional en la masa m es proporcional a r:

$$F = G\frac{mM}{r^2} = G\frac{mM_T r^3}{r^2 R_T^3} = \frac{GmM_T}{R_T^3} r.$$

Si $\vec{r}$ es el vector del centro de la Tierra a m, en la ecuación 14-3 observamos que la fuerza $\vec{F}$ que opera sobre la partícula sigue una dirección contraria a $\vec{r}$; por tanto, podemos escribir $\vec{F} = -(GmM_T/R_T^3)\vec{r}$ para la forma vectorial de la ley de fuerzas. Con el signo menos, la forma de la fuerza se parece mucho a la del resorte, $F = -kx$. *b)* Dada la semejanza con la fuerza del resorte, podemos representar la energía potencial U del sistema compuesto por la Tierra y la partícula que cae como $\frac{1}{2}kr^2$, tomando $U = 0$ en el centro de la Tierra. Aquí k es la constante en la ley de fuerzas: $k = GmM_T/R_T^3$. Al aplicar la conservación de la energía en la superficie y en el radio r, tenemos $K_s + U_s = K_r + U_r$ o $0 + \frac{1}{2}kR_T^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2$. Resolviendo para v, tenemos

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(R_T^2 - r^2)} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3}(R_T^2 - r^2)}.$$

En el centro ($r = 0$) esto tiene el valor

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6.37 \times 10^6\ \mathrm{m})}}$$

$$= 7.91 \times 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

14-6 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Al analizar el movimiento de planetas y satélites, a menudo es más fácil e informativo utilizar la energía que la fuerza. En la presente sección evaluaremos la energía potencial de un sistema formado por dos cuerpos que interactúan a través de la fuerza gravitacional. En el capítulo 12 determinamos el cambio de la energía potencial, debido a la gravedad, en un cuerpo que se desplaza a una altura y cerca de la superficie terrestre:

$\Delta U = mgy$ (Ec. 12.9). Pero esto se aplica sólo cerca de la superficie, donde (con cambios de altura pequeños comparados con la distancia del centro de la Tierra) podemos suponer que la fuerza gravitacional es más o menos constante. Aquí queremos encontrar una expresión general aplicable a todos los lugares; por ejemplo, en la altitud de un satélite en órbita.

La diferencia de la energía potencial puede obtenerse de la ecuación 12-4: $\Delta U = U_b - U_a = -W_{ab}$, donde W_{ab} es el trabajo efectuado por la fuerza cuando el sistema pasa de la posición a a la posición b. No obstante, esta ecuación se aplica *sólo* si la fuerza es conservativa. ¿Lo es la fuerza gravitacional?

La figura 14-11 muestra una partícula de masa m que se mueve en una región donde una partícula de masa M ejerce una fuerza gravitacional. La partícula m se traslada de a a b siguiendo diversas trayectorias: trayectoria 1(aA), trayectoria 2 (aBb) y trayectoria 3 ($aCDEFGHb$). Las trayectorias se componen de segmentos rectos en un radio y de segmentos curvos en arcos de círculos centrados en M. En cada segmento curvo como aC, $\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ con un desplazamiento pequeño $d\vec{s}$ porque $\vec{F}$ es perpendicular a $d\vec{s}$. Por tanto, para el trabajo hecho por la fuerza gravitacional en la trayectoria 1, tenemos

$$W_1 = W_{aA} + W_{Ab} = W_{aA} = \int_{r_a}^{r_A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

donde el último paso se sigue porque $r_A = r_b$. Asimismo,

$$W_2 = W_{aB} + W_{Bb} = W_{Bb} = \int_{r_B}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

con $r_B = r_a$. Finalmente, en la trayectoria 3,

$$\begin{aligned} W_3 &= W_{aC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EF} + W_{FG} + W_{GH} + W_{Hb} \\ &= W_{CD} + W_{EF} + W_{GH} \\ &= \int_{r_C}^{r_D} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_E}^{r_F} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_G}^{r_H} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{r_a}^{r_D} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_D}^{r_F} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{r_F}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \end{aligned}$$

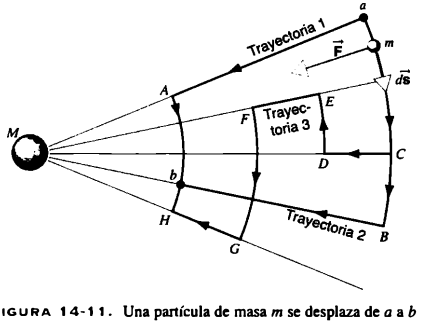


FIGURA 14-11. Una partícula de masa m se desplaza de a a b en tres trayectorias diferentes. Una partícula de masa M ejerce una fuerza gravitacional $\vec{F}$ sobre m.

donde hemos aplicado las reglas de cálculo para combinar las integrales con límites superiores e inferiores idénticos.

En el cálculo anterior es evidente que $W_1 = W_2 = W_3$, y el lector debería convencerse (a sí mismo) de que *cualquier* trayectoria de a a b puede representarse como una combinación de esos segmentos radiales y tangenciales y, por tanto, se obtendrá el mismo valor del trabajo. Claro que éste no depende de la trayectoria y que la fuerza gravitacional es conservativa.

Cálculo de la energía potencial

Una vez probado que la fuerza gravitacional es conservativa, podemos determinar la energía potencial. La figura 14-12 muestra una partícula de masa m que se traslada de a a b en una trayectoria radial. La partícula de masa M, que según suponemos se halla en reposo en el origen, ejerce una fuerza gravitacional en m. El vector $\vec{r}$ localiza la posición m respecto a M en cualquier momento. Al pasar m de a a B, el trabajo efectuado en m por la fuerza gravitacional es

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_a^b F\,dr \\ &= -\int_{r_a}^{r_b} \frac{GMm}{r^2}\,dr = -GMm \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} \\ &= -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_a}^{r_b} = GMm\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right). \end{aligned} \tag{14-14}$$

El signo negativo en la primera línea de la ecuación se debe a que la fuerza (de atracción) $\vec{F}$ y el vector radial infinitesimal $d\vec{r}$ apuntan en dirección contraria. La ecuación 14-14 indica que, cuando $r_b > r_a$ (como en la figura 14-12), el trabajo W_{ab} es negativo, como se esperaba. Sin embargo, también podemos demostrar que la ecuación 14-14 se aplica cuando m se dirige hacia adentro desde el punto a hasta otro punto b, es decir, si $r_a > r_b$, la fuerza y el desplazamiento siguen la misma dirección y el trabajo es positivo, lo cual concuerda con la ecuación 14-14.

Al aplicar la ecuación 12-4 ($\Delta U = -W_{ab}$), podemos encontrar el cambio de la energía potencial del sistema a medida que m se desplaza entre los puntos a y b

$$\Delta U = U_b - U_a = -W_{ab} = GMm\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right). \tag{14-15}$$

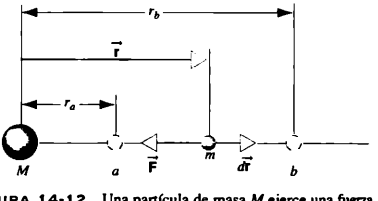


FIGURA 14-12. Una partícula de masa M ejerce una fuerza gravitacional $\vec{F}$ sobre una partícula de masa m que se desplaza de a a b.

Si m se mueve hacia afuera de a a b, el cambio de la energía potencial es positivo ($U_b > U_a$). Es decir, si la partícula cruza el punto a con cierta energía cinética K_a, al dirigirse a b su energía potencial gravitacional *aumenta* al reducirse su energía cinética ($K_b < K_a$). Por el contrario, si se desplaza hacia el interior, su energía potencial se reduce y crece su energía cinética.

En vez de *diferencias* en la energía potencial, podemos considerar el valor de ella como un punto único si definimos un punto de referencia. Decidimos que la posición de referencia sea una separación infinita de partículas, y definimos la energía potencial como cero esa posición. Evaluemos la ecuación 14-15 cuando $r_b = \infty$ y $U_b = 0$. Si a representa un punto arbitrario donde la separación entre las partículas es r, la ecuación 14-15 se convierte en

$$U(\infty) - U(r) = GMm\left(\frac{1}{r} - 0\right) \qquad (14\text{-}16)$$

o

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \qquad (14\text{-}17)$$

La ecuación 14-17 muestra que, con esta selección de la posición de referencia, la energía potencial es negativa en toda separación finita y que crece hacia cero al aumentar la separación (lo cual concuerda con nuestra explicación del signo de ΔU después de la ecuación 14-15). Esto se debe a que la fuerza gravitacional atrae: conforme m se mueve hacia afuera de la separación r al infinito, el trabajo realizado en ella por la fuerza gravitacional es negativo, $\Delta U = U(\infty) - U(r)$ es positivo, y por tanto $U(r)$ es negativa, en concordancia con la ecuación 14-17.

La ecuación 14-17 muestra que la energía potencial es una propiedad del *sistema* formado por dos partículas M y m y no de uno de los dos cuerpos. La energía potencial cambia cuando se desplaza M o m; la fuerza gravitacional de una actúa sobre la otra. Tampoco conviene asignar una parte de la energía potencial a m y otra a M. Pese a ello, a menudo hablamos de la energía potencial de un cuerpo m (un planeta o una piedra, por ejemplo) sobre el que actúa la fuerza gravitacional de un cuerpo mucho más voluminoso M (el Sol o la Tierra, respectivamente). He aquí la justificación por la cual hablamos como si la energía potencial perteneciera al planeta o a la piedra exclusivamente: cuando la energía potencial de un sistema de dos cuerpos se transforma en energía cinética, el cuerpo más ligero recibe la mayor parte de ella. El Sol es mucho más grande que un planeta y por eso apenas si recibe energía cinética; lo mismo sucede con la Tierra en el sistema Tierra-piedra.

Podemos invertir el cálculo anterior y obtener la fuerza gravitacional de la energía potencial. En las funciones de la energía potencial esféricamente simétricas, la relación $F = -dU/dr$ da el componente radial de la fuerza (Ec. 12-7). Con la energía potencial de la ecuación 14-17 obtenemos

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \qquad (14\text{-}18)$$

Aquí el signo menos indica que la fuerza es atractiva y que se dirige hacia adentro a lo largo del radio.

Podemos demostrar que la energía potencial definida de acuerdo con la ecuación 14-15 nos lleva a la conocida mgy con una pequeña diferencia de elevación y cerca de la superficie terrestre. Evaluamos en la ecuación 14-15 la diferencia de energía potencial entre el lugar en una altura y sobre la superficie (es decir, $r_b = R_T + y$, donde R_T es el radio de la Tierra) y la superficie $r_a = R_T$):

$$\Delta U = U(R_T + y) - U(R_T) = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + y}\right)$$

$$= \frac{GM_E m}{R_T}\left(1 - \frac{1}{1 + y/R_T}\right).$$

Cuando $y \ll R_T$, que podría ser el caso de los pequeños desplazamientos de cuerpos cerca de la superficie de la tierra, podemos utilizar la expansión binomial para aproximar el último término como $(1 + x)^{-1} = 1 - x + \cdots \approx 1 - x$, que nos da

$$\Delta U \approx \frac{GM_T m}{R_T}\left[1 - \left(1 - \frac{y}{R_E}\right)\right] = \frac{GM_T my}{R_T^2} = mgy,$$

usando la ecuación 14-5 para reemplazar GM_T/R_T^2 por g. Esto muestra que la ecuación 14-15 referente a la diferencia de la energía potencial gravitacional es compatible con el uso anterior de mgy en situaciones cercanas a la superficie terrestre. De hecho, la aproximación $\Delta U = mgy$ sirve para determinar la diferencia de la energía potencial entre dos elevaciones en cualquier distancia R del centro de la Tierra, a condición de que $y \ll R$ y de que usemos el valor de g (tabla 14-1) apropiado para esa R.

PROBLEMA RESUELTO 14-5. Un satélite, que gira a una altitud de dos radios de la Tierra sobre su superficie, lanza una caja de equipo de masa m hacia el centro de la Tierra con una rapidez de $v_i = 525$ m/s. ¿Con qué rapidez v_f entra la caja en la atmósfera terrestre (una distancia de $h = 100$ km sobre la superficie)?

Solución Podemos analizar este problema usando la conservación de la energía. En el lanzamiento de la caja, el satélite tiene una energía cinética $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$ y una energía potencial $U_i = -GM_T m/r_i = 3R_T$); cuando ingresa en la atmósfera su energía cinética es $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ y su energía potencial es $U_f = -GM_T m/r_f$ (donde $r_f = R_T + h$). Con $K_i + U_i = K_f + U_f$, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{r_i} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{r_f}$$

o, resolviendo para v_f^2 y sustituyendo $r_i = 3R_T$ y $r_f = R_T + h$,

$$v_f^2 = v_i^2 - 2GM_T\left(\frac{1}{3R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$= (525\ \text{m/s})^2 - 2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})$$

$$\times\left(\frac{1}{3(6.37 \times 10^6\ \text{m})} - \frac{1}{6.47 \times 10^6\ \text{m}}\right)$$

$$= 8.18 \times 10^7\ \text{m}^2/\text{s}^2,$$

por tanto, $v_f = 9.05 \times 10^3$ m/s. Nótese que este valor no depende de la masa de la caja ni de la trayectoria que siga.

PROBLEMA RESUELTO 14-6. En una trayectoria recta de la Tierra a la Luna, la energía potencial gravitacional (negativa) de un proyectil de masa m aumenta al acrecentarse la distancia con la Tierra, alcanza un nivel máximo en el punto X entre los dos cuerpos y luego vuelve a disminuir conforme el proyectil va acercándose a la superficie de la Luna. *a*) Determine la distancia del punto X con el centro de la Tierra. *b*) ¿Con qué energía cinética mínima debemos lanzar de la superficie lunar un proyectil de 1 kg, si queremos que llegue a la Tierra?

Solución *a*) Representemos con D la distancia del centro de la Tierra al de la Luna (el radio orbital de esta última). Entonces, cuando el proyectil se halla a una distancia x del centro de la Tierra (y $D - x$ del centro de la Luna), su energía potencial será

$$U(x) = -\frac{GmM_T}{x} - \frac{GmM_L}{D - x}.$$

Para encontrar dónde ocurre el máximo tomamos la derivada dU/dx y la hacemos igual a 0:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{GmM_T}{x^2} - \frac{GmM_L}{(D - x)^2} = 0.$$

Resolviendo, encontramos $x = D(1 + \sqrt{M_L/M_T})^{-1}$, que al ser evaluado nos da 3.44×10^8 m (cerca de 90% del trayecto a lo largo de la línea de la Tierra a la Luna).

b) A medida que el proyectil deja la Luna, su energía cinética disminuye al dirigirse al punto X y luego aumenta al "deslizarse" a la Tierra de nuevo. La energía cinética mínima de lanzamiento corresponde al proyectil que llega al punto X con cero energía cinética. Aplicamos la conservación de la energía en la forma $K_i + U_i = K_x + U_x$, donde i representa la superficie de la Luna. Si suponemos que K_x es cero en la condición mínima, tendremos

$$K_i = U_X - U_i = \left(-\frac{GmM_T}{x} - \frac{GmM_L}{D - x}\right) - \left(-\frac{GmM_L}{R_L}\right).$$

Al evaluar los factores numéricos en la expresión anterior encontramos $K_i = 1.53 \times 10^6$ J, que corresponde a una rapidez aproximada de 1750 m/s.

Rapidez de escape

Un proyectil disparado hacia arriba desde la superficie de la Tierra casi siempre reducirá su velocidad, se detendrá momentáneamente y retornará a la Tierra. Sin embargo, con cierta velocidad inicial se elevará para siempre y su rapidez decrecerá en forma gradual hasta cero justo cuando su distancia de la Tierra se aproxime al infinito. En este caso la rapidez inicial recibe el nombre de *rapidez de escape*.

Podemos calcular la rapidez de escape de la Tierra (o de cualquier otro cuerpo de donde se lance un proyectil) por medio de la conservación de la energía. El proyectil, de masa m, sale de la superficie del cuerpo, de masa M y de radio R, con una energía cinética $K_i = \frac{1}{2}mv^2$ y con una energía potencial $U_i = -GMm/R$. Cuando el proyectil llega al infinito, tiene energía potencial cero y también cero energía cinética (pues buscamos la rapidez *mínima* de escape). Por tanto, $U_f = 0$ y $K_f = 0$, y con $K_i + U_i = K_f + U_f$ obtenemos

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GMm}{R}\right) = 0$$

TABLA 14-2 Algunas velocidades de escape

Cuerpo	*Masa* (kg)	*Radio* (m)	*Velocidad de escape* (km/s)
Ceres[a]	1.17×10^{21}	3.8×10^5	0.64
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^6	2.38
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^6	11.2
Júpiter	1.90×10^{27}	7.15×10^7	59.5
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8	618
Sirio B[b]	2×10^{30}	1×10^7	5,200
Estrella de neutrones	2×10^{30}	1×10^4	2×10^5

[a] El más masivo de los asteroides. (El asteroide con masa mayor.)
[b] Una enana blanca, compañera de la estrella brillante Sirio.

y resolviendo para v encontramos

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{14-19}$$

La tabla 14-2 contiene los valores de la rapidez de escape de la Tierra y de algunos otros cuerpos.

La rapidez de escape no depende de la dirección en que se dispare el proyectil, pero sí interviene en la rotación de la Tierra —que no hemos tenido en cuenta en este cálculo—. Disparar hacia el este tiene la ventaja de que la rapidez superficial tangencial de la Tierra, que es 0.46 km/s en Cabo Cañaveral, produce parte de la energía cinética que requiere el escape y, por tanto, se requerirá menos impulso de los motores del cohete para escapar de la gravedad.

Energía potencial de los sistemas de muchas partículas

A continuación vamos a estudiar otra interpretación de $U(r)$. Pongamos el caso de dos objetos, de masas m y M, separados por una distancia infinitamente grande y en reposo. Tomamos una de las partículas (m, por ejemplo) y la movemos lentamente y a una velocidad constante hacia la otra, hasta que la separación entre ellas sea r. Para desplazarla a una velocidad constante, el trabajo neto realizado en ella ha de ser cero: $W_{net} = W_{ext} + W_{grav} = 0$, donde W_{ext} es el trabajo realizado por la mano y W_{grav} es el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional. De acuerdo con la ecuación 14-14, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional al pasar el objeto de la separación infinita a una separación r es $W_{grav} = W_{\infty r} = GMm/r$. Por tanto, el trabajo realizado por la mano es $W_{ext} = -W_{grav} = -GMm/r$. Al comprobar que esto es igual a $U(r)$ como se indica en la ecuación 14-17, podemos proponer la siguiente concepción alterna de la energía potencial:

> *La energía potencial de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado por un agente externo para formar el sistema, partiendo desde la posición estándar de referencia.*

En este contexto la expresión "posición estándar de referencia" significa que las partículas parten del reposo en una separación infinita. Como hemos visto, también debe especificarse

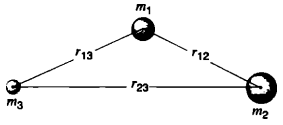


FIGURA 14-13. Tres masas reunidas desde el infinito y mantenidas en su sitio por fuerzas no gravitacionales.

que el sistema formado al final se halla en reposo en el mismo marco de referencia donde lo estaban las partículas en su estado inicial.

Las consideraciones anteriores se aplican también a sistemas que contengan más de dos partículas. Supongamos tres cuerpos de masa m_1, m_2 y m_3. Supongamos asimismo que se hallan inicialmente en reposo a una distancia infinita uno de otro. El problema consiste en calcular el trabajo realizado por un agente externo y colocarlos en las posiciones de la figura 14-13. Primero traemos m_1 del infinito, la ponemos en su posición final y la mantenemos allí. Ni la gravedad ni el agente externo realizan trabajo alguno, porque la separación entre las tres partículas sigue siendo infinita. Acerquemos ahora m_2 a m_1 de una separación infinita a la separación r_{12} y luego mantengámosla en su lugar. El trabajo efectuado por el agente externo contra la fuerza gravitacional que ejerce m_1 en m_2 es $-Gm_1m_2/r_{12}$. Acerquemos m_3 del infinito a una separación r_{13} de m_1 y r_{23} de m_2. El trabajo hecho por el agente externo contra la fuerza gravitacional ejercida por m_1 en m_3 es $-Gm_1m_3/r_{13}$, y el que se opone a la fuerza trabajo gravitacional ejercido por m_2 en m_3 es $-Gm_2m_3/r_{23}$. La energía potencial total de este sistema es igual al trabajo total efectuado por el agente externo al formar el sistema, es decir

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \qquad (14\text{-}20)$$

Nótese que, por ser escalar el trabajo, no hacen falta los cálculos vectoriales en este procedimiento.

Sin importar cómo formemos el sistema, es decir, sin que interese el orden en que se muevan las partículas ni las trayectorias que sigan, siempre obtendremos la misma cantidad de trabajo necesaria para darles a los cuerpos la configuración de la figura 14-13, a partir de una separación infinita inicial. Así pues, la energía potencial debe asociarse al sistema y no a uno o dos cuerpos. Si de nuevo quisiéramos separarlo en tres masas aisladas, tendríamos que suministrar cierta cantidad de energía

$$E = +\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

A esta energía se le considera la *energía de enlace* que mantiene unidas las partículas en la configuración indicada.

Los conceptos anteriores ocurren otra vez en relación con las fuerzas de origen eléctrico o magnético o, de hecho, en relación con el origen nuclear. Su aplicación es bastante amplia en física. Una ventaja del método de energía sobre el método dinámico consiste en que el primero se sirve de magnitudes y operaciones escalares, no de magnitudes ni de operaciones vectoriales. El método de energía es indispensable cuando se desconocen las fuerzas reales, como sucede frecuentemente en la física nuclear.

14-7 LOS MOVIMIENTOS DE LOS PLANETAS Y DE LOS SATÉLITES

Usando las leyes del movimiento de Newton y la de la gravitación universal, podemos entender y analizar el comportamiento de todos los cuerpos en el sistema solar: las órbitas de los planetas y de los cometas alrededor del Sol, así como los satélites naturales y artificiales alrededor de sus planetas. Hacemos dos suposiciones que simplifican el análisis: 1) consideramos la fuerza gravitacional sólo entre el cuerpo en órbita (la Tierra, por ejemplo) y el cuerpo central (el Sol), ignorando el efecto perturbador de la fuerza gravitacional de otros cuerpos (entre ellos los planetas); 2) suponemos que el cuerpo central es mucho más masivo que el cuerpo en órbita, al punto que despreciamos su movimiento en la interacción mutua. En realidad, los dos cuerpos giran alrededor de su centro de masa común; pero si uno tiene una masa mucho mayor, el centro de masa se halla aproximadamente en el centro del cuerpo más masivo.

El fundamento empírico para entender el movimiento de los planetas son las tres leyes que Kepler (1571-1630, mucho antes que Newton) dedujo de los estudios sobre el movimiento de Marte. A continuación mostramos cómo estas leyes pueden derivarse de las leyes del movimiento de Newton y de su ley de gravitación.

1. *Ley de las órbitas: todos los planetas describen órbitas elípticas que tienen el Sol en un foco.* Newton fue el primero en descubrir que existe una relación matemática directa entre las fuerzas del cuadrado inverso ($1/r^2$) y las órbitas elípticas. La figura 14-14 muestra una órbita elíptica típica. El origen de las coordenadas se encuentra en el cuerpo central y

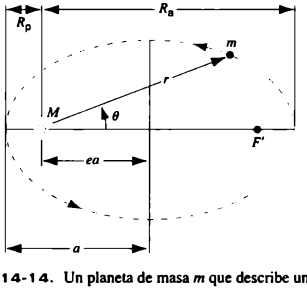


FIGURA 14-14. Un planeta de masa m que describe una órbita elíptica alrededor de Sol. El Sol, de masa M, se halla en un foco de la elipse. F' marca el otro foco o foco "vacío". También se muestran el semi eje mayor a de la elipse, la distancia de perihelio R_p y la distancia de afelio R_a. La distancia ea localiza los puntos focales y e es la excentricidad de la órbita.

el cuerpo en órbita está en las coordenadas polares r y θ. La órbita se describe por medio de dos parámetros: el *semi-eje mayor* a y la *excentricidad* e. La distancia del centro de la elipse a ambos focos es ea. Una órbita circular es un caso especial de una órbita elíptica con $e = 0$, caso en que los dos focos se fusionan en el centro del círculo. En la Tierra y en la mayoría de los otros planetas del sistema solar, las excentricidades son pequeñas y las órbitas casi circulares, como se señala en el apéndice C.

La distancia máxima R_a del cuerpo en órbita respecto al cuerpo central se indica con el prefijo *apo-* (a veces *af-*), como en *afelio* (la distancia máxima con el Sol) y *apogeo* (la distancia máxima con la Tierra). Asimismo, la distancia más cercana R_p se indica con el prefijo *peri-*, como en *perihelio* y en *perigeo*. Como se advierte en la figura 14-14, $R_a = a(1 + e)$ y $R_p = a(1 - e)$. En órbitas circulares, $R_a = R_p = a$.

2. *Ley de áreas: una línea que une un planeta al Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.* Esta ley se describe gráficamente en la figura 14-15; en efecto, establece que el cuerpo en órbita se desplaza más rápidamente cuando está cerca del cuerpo central que cuando está lejos. A continuación demostraremos que la ley de áreas es idéntica a la de conservación del momento angular.

Consideremos el pequeño incremento de área ΔA recorrido en un intervalo temporal Δt, como se ve en la figura 14-15*b*. La superficie de esta cuña aproximadamente triangular equivale a la mitad de su base, $r\,\Delta\,\theta$, multiplicada por su altura r. La tasa a que esta superficie se cubre es $\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}(r\Delta\theta)(r)/\Delta t$. En el límite instantáneo esto se convierte en

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \tfrac{1}{2} r^2 \omega.$$

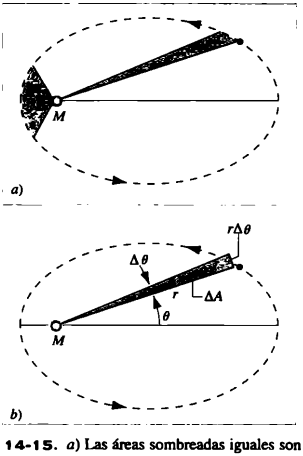


FIGURA 14-15. *a*) Las áreas sombreadas iguales son recorridas en tiempos iguales por una línea que conecta el planeta con el Sol, demostrando así la ley de superficies. *b*) El área ΔA es recorrida en un tiempo Δt durante el cual la línea recorre el ángulo $\Delta\theta$.

Suponiendo que el cuerpo más voluminoso M esté en reposo, el momento angular del cuerpo en órbita m respecto al origen en el cuerpo central es, según la ecuación 10-12, $L_z = I\omega = mr^2\omega$ (seleccionado el eje z perpendicular al plano de la órbita). Por tanto,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_z}{2m}. \tag{14-21}$$

Si se aísla el sistema de M y de m —lo cual significa que no se aplica un par externo neto al sistema—, (ecuación 10-9) L_z es una constante; así pues, de acuerdo con la ecuación 14-21, dA/dt también es constante. En otras palabras, en todos los intervalos dt en la órbita, la línea que conecta m y M recorre áreas iguales dA, con lo cual se comprueba la segunda ley de Kepler. La aceleración de un cometa al pasar cerca del Sol es un ejemplo de este efecto y, por lo mismo, una consecuencia directa de la ley de conservación del momento angular.

3. *Ley de periodos: el cuadrado del periodo de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de su distancia media de él.* Probemos este resultado con órbitas circulares. La fuerza gravitacional crea la aceleración centrípeta necesaria para el movimiento circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}. \tag{14-22}$$

Al reemplazar la rapidez v por $2\pi r/T$, donde T es el periodo rotacional (el tiempo de una órbita completa), obtenemos

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3. \tag{14-23}$$

Un resultado similar se consigue con órbitas elípticas, donde el radio r se sustituye por el semi eje mayor a.*

La relación entre T^2 y a^3 debería determinarse por medio de la magnitud $4\pi^2/GM$. En todos los planetas que giran alrededor del Sol, la razón T^2/a^3 deberá ser una constante; la tabla 14-3 muestra que así es. Si podemos medir T y a en un cuerpo en órbita, también podremos determinar la masa del cuerpo central. Este método no depende de la masa del cuerpo y, por consiguiente, no suministra información acerca de ella.

*Véase, por ejemplo, *Newtonian Mechanics* de A. P. French (Norton, 1971), pp. 585-591.

TABLA 14-3 Ley de Kepler de los periodos para el sistema solar

Planeta	*Semieje mayor* a (10^{10} m)	*Periodo* T (y)	T^2/a^3 (10^{-34} y^2/m^3)
Mercurio	5.79	0.241	2.99
Venus	10.8	0.615	3.00
Tierra	15.0	1.00	2.96
Marte	22.8	1.88	2.98
Júpiter	77.8	11.9	3.01
Saturno	143	29.5	2.98
Urano	287	84.0	2.98
Neptuno	450	165	2.99
Plutón	590	248	2.99

PROBLEMA RESUELTO 14-7. *a*) Calcule la masa del Sol a partir del periodo y el radio de la órbita terrestre. *b*) Calcule la masa de Júpiter a partir de su periodo (1.77d) y el radio orbital de su segunda luna más cercana, Io.

Solución *a*) Con base en la ecuación 14-23 tenemos

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(1.50 \times 10^{11}\ \mathrm{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(3.15 \times 10^7\ \mathrm{s})^2}$$

$$= 2.01 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$

b)

$$M = \frac{4\pi^2(4.22 \times 10^8\ \mathrm{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(1.53 \times 10^5\ \mathrm{s})^2}$$

$$= 1.90 \times 10^{27}\ \mathrm{kg}.$$

Nótese que la masa de Júpiter no puede obtenerse de los parámetros de su órbita alrededor del Sol; si queremos determinar la masa de un objeto según la tercera ley de Kepler, necesitamos conocer el periodo y el semi eje mayor de los objetos que giran alrededor de él como cuerpo central.

PROBLEMA RESUELTO 14-8. Se quiere poner en órbita un satélite de comunicaciones para que permanezca fijo arriba de cierto punto del ecuador de la Tierra en rotación. ¿Cuál es la altura de esa órbita?

Solución Para que un satélite permanezca arriba de cierto punto en la superficie terrestre, ha de girar con la misma rapidez angular que el punto. Por consiguiente, el periodo del satélite ha de ser 24 h, es decir 86,400 s. Así pues, el radio de la órbita será

$$r = \left(\frac{GT^2 M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(86{,}400\ \mathrm{s})^2(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$= 4.22 \times 10^7\ \mathrm{m},$$

y su altura sobre la superficie terrestre será

$$h = r - R_E = 4.22 \times 10^7\ \mathrm{m} - 6.37 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

$$= 3.58 \times 10^7\ \mathrm{m} = 22{,}300\ \mathrm{mi}.$$

A esta órbita se le llama Órbita Geosincrónica de Clarke en honor de Arthur C. Clarke, quien propuso la idea en 1948. También es un conocido autor de muchas obras de ciencia ficción como *2001: odisea del espacio.*

PROBLEMA RESUELTO 14-9. El cometa de Halley (Fig. 14-16) tiene un periodo de 76 años. En 1986, su máximo acercamiento al Sol (perihelio) fue 8.8×10^{10} m (entre las órbitas de Mercurio y Venus). Encuentre su afelio, o distancia máxima del Sol, y la excentricidad de su órbita.

Solución De acuerdo con la ecuación 14-23 (donde M es la masa del Sol) encontramos el semi eje mayor:

$$a = \left(\frac{GT^2 M}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(2.4 \times 10^9\ \mathrm{s})^2(2.0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg})}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$= 2.7 \times 10^{12}\ \mathrm{m}.$$

FIGURA 14-16. El cometa de Halley, fotografiado durante su acercamiento al Sol en 1986.

En la figura 14-14 vemos que $R_p + R_a = 2a$ y, por tanto,

$$R_a = 2a - R_p = 2(2.7 \times 10^{12}\ \mathrm{m}) - 8.8 \times 10^{10}\ \mathrm{m}$$

$$= 5.3 \times 10^{12}\ \mathrm{m},$$

entre las órbitas de Neptuno y Plutón. Asimismo, basándonos en la figura 14-14 tenemos $R_p = a - ea = a\,(1 - e)$, así que

$$e = 1 - \frac{R_p}{a} = 1 - \frac{8.8 \times 10^{10}\ \mathrm{m}}{2.7 \times 10^{12}\ \mathrm{m}} = 0.97.$$

Esa gran excentricidad (1.0 es el máximo posible) corresponde a una elipse delgada y larga.

Consideraciones de energía en el movimiento de planetas y de satélites

Consideremos una vez más el movimiento de un cuerpo de masa m (un planeta o un satélite, por ejemplo) alrededor de un cuerpo voluminoso de masa M (el Sol o la Tierra entre otros). Suponemos que M se encuentra en reposo dentro de un marco de referencia inercial; el cuerpo m gira alrededor de una órbita circular con una rapidez tangencial v y con una rapidez angular ω. La energía potencial del sistema es

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

donde r es el radio de la órbita circular. La energía cinética del sistema es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

cuando el Sol se encuentra en reposo. A partir de la ecuación 14-22 obtenemos

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r},$$

así que (con $v = \omega r$),

$$K = \frac{GMm}{2r}. \qquad (14\text{-}24)$$

La energía mecánica total es

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \qquad (14\text{-}25)$$

Esta energía es constante y negativa. La energía cinética nunca puede ser negativa, pero en la ecuación 14-24 vemos que

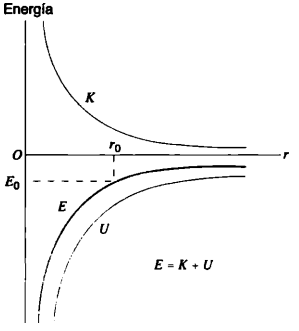


FIGURA 14-17. Energía cinética K, energía potencial U y energía total $E = K + U$ de un cuerpo en movimiento planetario circular. Un planeta con energía total $E_0 < 0$ permanecerá en órbita con un radio r_0. Cuanto mayor sea la distancia del Sol, mayor (es decir menos negativa) será la energía total E. Para escapar del centro de la fuerza y aun así tener energía cinética en infinito, el planeta necesitaría energía total positiva.

debe llegar a cero a medida que la separación alcanza el infinito. La energía potencial siempre es negativa con su valor cero en la separación infinita. El significado de la energía negativa es entonces que se trata de un sistema cerrado, pues el planeta m siempre está atrapado por el centro solar de atracción M y nunca escapa de él. (Fig. 14-17).

Puede demostrarse* que la ecuación 14-25 también es válida en órbitas elípticas, si reemplazamos r por el semi eje mayor a. La energía total es negativa y además constante, porque las fuerzas gravitacionales son conservativas. De ahí que la energía total y el momento angular total sean constantes en el movimiento planetario. A esas magnitudes se les conoce comúnmente como *constantes del movimiento.*

Dado que la energía total no depende de la excentricidad de la órbita, todas las órbitas con el mismo semi eje mayor a poseen la misma energía total. En la figura 14-18 se ven varias órbitas que poseen igual energía.

Si suministramos una cantidad adecuada de energía cinética, podremos lograr que la energía total sea cero o positiva, y entonces las órbitas ya no serán elípticas. Las órbitas son parabólicas cuando $E = 0$ e hiperbólicas cuando $E > 0$. Es lo que sucede a menudo cuando en la dispersión de partículas de un núcleo, donde la fuerza electrostática varía como $1/r^2$. A la nave espacial *Pioneer 10* se le imprimió suficiente energía cinética potencial para que saliera del sistema solar; lanzada el 3 de marzo de 1972, pasó la órbita de Plutón —el planeta más lejano— el 14 de junio de 1983, describiendo una órbita hiperbólica hacia el espacio exterior.

La ecuación 14-25 muestra que no podemos modificar la rapidez de un satélite en órbita sin cambiar también el radio

*Véase referencia en la página 312.

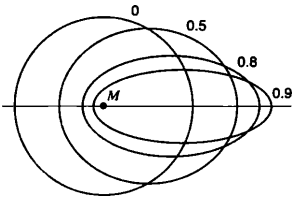


FIGURA 14-18. Las cuatro órbitas tienen el mismo semi eje mayor a y, por tanto, corresponden a la misma energía total E. Se indican sus excentricidades.

de ella. Por ejemplo, supóngase que dos satélites siguen la misma órbita circular. Si el que va detrás intenta alcanzar al que va adelante acelerando hacia delante —y, por tanto, acrecentando la energía cinética—, la energía total se vuelve menos negativa y el radio aumenta. Acoplar dos naves espaciales no es un mero ejercicio consistente en impulsar una de ellas hacia adelante. De hecho, como se aprecia en el siguiente problema resuelto, a menudo la técnica idónea para alcanzar una nave espacial en órbita exige más bien disminuir que aumentar la velocidad.

PROBLEMA RESUELTO 14-10. Dos naves espaciales idénticas, con una masa de 3250 kg cada una, se encuentran en la misma órbita circular a una altura de 270 km arriba de la superficie terrestre. La nave A está 105 s adelante de la nave B, es decir, llega a un punto fijo cualquiera 105 s antes. En un punto particular P (Fig. 14-19), el piloto de B dispara un cohete corto *hacia adelante*, reduciendo la velocidad de B en 0.95%. Determine los parámetros orbitales (energía, periodo, semi eje mayor) de B antes y después del impulso y el orden de las dos naves cuando vuelvan a retornan al punto P.

Solución Cuando $h = 270$ km, $r = R_E + h = 6{,}370$ km + 270 km = 6,640 km. Por tanto, antes de disparar los cohetes, $a = 6640$ km y, conforme a la ecuación 14-25,

$$E = -\frac{GmM_T}{2a}$$

$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(3{,}250\ \mathrm{kg})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{2(6.64 \times 10^6\ \mathrm{m})}$$

$$= -9.76 \times 10^{10}\ \mathrm{J}.$$

El periodo se obtiene de la ecuación 14-23:

$$T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2(6.64 \times 10^6\ \mathrm{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}\right)^{1/2}$$

$$= 5{,}380\ \mathrm{s}.$$

Las ecuaciones 14-24 y 14-25 indican que (sólo en una órbita circular) la energía cinética es numéricamente igual a la negativa de la energía total, de modo que $K = +9.76 \times 10^{10}$ J y

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(9.76 \times 10^{10}\ \mathrm{J})}{3250\ \mathrm{kg}}} = 7.75 \times 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

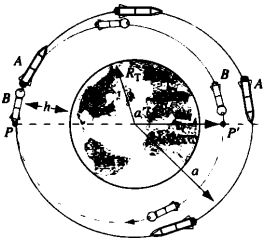


FIGURA 14-19. Problema resuelto 14-10. Se muestran las órbitas de las naves espaciales A y B. Nótese que B alcanza a A describiendo una órbita no circular a alturas menores arriba de la Tierra. El tamaño relativo de la Tierra y las alturas orbitales no se dan a escala.

Después del impulso, la velocidad disminuye en la cantidad de 0.95% a $v' = (1 - 0.0095)v = 7.68 \times 10^3$ m/s, y la nueva energía cinética de B es

$$K' = \tfrac{1}{2}(3{,}250\ \text{kg})(7.68 \times 10^3\ \text{m/s})^2 = 9.58 \times 10^{10}\ \text{J}.$$

Según la ecuación 14-25, la energía potencial de B en el punto P inmediatamente después del impulso breve no cambia y es igual al valor inicial $E - K$ o $2E$. Entonces la energía total E' de B después del impulso ha de ser

$$E' = K' + U' = 9.58 \times 10^{10}\ \text{J} + 2(-9.76 \times 10^{10}\ \text{J})$$
$$= -9.94 \times 10^{10}\ \text{J},$$

y conforme a la ecuación 14-25, el nuevo semi eje mayor principal es

$$a' = -\frac{GmM_T}{2E'}$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3{,}250\ \text{kg})(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{2(-9.94 \times 10^{10}\ \text{J})}$$
$$= 6.52 \times 10^6\ \text{m} = 6{,}520\ \text{km},$$

una reducción de 1.8% del valor en la órbita original. El periodo correspondiente es

$$T' = \left(\frac{4\pi^2 a'^3}{GM_T}\right)^{1/2}$$
$$= \left(\frac{4\pi^2(6.52 \times 10^6\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}\right)^{1/2}$$
$$= 5{,}240\ \text{s}.$$

La diferencia en los periodos es 140 s. En otras palabras, si originalmente A cruza el punto P en $t = 0$ y si B cruza (y dispara sus cohetes) en $t = 105$ s, A retorna a P en $t = 5380$ s (determinados por el periodo T), y B *retorna a* P 5240 s después del paso inicial, esto es, cuando $t = 105\ \text{s} + 5240\ \text{s} = 5345$ s. Por tanto, B está ahora 35 s *adelante* de A en el punto P. Ahora B puede disparar un segundo impulso de cohete de fuerza y duración idénticas al primero, sólo que en dirección inversa. Éste devuelve B a su órbita circular original, ahora 35 s adelante de A. La figura 14-19 muestra la relación entre A y B durante la primera órbita después del impulso. Nótese que, tras el impulso, B describe una órbita elíptica y por lo mismo puede cruzar con A sin chocar, porque A permanece en la órbita circular original.

El ejercicio 38 le ayudará a entender cómo B puede reducir su velocidad en P y aun así adelantarse a A.

14-8 EL CAMPO GRAVITACIONAL (Opcional)

Un hecho básico de la gravitación es que dos partículas ejercen fuerzas una sobre otra. Si queremos, esto podemos concebirlo como una interacción directa entre ambas. A esta forma de interacción se le llama *acción a distancia:* las partículas interactúan aun cuando no entren en contacto. Otro punto de vista es el concepto de *campo*, según el cual una partícula modifica de alguna manera el espacio que la rodea y produce un *campo gravitacional.* Éste, cuya fuerza depende de la masa de la partícula, actúa después sobre cualquier otra, ejerciendo la fuerza de atracción gravitacional sobre ella. Así pues, el campo desempeña un papel intermedio en nuestra concepción de la fuerza que una partícula ejerce sobre otra.

En esta perspectiva, nuestro problema consta de dos partes. Primero, hay que determinar el campo gravitacional establecido por cierta distribución de las partículas. Segundo, hay que calcular la fuerza gravitacional que el campo ejerce en otra partícula colocada en él.

Utilizaremos el mismo procedimiento más adelante cuando estudiemos el electromagnetismo, en el cual las partículas con carga eléctrica generan un campo *eléctrico* y la fuerza en otra partícula cargada se determina por la intensidad del campo eléctrico en ese lugar.

Supongamos que la Tierra es una partícula aislada y prescindamos de los efectos rotacionales y de otros no gravitacionales (de modo que g_0 son equivalentes). Utilizamos un pequeño cuerpo de prueba de masa m_0 para explorar el campo gravitacional. Si colocamos el cuerpo cerca de la Tierra, experimentará una fuerza que tiene una dirección y una magnitud definidas en todos los puntos del espacio. La dirección se dirige radialmente al centro de la Tierra y la magnitud es $m_0 g$. Podemos asociar a cada punto cercano a ella un vector $\vec{\mathbf{g}}$, que representa la aceleración que un cuerpo presentaría si se lo soltará en este punto. Definimos la *fuerza del campo gravitacional* en un punto como la *fuerza gravitacional por unidad de masa* en ese punto o, en función de nuestra masa de prueba,

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m_0}. \qquad (14\text{-}26)$$

Al colocar en varias posiciones la masa de prueba, podemos trazar un mapa que muestre el campo gravitacional en cualquier punto del espacio. Después calculamos la fuerza en una partícula en cualquier punto de ese campo, multiplicando la masa m de la partícula por el valor del campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ en ese punto: $\vec{\mathbf{F}}$ 5 $m\vec{\mathbf{g}}$. La figura 14-20 contiene ejemplos de campos gravitacionales.

El campo gravitacional es un ejemplo de *campo vectorial*: cada punto de este campo tiene un vector asociado con él. Hay también *campos escalares*, como el campo de temperatura en un sólido conductor de calor. El campo gravitacional que surge de una distribución fija de materia constituye

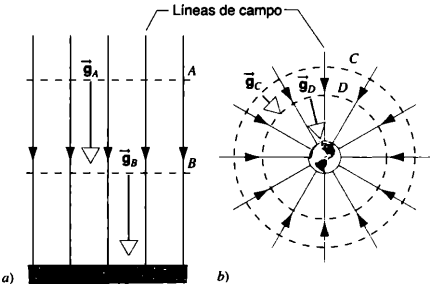


FIGURA 14-20. Ejemplos de diagramas gravitacionales de líneas de campo. Las direcciones de estas últimas (la de las tangentes de las líneas, en caso de que sean curvas) indican la dirección del campo en cualquier punto; la densidad de las líneas (número por área unitaria que cruza una superficie perpendicularmente a ellas) indica la magnitud relativa de los campos. *a)* El campo uniforme cerca de la superficie terrestre. Tiene la misma magnitud y dirección en todos los lugares. El número de líneas por área unitaria en la superficie plana *A* paralela a la superficie es igual que en la superficie plana *B*, lo cual significa que los campos tienen la misma magnitud ($|\vec{g}_A| = |\vec{g}_B|$). *b)* Campo de la Tierra (o de cualquier superficie esférica aislada). El campo apunta radialmente hacia adentro, y la densidad de las líneas de campo (número de área unitaria) en la superficie esférica *C* es menor que en la superficie *D* ($|\vec{g}_C| < |\vec{g}_D|$).

otro ejemplo de *campo estático*, porque su valor en un punto dado no cambia con el tiempo.

El concepto de campo es de gran utilidad para entender las fuerzas electromagnéticas entre cargas eléctricas en movimiento. Ofrece ventajas evidentes, tanto en lo conceptual como en la práctica, sobre la noción de acción a distancia. El concepto de campo es muy superior cuando se analizan ondas electromagnéticas (por ejemplo, las ondas luminosas o radiofónicas); la acción a distancia indica que las fuerzas pueden transmitirse instantáneamente en una distancia cualquiera, mientras que en las teorías basadas en los campos las fuerzas se propagan con rapidez finita (a lo sumo con la velocidad de la luz). Las ondas gravitacionales, que han sido predichas pero que todavía no se observan de modo directo, también serían difíciles de entender con la teoría de la acción a distancia. El concepto de campo, el cual no se utilizaba en la época de Newton, lo idea mucho más tarde Faraday para el electromagnetismo antes que fuera aplicado a la gravitación. Después fue adoptado para la gravitación en la teoría general de relatividad. En cierto modo, todas las teorías actuales que se ocupan de la naturaleza esencial de la material y de las interacciones entre los partículas fundamentales son teorías de campo. ■

14-9 AVANCES MODERNOS EN LA GRAVITACIÓN (Opcional)

La teoría de la gravitación de Newton sentó las bases para interpretar una amplia gama de observaciones terrestres y astronómicas. Sin embargo, los descubrimientos en el siglo XX señalan áreas donde la teoría es incompleta. Por ejemplo, en lugares donde la fuerza gravitacional es intensa, como cerca de una estrella de neutrones (muy compacta) o en un hoyo negro, la ley de Newton da resultados incorrectos y debe ser reemplazada por otro enfoque, denominado *teoría general de la relatividad*, que fue formulada por Albert Einstein en 1916. Aun en nuestro sistema solar, el planeta Mercurio se mueve tan cerca del Sol que experimenta una fuerza gravitacional intensa suficiente para causar desviaciones pequeñas pero fácilmente medibles respecto a las predicciones newtonianas de su órbita. Cuando la fuerza gravitacional es más débil, la teoría de Einstein se reduce a la de Newton, así que podemos usar esta última con absoluta seguridad cuando analicemos las órbitas de planetas más distantes del Sol o cuando calculemos las trayectorias necesarias para enviar sondas espaciales a planetas lejanos, como se ha venido haciendo con extraordinaria precisión. En la presente sección hablaremos de las áreas donde la teoría de Newton parece incompleta o incorrecta.

Materia oscura

La figura 14-21 muestra galaxias cuya estructura espiral se parece mucho a la Vía Láctea. Esas galaxias que suelen contener 10^{11} estrellas se caracterizan por una región central brillante y por brazos espirales en un disco plano. La estructura entera gira alrededor de un eje perpendicular al plano del dis-

FIGURA 14-21. Galaxias espirales típicas semejantes a la Vía Láctea vistas desde dos perspectivas, una normal al plano y otra a lo largo de él.

co. El Sol se encuentra en uno de los brazos espirales de la Vía Láctea, cerca de 2/3 en la salida del centro de la galaxia, y se desplaza con una rapidez tangencial aproximada de 220 km/s, que corresponde a una rotación completa cada 240 millones de años.

La región central brillante contiene la mayor parte de la masa de la galaxia. Si aplicamos la tercera ley de Kepler a la rotación de una estrella como el Sol en uno de los brazos espirales a una distancia r del centro, podremos resolver la ecuación 14-22 para calcular la rapidez de rotación v y obtener

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \qquad (14\text{-}27)$$

donde M se refiere a la masa contenida dentro del radio r. En la medida en que podamos ignorar el efecto de las estrellas en radios mayores, cabe suponer que v disminuirá con radio creciente como $r^{-1/2}$. La figura 14-22 muestra esta expectativa en el caso de las estrellas de nuestra galaxia y también que los datos observados no concuerdan con la conducta anterior en radios más allá del Sol. Más bien, la velocidad parece aumentar con un r mayor. Se han hecho observaciones similares en otras galaxias.

Una explicación posible de esta discrepancia es la violación de la ley newtoniana de la gravitación en distancias tan enormes, es decir, quizá la forma de la ley contiene un término adicional prescindible en distancias de separación donde hemos efectuado mediciones rigurosas (en el laboratorio y en el sistema solar), pero cobra importancia en distancias mayores. A través de los años se ha investigado este tipo de correcciones menores a la dependencia de la ley de Newton respecto a dicha distancia, pero por ahora sólo se cuenta con evidencia experimental acerca del comportamiento de $1/r^2$. Otra explicación de la discrepancia de la figura 14-22 se basa en la existencia de más materia en las galaxias que no es visible al ojo humano, pero que ejerce suficiente fuerza gravitacional para interpretar los datos de la figura 14-22. Se han propuesto diversas formas de esta *materia oscura*: estrellas apagadas, objetos del tamaño de Júpiter y partículas elementales libres; pero todavía no se consiguen pruebas firmes de la existencia de esta clase de materia en cantidades necesarias para explicar la figura 14-22. Con todo, demuestra nuestra fe en la ley de Newton de la gravitación, al punto que estamos más dispuestos a aceptar la existencia de nuevas formas de materia que la violación de dicha ley.

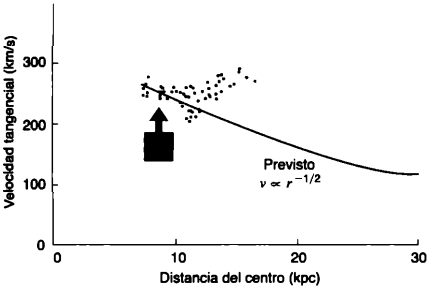


FIGURA 14-22. Velocidades tangenciales de las estrellas de nuestra galaxia. La línea gruesa muestra la dependencia de v respecto a r dada por la ecuación 14-27 y calculada según la ley de periodos de Kepler, suponiendo que las estrellas sean atraídas sólo por la gran masa central de la galaxia. La discrepancia entre los puntos medidos y la curva indica que hay materia no vista que las atrae en la región externa de la galaxia.

Se encuentra evidencia adicional sobre la existencia de la materia oscura en la naturaleza de la agrupación de galaxias en conglomerados y superconglomerados. Algunos astrónomos estiman que la materia oscura, que se conoce sólo por sus efectos gravitacionales, puede constituir hasta el 90% de toda la que forma el universo. El astrónomo británico real sir Martin Rees escribió: "Las entidades que los astrónomos comunes observan y llaman galaxias no son sino trazas de sedimento atrapadas en el centro de enormes masas de objetos invisibles de estructura desconocida. Su gravedad mantiene unidas las galaxias y moldea su estructura".

Masa inercial y gravitacional

En el Capítulo 3 describimos un método para asignar masa a un objeto, comparando su respuesta ante una fuerza determinada (es decir, su aceleración) con la de una masa estándar. La comparación se realiza con base en la segunda ley de Newton, y la masa que aparece en $F = ma$ recibe el nombre de *masa inercial*. Para medir la masa de un objeto también utilizamos un procedimiento que se basa en la ley de gravitación. Vamos a medir la fuerza en un kilogramo estándar situado en el campo gravitacional de la Tierra (es decir, su peso) y luego, con el mismo procedimiento, determinaremos la fuerza en la masa desconocida. De acuerdo con la ecuación 14-1, la razón entre estas fuerzas debería ser igual a la de las masas; contamos, pues, con un segundo método para calcular la masa. En este caso vamos a medir la masa *gravitacional*.

Parece razonable preguntar si las masas son en realidad las mismas. ¿Es la masa inercial igual a la gravitacional? En el modelo newtoniano de la dinámica no hay nada que exija que lo sean. Su igualdad ha de considerarse en esa teoría como una extraordinaria coincidencia, pero, como veremos, se deduce en forma natural de la teoría general de la relatividad de Einstein.

Newton fue el primero en probar la igualdad de la masa inercial y gravitacional, sirviéndose de un péndulo que tenía la forma de una caja vacía. La llenó con varias cantidades de material y midió el periodo del péndulo resultante, que podemos demostrar que depende de la razón entre la masa inercial y la gravitacional del material dentro de la caja. Newton llegó a la conclusión de que las masas inercial y gravitacional eran iguales aproximadamente una parte en 10^3.

En 1909, Eötvös mejoró de modo considerable el experimento. Utilizó una báscula de torsión con diversos materiales en ambos extremos; después comparó la masa gravitacional (su peso) en los materiales con la fuerza inercial (calculada a partir de la fuerza centrífuga inercial debida a la rotación de la Tie-

rra). Cualquier diferencia entre ambas masas debería ser observada como una rotación de la báscula de rotación. Eötvös concluyó que las dos eran iguales en una parte en 10^9. Experimentos posteriores realizados por Dicke en 1964 y por Braginsky en 1972 ampliaron los límites a una parte en 10^{11} a 10^{12}, empleando una técnica similar, pero designándola como atracción gravitacional del Sol y como fuerza centrífuga producida por la órbita terrestre alrededor del Sol. Esos experimentos cada vez más precisos revelan que no existe diferencia entre las dos masas y nos obligan a reexaminar las leyes de la dinámica para explicar esta igualdad aparentemente accidental.*

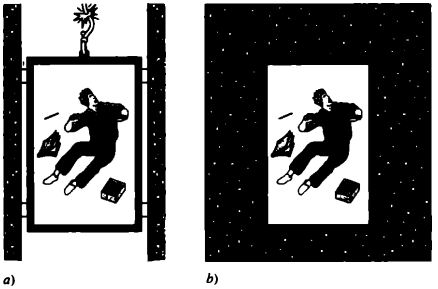
El principio de equivalencia

He aquí cómo la idea se le ocurrió a Einstein: "Estaba sentado en una silla en la oficina de patentes de Berna, cuando de repente un pensamiento cruzó por mi cabeza: si una persona cae libremente no sentirá su propio peso. Me sentía desconcertado. Esta simple idea me causó honda impresión. Me impulsó a formular una teoría de la gravitación".

La figura 14-23*a* muestra a una persona dentro de una cámara de aislamiento en caída libre en la gravedad terrestre; la figura 14.23*b* muestra a una persona flotando libremente en el espacio interestelar, donde los campos gravitacionales son muy débiles. Ningún instrumento de medición que opere totalmente en el interior de la cámara podrá distinguir los dos casos.

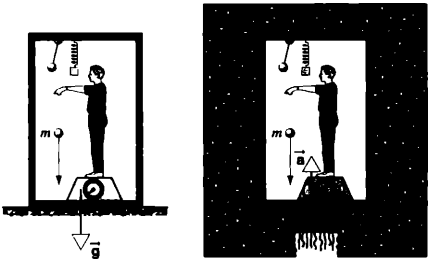
Einstein fue más allá, como se aprecia en la figura 14-24. Consideremos a la persona dentro de la cámara en reposo sobre la superficie terrestre (Fig. 14-24*a*). Se observa que una pelota acelera hacia el piso a 9.8 m/s^2. Un péndulo simple de determinada longitud tiene cierto periodo de oscilación. Una masa que cuelgue del resorte lo estira determinada longitud. El piso ejerce una fuerza normal sobre los cuerpos situados en ella.

*Véase "Searching for the Secrets of Gravity" de John Boslough, *National Geographic*, mayo de 1989, p. 563.



a) *b)*

FIGURA 14-23. Los efectos de caer libremente en la superficie terrestre *a)* son idénticos a los de flotar libremente en el espacio interestelar. *b)* La diferencia no podría encontrarse con ningún experimento realizado en el interior de la cámara.



a) *b)*

FIGURA 14-24. Los efectos al estar en un campo gravitacional de intensidad $\vec{g}$, a) son idénticos a los de un sistema acelerando con $\vec{a} = -\vec{g}$ en el espacio interestelar. b) Ningún experimento en la cámara podría mostrar la diferencia. Esto ilustra el principio de equivalencia de Einstein.

Supóngase ahora que la cámara forma parte de un cohete en el espacio interestelar y que se encienden los motores para comunicarle al cohete una aceleración exacta de 9.8 m/s^2 (Fig. 14-24*b*). Nuestro viajero suelta ahora una bola y la observa moverse respecto al piso con esa aceleración. El péndulo oscila en forma normal, la masa estira el resorte en la extensión previsible y el piso ejerce su fuerza normal correcta. En pocas palabras, no es posible efectuar un experimento dentro de la cámara que distinga entre la figura 14-24*a* —la condición de reposo— en un marco inercial en un campo gravitacional $\vec{g}$ y la figura 14-24b, aceleración $\vec{a} = -\vec{g}$ relativa a un marco inercial en el espacio de gravedad despreciable. Éste es el *principio de equivalencia.*

La igualdad de las masas inercial y gravitacional se deduce directamente del principio de equivalencia. Supóngase que un objeto se encuentra en reposo en una báscula de resorte, sobre el piso de la cámara. Cuando la cámara acelera en el cohete, el piso ha de ejercer una fuerza ascendente $m_i a$ para acelerar el objeto; aquí m_i es la masa inercial, y la báscula de resorte indica la fuerza de reacción (también $m_i a$) ejercida por él. En cambio, cuando la cámara está en reposo en un campo gravitacional, la báscula indicará el peso $m_g g$ (que depende de la masa gravitacional m_g). Hemos dispuesto los experimentos de modo que $a = g$; y si las lecturas de la báscula sean idénticas (como lo exige el principio de equivalencia), entonces deberán serlo las masas inercial y gravitacional.

Teoría general de la relatividad

Es esencialmente una teoría geométrica. Ofrece un método para construir un sistema coordenado cuya forma depende de la presencia de la materia y de la energía. En la teoría de Einstein, la materia dobla o curva el espacio; el tradicional sistema coordenado rectangular ya no es estrictamente válido en presencia de la materia. Entonces, el efecto que una masa gravitacional tiene en otra es simplemente el movimiento de la segunda en la geometría distorsionada establecida por la primera.

Este planteamiento se parece al concepto de campos explicado antes en el capítulo. En la teoría de campo, una masa establece un campo gravitacional y después la segunda interactúa directamente con él (y no con la primera masa, como en el enfoque de acción a distancia).

La figura 14-25 muestra una analogía bidimensional en la inclinación o curva del espacio. Imagine una hoja de goma con una rejilla coordenada puesta sobre ella. Todo el movimiento queda confinado al sistema coordenado en la hoja. Ahora imagine un cojinete de bolas que estira la hoja. La distancia más corta entre dos puntos ya no es una línea recta; de hecho, en este tipo de geometría debemos redefinir lo que significa la expresión "línea recta".

La relación entre materia y geometría en la relatividad general se resume en los siguientes términos: "La geometría indica a la materia cómo moverse, y ésta a su vez le indica a ella cómo curvarse". Las fórmulas de la relatividad general dan la curvatura de ualquier distribución de materia y de energía, y entonces se da el movimiento posterior de los haces de luz se obtiene directamente.

Se han efectuado muchos experimentos para estudiar las desviaciones entre la teoría gravitacional de Newton y la de Einstein. Las diferencias se manifiestan sólo en campos gravitacionales fuertes, de ahí la necesidad de hacer las mediciones cerca del Sol o de otro cuerpo voluminoso. Entre las pruebas experimentales más importantes cabe citar las siguientes:

1. *Precesión del perihelio de Mercurio.* La órbita del planeta Mercurio no es exactamente una elipse cerrada: el eje de la elipse gira (o precede) un poco cada órbita. Casi todo este efecto puede explicarse con la gravitación newtoniana (debido a la influencia de otros planetas, por ejemplo), no así una parte pequeña (conocida desde 1859). La teoría de Einstein explica elegantemente esta discrepancia, correspondiente a una rotación del eje de la elipse de 43 segundos de arco por siglo.

2. *Curvamiento o Curvatura de la luz.* La luz que se mueve cerca de un objeto masivo no sigue una trayectoria recta, sino que se dobla debido a la curvatura del espacio como en la figura 14-25*b*. Este efecto se observó por primera vez durante un eclipse solar en 1919, basándose en el cambio (aproximadamente de 1.75 segundos de arco) en la posición de las estrellas cuya luz pasaba cerca del Sol. Entre otros efectos observados de la curvatura se cuenta *la acción del lente gravitacional*, en que la luz proveniente de una galaxia que se dirige a la Tierra pasa casualmente cerca de un objeto masivo (un hoyo negro u otra galaxia, por ejemplo); la curvatura de la luz alrededor del objeto hace que observemos dos imágenes de la galaxia original.

FIGURA 14-25. Analogía que muestra la inclinación o curvatura del espacio resultante de la presencia de la masa gravitacional, según la teoría general de la relatividad. La masa distorsiona la rejilla coordenada y altera también la geometría.

3. *Retraso de los ecos de radar.* Dado que un objetivo voluminoso estira el "tejido" del espacio *y* del tiempo, una señal de radar que se dirige de la Tierra a otro planeta se retardará un poco si pasa cerca del Sol. El retraso previsto de la señal entre la Tierra y Venus es apenas de cerca de 10^{-4}s, pero se ha comprobado con una precisión aproximada de 0.1%.

Se han dedicado muchos esfuerzos a estas pruebas experimentales de la relatividad general,* y en la actualidad se llevan a cabo otras pruebas importantes; por ejemplo, la búsqueda de las "ondas de gravedad" y la medición del cambio de dirección del eje de un giroscopio en la órbita terrestre. Hasta ahora las predicciones de la relatividad general han sido confirmadas en todos los casos. Muchos de los efectos son muy pequeños, pero la relatividad general tiene una consecuencia de gran importancia práctica: el Sistema de Posicionamiento Global, que se sirve de una red de satélites para determinar nuestra posición en la Tierra dentro de un margen de unos cuantos metros, requiere aplicar la relatividad general para alcanzar este nivel de precisión. ■

*Una exposición básica y fácil de entender sobre estas mediciones se da en *Was Einstein Right?* de Clifford M. Will (Basic Books, 1986).

OPCIÓN MÚLTIPLE

14-1 Origen de la ley de gravitación

14-2 Ley de la gravitación universal de Newton

1. La magnitud de la fuerza de gravedad entre dos objetos idénticos está dada por F_0. Si sus masas se duplican pero la distancia entre ellos se divide a la mitad, la nueva fuerza de gravedad entre los objetos será

(A) $16\,F_0$. (B) $4F_0$. (C) F_0. (D) $F_0/2$.

2. La magnitud de la fuerza de gravedad entre dos objetos idénticos está dada por F_0. Si sus masas se duplican, y si también se

duplica la distancia entre ellos, la nueva fuerza de gravedad entre los objetos será

(A) $4\,F_0$. (B) $2F_0$. (C) F_0. (D) $F_0/2$.

3. Los objetos A y B están separados por una distancia r. La magnitud de la fuerza de gravedad en A proveniente de B está dada por F_{AB} y la de la fuerza de gravedad en B proveniente de A está dada por F_{BA}.

a) Si se duplica la masa de A y la de B permanece inalterada,

A) F_{AB} se duplicará y F_{BA} no cambiará.
B) F_{AB} permanecerá inalterada y F_{BA} se duplicará.
C) F_{AB} y F_{BA} se duplicarán.
D) F_{AB} y F_{BA} permanecerán inalteradas.

b) Si en cambio la masa de A se duplica y la de B se divide a la mitad,

A) F_{AB} se duplicará y F_{BA} no cambiará.
B) F_{AB} no cambiará y F_{BA} se duplicará.
C) F_{AB} y F_{BA} se duplicarán.
D) F_{AB} y F_{BA} permanecerán inalteradas.

14-3 La constante gravitacional G

4. Las dimensiones de G son equivalentes a

(A) energía/momento^2. (B) velocidad^4/fuerza.
(C) distancia^3/fuerza^2.
(D) velocidad^3/momento angular.

14-4 Gravitación cerca de la superficie terrestre

5. Suponiendo que la Tierra sea una esfera uniforme de radio R_T, la variación local de la aceleración en caída libre g_0 respecto a la altura h arriba de la superficie es aproximadamente

A) $g_0 = g_{ref}$, no hay variación,
B) $g_0 = g_{ref}, (1 - h/R_T)$,
C) $g_0 = g_{ref}, (1 - 2h/R_T)$,
D) $g_0 = g_{ref}, (1 - 3h/R_T)$,

donde g_{ref} es la aceleración en caída libre sobre la superficie.

14-5 Los dos teoremas de los cascarones

6. Un cuerpo de simetría esférica y sin rotación tiene una densidad que varía notablemente con la distancia radial del centro. En su centro la aceleración de caída libre es

A) definitivamente mayor que cero.
B) posiblemente mayor que cero.
C) definitivamente igual a cero.

7. La aceleración debida a la gravedad en un hoyo hecho en un cuerpo de simetría esférica y no uniforme

A) aumentará si se va más profundo, alcanzando su máximo en el centro.
B) aumentará si se va más profundo, pero finalmente alcanzará un máximo y luego disminuirá al llegar al centro.
C) puede aumentar o disminuir conforme se va más profundo.
D) debe disminuir conforme se vaya más profundo.

(Véase "Gravity in a Mine Shaft" de Peter M. Hall y David J. Hall, *the Physics Teacher*, noviembre de 1995, p. 525.)

14-6 Energía potencial gravitacional

8. Considere un planeta de simetría esférica con una densidad de masa que depende de la distancia con su centro. La magnitud de la energía potencial gravitacional del sistema del planeta y de una masa de prueba será

A) cero en el centro y el valor máximo se presentará en la superficie del planeta.
B) no cero en el centro y el valor máximo se presentará en la superficie del planeta.
C) no cero en el centro, pero el valor máximo se presentará en algún punto debajo de la superficie y lejos del centro.
D) no cero en el centro y el valor máximo ocurrirá en el centro.

14-7 Los movimientos de los planetas y de los satélites

9. El Proyecto Starshine fue un satélite barato cuyo lanzamiento se proponía hacer participar a los niños de escuela en observaciones de órbita. Cuando encontró fricción procedente de la atmósfera terrestre, el radio de la órbita circular cercana disminuyó lentamente por varios meses.

a) Al disminuir el radio de la órbita, la energía total del satélite
A) aumentaba. B) permanecía inalterada.
C) disminuía.

b) Al disminuir el radio de la órbita, la energía cinética del satélite
A) aumentaba. B) permanecía inalterada.
C) disminuía.

c) Al disminuir el radio de la órbita, la rapidez promedio del satélite
A) aumentaba. B) permanecía inalterada.
C) disminuía.

10. En la figura 14-26 aparecen varias órbitas elípticas posibles de un satélite.

a) ¿Cuál órbita tiene el mayor momento angular?
b) ¿Cuál órbita tiene la mayor energía total?
c) ¿En cuál órbita se adquiere la máxima velocidad?

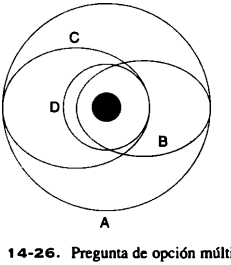


FIGURA 14-26. Pregunta de opción múltiple 10.

14-8 El campo gravitacional (Opcional)

14-9 Avances modernos en la gravitación (Opcional)

PREGUNTAS

1. La moderna astronomía observacional y las técnicas recientes de navegación emplean el punto de vista geocéntrico (o Ptolomeico) (usan la "esfera celeste" en rotación). ¿Es un procedimiento erróneo? Si no lo es, ¿con qué criterio se escoge el sistema (copernicano o ptolomeico) que utilizamos? ¿Cuándo usaremos el sistema heliocéntrico (o copernicano)?
2. Dos planetas casi nunca se ven a medianoche. ¿Cuáles son y por qué? ¿Puede esto considerarse una prueba en favor de la teoría heliocéntrica frente a la geocéntrica?
3. Si la fuerza de gravedad actúa en todos los cuerpos en proporción a su masa, ¿por qué un cuerpo pesado no cae más rápidamente que otro ligero?
4. ¿En qué forma el peso de una sonda espacial varía en su trayectoria de la Tierra a la Luna? ¿Cambiará su masa?
5. Es fácil calcular la razón de masa de la Tierra a la del Sol, si se conocen sólo los periodos de revolución y los radios orbitales de la Luna alrededor de la Tierra y los de ésta alrededor del Sol. ¿Es posible calcular G partiendo exclusivamente de observaciones astronómicas? Explique su respuesta.
6. En nuestro análisis del experimento de Cavendish (Fig. 14-5), se tomó en cuenta la atracción de las grandes esferas sólo en la pequeña más cercana a ellas. Cada una de las grandes atrae también la pequeña en el extremo opuesto de la varilla. ¿Qué efecto tiene esta atracción en la medición de G?
7. ¿Afecta la naturaleza del medio en cuestión a la fuerza gravitacional mutua ejercida por un par de los objetos? ¿Y la orientación de éstos? ¿Cómo comprobaría tales efectos por medio de un experimento?
8. Dado que la Tierra se ensancha cerca del ecuador, la fuente del río Mississippi (a unos 50° de latitud N), aunque a un alto nivel del mar, está unos 5 km más cerca del centro de la Tierra que su boca (a unos 30° de latitud N). ¿Cómo puede fluir "cuesta arriba" al dirigirse hacia el sur?
9. ¿Tendremos más azúcar por libra en el polo o en el ecuador? ¿Y qué decir de azúcar por kilogramo?
10. ¿Cómo podríamos medir la masa de la Luna?
11. Un reloj se basa en un resorte oscilante y el otro en un péndulo. Los dos se llevan a Marte. ¿Marcarán la misma hora que indicaban en la Tierra? ¿Coincidirán entre sí? Explique su respuesta. Marte tiene aproximadamente un décimo de la masa de la Tierra y un radio que mide la mitad.
12. En la superficie terrestre, con un martillo se golpea horizontalmente un objeto que se encuentra en una superficie horizontal y sin fricción. Después se lleva el objeto a la Luna, apoyado en la misma forma, y se le da un golpe igual con el mismo martillo. Por lo anterior podemos conjeturar: ¿cuál será la velocidad impartida al objeto en la Luna cuando lo comparemos con la debida al golpe propinado en la Tierra (despreciando de los efectos atmosféricos)?
13. La fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre la Luna es cerca del doble que la que ejerce la Tierra en la Luna. ¿Por qué la Luna no escapa de la Tierra?
14. Explique por qué el siguiente razonamiento es erróneo. "El Sol atrae todos los cuerpos situados en la Tierra. A medianoche, cuando se encuentra directamente debajo, atrae un objeto en la misma dirección que la atracción de la Tierra en el objeto; a mediodía, cuando el Sol se encuentra directamente arriba, atrae el objeto en dirección contraria a la atracción de la Tierra. En consecuencia, todos los objetos deberían pesar más a medianoche (o de noche) que a mediodía (de día)"
15. La atracción gravitacional del Sol y de la Luna en la Tierra produce mareas. El Sol ejerce un efecto aproximadamente de la mitad que el de la Luna. Sin embargo, la atracción directa del Sol en la Tierra es unas 175 veces mayor que la de la Luna. ¿Por qué entonces la Luna causa mareas más grandes?
16. Unas olas especialmente grandes, llamadas olas primaverales, se observan con luna llena y nueva, cuando la configuración del Sol, de la Tierra y de la Luna son las que se muestran en la figura 14-27. Basándose en la figura podría concluirse (incorrectamente) que los efectos de marea del Sol y de la Luna tienden a sumarse con luna nueva y a cancelarse con luna llena. Pero contra lo previsto, se suman en ambas configuraciones. Explique por qué.

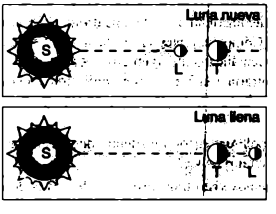


FIGURA 14-27. Pregunta 16.

17. Si las mareas lunares disminuyen la velocidad de rotación de la Tierra (debido a la fricción), disminuye el momento angular de la Tierra. ¿Qué sucede con el movimiento de la Luna como consecuencia de la conservación del momento angular? ¿Interviene en este caso el Sol (y las mareas solares)? (Consúltese "Tides and the Earth-Moon System" de Peter Goldreich, *Scientific American*, abril de 1972, p. 42.)
18. Según la segunda ley de Kepler y las observaciones del movimiento solar visto desde la Tierra, ¿cómo puede deducirse que el hemisferio norte está más cerca del Sol durante el invierno que durante el verano? ¿Por qué no hace más frío en verano que en invierno?
19. ¿Cómo diferirían los resultados del problema resuelto 14-4 aplicables a la fuerza y a la rapidez en el radio r, si la densidad de la Tierra no fuera uniforme, sino que *a*) disminuyera al aumentar r, o si *b*) aumentara al crecer r?
20. ¿Por qué podemos conocer mejor la forma de la Tierra estudiando el movimiento de un satélite artificial que el movimiento de la Luna?
21. Un satélite en la órbita terrestre experimenta una pequeña fuerza de resistencia al avance cuando comienza a entrar en la atmósfera terrestre. ¿Qué sucede con su velocidad? (¡Tenga mucho cuidado!)
22. ¿Esperaría que la energía total del sistema solar sea constante? ¿Y el momento angular total? Explique sus respuestas.
23. ¿Necesita siempre un cohete la rapidez de escape de 11.2 km/s para dejar la Tierra? Si la respuesta es negativa, ¿qué significa entonces la expresión "rapidez de escape"?

24. Los objetos en reposo sobre la superficie de la Tierra describen trayectorias circulares con un periodo de 24 h. ¿Están "en órbita" en el sentido de que un satélite terrestre lo está? ¿Por qué no? ¿Cuánto deberá durar el "día" para poner tales objetos en órbitas verdaderas?

25. Sin tener en cuenta la fricción del aire ni problemas técnicos, ¿puede ponerse en órbita un satélite disparándolo de un enorme cañón colocado en la superficie terrestre? Explique su respuesta.

26. ¿Qué ventaja ofrece Florida sobre California para lanzar satélites estadounidenses (no polares)?

27. ¿Puede un satélite describir una órbita estable en un plano que no pase por el centro de la Tierra? Explique su respuesta.

28. Si un observador realiza mediciones desde la Tierra, ¿habrá diferencia en los periodos de dos satélites, ambos en una órbita circular cerca de la Tierra en un plano ecuatorial pero dirigiéndose uno el este y el otro al oeste?

29. Los satélites en órbita se queman a veces durante su descenso a la Tierra, pero no se queman durante su ascenso en órbita. Explique por qué.

30. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. ¿Cómo cambiará su órbita si uno de los cohetes queda fijo momentáneamente *a*) en dirección de la Tierra, *b*) en dirección contraria a la Tierra, *c*) en dirección hacia el frente, *d*) en dirección hacia atrás y *e*) en ángulos rectos con el plano de la órbita?

31. ¿Qué problemas encontrará dentro de una nave espacial para caminar, saltar o beber?

32. Todos hemos visto transmisiones televisivas desde naves espaciales en órbita y hemos contemplado a los objetos flotar alrededor de una gravedad cero efectiva. Suponga que un astronauta, abrazado a la estructura de la nave, patea una bola de boliche flotante. ¿Se lastimará el pie? Explique su respuesta.

33. Si hiciéramos más grande un planeta de determinada densidad agregándole material del espacio, su fuerza de atracción en un objeto colocado en su superficie se incrementaría debido a la mayor masa del planeta o disminuiría debido a la mayor distancia del objeto con el centro del planeta. ¿Qué efecto predomina?

34. Las órbitas de los satélites alrededor de la Tierra son elípticas (o circulares) y, no obstante esto, en el capítulo 4 dijimos que los proyectiles lanzados de la Tierra siguen trayectorias parabólicas. ¿Cuál de las dos afirmaciones es correcta?

35. Los satélites terrestres artificiales pueden localizar el nivel medio del mar con gran precisión. Sin embargo, arriba de las rocas petroleras el nivel llega a ser hasta 1 m más alto que el de las rocas (que suelen ser más densas). Explique esto.

36. *a*) Para que dos observadores en dos posiciones cualesquiera en el ecuador terrestre mantengan comunicación por radio usando satélites en la órbita geosincrónica, ha de haber por lo menos tres de ellos. Explique por qué. *b*) Encuentre la separación angular máxima de dos de los satélites.

37. Se deja caer una piedra en el centro de un pozo de mina. Suponga que no hay resistencia del aire, pero tenga en cuenta la rotación de la Tierra. ¿Seguirá la piedra su movimiento a lo largo del centro del pozo? Si no es así, describa su movimiento.

38. ¿Por qué no existe prácticamente atmósfera en la Luna?

39. ¿Requiere la ley de gravitación universal que las órbitas de los planetas del sistema solar sean las observadas actualmente? ¿Tendrán las mismas órbitas los planetas de otra estrella semejante al Sol? Mencione algunos factores que hayan determinado las órbitas especiales observadas.

40. ¿Importa la dirección en que se coloque un cohete para que escape de la Tierra? Suponga, por supuesto, que está dirigido arriba del horizonte y no tenga en cuenta la resistencia al aire.

41. Para un vuelo a Marte, se dispara un cohete en la dirección en que se desplaza la Tierra en su órbita. Para un vuelo a Venus, se dispara hacia atrás a lo largo de la órbita. Explique por qué.

42. Saturno está seis veces más lejos del Sol que la Tierra. ¿Cuál de los dos planetas tiene *a*) el máximo periodo de revolución, *b*) la mayor velocidad orbital y *c*) la más grande rapidez angular?

43. Consúltese la figura 14-28. ¿Qué se grafica en ella? Ponga números con unidades en cada eje.

44. ¿Cómo puede el capitán de una nave espacial, que se dirige a un planeta antes desconocido, deducir el valor de g en la superficie del planeta?

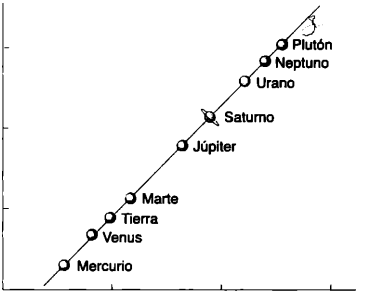


FIGURA 14-28. Pregunta 43.

45. Un cubo de hierro se coloca cerca de una esfera del mismo material en un sitio lejano de la gravedad terrestre. ¿Qué puede usted decir de la ubicación del centro de gravedad del cubo? ¿De la esfera? En términos generales, ¿la ubicación del centro de gravedad de un objeto depende de la naturaleza del campo gravitacional donde esté colocado?

46. ¿Cómo podría determinar si dos objetos tienen *a*) la misma masa gravitacional, *b*) la misma masa inercial y c) el mismo peso?

47. Considere un satélite artificial en una órbita circular alrededor de la Tierra. Indique cómo las siguientes propiedades del satélite varían con el radio r de su órbita: *a*) periodo, *b*) energía cinética, *c*) momento angular y (*d*) rapidez.

48. Viaja usted en el *S. S. Arthur C. Clarke*, la primera nave interestelar. Ésta gira alrededor de un eje central para simular la gravedad de la Tierra. Si se encuentra usted en una cabina cerrada, ¿cómo podría saber que no está en la Tierra?

49. ¿Podemos considerar la gravedad una fuerza "ficticia" que proviene de la aceleración de nuestro marco de referencia en relación con un marco de referencia inercial y no como una fuerza "real"?

50. La teoría de fuerza gravitacional considerada como una "acción a distancia" significa que la acción es instantánea. En realidad, la teoría física actual supone que la gravitación se propaga con

rapidez finita, y esto se tiene en cuenta al modificar la física clásica representada por la teoría general de la relatividad. ¿Qué sucedería con las deducciones clásicas si se supusiera que la acción no es instantánea? (Consúltese también "Infinite Speed of Propagation of Gravitation in Newtonian Physics" de I. J. Good, *American Journal of Physics*, julio de 1975, p. 640.)

EJERCICIOS

14-1 Origen de la ley de gravitación

14-2 Ley de la gravitación universal de Newton

1. El Sol y la Tierra pueden ejercer una fuerza gravitacional en la Luna. Calcule la razón F_s/F_T de ambas fuerzas. (La distancia promedio entre el Sol y la Luna es igual a la que existe entre el Sol y la Tierra.)
2. ¿A qué distancia de la Tierra debe encontrarse una sonda espacial en línea con el Sol, de modo que la atracción gravitacional de éste equilibre la de aquélla?
3. Uno de los satélites Echo era un globo aerostático de aluminio, de 30 m de diámetro y de 20 kg de masa. Un meteoro con una masa de 7.0 kg pasa a 3.0 m de la superficie del satélite. Si se ignora el efecto de todos los cuerpos menos del meteoro y del satélite, ¿qué fuerza gravitacional experimenta el meteoro en el mayor acercamiento al satélite?

14-3 La constante gravitacional G

4. En la balanza de Cavendish (Fig. 14-15), supóngase que M = 12.7 kg y que m = 9.85 g. La longitud de la varilla que conecta las esferas pequeñas es 52.4 cm. Cuando la distancia entre los centros de las esferas pequeñas y grandes es 10.8 cm, calcule *a*) la fuerza gravitacional entre una esfera grande y la esfera pequeña cercana, y *b*) los pares en la varilla.

14-4 Gravitación cerca de la superficie terrestre

5. Pesa usted 120 lb al nivel de la acera fuera del World Trade Center de Nueva York. Suponga que de este nivel sube a la parte superior de una de sus torres de 1350 ft. ¿Cuánto menos pesará allí porque se halla ligeramente lejos del centro de la Tierra?
6. ¿A qué altitud sobre la superficie terrestre es la aceleración en caída libre igual a 7.35 m/s^2 (tres cuartos de su valor en la superficie?
7. Una estrella típica de neutrones puede tener una masa igual a la del Sol, pero un radio apenas de 10.0 km. *a*) ¿Cuál es la aceleración gravitacional en la superficie de la estrella? *b*) ¿Con qué rapidez se movería un objeto si cayera del reposo a una distancia de 1.20 m en la estrella?
8. *a*) Calcule g_0 en la superficie de la Luna partiendo de los valores de la masa y del radio de la Luna que vienen en el apéndice C. *b*) ¿Cuánto pesará un objeto en la superficie de la Luna si pesa 100 N en la de la Tierra? *c*) ¿A cuántos radios terrestres se encontrará de la superficie terrestre este mismo objeto, si debe pesar lo mismo que en la superficie lunar?
9. Si g debe determinarse dejando caer un objeto una distancia (exacta) de 10 m, ¿con qué precisión debe medirse el tiempo para obtener un buen resultado a 0.1%? Calcule en milisegundos el error porcentual y el error absoluto.

14-5 Los dos teoremas de los cascarones

10. Dos cascarones concéntricos de densidad uniforme que tienen masas M_1 y M_2 están situados como se indica en la figura 14-29. Determine la fuerza en la partícula de masa m cuando se halla en *a*) $r = a$, *b*) $r = b$ y *c*) $r = c$. La distancia r se mide del centro de los cascarones.

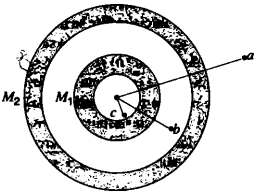


FIGURA 14-29. Ejercicio 10.

11. Demuestre que, en el fondo de un pozo vertical de mina cavado a una profundidad D, el valor medido de g será
$$g = g_s\left(1 - \frac{D}{R}\right),$$
donde g_s es el valor superficial. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme de radio R.

14-6 Energía potencial gravitacional

12. Se conjetura que una estrella extinguida podría disminuir a un "radio gravitacional", definido como el radio donde el trabajo necesario para llevar un objeto de masa m de la superficie de la estrella al infinito es igual a su energía en reposo mc^2. Demuestre que el radio gravitacional del Sol es GM_s/c^2 y determine su valor en función del radio actual del Sol. (Un estudio de este fenómeno puede consultarse en "Black Holes: New Horizons in Gravitational Theory" de Philip C. Peters, *American Scientist*, septiembre-octubre de 1974, p. 575.)
13. Una nave espacial está detenida en los bordes de nuestra galaxia, a 80,000 años luz del centro galáctico. ¿Qué rapidez mínima debe tener para que escape totalmente de la atracción gravitacional de la galaxia? La masa de la galaxia es 1.4×10^{11} veces la de nuestro Sol. Por razones de simplicidad, suponga que la materia que forma la galaxia se distribuye con simetría esférica.
14. Demuestre que la velocidad de escape del Sol a la distancia de la tierra al Sol es $\sqrt{2}$ multiplicada por la velocidad de la Tierra en su órbita, supuestamente un círculo. (Es un caso específico de un resultado general de las órbitas circulares: $v_{esc} = \sqrt{2}v_{orb}$.
15. Un cohete acelera hasta alcanzar una rapidez de $v = 2\sqrt{gR_E}$ cerca de la superficie terrestre y luego asciende. *a*) Demuestre que escapará de la Tierra. *b*) Demuestre que muy lejos de la Tierra su rapidez es $v = \sqrt{2gR_E}$.
16. El Sol, cuya masa es 2.0×10^{30} kg, gira alrededor del centro de la Vía Láctea, que está a una distancia de 2.2×10^{20} m. Estime el número de estrellas de la galaxia. (*Sugerencia*: Para simplificar los cálculos, suponga que las estrellas están distribuidas con sime-

tría esférica alrededor del centro galáctico y que nuestro Sol se halla esencialmente en el borde de la galaxia.)

17. Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie terrestre con una rapidez inicial de 9.42 km/s. Despreciando de la fricción atmosférica, ¿a qué altura de la superficie llegará?

18. *a*) Calcule la rapidez de escape en Europa, un satélite de Júpiter. El radio de este satélite mide 1,569 km y la aceleración en caída libre en su superficie es de 1.30 m/s^2. *b*) ¿A qué altura se elevará la partícula si deja la superficie del satélite con una velocidad vertical de 1.01 km/s? *c*) ¿Con qué rapidez golpeará el satélite un objeto si se deja caer desde una altura de 1,000 km? *d*) Calcule la masa de Europa.

19. Dos estrellas de neutrones están separadas por una distancia de centro a centro de 93.4 km. Tienen una masa de 1.56×10^{30} kg y un radio de 12.6 km. Inicialmente se hallan en reposo entre sí. *a*) ¿Con qué rapidez se desplazan cuando su separación se reduce a la mitad de su valor inicial? *b*) ¿Con qué rapidez se desplazan antes de chocar? No tenga en cuenta los efectos relativistas.

20. Dos partículas de masa m y M se hallan inicialmente en reposo separadas por una distancia infinita. Demuestre que en cualquier instante su velocidad relativa de acercamiento atribuible a la atracción gravitacional es $\sqrt{2G(M+m)/d}$, donde d es su separación en ese momento.

21. Dos partículas semejantes a un punto, con una masa m, están originalmente separadas por una distancia d y se mueven en dirección contraria con una rapidez de v. ¿Cuál es el valor máximo de v, de modo que las partículas finalmente volverán a retroceder juntas bajo la influencia de la atracción gravitacional mutua?

14-7 El movimiento de los planetas y de los satélites

22. La distancia media de Marte al Sol es 1.52 veces la existente entre la Tierra y el Sol. A partir de este dato calcule cuántos años tarda Marte en realizar una revolución alrededor del Sol; compare su respuesta con el valor dado en el apéndice C.

23. Fobos, uno de los satélites del planeta Marte, recorre una órbita de 9400 km de radio, con un periodo de 7 h 39 min. Calcule la masa de Marte con esta información. (La masa de Fobos es despreciable en comparación con la de Marte.)

24. Determine la masa de la Tierra a partir del periodo T y el radio r de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra: $T = 27.3$ días y $r = 3.82 \times 10^5$ km.

25. Se pone un satélite en una órbita circular con un radio igual a la mitad del radio de la órbita lunar. ¿Cuál es su periodo de revolución en meses lunares? (El mes lunar es el periodo de traslación de la Luna.)

26. Se han colocado satélites espía en la órbita geosincrónica arriba del ecuador terrestre. ¿Cuál es la máxima altitud L de donde los satélites son visibles desde la superficie terrestre? (Fig. 14-30.)

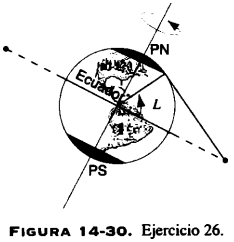


FIGURA 14-30. Ejercicio 26.

27. Una nave espacial de reconocimiento da vueltas alrededor de la Luna a muy baja altitud. *a*) Calcule su rapidez y *b*) su periodo de traslación. Tome del apéndice C los datos necesarios para la Luna.

28. Use la conservación de la energía y la ecuación 14-25 para la energía total a fin de demostrar que la rapidez v de un objeto en una órbita elíptica satisface la relación

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

29. Un cometa que se desplaza en una órbita de excentricidad 0.880 tiene una rapidez de 3.72 km/s cuando está más lejos del Sol. Determine su rapidez cuando está más cerca de él.

30. *a*) Exprese la constante gravitacional G que aparece en la ley de gravedad de Newton en función de la unidad astronómica AU como una unidad de longitud, la masa solar M_s como una unidad de masa y el año como una unidad de tiempo. (1 AU = 1.496×10^{11} m, 1 $M_s = 1.99 \times 10^{30}$ kg, 1 y = 3.156×10^7 s.) *b*) ¿Qué forma adopta en estas unidades la tercera ley de Kepler (Ec. 14-23)?

31. Demuestre cómo, guiándose por la tercera ley de Kepler, Newton logró deducir lo siguiente: la fuerza que sostiene a la Luna en su órbita, supuestamente circular, debe variar como el cuadrado inverso de la distancia del centro de la Tierra.

32. Como se muestra en la figura 14-31, dos cuerpos (de masas m y M) que interactúan a través de su fuerza gravitacional mutua girarán con la misma rapidez angular ω alrededor de su centro de masa C. *a*) Demuestre que en este caso la ley de periodos de Kepler (ecuación 14-23) se convierte en

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2.$$

b) Evalúe el factor de corrección $(1 + R/r)^2$ para el movimiento de la Tierra y del Sol, lo mismo que para el de la Tierra y la Luna, ignorando en ambos casos el efecto gravitacional producen los que otros cuerpos del sistema solar.

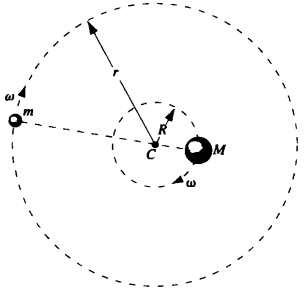


FIGURA 14-31. Ejercicio 32.

33. Un par de estrellas giran alrededor de su centro de masa común, como en la figura 14-31. Una de ellas tiene una masa M que equivale al doble de la masa m de la otra, es decir, $M = 2m$. Sus centros están a una distancia d, donde d es grande en comparación con el tamaño de las dos estrellas. *a*) Obtenga una expresión para el periodo de traslación de las estrellas alrededor de su centro de masa común en función de d, m y G. *b*) Compare los momentos angulares de las dos estrellas alrededor de su centro

de masa común, calculando para ello la razón L_m/L_M. *c*) Compare las energías cinéticas de las dos estrellas calculando para ello la razón K_m/K_M.

34. *a*) ¿Se necesita más energía para hacer subir un satélite a 1,600 km arriba de la Tierra que para ponerlo en órbita una vez que alcance esa altura? *b*) ¿Va 3,200 km? *c*) ¿Y a 4,800 km? Suponga que el radio de la Tierra mide 6400 km.

35. El asteroide Eros, uno de los muchos planetas menores que giran alrededor del Sol en la región comprendida entre Marte y Júpiter, tiene un radio de 7.0 km y una masa de 5.0×10^{15} kg. *a*) Si estuviera de pie en él, ¿podría levantar un camión de carga de 2,000 kg? *b*) ¿Podría correr lo bastante rápido para colocarse en órbita? Ignore los efectos debidos a la rotación del asteroide. (Nota: Las marcas olímpicas de la carrera de 400 m corresponden a una velocidad de 9.1 m/s para los varones y de 8.2 m/s para las mujeres.)

36. La órbita terrestre alrededor del Sol es casi circular. Las distancias más cercana y lejana son 1.47×10^8 km y 1.52×10^8 km, respectivamente. Determine las variaciones máximas de *a*) la energía potencial, *b*) la energía cinética, *c*) la energía total y *d*) la rapidez orbital que resulta de la distancia cambiante entre Tierra y Sol a lo largo de 1 año. (*Sugerencia*: Use la conservación de la energía y el momento angular.)

37. Suponga que un satélite geosincrónico de comunicaciones está en órbita en la longitud de Chicago. Usted se halla en esa ciudad y quiere captar sus señales. ¿En qué dirección deberá apuntar el eje de su antena parabólica? La latitud de Chicago es 47.5° N.

38. Usando los datos del problema resuelto 14-10, calcule *a*) la velocidad de la nave espacial *B* al momento que cruza el punto *P'*, y *b*) su rapidez promedio en la órbita después del impulso. Aproxime la trayectoria de *B* como un círculo. Compare los resultados con las cantidades correspondientes de la nave espacial *A*.

39. El proyecto Starshine fue un satélite barato (de 39 kg de masa) lanzado para alentar la participación mundial de los niños de primaria en la medición orbital de los satélites. Los datos tomados de una parte de la órbita se incluyen en la figura 14-32. *a*) ¿Cuál fue el periodo orbital del satélite en los años 1999/2000? *b*) ¿Con qué rapidez perdía el satélite energía a fines de ese siglo?

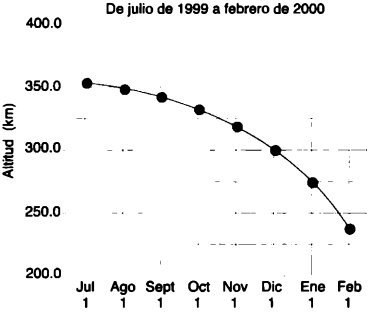


FIGURA 14-32. Ejercicio 39.

14-8 El campo gravitacional (Opcional)

14-9 Avances modernos en la gravitación (Opcional)

PROBLEMAS

1. Dos objetos en forma de punto, con una masa *m*, están conectados por una cuerda sin masa de longitud *l*. Se encuentran suspendidos verticalmente cerca de la superficie terrestre, de modo que un objeto cuelga debajo del otro. Después se los deja caer. Demuestre que la tensión de la cuerda es

$$T = \frac{GMml}{R^3}$$

donde *M* es la masa de la Tierra y *R* es su radio.

2. Demuestre que la aceleración de caída libre es igual a la de la Tierra en un planeta hipotético, cuyo diámetro mide la mitad del de ella, pero cuya densidad es el doble.

3. Considere un marco de referencia inercial cuyo origen esté fijo en el centro de masa del sistema Tierra + cuerpo en caída. *a*) Demuestre que la aceleración hacia el centro de masa de ambos cuerpos no depende de la masa del cuerpo. *b*) Demuestre que la aceleración mutua o relativa de los dos depende de la suma de su masa. Comente después el significado de la afirmación de que un cuerpo cae hacia la Tierra con una aceleración independiente de su masa.

4. Dos objetos, con una masa *m*, penden de cuerdas de distinta longitud en una báscula sobre la superficie terrestre, como se aprecia en la figura 14-33. Si las cuerdas tienen una masa despreciable y su longitud difiere en *h*, *a*) demuestre que el error de peso, asociado al hecho de que *W'* está más cerca de la Tierra que *W*, es $W' - W = 8\pi G\rho mh/3$, donde ρ es la densidad de masa de la Tierra (5.5 g/cm^3). *b*) Encuentre la diferencia de longitud que causará un error de una parte en un millón.

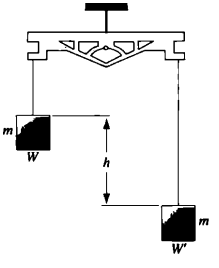


FIGURA 14-33. Problema 4.

5. *a*) Escriba una expresión de la fuerza ejercida por la Luna, de masa *M*, sobre una partícula de agua, de masa *m*, en la Tierra en *A*, directamente debajo de la Luna, como se indica en la figura 14-34. El radio terrestre es *R* y la distancia de centro a centro entre Tierra y Luna es *r*. *b*) Suponga que la partícula de agua se ha-

llaba en el centro de la Tierra. ¿Qué fuerza ejercería allí la Luna? *c*) Demuestre que la diferencia en estas fuerzas está dada por

$$F_T = \frac{2GMmR}{r^3}$$

y que representa la *fuerza de marea*, es decir, la fuerza en el agua respecto a la Tierra. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de marea? *d*) Repita el ejercicio con la partícula de agua en *B*, en el extremo lejano de la Tierra respecto a la Luna. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de marea? *e*) Explique por qué hay dos crestas de marea en los mares (y en la Tierra sólida), una que apunta hacia la Luna y otra en dirección contraria.

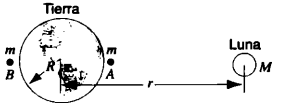


FIGURA 14-34. Problema 5.

6. Un objeto está suspendido en una báscula de resorte en un barco que navega por el ecuador con una velocidad v. Demuestre que la lectura de la báscula estará muy cerca de $W_0(1 \pm 2\omega v/g)$, donde ω es la rapidez angular de la Tierra y W_0 es la lectura cuando el barco está detenido. Explique el más o el menos.
7. En el libro *3001: The Final Odyssey*, Arthur C. Clarke escribe acerca de una torre que se prolonga desde el ecuador terrestre hasta una órbita geosincrónica. *a*) El héroe Frank Poole se encuentra en ella y calcula que a esta altitud la aceleración en caída libre será $g/2$. ¿Cuál es la altitud de Poole si se tiene en cuenta el movimiento rotacional? *b*) Calcule el trabajo necesario para levantar una masa de 100 kg desde la superficie terrestre hasta la altitud geosincrónica pasando por la torre. Compare después el resultado con el consumo de energía de un cohete que puede hacer lo mismo hoy. (*Sugerencia*: Suponga que la corrección rotacional es pequeña y resuelva iterativamente.)
8. La máxima velocidad posible de rotación de un planeta es aquella en que la fuerza gravitacional en el material en el ecuador apenas suministra suficiente fuerza centrípeta para la rotación. (¿Por qué?) *a*) Después demuestre que el periodo más breve correspondiente de rotación está dado por

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

donde ρ es la densidad del planeta, supuestamente homogénea. *b*) Evalúe el periodo de rotación suponiendo una densidad de $3.0\ \mathrm{g/cm^3}$, típica de muchos planetas, satélites y asteroides. No se conoce ningún objeto que gire con un periodo menor que el señalado por este análisis.
9. Los medidores sensibles que miden la aceleración local g en caída libre sirven para detectar la presencia de depósitos de rocas cercanas a la superficie, cuya densidad es mucho mayor o menor que la del ambiente. También pueden localizarse cavidades como cavernas y pozos de minas abandonadas. *a*) Demuestre que el componente vertical de g a una distancia x del punto directamente arriba del centro de una caverna esférica (Fig. 14-35) es menor del previsto, suponiendo una distribución uniforme de roca de densidad ρ por la siguiente cantidad

$$\Delta g = \frac{4\pi}{3}R^3G\rho\frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}},$$

donde R es el radio de la caverna y d es la profundidad de su centro. *b*) Los valores anteriores de Δg, denominados anomalías, suelen ser muy pequeños y expresarse en miligals, donde 1 gal = $1\ \mathrm{cm/s^2}$. Los buscadores de petróleo que realizan un estudio de la gravedad descubren que Δg varía de 10.0 miligals a un máximo de 14.0 miligals en una distancia de 150 m. Suponiendo que la más grande anomalía se registre directamente arriba del centro de una caverna esférica que, según se sabe, se localiza en esa región, determine su radio y la profundidad del lecho de la caverna en ese punto. Las rocas cercanas tienen una densidad de $2.80\ \mathrm{g/cm^3}$. *c*) Suponga que la caverna, en vez de estar vacía, se halla inundada completamente con agua. ¿Qué indican ahora las lecturas de la gravedad en *b*) respecto a su radio y profundidad?

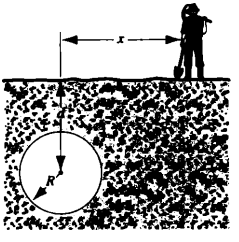


FIGURA 14-35. Problema 9.

10. Demuestre que la aceleración de la gravedad en una mina vertical deberá ser independiente de la profundidad, si la densidad local de la Tierra ρ_l es 2/3 de su densidad promedio. Suponga que la Tierra es un cuerpo de simetría esférica y que no gira. (Véase "Gravity in a Mine Shaft" de Peter M. Hall y David J. Hall, *The Physics Teacher*, noviembre de 1995, p. 525.)
11. El siguiente problema se tomó del examen "Olympic" de 1946 de la Universidad Estatal de Moscú (Fig. 14-36): se hace un hoyo esférico en una esfera de plomo de radio R, tal que su superficie toque la superficie externa de la esfera y su centro. La masa de la esfera antes de hacer el hoyo era M. ¿Con qué fuerza, según la ley de gravitación universal, atraerá un esfera pequeña de masa m que está a una distancia d del centro de la esfera de plomo en la línea recta que conecta el centro de las esferas y el del hoyo?

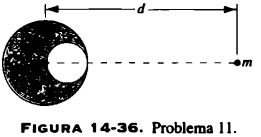


FIGURA 14-36. Problema 11.

12. *a*) ¿Cuánto tarda la partícula del problema resuelto 14-4 en caer de la superficie de la Tierra a su centro? (*Sugerencia*: Use la expresión con $v(r) = dr/dt$ dada en la solución del problema resuelto 14-4 para encontrar una expresión que pueda integrar y que le permita dar t en función de r. Consulte la sección 12-5.) *b*) Después de llegar al centro, ¿cuánto tarda una partícula en llegar a la superficie terrestre? ¿Cuál es el intervalo temporal total que la partícula tarda en realizar un viaje redondo y en retornar al punto de partida? *c*) Compare el tiempo del viaje con el

tiempo de una órbita de un satélite cerca de la superficie y explique la semejanza de ambas cantidades.

13. La figura 14-37 muestra una sección transversal (no a escala) en el interior de la Tierra. En vez de ser totalmente uniforme, la Tierra se divide en tres zonas: una costra externa, un manto y un núcleo central. Las dimensiones de las zonas y la masa contenida dentro de ellas aparecen en la figura. La Tierra tiene una masa total 5.98×10^{24} kg y un radio de 6370 km. Ignore la rotación y suponga que la Tierra es esférica. *a*) Calcule g en la superficie. *b*) Suponga que un hoyo de barreno se practica en la interfaz costra-manto (el Moho); ¿cuál será el valor de g en el fondo del hoyo? *c*) Suponga que la Tierra fuera una esfera uniforme con la misma masa y tamaño totales. ¿Qué valor tendría g a una profundidad de 25 km? Use el resultado del ejercicio 11. Las mediciones precisas de g son pruebas sensibles de la estructura interior de la Tierra, aunque los resultados pueden quedar oscurecidos con las variaciones locales de densidad y con la falta de conocimientos exactos sobre el valor de G.

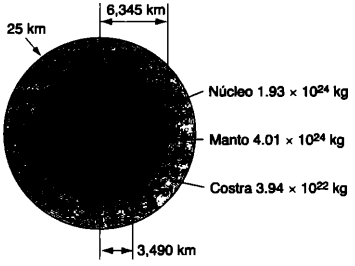


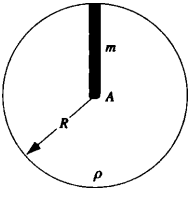
FIGURA 14-37. Problemas 13 y 14.

14. Use el modelo de la Tierra que aparece en la figura 14-37 para examinar la variación de g con la profundidad en el interior de la Tierra. *a*) Encuentre g en la interfaz núcleo-manto. ¿Cómo varía g entre esta interfaz y el centro de la Tierra? *b*) Demuestre que g tiene un mínimo local dentro del manto; determine la distancia con el centro de la Tierra donde esto ocurre y el valor asociado de g. *c*) Haga un boceto que muestre la variación de g en el interior de la Tierra.

15. *a*) La figura 14-38*a* muestra un objeto planetario de densidad uniforme ρ y de radio R. Demuestre que un esfuerzo compresivo (definido como fuerza por área transversal unitaria) cerca del centro está dado por

$$S = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

(*Sugerencia*: Construya una columna estrecha de superficie transversal A que se extienda del centro a la superficie. El peso del material en la columna es mg_{pro}, donde m es la masa del material y g_{pro} es el valor de g a la mitad entre el centro y la superficie.) *b*) En nuestro sistema solar, los objetos (asteroides, pequeños satélites y cometas, por ejemplo) con "diámetro" menor que 600 km pueden tener una forma muy irregular (Fig. 14-38*b*, que muestra Hiperion, un satélite pequeño de Saturno), mientras que los que tienen un diámetro mayor son esféricos. Sólo si las rocas tienen suficiente fuerza para resistir la gravedad no podrá un objeto conservar su forma esférica. Calcule el esfuerzo máximo de compresión que puede ser soportado por las rocas que constituyen los asteroides. Suponga una densidad de 4,000 kg/m³. *c*) ¿Cuál es el tamaño mayor posible de un satélite no esférico autogravitante hecho de concreto? Suponga que el concreto tiene un esfuerzo máximo de compresión de 4.0×10^7 N/m² y una densidad $\rho = 3{,}000$ kg/m³.



a)

b)

FIGURA 14-38. Problema 15.

16. Una partícula de masa m se encuentra a una distancia y de una varilla delgada e infinitamente larga, con una densidad lineal de masa λ. Demuestre que la fuerza de gravitación entre la varilla y la partícula es s $F = 2Gm\lambda/y$, dirigida perpendicularmente a la varilla. (*Sugerencia*: Supóngase que la perpendicular de la partícula a la varilla define el origen. Considere dos diferenciales de masa $dm = \lambda\, dx$ situados en $\pm x$ a lo largo de la varilla. Calcule la fuerza total dF (magnitud y dirección) ejercidos sobre la partícula por estos dos diferenciales de masa. Después integre sobre x de cero al infinito.)

17. Considere una partícula en el punto P en alguna parte del interior de un cascarón esférico de materia. Suponga que el cascarón tiene espesor y densidad uniformes. Construya un cono doble estrecho con ápice en P que intersecte las áreas dA_1 y dA_2 en el cascarón (figura 14-39). *a*) Demuestre que la fuerza gravitacional resultante ejercida en la partícula P por los elementos

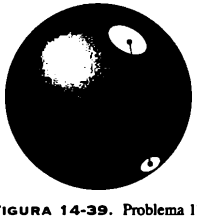


FIGURA 14-39. Problema 17.

intersectados de masa es cero. *b*) Después demuestre que la fuerza gravitacional resultante del cascarón entero en una partícula interna es cero. (Este método lo diseñó Newton.)

18. Una esfera de materia, con masa M y radio a, tiene una cavidad concéntrica de radio b, como se muestra en la sección transversal de la figura 14-40. *a*) Dibuje la fuerza gravitacional F ejercida por la esfera en una partícula de masa m que se encuentra a una distancia r del centro de la esfera, en función de r y en el intervalo $0 \leq r \leq \infty$. Considere en particular los puntos $r = 0$, b, a y ∞. *b*) Dibuje la curva correspondiente de la energía potencial $U(r)$ del sistema. *c*) Usando estas gráficas, ¿cómo obtendría las de la fuerza del campo gravitacional debido a la esfera?

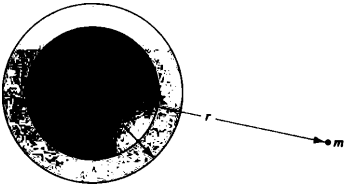


FIGURA 14-40. Problema 18.

19. Las esferas de 2.53 kg y 7.16 kg de masa están fijadas a una distancia de 1.56 m (centro a centro). Una esfera de 212 g se pone a 42.0 cm del centro de la esfera de 7.16 kg, sobre la línea de centros. ¿Cuánto trabajo debe realizar un agente externo para mover la esfera de 212 g a lo largo de la línea de centros y ponerla a 42.0 cm del centro de la esfera de 2.53 kg?

20. Un cohete es impulsado a una altitud h sobre la superficie terrestre. Su rapidez v_0 al apagarse supera la de escape v_{esc} apropiada a esa altura. Demuestre que su rapidez V muy lejos de la Tierra está dada por

$$v = (v_0^2 - v_{esc}^2)^{1/2}.$$

21. En un sistema de estrellas dobles, dos estrellas de masa 3.22×10^{30} kg giran alrededor de su centro de masa común a una distancia de 1.12×10^{11} m. *a*) Calcule en años su periodo común de traslación (ejercicio 32). *b*) Suponga que un asteroide (partícula sólida y pequeña en el espacio) cruza por el centro de masa moviéndose en ángulos rectos con el plano orbital de las estrellas. ¿Cuál debe ser su velocidad para que escape del campo gravitacional de la estrella doble?

22. Varios planetas (los gigantes gaseosos Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) poseen anillos circundantes casi circulares, compuestos quizá de material que no ha formado un satélite. Además, muchas galaxias contienen estructuras anulares. Suponga un anillo homogéneo de masa M y de radio R. *a*) Encuentre una expresión de la fuerza gravitacional ejercida por el anillo sobre una partícula a lo largo de su eje (Fig. 14-41). *b*) Suponga que la partícula cae del reposo por la atracción del anillo de materia. Encuentre una expresión de la rapidez con que atraviesa el centro del anillo.

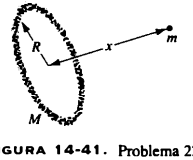


FIGURA 14-41. Problema 22.

23. Nueve partículas pequeñas, con una masa m, están dispuestas uniformemente alrededor de un anillo de radio R. *a*) Calcule la fuerza gravitacional neta de las partículas debida a las ocho partículas restantes. *b*) Determine el periodo rotacional del anillo necesario para evitar que éste se colapse bajo la atracción gravitacional mutua de las partículas.

24. Dos partículas en forma de punto, con una masa m, están originalmente en reposo y separadas por una distancia d. Demuestre que el tiempo para que se unan bajo la influencia de la gravedad es

$$t_{\text{encuentro}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{d^3}{Gm}}.$$

(Véase "The Period of $\vec{F} = 2kx^n$ Harmonic Motion" de Chris Hirata y David Thiessen, *The Physics Teacher*, diciembre de 1995, p. 563.)

25. Suponga dos satélites A y B de igual masa m, que describan la misma órbita circular de radio r alrededor de la Tierra, pero en sentido opuesto de revolución y, por tanto, en una trayectoria de colisión (Fig. 14-42). *a*) En función de G, M_T, m y r, calcule la energía mecánica total del sistema dos satélites + Tierra antes de la colisión. *b*) Si la colisión es completamente Inelástica, de modo que los restos sean material retorcido, calcule la energía mecánica total inmediatamente después de la colisión. *c*) Describa el movimiento tras el choque.

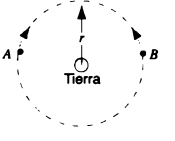


FIGURA 14-42. Problema 25.

26. El centro del Sol está en un foco de la órbita terrestre. ¿A qué distancia está del otro? Exprese su respuesta en función del radio del Sol $R_s = 6.96 \times 10^8$ m. La excentricidad de la órbita terrestre es 0.0167 y el semi eje mayor es 1.50×10^{11} m.

27. En el año 1610, Galileo construyó un telescopio, lo dirigió hacia Júpiter y descubrió cuatro grandes lunas. Su radio orbital y los periodos T promedio son los siguientes:

Nombre	a (10^8 m)	T (días)
Io	4.22	1.77
Europa	6.71	3.55
Ganímedes	10.7	7.16
Calixto	18.8	16.7

a) Grafique log a (eje y) en función de log T (eje x) y demuestre que obtiene una línea recta. *b*) Mida su pendiente y compárela con el valor que espera obtener conforme a la ley de periodos de Kepler. *c*) Determine la masa de Júpiter respecto a la intersección de esta línea con el eje y (Nota: Puede utilizar también el papel de gráficas log-log.)

28. Cierto sistema de estrellas triples consta de dos estrellas, con una masa m, que giran alrededor de una estrella central, de masa M, en la misma órbita circular. Las dos permanecen en extremos opuestos de un diámetro de la órbita circular (Fig. 14-43). Obtenga una expresión del periodo de traslación de las estrellas; el radio de la órbita es r.

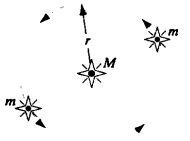


FIGURA 14-43. Problema 28.

29. Un satélite describe inicialmente una órbita más o menos circular de 640 km arriba de la superficie terrestre; tiene una masa de 220 kg. *a*) Determine su rapidez. *b*) Determine su periodo de traslación. *c*) Por varios motivos el satélite pierde energía mecánica con la rapidez (promedio) de 1.40×10^5 J por revolución orbital. Adopte la aproximación razonable de que la trayectoria es un "círculo de radio lentamente decreciente" y determine así la distancia de la superficie terrestre, su rapidez y el periodo del satélite al terminar su 1500a. revolución orbital. *d*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de retraso promedio? *e*) ¿Se conserva el momento angular?

30. Se coloca un satélite a la altitud de una órbita geosincrónica, salvo que el plano de ésta está inclinado en un ángulo de 10° respecto al plano ecuatorial. Describa el movimiento del satélite contra las estrellas del fondo vistas desde un punto del Ecuador.

31. Tres estrellas idénticas de masa M están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. ¿Con qué velocidad deben moverse si todas giran bajo la influencia de la gravedad mutua en una órbita circular circunscrita, aunque preservando todavía el triángulo equilátero?

32. ¿Cuánto tardará un cometa, que describe una trayectoria parabólica, en pasar a B desde su punto de máxima cercanía al Sol en A (Fig. 14-44) a través de un ángulo de 90°, medido en el Sol? Suponga que la distancia del máximo acercamiento es igual al radio de la órbita terrestre, supuestamente circular.

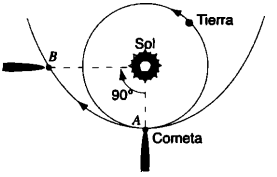


FIGURA 14-44. Problema 32.

33. Imagine un planeta de masa M con una luna pequeña de masa m y con un radio a que gira alrededor de ella y que conserva la misma cara hacia ella. Si la luna ahora se acerca al planeta, ¿habrá una distancia crítica con el centro del planeta en la cual sea levantado y expelido el material suelto que se encuentra en la superficie lunar. Demuestre que esa distancia está dada por $r_c = a(3M/m)^{1/3}$. A esta distancia crítica se le conoce como *límite de Roche*.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Larry Niven escribió una serie de libros de ciencia ficción sobre *Ringworld*, un anillo inhabitado y fabricado de metal que rodeaba a una estrella. Suponga un anillo uniforme de material con una masa total M y un radio R. Suponga además que el anillo es infinitamente delgado. En función de G, M y R, a) calcule la energía potencial gravitacional en el punto $r = R/2$ en el plano del anillo, y *b*) calcule la magnitud y la dirección de la fuerza de la gravedad en una masa de 1 kg situada en ese mismo punto. *c*) Repita *a*) y *b*) para un punto $r = 3R/2$ en el plano del anillo. (Consulte "Bound Orbits with Positive Energy" de West, S. Dasanayake y A. Daniel, *American Journal of Physics*, enero de 1998, p. 25.)

2. Repita el problema 23 con 19, 29, 39 partículas y así sucesivamente, hasta 99 partículas. Trace los resultados en una gráfica con el número de partículas en función del periodo rotacional. ¿Converge el resultado en un límite a medida que la cantidad de partículas se vuelve infinita? ¿Puede el problema resolverse analíticamente?

CAPÍTULO 15

ESTÁTICA DE FLUIDOS

En general, podemos decir que la materia se encuentra en tres fases: *sólida, líquida o gaseosa. Los sólidos y líquidos (llamados también* materia condensada) *tienen ciertas propiedades en común; por ejemplo, son relativamente incompresibles y su densidad permanece relativamente constante al cambiar la temperatura (manteniendo constantes otras propiedades, como la presión). Los gases, en cambio, son fácilmente compresibles, y su densidad cambia considerablemente con la temperatura si mantenemos constante la presión.*

Desde otra perspectiva, por lo regular podemos agrupar los gases y líquidos bajo la designación común de fluidos. *El término "fluido", proviene del verbo latino "fluere" (fluir). Los fluidos fluirán, por ejemplo, para adoptar la forma del contenedor donde se encuentran; los sólidos no comparten esta propiedad. En el presente capítulo se estudian las propiedades de los fluidos en reposo y las leyes que los rigen. En el siguiente examinaremos las propiedades dinámicas de los fluidos en movimiento.*

15-1 FLUIDOS Y SÓLIDOS

Cuando aplicamos una fuerza a la superficie de un material (por ejemplo, a un cubo de cobre), éste ejerce una fuerza de reacción conforme a la tercera ley de Newton. Si la aplicamos perpendicularmente a la superficie, el cubo se comprimirá (si la fuerza se dirige a la superficie), o se estirará (si la fuerza se aplica ejerciendo tracción sobre la superficie) una cantidad muy pequeña hasta que las intensas fuerzas intermoleculares, que puede suponerse que se comporten más o menos como resorte, aporten una fuerza de reacción que equilibre a la fuerza aplicada. Lo mismo sucede cuando aplicamos una fuerza paralelamente a la superficie (denominada fuerza de cizalla): el material puede distorsionarse un poco a medida que la configuración de sus moléculas cambia para crear la fuerza de reacción que equilibre la que se aplicó. En condiciones normales, los objetos que clasificamos como *sólidos*, pueden estar en equilibrio bajo la compresión aplicada, la fuerza tensil, o la de cizallamiento con cambios mínimos de tamaño o forma.

Por el contrario, los líquidos como el agua no son capaces de producir fuerzas de reacción ante las fuerzas aplicadas en direcciones arbitrarias. La mayoría son prácticamente incompresibles, de modo que ofrecen fuerzas de reacción frente a las de compresión con cambios imperceptibles en el espaciamiento de sus moléculas. (Los sistemas hidráulicos que estudiaremos más adelante en el capítulo, se basan en esta propiedad.) En un reducido margen, los líquidos pueden soportar fuerzas tensiles, pero a menudo se observan cambios importantes en el material (cuando hacemos burbujas de jabón, que responden al aumento de presión del aire en su interior, alargándose para volverse cada vez más delgadas, hasta que revientan cuando no pueden generar suficiente fuerza tensil). Los líquidos no pueden soportar las fuerzas de cizallamiento, las cuales provocan que las moléculas del líquido fluyan en dirección de la fuerza.

Un tercer estado de la materia, los gases, no puede soportar fuerzas de compresión, de tensión ni de cizallamiento. Las primeras provocan cambios considerables en el estado del gas, y las últimas también pueden hacer que las moléculas fluyan en dirección de la fuerza.

En conjunto, a los líquidos y gases se les clasifica como *fluidos*. Estos materiales fluirán fácilmente bajo la acción de la fuerza de cizallamiento. Este efecto suele observarse cuando un fluido adopta la forma de su contenedor. Incluso algunos materiales que ordinariamente podrían clasificarse como sólidos —por ejemplo (la brea "sólida") y los glaciares (hielo "sólido")— fluirán si aplicamos una fuerza bastante intensa.

Podemos trenzar metales sólidos y formar alambres finos, haciéndolos pasar por un troquel; donde se corta la Tierra para construir carreteras, a menudo se encuentra evidencia de que la roca "sólida" también fluye bajo presión elevada.

Las diferencias entre las propiedades de un líquido y un sólido, dependen de las fuerzas que se ejerzan entre sus moléculas. Podemos imaginar un sólido como un sistema tridimensional, donde cada molécula se une a las más cercanas mediante fuerzas intensas semejantes a las del resorte. Por eso, puede generar una fuerza de reacción que se oponga a una fuerza aplicada en cualquier dirección. En un líquido, las fuerzas moleculares son relativamente débiles; les falta el orden de largo alcance que imprime estabilidad a los sólidos. En los gases, las fuerzas intermoleculares son extremadamente débiles, y el espaciamiento promedio entre las moléculas es mayor que en los líquidos o los sólidos. Es posible hacer que gases y líquidos fluyan con sólo aplicarles fuerzas relativamente pequeñas.

Los métodos de la mecánica clásica (que hasta ahora hemos aplicado a las partículas), podrían servir para analizar el comportamiento de los fluidos, pero tienen escasa utilidad por la gran cantidad de partículas que interactúan en un líquido, y por la dificultad de especificar todas las fuerzas entre ellas, así como la posición y velocidad de cada partícula. Casi siempre es preferible analizar los fluidos, usando las leyes que se basan en el comportamiento estadístico de las partículas o que incluye propiedades promedio o volumétricas como presión, densidad y temperatura. El punto de partida de nuestro estudio de la mecánica de fluidos son las leyes de Newton, pero vamos a proponer formulaciones especiales que se aplican a los fluidos en reposo o movimiento.

15-2 PRESIÓN Y DENSIDAD

Presión

La capacidad de un fluido para fluir, no le permite sostener una fuerza paralela a su superficie. En condiciones estáticas, el único componente de fuerza que es preciso considerar, es aquel que actúa *normal* o *perpendicularmente* sobre una superficie. Sin que importe la forma del fluido, en todas las fuerzas entre su interior y exterior forman ángulos rectos con su frontera.

Se da el nombre de *presión*, a la magnitud de la fuerza normal por superficie unitaria. La presión es una magnitud escalar; no tiene propiedades direccionales. Por ejemplo, cuando nadamos bajo el agua, ésta presiona nuestro cuerpo desde todas direcciones. La presión es un escalar, aun cuando ésta se debe a una fuerza que posee propiedades direccionales y es un vector.

A nivel microscópico, la presión ejercida por un fluido sobre una superficie en contacto con él, proviene de las colisiones de las moléculas del fluido contra la superficie. A causa de la colisión, se invierte el componente del momento de la molécula perpendicular a la superficie. Ésta debe ejercer una fuerza impulsiva sobre la molécula y, según la tercera ley de Newton, las moléculas ejercen igual fuerza perpendicular sobre la superficie. El resultado neto de la fuerza de reacción ejercida por muchas moléculas sobre la superficie, produce presión en ella. Esta descripción se explica en términos más cuantitativos para los gases en el Capítulo 22.

Un fluido bajo presión, ejerce una fuerza hacia afuera sobre la superficie en contacto con él. Supongamos una superficie cerrada que contenga un fluido, como se ve en la figura 15-1. El fluido dentro de la superficie empuja contra el ambiente para salir. Un pequeño elemento del área superficial puede representarse mediante los vectores $\Delta\vec{A}$, cuya magnitud es numéricamente igual al elemento de la superficie, y cuya dirección, por convención, sigue la normal a la superficie *hacia afuera*. La fuerza $\Delta\vec{F}$ ejercida por el fluido contra esta superficie, depende de la presión p según

$$\Delta\vec{F} = p\,\Delta\vec{A}. \tag{15-1}$$

Dado que los vectores representantes de la fuerza y de la superficie son paralelos, podemos escribir la presión en función de la relación escalar

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \tag{15-2}$$

Suponemos que el elemento ΔA es tan pequeño, que la presión p definida conforme a la ecuación 15-2 no depende de su tamaño. En términos generales, la presión puede variar de un punto a otro en la superficie.

La presión tiene las dimensiones de la fuerza dividida entre superficie, y la unidad común con que se mide es N/m^2. En el SI esta unidad recibe el nombre de *pascal* (cuya abreviatura es Pa; $1\,Pa = 1\,N/m^2$). Se emplean muchas otras unidades. En Estados Unidos la presión suele indicarse en lb/in^2. La presión estándar de la atmósfera sobre la Tierra en el nivel del mar es 1 atmósfera (atm; $1\,atm = 14.7\,lb/in^2 = 1.01325 \times 10^5\,Pa$ exactamente). Por ser el pascal una unidad pequeña ($1\,Pa \approx 10^{-5}\,atm$), los pronosticadores del clima emplean a menudo el bar ($1\,bar = 10^5\,Pa$, esto es, aproximadamente 1 atm) para expresar la presión atmosférica. En la sección 15-5 se explican otras unidades con las que se mide la presión.

La tabla 15-1 contiene algunas presiones representativas en pascales. El término "presión excesiva", designa un valor mayor a la presión atmosférica normal. Nótese que en el laboratorio es posible producir presiones que rebasan 22 órde-

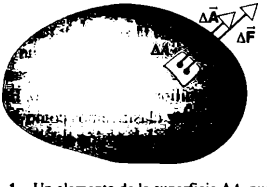


FIGURA 15-1. Un elemento de la superficie ΔA, puede representarse mediante un vector $\Delta\vec{A}$ de igual magnitud a la de la superficie con dirección perpendicular al elemento. El fluido encerrado por la superficie ejerce una fuerza $\Delta\vec{F}$ contra él. La fuerza es perpendicular al elemento y, por tanto, paralela a $\Delta\vec{A}$.

TABLA 15-1 Algunas presiones

Sistema	*Presión* (Pa)
Centro del Sol	2×10^{16}
Centro de la Tierra	4×10^{11}
Más alta presión obtenida en el laboratorio	1.5×10^{10}
Fosa marina más profunda (fondo del mar)	1.1×10^{8}
Tacones con clavos en una pista de baile	2×10^{7}
Llanta de automóvil (presión excesiva)	2×10^{5}
Presión atmosférica a nivel del mar	1.0×10^{5}
Presión arterial normal[a]	1.6×10^{4}
Sonido más fuerte tolerable[b]	30
Sonido más débil detectable[b]	3×10^{-5}
Mejor vacío de laboratorio	10^{-12}

[a] Hipertensión sistólica, correspondiente a 120 mm de Hg en el medidor de presión del médico.
[b] Presión excesiva en el tímpano, a 1,000 Hz.

TABLA 15-2 Algunas densidades

Material u objeto	*Densidad* (kg/m^3)
Espacio interestelar	10^{-20}
Mejor vacío de laboratorio	10^{-17}
Aire: 20°C y 1 atm	1.21
20°C y 50 atm	60.5
Styrofoam (Espuma plástica)	1×10^{2}
Hielo	0.917×10^{3}
Agua: 20°C y 1 atm	0.998×10^{3}
20°C y 50 atm	1.000×10^{3}
Agua de mar: 20°C y 1 atm	1.024×10^{3}
Sangre entera	1.060×10^{3}
Hierro	7.8×10^{3}
Mercurio	13.6×10^{3}
La Tierra: promedio	5.5×10^{3}
centro	9.5×10^{3}
costra	2.8×10^{3}
El Sol: promedio	1.4×10^{3}
centro	1.6×10^{5}
Estrella enana blanca (centro)	10^{10}
Núcleo de uranio	3×10^{17}
Estrella de neutrones (centro)	10^{18}
Hoyo negro (1 masa solar)	10^{19}

nes de magnitud. En el apéndice G encontrará los factores necesarios para convertir las mediciones de una serie de unidades en otra.

Densidad

La densidad ρ de un elemento pequeño de cualquier material, es su masa Δm dividida entre el volumen ΔV:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{15-3}$$

En general, la densidad en un punto, es el valor límite de esta razón a medida que el elemento volumétrico se vuelve infinitesimalmente pequeño. No tiene propiedades direccionales y es un escalar.

Si la densidad de un objeto tiene el mismo valor en todos los puntos, será igual a su masa dividida entre el volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{15-4}$$

La tabla 15-2 contiene algunas densidades representativas que en el laboratorio varían aproximadamente en 21 órdenes de magnitud, y casi 40 órdenes de los objetos más densos del universo (un hipotético hoyo negro) al casi vacío del espacio.

En general, la densidad de un material depende de factores ambientales: entre ellos la presión y la temperatura. En líquidos y sólidos, la variación es muy pequeña cuando las dos admiten una amplia variación.

Si intensificamos la presión en un material en cierto grado Δp, su densidad registrará el incremento correspondiente. El cambio fraccional de su volumen es $\Delta V/V$, que será negativo si disminuye el volumen. La razón entre estas magnitudes, se conoce como *módulo volumétrico B:*

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \tag{15-5}$$

El signo menos se introduce en esta definición para convertir B en una cantidad positiva, porque (Δp y ΔV) tienen signos opuestos. En otras palabras, un *aumento* de presión ($\Delta p > 0$) produce una *reducción* del volumen ($\Delta p < 0$). Nótese que B tiene la misma dimensión que la presión, por ser ($\Delta V/V$) una magnitud adimensional.

Si el módulo volumétrico de un material es grande, un gran cambio de presión Δp (según la ecuación 15-5) ocasionará un cambio pequeño de volumen. En este caso, podemos pensar que se trata de un material prácticamente incompresible. Así, el módulo volumétrico del agua es 2.2×10^9 N/m^2. A la presión en el fondo del Pacífico (4.0×10^7 N/m^2, 400 atm aproximadamente), el cambio relativo de volumen debido a la presión es apenas de 1.8%. Los sólidos tienen módulos volumétricos más grandes que los líquidos a causa de un acoplamiento más compacto de los átomos. Así pues, una presión produce menor cambio de volumen en un sólido que en un líquido. Por eso, en condiciones ordinarias podemos clasificar como incompresibles a sólidos y líquidos, es decir, su densidad no se altera al cambiar la presión aplicada.

Si B es pequeño, el volumen puede modificarse con un ligero cambio de presión, y entonces se dice que el material es compresible. Los gases típicos tienen módulos volumétricos de cerca de 10^5 N/m^2. Un cambio ligero de presión de 0.1 atm, puede modificar en 10% el volumen de un gas. En conclusión, los gases son fácilmente compresibles.

15-3 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO EN REPOSO

Si un fluido se halla en equilibrio, también lo estarán todas sus partes. Dicho de otra manera, la fuerza y torca netos de todos sus elementos han de ser cero. Tomemos el caso de un elemento pequeño de un volumen de fluido sumergido dentro

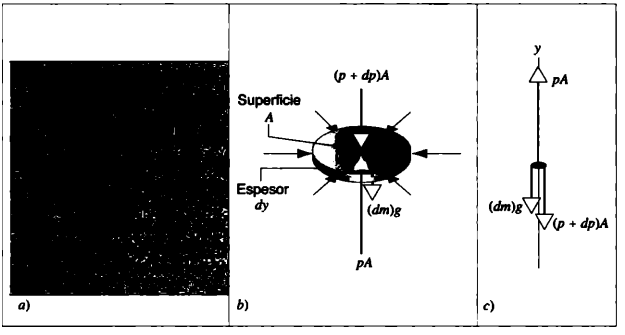


FIGURA 15-2. *a*) Elemento pequeño de volumen del líquido en reposo. *b*) Fuerzas en el elemento. *c*) Diagrama de cuerpo libre del elemento.

de él. Supongamos que el elemento tiene la forma de un disco delgado, y que se encuentra a una distancia y arriba del nivel de referencia, como se advierte en la figura 15-2*a*. El grosor del disco es dy, y las caras tienen una superficie A. La masa del elemento es $dm = \rho\, dV = \rho A\, dy$, y su peso es $(dm)g = \rho g A\, dy$. Las fuerzas que sobre él ejerce el fluido circundante son perpendiculares a su superficie en todos los puntos (Fig. 15-2*b*).

La fuerza horizontal resultante es cero, porque el elemento no tiene aceleración horizontal. Las fuerzas horizontales se deben a la presión del fluido, y por simetría la presión ha de ser igual en todos los puntos dentro de un plano horizontal en y.

El elemento de fluido tampoco acelera en la dirección vertical, por lo cual la fuerza vertical resultante en él deberá ser cero. Un diagrama de cuerpo libre de él se muestra en la figura 15-2*c*. Las fuerzas verticales se deben no sólo a la presión del fluido circundante en sus caras, sino también al peso del elemento. Si p es la presión en la cara inferior, y $p + dp$ es la presión en su cara superior, la fuerza ascendente en la cara inferior será pA, y las fuerzas descendentes serán $(p + dp)\,A$ en la cara superior y el peso del elemento $(dm)g = \rho g A\, dy$. Por tanto, en el equilibrio vertical,

$$\sum Fy = pA - (p + dp)A - \rho g A\, dy = 0,$$

de donde obtenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \qquad (15\text{-}6)$$

La ecuación anterior indica que la presión varía con la elevación sobre un nivel de referencia en un fluido en equilibrio estático. Al aumentar la elevación (dy positiva), la presión disminuye (dp negativa). La variación se debe al peso por superficie unitaria transversal de las capas del fluido que se encuentra entre los puntos, cuya diferencia de presión va a medirse.

A la magnitud ρg, se le llama de ordinario *densidad de peso* del fluido; es el peso por volumen unitario del fluido. Por ejemplo, en el agua la densidad de peso es 9,800 N/m^3 = 62.4 lb/ft^3.

Si p_1 es la presión en la altura y_1, y p_2 la presión en la altura y_2 sobre algún nivel de referencia, la integración de la ecuación 15-6 nos da

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy$$

o

$$p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy. \qquad (15\text{-}7)$$

En los líquidos, que son casi incompresibles, ρ es prácticamente constante y las diferencias de nivel rara vez son tan grandes, que sea necesario considerar los cambios de g. Por tanto, suponiendo que ρ y g sean constantes, obtenemos

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \qquad (15\text{-}8)$$

en un líquido homogéneo.

Si un líquido tiene una superficie libre, éste será el nivel natural a partir del cual medir las distancias (Fig. 15-3). Sea y_2 la altura de la superficie, el punto donde la presión p_2 ejercida sobre el fluido suele ser la que produce la atmósfera terrestre p_0,

FIGURA 15-3. Un contenedor guarda una cantidad de líquido cuya superficie está abierta a la atmósfera. La presión en cualquier punto del líquido depende de la profundidad h.

Suponemos que y_1 se halla en cualquier nivel del fluido, y representamos como p la presión en ese sitio. Entonces

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1).$$

Sin embargo, $y_2 - y_1$ es la profundidad h debajo de la superficie, donde la presión es p (véase Fig. 15-3), así que

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{15-9}$$

Esto demuestra claramente que, en un líquido homogéneo e incompresible, la presión aumenta con la profundidad, pero que a la misma profundidad es igual en todos los puntos. El segundo término de la derecha de la ecuación 15-9, es la contribución que en un punto del líquido hace el peso del fluido de altura h arriba de ese punto.

La ecuación 15-8 da la relación entre las presiones en dos puntos cualesquiera de un fluido, sin importar la forma del recipiente: cualquiera que sea la forma de éste, dos puntos en el fluido pueden conectarse mediante una trayectoria compuesta por pasos verticales y horizontales. Por ejemplo, consideremos los puntos A y B, en el líquido homogéneo contenido en el tubo U de la figura 15-4*a*. A lo largo de la trayectoria zigzagueante de A a B, existe una diferencia de presión $\rho g\,\Delta y$ en cada segmento vertical de longitud Δy; mientras que a lo largo de los segmentos horizontales, no se observa cambio de presión, de ahí que la diferencia de presión $p_B - p_A$ es ρg, multiplicada por la suma algebraica de los segmentos verticales de A a B, es decir, $\rho g(y_2 - y_1)$.

Si el tubo U contiene varios líquidos inmiscibles (por ejemplo, un líquido denso en el tubo derecho y otro menos denso en el tubo izquierdo, como se aprecia en la figura 15-4*b*), la presión puede ser diferente en el mismo nivel (puntos A y B) en diversos lados. El líquido debajo de la línea CC, está en equilibrio; en consecuencia, la fuerza ejercida por la columna izquierda arriba de C, ha de ser igual a la ejercida por la columna derecha arriba de C. La presión de C es igual en ambos lados, pero disminuye menos de C a A que de C a B, porque el líquido de la izquierda es menos denso que el de la derecha. Por tanto, la presión en A es mayor que en B.

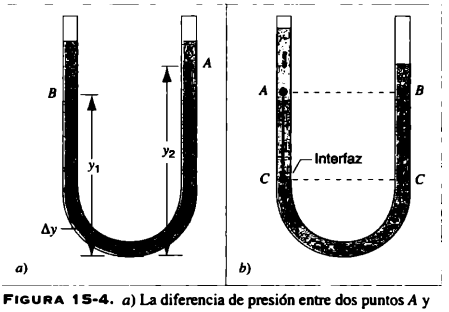


FIGURA 15-4. *a*) La diferencia de presión entre dos puntos A y B en un líquido homogéneo, depende sólo de su diferencia de elevación $y_2 - y_1$. *b*) Dos puntos A y B en la misma elevación, pueden estar a distinta presión si las densidades difieren allí.

Variación de la presión en la atmósfera

En los gases, ρ es relativamente pequeña y la diferencia de presión en dos puntos cercanos, suele ser despreciable (véase Ec. 15-8). Por tanto, en un recipiente bastante pequeño que contenga un gas, puede suponerse que la presión sea la misma en todas partes. Pero no es así cuando $y_2 - y_1$ es muy grande. La presión del aire varía considerablemente, conforme subimos a grandes alturas en la atmósfera. Más aún, como los gases son compresibles, la variación de presión hace que la densidad ρ cambie con la altura, y ρ debe conocerse en función de y antes que podamos integrar la ecuación 15-7.

Nos hacemos una idea bastante adecuada de la variación de presión con la altitud en la atmósfera terrestre, si suponemos que la densidad ρ es proporcional a la presión. Esto será casi verdadero (conforme a la ley de gas ideal, la cual se explica en el Capítulo 22) si la temperatura del aire permanece igual en cualquier altitud. Por medio de esta suposición, y suponiendo además que la variación de g con la altitud sea insignificante, podemos calcular la presión p en cualquier altura y sobre el nivel del mar.

De acuerdo con la ecuación 15-6 tenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g.$$

Puesto que ρ es proporcional a p, tenemos

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}, \tag{15-10}$$

donde ρ_0 y p_0 son los valores de la densidad y de la presión al nivel del mar. Entonces

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0\frac{p}{p_0},$$

así que

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0}dy. \tag{15-11}$$

Al integrar la ecuación 15-11 de la presión p_0 en la altitud $y = 0$ (nivel del mar) a la presión p en la altitud h, obtenemos

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\int_0^h\frac{g\rho_0}{p_0}dy,$$

que nos da

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0}h$$

o

$$p = p_0 e^{-(g\rho_0/p_0)h}, \tag{15-12}$$

que podemos escribir así:

$$p = p_0 e^{-h/a}, \tag{15-13}$$

donde

$$a = \frac{p_0}{g\rho_0}.$$

Usando los valores $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$, $\rho_0 = 1.21\ \mathrm{kg/m^3}$ (a 20°C) y $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, obtenemos $a = 8.55$ km. La constante a indica la diferencia de altitud sobre la cual la presión dis-

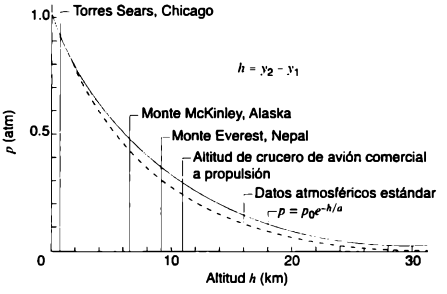


FIGURA 15-5. Comparación de los datos referentes a la presión atmosférica estándar (línea punteada) con las predicciones de la ecuación 15-13 (línea gruesa). Las dos curvas difieren, porque en el cálculo prescindimos de la variación de la densidad con la temperatura al aumentar la altitud.

minuye en un factor de e. Dicho de otra manera, la presión atmosférica se reduce con un factor de 10, cuando la altitud cambia de $a \ln 10 = 2.30a = 20$ km. A una altitud de $h = 20$ km sobre el nivel del mar, la presión atmosférica sería entonces 0.1 atm; y sería de 0.01 atm con $h = 40$ km sobre el nivel del mar. En la figura 15-5 se compara la variación de presión con la altura predicha por la ecuación 15-13, y con la medida para la atmósfera.

En los gases a temperatura uniforme, la densidad ρ de una capa cualquiera es proporcional a la presión p en esa capa. Pero los líquidos son casi incompresibles, de manera que las capas inferiores no están perceptiblemente comprimidas por el peso de las capas superiores sobrepuestas, y la densidad ρ es prácticamente constante en todos los niveles. Por tanto, la variación de presión con la distancia arriba del fondo de un fluido es diferente en el caso de un gas y en el de un líquido, como se indica en la ecuación 15-9 para un líquido y en la ecuación 15-13 para un gas.

PROBLEMA RESUELTO 15-1. Una parte del tubo U, donde ambos extremos están abiertos a la atmósfera, se encuentra llena de agua. Se vacía aceite —el cual no se mezcla con el agua— en un lado hasta que alcanza una distancia $d = 12.3$ mm sobre el nivel del agua en el otro lado, que mientras tanto subió a una distancia $a = 67.5$ mm respecto a su nivel original (Fig. 15-6). Calcule la densidad del aceite.

Solución En la figura 15-6, los puntos C tienen la misma presión. (De no ser así, el fluido en forma de U debajo del nivel CC, experimentaría una fuerza neta desbalanceada y aceleraría, violando con ella la suposición estática que hicimos en este problema.) La variación de la presión de C a la superficie en el lado del agua es $\rho_w g 2a$, donde $2a$ es la altura de la columna arriba de C. La variación de presión en el otro lado de C a la superficie es $\rho g(2a + d)$, donde ρ es la densidad desconocida del aceite. Al igualar las presiones en el punto C a ambos lados, obtenemos

$$p_0 + \rho_w g 2a = p_0 + \rho g(2a + d),$$

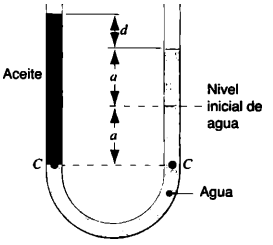


FIGURA 15-6. Problema resuelto 15-1. Una parte de un tubo en U se llena con agua, y otra con aceite de densidad desconocida.

y, por tanto,

$$\rho = \rho_w \frac{2a}{(2a + d)}$$

$$= (1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \frac{2(67.5 \text{ mm})}{2(67.5 \text{ mm}) + 12.3 \text{ mm}}$$

$$= 916 \text{ kg/m}^3.$$

La relación de la densidad de una sustancia a la del agua, recibe el nombre de *densidad relativa* (o *gravedad específica*) de esa sustancia. En este caso, la gravedad específica del aceite es 0.916.

Nótese que al resolver este problema, hemos supuesto que la presión es continua en la interfaz entre el aceite y el agua en el punto C del lado izquierdo del tubo. De no ser así, y si la presión fuera diferente, la fuerza ejercida por el fluido en un lado de la interfaz diferiría de la que el líquido ejerce en el otro, y la interfaz aceleraría bajo la influencia de la fuerza no balanceada. Puesto que suponemos una situación estática, no puede haber movimiento, y por lo mismo las presiones han de ser iguales. Pero cuando vaciamos por primera vez el aceite en el tubo, puede haber una diferencia de presión, y una fuerza desbalanceada hará que el sistema se mueva hasta alcanzar la situación estática que aparece en la figura 15-6.

15-4 PRINCIPIOS DE PASCAL Y DE ARQUÍMEDES

Cuando comprimimos un tubo de pasta dental, ésta sale por la parte superior del tubo. Esto demuestra la acción del *Principio de Pascal*. Cuando se aplica presión en alguna parte del tubo, se siente en todas sus partes e impulsa hacia fuera la pasta dental en la parte superior. He aquí la formulación de este principio, que fue propuesto por Blas Pascal en 1652:

> *La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite en forma íntegra a todas las partes de él y a las paredes del recipiente.*

Es decir, si aumentamos la presión externa sobre un fluido en un lugar en una cantidad Δp, el mismo incremento se experimentará en todas partes.

El Principio de Pascal se basa el funcionamiento de los mecanismos hidráulicos transmisores de fuerza, como la maquinaria que mueve tierra o el sistema de frenos del automóvil. Nos permite amplificar una fuerza relativamente pequeña para elevar un peso mucho mayor (como el que levanta coches o el sillón del dentista) y transmitirla a grandes distancias, hasta lugares relativamente inaccesibles (como en los mecanismos de control de los alerones de los aviones).

Probaremos el Principio de Pascal en un líquido incompresible. La figura 15-7 muestra el líquido en un cilindro provisto de pistón. Se aplica a éste una fuerza externa; por ejemplo, por el peso de algunos objetos apilados sobre él. La fuerza externa hace que una presión externa p_{ext} se aplique al líquido situado inmediatamente debajo del pistón. Si el líquido tiene una densidad ρ, según la ecuación 15-9, podemos escribir la presión en un punto arbitrario P a una distancia h debajo de la superficie:

$$p = p_{ext} + \rho g h. \qquad (15\text{-}14)$$

Ahora supóngase que aumentamos la presión externa en Δp_{ext}, quizás agregando algunas pesas más al pistón. ¿Cómo cambia la presión p a consecuencia de este cambio de la presión externa? Suponemos que el líquido es incompresible, de manera que la densidad ρ permanece constante. El cambio de la presión externa, altera la del fluido que se deduce de la ecuación 15-14:

$$\Delta p = \Delta p_{ext} + \Delta(\rho g h). \qquad (15\text{-}15)$$

Puesto que el líquido es incompresible, la densidad es constante, y el segundo término de la derecha de la ecuación 15-15 es igual a cero. En este caso obtenemos

$$\Delta p = \Delta p_{ext}. \qquad (15\text{-}16)$$

Cambiar la presión en cualquier punto del líquido, equivale simplemente a modificar la presión aplicada externamente. Este resultado confirma el Principio de Pascal, y demuestra que se deduce directamente de la consideración anterior concerniente a la presión estática en un fluido. No es, pues, un principio independiente, sino una consecuencia directa de nuestra formulación de la estática de fluidos.

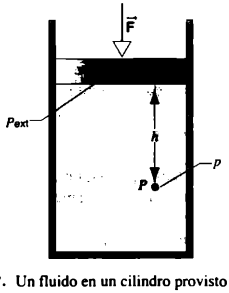


FIGURA 15-7. Un fluido en un cilindro provisto de un pistón móvil. La presión en cualquier punto P se debe no sólo al peso del líquido situado arriba del nivel de P, sino también a la fuerza ejercida por el pistón.

Aunque obtuvimos el resultado anterior para los líquidos incompresibles, el Principio de Pascal se aplica a todos los fluidos reales (compresibles), tanto a gases como a líquidos. La alteración de la presión externa causa un cambio de densidad que se difunde rápidamente a través del líquido, pero el equilibrio se restablece en cuanto la perturbación termina. Se demuestra así la validez del principio.

La prensa hidráulica

La figura 15-8 muestra un sistema que a menudo se emplea para levantar objetos pesados como los automóviles. Se ejerce una fuerza externa F_i sobre un pistón de superficie A_i. El objeto que se pretende levantar ejerce una fuerza Mg sobre el pistón más grande de superficie A_o. En estado de equilibrio, la magnitud de la fuerza ascendente F_o ejercida por el fluido sobre el pistón más grande, ha de ser igual a la fuerza descendente Mg del peso del objeto (prescindiendo del peso del pistón). Queremos encontrar la relación entre la fuerza aplicada F_i, y la "fuerza de salida" F_o que el sistema ejerce sobre el pistón más grande.

La presión sobre el líquido en el pistón más pequeño debida a la fuerza aplicada externamente, es $p_i = F_i/A_i$. Según el Principio de Pascal, esta presión "de entrada" ha de ser igual a la de "salida" $p_o = F_o/A_o$, que el fluido ejerce *sobre* el pistón más grande. Por tanto, $p_i = p_o$ y también

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o},$$

o

$$F_i = F_o \frac{A_i}{A_o} = Mg \frac{A_i}{A_o}. \qquad (15\text{-}17)$$

La razón A_i/A_o
suele ser mucho menor que 1, y por ello la fuerza aplicada puede ser mucho menor que el peso Mg que levanta.

El movimiento descendente del pistón más pequeño en una distancia d_i, desplaza un volumen de fluido $V = d_i A_i$. Si este último es incompresible, el volumen será igual al volumen desplazado por el movimiento ascendente del pistón más grande:

$$V = d_i A_i = d_o A_o$$

o

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}. \qquad (15\text{-}18)$$

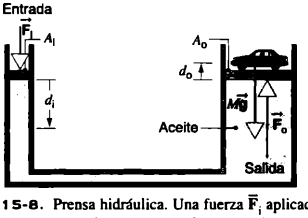


FIGURA 15-8. Prensa hidráulica. Una fuerza $\vec{F}_i$ aplicada a un pistón más pequeño, puede generar una fuerza mucho mayor $\vec{F}_o$ en el pistón más grande, el cual puede levantar un peso Mg.

Si A_i/A_o es un número pequeño, la distancia movida por el pistón más grande resultará mucho menor que la distancia que la fuerza aplicada hace recorrer al pistón más pequeño. El precio que se paga por la capacidad de levantar una carga grande, es perder la capacidad de desplazarlo muy lejos.

Al combinar las ecuaciones 15-17 y 15-18, vemos que $F_i d_i = F_o d_o$, lo cual demuestra que el trabajo efectuado por la fuerza externa sobre el pistón más pequeño, es igual al que realiza el fluido en el pistón más grande. Por tanto (ignorando la fricción y otras fuerzas disipativas), no se obtiene una ganancia neta (ni pérdida) de energía al emplear este sistema hidráulico.

PROBLEMA RESUELTO 15-2. La figura 15-9 ilustra un esquema del gato hidráulico con que se levantan los automóviles. El fluido hidráulico es aceite (densidad = 812 kg/m^3). Se emplea una bomba manual donde se aplica una fuerza de magnitud F_i al pistón más pequeño (de 2.2 cm de diámetro), cuando la mano aplica una fuerza de magnitud F_h al extremo del mango de la bomba. La masa combinada del automóvil que habrá de levantarse y la plataforma de levantamiento es M = 1,980 kg, y el pistón grande mide 16.4 cm de diámetro. La longitud L del mango de la bomba es de 36 cm, y la distancia x del pivote al pistón es 9.4 cm. *a*) ¿Cuál es la fuerza aplicada F_h que se necesita para levantar el automóvil. *b*) En cada golpe de la bomba hacia abajo en que la mano recorre una distancia vertical de 28 cm, ¿a qué altura se eleva el automóvil?

Solución *a*) Con base en la ecuación 15-17,

$$F_i = Mg\frac{A_i}{A_o} = (1{,}980\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)\frac{\pi(1.1\text{ cm})^2}{\pi(8.2\text{ cm})^2} = 349\text{ N}.$$

Tomando las torcas en el mango de la bomba alrededor de un eje perpendicular a la página a través del punto de pivote O, ignoramos las masas del mango y del pistón pequeño, y suponemos que el mango se mueve con una aceleración angular despreciablemente pequeña. Así, obtenemos

$$\sum\tau = F_h L - F_i x = 0,$$

donde hemos utilizado la tercera ley de Newton para relacionar la fuerza $\vec{F}_i$ ejercida *por* la bomba *sobre* el pistón con la fuerza $-\vec{F}_i$ ejercida *por él sobre* el mango. Resolviendo para F_h, encontramos que

$$F_h = F_i\frac{x}{L} = (349\text{ N})\frac{9.4\text{ cm}}{36\text{ cm}} = 91\text{ N}.$$

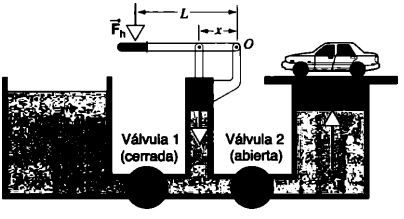


FIGURA 15-9. Problema resuelto 15-2. Una bomba hidráulica sirve para levantar un automóvil. En el golpe hacia abajo, se cierra la válvula 1 y se abre la válvula 2. En el golpe hacia arriba, se abre la válvula 1 y se cierra la válvula 2, permitiendo que más líquido sea impulsado hacia el interior de la cámara

Esta fuerza de aproximadamente 20 lb, puede aplicarse fácilmente a mano.

b) Cuando la mano recorre una distancia vertical h, el pistón más pequeño cubrirá la distancia

$$d_i = h\frac{x}{L} = (28\text{ cm})\frac{9.4\text{ cm}}{36\text{ cm}} = 7.3\text{ cm}.$$

Entonces la ecuación 15-18 da la distancia desplazada por el pistón más grande:

$$d_o = d_i\frac{A_i}{A_o} = (7.3\text{ cm})\frac{\pi(1.1\text{ cm})^2}{\pi(8.2\text{ cm})^2} = 0.13\text{ cm} = 1.3\text{ mm}.$$

Elevar el automóvil una distancia tan pequeña, es el precio que pagamos por ejercer una fuerza tan débil para realizar la maniobra. Desde luego, si queremos construir un aparato útil, es necesario poder levantar el automóvil una distancia mayor; esto se logró por medio de muchos golpes de bomba. Para evitar que el automóvil se desplace hacia abajo durante el golpe ascendente, se utiliza el sistema de válvulas de la figura 15-9, y se sube el automóvil una distancia d_o. Durante el golpe de retorno la válvula 2 está cerrada, atrapando fluido en el lado derecho de la cámara y manteniendo el vehículo a una altura fija; se abre la válvula 1, de modo que el golpe de retorno extrae más líquido del depósito y lo introduce en el lado izquierdo de la cámara. En el siguiente golpe descendente, las válvulas regresan a las posiciones que se observan en la figura, y se levanta el automóvil otro incremento d_o. En efecto, el volumen del fluido hidráulico trasladado al lado izquierdo de la cámara durante el golpe ascendente, se bombea hacia el lado derecho de ella durante el golpe descendente. Una vez terminado el proceso, podemos bajar el automóvil abriendo ambas válvulas, y permitiendo que el líquido se vierta directamente en el depósito.

¿De qué manera el funcionamiento del gato hidráulico cambia al levantar el automóvil y al aumentar la altura del fluido en la columna derecha? Haga una estimación numérica.

Principio de Arquímedes

La figura 15-10*a* muestra un volumen de agua contenido en una delgada bolsa de plástico colocada bajo el agua. El agua de la bolsa se halla en equilibrio estático. Por tanto, su peso debe ser equilibrado por una fuerza ascendente de igual magnitud. Esta fuerza es la suma vectorial de todas las fuerzas hacia el interior ejercidas por el fluido que rodea a la bolsa. Las flechas de la figura 15-10*a* representan las fuerzas ejercidas sobre el volumen del líquido a consecuencia de la presión del fluido circundante. Nótese que las fuerzas ascendentes en el fondo de la bolsa son mayores que las descendentes en la parte superior, porque la presión aumenta con la profundidad. La fuerza ascendente neta $\vec{F}_b$ debida a esta diferencia de presión, recibe el nombre de *fuerza de flotación* o *flotación*.

La presión ejercida sobre un objeto sumergido por el fluido circundante, no puede depender del material de que está hecho el objeto. Por tanto, podríamos reemplazar la bolsa de agua por un trozo de madera exactamente del mismo tamaño y forma, y la fuerza de flotación no cambiaría. La fuerza ascendente sigue siendo igual al peso del volumen original de agua. Esto nos conduce al Principio de Arquímedes:

Un cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido, es impulsado hacia arriba por una fuerza de igual magnitud al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

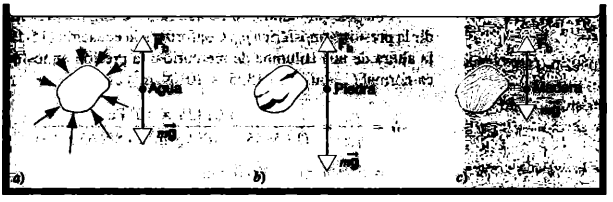


FIGURA 15-10. *a*) Bolsa delgada de plástico llena de agua que se mantiene en equilibrio bajo ella. El agua que la rodea ejerce presión sobre la superficie, produciéndose así una fuerza resultante de flotación ascendente $\vec{F}_b$ que opera sobre la bolsa. *b*) En una piedra del mismo volumen, la fuerza de flotación es igual, sólo que el peso la supera y, por tanto, la piedra no guarda equilibrio. *c*) El peso es menor que la fuerza de flotación en un trozo de madera del mismo volumen.

Un objeto de densidad mayor que el agua (Fig. 15-10*b*), desplaza un volumen de agua cuya altura es menor que el peso del objeto. Así pues, el objeto se hunde en ella, porque la magnitud de la fuerza de flotación es menor que el peso del objeto. Si el cuerpo sumergido estuviera colocado en una báscula de resorte en el fondo del agua, la báscula indicaría la fuerza ascendente del objeto que tiene la misma magnitud que $mg - F_b$; por tanto, los objetos sumergidos parecen pesar menos de lo que normalmente pesan. Los astronautas se preparan para sus viajes realizando tareas debajo del agua en tanques enormes, donde simulan el estado ingrávido del espacio.

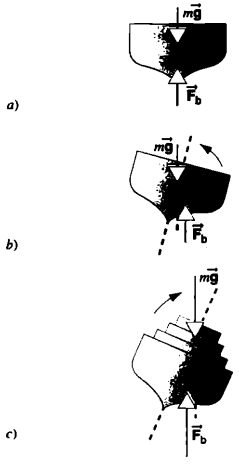


FIGURA 15-11. *a*) Una sección transversal de un barco que flota verticalmente. La fuerza de flotación $\vec{F}_b$ actúa en el centro de flotación *B*, y el peso lo hace en el centro de gravedad *C*. El barco se sostiene en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas. *b*) Cuando se inclina, el centro de flotación quizá ya no se encuentre sobre la misma línea vertical que el centro de gravedad, y entonces una torca neta puede operar sobre el barco. Aquí la torca alrededor de *C* lo restablece en la posición vertical. *c*) Aquí el centro de gravedad se encuentra más alto, así que la torca alrededor de *C* debido a la fuerza de flotación tiende a inclinar el barco aún más.

Un objeto menos denso que el agua (Fig. 15-10*c*), experimenta una fuerza ascendente neta cuando está completamente sumergido, porque el peso del agua desplazada es mayor que el del objeto. Por eso, el objeto se eleva hasta que sale a la superficie, y sigue subiendo hasta que la única parte de él todavía sumergida, es el volumen necesario para desplazar el agua, cuyo peso es igual al peso total del objeto. En tal caso el objeto flotará en equilibrio.

Podemos considerar que la fuerza de flotación actúa en el centro de gravedad del fluido desplazado por la parte sumergida de un objeto flotante. A ese punto se le llama *centro de flotación*. El peso actúa en el centro de gravedad del objeto entero. En general, los dos puntos no son lo mismo (Fig. 15-11*a*). Si se encuentran en la misma línea vertical, el objeto podrá flotar en equilibrio: la fuerza neta y la torca neta son cero. Si inclinamos el objeto ligeramente de su posición de equilibrio, casi siempre cambia la forma del fluido desplazado, y el centro de flotación modifica su posición respecto al centro de gravedad del objeto. Así pues, sobre el objeto actúa una torca que podría inclinarlo a su posición anterior de equilibrio (Fig. 15-11*b*), u operar en otra dirección para volcarlo (Fig. 15-11*c*).

PROBLEMA RESUELTO 15-3. ¿Qué fracción del volumen total de un témpano de hielo queda expuesta?

Solución El peso del témpano es

$$W_i = \rho_i V_i g,$$

donde V_i es el volumen del témpano. El peso del volumen V_w del agua de mar desplazada (o, en forma equivalente, el volumen de la parte sumergida del témpano) es la fuerza de flotación

$$F_b = \rho_w V_w g.$$

Sin embargo, F_b es igual a W_i, porque el témpano está en equilibrio, así que

$$\rho_w V_w g = \rho_i V_i g,$$

y, usando las densidades de la tabla 15-2,

$$\frac{V_w}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_w} = \frac{917\ \text{kg/m}^3}{1{,}024\ \text{kg/m}^3} = 0.896 = 89.6\%.$$

El volumen de agua desplazada V_w es el de la parte sumergida del témpano de hielo, de modo que queda expuesto el 10.4% de éste.

15-5 MEDICIÓN DE LA PRESIÓN

La presión ejercida por un líquido puede medirse empleando métodos estáticos o dinámicos. Los métodos dinámicos se basan en la velocidad de flujo de un líquido en movimiento, y se explican en el Capítulo 16. En la presente sección, vamos a describir los métodos estáticos.

En general, los medidores se sirven de la presión atmosférica como nivel de referencia, y cuantifican la diferencia entre la presión real y la atmosférica, diferencia llamada *presión manométrica*. La presión real en un punto de un fluido, recibe el nombre de *presión absoluta*, que es la suma de la presión atmosférica y de la presión manométrica. La presión manométrica se da por arriba o por debajo de la presión atmosférica, y por lo mismo puede ser positiva o negativa: la presión absoluta siempre es positiva.

El barómetro de mercurio es un largo tubo de vidrio que se llena con mercurio, y luego se invierte e introduce en un plato de mercurio, como se ve en la figura 15-12. El espacio arriba de la columna de mercurio es en realidad un vacío que contiene sólo vapor de mercurio, cuya presión p_2 es tan pequeña, que puede ignorarse a temperaturas ordinarias. La presión p_1 en la superficie del plato de mercurio, es la presión desconocida p que deseamos medir. A partir de la ecuación 15-8 obtenemos

$$p_2 - p_1 = 0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho g h,$$

o

$$p = \rho g h. \tag{15-19}$$

Al medir la altura de la columna sobre la superficie del plato, se obtiene la presión.

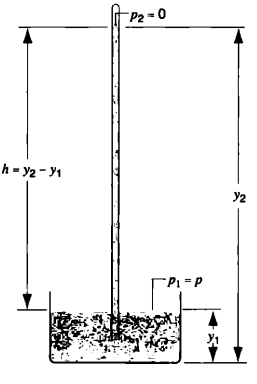


FIGURA 15-12. El barómetro de mercurio. El mercurio se encuentra en equilibrio bajo la influencia de la presión atmosférica y el peso del mismo en la columna vertical.

A menudo el barómetro de mercurio se emplea para medir la presión atmosférica p_0. Conforme a la ecuación (15-19), la altura de una columna de mercurio a la presión atmosférica normal (1 atm = 1.01325×10^5 N/m^2) es:

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}}{(13.5955 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)}$$

$$= 0.7600 \text{ m} = 760.0 \text{ mm},$$

donde hemos usado un valor estándar de g y la densidad del mercurio a 0 °C. Por eso, con frecuencia se dice que 1 atm = 760 mm de Hg; en forma equivalente, 1 mm de Hg = 1/760 atm. Se da el nombre de torr, a la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura (una vez más a 0°C y con g en su valor estándar). Por tanto,

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm de Hg} = 133.322 \text{ Pa}.$$

También podemos expresar 1 atm como 29.9 pulgadas de Hg; los barómetros ordinarios (y los pronosticadores televisivos del clima) acostumbran dar la presión en pulgadas de mercurio. Estos cálculos nos revelan por qué el mercurio con su gran densidad, se elige para medir la presión atmosférica: un líquido de menor densidad requeriría una columna proporcionalmente mayor. Para medir la presión atmosférica mediante un barómetro de "agua", se necesitaría una columna de más de ¡10 m de altura!

La presión atmosférica normal también pueden expresarse como 14.7 lb/in^2, esto significa lo siguiente: el peso de la columna vertical de aire que se extiende de cada pulgada cuadrada en la superficie terrestre a la parte superior de la atmósfera es de 14.7 libras. El lector deberá ser capaz de demostrar que eso mismo pesa una columna de mercurio de 760 mm de altura, y de una pulgada cuadrada en sección transversal.

El barómetro de mercurio fue inventado por el italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), cuyo nombre lleva la unidad de presión torr. Pascal, que vivió en ese mismo siglo, fue el primero en utilizarlo para demostrar que la presión atmosférica varía con la altura. Sus experimentos tuvieron gran impacto, pues demostraron por primera vez la posibilidad de crear un vacío (en este caso, en el pequeño volumen de la parte superior del tubo vertical). Esta demostración condujo a la invención de la bomba al vacío en la segunda mitad del siglo XVII.

El manómetro de tubo abierto (Fig. 15-13) mide la presión manométrica. Se compone de un tubo en forma de U que contiene un líquido; uno de sus extremos se abre a la atmósfera, y el otro está conectado al sistema (tanque) cuya presión p queremos medir. Con base en la ecuación 15-9, obtenemos

$$p - p_0 = \rho g h.$$

Así pues, la presión manométrica, $p - p_0$, es proporcional a la diferencia de altura de las columnas líquidas en el tubo U. Si el recipiente contiene gas bajo gran presión, un líquido denso como el mercurio se usa en el tubo; el agua u otros líquidos de baja densidad pueden utilizarse cuando se trata de bajas presiones de gases.

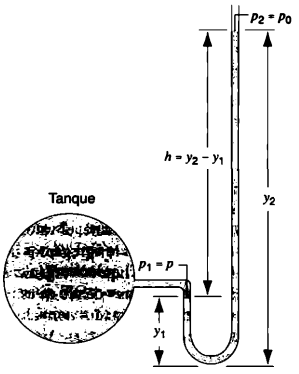


FIGURA 15-13. Manómetro de tubo abierto, que podría servir para medir la presión de un fluido dentro de un tanque.

PROBLEMA RESUELTO 15-4. La columna de mercurio en un barómetro, tiene una altura medida h de 740.35 mm. La temperatura es −5.0 °C, a la cual la densidad del mercurio es 1.3608×10^4 kg/m^3. La aceleración en caída libre g en el sitio del barómetro es 9.7835 m/s^2. ¿Cuál es la presión atmosférica?

Solución De acuerdo con la ecuación 15-19 tenemos

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho g h \\ &= (1.3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.7835 \text{ m/s}^2)(0.74035 \text{ m}) \\ &= 9.8566 \times 10^4 \text{ Pa} = 739.31 \text{ torr.} \end{aligned}$$

Nótese que desde el punto de vista numérico, el valor de la presión en torr (739.31 torr), se parece al de la altura h de la columna de mercurio expresado en mm (740.35 mm). Estas dos cantidades serán numéricamente iguales, sólo si el barómetro se halla en un lugar donde g tenga su valor estándar, y donde la temperatura del mercurio sea 0 °C.

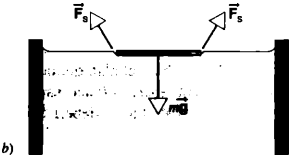
Otra manera de expresar el resultado de este problema, sería indicarlo como 0.98566 bar —es decir, 985.66 milibar—, donde 1 bar = 10^5 Pa.

15-6 TENSIÓN SUPERFICIAL (Opcional)

Vemos flotar hojas e insectos en la *superficie* del agua. *No* están parcialmente sumergidos *ni* flotan debido al Principio de Arquímedes. En este caso, el objeto se halla totalmente en la superficie, y ninguna de sus partes está sumergida.

Lo mantiene a flote la *tensión superficial* del líquido. Podemos demostrarlo haciendo flotar una aguja de acero o una hoja de afeitar (Fig. 15-14*a*). Por supuesto, sería imposible que el acero flotara según el Principio de Arquímedes, pues su densidad es mayor que la del agua. Si sumergimos la aguja o la hoja de afeitar, se hundirán tal como lo predice ese principio. Pueden flotar sólo cuando se hallen enteramente en la superficie. Podemos agregarle al agua una sustancia química denominada agente activo de superficie o *surfactante*, que reduce la tensión superficial (al disminuir la fuerza de cohesión entre las moléculas), y hace más difícil que el objeto flote. Los detergentes son surfactantes comunes. Si introducimos un detergente en el agua donde flota una hoja de rasurar, la tensión superficial disminuye de inmediato, y la hoja se hunde hasta el fondo.

a)



b)

FIGURA 15-14. *a)* Hoja de afeitar que flota en la superficie del agua, sostenida sólo por la tensión superficial. *b)* La superficie está distorsionada por el objeto flotante, el cual mantiene a flote los componentes verticales de la fuerza superficial $\vec{F}_s$.

Un objeto flotante, como el de la figura 15-14*a*, presiona y baja un poco la capa superficial del fluido (Fig. 15-14*b*), que estira la superficie y, por lo mismo, tiende a aumentar su energía potencial. A semejanza de un trampolín, la capa estirada ejerce una fuerza restauradora, cuyo componente vertical puede mantener equilibrio con el peso del objeto. Sin embargo, como veremos luego, esta analogía del comportamiento de la capa superficial no es rigurosamente correcta.

La figura 15-15 indica una manera de medir la tensión superficial de un líquido. Se dobla un alambre delgado, se le da la forma de tres lados de un rectángulo y se conecta un alambre deslizante como cuarto lado. Si una película de líquido cubre el lazo vertical (que quizá se creó introduciendo el alambre en un recipiente del líquido), la tensión superficial

15-5 MEDICIÓN DE LA PRESIÓN

La presión ejercida por un líquido puede medirse empleando métodos estáticos o dinámicos. Los métodos dinámicos se basan en la velocidad de flujo de un líquido en movimiento, y se explican en el Capítulo 16. En la presente sección, vamos a describir los métodos estáticos.

En general, los medidores se sirven de la presión atmosférica como nivel de referencia, y cuantifican la diferencia entre la presión real y la atmosférica, diferencia llamada *presión manométrica*. La presión real en un punto de un fluido, recibe el nombre de *presión absoluta*, que es la suma de la presión atmosférica y de la presión manométrica. La presión manométrica se da por arriba o por debajo de la presión atmosférica, y por lo mismo puede ser positiva o negativa: la presión absoluta siempre es positiva.

El barómetro de mercurio es un largo tubo de vidrio que se llena con mercurio, y luego se invierte e introduce en un plato de mercurio, como se ve en la figura 15-12. El espacio arriba de la columna de mercurio es en realidad un vacío que contiene sólo vapor de mercurio, cuya presión p_2 es tan pequeña, que puede ignorarse a temperaturas ordinarias. La presión p_1 en la superficie del plato de mercurio, es la presión desconocida p que deseamos medir. A partir de la ecuación 15-8 obtenemos

$$p_2 - p_1 = 0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho g h,$$

o

$$p = \rho g h. \qquad (15\text{-}19)$$

Al medir la altura de la columna sobre la superficie del plato, se obtiene la presión.

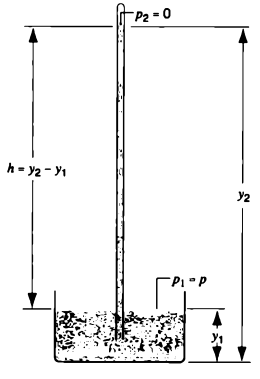


FIGURA 15-12. El barómetro de mercurio. El mercurio se encuentra en equilibrio bajo la influencia de la presión atmosférica y el peso del mismo en la columna vertical.

A menudo el barómetro de mercurio se emplea para n dir la presión atmosférica p_0. Conforme a la ecuación (15-1 la altura de una columna de mercurio a la presión atmosfé ca normal (1 atm = 1.01325×10^5 N/m^2) es:

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}}{(13.5955 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)}$$

$$= 0.7600 \text{ m} = 760.0 \text{ mm},$$

donde hemos usado un valor estándar de g y la densidad mercurio a 0 °C. Por eso, con frecuencia se dice que 1 atm 760 mm de Hg; en forma equivalente, 1 mm de Hg = 1/760 a Se da el nombre de torr, a la presión ejercida por una colu na de mercurio de 1 mm de altura (una vez más a 0°C y c g en su valor estándar). Por tanto,

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm de Hg} = 133.322 \text{ Pa}.$$

También podemos expresar 1 atm como 29.9 pulgadas de H los barómetros ordinarios (y los pronosticadores televisiv del clima) acostumbran dar la presión en pulgadas de merc rio. Estos cálculos nos revelan por qué el mercurio con gran densidad, se elige para medir la presión atmosférica: líquido de menor densidad requeriría una columna proporci nalmente mayor. Para medir la presión atmosférica median un barómetro de "agua", se necesitaría una columna de más ¡10 m de altura!

La presión atmosférica normal también pueden expresa se como 14.7 lb/in^2, esto significa lo siguiente: el peso de columna vertical de aire que se extiende de cada pulgada cu drada en la superficie terrestre a la parte superior de la atmó fera es de 14.7 libras. El lector deberá ser capaz de demostr que eso mismo pesa una columna de mercurio de 760 mm altura, y de una pulgada cuadrada en sección transversal.

El barómetro de mercurio fue inventado por el italia Evangelista Torricelli (1608-1647), cuyo nombre lleva la un dad de presión torr. Pascal, que vivió en ese mismo siglo, fu el primero en utilizarlo para demostrar que la presión atmo férica varía con la altura. Sus experimentos tuvieron gran im pacto, pues demostraron por primera vez la posibilidad crear un vacío (en este caso, en el pequeño volumen de la pa te superior del tubo vertical). Esta demostración condujo la invención de la bomba al vacío en la segunda mitad d siglo XVII.

El manómetro de tubo abierto (Fig. 15-13) mide la pr sión manométrica. Se compone de un tubo en forma de U qu contiene un líquido; uno de sus extremos se abre a la atmó fera, y el otro está conectado al sistema (tanque) cuya presió p queremos medir. Con base en la ecuación 15-9, obtenemo

$$p - p_0 = \rho g h.$$

Así pues, la presión manométrica, $p - p_0$, es proporcional a l diferencia de altura de las columnas líquidas en el tubo U. S el recipiente contiene gas bajo gran presión, un líquido dens como el mercurio se usa en el tubo; el agua u otros líquido de baja densidad pueden utilizarse cuando se trata de baj presiones de gases.

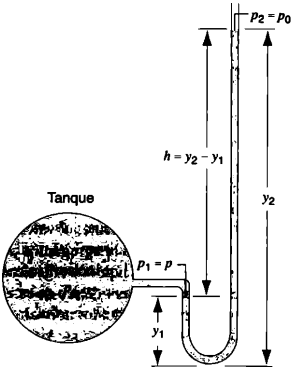


FIGURA 15-13. Manómetro de tubo abierto, que podría servir para medir la presión de un fluido dentro de un tanque.

PROBLEMA RESUELTO 15-4. La columna de mercurio en un barómetro, tiene una altura medida h de 740.35 mm. La temperatura es −5.0 °C, a la cual la densidad del mercurio es 1.3608×10^4 kg/m^3. La aceleración en caída libre g en el sitio del barómetro es 9.7835 m/s^2. ¿Cuál es la presión atmosférica?

Solución De acuerdo con la ecuación 15-19 tenemos

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho g h \\ &= (1.3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.7835 \text{ m/s}^2)(0.74035 \text{ m}) \\ &= 9.8566 \times 10^4 \text{ Pa} = 739.31 \text{ torr.} \end{aligned}$$

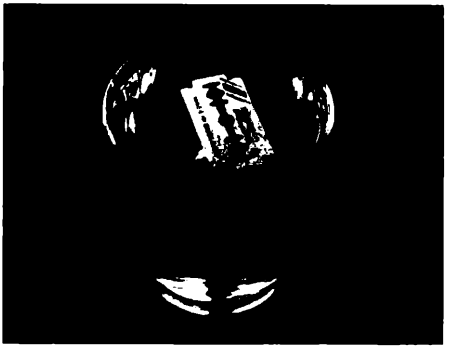
Nótese que desde el punto de vista numérico, el valor de la presión en torr (739.31 torr), se parece al de la altura h de la columna de mercurio expresado en mm (740.35 mm). Estas dos cantidades serán numéricamente iguales, sólo si el barómetro se halla en un lugar donde g tenga su valor estándar, y donde la temperatura del mercurio sea 0 °C.

Otra manera de expresar el resultado de este problema, sería indicarlo como 0.98566 bar —es decir, 985.66 milibar—, donde 1 bar = 10^5 Pa.

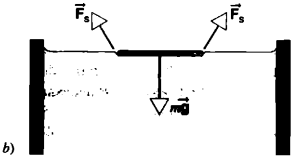
15-6 TENSIÓN SUPERFICIAL (Opcional)

Vemos flotar hojas e insectos en la *superficie* del agua. *No* están parcialmente sumergidos *ni* flotan debido al Principio de Arquímedes. En este caso, el objeto se halla totalmente en la superficie, y ninguna de sus partes está sumergida.

Lo mantiene a flote la *tensión superficial* del líquido. Podemos demostrarlo haciendo flotar una aguja de acero o una hoja de afeitar (Fig. 15-14*a*). Por supuesto, sería imposible que el acero flotara según el Principio de Arquímedes, pues su densidad es mayor que la del agua. Si sumergimos la aguja o la hoja de afeitar, se hundirán tal como lo predice ese principio. Pueden flotar sólo cuando se hallen enteramente en la superficie. Podemos agregarle al agua una sustancia química denominada agente activo de superficie o *surfactante*, que reduce la tensión superficial (al disminuir la fuerza de cohesión entre las moléculas), y hace más difícil que el objeto flote. Los detergentes son surfactantes comunes. Si introducimos un detergente en el agua donde flota una hoja de rasurar, la tensión superficial disminuye de inmediato, y la hoja se hunde hasta el fondo.



a)



b)

FIGURA 15-14. *a)* Hoja de afeitar que flota en la superficie del agua, sostenida sólo por la tensión superficial. *b)* La superficie está distorsionada por el objeto flotante, el cual mantiene a flote los componentes verticales de la fuerza superficial $\vec{F}_s$.

Un objeto flotante, como el de la figura 15-14*a*, presiona y baja un poco la capa superficial del fluido (Fig. 15-14*b*), que estira la superficie y, por lo mismo, tiende a aumentar su energía potencial. A semejanza de un trampolín, la capa estirada ejerce una fuerza restauradora, cuyo componente vertical puede mantener equilibrio con el peso del objeto. Sin embargo, como veremos luego, esta analogía del comportamiento de la capa superficial no es rigurosamente correcta.

La figura 15-15 indica una manera de medir la tensión superficial de un líquido. Se dobla un alambre delgado, se le da la forma de tres lados de un rectángulo y se conecta un alambre deslizante como cuarto lado. Si una película de líquido cubre el lazo vertical (que quizá se creó introduciendo el alambre en un recipiente del líquido), la tensión superficial

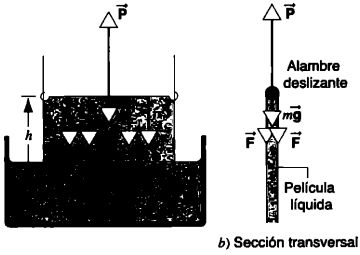


FIGURA 15-15. *a)* Diagrama esquemático de un experimento con que se mide la tensión superficial de un líquido. Una película de líquido está sostenida en la superficie rectangular vertical, cuyo borde superior es un alambre deslizante. Una fuerza externa equilibra el peso del alambre junto con la fuerza descendente total $\vec{F}$ de la tensión superficial. *b)* Esquema transversal de la película que muestra cómo actúa la tensión superficial sobre dos superficies.

tenderá a impulsar hacia abajo el alambre deslizante. Aplicamos una fuerza ascendente externa P necesaria para mantener en equilibrio el alambre. Esta fuerza deberá balancear la fuerza descendente total en el alambre, que es igual a su peso, más la fuerza F debida a la tensión superficial.

En forma experimental descubrimos que la fuerza F depende de la longitud d del alambre deslizante, pero de ninguna manera de la altura h del rectángulo. Aunque resulta tentador ver en la capa superficial una especie de hoja elástica alargada sobre el líquido, esta observación muestra que esa descripción es incorrecta. Imagine que la película de la figura 15-15 se corta en gran número N de tiras verticales estrechas de longitud h, y de ancho $\Delta d = d/N$. Si la película se comportara como una hoja elástica, las tiras se compararían como un resorte y entonces la fuerza total dependería del número de tiras (y por lo mismo de d), y de su longitud h. La analogía de la hoja elástica no es correcta, pues la tensión superficial sólo depende de d y no de h.

La tensión superficial γ, se define como *la fuerza superficial F por longitud unitaria L sobre la que actúa.*

$$\gamma = \frac{F}{L}. \tag{15-20}$$

Nótese que la tensión superficial γ no es una fuerza simplemente, sino una fuerza por unidad de longitud. Antes nos hemos referido siempre a la *tensión* como una fuerza, pero aquí tiene un significado ligeramente distinto.

En la película de la figura 15-15, la fuerza opera sobre una longitud L de $2d$, porque hay dos capas superficiales de longitud d. En este sistema la tensión superficial sería $\gamma = F/2d$.

También podemos analizar la tensión en función de la energía y no de la fuerza. Supóngase que mueve el alambre deslizante de la figura 15-15, a través de un desplazamiento ascendente Δx. El trabajo W realizado por la fuerza superficial que actúa hacia abajo es $-F\,\Delta x$, y podemos relacionar el trabajo efectuado por esta fuerza conservativa con un cambio de la energía potencial $\Delta U = -W = F\,\Delta x$. Si movemos el alambre hacia arriba, aumentará el área de la superficie en $\Delta A = L\,\Delta x$. Entonces la ecuación 15-20 se convierte en

$$\gamma = \frac{F}{L} = \frac{F\,\Delta x}{L\,\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta A}. \tag{15-21}$$

De acuerdo con la ecuación 15-21, podemos considerar la tensión superficial γ, como *la energía potencial superficial por área unitaria de superficie.*

En el agua a temperatura ambiente, el valor de la tensión superficial es $\gamma = 0.073$ N/m. Si le agregamos jabón, la tensión se reduce a 0.025 N/m. Los líquidos orgánicos y las soluciones acuosas, suelen tener tensiones dentro de estos límites. La tensión superficial de los metales líquidos normalmente es de un orden de magnitud mayor que la del agua. Así, el mercurio líquido tiene una tensión de 0.487 N/m. (Esta tensión más alta en los metales, se debe a que las fuerzas entre las moléculas tienen un mayor orden de magnitud que en el agua. Por la misma razón, el punto de ebullición de los metales es casi siempre más alto que el del agua.)

La tensión superficial hace que las gotas suspendidas de un líquido adquieran una forma esférica (Fig. 15-16). En una gota de determinada masa o volumen, la energía superficial (igual a γ multiplicada por el área superficial) es mínima cuando la superficie es muy pequeña; una esfera es el cuerpo geométrico con la menor razón de superficie a volumen. Si no actúan otras fuerzas sobre la gota, asumirá espontáneamente

FIGURA 15-16. Las gotas de líquido que flotan libremente adoptan de modo espontáneo una forma esférica. En la fotografía, el astronauta Dr. Joseph P. Allen, en órbita terrestre dentro de la nave espacial *Columbia*, observa una bola de jugo de naranja creada por medio de un distribuidor automático de bebidas.

una forma esférica. En estado de equilibrio, la tensión produce una fuerza interna en un elemento de la superficie, que es balanceada por otra fuerza igual hacia afuera debida a la presión del líquido dentro de la gota. En una burbuja de jabón (que tiene dos superficies y, por tanto, el doble de la tensión de una gota líquida de igual tamaño), la presión manométrica del gas confinado en ella genera la fuerza hacia afuera necesaria para alcanzar el equilibrio.

Como los protones y neutrones del núcleo experimentan fuerzas de corto alcance un poco parecidas a las moléculas en un líquido, sobre él actúa una tensión superficial similar a la de una gota líquida. En muchos núcleos la forma es determinada por el equilibrio entre la fuerza hacia afuera proveniente de la repulsión eléctrica de los protones, y la fuerza hacia adentro proveniente de la tensión superficial. La forma preferida en ellos suele ser la esférica, como la gota líquida. El análisis del núcleo como una gota líquida cargada, ha contribuido muchísimo a conocer mejor la fisión nuclear, en la cual el núcleo se divide en dos partes de tamaño semejante.

PROBLEMA RESUELTO 15-5. En el experimento de la figura 15-15*a* se descubre que el alambre móvil está en equilibrio cuando la fuerza ascendente P es 3.45×10^{-3} N. El alambre tiene una longitud d de 4.85 cm, y una densidad lineal de masa (μ de 1.75×10^{-3} kg/m). Calcule la tensión superficial del líquido.

Solución A partir de la condición de equilibrio descrita en la figura 15-15*b*, tenemos

$$\sum F_y = P - F - mg = 0,$$

o

$$F = P - mg.$$

Con $F = 2d\gamma$ (porque hay dos capas superficiales de longitud d) y $m = \mu d$, obtenemos

$$2d\gamma = P - \mu dg$$

o

$$\gamma = \frac{P - \mu dg}{2d}$$

$$= \frac{3.45 \times 10^{-3}\ \text{N} - (1.75 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(0.0485\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}{2(0.0485\ \text{m})}$$

$$= 0.027\ \text{N/m}.$$

OPCIÓN MÚLTIPLE

15-1 Fluidos y sólidos

1. Considere los siguientes tipos de fuerzas: A) compresionales, B) tensiles, o C) de cizallamiento. ¿Cuál de ellas puede ser soportada por
   a) un sólido? *b*) un líquido?

15-2 Presión y densidad

2. El objeto B tiene el doble de densidad y la mitad de la masa de un objeto A. La razón del volumen de A al de B es
   A) 4. B) 2. C) 1.
   D) 1/2. E) 1/4.
3. Se sujeta una copa de succión a un techo metálico suave. El peso máximo que puede soportar la copa depende de
   A) su superficie de contacto con el techo.
   B) la presión del aire fuera de la copa.
   C) tanto A) como B).
   D) ni A) ni B).

15-3 Variación de la presión en un fluido en reposo

4. La superficie superior de un líquido incompresible está abierta a la atmósfera. La presión en la profundidad h_1 debajo de la superficie es p_1. ¿Qué relación existe entre la presión p_2 en la profundidad $h_2 = 2h_1$ con la presión p_1?
   A) $p_2 > 2p_1$ B) $p_2 = 2p_1$ C) $p_2 < 2p_1$

15-4 Principios de Pascal y de Arquímedes

5. Se ata una roca grande a un globo lleno de aire. Se colocan ambos en un lago. A medida que el globo se hunde:
   a) La presión del aire dentro del globo
   A) aumenta. B) no cambia. C) disminuye.
   D) varía de manera impredecible.
   b) La densidad promedio del globo + aire + roca
   A) aumenta. B) no cambia. C) disminuye.
   D) varía de manera impredecible.
   c) La magnitud de la fuerza neta en el globo + aire + roca
   A) aumenta. B) no cambia. C) disminuye.
   D) varía de manera impredecible.
6. El cuerpo humano (promedio) flota en el agua. Los que usan escafandra autónoma (SCUBA), usan pesas y un chaleco de flotación que puede llenarse con cantidad variable de aire para crear una flotación neutral. Suponga que un buzo establece inicialmente una flotación neutral en cierta profundidad. Para establecer una mayor profundidad deberá
   A) dejar salir un poco de aire del chaleco.
   B) agregarle un poco de aire.
   C) no hacer nada, porque ya existe la flotación neutral.
7. La llanta de un automóvil está totalmente llena de agua. Se encuentra montada en un eje, de modo que ocupa un plano vertical. ¿Cómo varía la presión dentro de ella cuando *a*) no se aplica fuerza adicional; *b*) una fuerza intensa empuja hacia arriba en el fondo de la llanta; *c*) una fuerza intensa empuja hacia abajo en la parte superior de la llanta?
   A) La presión es considerablemente mayor en la parte superior.
   B) La presión es aproximadamente la misma en todas partes.
   C) La presión es considerablemente mayor en el fondo.
   D) La variación de presión no puede determinarse sin más información.

8. Un bloque de madera flota en el agua de un contenedor sellado. Cuando este último se halla en reposo, 25% del bloque sobresale del agua. Considere las siguientes cinco situaciones: *a*) Se eleva el contenedor con velocidad constante. *b*) Se baja el contendor con velocidad constante. *c*) Se eleva el contendor con velocidad creciente. *d*) Se baja el contenedor con velocidad creciente. *e*) Crece la presión del aire sobre el agua del contenedor. ¿Qué sucede en cada situación?
   A) El bloque flota más alto en el agua.
   B) El bloque flota en el mismo nivel en el agua.
   C) El bloque flota más bajo en el agua.
   D) La fracción del bloque arriba del agua no puede determinarse con esta información.
9. La cubeta *A* contiene sólo agua; una cubeta idéntica *B* contiene agua, pero también un objeto sólido en ella. Suponga las siguientes situaciones: *a*) el objeto flota en la cubeta *B* y las cubetas tiene el mismo nivel de agua. *b*) El objeto flota en la cubeta *B* y las cubetas tienen el mismo volumen de agua. *c*) El objeto se sumerge totalmente en la cubeta *B* y las cubetas tienen el mismo nivel de agua. *d*) El objeto se sumerge completamente en la cubeta *B* y las cubetas tienen el mismo volumen de agua. En las cuatro situaciones, ¿cuál cubeta tiene el mayor peso total?
   A) Cubeta *A*.
   B) Cubeta *B*.
   C) Ambas cubetas tienen el mismo peso.
   D) La respuesta no puede determinarse con la información anterior.

15-5 Medición de la presión

15-6 Tensión superficial (Opcional)

10. Una burbuja esférica de jabón tiene un radio r y una tensión superficial γ, y contiene aire a una presión p. Soplando se introduce más aire en ella, lo cual hace que el radio aumente a $2r$.
   a) Ahora la tensión superficial en esta burbuja inflada es
   A) poco menor que γ. B) igual a γ.
   C) poco mayor que γ. D) 2γ.
   b) Ahora la presión del aire dentro de la burbuja inflada es
   A) poco menor que p. B) igual que p.
   C) poco mayor que p. D) $2p$.

PREGUNTAS

1. Explique cómo puede ser la presión una magnitud escalar cuando su acción puede crear fuerzas, las cuales son vectores.
2. Calcule la densidad promedio de su cuerpo. Explique una forma en que podría obtener un valor exacto utilizando las ideas expuestas en el capítulo.
3. En el Capítulo 19 veremos que una presión excesiva apenas de 20 Pa corresponde al umbral del dolor para el sonido intenso. Sin embargo, a 2 m debajo de la superficie del agua un clavadista experimenta una presión mucho mayor (¿cuánta?), y no siente dolor. ¿A qué se debe la diferencia?
4. Las personas que guardan cama largo tiempo, están menos propensas a tener llagas en el cuerpo si usan una cama de agua en vez de un colchón ordinario. Explique por qué.
5. Explique por qué uno podría acostarse en una cama de clavos sin sentir dolor.
6. Explique la afirmación "el agua busca su nivel".
7. Se vierte agua hasta el mismo nivel en los tres vasos de la figura adjunta (Fig. 15-17). Si la presión es igual en el fondo de ellos, su base experimentará la misma fuerza. ¿Por qué entonces los vasos tienen distinto peso cuando los colocamos en una báscula? Se da el nombre de *paradoja hidrostática* a este resultado evidentemente hidrostático.

FIGURA 15-17. Pregunta 7.

8. ¿Se puede aplicar el Principio de Arquímedes a un recipiente en caída libre? ¿A un satélite que describe una órbita circular?
9. Un flotador esférico hecho de corcho, flota sumergido a la mitad en una olla de té en reposo sobre la Tierra. ¿Flotará o se sumergirá el corcho a bordo de una nave espacial *a*) que navega en el espacio libre, y *b*) en la superficie de Marte?
10. ¿Cómo funciona una copa de succión?
11. ¿Es igual en todas las profundidades la fuerza de flotación que actúa sobre un submarino sumergido?
12. Explique cómo un submarino se levanta, desciende y se mantiene a una profundidad fija. ¿Usan los peces el mismo principio? (Véase "The Buoyancy of Marine Animals" de Eric Denton, *Scientific American*, julio de 1960, p. 118, y "Submarine Physics" de G. P. Harnwell, *American Journal of Physics*, marzo de 1948, p. 127.)
13. Un bloque de madera flota en un cubo de agua dentro de un elevador. Cuando éste parte del reposo y acelera hacia abajo, ¿flota el bloque sobre la superficie de agua?
14. Dos cubetas idénticas están llenas hasta el borde con agua, pero una tiene un bloque de madera que flota. ¿Cuál de las dos pesa más? (¿O pesan lo mismo?)
15. Calcule con cuidado la fuerza de flotación que la atmósfera ejerce sobre usted.
16. Según el problema resuelto 15-3, el 89.6% de un témpano de hielo está sumergido. Pero a veces los témpanos se invierten, con posibles resultados desastrosos para los barcos cercanos. ¿Por qué ocurre eso, pues gran parte de su masa se halla debajo del nivel del mar?
17. ¿Puede hundir un barco de hierro introduciendo agua en él por medio de un sifón?
18. A los buzos con SCUBA se les advierte que no retengan la respiración cuando nadan hacia arriba. ¿Por qué?
19. Un jarro con pico está totalmente lleno de agua líquida en su punto de congelación, y un cubo de hielo flota en ella también en su punto de congelación. A medida que el cubo se derrite, ¿qué sucede con el nivel de agua en los tres casos siguientes: *a*) el cubo es hielo sólido; *b*) el cubo contiene algunos granos de arena; *c*) el cubo contiene algunas burbujas?

20. Aunque los paracaídas deben atenuar la caída, a menudo se diseñan con un hoyo en la parte superior. Explique por qué.
21. Una pelota flota en la superficie de agua de un contenedor expuesto a la atmósfera. ¿Permanecerá sumergida en su nivel anterior, se hundirá o se elevará un poco si *a*) el contenedor está cubierto y se extrae el aire, o *b*) el contenedor está cubierto y se comprime el aire?
22. Explique por qué un globo aerostático inflado alcanzará sólo determinada altura una vez que empieza a ascender; en cambio, un submarino siempre se sumergirá al fondo del mar una vez que empieza a hundirse, si no se hacen cambios.
23. ¿Por qué a la presión atmosférica un balón pesa lo mismo cuando está vacío que cuando está lleno de aire? ¿Los pesos serían idénticos si se midieran al vacío?
24. Los contenedores de líquidos tienden a *rezumar* cuando se llevan al aire en un avión. ¿Por qué? ¿Influye o no el hecho de que tengan el lado derecho hacia arriba? ¿O de que estén totalmente llenos al inicio?
25. Durante la Segunda Guerra Mundial, un carguero que apenas si lograba flotar en el Mar del Norte, se dirigía por el estuario del Támesis hacia los muelles de Londres. Se hundió antes de poder llegar. ¿Por qué?
26. ¿Es verdad que un objeto flotante mantendrá su equilibrio estable sólo si el centro de flotación se encuentra sobre su centro de gravedad? Explique su respuesta con ejemplos.
27. Los maderos lanzados verticalmente en un estanque no mantienen esta posición, sino que flotan "planos" en el agua. Explique por qué.
28. ¿Por qué un barco que naufraga se vuelca a menudo conforme va sumergiéndose en el agua?
29. Una barca llena de hierro de desecho se encuentra en una esclusa. Si el hierro se tira por la borda, ¿qué sucederá con el nivel de agua de la esclusa? ¿Y si se arroja a la tierra que bordea la esclusa?
30. Una cubeta de agua está colgada de una báscula de resorte. ¿Cambia la lectura de la báscula cuando sumergimos en el agua un trozo de hierro suspendido de un resorte? ¿O cuando metemos en el agua un corcho?
31. Si se agrega suficiente hierro a un extremo de un palo de madera uniforme, flotaría vertical y no horizontalmente (véase Preg. 27). Explique por qué.
32. Aunque hay problemas prácticos, en teoría es posible hacer flotar un barco en unos cuantos barriles de agua. ¿Cómo lo lograría usted?
33. Una cubeta abierta con agua está en un plano sin fricción inclinado, y formando un ángulo α con la horizontal. Determine la inclinación de equilibrio con la horizontal de la superficie libre del agua cuando *a*) se mantiene la cubeta en reposo; *b*) cuando se permite que se deslice a una rapidez constante ($a = 0$, $v =$ constante). Y *c*) la cubeta se desliza hacia abajo sin restricciones ($a =$ constante). ¿Qué sucederá si el plano es curvo de modo que $a \neq$ constante?
34. En un barómetro, ¿qué importancia tiene que su diámetro interior sea uniforme? ¿O que el tubo sea absolutamente vertical?
35. Un manómetro de tubo abierto tiene un tubo cuyo diámetro mide el doble del otro. Explique cómo afectará ello su funcionamiento. ¿Influye cuál extremo esté conectado a la cámara cuya presión va a medirse?
36. Hemos estudiado los líquidos bajo compresión. ¿Podemos ponerlos bajo tensión? De ser así, ¿bajo suficiente tensión les sucederá lo mismo que a los sólidos que se rompen? (Véase "The Tensile Strength of Liquids" de Robert E. Apfel, *Scientific American*, diciembre de 1972, p. 58.)
37. Explique por qué es difícil separar por tracción directa dos placas de vidrio con una película delgada de agua entre ellas, pero es fácil hacerlo mediante el deslizamiento.
38. Dé una explicación molecular de por qué la tensión superficial disminuye al elevarse la temperatura.
39. Las películas de jabón son mucho más estables que las de agua. ¿Por qué? (Considere cómo reacciona la tensión superficial ante el estiramiento.)
40. Explique por qué una película de jabón se deshace si aparece un pequeño hoyo en ella.
41. Explique las siguientes observaciones: *a*) el agua forma glóbulos en una placa grasosa, pero no en una sin grasa; *b*) se juntan las burbujas pequeñas en la superficie del agua.
42. Si el jabón reduce la tensión superficial del agua, ¿por qué soplamos burbujas de jabón en vez de burbujas de agua?
43. Algunos escarabajos de agua pueden caminar sobre ella. Calcule el peso máximo que uno de estos insectos puede tener, y aún así ser sostenido en esa forma.
44. ¿Cuál es la fuente de la energía que permite elevarse a un líquido dentro de un capilar (por ejemplo, un tubo de vidrio delgado y hueco)?
45. ¿Qué significa decir que ciertos líquidos pueden ejercer una pequeña presión negativa?

EJERCICIOS

15-1 Fluidos y sólidos

15-2 Presión y densidad

1. Determine el aumento de presión de un fluido en una jeringa, cuando la enfermera aplica una fuerza de 42.3 N al pistón de 1.12 cm de diámetro.
2. Tres líquidos que no se mezclarán se vacían en un recipiente cilíndrico. Su volumen y densidad son 0.50 L, 2.6 g/cm^3; 0.25 L, 1.0 g/cm^3; y 0.40 L, 0.80 g/cm^3 (L = litro). Calcule la fuerza total en el fondo del recipiente. (Ignore la contribución debida a la atmósfera.) ¿Importa el hecho de que se mezclen o no los fluidos?
3. La ventana de una oficina mide 3.43 por 2.08 m. A causa de una tormenta, la presión externa del aire desciende a 0.962 atm, mientras que la presión interna se mantiene a 1.00 atm. ¿Qué fuerza neta presiona hacia afuera de la ventana?
4. Un cubo sólido de cobre tiene una longitud de lado de 85.5 cm. ¿Cuánta presión debe aplicársele para reducir la longitud de lado a 85.0 cm? El módulo volumétrico del cobre es 140 GPa.
5. Una caja hermética está parcialmente vacía, con una tapa 12 in^2 de superficie. ¿Qué presión tiene si se necesita una fuerza de 108 lb para quitar la tapa, y si la presión atmosférica es 15 lb/in^2?

15-3 Variación de la presión en un fluido en reposo

6. Los pulmones humanos pueden funcionar contra un diferencial de presión menor de 0.050 atm. ¿A qué nivel bajo el agua puede nadar un buzo que respira a través de un tubo largo?
7. Calcule la diferencia hidrostática de la presión sanguínea de una persona de 1.83 m entre el cerebro y los pies.
8. Determine la presión total, en pascal, a 118 m por debajo de la superficie del mar. La densidad del agua es 1.024 g/cm^3, y la presión atmosférica en el nivel del mar es 1.013×10^5 Pa.
9. Las salidas del alcantarillado de una casa construida en una pendiente están a 8.16 m debajo del nivel de la calle. Si el alcantarillado se halla a 2.08 m debajo del nivel de la calle, calcule la diferencia de presión mínima que debe crear la bomba del alcantarillado para transferir los desechos de densidad promedio 926 kg/m^3.
10. Según el modelo de temperatura constante de la atmósfera terrestre, *a*) ¿cuál es la presión (en atm) a una altura de 5.00 km, y *b*) a qué altitud es la presión igual a 0.500 atm? Compare sus respuestas con la figura 15-5.
11. Un tubo simple U contiene mercurio. Cuando 11.2 cm de agua se vacían en el brazo derecho, ¿a qué altura llega el mercurio del brazo izquierdo a partir de su nivel inicial?
12. Las dimensiones de una alberca son 80 ft × 30 ft × 8.0 ft. *a*) Cuando está llena de agua, ¿qué fuerza (debida exclusivamente al agua) se ejerce sobre el fondo? ¿Sobre los extremos? ¿Y a los lados? *b*) Si le preocupa si las paredes de concreto cederán o no ante ella, ¿conviene tener en cuenta la presión atmosférica?
13. ¿Cuál sería la altura de la atmósfera si la densidad del aire *a*) fuera constante, y *b*) disminuyera linealmente hasta cero con la altura? Suponga una densidad de 1.21 kg/m^3 en el nivel del mar.
14. Los miembros de la tripulación intentan escapar de un submarino dañado que está a 112 m debajo de la superficie. ¿Cuánta fuerza deben aplicar a una escotilla de 1.22 m por 0.590 m para abrirla?
15. Es horizontal la superficie de contacto entre dos líquidos de distinta densidad que están en reposo y que no se mezclan. Pruebe este resultado general *a*) a partir del hecho de que la energía potencial de un sistema ha de ser mínimo en el equilibrio estable, *b*) a partir del hecho de que son iguales dos puntos cualesquiera en un plano horizontal en ambos fluidos.
16. Dos recipientes cilíndricos idénticos con su base situada en el mismo nivel contienen un líquido de densidad ρ. La superficie de las dos bases es A, sólo que en un recipiente la altura del líquido es h_1 y en el otro h_2. Encuentre el trabajo realizado por la gravedad al igualar los niveles cuando los dos recipientes están conectados.

15-4 Principios de Pascal y de Arquímedes

17. La tensión de una cuerda que sostiene un bloque sólido debajo de la superficie de un líquido (de densidad mayor que el sólido) es T_0, cuando el recipiente (Fig. 15-18) se halla en reposo. Demuestre que la tensión T está dada por $T_0(1 + a/g)$ cuando tiene una aceleración vertical a hacia arriba.

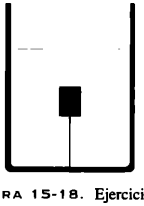


FIGURA 15-18. Ejercicio 17.

18. *a*) Si el pequeño pistón de una prensa hidráulica tiene un diámetro de 3.72 cm, y el pistón grande uno de 51.3 cm, ¿qué peso en el primero soportará 18.6 kN (un automóvil, por ejemplo) en el segundo? *b*) ¿Qué distancia debe cubrir el pistón pequeño para mover un automóvil 1.65 m?
19. Un bote que flota en agua dulce desplaza 35.6 kN de agua. *a*) ¿Qué peso de agua podría desplazar este bote en agua salada con una densidad 1,024 kg/m^3? *b*) ¿Cambiaría el volumen de agua desplazada? De ser así, ¿cuánto?
20. Un bloque de madera flota en agua con 0.646 de su volumen sumergido. En aceite tiene 0.918 sumergido de su volumen. Calcule la densidad de *a*) la madera, y *b*) el aceite.
21. Un lata de estaño tiene un volumen total de 1,200 cm^3 y una masa de 130 g. ¿Cuántos gramos de balas de plomo podría llevar sin hundirse en el agua? La densidad del plomo es 11.4 g/cm^3.
22. Aproximadamente una tercera parte del cuerpo de un físico que nada en el Mar Muerto estará arriba del nivel del agua. Suponiendo que la densidad del cuerpo humano sea 0.98 g/cm^3, determine la del agua del Mar Muerto. ¿Por qué es mucho más grande que 1.0 g/cm^3?
23. Suponga que la densidad de pesas de latón es 8.0 g/cm^3, y que la del aire es 0.0012 g/cm^3. ¿Qué error fraccional se comete al prescindir de la flotación del aire cuando se pesa un objeto de 3.4 g/cm^3 de densidad en una báscula?
24. Una fundición de hierro que contiene varias cavidades pesa 6,130 N en el aire y 3,970 N en el agua. ¿Cuál es el volumen de las cavidades en la fundición? La densidad del hierro es 7,870 kg/m^3.
25. Un objeto cúbico de dimensiones L = 0.608 m de lado y W = 4,450 N en el vacío, está colgado de un alambre en un tanque abierto en un líquido cuya densidad es (ρ = 944 kg/m^3), como se aprecia en la figura 15-19. *a*) Calcule la fuerza total descendente ejercida por el líquido y la atmósfera en la parte superior del objeto. *b*) Calcule la fuerza ascendente total en el fondo del objeto. *c*) Determine la tensión del alambre. *d*) Calcule la fuerza de flotación en el objeto, aplicando el Principio de Arquímedes. ¿Qué relación hay entre estas cantidades?

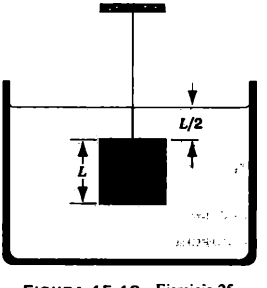


FIGURA 15-19. Ejercicio 25.

26. Un pez mantiene su profundidad en el agua del mar ajustando el contenido gaseoso del hueso poroso o de las bolsas de aire para igualar su densidad promedio a la del agua. Supóngase que colapsadas las bolsas de aire, tenga una densidad de 1.08 g/cm^3. ¿A qué fracción de su volumen corporal expandido deberá inflar las bolsas para reducir su densidad promedio a la del agua? Suponga que la densidad del aire es 0.00121 g/cm^3.

27. Se ha propuesto trasladar en dirigibles enormes el gas natural de los campos del Mar del Norte, utilizando el propio gas para el levantamiento. Calcule la fuerza necesaria para sujetarlo al suelo para realizar la descarga, cuando llegue totalmente cargado con 1.17×10^6 m^3 de gas a una densidad de 0.796 kg/m^3. La densidad del aire es 1.21 kg/m^3. (En comparación, el peso del dirigible es insignificante.)

28. El dirigible *Columbia* de Goodyear (véase Fig. 15-20) se desplaza lentamente a baja altitud, lleno como siempre de gas helio. Su carga útil máxima, que incluye la tripulación y la carga, es 1,280 kg. ¿Cuánta carga más podría transportar si reemplazáramos el helio por hidrógeno? ¿Por qué no hacerlo? El volumen del espacio interior lleno de helio es 5,000 m^3. La densidad del gas helio es 0.160 kg/m^3, y la del hidrógeno es 0.0810 kg/m^3.

FIGURA 15-20. Ejercicio 28.

29. Tres niños con un peso de 82.4 lb cada uno, construyen una balsa de madera atando con sogas troncos de 1.05 ft de diámetro y 5.80 ft de largo. ¿Cuántos troncos necesitará para mantenerla a flote? Suponga que la densidad de la madera es 47.3 lb/ft^3.

30. *a)* ¿Cuál es la superficie mínima de un bloque de hielo de 0.305 m de espesor que flota en el agua, que sostendrá un automóvil de 1,120 kg de masa? *b)* ¿Importa en qué parte del hielo se coloca el automóvil? La densidad del hielo es 917 kg/m^3.

15-5 Medición de la presión

31. Un estudiante construye un barómetro de agua con un tubo de 15 m de largo. Luego trata de medir la presión del aire cerca del nivel del mar, cuando la temperatura es de 25°C. Calcule el error relativo de presión que se comete al prescindir de la presión del vapor de agua.

32. Calcule la densidad del vino rojo que Pascal utilizó en su barómetro de 14 m de largo. Suponga que el vino llenaba el tubo.

33. La presión en la superficie del planeta Venus es 90 atm (es decir, 90 veces la de la superficie terrestre). ¿Qué longitud necesita un barómetro de mercurio para medirla? Suponga que se conserva el mercurio a 0 °C.

15-6 Tensión superficial (Opcional)

34. ¿Cuánta energía se guarda en la superficie de una burbuja de jabón de 2.1 cm de radio, si su tensión superficial es 4.5×10^{-2} N/m?

35. Una delgada película de agua de 80.0 pm de grosor se coloca entre dos palcas de vidrio y forma un parche circular de 12.0 cm de radio. Calcule la fuerza normal requerida para separar las placas, si la tensión superficial del agua es 0.072 N/m.

36. Con una solución de jabón donde la tensión superficial es 0.025 N/m, un niño sopla una burbuja de 1.40 cm de radio. ¿Cuánta energía consume al estirar la superficie de jabón?

PROBLEMAS

1. En 1654 Otto von Guericke, alcalde de Magdeburgo e inventor de la bomba de aire, ofreció una demostración ante la Dieta Imperial en que dos tiros de caballos no podían separar dos semiesferas de latón al vacío. *a)* Demuestre que la fuerza F necesaria para separarlos es $F = \pi R^2 \Delta p$, donde R es el radio (exterior) de las semiesferas, y Δp es la diferencia de presión en el exterior e interior de la esfera (Fig. 15-21). *b)* Si suponemos que R es igual a 0.305 m y la presión interna es 0.100 atm, ¿qué fuerza debería ejercer el tiro para separar las semiesferas? *c)* ¿Por qué se utilizaron dos tiros de caballos? ¿Un tiro no probaría el punto con la misma eficacia?

FIGURA 15-21. Problema 1.

2. La figura 15-22 muestra el diagrama de fase del carbón, donde se indican los intervalos de temperatura y presión donde se cristalizará en forma de diamante o de grafito. ¿Cuál es la profundidad mínima a la cual los diamantes pueden formarse, si la temperatura local es 1,000 °C, y si la superficie del subsuelo tiene una densidad 3.1 g/cm^3. Suponga que, igual que en los fluidos, la presión se debe al peso del material de arriba.

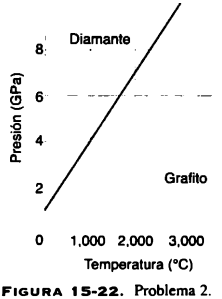


FIGURA 15-22. Problema 2.

3. El agua se halla a una profundidad D detrás de la cara de la cara vertical de un dique, como se observa en la figura 15-23. Supongamos que W es el ancho del dique. *a*) Calcule la fuerza horizontal resultante que sobre él ejerce la presión manométrica del agua, y *b*) la torca neta debida a la ejercida alrededor de una línea que cruza O paralelamente al ancho del dique. *c*) ¿Dónde se encuentra la línea de acción de la fuerza equivalente?

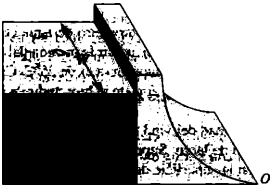


FIGURA 15-23. Problema 3.

4. Un barril cilíndrico tiene soldado un tubo estrecho en la parte superior, con las dimensiones que aparecen en la figura 15-24. Está lleno de agua hasta la parte superior del tubo. Calcule la razón de la fuerza hidrostática ejercida en el fondo del barril al peso del agua contenida en su interior. ¿Por qué la razón no es igual a 1? (Ignore la presencia de la atmósfera.)

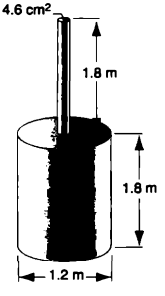


FIGURA 15-24. Problema 4.

5. Al analizar ciertas características geológicas de la Tierra, a veces conviene suponer que en lo profundo de ella la presión en algún nivel horizontal de compensación es idéntica en una extensa región, e igual a la ejercida por el peso del material de arriba. En otras palabras, la presión en el nivel de compensación está dada por la fórmula de presión hidrostática (de fluido). Ello exige, por ejemplo, que las montañas tengan raíces de baja densidad (véase Fig. 15-25). Supongamos una montaña de 6.00 km de altura. Las rocas continentales tienen una densidad de 2.90 g/cm^3; bajo el continente está el manto, con una densidad de 3.30 g/cm^3. Calcule la profundidad D de la raíz. (*Sugerencia*: Haga igual la presión en los puntos a y b; se cancelará la profundidad y del nivel de compensación.)

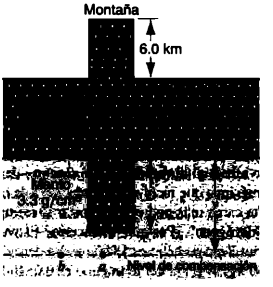


FIGURA 15-25. Problema 5.

6. *a*) Demuestre que la densidad ρ del agua en una profundidad y en el mar, se relaciona con la densidad superficial por medio de ρ_s

$$\rho \approx \rho_s[1 + (\rho_s g/B)y],$$

donde B = 2.2 GPa, es el módulo volumétrico del agua. Ignore las variaciones de temperatura. *b*) ¿Por qué fracción la densidad en la profundidad de 4,200 m supera la de la superficie?

7. *a*) Demuestre que la ecuación 15-13, una variación de la presión con la altura de la atmósfera (con una temperatura uniforme), puede escribirse en función de la densidad ρ así

$$\rho = \rho_0 e^{-h/a},$$

donde ρ_0 es la densidad en el suelo (h = 0). *b*) Suponga que la fuerza de resistencia al avance D debida al aire en un objeto que se desplaza con una velocidad v, está dada por $D = CA\rho v^2$, donde C es una constante, A es la sección frontal de área del objeto, y ρ es la densidad del aire local. Calcule la altitud en que la fuerza de resistencia al avance en un cohete será máxima, si éste se lanza verticalmente y se mueve con una aceleración ascendente constante a_r.

8. *a*) Considere un contenedor de fluido sujeto a una aceleración vertical ascendente a. Demuestre que la variación de la presión con la profundidad está dada por

$$p = \rho h(g + a),$$

donde h es la profundidad y ρ es la densidad. *b*) Demuestre también que si el líquido en su conjunto experimenta una aceleración vertical descendente a, la presión en la profundidad h está dada por

$$p = \rho h(g - a).$$

c) ¿Qué sucede en la caída libre?

9. *a*) Considere la aceleración horizontal de una masa de líquido en un tanque abierto. Este tipo de aceleración hace que la superficie del líquido caiga en frente del tanque y se eleve en la parte posterior. Demuestre que la superficie del líquido se inclina formando un ángulo θ con la horizontal, donde tan $\theta = a/g$, y a es la aceleración horizontal. *b*) ¿Cómo varía la presión con h, la profundidad vertical debajo de la superficie?

10. Obtenga la expresión de la presión en función de la distancia radial del centro de una planeta esférico de radio R y de densidad uniforme ρ.

11. Demuestre que, en una atmósfera planetaria, la variación de la presión con la altura (a temperatura constante) es

$$p = p_0 e^{k(1/r - 1/R)}$$

donde se supone que g varía como $1/r^2$ (donde r es la distancia del centro del planeta), p_0 es la presión en la superficie, R es el radio del planeta y k es una constante. Verifique que el resultado anterior se reduce a la ecuación 15-12 en los lugares cercanos a la superficie.

12. *a*) Un fluido gira a una velocidad angular constante ω, alrededor del eje vertical central de un recipiente cilíndrico. Demuestre que la variación de la presión en dirección radial está dada por

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r.$$

b) Suponga que $p = p_c$ en el eje de rotación ($r = 0$) y que la presión p en cualquier punto r es

$$p = p_c + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

c) Demuestre que la superficie del líquido tiene forma paraboidal (Fig. 15-26), es decir, una sección transversal vertical de ella es la curva $y = \omega^2 r^2/2g$. *d*) Demuestre que la variación de la presión con la profundidad es $p = \rho g h$.

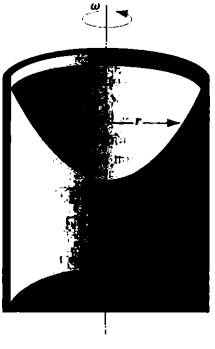


FIGURA 15-26. Problema 12.

13. Un cascarón esférico hueco de acero flota casi completamente sumergido en el agua (véase Fig. 15-27). El diámetro externo mide 58.7 cm y la densidad del hierro es (7.87 g/cm^3). Determine el diámetro interno del cascarón.

FIGURA 15-27. Problema 13.

14. Un bloque de madera tiene una masa de 3.67 kg y una densidad de 594 kg/m^3. Va a ser cargado con plomo para que flote en el agua con 0.883 de su volumen sumergido. ¿Qué masa de plomo se necesita *a*) si se encuentra en la parte superior del bloque, y *b*) si el plomo está sujeto a la madera por debajo? La densidad del plomo es 1.14×10^4 kg/m^3.

15. Un objeto que flota en mercurio tiene sumergido un cuarto de su volumen. Si se agrega suficiente agua para cubrirlo, ¿qué parte de su volumen permanecerá sumergido en el mercurio?

16. Un automóvil tiene una masa total de 1,820 kg. El volumen del espacio aéreo en el compartimento de pasajeros es 4.87 m^3. El volumen del motor y de las ruedas delanteras mide 0.750 m^3; el volumen de las ruedas traseras, del tanque de gasolina y de la cajuela mide 0.810 m^3. El agua no puede penetrar a estas partes. El automóvil está estacionado en una colina; se zafa el cable de los frenos manuales y el automóvil rueda colina abajo hacia un lago (véase Fig. 15-28). *a*) Al principio no entra agua en el compartimiento de los pasajeros. ¿Qué parte del automóvil, en metros cúbicos, queda debajo de la superficie del agua con el vehículo flotando como se observa en la figura? *b*) Se hunde a medida que el agua entra lentamente. ¿Cuántos metros cúbicos de agua están en él cuando desaparece debajo de la superficie? (El automóvil permanece horizontal debido a la pesada carga de la cajuela.)

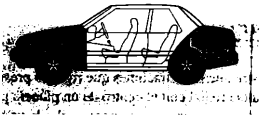


FIGURA 15-28. Problema 16.

17. Ponga un vaso de vidrio parcialmente lleno con agua en un recipiente (Fig. 15-29); éste tiene una masa de 390 g y un volumen inferior de 500 cm^3. Empiece a llenar el recipiente con agua y encuentre experimentalmente que si el vaso está a la mitad de agua, flotará; pero si tiene más de la mitad de agua, permanece en el fondo del recipiente hasta que el agua se eleva hasta su borde. ¿Cuál es la densidad del material del vaso?

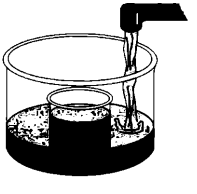


FIGURA 15-29. Problema 17.

18. La tensión superficial del ^{4}He líquido es 0.35 mN/m y su densidad es 145 kg/m^3. Calcule *a*) el número de átomos /m^2 en la superficie, y *b*) la energía por enlace, en eV, en el líquido a esta temperatura. La masa de un átomo de helio es 6.64×10^{-27} kg. Imagine cada átomo como un cubo, y suponga que interactúa sólo con sus cuatro vecinos más cercanos.

19. Demuestre que la diferencia de presión entre el interior y el exterior de una burbuja de radio r es $4\gamma/r$, donde γ es la tensión superficial del líquido del cual está hecha.

20. Una burbuja de jabón que flota en una campana al vacío, tiene un radio de 1.0 mm cuando la presión en el interior es de 100 kPa. Se enciende la bomba por un breve periodo, y se ve que la burbuja se expande hasta alcanzar un radio de 1.0 cm. Calcule la nueva presión dentro de la campana. Suponga que pV es una constante, donde p es la presión del gas en el interior de la burbuja, y V es su volumen.

21. Una varilla sólida de vidrio de radio $r = 1.3$ cm, se coloca dentro y de manera coaxial con un cilindro de vidrio de radio interno $R = 1.7$ cm. Sus extremos inferiores están alineados, puestos en contacto y perpendiculares a la superficie de un tanque abierto de agua (véase Fig. 15-30). ¿A qué altura llegará el agua en la región situada entre la varilla y el cilindro? Suponga que el ángulo de contacto es 0°, y use 72.8 mN/m con la tensión superficial del agua.

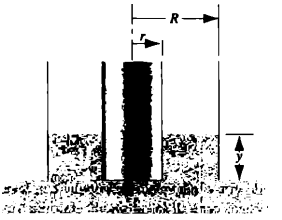


FIGURA 15-30. Problema 21.

22. Una burbuja de jabón en el aire tiene un radio de 3.20 cm. Después le soplamos hasta que aumenta a un radio de 5.80 cm. Use 26.0 mN/m para su tensión superficial (constante). *a)* ¿Cuál es la diferencia de presión inicial en la película de la burbuja? *b)* Calcule la diferencia de presión con el tamaño mayor. *c)* ¿Cuánto trabajo se hizo en la atmósfera para soplar la burbuja al nuevo radio? *d)* ¿Cuánto trabajo se hizo al estirar la superficie de la burbuja?

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. *a)* Demuestre que las ecuaciones que rigen la presión en función de la distancia radial con el centro de un planeta gaseoso esférico, en la que la densidad es proporcional a la presión ($\rho = kp$), es $dp/dr = -(Gm/r^2)kp$ y $dm/dr = 4\pi r^2 kp$, donde m es la masa contenida dentro de la esfera de radio r. *b)* Integre numéricamente estas ecuaciones acopladas hacia afuera del punto r_0, donde $r_0 = 10^3$ m, $p_0 = 2 \times 10^{16}$ Pa y $m_0 = 7 \times 10^{14}$ kg. Suponga que la constante k es 8×10^{-12} s^2/m^2. Genere una gráfica de la presión en función de la distancia radial. *c)* ¿A qué distancia radial es la presión menor que 1 atmósfera?

CAPÍTULO 16

DINÁMICA DE FLUIDOS

Ahora pasamos de la estática a la dinámica de los fluidos en movimiento. Utilizamos conceptos conocidos para analizar la dinámica de fluidos, entre otros las leyes de movimiento y de conservación de la energía propuestas por Newton. En este capítulo aplicaremos esos principios a los fluidos, que describiremos mediante variables como presión y densidad expuestas en el Capítulo 15.

Comenzaremos con un modelo simplificado del flujo de fluidos en el cual ignoramos las fuerzas disipativas. Es un enfoque semejante al estudio anterior de la dinámica de partículas, en que al inicio prescindimos de las fuerzas disipativas (fricción). Una ventaja del enfoque es que permite un análisis basado en la conservación de la energía mecánica, como lo hicimos en el Capítulo 12 con las partículas. Más adelante en este capítulo daremos una breve descripción de los resultados tan interesantes y originales que ocurren en los fluidos reales, cuando se tienen en cuenta las fuerzas disipativas denominadas fuerzas viscosas.

16-1 CONCEPTOS GENERALES DEL FLUJO DE FLUIDOS

Una manera de describir el movimiento de un líquido consiste en dividirlo en elementos volumétricos infinitesimales (que llamaremos partículas de fluidos) y en seguir su movimiento. Si conociéramos las fuerzas que actúan sobre cada partícula del fluido, podríamos resolver las posiciones y las velocidades de cada partícula en función del tiempo. Este procedimiento, una generalización directa de la mecánica de partículas, fue inventado por Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Representa una ardua tarea por ser tan grande el número de las partículas de fluidos.

Hay otro tratamiento, ideado por Leonhard Euler (1707-1783), más adecuado para nuestros propósitos. En él renunciamos al intento de especificar la historia de cada partícula del fluido y en cambio determinamos la densidad y la velocidad en todos los puntos del espacio en cada momento. Es el método que utilizaremos. Describimos el movimiento de un fluido especificando la densidad $\rho(x, y, z, t)$ y la velocidad $\bar{\mathbf{v}}(x, y, z, t)$ en el punto x, y, z en el momento t. Nos concentramos, pues, en lo que sucede en un punto del espacio y no en lo que ocurre en una partícula específica. Una magnitud con que se describe el estado de un líquido —la presión p, por ejemplo— tendrá un valor bien definido en cada punto del espacio y en cada momento. Esta descripción del movimiento de un fluido se centra en un punto del espacio y no en una de sus partículas, pero no podemos sino seguir las partículas, al menos en breves intervalos temporales dt. Después de todo, las leyes de la mecánica se aplican a las partículas y no a los puntos del espacio.

Primero vamos a examinar algunas características generales del flujo de fluidos.

1. *El flujo puede ser estacionario o no estacionario.* Describimos el flujo en función de los valores de variables como presión, densidad y velocidad del flujo en todos los puntos del fluido. Si las variables son constantes en el tiempo, se dice que el flujo es *estacionario*. Los valores de ellas casi siempre cambiarán de un punto a otro, no así con el tiempo en un punto determinado. Esta condición se cumple con rapideces bajas de flujo; un ejemplo de ello es una corriente que fluye con suavidad. En un flujo no estacionario, como una subida de la marea, las velocidades $\bar{\mathbf{v}}$ son función del tiempo. En el caso del flujo *turbulento*, como en los rápidos o cascadas, pueden variar notablemente de un punto a otro y también con el tiempo.

2. *El flujo puede ser compresible o incompresible.* Si la densidad ρ de un fluido es una constante independiente de x, y, z y t, al flujo se le llamará *flujo incompresible.* Por lo regular se piensa que los líquidos fluyen de manera incompresible. Pero aun en un gas muy compresible la variación de la densidad puede ser insignificante, y en la práctica podemos considerarlo incompresible. Por ejemplo, en el vuelo a velocidades mucho menores que las del sonido en el aire (descrito por la aerodinámica subsónica), el flujo del aire sobre las alas es casi incompresible.

3. *El flujo puede ser viscoso o no viscoso.* La viscosidad en el movimiento de fluidos es el equivalente de la fricción en el movimiento de sólidos: la energía cinética asociada al flujo puede ser transformada en energía interna por fuerzas *viscosas.* Cuanto mayor sea la viscosidad, más grande será la fuerza externa o la presión que es preciso aplicar para conservar el flujo; en condiciones similares, la miel y el aceite para motor son más viscosos que el agua y el aire. La viscosidad depende de la temperatura; por ejemplo, el aceite para motor puede clasificarse no sólo atendiendo a su viscosidad, sino también a su variación de temperatura. Aunque la viscosidad se observa en todos los flujos de fluidos, en algunos casos sus efectos (igual que los de la fricción en la mecánica de sólidos) pueden ser insignificantes y entonces podemos considerarlo como *no viscoso.*

4. *El flujo puede ser rotacional o irrotacional.* Imagine una pequeña fracción de materia —digamos, un insecto diminuto— que transporta una corriente que fluye. Si al moverse junto con la corriente no gira alrededor de un eje pasando por su centro de masa, el flujo es *irrotacional*; de lo contrario, será *rotacional.* Un elemento de un fluido puede desplazarse en una trayectoria circular y aun así experimentar un flujo irrotacional; por ejemplo, el vórtice que se forma cuando se quita el tapón de una tina de baño. Una analogía mecánica se encuentra en el movimiento de una rueda de la fortuna: aunque gire, los pasajeros no lo harán alrededor de sus centros de masa.

Vamos a ocuparnos principalmente del movimiento de fluidos ideales que pueden clasificarse como estacionarios incompresibles, no viscosos e irrotacionales. Con ello simplificaremos enormemente la dinámica de fluidos, y a menudo es una buena aproximación al comportamiento de los fluidos reales. No obstante, como en el caso de la fricción en la dinámica de sólidos, en las aplicaciones habrá que evaluar la validez de estas suposiciones y sus consecuencias si al final no resultan válidas.

16-2 LÍNEAS DE CORRIENTE Y LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En el flujo estacionario la velocidad $\vec{v}$ en un punto dado es constante en el tiempo. Supongamos el punto P (Fig. 16-1) dentro del fluido. Puesto que $\vec{v}$ no cambia con el tiempo en un flujo estacionario, todas las partículas del fluido que lleguen a P continuarán con igual rapidez en la misma dirección. Así pues, el movimiento de las que cruzan por P siguen la misma trayectoria, denominada *línea de corriente.* Todas las partículas del fluido que lo atraviesan cruzan luego los puntos situados a lo largo

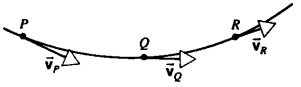


FIGURA 16-1. En un flujo estacionario, una partícula de fluido que cruza P deja en su estela una línea de corriente, pasando después por los puntos Q y R corriente abajo. La misma trayectoria deben seguir las otras partículas que atraviesen P.

de la línea, como Q y R en la figura 16-1. Más aún, todas las partículas que pasan por R han cruzado antes por esos dos puntos.

En general, la magnitud del vector de velocidad en la partícula cambiará al desplazarse a lo largo de la línea de corriente (o *de flujo*). Su dirección en cualquier punto de la línea siempre será tangente a ella.

Dos líneas de corriente no pueden cruzarse, pues si lo hicieran la partícula que llega podría seguir una dirección u otra y entonces el flujo tal vez no sería estacionario. En un flujo estacionario, el patrón de las líneas de corriente no cambia con el tiempo. En la figura 16-2 se da un ejemplo de líneas de corriente en el flujo de un fluido.

En teoría es posible trazar una línea de corriente por todos los puntos del fluido. Suponiendo que sea estacionario, escogemos un número finito de ellas para formar un haz, como el patrón de líneas de la figura 16-3. A esta región tubular se le conoce como *tubo de flujo.* Dado que su frontera consta de líneas de corriente, ningún fluido puede atravesar sus fronteras y él se comporta un poco como un tubo de la misma forma. El fluido que entra en un extremo ha de salir por el otro. El tubo debe ser lo bastante estrecho para que supongamos que la velocidad del fluido es casi constante en la sección transversal del tubo.

Vamos a estudiar a fondo el flujo del fluido por el tubo de flujo que aparece en la figura 16-3. El flujo entra en P donde la superficie de sección transversal es A_1 y sale en Q, donde la superficie es A_2. Supongamos que la velocidad de las partículas en P sea v_1 y que sea v_2 en la partículas en Q. En el intervalo temporal δt un elemento cubre aproximadamente la distancia $v\,\delta t$. Entonces el fluido que cruza A_1 en el intervalo temporal δt tiene

FIGURA 16-2. En un túnel de viento, la aerodinámica de un automóvil se evalúa examinando las líneas de corriente del flujo de viento, hechas visibles en la fotografía incorporando humo al aire.

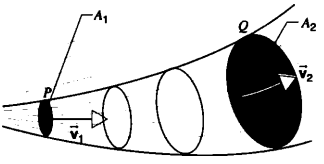


FIGURA 16-3. Un haz de líneas de corriente forma un tubo de flujo que tiene una superficie transversal A_1 en P y A_2 en Q

un volumen δV_1 aproximado de $A_1 v_1 \delta t$. Si su densidad en ese lugar es ρ_1, su masa $\delta m_1 (= \rho_1\ \delta V_1)$ que atraviesa A_1 es aproximadamente

$$\delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1\ \delta t.$$

En consecuencia, el *flujo de masa* definido como la masa del flujo por unidad de tiempo que cruza una sección transversal será aproximadamente $\delta m_1/\delta t = \rho_1 A_1 v_1$ en P. Hemos de hacer δt lo bastante pequeño para que en este intervalo temporal ni v ni A varíen mucho a lo largo de la distancia que cubre el fluido. En el límite a medida que $\delta t \to 0$, obtenemos el resultado exacto:

$$\text{flujo de masa en } P = \rho_1 A_1 v_1,$$

y con un análisis semejante,

$$\text{flujo de masa en } Q = \rho_2 A_2 v_2,$$

donde ρ_2, A_2 y v_2 representan, respectivamente, la densidad, la superficie transversal y la velocidad del flujo en Q.

Hemos dado por sentado que el fluido entra en el tubo sólo en P y que sale sólo en Q. En otras palabras, entre esos dos puntos no hay otras "fuentes" por donde penetre en él ni "sumideros" por donde salga. Más aún, como el flujo es estacionario, la densidad del fluido entre P y Q no cambia con el tiempo (a pesar de que puede hacerlo de un lugar a otro). En tales condiciones, la masa del fluido por unidad tiempo que penetra el tubo en P es la misma que sale, por unidad de tiempo, en Q. Por tanto, el flujo de masa en ese punto ha de ser igual al que se da en Q:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \tag{16-1}$$

o, en términos más generales relativos a cualquier lugar del tubo de flujo,

$$\rho A v = \text{constante}. \tag{16-2}$$

El resultado anterior expresa la *ley de conservación de la masa* en la dinámica de fluidos.

Si el flujo es incompresible, como supondremos a partir de ahora, $\rho_1 = \rho_2$ y la ecuación 16-1 adopta la forma más simple

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \tag{16-3}$$

o, si definimos que R es el *promedio de rapidez de flujo de volumen* (o, simplemente, *flujo de volumen*),

$$R = Av = \text{constante}. \tag{16-4}$$

Las unidades del SI para R son m^3/s. Nótese que la ecuación 16-3 predice que, en un flujo incompresible estacionario, su rapidez varía inversamente con la superficie transversal, siendo mayor en las partes más estrechas del tubo.

Las ecuaciones 16-2 y 16-4 ejemplifican las relaciones matemáticas conocidas como *ecuaciones de continuidad*, las cuales son en realidad leyes de conservación de la masa. La ecuación de continuidad estaciona dice lo siguiente: si dentro de un elemento de volumen del espacio (*no* volumen del fluido) no hay *fuentes* (cuando se introduce materia en el flujo) ni *sumideros* (cuando se extrae materia del flujo), la masa total dentro de él habrá de permanecer constante. En sentido más general, si existen fuentes o sumideros, la ecuación de continuidad ofrece la representación matemática de la afirmación tan razonable de que la rapidez del flujo de salida o de entrada de materia es igual a la velocidad con que cambia la masa contenida en el elemento de volumen. Las ecuaciones de continuidad son comunes en física y aparecen en todos los temas donde interviene un flujo. Por ejemplo, hay una para la carga eléctrica que es una ley de conservación para ella y no para la masa.

Como se aprecia en la figura 16-4, la constancia del flujo de volumen a lo largo de un tubo de flujo ofrece una importante interpretación gráfica de las líneas de corriente. Éstas deben compactarse en una parte estrecha del tubo y no en una parte amplia. Por tanto, conforme disminuye la separación entre ellas, también ha de aumentar la rapidez del flujo. Así, concluimos que las líneas muy espaciadas indican regiones de rapidez relativamente pequeña y que las poco espaciadas indican regiones de rapidez relativamente alta.

Podemos obtener otro resultado interesante al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento del flujo de un fluido entre P y Q (Fig. 16-4). Una partícula de fluido en P con rapidez v_1 debe acelerarse hacia delante cuando adquiera mayor velocidad v_2 en Q. Esta aceleración se produce sólo con una fuerza ejercida en la dirección PQ, y (si no hay otra fuerza externa, la gravedad, por ejemplo) deberá provenir de un cambio de presión dentro del fluido. Para generar esta fuerza es necesario que la presión sea mayor en P que en Q. Por tanto, cuando no existen otras causas de aceleración, las regiones de mayor velocidad del fluido se asociarán a la presión más baja

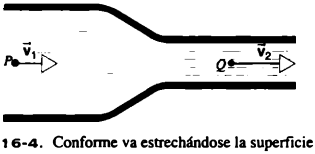


FIGURA 16-4. Conforme va estrechándose la superficie transversal de un tubo horizontal, la velocidad de flujo deberá aumentar. Si ninguna otra fuerza actúa sobre el fluido, la presión en P ha de ser mayor que la presión en Q; por tanto, una fuerza actúa en la dirección PQ para producir la aceleración necesaria.

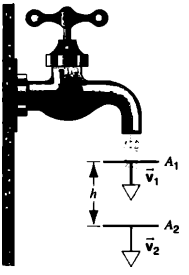


FIGURA 16-5. Problema resuelto 16-1. Al caer agua de una llave, aumenta su velocidad. La corriente debe estrecharse a medida que va cayendo, pues la rapidez de flujo ha de ser igual en todas las secciones transversales. (Se desprecian los efectos relacionados con la tensión superficial.)

de éste. En la siguiente sección se examina en forma más rigurosa esta conclusión preliminar sobre la dinámica de fluidos.

PROBLEMA RESUELTO 16-1. La figura 16-5 muestra cómo la corriente de agua que sale de un grifo se estrecha conforme va cayendo. La superficie transversal A_1 es 1.2 cm^2 y la de A^2 es 0.35 cm^2. Los dos niveles están separados por una distancia vertical h (45 mm). ¿Con qué rapidez fluye el agua del grifo?

Solución Con base en la igualdad del flujo de volumen (ecuación 16-3) tenemos

$$A_1 v_1 = A_2 v_2,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades del agua en los niveles correspondientes. Aplicamos la conservación de la energía a un elemento del fluido de masa m, como se indica en la ecuación 12-15, y de ese modo obtenemos $K_2 + U_2 = K_1 + U_1$, o $\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh$. Por tanto,

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh.$$

Al eliminar v_2 entre las dos ecuaciones y al resolver para v_1, obtenemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2ghA_2^2}{A_1^2 - A_2^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(0.045\ \text{m})(0.35\ \text{cm}^2)^2}{(1.2\ \text{cm}^2)^2 - (0.35\ \text{cm}^2)^2}}$$

$$= 0.286\ \text{m/s} = 28.6\ \text{cm/s}.$$

La rapidez del flujo de volumen R será entonces

$$R = A_1 v_1 = (1.2\ \text{cm}^2)(28.6\ \text{cm/s}) + 34\ \text{cm}^3/\text{s}.$$

A esta rapidez tardaría unos 3 s para llenar un recipiente de 100 ml.

16-3 LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

Cuando un fluido fluye por un tubo de flujo, su estado puede cambiar en varias formas: 1. puede alterarse su superficie transversal; 2. la entrada y la salida del tubo pueden darse a varias alturas; 3. las presiones de entrada y de salida pueden ser distintas. Ya hemos empleado las ecuaciones de continuidad (Ec. 16-4) para relacionar los cambios de superficie con los de velocidad. Una diferencia de presión y de elevación pueden acelerar un elemento del fluido al cruzar un tubo, por lo que cabe esperar que los cambios de velocidad se relacionen con la presión y la elevación. Así, los cambios de los tipos 1, 2 y 3 no son independientes unos de otros. En la presente sección examinaremos las conexiones entre ellos.

Nuestro análisis se basa en aplicar la conservación de la energía, $\Delta K + \Delta U = W_{ext}$ (Ec. 13-1), al flujo del fluido, que suponemos que es ideal según se señaló en la sección 16-1 (estacionario, incompresible, no viscoso e irrotacional). La figura 16-6 muestra un tubo de flujo. En la entrada (extremo izquierdo), el tubo tiene una superficie transversal uniforme A_1 y se halla en una altura y_1 sobre algún nivel de referencia. Poco a poco se ensancha y se eleva; en la salida (extremo derecho), presenta una superficie transversal uniforme A_2 y una altura y_2. Al ir cambiando la superficie, la rapidez del fluido se convierte de v_1 en la entrada a v_2 en la salida.

Ahora vamos a aplicar la conservación de la energía al sistema constituido por todo el líquido sombreado entre la entrada y la salida del tubo. Una presión p_1 (ejercida quizá por un fluido adicional en el tubo a la izquierda de nuestro sistema) actúa sobre él en el extremo de la entrada y genera una fuerza $F_1 = p_1 A$ que empuja el sistema hacia la derecha. En el extremo de la salida se registra una presión p_2 (debida tal vez a un fluido más en el tubo a la derecha de nuestro sistema) que produce una fuerza $F_2 = p2A_2$ que opera hacia la izquierda de él.

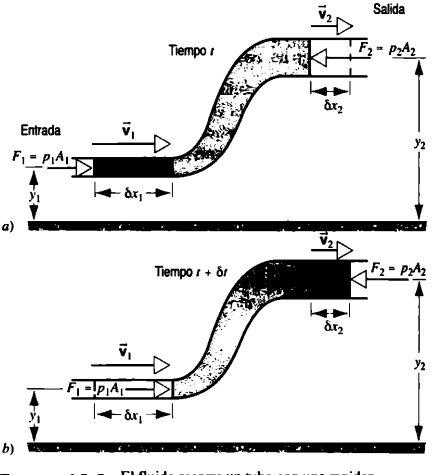


FIGURA 16-6. El fluido recorre un tubo con una rapidez estacionaria. Durante el intervalo de *a*) a *b*), el efecto neto del flujo consiste en transferir el elemento del fluido, indicado por el sombreado oscuro, del extremo de entrada del tubo al extremo de salida.

* Daniel Bernoulli (1700-1782) fue un matemático, físico y médico suizo que realizó importantes descubrimientos no sólo en la dinámica de fluidos, sino también en astronomía, fisiología y geología. Su padre y su tío también fueron famosos por sus contribuciones a las matemáticas.

El sistema se desplaza hacia la derecha bajo la influencia neta de las dos fuerzas de presión y de la gravedad. La figura 16-6*a* muestra el sistema en el tiempo t, y la figura 16-6*b* contiene el mismo sistema un instante δt más tarde. En este breve intervalo, el extremo izquierdo del sistema recorrió una distancia δx_1 hacia la derecha, mientras que el extremo izquierdo recorrió la distancia δx_2. Las dos distancias son diferentes porque la superficie del tubo cambió y el líquido es incompresible.

El efecto total del movimiento del sistema es el mismo que si simplemente hubiéramos movido el elemento con sombreado oscuro del fluido, de masa δm del extremo de entrada del tubo al extremo de salida. El flujo no influye en la parte restante del fluido con sombreado claro.

El trabajo que se realiza en nuestro sistema recibe tres contribuciones: 1. en el extremo de entrada, la fuerza de presión efectúa el trabajo $W_1 = F_1\delta x_1 = p_1A_1\delta x_1$ (magnitud positiva, ya que la fuerza y el desplazamiento siguen la misma dirección). 2. En el extremo de salida, la fuerza de presión efectúa el trabajo $W_2 = -F_2\delta x_2 = p_2A_2\delta x_2$ (magnitud negativa, puesto que la fuerza y el desplazamiento siguen dirección contraria). 3. El trabajo efectuado por la gravedad, como el elemento del fluido de sombreado oscuro δm, se mueve a través del desplazamiento vertical $y_2 - y_1$, es $Wg = -\delta m\, g(y_2 - y_1)$, una magnitud negativa porque la fuerza y el desplazamiento siguen dirección contraria. En la ecuación 13-1 de la conservación de energía, ΔU representa la energía potencial debida a las fuerzas conservativas que operan entre los objetos dentro del sistema. Aquí suponemos que ninguna de ellas actúa en el interior del fluido, así que $\Delta U = 0$.

Entonces el trabajo externo neto realizado en el sistema será

$$\begin{aligned} W_{ext} &= W_1 + W_2 + W_g \\ &= p_1A_1\delta x_1 + (-p_2A_2\delta x_2) + [-\delta m\, g(y_2 - y_2)]. \end{aligned} \tag{16-5}$$

El volumen δV del elemento del fluido con sombreado oscuro puede escribirse como $\delta V = A_1\delta x_1$ y también como $\delta V = A_2\delta x_2$, puesto que hemos supuesto que el fluido es incompresible. En función de la densidad del fluido (uniforme y constante) ρ, el elemento de volumen es $\delta V = \delta m/\rho$. Al hacer estas sustituciones en la ecuación 16-5, obtenemos

$$W_{ext} = (p_1 - p_2)(\delta m/\rho) - \delta m\, g(y_2 - y_1). \tag{16-6}$$

El cambio de energía cinética en el elemento del fluido con sombreado oscuro es

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\,\delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\,\delta m\, v_1^2. \tag{16-7}$$

Finalmente, aplicando la conservación de la energía en la forma $\Delta K + \Delta U = W_{ext}$ con $\Delta U = 0$, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}\delta m v_2^2 - \tfrac{1}{2}\,\delta m v_1^2 = (p_1 - p_2)(\delta m/\rho) - (\delta m)\, g(y_2 - y_1),$$

expresión que, tras rearreglar los términos y cancelar el factor común de δm, queda así

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \tag{16-8}$$

Dado que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos lugares arbitrarios en el tubo, podemos eliminarlos y escribir

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}. \tag{16-9}$$

La ecuación 16-9 es *la ecuación de Bernoulli* para un flujo estacionario, incompresible, no viscoso e irrotacional. En rigor, el punto donde la aplicamos debería hallarse en la misma línea de corriente. Pero si el flujo es irrotacional, el valor de la constante será igual en *todas* las líneas del tubo de flujo, de ahí que la ecuación de Bernoulli pueda aplicarse a dos puntos cualesquiera en el flujo.

Hemos conseguido dos herramientas potentísimas para analizar el flujo de líquidos: la ecuación de continuidad (Ec. 16-4), que es en efecto una formulación de la conservación de masa y la ecuación de Bernoulli (Ec. 16-9), que es una formulación de la conservación de energía. En la siguiente sección las aplicaremos al análisis de algunos problemas prácticos.

Por ahora vamos a examinar varias características de la ecuación de Bernoulli:

1. *Presión estática.* Del mismo modo que la estática de partículas es un caso especial de la dinámica de partículas, también la estática de fluido es un caso especial de la dinámica de fluidos. Para explicar esto con un ejemplo, considere la ecuación 16-8 si el fluido no está fluyendo ($v_1 = v_2 = 0$):

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

o

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

que es idéntica a la ecuación 15-8. Se da el nombre de *presión estática* a la presión $p + \rho g y$ que existiría en el fluido aun cuando $v = 0$.

2. *Presión dinámica.* Supóngase que el fluido fluye horizontalmente, de modo que no es necesario tener en cuenta la gravedad. En este caso, cuando $y_1 = y_2$ la ecuación 16-8 se convierte en

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{16-10}$$

La ecuación 16-10 indica que si la velocidad es grande la presión ha de ser pequeña, y a la inversa. Con ello se confirma la exposición al final de la sección 16-2 referente a la figura 16-4. La magnitud $\frac{1}{2}\rho v^2$, que el lector debería verificar para tener la dimensión de la presión, recibe el nombre de *presión dinámica.*

3. *Flujo viscoso compresible.* Si el fluido es compresible, su energía potencial interna ΔU_{int} puede cambiar cuando las moléculas se acercan o se separan. Si el flujo es viscoso, la energía cinética interna ΔK_{int} de las moléculas en el fluido puede cambiar del mismo modo que las fuerzas de fricción entre los objetos aumentan su energía cinética interna. En consecuencia, el análisis completo de fluidos usando la conservación de energía debería incluir un término de energía interna $\Delta E_{int} = \Delta U_{int} + \Delta K_{int}$ capaz de explicar los dos efectos: $\Delta K + \Delta E_{int} = W_{ext}$, que es nuestra formulación generalizada de la conservación de energía (Ec. 13-2, con $\Delta U = 0$). De ser necesario, podría modificarse la ecuación de Bernoulli para explicar estas otras transformaciones de la energía. Pero tales correcciones son muy pequeñas si el flujo es aproximadamente incompresible y no viscoso.

PROBLEMA RESUELTO 16-2. Un tinaco a una altura $h = 32$ m y de diámetro $D = 3.0$ m suministra agua a una casa (Fig. 16-7). Un tubo horizontal en su base tiene un diámetro $d = 2.54$ cm (1 in, diá-

metro típico de los tubos de abastecimiento de muchas casas en Estados Unidos). Para atender las necesidades de la casa, el tubo ha de suministrar agua con una rapidez $R = 0.0025\ \text{m}^3/\text{s}$ (cerca de 2/3 de galón por segundo). *a*) Si el agua fluye con la rapidez máxima, ¿qué presión tendría el tubo horizontal? *b*) Un tubo más pequeño, de diámetro $d' = 1.27$ cm (0.5 in), abastece el tercer piso de la casa, situado a 7.2 m sobre el nivel del suelo. ¿Cuáles son la rapidez de flujo y la presión del agua en este tubo? No tenga en cuenta la viscosidad del agua.

Solución *a*) Aplicamos la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de corriente *ABC* que se ve en la figura 16-7. En los puntos *A* y *B* tenemos

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B.$$

En *A* la presión es la de la atmósfera, p_0. Con $y_A = h$ y $y_B = 0$, obtenemos, para la presión desconocida,

$$p_B = p_0 + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2).$$

Podemos calcular v_A y v_B partiendo de la ecuación de continuidad (Ec. 16-4), que nos da

$$v_A A_A = v_B A_B = R,$$

donde *R* es la rapidez constante de flujo de volumen. Así pues,

$$v_A = \frac{R}{A_A} = \frac{0.0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(1.5\ \text{m})^2} = 3.5 \times 10^{-4}\ \text{m/s},$$

$$v_B = \frac{R}{A_B} = \frac{0.0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.0127\ \text{m})^2} = 4.9\ \text{m/s}.$$

Nótese que el término $\frac{1}{2}\rho v_A^2$ en la expresión de p_B es insignificante comparado con el término $\frac{1}{2}\rho v_B^2$. En otras palabras, la rapidez de flujo en la parte superior del tanque es muy pequeña, debido a su enorme superficie transversal.

Ahora podemos resolver para obtener la presión en el tubo:

$$\begin{aligned} p_B &= p_0 + \rho g h - \tfrac{1}{2}\rho v_B^2 \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} + (1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(32\ \text{m}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(4.9\ \text{m/s})^2 \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} + 3.14 \times 10^5\ \text{Pa} - 0.12 \times 10^5\ \text{Pa} \\ &= 4.03 \times 10^5\ \text{Pa} \approx 4\ \text{atm}. \end{aligned}$$

Si el agua en el tubo horizontal no fluyera (es decir, si la válvula estuviera cerrada), la presión *estática* en *B* incluiría sólo los dos primeros términos anteriores, lo cual nos da 4.15×10^5 Pa. La presión cuando el agua fluye se reduce de este valor estático en la cantidad correspondiente a la presión dinámica.

b) Si queremos que el tubo más estrecho que conduce al tercer piso tenga la misma rapidez de flujo *R*, la velocidad en *C* deberá ser

$$v_C = \frac{R}{A_C} = \frac{0.0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.00635\ \text{m})^2} = 19.7\ \text{m/s},$$

es decir, cuatro veces el valor en *B*. La ecuación de Bernoulli nos da

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_C + \tfrac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g y_C$$

o

$$\begin{aligned} p_C &= p_0 + \tfrac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g(y_A - y_C) \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} - \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(19.7\ \text{m/s})^2 \\ &\quad + (1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(32\ \text{m} - 7.2\ \text{m}) \\ &= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} - 1.95 \times 10^5\ \text{Pa} + 2.43 \times 10^5\ \text{Pa} \\ &= 1.49 \times 10^5\ \text{Pa} \approx 1.5\ \text{atm}. \end{aligned}$$

Dada la mayor velocidad de flujo a través del tubo más pequeño, la contribución dinámica a la presión es mucho más grande en *C* que en *B*. Los efectos estáticos y dinámicos tienden a aminorar la presión en este lugar en relación con *B*.

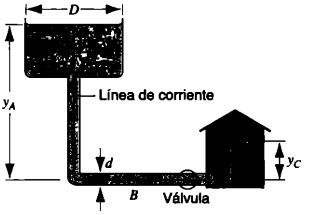


FIGURA 16-7. Problema resuelto 16-2.

16-4 APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI Y LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En esta sección vamos a estudiar varias aplicaciones de la ecuación de Bernoulli que ejemplifican su uso y demuestran su gran aplicabilidad.

El medidor de Venturi

Éste es un aparato (Fig. 16-8) que mide la rapidez de flujo de un fluido dentro de un tubo. El fluido de densidad ρ fluye por un tubo de superficie transversal A_1. La superficie disminuye en el cuello a A_2 y se sujeta un manómetro como se indica en la figura. Supongamos que el líquido del manómetro —digamos, el mercurio— tiene una densidad ρ'. Al aplicar la ecuación de Bernoulli y la igualdad del flujo de volumen en los puntos 1 y 2, puede demostrarse (problema 8) que la rapidez de flujo en el punto 1 es

$$v = A_2\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}. \qquad (16\text{-}11)$$

El tubo de Pitot

Este dispositivo (Fig. 16-9) sirve para medir la rapidez de flujo de un gas. Supongamos que el gas —por ejemplo, el aire— fluye con una densidad ρ y con una velocidad $\vec{v}_1$ paralelamente a los planos de varias aberturas pequeñas que designamos

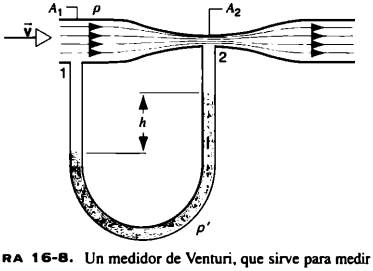


FIGURA 16-8. Un medidor de Venturi, que sirve para medir la rapidez con que fluye un fluido por un tubo.

en conjunto como punto 1. Entonces la presión en el brazo izquierdo del manómetro, que está conectado a las aberturas, será la presión estática de la corriente de gas p_1. La abertura del brazo derecho del manómetro forma ángulos rectos con la corriente. Se reduce a cero la velocidad en 2 y el gas se estanca en ese punto. Si aplicamos la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, obtendremos

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2.$$

Si sustituimos la lectura del manómetro $\rho' gh$ por la diferencia de presión $p_2 - p_1$, podremos resolver para v_1 y obtener

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}. \qquad (16\text{-}12)$$

Este aparato puede calibrarse para que indique v_1 directamente. Comúnmente se observa que los tubos de Pitot sobresalen en las alas de los aviones; sus lecturas aparecen como indicadores de velocidad del aire en el tablero de control del avión.

Empuje (ascendente) dinámico

El empuje dinámico es la fuerza que actúa sobre un cuerpo (el ala de un avión, un aerodeslizador o un rotor de helicóptero) en virtud de su movimiento a través de un fluido. No es lo mismo que el empuje estático, que es la fuerza de flotación que opera sobre un globo aerostático o sobre un témpano de hielo según el principio de Arquímedes (sección 15-4).

Algunos ejemplos muy conocidos son el vuelo de una pelota de béisbol, de tenis o de golf. El empuje dinámico, que se origina en la rotación de la pelota en vuelo puede hacer que se curve, se eleve o caiga en relación con la trayectoria parabólica que seguiría si no hubiera aire. Como el fluido (el aire en este caso) es un poco viscoso, se produce fricción al deslizarse la pelota y ésta tiende a llevar consigo una capa delgada de fluido denominada *capa de frontera*. Vista desde el marco de referencia en reposo de una bola que no gire, la rapidez del fluido disminuye de su valor encima de la capa de frontera (igual a la velocidad de vuelo de la pelota) hasta cero en su superficie.

La figura 16-10*a* muestra, en el marco de referencia en reposo de la pelota, las líneas de corriente del flujo estacionario del aire que pasa rápidamente sobre una pelota que no gira, a velocidades lo bastante bajas para que no aparezca turbulencia. La figura 16-10*b* muestra las líneas de corriente del aire llevado alrededor por una pelota que gira rápidamente. Si no hubiera viscosidad ni la capa de frontera, la bola no transportaría aire así y tampoco existiría esta circulación (como también se llama). Se moldean simétricamente las bolas de golf mediante rebordes para aumentar la circulación y el empuje dinámico resultante de ella. Algunas veces, y por la misma razón, los pitchers deforman artificialmente las pelotas de beisbol aunque sea ilegal.

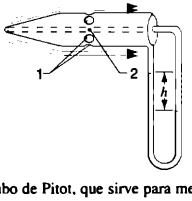


FIGURA 16-9. Un tubo de Pitot, que sirve para medir la rapidez de flujo de un gas.

La figura 16-10*c* muestra el efecto de combinar la circulación (resultante de la rotación de la pelota) y el flujo estacionario (resultante de su traslación por el espacio). En este caso, las dos velocidades se suman arriba de la bola y se restan debajo de ella. Del espaciamiento de las líneas de corriente resultantes vemos que la velocidad del aire debajo de la pelota es menor que el de arriba. Según la ecuación de Bernoulli, entonces la presión del aire debajo de la pelota deberá ser mayor que la de arriba, de modo que la pelota experimenta una fuerza de empuje dinámico.

Una pelota de béisbol lanzada hace una curva esencialmente por la misma razón. Por ejemplo, si la figura 16-10 representa una vista desde arriba de la bola que gira al dirigirse hacia el bateador, el "empuje" opera en dirección lateral para moverla horizontalmente hacia él o para alejársela, como en el caso de una curva. Si la figura representa una vista lateral, se lanza la pelota con efecto de retroceso, como en el caso de una rápida. El empuje actúa hacia arriba, haciendo que la pelota se eleve en relación con su trayectoria parabólica.

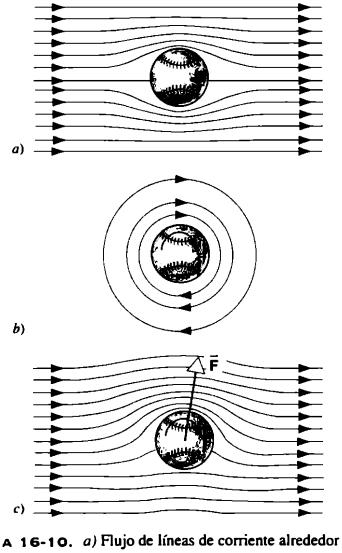


FIGURA 16-10. *a)* Flujo de líneas de corriente alrededor de una pelota que no gira. *b)* Circulación del aire alrededor de la pelota en rotación, debido a la capa de frontera. *c)* Efectos combinados de ambos movimientos. En la ecuación de Bernoulli vemos que el empuje dinámico opera hacia arriba en la pelota. El fluido ejerce sobre ella una fuerza neta $\vec{F}$ que tiene un componente transversal al flujo (empuje) y un componente paralelo (resistencia al avance).

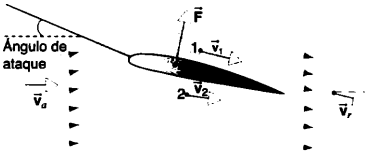


FIGURA 16-11. Líneas de corriente alrededor de una superficie de sustentación o de un ala de avión. La velocidad $\vec{v}_a$ del aire que se acerca es horizontal; en cambio, el aire que se aleja de la superficie tiene una velocidad $\vec{v}_r$ con un componente descendente. Así, la superficie de sustentación ha ejercido una fuerza descendente sobre el aire y, según la ley de Newton, el aire deberá por eso haber ejercido una fuerza ascendente sobre la superficie de sustentación. Esta fuerza está representada por el empuje dinámico $\vec{F}$.

El empuje dinámico que actúa sobre el ala de un avión tiene una explicación semejante. En la figura 16-11 se incluyen las líneas de corriente alrededor de una superficie de sustentación (o sección transversal del ala) de un avión. Escojámoslo como marco de referencia, igual que en un experimento del túnel de viento, y supongamos que el aire pasa por el ala de izquierda a derecha. Nótense las similitudes entre las figuras 16-11 y 16-10*c*. (De hecho, la explicación del empuje dinámico en el ala de un avión incluye una circulación parecida a la de la figura 16-10*b*.)

La figura 16-11 muestra que las líneas de corriente están más cercanas arriba del ala que debajo de ella; por eso la velocidad del flujo de aire es mayor arriba y la presión es más pequeña. El empuje aerodinámico aumenta con esta diferencia de presión entre las superficies superior e inferior del ala. No obstante, como se advierte en la figura 16-11, hay otra forma de explicarlo: el ala está diseñada de modo que el aire que fluye por ella se desvíe hacia abajo, y el empuje es en realidad la fuerza de reacción de la tercera ley de Newton ante la fuerza descendente que el ala ejerce sobre el aire. Una de estas dos explicaciones puede usarse en el empuje dinámico en un avión.*

Empuje en un cohete

En este último ejemplo vamos a calcular el empuje que en un cohete produce el escape de sus gases. Consideremos una cámara (Fig. 16-12) con una superficie transversal A llena de un gas de densidad ρ a un presión p. Supongamos que tenga un orificio pequeño de superficie transversal A_0 en el fondo de la cámara. Queremos encontrar la rapidez v_0 con que el gas escapa por el orificio.

Escribamos la ecuación de Bernoulli (ecuación 16-8) como

$$p - p_0 = \rho g(y_0 - y) + \tfrac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

donde p_0 representa la presión atmosférica justo fuera del orificio. En un gas la densidad es tan pequeña que puede despreciarse la variación de presión con la altura en una cámara, obteniendo así

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2)$$

o

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \qquad (16\text{-}13)$$

donde v es la rapidez del gas que fluye dentro de la cámara y v_0 es su rapidez a través del orificio. Aunque un gas es compresible y el flujo puede volverse turbulento, es posible tratarlo como estacionario e incompresible con la presión y las rapideces de escape que no sean demasiado altas.

Supongamos ahora una continuidad en el flujo de masa (en un motor de cohete se logra cuando la masa del gas que escapa es igual a la del gas producido al quemar el combustible); así que (con una densidad constante supuesta)

$$Av = A_0 v_0.$$

Si el orificio es muy pequeño de manera que $A_0 \ll A$; entonces $v_0 \gg v$, podemos ignorar v^2 en comparación con v_0^2 en la ecuación 16-13. Por tanto, la rapidez de escape del gas es

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}. \qquad (16\text{-}14)$$

Si nuestra cámara es la de gases de escape en un cohete, el empuje en él (sección 7-6) será $v_0\, dM/dt$. La masa del gas que sale fluyendo en el tiempo dt es $dM = \rho A_0 v_0$, así que

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0(\rho A_0 v_0) = \rho A_0 v_0^2,$$

y aplicando la ecuación 16-14 el empuje será

$$v_0 \frac{dM}{dt} = 2A_0(p - p_0). \qquad (16\text{-}15)$$

FIGURA 16-12. Fluido que sale de una cámara, que podría representar la cámara de escape de gases de un cohete.

*Se da más información sobre cómo vuelan los aviones en "The Science of Flight" de Peter P. Wegener, *American Scientist*, mayo-junio de 1986, p. 268. Véase también "Bernoulli's Law and Aerodynamic Lifting Force" de Klaus Weltner, *The Physics Teacher*, febrero de 1990, p. 84. Varios artículos sobre el efecto del transporte dinámico en varios deportes se recogen en *The Physics of Sports*, editado por Angelo Armenti, hijo (American Institute of Physics, 1992). El empuje dinámico también sirve para crear una fuerza horizontal que impulsa los barcos; véase "The Flettner Ship" de Albert Einstein, en *Essays in Science* (Philosophical Library, 1955), p. 92.

16-5 CAMPOS DE FLUJO (Opcional)

En la sección 14-8 explicamos cómo representar el espacio cercano a las masas por medio de un campo gravitacional. Con cada punto del campo se relaciona un vector $\vec{g}$, la fuerza gravitacional por masa unitaria en ese punto. Podemos representar gráficamente el campo dibujando líneas en la dirección de aquel cuyo espaciamiento indique la fuerza del campo (espaciamiento grande cuando el campo sea pequeño y espaciamiento pequeño cuando sea grande).

En la dinámica de fluidos, a partir de un campo vectorial podemos realizar una representación gráfica similar del fluido en movimiento, con un campo vectorial sólo que en este caso las líneas del campo indican la velocidad de flujo $\vec{v}$ en un punto. Tratándose de un flujo estacionario, la velocidad en cada punto del espacio tiene magnitud y dirección constantes, por lo cual el patrón de las líneas de velocidad no cambian con el tiempo.

Podemos representar el campo de velocidades trazando líneas de corriente, que representan la dirección de la velocidad del fluido en cada punto. La magnitud de la velocidad se representa con el espaciamiento de las líneas de corriente: a través de las superficies unitarias perpendiculares al flujo dibujamos varias líneas de corriente proporcionales a la velocidad en ese punto. Es decir, cuando las líneas están muy cercanas, la velocidad es grande (muchas líneas por superficie unitaria) y es pequeña (pocas líneas por superficie unitaria) cuando están muy separadas.

Vamos a explicar el uso de estos diagramas de campo para representar el campo de velocidades con varios ejemplos bidimensionales. En ellos la velocidad de flujo es la misma en todas partes de la línea, perpendicular al plano del dibujo en cada punto.

En la figura 16-13 se muestra un campo uniforme de flujo, como el que podría existir en un flujo estacionario y no viscoso de un líquido que cruza un tubo de paredes interiores lisas. Aquí las líneas de corriente son paralelas y el espaciamiento igual indica que la velocidad de flujo posee la misma magnitud en todas partes.

En la figura 16-14 se observa el campo de *flujo rotacional uniforme*, como el que podría producirse al girar un balde de agua en una plataforma giratoria (problema 12, capítulo 15). Aquí v es proporcional a r, porque la velocidad angular ω es constante. En la figura 16-15 dibujamos el campo de flujo de un *vórtice*, como el que podría obtenerse sacando el tapón de una tina de baño llena de agua. En este caso v es proporcional a $1/r$, porque el momento angular $L = mvr$ es constante y el flujo es irrotacional (problema 11). Nótese que la rotación uniforme y el movimiento de vórtice están representados por líneas de corriente uniformes, pero de tipos totalmente distintos de flujo. Claro que las formas de las líneas aportan poca información; también se necesita su espaciamiento.

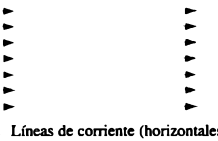


FIGURA 16-13. Líneas de corriente (horizontales) en un campo de flujo no viscoso y homogéneo.

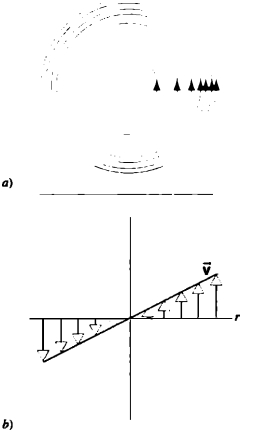


FIGURA 16-14. *a*) Campo de flujo rotacional uniforme. *b*) Aumento de velocidad del líquido desde el centro, indicado en la parte *a*) por la reducción del espaciamiento de las líneas de campo.

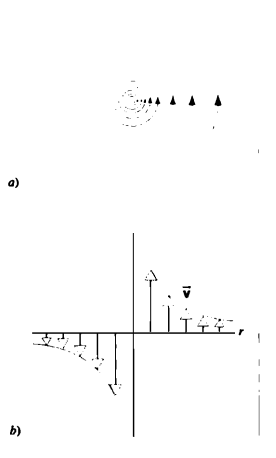
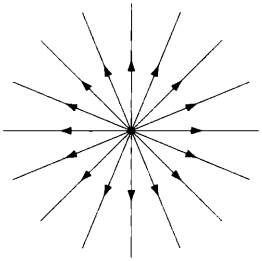


FIGURA 16-15. *a*) Campo de flujo de un vórtice. *b*) Variación de la velocidad de fluido desde el centro.



a)

b)

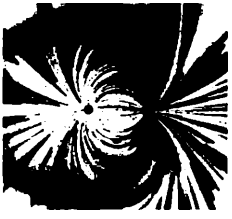
FIGURA 16-16. *a*) Flujo de una fuente lineal. *b*) Mapa del flujo de fluido desde una fuente lineal. El mapa se construye permitiendo que el agua fluya entre una capa horizontal de vidrio y otra de yeso. El agua sale por un hoyo en el centro y fluye hacia los bordes. La dirección del flujo se hace visible rociando el yeso con cristales de permanganato de potasio, que se disuelven en el agua y le imprimen un color púrpura. El mapa del flujo de los fluidos fue trazado y fotografiado por el profesor A. D. Moore en la Universidad de Michigan, y se tomó de *Introduction to Electric Fields* de W. E. Rogers (McGraw-Hill, 1954).

La figura 16-16 representa el campo de flujo para una fuente. Todas las líneas de corriente se dirigen radialmente hacia afuera. La fuente es un línea que cruza el centro perpendicularmente al papel. El campo de flujo alrededor de un sumidero lineal es el mismo que el de una fuente salvo por el signo de flujo, que se dirige radialmente hacia adentro.

En una fuente y en un sumidero lineales que presenten la misma rapidez de flujo y estén un poco separados, obtenemos un campo combinado llamado flujo dipolar lineal, que aparece en la figura 16-17.

Como veremos luego, el campo electrostático, el campo magnético y el campo de flujo de una corriente eléctrica son también campos vectoriales. Dentro de este contexto, el campo homogéneo (Fig. 16-13) corresponde al campo eléctrico de un capacitor plano, el campo de fuente o de sumidero (Fig. 16-16) corresponde al campo eléctrico de un capacitor cilíndrico o al alambre recto de una carga positiva o negativa, respectivamente, y el campo dipolar lineal (Fig. 16-17) corresponde al campo eléctrico de dos alambres con carga opuesta.

a)



b)

FIGURA 16-17. *a*) Flujo dipolar lineal. La fuente se encuentra a la izquierda y el sumidero a la derecha. *b*) Un mapa de flujo de fluidos de un dipolo lineal, hecho según se describió en la figura 16-16.

El campo homogéneo de la figura 16-13 representa además el campo magnético dentro de solenoide. El campo de vórtice de la figura 16-15 representa el campo magnético alrededor de un alambre recto que transporta corriente. Este último es un ejemplo de un campo rotacional (alrededor del eje del vórtice).

Debido a estas semejanzas entre los campos del fluido y electromagnéticos, a menudo es posible determinar un campo de flujo —difícil de calcular con los actuales métodos matemáticos— a través de mediciones experimentales de los aparatos eléctricos apropiados.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, las ideas básicas de campo y los principios de conservación se aplican en muchos terrenos de la física. Volveremos a encontrarlos muchas veces más. ■

16-6 VISCOSIDAD, TURBULENCIA Y FLUJO CAÓTICO (Opcional)

La viscosidad en el flujo de fluidos se asemeja a la fricción en el movimiento de los cuerpos sólidos. Cuando deslizamos un cuerpo sólido sobre otro, hay que suministrar una fuerza externa $\vec{F}$ que se oponga a la de fricción $\vec{f}$, si queremos mantenerlo en movimiento a velocidad constante. En el caso del movimiento de fluidos, podemos considerar un fluido entre las dos placas paralelas de la figura 16-18. Se aplica una fuerza $\vec{F}$ a la placa de arriba, de manera que se encuentre en movimiento a una

FIGURA 16-18. Un fluido viscoso llena el espacio entre dos placas planas separadas por una distancia D. La placa del fondo se halla en reposo y la de arriba es tirada a la derecha por una fuerza constante $\vec{F}$. La velocidad de las placas de fluido disminuye uniformemente de la placa de la parte superior a la del fondo.

velocidad constante $\vec{v}$ relativa a la de abajo, que suponemos está en reposo. La fuerza $\vec{F}$ se opone a la fuerza viscosa de resistencia al avance en la placa superior para mantener constante su velocidad.

Podemos imaginar que el flujo está dividido en capas paralelas a las placas. La viscosidad actúa no sólo entre el fluido y la placa de arriba, sino entre todas sus capas y las adyecentes. La rapidez de las capas difiere en dv de las que están debajo. El flujo del fluido donde la rapidez varía por capa recibe el nombre de flujo *laminar*. En esta explicación supondremos que la capa de la parte superior tiene la misma velocidad v que la placa de arriba y que el fondo de la parte inferior tiene la misma rapidez que la placa de abajo, es decir, cero.

Se ha descubierto lo siguiente: la fuerza externa F que debe ejercerse para crear un flujo laminar en el fluido es directamente proporcional a la superficie A de la placa; cuanto más grande sea ésta, más viscosa será la resistencia al avance y mayor la fuerza que debe ejercerse. Ésta es directamente proporcional al cambio de velocidad dv que ocurre en las capas de espesor dy, es decir, si las placas están muy cerca se requiere una gran fuerza para mantener cierta velocidad en la placa de la parte superior. (Imagine un flujo laminar con sólo dos capas, una en reposo y en contacto con la placa de abajo y otra moviéndose a una velocidad v con la placa de la parte superior. La energía disipada depende de la velocidad relativa entre las capas, la cual es grande. Si hay más capas, la velocidad relativa entre ellas será menor, lo cual significa menos disipación de energía y menos fuerza necesaria para conservar el movimiento.) Tenemos, pues, $F \propto A\, dv/dy$ o, introduciendo una constante de proporcionalidad η,

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}. \tag{16-16}$$

La constante de proporcionalidad η (letra griega eta) se llama *coeficiente de viscosidad* (o, simplemente, *viscosidad*) del fluido. En el SI la unidad de viscosidad es el $N \cdot s/m^2$. La unidad equivalente en cgs es dina $\cdot$ s/cm^2, también conocida como *poise*.* Al comparar las unidades descubrimos que 1 poise $= 0.1\ N \cdot s/m^2$.

* La unidad se llama así en honor del físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille (1799-1869), el primero en investigar el flujo de los fluidos viscosos a través de tubos para entender mejor la circulación de la sangre.

TABLA 16-1 Viscosidades de algunos fluidos

Fluido	η ($N \cdot s/m^2$)
Glicerina (20 °C)	1.5
Aceite de motor[a] (0 °C)	0.11
Aceite de motor[a] (20 °C)	0.03
Sangre (37 °C)	4.0×10^{-3}
Agua (20 °C)	1.0×10^{-3}
Agua (90 °C)	0.32×10^{-3}
Gasolina (20 °C)	2.9×10^{-4}
Aire (20 °C)	1.8×10^{-5}
CO_2 (20 °C)	1.5×10^{-5}

[a] Peso medio (SAE, 30)

La viscosidad η es grande en fluidos que ofrecen mucha resistencia al flujo y pequeña en los que fluyen fácilmente. La tabla 16-1 contiene algunas viscosidades de diversos fluidos. Nótese que η depende de la temperatura del fluido.

En el caso de las placas rectangulares de la figura 16-18, el *gradiente de velocidad* dv/dy es una constante en todas las capas, porque la velocidad aumenta lo mismo que dv en cada capa de espesor dy. Cuando $dv/dy = v/D$, donde D es el espaciamiento entre las placas, la ecuación 16-16 queda así:

$$F = \eta A \frac{v}{D}. \tag{16-17}$$

Una aplicación práctica de la viscosidad se da en el flujo de fluidos a través de tubos cilíndricos. El flujo es laminar una vez más, sólo que en este caso sus capas son cilindros de pared delgada con radios diversos. La velocidad del flujo varía con el radio: su valor máximo se presenta en el eje y su valor mínimo, que suponemos que es cero, se presenta en las paredes (Fig. 16-19). La variación de la velocidad con el sitio en el tubo no es lineal. Suponiendo una vez más que la capa cercana a las paredes se halle en reposo, podemos demostrar que la rapidez en la capa cilíndrica de radio r es (problema 14)

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2), \tag{16-18}$$

que depende de la diferencia de presión Δp en la longitud L del tubo. La rapidez en su centro es

$$v_0 = \frac{\Delta p\, R^2}{4\eta L}. \tag{16-19}$$

FIGURA 16-19. El fluido recorre un tubo cilíndrico de radio R. Se indica la variación de velocidad entre la pared y el centro.

Al examinar el flujo a través de las capas cilíndricas delgadas, puede demostrarse (problema 15) que el flujo total de masa dm/dt (que cruza el tubo por unidad de tiempo) es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8 \eta L}. \qquad (16\text{-}20)$$

A este resultado se le conoce como *ley de Poiseuille*. Si conocemos el coeficiente de viscosidad del fluido, podremos determinar la diferencia de presión que debe producir un agente externo (una bomba, tal vez) para sostener determinado flujo de masa por el tubo. En forma equivalente, si impulsamos un fluido a través de un tubo cuya diferencia de presión se conoce, midiendo el flujo de masa nos permite determinar su coeficiente de viscosidad.

En los líquidos la viscosidad proviene de las fuerzas intermoleculares de cohesión. A medida que aumenta la temperatura, disminuye el coeficiente de viscosidad de un líquido porque el incremento de la energía cinética debilita el efecto de las fuerzas intermoleculares. Por el contrario, en los gases la viscosidad aumenta con la temperatura, porque las moléculas pueden emigrar entre las capas. A temperaturas mayores se observa más movimiento molecular y por lo mismo más mezclas. Pero adviértase que en un tubo siempre hay más moléculas lentas cerca de las paredes que el número de moléculas rápidas cerca del eje central; así que mayor mezcla significa siempre moléculas más lentas que se dirigen hacia el eje y que impiden desplazarse a las más rápidas. (El efecto nos recuerda al tráfico lento que converge en el carril de alta velocidad de una carretera.)

PROBLEMA RESUELTO 16-3. Se impulsa aceite de ricino, cuya densidad es 0.96×10^3 kg/m^3 a temperatura ambiente, a través de un tubo de sección transversal circular por medio de una bomba que mantiene una presión manométrica de 950 Pa. Dicha sección mide 2.6 cm de diámetro y 65 cm de longitud. Se recoge el aceite de ricino que sale del extremo libre del tubo a presión atmosférica. Al cabo de 90 s se obtuvo un total de 1.23 kg. ¿Cuál es el coeficiente de viscosidad del aceite a esa temperatura?

Solución El flujo de masa es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1.23 \text{ kg}}{90 \text{ s}} = 0.0137 \text{ kg/s}.$$

Ahora el coeficiente de viscosidad puede calcularse directamente de la ecuación 16-20, con tal que antes resolvamos para η, que nos da

$$\eta = \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8(dm/dt)L} = \frac{(0.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)\pi(0.013 \text{ m})^4(950 \text{ Pa})}{8(0.0137 \text{ kg/s})(0.65 \text{ m})}$$
$$= 1.15 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2.$$

Los aceites pesados suelen tener viscosidades de esta concentración.

Turbulencia

Luego de alcanzar una corta altura, una suave columna de humo de un cigarro se deshace y se convierte en un patrón irregular y aparentemente aleatorio (Fig. 16-20). En forma similar, una corriente de fluido que atraviese un obstáculo se divide en remolinos y vórtices (Fig. 16-21), que dan al flujo componentes irregulares de velocidad transversales a la dirección del flujo. Un ejemplo de ello es el ondear de una bandera en la brisa: si el flujo del aire fuera laminar, la bandera ocuparía una posición fija en las líneas de corriente, pero el asta lo rompe en un patrón irregular como el de la figura 16-21, que produce el movimiento transversal de ondear de la bandera. Los anteriores son ejemplos del flujo *turbulento* de los fluidos. Otros ejemplos son las estelas que dejan en el agua los barcos al des-

FIGURA 16-20. El humo ascendente de un cigarro es un flujo laminar al inicio, pero pronto el flujo se vuelve turbulento.

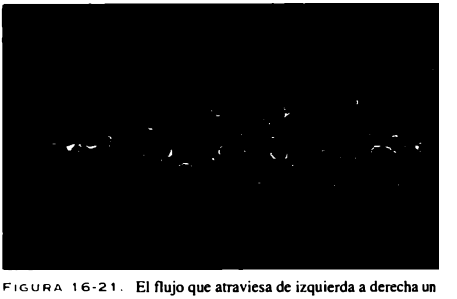


FIGURA 16-21. El flujo que atraviesa de izquierda a derecha un obstáculo cilíndrico se convierte claramente de laminar en turbulento. Nótense los remolinos y los vórtices que se forman corriente abajo después del obstáculo.

plazarse, y en el aire los automóviles y los aviones. Los sonidos que producen los silbidos y los instrumentos de viento se deben al flujo turbulento del aire.

En un fluido viscoso, el flujo a baja velocidad puede considerarse laminar, lo cual indica la presencia de capas que se resbalan suavemente una sobre otra. Cuando la rapidez de flujo es bastante alta, el movimiento se vuelve desordenado e irregular; es el flujo turbulento. Una analogía tomada de la mecánica es un bloque empujado a través de una superficie áspera. Si la fuerza de fricción es pequeña, el bloque se deslizará por la superficie cuando la fuerza aplicada F tiene al menos la misma magnitud que la de fricción f. Si la última fuera mayor, aquélla también debería serlo, alcanzando finalmente un tamaño tal que vuelca al bloque. El volcamiento del bloque se parece a la transición del flujo laminar al turbulento.

Mediante un análisis dimensional podemos determinar la rapidez crítica a la cual el flujo se torna turbulento. Con v_c representamos la rapidez crítica en el tubo que suponemos que es el promedio, porque, como se advierte en la figura 16-19, varía en su sección transversal. Esperamos que esta velocidad dependa de la viscosidad η y de la densidad ρ del fluido, así como del diámetro D del tubo. Usando el método estándar del análisis dimensional (sección 1-7) procedemos como sigue:

$$v_c \propto \eta^a \rho^b D^c$$

$$[v_c] = [\eta^a][\rho^b][D^c]$$

$$\mathrm{LT}^{-1} = (\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1})^a(\mathrm{ML}^{-3})^b(\mathrm{L})^c,$$

donde las dimensiones de viscosidad se obtuvieron de sus unidades de $\mathrm{N \cdot s/m^2}$. Resolviendo obtenemos

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad c = -1.$$

Así pues, la rapidez crítica puede escribirse

$$v_c \propto \frac{\eta}{\rho D},$$

o, introduciendo una constante de proporcionalidad R,

$$v_c = R\frac{\eta}{\rho D}. \tag{16-21}$$

La constante adimensional R se conoce como *número de Reynolds*. Al resolver la ecuación 16-21 para R, podemos escribir el número de Reynolds para *cualquier* rapidez de flujo así:

$$R = \frac{\rho D v}{\eta}. \tag{16-22}$$

En esta interpretación, el número de Reynolds puede servir para caracterizar un flujo *cualquiera*, y es posible determinar experimentalmente en qué valor el flujo se vuelve turbulento.

En los tubos cilíndricos, el número de Reynolds correspondiente a la rapidez crítica es de unos 2,000. Así, en el agua que fluye por un tubo de 2 cm de diámetro (por ejemplo, la manguera típica del jardín de una casa), usando la ecuación 16-21 la rapidez crítica es

$$v_c = 2{,}000\,\frac{1 \times 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot s/m^2}}{(10^3\,\mathrm{kg/m^3})(0.02\,\mathrm{m})} = 0.1\,\mathrm{m/s} = 10\,\mathrm{cm/s}.$$

Es una velocidad muy baja, lo cual significa que el flujo de agua es turbulento en la instalación hidráulica de una casa. (La rapidez de flujo en un grifo ordinario de las casas es de 1 m/s, aproximadamente.)

Obsérvese en la ecuación 16-21 que la rapidez crítica del flujo aumenta con la viscosidad. Es decir, cuanto más grande sea la fricción viscosa ejercida por el fluido circundante, mayores probabilidades habrá de que el flujo sea estacionario.

Flujo caótico

La geometría de la figura 16-18 no es muy adecuada para medir la viscosidad. La figura 16-22 muestra una forma más idónea. El espacio entre los cilindros coaxiales está lleno con el líquido cuya viscosidad va a determinarse. Se hace que el cilindro interno gire, mientras se mantiene fijo el externo. La viscosidad del fluido puede determinarse partiendo del par necesario para mantener el cilindro interno girando con una rapidez angular constante.

En rapideces rotacionales pequeñas el flujo de la figura 16-22 será estacionario y laminar. A medida que crece la rapidez rotacional del cilindro interno, el flujo termina haciéndose turbulento. Observamos que la transición de flujo laminar a turbulento tiene lugar de manera ordenada. La figura 16-23 muestra dos etapas intermedias. El fluido primero forma vórtices toroidales (que nos recuerdan una pila de rosquillas) y presenta un patrón de ondas de frecuencia definida que se sobreponen a los vértices. Las ondas aparecen con nuevas frecuencias al seguir aumentando la rapidez rotacional. Podemos imaginar que el flujo turbulento es la extensión de este movi-

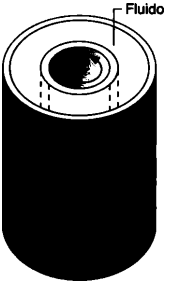


FIGURA 16-22. Aparato experimental con que se mide la viscosidad de los fluidos. El fluido se coloca entre dos cilindros: el exterior está fijo y el interior gira con una velocidad angular ω. El par necesario para hacer girar el cilindro interno a esta velocidad depende de la viscosidad del fluido.

a)

b)

FIGURA 16-23. Cuando la rapidez de un fluido en el aparato de la figura 16-22 rebasa la velocidad crítica, el flujo se torna inestacionario y se divide en *a*) vórtices toroidales y después *b*) en ondas sobrepuestas a los vórtices.

miento para incluir tantos componentes de la frecuencia que el movimiento da la impresión de volverse totalmente desordenado y confuso (parecido a un ruido electrónico). Puede haber una estructura periódica subyacentes, pero resulta demasiado compleja de seguir.

La teoría del caos (sección 5-7) adopta un enfoque distinto para explicar cómo se inicia la turbulencia. El movimiento turbulento propuesto por ella es verdaderamente *no periódico*, no una mera combinación de numerosos movimientos periódicos. Hay una distinción crítica entre los dos casos. Si la transición del flujo laminar al turbulento se da en una sucesión de movimientos cada vez más complejos pero siempre periódicos, las dos partículas del fluido que en el flujo laminar se desplazan de modo similar permanecerán en estados estrechamente relacionados del movimiento durante la transición al flujo turbulento. Pero si el estado intermedio alcanza un punto donde el movimiento se torna caótico, éste perderá su predicibilidad y las dos partículas podrán hallarse en el flujo turbulento en estados muy distintos de movimiento. La teoría del caos, que se aplica a muchos sistemas físicos, sienta otras bases teóricas para entender complejos sistemas como el movimiento turbulento de los fluidos.

OPCIÓN MÚLTIPLE

16-1 Conceptos generales del flujo de fluidos

16-2 Líneas de corriente y la ecuación de continuidad

1. El flujo de masa de un fluido que entra en un lado de un contenedor es 3.0 kg/s; el que sale del otro lado del contenedor es 2.0 kg/s. Suponiendo que el contenedor esté completamente lleno con líquido y que no haya otra forma de que entre o salga, podemos concluir que

   A) el punto de entrada tiene una sección transversal mayor que el punto de salida.

   B) la magnitud de la velocidad de entrada es mayor que la de la velocidad de salida.

   C) debe aumentar la densidad del fluido dentro del contenedor.

   D) el fluido es incompresible.

2. Un largo tubo recto de sección circular tiene un radio que varía a lo largo del tubo. En él hay un flujo estacionario, sin fuentes ni sumideros. En un punto P_1 del tubo el radio es r_1 y el flujo de masa por p_1 es una constante Q_1. Más adelante, en el tubo hay un punto P_2 donde el radio es $r_2 = r_1/3$.

   a) El flujo de masa a través de P_2 se mide y se descubre que es Q_2, donde Q_2/Q_1 es

   A) 9. B) 3. C) 1. D) 1/9.

   E) dependiente de las densidades del fluido en P_1 y P_2.

   b) La razón de las rapideces de flujo v_2/v_1 es

   A) 9. B) 3. C) 1. D) 1/9.

   E) dependiente de las densidades del fluido en P_1 y P_2.

3. Una corriente estacionaria de agua cae verticalmente de un tubo. Suponga que el flujo es incompresible. A una distancia d_1 debajo de él la rapidez del agua es 1.0 m/s. A una distancia d_2 debajo de él la rapidez del agua es 2.0 m/s. ¿Cuál es la razón de la sección transversal del flujo a una altura d_1 a la sección transversal de altura d_2?

   A) 4:1 B) 2:1 C) 1:2 D) 1:4

16-3 La ecuación de Bernoulli

4. Una caja cuadrada de vino tiene una pequeña salida en uno de los ángulos del fondo. Cuando la caja está llena y en una superficie plana, al abrir la salida el vino fluye con una rapidez de v_0 (véase Fig. 16-24*a*).

   a) Ahora la caja está medio vacía y sigue colocada en una superficie plana. Cuando la salida se abra por completo, el vino fluirá con una velocidad de

   A) v_0. B) $v_0/2$. C) $v_0/\sqrt{2}$. D) $v_0/\sqrt[4]{2}$.

   b) La caja sigue medio vacía, sólo que ahora alguien la inclina 45° de modo que la salida se encuentra en el punto más bajo (Fig. 16-24*b*). Cuando se abre totalmente la salida, el vino saldrá fluyendo con una rapidez de

   A) v_0. B) $v_0/2$. C) $v_0/\sqrt{2}$. D) $v_0/\sqrt[4]{2}$.

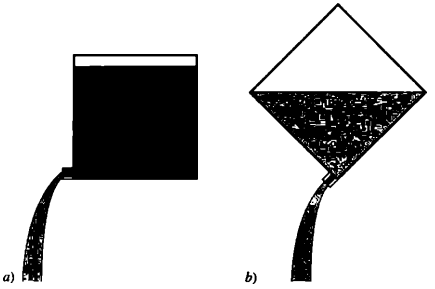


FIGURA 16-24. Pregunta de opción múltiple 4.

5. Una corriente estacionaria de agua cae verticalmente de un tubo. Suponga que el flujo es incompresible; se parece al de la figura 16-5. ¿De qué manera varía la presión en el agua con la altura en la corriente?
   A) La presión en el agua es mayor en los puntos más bajos de la corriente.
   B) La presión en el agua es menor en los puntos más bajos de la corriente.
   C) La presión en el agua es igual en todos los puntos de la corriente.

6. Un fluido incompresible cruza un tubo horizontal. En un punto del tubo la presión del fluido es p_1 y su rapidez es v_1. Más abajo la presión es p_2 y la rapidez del fluido es $2v_1$. ¿Qué puede concluirse respecto a p_1 y p_2?
   A) $p_1 = p_2$. B) $p_1 = 3p_2$. C) $p_1 - 2p_2$.
   C) Sólo que $p_1 > p_2$.

7. Un fluido incompresible atraviesa un tubo horizontal. En un punto del tubo la presión es p_1. Más abajo de él la presión es $p_2 > p_1$. ¿Qué puede concluirse respecto a las superficies de sección transversal del tubo A_1 en el punto 1 y A_2 en el punto 2?
   A) $A_1 > A_2$. B) $A_1 < A_2$.
   C) Nada puede concluirse sobre la relación entre A_1 y A_2.

16-4 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad

16-5 Campos de flujo (Opcional)

16-6 Viscosidad, turbulencia y flujo caótico (Opcional)

8. Una bomba es capaz de mantener una diferencia de presión por longitud unitaria en un tubo cilíndrico de radio R_1 y produce un flujo de masa Q_0. Se quiere reemplazar el tubo por dos tubos cilíndricos más pequeños con radio R_2. La bomba mantendrá la diferencia original de presión por longitud unitaria en los dos tubos y la masa total que los atraviesa permanecerá igual a Q_0. ¿Cuál es la razón R_1/R_2?
   A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[4]{2}$ D) 4

PREGUNTAS

1. Describa brevemente lo que significan los siguientes conceptos y explíquelos con un ejemplo: *a*) flujo estacionario de fluido; *b*) flujo no estacionario de fluido; *c*) flujo rotacional de fluido; *d*) flujo irrotacional de fluido; *e*) flujo compresible de fluido; *f*) flujo incompresible de fluido; *g*) flujo viscoso de fluido; *h*) flujo no viscoso de fluido.
2. En el flujo estacionario, el vector de velocidad es constante en cualquier punto. ¿Puede entonces darse un movimiento acelerado en las partículas del fluido? Explique su respuesta.
3. Describa las fuerzas que actúan sobre un elemento del fluido cuando pasa por un tubo de sección transversal no uniforme.
4. ¿Qué efectos, si los hay, tendrá la tensión superficial en la solución del problema resuelto 16-1?
5. Explique las variaciones de presión en la sangre de su cuerpo al circular ésta por él.
6. Explique cómo un médico mide la presión arterial.
7. En una demostración en clase, se mantiene una pelota de ping pong "flotando" mediante un chorro de aire. ¿Es estacionario, inestacionario o neutral el equilibrio? Explique su respuesta.
8. La altura del líquido en los tubos verticales de la figura 16-25 indica que la presión disminuye a lo largo del canal, aunque éste tiene una sección transversal uniforme y el líquido que fluye es incompresible. Explique por qué.

FIGURA 16-25. Pregunta 8.

9. Explique por qué una chimenea más alta crea una mejor corriente para sacar el humo de ella. ¿Por qué el humo no penetra en el cuarto donde está instalada?
10. *a*) Explique cómo un pitcher puede hacer que la pelota haga una curva hacia la derecha o la izquierda. ¿Es posible justificar esto aplicando la ecuación de Benoulli a esa pelota que gira? (Véase "Bernoulli and Newton in Fluid Mechanics" de Norman F. Smith, *The Physics Teacher*, noviembre de 1972, p. 451.) *b*) ¿Por qué es más fácil lanzar una curva con una pelota de tenis que con una de béisbol?
11. No sólo se puede que una pelota de superficie áspera haga una curva, sino también una de superficie lisa cuando se arrojan, sino que las pelotas se curvearán en dirección contraria. ¿Por qué? (Véase "Effect of Spin and Speed on the Curve of a Baseball and the Magnus Effect for Smooth Spheres" de Lyman J. Briggs, *American Journal of Physics*, noviembre de 1959, p. 589.)
12. Se acercan dos botes de remos que se desplazan paralelamente entre sí en la misma dirección. Lo mismo sucede con dos automóviles que se mueven paralelamente uno con otro. Explique ambos fenómenos basándose en la ecuación de Bernoulli.
13. En la construcción de rascacielos, ¿qué fuerzas producidas por el movimiento del aire han de ser contrarrestadas? ¿Cómo se hace eso? (Consúltese "The Wind Bracing of Buildings" de Carl W. Condit, *Scientific American*, febrero de 1974, p. 92.)
14. Por medio de la ecuación de Bernoulli explique la acción de un paracaídas consistente en retardar la caída libre.
15. ¿Por qué una corriente de agua proveniente de un grifo se estrecha conforme va cayendo?

16. ¿Puede explicar por qué el agua fluye en una corriente continua cuando cae por un tubo vertical, mientras que se divide en gotas cuando cae libremente?
17. ¿Cómo funciona el sanitario de vaciado manual? (Véase "Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper" de W. Reyburn, Prentice-Hall, 1969.)
18. A veces la gente saca las cartas del sobre cortando una tira de un extremo estrecho, sosteniéndolo firmemente y soplando en dirección a ella. Por medio de la ecuación de Bernoulli explique por qué este procedimiento da resultado.
19. Al despegar, ¿sería mejor que el avión se moviera en dirección del viento o con él? ¿Y al aterrizar?
20. Explique cómo la diferencia de presión entre las superficies baja y superior del ala de un avión depende de su altitud.
21. La acumulación de hielo en el ala de un avión puede disminuir mucho su empuje ascendente. Explique por qué. (El peso del hielo no es problema en este caso.)
22. ¿Cómo puede un avión volar invertido?
23. "La típica forma semejante al plátano de los bumerangs casi nada tiene que ver con su capacidad de retornar... Lo esencial es la sección transversal de los brazos, que deben ser más convexos en un lado que en el otro, como el perfil del ala de un avión." (Según "The Aerodinamics of Boomerangs" de Felix Hess, *Scientific American*, noviembre de 1968, p. 124.) Explique por qué.
24. ¿De dónde proviene la energía de las aves que alcanzan gran altura? (Véase "The Soaring Flight of Birds" de C. D. Cone, hijo, *Scientific American*, abril de 1962, p. 130.)
25. ¿Por qué el factor "2" aparece en la ecuación 16-15 en vez del factor "1"? Cabría suponer que el empuje sería simplemente la diferencia de presión multiplicada por la superficie, es decir, $A_0(p - p_0)$.
26. Explique por qué el efecto destructivo de un tornado es mayor cerca del centro de perturbación que cerca del borde.
27. Cuando se le quita un tapón a una vasija, el agua sale mientras circula como un remolino. La velocidad angular de un elemento de fluido alrededor de un eje vertical que cruza el orificio parece mayor cerca de éste. Explique por qué.
28. ¿Es verdad que en el hemisferio norte el agua de las tinas de baño se vacían con una rotación en dirección contraria a la de las manecillas del reloj y que en el hemisferio sur lo hacen girando en dirección de las manecillas del reloj? De ser así, explique por qué y prediga lo que sucederá en el ecuador. (Véase "Bath-Tub Vortex" de Ascher H. Shapiro, *Nature*, 15 de diciembre, 1962, p. 1080.).
29. Explique por qué el papel filtro no puede quitarse del embudo de la figura 16-26 soplando en el extremo estrecho.
30. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, un aumento de velocidad deberá acompañarse de una reducción de la presión. Pero cuando uno saca la mano por una ventana de un automóvil en movimiento y así aumenta la rapidez con que el aire pasa soplando, se percibe un incremento de la presión. ¿Por qué esto no viola la ecuación de Bernoulli?

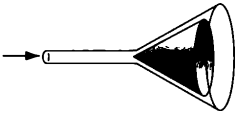


FIGURA 16-26. Pregunta 29.

31. ¿Por qué la presencia de la atmósfera disminuye el alcance máximo de algunos objetos (las pelotas de tenis, por ejemplo) pero aumenta el de otros (frisbees y pelotas de golf, por ejemplo)?
32. Puede lanzarse un disco más lejos contra un viento de 25 mi/h que en su dirección. ¿A qué se debe? (*Sugerencia*: Reflexione acerca del empuje ascendente y la resistencia al avance.)
33. Explique por qué las pelotas de golf tienen hoyuelos.
34. Cuanto más larga sea una tabla hawaiana y cuanto menos profunda esté el agua, mayor distancia recorrerá en el agua. Explique por qué. (Consúltese "The Surf Skimmer", de R. D. Edge, *American Journal of Physics*, julio de 1968, p. 630)
35. Cuando se vierte de una tetera, el agua tiende a deslizarse a lo largo de la parte del pico. Explique por qué. (Consúltese "The Teapot Effect... a Problem" de Markus Reiner, *Physics Today*, septiembre de 1956, p. 16.)
36. Los perros de la pradera viven en grandes colonias dentro de complejos sistemas interconectados. Afrontan el problema de conservar suficiente cantidad de aire en sus madrigueras para no sofocarse. Lo logran construyendo montículos cónicos de tierra alrededor de los numerosos orificios de ellas. Conforme a la ecuación de Bernoulli, ¿cómo funciona este plan de aire acondicionado? Nótese lo siguiente: debido a las fuerzas viscosas, la rapidez del viento sobre la pradera es menor cerca del nivel del suelo que unas cuantas a pulgadas más arriba. (Véase *New Scientist*, 27 de enero, 1972, p. 191.)
37. La viscosidad constituye un ejemplo del fenómeno de transporte. ¿Qué propiedad va a ser transportada? ¿Se le ocurren otros fenómenos de transporte y sus propiedades correspondientes?
38. ¿Por qué los fabricantes automotrices recomiendan utilizar aceite "multiviscoso" en los motores durante el invierno?
39. ¿Por qué es más importante tener en cuenta la viscosidad en un fluido que cruza un canal estrecho que un canal relativamente no angosto?
40. La viscosidad puede retardar la aparición de la turbulencia en el flujo de un fluido, es decir, tiende a estabilizarlo. Considere el jarabe y el agua —por ejemplo—, y haga verosímil esto.

EJERCICIOS

16-1 Conceptos generales del flujo de fluidos

16-2 Líneas de corriente y la ecuación de continuidad

1. Un tubo de 34.5 cm de diámetro lleva agua que se desplaza a 2.62 m/s. ¿Cuánto tardará en descargar 1,600 m^3 de agua?
2. Una manguera de jardín con un diámetro interno de 0.75 in está conectada a una regadera rotativa para jardín compuesta de un solo tubo con 24 hoyos, de 0.050 in de diámetro. Si el agua en la manguera tiene una rapidez de 3.5 ft/s, ¿con qué rapidez sale de los hoyos?

3. La figura 16-27 muestra la confluencia de dos corrientes que forman un río. Una corriente mide 8.2 m de ancho y 3.4 m de profundidad; su rapidez es 2.3 m/s. La otra mide 6.8 m de ancho y 3.2 m de profundidad; fluye a 2.6 m/s. El ancho del río es 10.7 m y la rapidez de la corriente es 2.9 m/s. ¿Cuál será su profundidad?

FIGURA 16-27. Ejercicio 3.

4. Con una manguera uniforme de 9.70 mm de radio se bombea agua constantemente de un sótano inundado a 5.30 m/s. La manguera atraviesa una ventana a 2.90 m arriba del nivel del agua. ¿Cuánta energía suministra la bomba?
5. Un río de 21 m de ancho y 4.3 m de profundidad drena un terreno de 8,500 km^2 donde la precipitación pluvial promedio es de 48 cm/año. Una cuarta parte de la precipitación vuelve a la atmósfera por evaporación, pero el resto llega finalmente al río. ¿Cuál es la velocidad promedio de la corriente del río?

16-3 La ecuación de Bernoulli

6. ¿Cuánto trabajo realiza la presión al impulsar 1.4 m^3 de agua por un tubo con un diámetro interno de 13 mm, si la diferencia de presión en ambos extremos del tubo es 1.2 atm?
7. Una toma de agua en un depósito (Fig. 16-28) tiene una superficie transversal de 7.60 ft^2. El agua fluye con una rapidez de 1.33 ft/s. El agua sale fluyendo a 31.0 ft/s en el edificio del generador a 572 ft debajo del punto de la toma. *a*) Encuentre la diferencia de presión, en lb/in^2, entre la entrada y la salida. *b*) Calcule la superficie del tubo de salida. La densidad de peso del agua es 62.4 lb/ft^3.

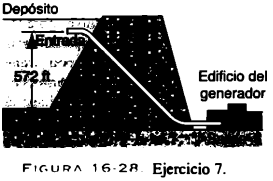


FIGURA 16-28. Ejercicio 7.

8. A veces los modelos de torpedos se prueban en un tubo horizontal de agua que fluye, en forma muy semejante a como se emplea un túnel de viento para probar los modelos de aviones. Suponga un tubo circular de 25.5 cm de diámetro interno y un modelo de torpedo, alineado en el eje del tubo, con un diámetro de 4.80 cm. El torpedo va a probarse con agua que pasa por él a 2.76 m/s. *a*) ¿Con qué rapidez debe fluir en la parte no restringida del tubo? *b*) Determine la diferencia de presión entre las partes restringidas y no restringidas del tubo.
9. Un depósito sirve para recoger toda el agua de lluvia que cae en una superficie A = 100 m^2. Tiene un hoyo pequeño de superficie transversal *a* situado en h = 2 m debajo de la superficie del agua. *a*) Suponiendo una precipitación anual de 1.6 m/año distribuida uniformemente a lo largo del año, calcule el máximo valor posible de *a* que permitirá que el nivel del agua permanezca constante en el tanque. *b*) Determine, en litros/día, la cantidad de agua que puede suministrar el depósito. *c*) ¿A cuántas personas puede abastecer el depósito?
10. El agua se desplaza con una rapidez de 5.18 m/s por un tubo con una superficie transversal de 4.20 cm^2. Poco a poco el agua desciende 9.66 m al aumentar la superficie del tubo a 7.60 cm^2. *a*) ¿Cuál es la rapidez de flujo en el nivel inferior? *b*) La presión en el nivel superior es 152 kPa; calcule la presión en el nivel inferior.
11. En un huracán, el aire (densidad 1.2 kg/m^3) sopla sobre el techo de una casa con una velocidad de 110 km/h. *a*) ¿Cuál es la diferencia de presión entre el interior y el exterior que tiende a levantar el techo? *b*) ¿Cuál sería la fuerza de empuje dinámico en el techo de superficie 93 m^2?
12. La ventana de un edificio de oficinas mide 4.26 m por 5.26 m. En un día de tormenta, el aire sopla a 28.0 m/s en una ventana del piso 53. Calcule la fuerza neta en la ventana. La densidad del aire es 1.23 kg/m^3.
13. Un líquido fluye por un tubo horizontal cuyo radio interno mide 2.52 cm. El tubo se dobla hacia arriba a una altura de 11.5 m donde se ensancha y se conecta a otro tubo horizontal de 6.14 cm de radio interno. ¿Cuál debe ser el flujo de volumen, si es idéntica la presión en los dos tubos horizontales?
14. La figura 16-29 muestra un líquido que sale de un orificio en un tanque grande a una distancia h debajo de la superficie del líquido. El tanque está abierto en la parte superior. *a*) Aplique la ecuación de Bernoulli a una línea de corriente que conecta los puntos 1, 2 y 3, y demuestre que la rapidez de la salida es

$$v = \sqrt{2gh}.$$

A esto se le conoce como *ley de Torricelli*. *b*) Si el orificio se curva directamente hacia arriba, ¿qué altura alcanzaría la corriente del líquido? *c*) ¿Cómo afectará la viscosidad o la turbulencia al análisis?

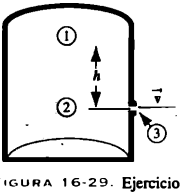


FIGURA 16-29. Ejercicio 14.

15. Un submarino en una profundidad de 200 m sufre una filtración relativamente pequeña. ¿Con qué rapidez entra el agua en él? Suponga que la presión dentro del submarino es la misma que la del aire en el nivel del mar.
16. Un francotirador dispara una bala de rifle contra un tanque de gasolina, haciendo un hoyo a 53.0 m debajo de la superficie de la

gasolina. El tanque estaba sellado y se encuentra bajo una presión absoluta de 3.10 atm, como se aprecia en la figura 16-30. La gasolina almacenada tiene una densidad de 660 kg/m³. ¿A qué velocidad comenzará a salir del hoyo?

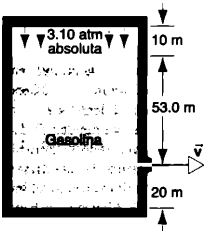


FIGURA 16-30. Ejercicio 16.

17. Considere un tubo uniforme U con un diafragma en el fondo y lleno de líquido a diferentes alturas en cada brazo (Fig. 16-31). Ahora imagine que se agujera el diafragma de modo que el líquido fluya de izquierda a derecha. *a*) Demuestre que la aplicación de la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 3 produce una contradicción. *b*) Explique por qué la ecuación no se aplica en este caso. (*Sugerencia*: ¿Es estacionario el flujo?)

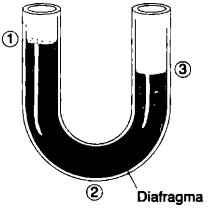


FIGURA 16-31. Ejercicio 17.

18. Si una persona sopla aire con una rapidez de 15.0 m/s encima de un lado de un tubo U que contenga agua, ¿qué diferencia habrá entre los niveles del agua a ambos lados? Suponga que la densidad del aire es 1.20 kg/m³.

19. El agua fresca detrás de un dique de depósito mide 15.2 m de profundidad. Un tubo horizontal de 4.30 cm de diámetro lo cruza a 6.15 m debajo de la superficie del agua como se ve en la figura 16-32. Un tapón protege la abertura del tubo. *a*) Calcule la fuerza de fricción entre el tapón y la pared del tubo. *b*) Se quita el tapón. ¿Qué volumen de agua sale por el tubo en 3.00 h?

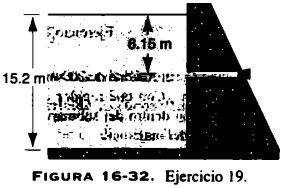


FIGURA 16-32. Ejercicio 19.

16-4 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad

20. Un tubo de Pitot se monta en el ala de un avión para determinar su velocidad en relación con el aire, cuya densidad es 1.03 kg/m³. El tubo contiene alcohol e indica una diferencia de nivel de 26.2 cm. ¿Qué velocidad lleva el avión respecto al aire? La densidad del alcohol es 810 kg/m³.

21. Un tubo hueco tiene un disco *DD* sujeto a su extremo (Fig. 16-33). Cuando por él se sopla aire de densidad r, el disco atrae la tarjeta *CC*. Supongamos que la superficie de la tarjeta es A y que v es la rapidez promedio del aire entre ella y el disco. Calcule la fuerza resultante hacia arriba en *CC*. No tenga en cuenta el peso de la tarjeta; suponga que $v_0 \ll v$, donde v_0 es la rapidez del aire en el tubo hueco.

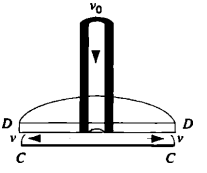


FIGURA 16-33. Ejercicio 21.

22. Una placa cuadrada con una longitud de lado de 9.10 cm y una masa de 488 g está sujeta a lo largo de un lado. Si se sopla aire sobre la superficie superior solamente, ¿qué rapidez ha de tener el aire para mantener horizontal la placa? La densidad del aire es 1.21 kg/m³.

23. Fluye aire sobre la parte superior del ala de un avión, de superficie A, con una rapidez v_t y por debajo del ala con una rapidez v_u. Demuestre que la ecuación de Bernoulli predice que la fuerza ascendente de empuje dinámico L en el ala será

$$L = \tfrac{1}{2}\rho A(v_t^2 - v_u^2),$$

donde ρ es la densidad del aire. (*Sugerencia*: Aplique la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que pasa por encima de la superficie superior del ala y a la que pasa por debajo de su superficie inferior. ¿Puede justificar el hacer iguales las constantes de las dos líneas?

24. Un avión tiene una superficie de ala (en todas ellas) de 12.5 m². A cierta velocidad del aire, éste fluye sobre la superficie superior del ala a 49.8 m/s y sobre su superficie inferior a 38.2 m/s. *a*) Determine la masa del avión. Suponga que va a velocidad constante y que los efectos del empuje dinámico relacionados con el fuselaje y la cola son pequeños. Explique el transporte si el avión, volando a la misma rapidez del aire, está *b*) en vuelo a nivel, *c*) elevándose a 15° y *d*) descendiendo a 15°. La densidad del aire es 1.17 kg/m³. Consulte el ejercicio 23.

25. Un tubo de Venturi tiene un diámetro de cuerpo de 25.4 cm y un diámetro de garganta de 11.3 cm. La presión del agua en el cuerpo es 57.1 kPa y en la garganta 32.6 kPa. Calcule el flujo volumétrico del agua a través del tubo.

16-5 Campos de flujo (Opcional)

26. Demuestre que la constante en la ecuación de Bernoulli es la misma en todas las líneas de corriente tratándose del flujo estacionario e irrotacional de la figura 16-13.

27. Antes que Newton formulara su teoría de la gravitación, la del movimiento planetario propuesta por René Descartes gozaba de gran aceptación. En esta última los planetas eran atrapados y arrastrados por un remolino de partículas de éter centradas alrededor del Sol. Newton demostró que este esquema basado en el vórtice contradecía las observaciones porque: *a*) la rapidez de una partícula de éter en el vértice varía inversamente con su distancia del Sol; *b*) el periodo de revolución de cada una varía directamente con el cuadrado de su distancia del Sol; *c*) este resultado contradice la tercera ley de Kepler. Pruebe *a*), *b*) y *c*).

16-6 Viscosidad, turbulencia y flujo caótico (Opcional)

28. Calcule la máxima velocidad con que la sangre, a 37°C, puede fluir a través de una arteria de 3.8 mm, si se quiere que el flujo sea laminar.
29. El mercurio líquido (viscosidad = 1.55×10^{-3} N · s/m^2 fluye por un tubo horizontal de 1.88 cm de radio interno y de 1.26 m de longitud. El flujo de volumen es 5.35×10^{-2} L/min. *a*) Demuestre que el flujo es laminar. *b*) Calcule la diferencia de presión entre los dos extremos del tubo.

PROBLEMAS

1. Las corrientes de marea en los canales estrechos que conectan las bahías costeras con el mar son a veces muy rápidas; el agua debe llegar a la bahía cuando la marea sube y regresar al mar cuando la marea baja. Observe atentamente la bahía rectangular de la figura 16-34*a*. Se conecta al mar por medio de un canal de 190 m de ancho y 6.5 m de profundidad en el nivel medio del mar. La gráfica (Fig. 16-34*b*) muestra la variación diurna del nivel del agua en la bahía. Calcule la rapidez promedio de la corriente de la marea en el canal.

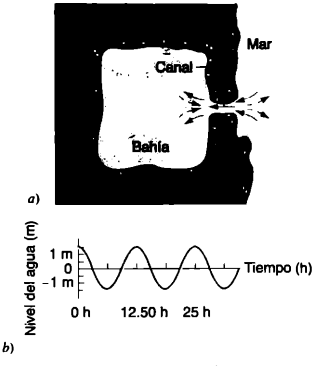


FIGURA 16-34. Problema 1.

2. Suponga que dos tanques, 1 y 2, con una gran abertura en la parte superior, contienen líquidos diferentes. Debajo de la superficie líquida se perfora un hoyo pequeño en el lado a la misma profundidad, pero el hoyo en el tanque 1 tiene la mitad de la superficie transversal del hoyo en el tanque 2. *a*) ¿Cuál es la razón ρ_1/ρ_2 de las densidades de los fluidos, si se observa que el flujo de masa es igual en los dos hoyos? *b*) ¿Cuál es la razón de las rapideces de flujo (flujo de volumen) en los dos tanques? *c*) Se quiere igualar las dos rapideces agregando o extrayendo fluido en el tanque 2. ¿Cuál deberá ser la nueva altura del fluido arriba del hoyo en el tanque 2 para que la rapidez de su flujo se iguale a la del tanque 1?
3. Un tanque está lleno de agua hasta una altura H. Se perfora un hoyo en una de las paredes a una profundidad h debajo de la superficie del agua (Fig. 16-35). *a*) Demuestre que la distancia x del pie de la pared donde la corriente choca con el suelo está dada por $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. *b*) ¿Podría hacerse un hoyo a otra profundidad, de modo que esta segunda corriente tuviera el mismo alcance? De ser así,¿a qué profundidad? *c*) ¿A qué profundidad debería hacerse el hoyo para que la corriente emergente cayera al suelo a la máxima distancia de la base del tanque? ¿Cuál es esa distancia?

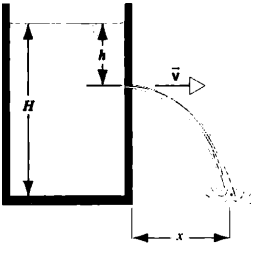


FIGURA 16-35. Problema 3.

4. Un sifón es un aparato para sacar líquido de un contenedor que no queremos ladear. Funciona como se indica en la figura 16-36. Debe estar lleno inicialmente, pero una vez hecho esto el líquido fluirá hasta que su nivel caiga por debajo de la abertura en A.

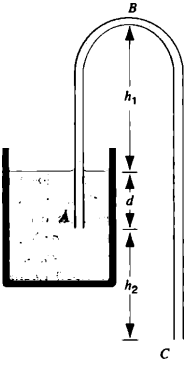


FIGURA 16-36. Problema 4.

El líquido tiene una densidad ρ y una viscosidad insignificante. *a*) ¿Con qué rapidez fluye del tubo en *C*? *b*) ¿Qué presión tiene en el punto más alto *B*? *c*) ¿Cuál es la altura más alta posible h a que un sifón puede levantar agua?

5. *a*) Suponga una corriente de fluido de densidad ρ con rapidez v_1 que pasa abruptamente de un tubo cilíndrico de superficie transversal a_1 a un tubo cilíndrico más ancho de superficie transversal a_2 (Fig. 16-37). El chorro mezclará el fluido circundante y, después de ello, éste se desplazará casi uniformemente con una rapidez promedio v_2. Sin mencionar los detalles de la mezcla, use las ideas de momento para demostrar que el aumento de presión debida a la mezcla es aproximadamente

$$p_2 - p_1 = \rho v_2(v_1 - v_2).$$

b) A partir de la ecuación de Bernoulli demuestre que en un tubo que se abre gradualmente obtendremos

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2).$$

c) Determine la pérdida de presión debida al abrupto agrandamiento del tubo. ¿Puede hacer una analogía con las colisiones elásticas e inelásticas de la mecánica de partículas?

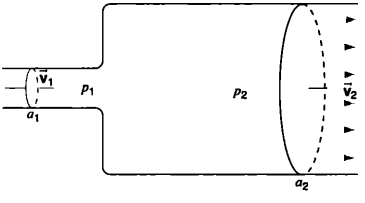


FIGURA 16-37. Problema 5.

6. Una jarra contiene 15 vasos de jugo de naranja. Cuando abrimos la tapa en el fondo, tardamos 12.0 s en llenar un vaso. Si la dejamos abierta, ¿cuánto tardarán en llenarse los 14 vasos restantes y en vaciar así la jarra?
7. Considere el aire estancado en el borde frontal de un ala y el que pasa rápidamente por la superficie del ala con una velocidad v. Suponga que la presión en el borde frontal es aproximadamente atmosférica y calcule el máximo valor posible de v en el flujo de corriente; suponga asimismo que el aire es incompresible y utilice la ecuación de Bernoulli. Considere que la densidad del aire es 1.2 kg/m^3. ¿Cómo se compara esto con la rapidez del sonido en tales condiciones (340 m/s)? ¿Puede explicar la diferencia? ¿Por qué debería haber alguna relación entre ambas cantidades?
8. Observe detenidamente el medidor de Venturi en la figura 16-8. Aplique la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 de la ecuación de continuidad (Ec. 16-3); después verifique en la ecuación 16-11 la rapidez del flujo en el punto 1.
9. Examine atentamente el medidor de Venturi en la figura 16-8, que contiene agua, sin el manómetro. Sea $A_1 = 4.75A_2$. Suponga que la presión en el punto 1 es 2.12 atm. *a*) Calcule los valores de v_1 en el punto 1 y v_2 en el punto 2 que harán cero la presión p_2 en el punto 2. *b*) Calcule la rapidez correspondiente de flujo volumétrico si el diámetro mide 5.20 cm en el punto 1. Se da el nombre de *cavitación* al fenómeno en el punto 2 cuando p_2 cae casi a cero. El agua se vaporiza y se convierte en pequeñas burbujas.
10. Un campo de fuerza es conservativo si $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$. El círculo en la integral significa que la integración debe considerarse a lo largo de una curva cerrada (viaje redondo) en el campo. Un flujo es potencial (y, por tanto, irrotacional) si $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$ en todas las trayectorias cerradas del campo. Aplicando este criterio, demuestre que los campos de *a*) de la figura 16-13 y *b*) de la figura 16-16 son de flujo potencial.
11. En flujos muy curvos, los efectos centrífugos son considerables. Suponga un elemento de fluido que se mueve con la rapidez v en una línea de corriente de un flujo curvo en un plano horizontal (Fig. 16-38). *a*) Demuestre que $dp/dr = \rho v^2/r$, de modo que la presión aumenta en $\rho v^2/r$ por distancia unitaria perpendicular a la línea de corriente a medida que pasamos del lado cóncavo al convexo de esta última. *b*) Después use la ecuación de Bernoulli y este resultado para demostrar que vr es igual a una constante, por lo cual las rapideces crecen hacia el centro de la curvatura. Así pues, las líneas de corriente que están uniformemente espaciadas en un tubo recto se acumularán hacia la pared interna de un pasaje curvo y estarán muy espaciadas hacia la pared externa. Este problema debería compararse con el problema 12 del capítulo 15, donde el movimiento curvado se produce al girar un contenedor. En ese caso la rapidez variaba directamente con r, pero aquí varía en forma inversa. *c*) Demuestre que este flujo es irrotacional.

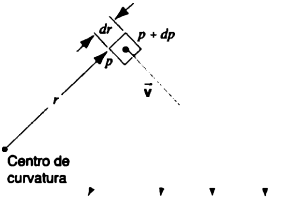


FIGURA 16-38. Problema 11.

12. La figura 16-39 ilustra la sección transversal de las capas superiores de la Tierra. La superficie se divide en varios bloques rígidos, denominados placas, que se deslizan lentamente por una capa inferior lodosa denominada astenosfera. En la figura se aprecian las dimensiones ordinarias. Suponga que la rapidez de la placa rígida mostrada es $v_0 = 48$ mm/y y que la base de la astenosfera no se mueve. Calcule el esfuerzo cortante (fuerza de cizallamiento por superficie unitaria) en la base de la placa. La viscosidad del material de la astenosfera es 4.0×10^{19} N · s/m^2. Ignore la curvatura de la Tierra.

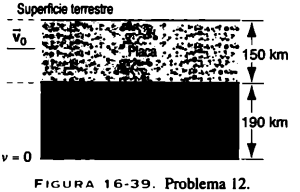


FIGURA 16-39. Problema 12.

13. Las líneas de corriente del campo de flujo de Poiseuille aparecen en la figura 16-40. El espaciamiento de las líneas de corriente indica que, a pesar de ser rectilíneo el movimiento, hay un gradiente de velocidad en dirección transversal. Demuestre que el flujo de Poiseuille es rotacional.

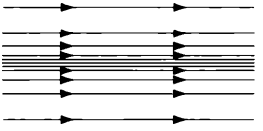


FIGURA 16-40. Problema 13.

14. Un fluido de viscosidad η fluye constantemente a través de un tubo cilíndrico de radio R y de longitud L, como se muestra en la figura 16-41. *a*) Suponga un cilindro arbitrario de flujo de radio r. Demuestre que la fuerza viscosa F procedente de la capa vecina es $F = -\eta(2\pi rL)dv/dr$. *b*) Demuestre que la fuerza F' que empuja al cilindro por el tubo es $F' = (\pi r^2)\Delta p$. *c*) Use la condición de equilibrio para obtener una expresión para dv en función de dr. Integre la expresión para conseguir la ecuación 16-18.

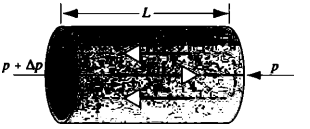


FIGURA 16-41. Problemas 14 y 15.

15. Considere una vez más el fluido que fluye por el tubo descrito en el problema 14 e ilustrado gráficamente en la figura 16-41. Encuentre una expresión del flujo de masa a través del anillo entre los radios r y $r + dr$; integre después este resultado para obtener el flujo total de masa a través del tubo, verificando así la ecuación 16-20.
16. Una burbuja de jabón de 38.2 mm de radio se encuentra en el extremo de un tubo estrecho de 11.2 cm de longitud y con un diámetro interno de 1.08 mm. El otro extremo está expuesto a la atmósfera. Determine el tiempo que tarda el radio de la burbuja en caer a 21.6 mm. Suponga el flujo de Poiseuille dentro del tubo. (Utilice 2.50×10^{-2} N/m; para la tensión superficial de la solución de jabón; la viscosidad del aire es 1.80×10^{-5} N · s/m^2.)

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

Un tanque cilíndrico de agua tiene un radio de 2 m y una altura de 1.5 m. Originalmente está totalmente lleno de agua, pero aparece una grieta vertical en él y el agua se filtra. Suponiendo que la grieta mida 1 cm de ancho y que se extienda de la base del tanque a la parte superior, calcule el tiempo que tarda el tanque en vaciarse. (*Sugerencia*: Suponga que la grieta se compone de hoyos de 1 cm^2, uno arriba de otro, y resuelva el problema numéricamente.

CAPÍTULO 17

OSCILACIONES

Todos los días encontramos muchas clases de movimiento oscilatorio. Ejemplos comunes son el péndulo de un reloj, una persona que se balancea en un trampolín y una cuerda vibrante de guitarra. En el nivel microscópico también encontramos ejemplos: los átomos vibrantes en un cristal de cuarzo de un reloj de pulsera y las moléculas vibrantes del aire que transmiten ondas sonoras. Aparte de estas oscilaciones mecánicas puede haber oscilaciones electromagnéticas, como los electrones que van y vienen en los circuitos encargados de transmitir y recibir señales de radio o de televisión.

Estos sistemas oscilatorios —ya sean mecánicos, electromagnéticos o de otro tipo— tienen una formulación matemática común y se expresan muy fácilmente a partir de las funciones seno y coseno. En el presente capítulo nos concentraremos en las oscilaciones mecánicas y en su descripción. Más adelante nos ocuparemos de diversas clases de ondas y de las oscilaciones electromagnéticas que se sirven de la misma descripción matemática.

17-1 SISTEMAS OSCILATORIOS

Imagine un sistema oscilatorio, por ejemplo, el péndulo de un reloj o una masa en un resorte. ¿Qué propiedades ha de tener la fuerza que produce las oscilaciones?

Si desplazamos un péndulo en una dirección a partir de su posición de equilibrio, la fuerza (debida a la gravedad) lo empuja de nuevo hacia el equilibrio. Si lo desplazamos en dirección contraria, la fuerza seguirá impulsándolo hacia el equilibrio. *Sin importar la dirección del desplazamiento, la fuerza siempre opera en una dirección que restablece el sistema en su posición de equilibrio.* A esa fuerza se le conoce como *fuerza restauradora.* (La posición de equilibrio pertenece al tipo que designamos como *estable* en el Capítulo 12; el sistema tiende a recobrar el equilibrio al ser desplazado ligeramente.)

Vamos a examinar un ejemplo simple. Supóngase que una partícula puede moverse libremente sólo en la dirección x y que la experimenta una fuerza de magnitud constante F_m, la cual opera en la dirección $+x$ cuando $x < 0$ y en la dirección $-x$ cuando $x > 0$, como se ve en la figura 17-1*a*. La fuerza, que se muestra en la figura 17-1*b*, se parece a las que dan las aceleraciones constantes graduales estudiadas en el Capítulo 2.

Una partícula de masa m inicialmente en reposo en la coordenada $x = +x_m$ experimenta una fuerza cuyo componente x es $-F_m$, y el componente x correspondiente de su aceleración es $-a_m = -F_m/m$. La partícula se mueve hacia su posición de equilibrio en $x = 0$ y la alcanza con la velocidad $v_x = -v_m$. Cuando cruza el origen hacia x negativo, se convierte en $+F_m$ y la aceleración es $+a_m$. La partícula aminora su velocidad y se detiene un instante en $x = -x_m$ antes de invertir su movimiento a través del origen y regresar finalmente a $x = +x_m$. El ciclo se repite al infinito si no existe fricción ni otras fuerzas de disipación.

En la figura 17-2 se muestra el movimiento resultante, graficado en el estilo de los ejemplos del Capítulo 2. La posición $x(t)$ consta de una secuencia de segmentos de parábolas unidos uniformemente, como sucede siempre en el movimiento con aceleración constante. La partícula oscila entre $x = +x_m$ y $x = -x_m$. La magnitud del desplazamiento máximo respecto al equilibrio (x_m en este caso) recibe el nombre de *amplitud del movimiento*. El tiempo necesario para completar un ciclo (repetición total del movimiento) recibe el nombre de *periodo T*, como se observa en la figura 17-2. Se

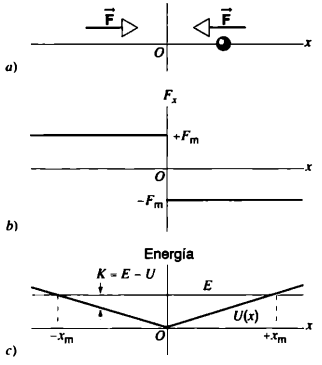


FIGURA 17-1. *a*) Sobre una partícula actúa una fuerza constante $\vec{F}$ que siempre se dirige al origen. *b*) Gráfica de esta fuerza constante gradual, igual a $+F_m$ donde $x < 0$ y a $-F_m$ cuando $x > 0$. Cualquier fuerza real de este tipo debe representarse mediante una función continua, aunque puede ser muy pronunciada al cruzar $x = 0$. *c*) Energía potencial correspondiente a esta fuerza. Si el sistema tiene una energía mecánica total E, en cualquier lugar la diferencia $E - U$ da la energía cinética.

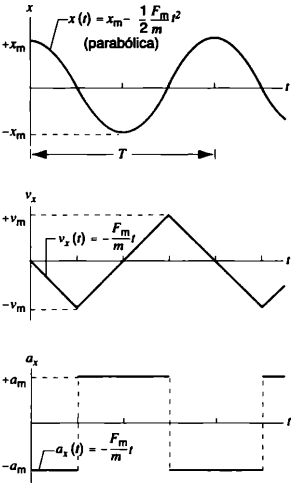


FIGURA 17-2. La posición, velocidad y aceleración de la partícula de la figura 17-1 se grafican en función del tiempo. La aceleración consta de segmentos horizontales alternos con valores $+F_m/m$ y $-F_m/m$, la velocidad consta de segmentos lineales alternos con pendientes $+F_m/m$ y $-F_m/m$ y la posición consta de secciones suaves unidas de parábolas. Como la fuerza $F_x(x)$ es en realidad una función continua $a_x(t)$ también lo es y los segmentos horizontales tienen conexiones pronunciadas. Además, los ángulos afilados de $v_x(t)$ están redondeados. Sin embargo, las curvas mostradas constituyen excelentes aproximaciones si la fuerza cambia de $+F_m$ a $-F_m$ en un intervalo muy breve.

denomina *frecuencia* f el número de ciclos por unidad de tiempo. La frecuencia y el periodo son recíprocos entre sí.

$$f = 1/T. \tag{17-1}$$

El periodo se mide en unidades de tiempo (segundos por ejemplo) y la frecuencia en hertz (Hz)*, unidad del SI, donde 1 Hz = 1 ciclo/s. Por ejemplo, una oscilación con un periodo de $T = 5$ s tiene una frecuencia $f = 0.2$ Hz.

Hasta ahora hemos empleado una descripción dinámica de la oscilación. A menudo es útil hacerla en función de la energía. La figura 17-1*c* ilustra la energía potencial correspondiente a la fuerza de la figura 17-1*b*. Nótese que, según indica la expresión $F = -dU/dx$, el negativo de la pendiente $U(x)$ nos da la fuerza. La energía mecánica $E = K + U$ permanece constante en un sistema aislado. En todos los puntos la diferencia $E - U$ da la energía cinética K allí. Si ampliáramos la gráfica para abarcar desplazamientos bastante grandes, llegaríamos finalmente a lugares donde $E = U$ y, por tanto, $K = 0$. En esos puntos, como se aprecia en la figura 17-2, la velocidad es cero y la posición es $x = \pm x_m$. A estos puntos se les llama *puntos de retorno* del movimiento.

Las figuras 17-1*b* y 17-1*c* presentan gráficamente dos formas equivalentes de describir las condiciones de la oscilación: la fuerza siempre debe intervenir para restablecer el equilibrio de la partícula, y la energía potencial debe tener un mínimo en dicha posición.

Siempre es agradable trabajar en el caso de la aceleración constante, porque las operaciones matemáticas son simples pero rara vez ofrecen una descripción exacta de la naturaleza. En la figura 17-3*a* vemos un ejemplo de una fuerza más realista capaz de causar movimiento oscilatorio. Produce el enlace en las moléculas que contienen dos átomos. Aumenta rápidamente cuando tratamos de acercarlos; este componente repulsivo evita que la molécula se colapse. Al intentar empujarlos a espaciamientos más amplios, la fuerza tiende a oponerse a nuestros esfuerzos; puede ser una fuerza electrostática entre dos cargas eléctricas contrarias, pero a menudo es más compleja e incluye la distribución espacial de órbitas electrónicas en átomos.

La figura 17-3*b* muestra la función $U(x)$ correspondiente de la energía potencial. Nótese que, igual que en la figura 17-1, la fuerza cambia de signo en la posición de equilibrio y que la energía potencial tiene un mínimo en esta posición. Nótese también que en este caso los puntos de retorno (designados x_1 y x_2 en la figura 17-3) *no* están situados simétricamente alrededor de la posición de equilibrio. Si quisiéramos estirar un poco la molécula más allá de su configuración de equilibrio y soltarla después (lo cual ocurre a menudo cuando una molécula absorbe radiación infrarroja), efectuaría un movimiento periódico alrededor del equilibrio, aunque la descripción matemática sería más compleja que la de la figura 17-2. El estudio de

*La unidad de frecuencia se llama así en honor de Heinrich Hertz (1857-1894), cuya investigación proporcionó la confirmación experimental de las ondas electromagnéticas.

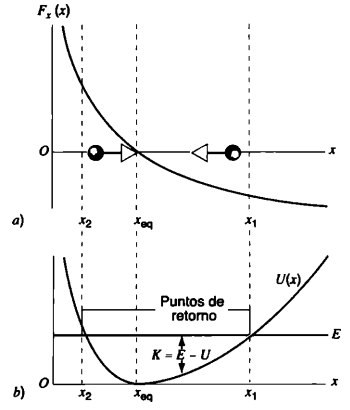


FIGURA 17-3. *a)* Fuerza que opera sobre una partícula oscilando entre los límites x_1 y x_2. Nótese que tiende siempre a empujarla hacia su posición de equilibrio, como en la figura 17-1. Esta fuerza podría actuar sobre un átomo en una molécula. *b)* Energía potencial correspondiente a ella.

estas oscilaciones es un método importante para descubrir la estructura molecular, como veremos en la sección 17-9.

17-2 EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Es más fácil analizar el movimiento de una partícula en un sistema complejo —como un átomo en la molécula vibrante explicado en la sección anterior—, si suponemos que el movimiento es una superposición de oscilaciones *armónicas* que pueden describirse a partir de las funciones seno y coseno.

Pongamos el caso de un sistema oscilatorio en una dimensión, constituido por una partícula sujeta a una fuerza

$$F_x(x) = -kx, \qquad (17\text{-}2)$$

donde k es una constante y x es el desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio. A este sistema oscilatorio se le denomina *oscilador armónico simple* y a su *movimiento armónico simple*. La energía potencial correspondiente a esta fuerza es

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \qquad (17\text{-}3)$$

Por supuesto, la fuerza y la energía potencial están relacionadas mediante $F_x(x) = -\,dU/dx$. Como se indica en la ecuación 17-2 y se grafica en la figura 17-4*a*, la fuerza que opera sobre la partícula es directamente proporcional al desplazamiento pero sigue una dirección opuesta. La ecuación 17-3 indica que la energía potencial varía como el cuadrado del desplazamiento, según se describe en la curva parabólica de la figura 17-4*b*.

El lector reconocerá las ecuaciones 17-2 y 17-3 como la expresión de la fuerza y de la energía potencial de un resorte

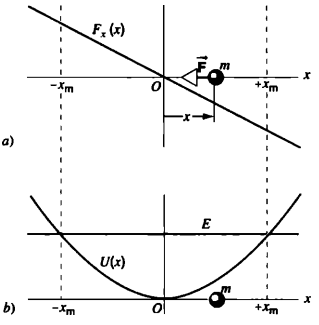


FIGURA 17-4. *a)* Fuerza y *b)* energía potencial correspondiente de un oscilador armónico simple. Nótense las semejanzas y las diferencias con la figura 17-3.

"ideal" de constante de fuerza k, comprimido o extendido por una distancia x (véase Secc. 11-4). Por tanto, *un cuerpo de masa m sujeto a un resorte ideal de fuerza constante k y que pueda moverse libremente en una superficie horizontal sin fricción constituye un ejemplo de oscilador armónico simple* (véase Fig. 17-5). Nótese que hay una posición (la de equilibrio; Fig. 17-5*b*) donde el resorte no ejerce fuerza alguna sobre el cuerpo. Si desplazamos este último a la derecha (como en la figura 17-5*a*), la

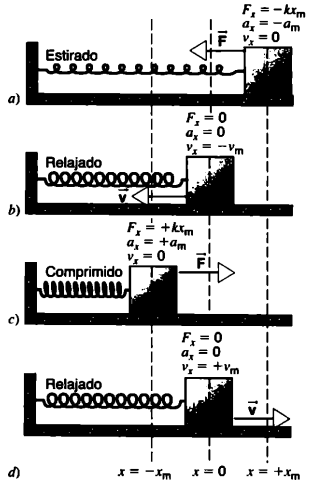


FIGURA 17-5. Oscilador armónico simple, compuesto por un resorte que actúa sobre un cuerpo que se desliza por una superficie horizontal sin fricción. En *a)* el resorte está estirado de modo que el cuerpo alcanza su máximo desplazamiento desde el equilibrio. En *c)* está completamente comprimido. En *b)* y en *d)* el cuerpo pasa por el equilibrio con su máxima velocidad, y el resorte está relajado.

fuerza ejercida por resorte sobre el cuerpo apunta a la izquierda. Si el cuerpo se mueve a la izquierda (como en la figura 17-5*c*), apuntará a la derecha. En ambos casos se trata de una fuerza *restauradora*. (En este caso es una fuerza restauradora *lineal*, es decir, proporcional a la primera potencia de x.)

Apliquemos la segunda ley de Newton, $\Sigma F_x = ma_x$, al movimiento de la figura 17-5. En ΣF_x sustituimos $-kx$ y en la aceleración a_x ponemos d^2x/dt^2 ($= dv_x/dt$). Esto nos da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (17\text{-}4)$$

A la ecuación 17-4 se le llama *ecuación de movimiento* del oscilador armónico simple. Su solución, que explicaremos en la siguiente sección, es una función $x(t)$ que describe la posición del oscilador en función del tiempo, en analogía con la figura 17-2*a*, que representa la variación de la posición con el tiempo de otro oscilador.

El problema del oscilador armónico simple es importante por dos razones. Primero, muchos problemas en que intervienen vibraciones mecánicas en pequeñas amplitudes se reducen a este oscilador o a una combinación de ellos. Esto equivale a decir lo siguiente: si por ejemplo consideramos una parte pequeña suficiente de una curva de la fuerza restauradora cerca de la posición de equilibrio (Fig. 17-3*a*), se aproxima arbitrariamente a una recta que caracteriza al movimiento armónico simple como se ve en la figura 17-4*a*. O, en otras palabras, la energía potencial de la figura 17-3*b* es casi parabólica cerca de la posición de equilibrio.

Segundo, como ya señalamos, algunas ecuaciones como la 17-4 ocurren en muchos problemas físicos en acústica, óptica, mecánica, circuitos eléctricos y hasta en física atómica. El oscilador armónico simple presenta características comunes a muchos sistemas físicos.

17-3 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Resolvamos a continuación la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (17\text{-}4)$$

Obtuvimos la ecuación anterior para una fuerza de resorte $F_x = -kx$ (donde la constante de fuerza k es una medida de la rigidez del resorte) que actúa sobre una partícula de masa m. Más adelante veremos que otros sistemas oscilatorios se rigen por ecuaciones similares del movimiento. Podemos utilizar como prototipo el sistema oscilatorio de masa-resorte.

La ecuación 17-4 incluye una relación entre una función del tiempo $x(t)$ y su segunda derivada temporal d^2x/dt^2. Deseamos encontrar una función $x(t)$ que satisfaga esta relación. Comenzamos reescribiendo la ecuación 17-4 así

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \qquad (17\text{-}5)$$

La ecuación 17-5 requiere que $x(t)$ sea un función cuya segunda derivada sea negativa de la función, exceptuado un factor constante k/m. Sabemos por el cálculo que las funciones seno y coseno poseen esa propiedad. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega \operatorname{sen}\omega t$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t = \frac{d}{dt}(-\omega \operatorname{sen}\omega t) = -\omega^2 \operatorname{sen}\omega t.$$

La segunda derivada de un coseno (o de un seno) nos devuelve la función original multiplicada por un factor negativo $-\omega^2$. Esta propiedad no se ve afectada si multiplicamos la función coseno por una constante cualquiera. Decidimos que la constante sea x_m, de modo que el valor máximo de x (la amplitud del movimiento) será x_m.

Escribimos una solución provisional a la ecuación 17-5 como

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi). \qquad (17\text{-}6)$$

Aquí, como

$$\begin{aligned} x_m \cos(\omega t + \phi) &= x_m \cos\phi \cos\omega t - x_m \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\omega t \\ &= A\cos\omega t + B \operatorname{sen}\omega t, \end{aligned}$$

donde $A = x_m \cos\phi$ y $B = -x_m \operatorname{sen}\phi$, la constante ϕ admite cualquier combinación de soluciones seno y coseno.

Con las constante (todavía) desconocidas x_m, ω y ϕ, hemos escrito una solución lo más general posible a la ecuación 17-5. Para determinar estas constantes tales que la ecuación 17-6 sea en realidad la solución de la ecuación 17-5, diferenciamos dos veces la ecuación 17-6 respecto al tiempo. Tenemos entonces

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Introduciendo esto en la ecuación 17-5, obtenemos

$$-\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m}x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Por tanto, si elegimos la constante ω tal que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \qquad (17\text{-}7)$$

la ecuación 17-6 es de hecho una solución de la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

Las constantes x_m y ϕ siguen indeterminadas y, por tanto, todavía son arbitrarias por completo. Ello significa que *cualquier* elección de x_m y ϕ satisfará la ecuación 17-5, de modo que en el oscilador es posible una gran variedad de movimientos (todos con la misma ω. Más adelante veremos

que x_m y ϕ se determinan para un movimiento armónico por la forma en que comienza el movimiento.

Ahora vamos a determinar la importancia física de la constante ω. Si aumentamos el tiempo t en la ecuación 17-6 en $2\pi/\omega$, la función se convierte en

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos [\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi] \\ &= x_m \cos (\omega t + 2\pi + \phi) \\ &= x_m \cos (\omega(t + \phi) \end{aligned}$$

Es decir, la función simplemente se repite a sí misma tras un tiempo $2\pi/\omega$. En consecuencia, $2\pi/\omega$ es el periodo del movimiento T. Dado que $\omega^2 = k/m$, tenemos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (17\text{-}8)$$

Por tanto, todos los movimientos de la ecuación 17-5 tienen el mismo periodo de oscilación, la cual se determina sólo por la masa m de la partícula oscilatoria y por la constante de fuerza k del resorte. La frecuencia f del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo y está dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (17\text{-}9)$$

por tanto,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \qquad (17\text{-}10)$$

La magnitud ω es la *frecuencia angular*; difiere de la frecuencia f por un factor 2π. Tiene la dimensión del tiempo recíproco (el mismo que la rapidez angular) y su unidad es el radián/segundo. En la sección 17-6 damos una interpretación geométrica a esta frecuencia.

La constante x_m tiene un significado físico simple. La función coseno adopta valores de -1 a $+1$. Así pues, el desplazamiento x respecto a la posición central de equilibrio $x = 0$ tiene un valor máximo de x_m; (véase Ec. 17-6). A x_m la llamamos *amplitud* del movimiento. Puesto que x_m no se fija por medio de la ecuación 17-4, son posibles movimientos de diversa amplitud, pero todos tienen la misma frecuencia y periodo. *La frecuencia del movimiento armónico simple no depende de su amplitud.*

A la magnitud $(\omega t + \phi)$ se le conoce como *fase* del movimiento. La constante ϕ recibe el nombre de *constante de fase*. Dos movimientos pueden tener la misma amplitud y frecuencia y una fase distinta. Por ejemplo, si $\phi = -\pi/2 = -90°$

$$\begin{aligned} x = x_m \cos (\omega t + \phi) &= x_m \cos (\omega t - 90°) \\ &= x_m \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

así que el desplazamiento es cero en el tiempo $t = 0$. En cambio, si $\phi = 0$, el desplazamiento $x = x_m \cos \omega t$ tiene su valor máximo en el tiempo $t = 0$. Otros desplazamientos iniciales corresponden a otras constantes de fase. En el problema 17-3 se da un ejemplo del método con que se calculan x_m y ϕ a partir del desplazamiento y la velocidad iniciales.

La amplitud x_m y la constate de fase ϕ de la oscilación dependen de la posición y de la velocidad iniciales de la partícula. Ambas variables especificarán x_m y ϕ exactamente (salvo que ϕ sí puede aumentar o disminuir con cualquier múltiplo de 2π, sin cambiar el movimiento). No obstante, una vez iniciado el movimiento, la partícula continuará oscilando con una amplitud y fase constantes a una frecuencia fija, a menos que otras fuerzas perturben el sistema.

En la figura 17-6 graficamos el desplazamiento x en función del tiempo t con varios movimientos armónicos simples descritos en la figura 17-6. Se realizan tres comparaciones. En la figura 17-6*a*, las dos curvas tienen la misma amplitud y frecuencia, pero su fase difiere en $\phi = \pi/4$ o en 45°. En la figura 17-6*b*, las dos curvas tienen la misma constante de fase y frecuencia, pero su amplitud es diferente en un factor de 2. En la figura 17-6*c*, tienen la misma amplitud y constante de fase, pero su frecuencia varía por un factor de $\frac{1}{2}$ o su periodo por un factor de 2. Estudie atentamente estas curvas y así se familiarizará con la terminología que se emplea en el movimiento armónico simple.

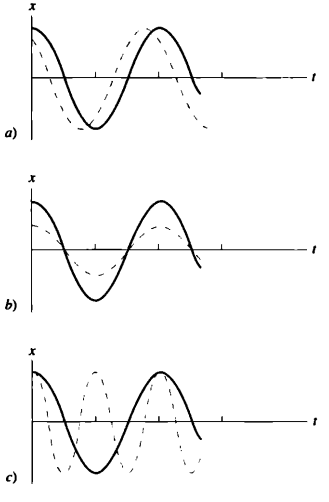


FIGURA 17-6. *a*) Comparación de los movimientos de dos osciladores armónicos simples de la misma amplitud y frecuencia, pero cuya constante de fase difiere en 45°. Si representamos el movimiento con la ecuación 17-6, la curva continua tiene $\phi = 0°$ y la curva punteada tiene $\phi = 45°$. *b*) Dos movimientos armónicos simples de la misma constante de fase y frecuencia, pero con diferente amplitud por un factor de 2. *c*) Dos movimientos armónicos simples de la misma amplitud y constante de fase (0°), pero de distinta frecuencia por un factor de 2. La curva continua tiene el doble del *periodo*, y por lo mismo la mitad de la *frecuencia*, de la curva punteada.

Otra característica distintiva del movimiento armónico simple es la relación existente entre el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula oscilante. Comparemos estas magnitudes. En la figura 17-7 graficamos por separado el desplazamiento x en función del tiempo t, la velocidad $v_x = dx/dt$ en función del tiempo t y la aceleración $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$ también en función del tiempo t. Las ecuaciones de estas curvas son

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \qquad (17\text{-}11)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

En el caso graficado hemos supuesto que $\phi = 0$. Las unidades y la escala de desplazamiento, velocidad y aceleración se omitieron para facilitar la comparación. Las tres oscilan de un modo armónico. Nótese que el desplazamiento máximo (amplitud) es x_m, que la rapidez máxima (amplitud de velocidad) es ωx_m y que la aceleración máxima (amplitud de aceleración) es $\omega^2 x_m$.

Cuando el desplazamiento alcanza su máximo en ambas direcciones, la rapidez es cero porque ahora la velocidad debe cambiar de dirección. En este instante la aceleración, como la fuerza de restauración, presenta su máxima magnitud pero sigue una dirección contraria al desplazamiento. Cuando el desplazamiento es cero, la rapidez de la partícula alcanza su nivel máximo y la aceleración es cero, correspondiente a cero fuerza de restauración. La rapidez crece para acercar la partícula a la posición de equilibrio, y luego disminuye conforme se aleja del desplazamiento máximo. Compare la figura 17-7 con la figura 17-2 y notará más diferencias y semejanzas.

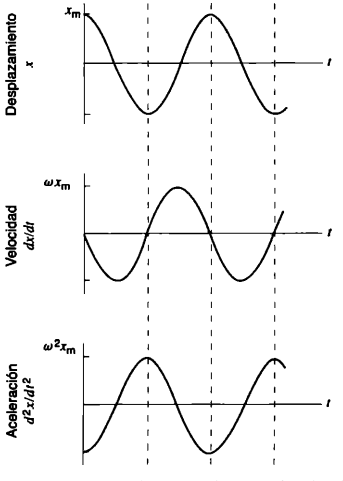


FIGURA 17-7. Desplazamiento, velocidad y aceleración de un oscilador armónico simple, según las ecuaciones 17-11.

PROBLEMA RESUELTO 17-1. Un resorte cuelga verticalmente. Cuando un cuerpo de masa $M = 1.65$ kg se suspende de él, su longitud aumenta 7.33 cm. Después se monta el resorte horizontalmente y se sujeta a él un bloque de masa $m = 2.43$ kg. El bloque puede deslizarse libremente por una superficie horizontal sin fricción, como se ve en la figura 17-5. *a*) ¿Cuál es la constante de fuerza k del resorte? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza horizontal necesaria para estirarlo una distancia de 11.6 cm? *c*) Cuando se desplaza una distancia de 11.6 cm y se libera, ¿con qué periodo oscilará?

Solución *a*) La constante de fuerza k se determina a partir de la fuerza Mg necesaria para estirar el resorte el desplazamiento vertical medido $y = -7.33$ cm. Cuando el cuerpo suspendido cuelga en reposo $\Sigma F_y = 0$; el componente y de la fuerza neta en el cuerpo es $\Sigma F_y = -ky - Mg$ así que $ky = -Mg$, esto es

$$k = -Mg/y = -(1.65\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)/(-0.0733\text{ m})$$
$$= 221\text{ N/m})$$

b) La magnitud de la fuerza horizontal necesaria para alargar el resorte 11.6 cm se determina mediante la ley de Hooke (Ec. 17-2), usando para ello la constante de fuerza que encontramos en la parte *a*):

$$F = kx = (221\text{ N/m})(0.116\text{ m}) = 25.6\text{ N}.$$

c) El periodo no depende de la amplitud, sino tan sólo de los valores de la masa del bloque y de la constante de fuerza que se da en la ecuación 17-8,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.43\text{ kg}}{221\text{ N/m}}} = 0.6589\text{ s} = 659\text{ ms}.$$

(Expresamos el valor de T con cuatro cifras significativas, más de las que requieren los datos de entrada, porque necesitaremos este resultado al solucionar el problema resuelto 17-2. Para evitar los errores de redondeo en los pasos intermedios, se acostumbra acarrear así el exceso de cifras significativas. Naturalmente, el resultado final ha de redondearse en forma correcta.)

17-4 ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En cualquier movimiento donde no intervengan fuerzas disipativas, la energía mecánica total E ($K + U$) se conserva (permanece constante). Ahora podemos estudiar esto más a fondo en el caso especial del movimiento armónico simple.

La energía potencial U en cualquier instante está dada por

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \qquad (17\text{-}12)$$

donde hemos usado la ecuación 17-6 para el desplazamiento x. Así, la energía potencial oscila con el tiempo y presenta un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento, fluctúa entre cero y este valor, como indican las curvas de las figuras 17-8*a* y 17-8*b*.

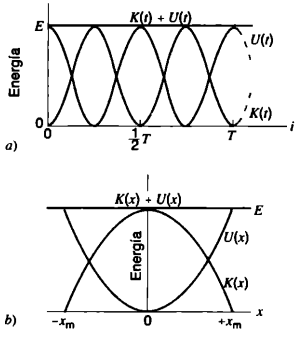


FIGURA 17-8. La energía potencial U, la energía cinética K y la energía mecánica total E de una partícula que experimenta movimiento armónico simple (con $\phi = 0$) se muestran en función de *a*) el tiempo y *b*) el desplazamiento. Nótese que en *a*) las energías cinética y potencial alcanzan su máximo dos veces durante cada periodo del movimiento. Véase también la figura 12-5.

La energía cinética K en cualquier momento es $\frac{1}{2}mv_x^2$. Si empleamos la ecuación 17-11 para $v_x(t)$ y la ecuación 17-7 para ω^2, obtendremos

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}mv_x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{17-13}$$

La energía cinética, como la potencial, oscila con el tiempo y alcanza un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento fluctúa entre este valor y cero, según se observa en las curvas de las figuras 17-8*a* y 17-8*b*. Nótese que las energías cinética y potencial varían con el doble de la frecuencia (mitad del periodo) del desplazamiento y de la velocidad. ¿Puede explicarlo?

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y de la energía potencial. Al utilizar las ecuaciones 17-12 y 17-13 obtenemos

$$\begin{aligned} E &= K + U = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2. \end{aligned} \tag{17-14}$$

Vemos que la energía mecánica total es constante, como cabía suponer, y que su valor es $\frac{1}{2}kx_m^2$. En el desplazamiento máximo la energía cinética es cero, pero la potencial tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En la posición de equilibrio esta última es cero, mientras que la energía cinética tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En otras posiciones, las energías cinética y potencial aportan términos cuya suma siempre es $\frac{1}{2}kx_m^2$. Esta energía constante total de una partícula que ejecuta movimientos armónicos simples es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. Podemos demostrar (problema 14) que la energía cinética promedio del movimiento durante un periodo equivale exactamente a la energía potencial promedio y que cada una de estas magnitudes promedio es la mitad de la energía total, es decir, $\frac{1}{4}kx_m^2$.

La ecuación 17-14 puede expresarse en forma general como

$$K + U = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2. \tag{17-15}$$

De esta relación obtenemos $v_x^2 = (k/m)(x_m^2 - x^2)$ o

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)}. \tag{17-16}$$

Esta relación muestra claramente que la velocidad es un máximo en la posición de equilibrio ($x = 0$) y es cero en el extremo ($x = \pm x_m$). De hecho, podemos empezar por la conservación de la energía, ecuación 17-15 (donde $\frac{1}{2}kx_m^2 = E$) y mediante la integración de la ecuación 17-16 obtenemos el desplazamiento como una función del tiempo, como lo hicimos anteriormente en la sección 12-5, donde obtuvimos un resultado igual a la ecuación 17-6 con $\phi = 0$.

PROBLEMA RESUELTO 17-2. La combinación de masa-resorte en el problema 17-1 se estira en la dirección positiva x por una distancia de 11.6 cm a partir de equilibrio y luego se suelta. *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en el sistema? *b*) ¿Qué rapidez máxima alcanza el bloque? *c*) ¿Cuál es la magnitud de la rapidez máxima del bloque? *d*) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima? *e*) Si el bloque se libera en $t = 0$, ¿qué posición, velocidad y aceleración tiene en $t = 0.215$ s?

Solución *a*) La amplitud del movimiento se da como $x_m = 0.116$ m. La energía total está dada en la ecuación 17-14:

$$E = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}(221\ \text{N/m})(0.116\ \text{m})^2 = 1.49\ \text{J}.$$

b) La energía cinética máxima es numéricamente igual a la energía total; cuando $U = 0$, $K = K_{máx} = E$. Así pues, la rapidez máxima será

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2K_{máx}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.49\ \text{J})}{2.43\ \text{kg}}} = 1.11\ \text{m/s}.$$

c) La aceleración máxima ocurre en el preciso instante de la liberación, cuando la fuerza alcanza su nivel más alto:

$$a_{máx} = \frac{F_{máx}}{m} = \frac{kx_m}{m} = \frac{(221\ \text{N/m})(0.116\ \text{m})}{2.43\ \text{kg}} = 10.6\ \text{m/s}^2.$$

d) Basándonos en el periodo encontrado en el problema resuelto 17-1, podemos calcular la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.6589\ \text{s}} = 9.536\ \text{rad/s}.$$

Dado que el bloque presenta su desplazamiento máximo de $x_m = 0.116$ m en $t = 0$, su movimiento puede describirse mediante una función coseno:

$$x(t) = x_m \cos \omega t,$$

resultado que se obtiene poniendo $\phi = 0$ en la ecuación 17-6. En $t = 0.215$ s encontramos

$$x = (0.116\ \text{m}) \cos (9.536\ \text{rad/s})(0.215\ \text{s}) = -0.0535\ \text{m}.$$

Nótese que el ángulo ωt, cuyo coseno debemos obtener, se expresa en radianes. La velocidad está dada por la ecuación 17-11, que con $\phi = 0$ se convierte en $\omega x(t) = -\omega x_m \operatorname{sen} \omega t$. En 0.215 s obtenemos

$$v_x = -(9.536\ \text{rad/s})(0.116\ \text{m}) \operatorname{sen} (9.536\ \text{rad/s})(0.215\ \text{s})$$

$$x = -0.981\ \text{m/s}.$$

Para calcular la aceleración volvemos a emplear la ecuación 17-11, y observamos que siempre $a_x = -\omega^2 x$:

$$a_x = -(9.536 \text{ rads})^2(-0.0535 \text{ m}) = +4.87 \text{ m/s}^2.$$

Examinemos ahora los resultados anteriores para ver si son razonables. El tiempo $t = 0.215$ s se halla entre $T/4 = 0.165$ s y $T/2 = 0.330$ s. Si el bloque comienza en $x = x_m = +0.116$ m, en $T/4$ pasa por el equilibrio, y es muy razonable que en $t = 0.215$ s se encuentre en una coordenada negativa x, como hemos comprobado. Como en ese momento se dirige hacia $x = -x_m$, su velocidad será negativa, como también lo hemos comprobado. Pero ya cruzó el punto de la velocidad más negativa y disminuye su velocidad al acercarse a $x = -x$; por tanto, la aceleración ha de ser positiva. Podemos verificar el valor de la aceleración por medio de $a_x = kx/m$. Lo mismo podemos hacer con la relación entre v_x y x utilizando la ecuación 17-16.

PROBLEMA RESUELTO 17-3. El bloque del sistema bloque-resorte del problema resuelto 17-1 es empujado del equilibrio en la dirección positiva x por una fuerza externa. En $t = 0$, cuando el desplazamiento del bloque es $x = +0.0624$ m y su velocidad es $v_x = +0.847$ m/s, la fuerza externa se elimina y el bloque empieza a oscilar. Escriba una ecuación para $x(t)$ durante la oscilación.

Solución Como tenemos la misma masa (2.43 kg) y constante de fuerza (221 N/m), la frecuencia angular sigue siendo 9.536 rad/s, como descubrimos en el problema resuelto 17-2. La ecuación más general para $x(t)$ está dada por la ecuación 17-6:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

y debemos encontrar x_m y ϕ para completar la solución. Si queremos encontrar x_m, calculamos la energía total, que en $t = 0$ tiene términos cinéticos y potenciales:

$$\begin{aligned} E = K + U &= \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2.43 \text{ kg})(0.847 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(221 \text{ N/m})(0.0624 \text{ m})^2 \\ &= 0.872 \text{ J} + 0.430 \text{ J} = 1.302 \text{ J}. \end{aligned}$$

Al hacer esto igual a $\frac{1}{2}kx_m^2$, como lo exige la ecuación 17-15, tenemos

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.302 \text{ J})}{221 \text{ N/m}}} = 0.1085 \text{ m}.$$

Para encontrar la constante de fase utilizamos la información dada en $t = 0$:

$$x(0) = x_m \cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{x(0)}{x_m} = \frac{+0.0624 \text{ m}}{0.1085 \text{ m}} = +0.5751.$$

En el intervalo de 0 a 2π hay dos valores de ϕ cuyo coseno es $+0.5751$; los valores posibles son $\phi = 54.9°$ o $\phi = 305.1°$. Cualquiera de los dos cumplirá la condición de que $x(0)$ tenga el valor apropiado, pero sólo uno dará la velocidad inicial correcta:

$$\begin{aligned} v_x(0) = -\omega x_m \operatorname{sen}\phi &= -(9.536 \text{ rad/s})(0.1085 \text{ m}) \operatorname{sen}\phi \\ &= -(1.035 \text{ m/s}) \operatorname{sen}\phi \\ &= -0.847 \text{ m/s} \quad \text{para } \phi = 54.9° \\ &= +0.847 \text{ m/s} \quad \text{para } \phi = 305.1°. \end{aligned}$$

Claro que la segunda opción es la que deseamos y por eso tomamos $\phi = 305.1° = 5.33$ radianes. Ahora podemos escribir

$$x(t) = (0.109 \text{ m}) \cos[(9.54 \text{ rad/s})t + 5.33 \text{ rad}].$$

En el problema 9 se muestra cómo obtener las relaciones generales que permiten calcular x_m y ϕ partiendo de $x(0)$ y $v_x(0)$.

17-5 APLICACIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

A continuación examinaremos algunos sistemas físicos que se desplazan con un movimiento armónico simple. Otros se mencionan a lo largo del libro.*

El oscilador torsional

En la figura 17-9 se ve un disco suspendido de un alambre conectado a su centro de masa. El alambre está firmemente sujeto a un soporte sólido o tornillo y al disco. Con el disco en equilibrio, se traza una línea radial del centro a un punto P de su borde, como se aprecia en la figura. El alambre se tuerce si se gira el disco en un plano horizontal (xy) de manera que la línea de referencia OP se dirija a la posición OQ. Entonces el alambre ejercerá una torca restauradora sobre el disco y tenderá a devolver la línea de referencia a su posición de equilibrio. En pequeñas torsiones se observa que la torca restauradora es proporcional al desplazamiento angular (ley de Hooke), de modo que

$$\tau_z = -\kappa\theta. \tag{17-17}$$

Aquí κ (letra griega kappa) es una constante que depende de las propiedades del alambre y se le conoce como constante *torsional*. El signo de menos muestra que el par sigue una direc-

*Consúltese en "A Repertoire of S. H. M." de Eli Maor, *The Physics Teacher*, octubre de 1972, p. 377, una explicación exhaustiva sobre 16 sistemas físicos que presentan movimiento armónico simple.

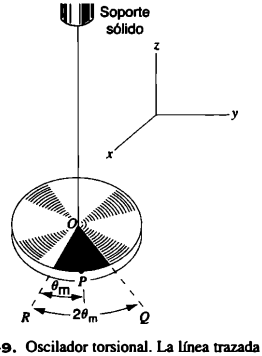


FIGURA 17-9. Oscilador torsional. La línea trazada de O a P oscila entre OQ y OR, describiendo un ángulo $2\theta_m$, donde θ_m es la amplitud angular del movimiento. La oscilación tiene lugar en el plano xy; el eje z recorre el alambre.

ción contraria al desplazamiento angular θ. La ecuación 17-17 es la condición del *movimiento armónico angular simple.*

La ecuación del movimiento en este sistema se basa en la forma angular de la segunda ley de Newton,

$$\sum \tau_z = I\alpha_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \qquad (17\text{-}18)$$

donde I es la inercia rotacional del disco alrededor del eje z. Usando la ecuación 17-17 obtenemos

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta. \qquad (17\text{-}19)$$

Nótese la semejanza entre la ecuación 17-19 relativa al movimiento armónico angular simple y la ecuación 17-5 relativa al movimiento armónico lineal simple. De hecho, las ecuaciones son idénticas desde el punto de vista matemático. Igual que en el Capítulo 8, podemos sustituir simplemente el desplazamiento lineal x por el angular θ, la masa m por la inercia rotacional I y la constante de fuerza k por la constante torsional κ. Al hacer estas sustituciones descubrimos que la solución de la ecuación 17-19 es una oscilación armónica simple en la coordenada angular θ, a saber:

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi), \qquad (17\text{-}20)$$

Aquí θ_m es el desplazamiento angular máximo, es decir, la amplitud de la oscilación angular. Nótese que en este caso ω denota la frecuencia angular, no la velocidad angular. En la ecuación 17-20, $\omega \neq d\theta/dt$.

En la figura 17-9, el disco oscila alrededor de la posición de equilibrio $\theta = 0$ y el intervalo angular total es $2\theta_m$ (de OQ a OR). Por analogía con la ecuación 17-8 el periodo de oscilación es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \qquad (17\text{-}21)$$

Si se conoce κ y si se mide T, puede determinarse la inercia rotacional I alrededor del eje de rotación de un cuerpo rígido oscilante. Si se conoce I y si se mide T, puede determinarse la constante torsional κ de cualquier muestra de alambre.

El oscilador torsional como el de la figura 17-9 recibe también el nombre de *péndulo torsional.* La balanza de Cavendish, con que se mide la constante de fuerza gravitacional G (Capítulo 14), es un péndulo torsional. Igual que el péndulo simple (que estudiamos en el siguiente apartado), el péndulo torsional se emplea a menudo para medir el tiempo; un ejemplo común es el volante de un reloj mecánico en el que la torca restauradora lo aporta un resorte espiral.

El péndulo simple

Éste es un cuerpo idealizado que consta de una partícula suspendida de una cuerda ligera e inextensible. Cuando se empuja a un lado de su posición de equilibrio y se suelta, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad. El movimiento es periódico y oscilatorio. Queremos determinar el periodo del movimiento.

La figura 17-10 muestra un péndulo de longitud L y una partícula de masa m. En el instante indicado, la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre m son el peso $m\vec{g}$ y la tensión $\vec{T}$ en la cuerda. El movimiento se producirá a lo largo de un arco del círculo con radio L, así que escogemos ejes tangentes al círculo y a lo largo del radio. El peso $m\vec{g}$ se separa en el componente radial de magnitud $mg\cos\theta$ en un componente tangencial de magnitud $\operatorname{sen}\theta$. Los componentes radiales de las fuerzas generan la aceleración centrípeta necesaria para mantener la partícula moviéndose en arco circular. El componente tangencial es la fuerza restauradora que opera sobre m y tiende a restablecerla en equilibrio. Por tanto, la fuerza de restauración es

$$F_x = -mg \operatorname{sen}\theta, \qquad (17\text{-}22)$$

el signo de menos indica que F_x es contraria a la dirección de x creciente y de θ creciente.

Nótese que la fuerza de restauración no es proporcional al desplazamiento angular θ, sino a sen θ. Así pues, el movimiento resultante es armónico simple. Pero si el ángulo θ es pequeño, sen θ es casi igual a θ en radianes. Por ejemplo, si $\theta = 5°$ (= 0.0873 rad), entonces sen $\theta = 0.0872$, que difiere de θ apenas en 0.1% aproximadamente. Entonces el desplazamiento x es más o menos igual a la longitud del arco $L\theta$ y en ángulos pequeños es un movimiento casi de línea recta. En consecuencia, suponiendo que sen $\theta \approx \theta$ obtenemos

$$F_x = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x. \qquad (17\text{-}23)$$

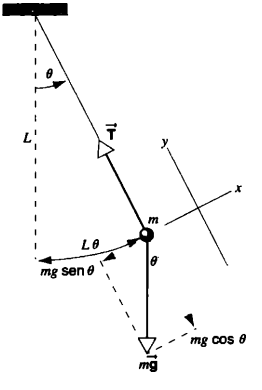


FIGURA 17-10. Péndulo simple. Las fuerzas que actúan sobre él son la tensión $\vec{T}$ y la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ que se separan en sus componentes radial y tangencial. Decidimos que el eje x siga la dirección tangencial y el eje y la dirección radial en este momento particular.

En *desplazamientos pequeños*, la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento y sigue dirección opuesta. Éste es exactamente el criterio del movimiento armónico simple; de hecho, la ecuación 17-23 presenta la misma forma que la ecuación 17-2, $F_x = -kx$, y la constante mg/L representa la constante k. (Verifique que las dimensiones de k y mg/L sean iguales.) Así, el periodo de un péndulo simple cuando su amplitud es pequeño se calcula introduciendo $k = mg/L$ en la ecuación 17-8:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

o

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (17\text{-}24)$$

Nótese que el periodo no depende de la masa de la partícula suspendida.

Cuando la amplitud de la oscilación no es pequeña, puede demostrarse que la ecuación general del periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{3^2}{2^2 4^2}\operatorname{sen}^4\frac{\theta_m}{2} + \cdots\right. \qquad (17\text{-}25)$$

Aquí θ_m es el desplazamiento angular máximo. Nótese que T se incrementa al aumentar la amplitud. Los términos sucesivos en la serie infinita se tornan cada vez más pequeños y el periodo puede calcularse con el grado deseado de exactitud tomando suficientes términos. Cuando θ_m 15°, el verdadero periodo difiere del que aparece en la ecuación 17-24 por menos de 0.5 por ciento.

En los tres últimos siglos el péndulo ha sido el cronómetro más confiable; fue apenas en el último siglo cuando lo reemplazaron los relojes basados en las oscilaciones atómicas o electrónicas. Para que un reloj de péndulo sea un buen cronómetro hay que mantener constante la amplitud de la oscilación a pesar de las pérdidas por fricción que afectan a todos los sistemas mecánicos. Hasta un cambio tan pequeño de amplitud de 5° a 4° podría hacer que un reloj de péndulo se adelante 0.25 minutos al día, margen inaceptable incluso para las tareas domésticas ordinarias. Si se quiere mantener constante la amplitud en este tipo de relojes, un mecanismo de escape que compensa las pérdidas por fricción suministra automáticamente energía en pequeños incrementos provenientes del peso o del resorte. Christiaan Huygens (1629-1695) inventó el reloj de péndulo con escape.

El péndulo simple también ofrece un método adecuado para medir el valor de g, la aceleración debida a la gravedad. Es fácil determinar L y T utilizando el equipo de laboratorio de un estudiante que ofrece una precisión de menos de 0.1% y, por tanto, la ecuación 17-24 nos permite calcular g más o menos con esa precisión. Con un mejor aparato puede obtenerse una precisión aproximada de 0.0001 por ciento.

*Esta ecuación se demuestra en muchos libros de mecánica intermedia. Véase, por ejemplo, a J.B. Marion y a K.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 3a. edición (Harcourt Brace Jovanovich, 1988), sección 3.13.

El péndulo físico

Todo cuerpo rígido montado de modo que oscile en un plano vertical alrededor de un eje que cruza por él es un *péndulo físico*. Es una generalización del péndulo simple, en que una cuerda sin peso sostiene una partícula. En realidad todos los péndulos pertenecen a esta categoría.

En la figura 17-11 un cuerpo de forma irregular gira por P alrededor de un eje horizontal sin fricción y es desplazado de la posición de equilibrio un ángulo θ. El equilibrio es la posición en que el centro de masa C del cuerpo se halla verticalmente debajo de P. La distancia del pivote al centro de masa es d, la inercia rotacional la del cuerpo alrededor del eje es I y la masa del cuerpo es M. La torca de restauración del desplazamiento angular es

$$\tau_z = -Mgd \operatorname{sen}\theta \qquad (17\text{-}26)$$

y se debe al componente tangencial del peso. Como τ_z es proporcional a sen θ y no a θ, en general aquí no se cumple la condición del movimiento armónico simple. Sin embargo, en desplazamientos angulares pequeños la relación sen $\theta \approx \theta$ constituye como antes una excelente aproximación, de modo que en amplitudes pequeñas,

$$\tau_z = -Mgd\,\theta. \qquad (17\text{-}27)$$

Ésta es la forma de la ecuación 17-17, y el periodo se deduce directamente de la ecuación 17-21 con la sustitución $\kappa = Mgd$, la cual da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \qquad (17\text{-}28)$$

La ecuación 17-28 puede resolverse para la inercia rotacional I, dándonos

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}. \qquad (17\text{-}29)$$

Las cantidades de la derecha son directamente medibles. Por tanto, la inercia rotacional alrededor del eje de rotación (que no sea el centro de masa) de un cuerpo de cualquier forma

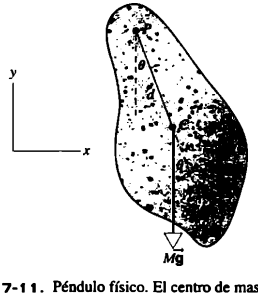


FIGURA 17-11. Péndulo físico. El centro de masa se encuentra en C y el pivote en el punto P. Se desplaza un ángulo θ de su posición de equilibrio, que ocurre cuando C cuelga directamente debajo de P. El peso $M\vec{g}$ ofrece la torca restauradora. La oscilación se da en el plano xy. El eje z está fuera de la página.

puede determinarse suspendiendo de ese eje el cuerpo como un péndulo físico.

El péndulo físico incluye el péndulo simple como un caso especial. Si colocamos el pivote lejos del objeto, usando una cuerda sin peso de longitud L, tendríamos $I = ML^2$ y $d = L$, así que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

que es el periodo de un péndulo simple.

Si la masa de un péndulo físico estuviera concentrada en la distancia correctamente escogida L, el péndulo simple resultante tendría el mismo periodo que el péndulo físico original si

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

o

$$L = \frac{I}{Md}. \tag{17-30}$$

Por tanto, en lo tocante al periodo de oscilación, puede considerarse que la masa del péndulo físico está concentrada en un punto cuya distancia del pivote es $L = I/Md$. Este punto se conoce como *centro de oscilación* del péndulo físico. Adviértase que depende de la ubicación del pivote en un cuerpo determinado. Más aún, si giramos el péndulo físico original desde este punto, tendrá el mismo periodo que cuando lo hacemos girar desde el punto P.

El centro de oscilación posee otra propiedad interesante. Si una fuerza impulsiva en el plano de oscilación actúa en el centro de oscilación, en el punto del pivote no se siente efecto alguno de ella. (En el problema 24 se ofrece una prueba de ello.) En este sentido, el centro de oscilación recibe a menudo el nombre de *centro de percusión*. Los bateadores de béisbol pueden evitar la "punzada" en las manos (el punto de pivote del bate) si golpean la pelota en el centro de percusión del bate. El punto clave de una raqueta de tenis admite una explicación similar: al golpear la pelota en él se elimina cualquier fuerza de reacción en la mano.*

PROBLEMA RESUELTO 17-4. Una varilla uniforme y delgada de masa $M = 0.112$ kg y de longitud $L = 0.096$ m cuelga de un alambre que cruza su centro y que corre perpendicularmente a su longitud. El alambre está torcido y se hace oscilar la varilla. Se descubre que el periodo es 2.14 s. Cuando un cuerpo plano en forma de un triángulo equilátero se suspende en forma parecida en su centro de masa, el periodo es de 5.83 s. Determine la inercia rotacional del triángulo alrededor de este eje.

Solución La inercia rotacional de un varilla, que se hace girar alrededor de un eje central perpendicular a su longitud, es $ML^2/12$. Por tanto,

$$I_{\text{var}} = \frac{(0.112\text{ kg})(0.096\text{ m})^2}{12} = 8.60 \times 10^{-5}\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

*Una interesante colección de artículos referentes a estos efectos se incluye en *The Physics of Sports*, revista editada por Angelo Armenti hijo (American Institute of Physics, 1992).

Conforme a la ecuación 17-21,

$$\frac{T_{\text{var}}}{T_{\text{triángulo}}} = \left(\frac{I_{\text{var}}}{I_{\text{triángulo}}}\right)^{1/2} \quad \text{o} \quad I_{\text{triángulo}} = I_{\text{var}}\left(\frac{T_{\text{triángulo}}}{T_{\text{var}}}\right)^2,$$

así que

$$I_{\text{triángulo}} = (8.60 \times 10^{-5}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{5.83\text{ s}}{2.14\text{ s}}\right)$$

¿Afecta la amplitud de ambas oscilaciones al periodo de los casos anteriores?

PROBLEMA RESUELTO 17-5. Se hace girar un disco uniforme en su borde (Fig. 17-12). Calcule su periodo en oscilaciones pequeñas y la longitud del péndulo simple equivalente.

Solución La inercia rotacional de un disco alrededor de un eje que cruza por su centro es $\frac{1}{2}MR^2$, donde R es el radio y M la masa del disco. Si empleamos el teorema de ejes paralelos, la inercia rotacional alrededor del pivote en el borde es

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \tfrac{3}{2}MR^2.$$

Así pues, el periodo de este péndulo físico, obtenido de la ecuación 17-28 cuando $d = R$, será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}},$$

independiente de la masa del disco.

El péndulo simple con el mismo periodo tiene una longitud (Ec. 17-30)

$$L = \frac{I}{MR} = \tfrac{3}{2}R$$

es decir, tres cuartas partes del diámetro del disco. Por tanto, el centro de oscilación del disco que se hace girar en P se halla en O, una distancia $\frac{3}{2}R$ por debajo del punto de apoyo. ¿Se requiere determinada masa del péndulo simple equivalente?

Si giramos el disco en un punto intermedio entre el borde y el centro —en O, por ejemplo—, descubriremos que $I = \frac{1}{2}MR^2 + M(\frac{1}{2}R)^2 = \frac{3}{4}MR^2$ y $d = \frac{1}{2}R$. El periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}MR^2}{Mg(R/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}},$$

como antes. Esto ejemplifica la igualdad de los periodos del péndulo físico cuando se hacen girar alrededor de O y de P.

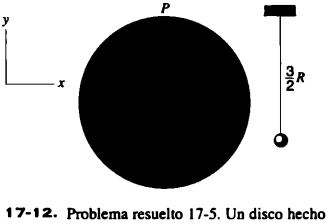


FIGURA 17-12. Problema resuelto 17-5. Un disco hecho girar en su borde (punto P) oscila como un péndulo físico. A la derecha se muestra un péndulo simple con el mismo periodo. El punto O es el centro de la oscilación.

Si el disco se hiciera girar en el centro, ¿cuál sería su periodo de oscilación?

PROBLEMA RESUELTO 17-6. El periodo de un disco de 10.2 cm de radio que efectúa oscilaciones pequeñas alrededor de un pivote en su borde se mide y se descubre que es 0.784 s. Determine el valor de g, la aceleración debida a la gravedad en ese lugar.

Solución Con base en el problema resuelto 17-5 tenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}},$$

y resolviendo para g obtenemos

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2}.$$

Con $T = 0.784$ s y $R = 0.102$ m encontramos

$$g = \frac{6\pi^2(0.102\text{ m})}{(0.784\text{ s})^2} = 9.83\text{ m/s}^2.$$

17-6 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En 1610, Galileo utilizó su telescopio recién construido para observar las lunas de Júpiter. Al verlas noche tras noche, midió su posición en relación con el planeta. Observó que siguen un movimiento hacia atrás y adelante que calificaríamos de armónico simple. La figura 17-13 muestra los datos originales de Galileo, graficados para mostrar el desplazamiento lateral de una luna (Calixto) en función del tiempo. Es evidente la dependencia senoidal que caracteriza el movimiento armónico simple.

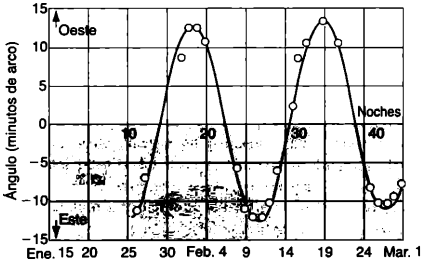


FIGURA 17-13. Posición angular en función del tiempo de la luna Calixto de Júpiter, medida desde la Tierra. Los círculos se basan en las mediciones que Galileo efectuó en 1610. La curva es el mejor ajuste e indica claramente el movimiento armónico simple. Casi 400 años después de Galileo, los movimientos de las lunas de Júpiter siguen deleitando al astrónomo aficionado. Cada mes la revista *Sky and Telescope* publica una gráfica que los muestra en función de una coordenada angular de variación senoidal parecida a esta figura.

En realidad, Calixto no oscila, sino que describe una órbita casi circular alrededor del planeta; lo que Galileo observó fue el movimiento circular uniforme en un borde plano. Esto corresponde exactamente a la relación de desplazamiento frente a tiempo del movimiento armónico simple; llegamos así a la siguiente conclusión:

El movimiento armónico simple puede describirse como la proyección del movimiento circular uniforme a lo largo deldiámetro del círculo.

Examinemos ahora con más detalle el fundamento matemático de esta conclusión. La figura 17-14 muestra una partícula P en movimiento circular uniforme; su velocidad angular es ω y el radio del círculo es r. En el tiempo t (Fig. 17-14*a*), el vector $\vec{r}$, que localiza el punto P en relación con el origen O, forma un ángulo $\omega t + \phi$ con el eje x, y el componente x de $\vec{r}$ es

$$x(t) = r\cos(\omega t + \phi). \tag{17-31}$$

Esto es naturalmente idéntico a la ecuación 17-6 en el desplazamiento del oscilador armónico simple; x_m corresponde a r. Si con P' representamos la proyección de P sobre el eje x, P' efectuará un movimiento armónico simple sobre el eje x.

En el movimiento circular uniforme, la magnitud de la rapidez tangencial constante es ωr. La figura 17-14*b* muestra el vector que representa la velocidad instantánea $\vec{v}$ en el tiempo t. El componente x de $\vec{v}$, que da la velocidad de P' a lo largo de la dirección x, es

$$v_x(t) = -\omega r\,\text{sen}(\omega t + \phi). \tag{17-32}$$

La aceleración centrípeta en el movimiento circular es $\omega^2 r$ y, como se ve en la figura 17-14*c*, el componente x de la aceleración de P es

$$a_x(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t + \phi). \tag{17-33}$$

Las ecuaciones 17-32 y 17-33 son idénticas a las ecuaciones 17-11 en el movimiento armónico simple, reemplazando otra vez x_m por r. Por eso el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son idénticos en él y en la proyección del movimiento circular.

Al invertir el argumento anterior podemos afirmar que la ecuación 17-31 referente al desplazamiento de un oscilador armónico simple basta para describir el componente x de un vector cuya punta traza una trayectoria circular con rapidez constante. Si también es posible describir el componente y, tendremos una descripción completa del vector. En la figura 17-14*a* se muestra la proyección y OQ en el tiempo t, que puede describirse mediante

$$y(t) = r\,\text{sen}(\omega t + \phi). \tag{17-34}$$

Nótese que las proyecciones del movimiento circular uniforme en la dirección y dan además un movimiento armónico simple, como una proyección a lo largo de *cualquier* dirección. Nótese asimismo que para cualquier tiempo $x^2 + y^2 = r^2$, como cabe esperar en el movimiento circular. El lector deberá ser capaz de encontrar las expresiones para los componentes y de la velocidad y de la aceleración, además de demostrar que, según lo previsto, $v_x^2 + v_y^2 = (\omega r)^2$ y $a_x^2 + a_y^2 = (\omega^2 r)^2$.

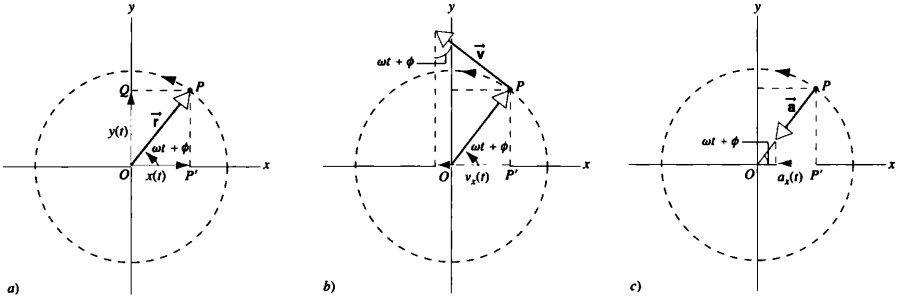


FIGURA 17-14. *a*) Alrededor de un círculo de radio r el punto P se mueve en dirección contraria a la de las manecillas del reloj con una rapidez constante. El vector $\vec{r}$ forma un ángulo $\omega t + \phi$ con el eje x. La proyección P' sobre el eje x realiza un movimiento armónico simple a medida que P se desplaza alrededor del círculo. *b*) Velocidad P y su componente x, que representa la velocidad de P' en un movimiento armónico simple. *c*) Aceleración de P y de su componente x.

Usando la identidad trigonométrica sen $\theta = \cos(\theta - \pi/2)$ podemos reescribir la ecuación 17-34 así:

$$y(t) = r\cos(\omega t + \phi - \pi/2). \qquad (17\text{-}35)$$

Así pues, el movimiento circular puede considerarse una combinación de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con idéntica amplitud y frecuencia pero con una fase que difiere en 90°. Otros movimientos más complicados pueden analizarse como una combinación de movimientos armónicos simples con amplitud, frecuencia y fase correctamente escogidas (ejercicios 41 y 42).

PROBLEMA RESUELTO 17-7. Suponga un cuerpo que realiza un movimiento armónico simple horizontal. La ecuación del movimiento es

$$x = (0.35\ \text{m})\cos[(8.3\ \text{rad/s})t],$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Este movimiento puede representarse también como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro horizontal. *a*) Indique las propiedades del correspondiente movimiento circular uniforme. *b*) Del movimiento del punto de referencia, determine el tiempo que el cuerpo tarda en llegar a la mitad del camino hacia el centro del movimiento partiendo de su posición inicial.

Solución *a*) El componente x del movimiento circular uniforme está dado por

$$x = r\cos(\omega t + \phi).$$

Por tanto, el círculo de referencia debe tener un radio $r = 0.35$ m, la fase inicial o la constante de fase ha de ser $\phi = 0$, y la rapidez angular $\omega = 8.3$ rad/s, a fin de obtener la ecuación de la proyección horizontal.

b) Al llegar el cuerpo a la mitad del camino, el punto de referencia cruza un ángulo de $\omega t = \pi/3 = 60°$ (Fig. 17-15). La rapidez angular es constante en 8.3 rad/s, así que el tiempo necesario para pasar por 60° es

$$t = \frac{60°}{\omega} = \frac{\pi/3\ \text{rad}}{8.3\ \text{rad/s}} = 0.13\ \text{s}.$$

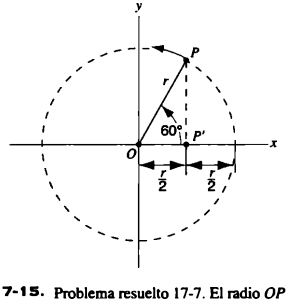


FIGURA 17-15. Problema resuelto 17-7. El radio OP se desplaza de $\phi = 0$ a $t = 0$ a $\omega t = 60°$ en el tiempo t. La proyección P' se mueve a su vez de $x = r$ a $x = r/2$.

17-7 MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

Hasta ahora hemos supuesto que sobre el oscilador no actúan fuerzas de fricción. Si la suposición se cumple de modo estricto, un péndulo o una masa en un resorte oscilarán indefinidamente con una energía mecánica constante (es decir, sin que la oscilación pierda amplitud). Dado que observamos una pérdida de amplitud en los osciladores reales, sabemos que esta suposición no es rigurosamente verdadera aunque puede ser una buena aproximación con algunos osciladores. Por fortuna, el periodo es casi independiente de la amplitud en oscilaciones de poca amplitud; así pues, la reducción de la amplitud causa un cambio insignificante en el periodo del oscilador.

Esta pérdida de amplitud recibe el nombre de *amortiguamiento* y al movimiento se le llama *movimiento armónico amortiguado*. El amortiguamiento se debe a muchas causas como fricción, resistencia al aire y fuerzas internas.

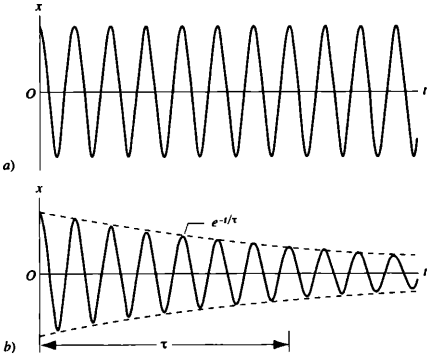


FIGURA 17-16. *a*) Oscilación no amortiguada, dibujada para una constante de fase ϕ de cero. *b*) Oscilación amortiguada con la misma frecuencia que *a*). El tiempo de vida τ es el necesario para que la amplitud disminuya a $1/e = 0.368$ de su valor inicial.

En la figura 17-16 se compara el movimiento de osciladores amortiguados y no amortiguados. Cuando agregamos una pequeña fuerza de amortiguamiento, la frecuencia cambia de un modo insignificante, mientras que la amplitud se reduce gradualmente hasta cero. En muchos casos esta reducción de la amplitud se obtiene multiplicando la ecuación de un oscilador no amortiguado (Ec. 17-6) por una función exponencial que describe las curvas punteadas en la figura 17-16*b*:

$$x(t) = x_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi). \qquad (17\text{-}36)$$

donde τ se denomina *constante del tiempo de amortiguamiento* o *vida media* de la oscilación. Desde el punto de vista matemático, es el tiempo necesario para que la amplitud descienda a $1/e$ de su valor inicial, como se indica en la figura 17-16*b*. La curva gruesa de la figura 17-16*b* es una gráfica de la ecuación 17-36.

Los "picos" de la figura 17-16*b* representan un tiempo en que $\cos \omega t + \phi = 1$. Cuando el decaimiento exponencial es más lento que la variación del término del coseno (es decir, cuando τ es grande en comparación con el periodo de oscilación $2\pi/\omega$, estos puntos corresponden a los de retorno en el movimiento, donde la velocidad es cero. En esos momentos la energía mecánica del oscilador es toda energía potencial $\frac{1}{2}kx^2$ y por lo mismo

$$E(t) = \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-2t/\tau}. \qquad (17\text{-}37)$$

La ecuación 17-37 indica que la energía mecánica del oscilador disminuye exponencialmente con el tiempo (pero nótese que aminora con el doble de rapidez que la amplitud: E cae a $1/e$ de su valor inicial en un tiempo de $\tau/2$. La energía mecánica perdida podría aparecer en diversas formas, según la naturaleza de la fuerza amortiguadora; por ejemplo, como mayor energía cinética (aumento de temperatura) en el aire circundante debido a su resistencia o como energía interna (también en un aumento de temperatura) en el resorte debido al estiramiento interno y a las fuerzas de compresión.

Análisis matemático (Opcional)

Si suponemos una forma particular de la fuerza amortiguadora, podremos utilizar las leyes de Newton para resolver las ecuaciones del movimiento. La figura 17-17 muestra un modelo simple de un oscilador amortiguado. Suponemos que el bloque se desliza por una superficie sin fricción y representamos el amortiguante en función de un aspa (sin masa) que se mueve en un fluido viscoso. Podemos representar la fuerza amortiguadora debida al fluido exactamente como lo hicimos en la sección 4-4 con la fuerza de resistencia al avance en un proyectil: $F_x = -bv_x$, donde b es una constante positiva llamada *constante de amortiguamiento* que depende de las propiedades del fluido, así como del tamaño y la forma del aspa que se sumerge en el fluido. Con $\Sigma F_x = -kx - bv_x$, la segunda ley de Newton nos da

$$-kx - bv_x = ma_x$$

o, con $v_x = dx/dt$ y $a_x = d^2x/dt^2$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (17\text{-}38)$$

La solución de esta ecuación, que podemos verificar por sustitución directa (ejercicio 45), es

$$x(t) = x_m e^{-bt/2\tau} \cos(\omega' t + \phi). \qquad (17\text{-}39)$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \qquad (17\text{-}40)$$

Esta solución supone que la constante de amortiguamiento es pequeña, de modo que la cantidad debajo de la raíz cuadrada de la ecuación 17-40 no puede ser negativa.

Nótese que la ecuación 17-39 tiene la misma forma que la ecuación 17-36, con un tiempo de vida $\tau = 2m/b$. Cuanto mayor sea la constante de amortiguamiento b, más rápidamente se extinguirá la amplitud de la oscilación, Conforme b se acerca a cero (correspondiente a ningún amortiguamiento), τ es infinito y la amplitud permanece constante.

Cuando hay amortiguamiento, la frecuencia de oscilación es más pequeña (el periodo es mayor). En otras palabras, con el amortiguamiento disminuye la rapidez del movimiento, como cabría esperar. Si $b = 0$ (sin amortiguamiento), entonces $\omega' = \sqrt{k/m}$, que es simplemente la frecuencia angular ω del movimiento sin amortiguar. Cuando hay amortiguamiento, ω' es poco menor que ω; pero en la generalidad de los casos de interés el amortiguamiento es suficientemente débil al punto que

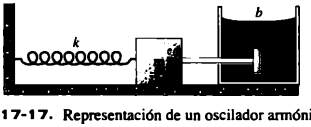


FIGURA 17-17. Representación de un oscilador armónico amortiguado. Suponemos que el cuerpo oscilante (de masa m) está conectado a un aspa (sin masa) sumergida en un fluido, donde experimenta una fuerza amortiguadora viscosa $-bv_x$. No se tiene en cuenta la fricción de deslizamiento en la superficie horizontal.

$\omega' \approx \omega$. Por ejemplo, en el caso descrito en la figura 17-16*b*, en el cual la amplitud disminuye a la mitad en cinco ciclos de oscilación, tendríamos $\omega' = 0.0998\omega$. Por tal razón hemos empleado la frecuencia sin amortiguar ω en la ecuación 17-36.

En el caso especial en que $b = 2\sqrt{km}$, la ecuación 17-40 da $\omega' = 0$, así que el movimiento decae exponencialmente a cero sin oscilación alguna. En este caso el tiempo de vida τ (Ec. 17-36) tiene su mínimo valor posible $1/\omega$. Este estado, llamado *amortiguamiento crítico*, constituye a menudo la meta de los ingenieros mecánicos cuando diseñan sistemas donde pueden hacerse desaparecer en muy poco tiempo las oscilaciones no deseadas y perjudiciales.

PROBLEMA RESUELTO 17-8. En un oscilador amortiguado como el de la figura 17-17, sea $m = 250$ g, $k = 85$ N/m y $b = 0.070$ kg/s. ¿En cuántos periodos de oscilación la energía mecánica del oscilador disminuirá a la mitad de su valor inicial?

Solución En un amortiguamiento pequeño, $\omega' \approx \omega$ y el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25\text{ kg}}{85\text{ N/m}}} = 0.34\text{ s}.$$

En $t = 0$, la energía mecánica inicial es $\frac{1}{2}kx_m^2$. De acuerdo con la ecuación 17-37, la energía tendrá la mitad de su valor en un tiempo t determinado con base en

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}kx_m^2) = \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-2t/\tau}.$$

Al resolver para t y al usar $\tau = 2m/b$ obtenemos

$$t = \tfrac{1}{2}\tau\ln 2 = \frac{m\ln 2}{b} = \frac{(0.25\text{ kg})(\ln 2)}{0.070\text{ kg/s}}$$

El tiempo t es $7.4T$, aproximadamente; por eso se requieren cerca de 7.4 ciclos de la oscilación para que la energía mecánica descienda a la mitad.

17-8 OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Si no intervienen factores externos, el movimiento de un oscilador se repite con su *frecuencia natural* ω, que se determina, por ejemplo, conforme a las ecuaciones 17-9 y 17-10. Cuando existe una pequeña fuerza de amortiguamiento, la frecuencia no cambia mucho respecto a este valor.

Ocurre otra clase interesante de situaciones cuando aplicamos una fuerza senoidal externa al oscilador. Por ejemplo, el tímpano humano vibra al ser expuesto a la fuerza periódica de una onda sonora o una molécula vibra cuando absorbe una onda electromagnética de una frecuencia determinada. Las oscilaciones resultantes se conocen como *oscilaciones forzadas* y tienen importantes aplicaciones no sólo en mecánica, sino también en acústica, en circuitos eléctricos y en física atómica.

Las frecuencias forzadas se dan en la frecuencia de la fuerza externa, no en la frecuencia natural del sistema vibratorio. Sin embargo, la amplitud de la oscilación depende de la relación entre la frecuencia natural y la de la fuerza aplicada. Una sucesión de pequeños impulsos aplicados en la frecuencia apropiada puede producir una oscilación de gran amplitud. Por ejemplo, cuando empujamos a un amigo en un columpio, al hacerlo exactamente al mismo tiempo en cada ciclo provocamos que nuestro amigo se mueva en un arco cada vez más grande.

Suponemos que se trata de un oscilador real en que hay una fuerza amortiguadora. (De lo contrario, la energía que le suministran las fuerzas externas continuaría acumulándose y la amplitud crecería sin límite.) Consideremos el oscilador amortiguado de la figura 17-16*b*, que presentamos de nuevo en la figura 17-18*a*. Su frecuencia natural es ω, y suponemos que el amortiguamiento es tan pequeño que no modifica la frecuencia en forma considerable. A continuación aplicamos una fuerza senoidal $F_x(t) = F_m \operatorname{sen} \omega'' t$, la cual suponemos que tiene una amplitud constante F_m.

Cuando la aplicamos por primera vez, el movimiento queda dominado por términos transitorios de vida breve que se extinguen en un tiempo característico del tiempo de vida amortiguada τ. Examinamos el movimiento en el "estado estacionario" luego que esos términos se han vuelto despreciables. En la figura 17-18*b* se muestra el movimiento resultante cuando la frecuencia de impulso es la mitad de la natural. Adviértase que es una oscilación senoidal simple, pero en la frecuencia de la fuerza externa ω'' y no en la frecuencia natural ω. La figura 17-18*c* contiene el movimiento con una fuerza externa de la misma amplitud pero con $\omega'' = 0.8\ \omega$. La

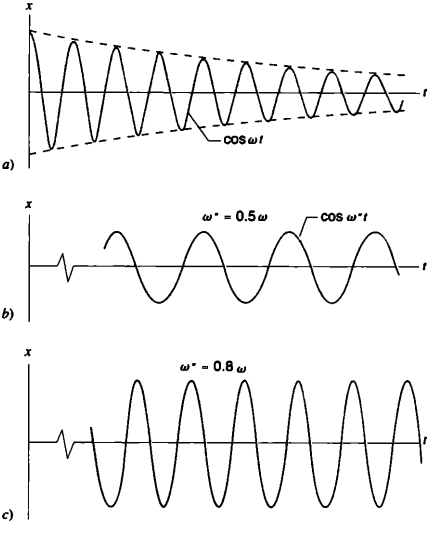


FIGURA 17-18. *a*) Oscilador amortiguado (idéntico a la figura 16*b*). *b*) El mismo oscilador sujeto a una fuerza aplicada con $\omega'' = 0.5\ \omega$. *c*) Oscilador forzado con $\omega'' = 0.8\ \omega$. Como ω'' está más cerca de la resonancia, la amplitud de la oscilación es mayor aunque la fuerza aplicada tenga la misma amplitud en *b*) y en *c*).

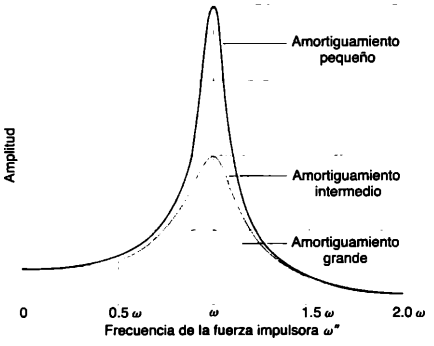


FIGURA 17-19. La amplitud de un oscilador forzado como la frecuencia angular ω'' de la fuerza impulsora es variada. Las tres curvas corresponden a diversos niveles de amortiguamiento; el amortiguamiento menor produce la curva más pronunciada de resonancia. El amortiguamiento intermedio corresponde al doble de la fuerza amortiguadora y el amortiguamiento grande al cuádruple de la fuerza amortiguadora pequeña.

amplitud de la oscilación en esa figura es aproximadamente la mitad de la de la figura 17-18*b*. A medida que ω'' se aproxima a ω (con F_m mantenida constante), la amplitud del movimiento sigue creciendo: cuando $\omega'' = 0.9\omega$, la amplitud es unas cuatro veces mayor que la de la figura 17-18*b* y aumenta unas 40 veces más cuando $\omega'' = 0.99\omega$.

Cuando el amortiguamiento es pequeño, las oscilaciones forzadas alcanzan su máxima amplitud de desplazamiento, si la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural. A este estado se le conoce como *resonancia* y a la frecuencia correspondiente ω'', como *frecuencia angular resonante:*

$$\omega'', = \omega \quad \text{(condición de resonancia)} \qquad (17\text{-}41)$$

(A veces se emplean otras definiciones de la resonancia; por ejemplo, la frecuencia con que la potencia máxima se suministra al oscilador o la frecuencia a la cual la velocidad alcanza su nivel más alto. Las definiciones anteriores no son equivalentes; por ejemplo, como veremos en el Capítulo 36, la resonancia en los circuitos eléctricos suele definirse atendiendo a la amplitud de corriente, lo cual se parece a la resonancia de velocidad.)

Como se aprecia en la figura 17-18*b* y *c*, en resonancia el sistema oscila a la frecuencia de la fuerza externa impulsora con amplitud constante (si la fuerza tiene amplitud constante). Hay amortiguamiento que normalmente reduciría la amplitud, pero la fuerza impulsora externa provee la energía adicional necesaria para mantener constante la amplitud de la oscilación. En este estado estacionario, la rapidez con que la fuerza impulsora suministra energía equivale exactamente a la rapidez con que la fuerza amortiguadora disipa energía. En efecto, el oscilador transfiere energía de la fuerza impulsora externa al medio amortiguador; el oscilador no recibe un incremento neto de energía. Nótese sobre todo que en resonancia la amplitud de oscilación no aumenta sin límite, sino que permanece constante.

La figura 17-19 muestra la amplitud de las vibraciones forzadas a medida que se modifica la frecuencia de la fuerza externa cerca de la frecuencia natural ω. Cuando el amortiguamiento es pequeño, la amplitud de la oscilación forzada crece rápidamente al acercarse ω'' a ω y alcanza su nivel máximo si $\omega'' = \omega$. En un amortiguamiento mayor, la amplitud no se incrementa con tanta rapidez cerca de la resonancia; en el amortiguamiento máximo, la frecuencia resonante queda un poco desplazada de la frecuencia natural.

Todas las estructuras mecánicas —como edificios, puentes y aviones— tienen una o más frecuencias naturales de oscilación. Si la estructura está sujeta a una frecuencia impulsora que iguale una de las frecuencias naturales, la gran amplitud resultante de oscilación puede tener consecuencias desastrosas. Romper un vaso de vino con una onda sonora que iguale una de las frecuencias naturales no es más que una de tantas demostraciones de este efecto: el colapso de carreteras y puentes durante los sismos son una consecuencia más seria.

En 1940 ocurrió otro caso de resonancia en el Tacoma Narrow Bridges, en el estado de Washington. El viento que soplaba originó vórtices, ocasionando pequeños soplos que golpearon el puente con una frecuencia que igualaba una de sus frecuencias naturales. El resultado fue un suave movimiento de rodamiento, semejante al de una montaña rusa, que le valió al puente su nombre: "Galloping Gertie" (Gertie galopante"). Unos cinco meses más tarde, después de inaugurarse el puente, las suaves oscilaciones de rodamiento se volvieron violentas oscilaciones torsionales (Fig. 17-20). No se debieron a la resonancia, sino a los efectos no lineales provenientes de ráfagas particularmente violentas. Efectos tan complejos no pueden analizarse a partir del oscilador forzado que hemos explicado aquí.

FIGURA 17-20. El Tacoma Narrows Bridge en Puget Sound, Washington. Terminado e inaugurado al tráfico en julio de 1940, el puente de inmediato presentó oscilaciones suaves de rodamiento debido a la resonancia. Más tarde experimentó las violentas oscilaciones torsionales que se muestran a la izquierda. Con el tiempo se rompió el tramo principal y la carretera se estrelló contra el agua, como se aprecia a la derecha.

Análisis matemático (Opcional)

Una vez más considere una fuerza amortiguadora de la forma $-bv_x$, y suponga que la fuerza impulsora es $F_m \cos \omega'' t$. La situación experimental podría parecerse a la de la figura 17-17, con la pared fija de la izquierda reemplazada por un soporte móvil conectado al eje de un motor que gira con una velocidad angular ω''. Si $\Sigma F_x = -kx - bv_x + F_m \cos \omega'' t$, la segunda ley de Newton nos da

$$-kx - bv_x + F_m \cos \omega'' t = ma_x$$

o, con $v_x = dx/dt$ y $a_x = d^2x/dt^2$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t. \qquad (17\text{-}42)$$

Tras suficiente tiempo para que se extingan los transitorios iniciales, la solución de esta ecuación es

$$x(t) = \frac{F_m}{G}\cos(\omega'' t - \beta), \qquad (17\text{-}43)$$

donde

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2} \qquad (17\text{-}44)$$

y

$$\beta = \cos^{-1}\frac{b\omega''}{G}. \qquad (17\text{-}45)$$

usted puede verificar que la ecuación 17-43 es una solución de la ecuación 17-42 con sólo calcular las derivadas primera y segunda de $x(t)$y sustituyéndolas en la ecuación 17-42.

Nótese lo siguiente: con valores pequeños de la constante de amortiguación b, G tiene el valor mínimo de $\omega'' = \omega$, de ahí que la amplitud $x(t)$, que es igual a F_m/G, posee su máximo valor allí. A eso se deben los picos de resonancia en la figura 17-19;las curvas en ella son gráficas de F_m/G para varios valores de la constante de amortiguamiento b.

17-9 OSCILACIONES DE DOS CUERPOS (Opcional)

En la *colisión de dos cuerpos*, como se advierte en la figura 17-21*a*, un resorte conecta dos cuerpos que pueden moverse libremente. Oscilan al ser desplazados y liberados. En la naturaleza hay numerosos ejemplos de este tipo de osciladores. En las moléculas diatómicas, una fuerza de la forma ilustrada en la figura 17-3 enlaza dos átomos. Cerca de la posición de equilibrio, la energía potencial puede aproximarse por medio de una forma parabólica, que corresponda a la de un oscilador armónico simple. La emisión y absorción de radiación por las moléculas diatómicas pueden entenderse a partir de la energía asociada a este tipo de oscilaciones. Pueden darse oscilaciones semejantes en los núcleos: en un tipo de movimiento, los protones y los neutrones oscilan uno contra otro como los dos cuerpos de la figura 17-21*a*, y el núcleo puede emitir y absorber radiación en forma parecida a la molécula diatómica.

En términos generales, resulta complicado analizar este tipo de movimiento. Pese a ello, la descripción puede simplificarse si reemplazamos las coordenadas individuales de los cuerpos (x_1 y x_2 en la figura 17-21*a*) con otras dos: la separación relativa $x_1 - x_2$ y la ubicación x_{cm} del centro de masa. Cuando no intervienen fuerzas externas, éste se desplaza a velocidad constante y su movimiento no tiene interés en el estudio del sistema, así que podemos analizarlo en función de la coordenada relativa solamente.

La separación relativa $x_1 - x_2$ nos da la longitud del resorte en cualquier momento. Supóngase que su longitud no estirada sea L; entonces $x = (x_1 - x_2) - L$ es el cambio de longitud del resorte y $F = kx$ es la magnitud de la fuerza ejercida sobre *cada partícula* por el resorte. Como se advierte en la figura 17-21*a*, si el resorte ejerce una fuerza $-\vec{F}$ en m_1, ejercerá también una fuerza $+\vec{F}$ en m_2.

Apliquemos por separado la segunda ley de Newton a las dos partículas, tomando los componentes de la fuerza sobre el eje x:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx,$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = +kx.$$

En seguida multiplicamos la primera de las ecuaciones anteriores por m_2 y la segunda por m_1, y luego las restamos. El resultado es

$$m_1m_2\frac{d^2x_1}{dt^2} - m_1m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_2kx - m_1kx,$$

que podemos escribir así

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -kx. \qquad (17\text{-}46)$$

La magnitud $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ tiene la dimensión de masa y se la conoce como *masa reducida m:*

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (17\text{-}47)$$

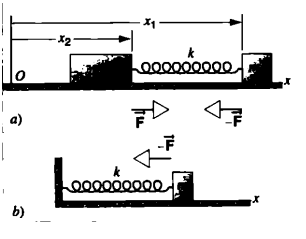


FIGURA 17-21. *a*) Dos cuerpos oscilantes de masa m_1 y m_2 conectados por un resorte. *b*) El movimiento relativo puede representarse mediante la oscilación de un solo cuerpo que tiene la masa reducida m.

Como la longitud no estirada L del resorte es una constante, las derivadas de $(x_1 - x_2)$ son las mismas que las de x:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = \frac{d}{dt}(x + L) = \frac{dx}{dt},$$

y por eso la ecuación 17-46 se convierte en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

La expresión anterior tiene la misma forma que la ecuación 17-4 con la masa oscilante individual; esto demuestra que desde el punto de vista de las oscilaciones el sistema de la figura 17-21*a* puede reemplazarse con una sola partícula, como se indica en la figura 17-21*b*, con una masa igual a la masa reducida del sistema. En particular, la frecuencia de oscilación en el sistema de la figura 17-21 está dada por la ecuación 17-9, usando la masa reducida.

Si queremos examinar el movimiento detallado del sistema, podemos simplemente anotar la solución para $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$ dada en las ecuaciones 17-11, recordando que x representa la coordenada relativa de las dos partículas y que, por lo mismo, v_x y a_x representan su velocidad $v_{1x} - v_{2x}$ y su aceleración $a_{1x} - a_{2x}$ *relativas*, respectivamente.

Nótese que la masa reducida m siempre es más pequeña que cualquiera de las dos masas. Si una es mucho menor que la otra, m será aproximadamente igual a la más pequeña. Cuando son iguales, m tendrá la mitad del tamaño de una de ellas.

PROBLEMA RESUELTO 17-9. El cloro que se encuentra en la naturaleza consta de dos isótopos: ^{35}Cl, con una abundancia relativa del 76% y con una masa atómica de 34.968853 u, y ^{37}Cl, con una abundancia de 24% y una masa atómica de 36.965903 u. *a*) ¿Cuál es la masa reducida de una molécula de HCl cuando contiene ^{35}Cl y cuando contiene ^{37}Cl? *b*) La frecuencia de vibración de una molécula de HCl es 8.5×10^{13} Hz. Suponiendo que el HCl se comporte como un oscilador de dos cuerpos simples, calcule la constante de fuerza efectiva k.

Solución *a*) La masa reducida de $H^{35}Cl$ se obtiene de la ecuación 17-47, empleando la masa H de 1.007825 u:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1.007825\text{ u})(34.968853\text{ u})}{1.007825\text{ u} + 34.968853\text{ u}} = 0.979593\text{ u}.$$

Con $H^{37}Cl$ tenemos en forma similar

$$m = \frac{(1.007825\text{ u})(36.965903\text{ u})}{1.007825\text{ u} + 36.965903\text{ u}} = 0.981077\text{ u}.$$

b) Resolviendo la ecuación 17-9 para la constante de fuerza, obtenemos

$$k = 4\pi^2 f^2 m = 4\pi^2(8.5 \times 10^{13}\text{ Hz})^2(0.98\text{ u})(1.66 \times 10^{-27}\text{ kg/u})$$
$$= 460\text{ N/m}.$$

Éste es el mismo orden de magnitud que la constante de fuerza de los resortes ordinarios (consúltese, por ejemplo, el problema resuelto 17-1). ¿Puede explicar por qué la constante de fuerza de una molécula puede ser igual a la del un resorte?

Las moléculas pueden absorber o emitir radiación electromagnética, y al hacerlo pueden modificar su estado de movimiento vibratorio. De hecho, observar la radiación que se absorbe o emite es una de las formas en que descubrimos la estructura de las moléculas. La figura 17-22 muestra un ejemplo del espectro de absorción infrarrojo del HCl. Cada pico corresponde a un cambio del estado vibratorio del HCl cuando absorbe radiación a esa frecuencia. Los dos componentes de los picos se deben a dos isótopos de Cl; su masa diferente produce masas reducidas un poco distintas de las moléculas de $H^{35}Cl$ y $H^{37}Cl$, como descubrimos en la parte *a*), y por lo mismo en frecuencias vibratorias ligeramente diferentes.

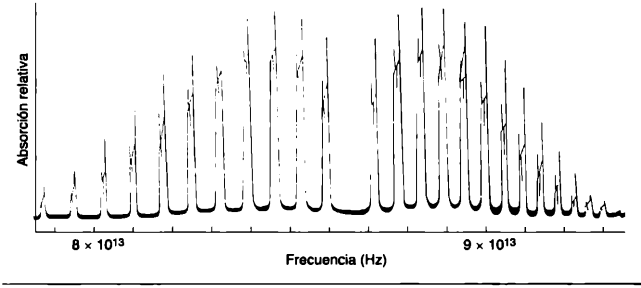


FIGURA 17-22. Espectro de absorción de la radiación infrarroja por el HCl molecular. Cada pico corresponde a un cambio en el movimiento vibratorio de las moléculas. Los pares poco espaciados de los picos se deben a los dos isótopos de Cl.

OPCIÓN MÚLTIPLE

17-1 Sistemas oscilatorios

1. Una partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio x_0 sujeta a una fuerza que tiene una energía potencial asociada $U(x)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones (quizá más de una) acerca de $U(x)$ es verdadera?
   A) $U(x)$ debe ser simétrica alrededor de x_0.
   B) $U(x)$ debe ser un mínimo en x_0.
   C) $U(x)$ debe ser un máximo en x_0.
   D) $U(x)$ debe ser positiva cerca de x_0.
2. La posición de equilibrio de un objeto en un sistema oscilatorio siempre es el punto donde

A) $x = 0$. B) $v_x = 0$.
C) $a_x = 0$ D) $p_x = 0$.

17-2 El oscilador armónico simple

17-3 Movimiento armónico simple

3. Una partícula sujeta a un resorte realiza un movimiento armónico simple. Si duplicamos su masa y su amplitud, *a*) el periodo de oscilación cambiará por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterado).
   b) la rapidez máxima de la partícula cambiará por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterada)
   c) la magnitud de la aceleración máxima de la partícula cambiará por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterada).
4. Una partícula sujeta a un resorte efectúa un movimiento armónico simple; cuando atraviesa la posición de equilibrio tiene una velocidad v. Se detiene y entonces las oscilaciones se reanudan, de manera que ahora cruza esa posición con una velocidad $2v$. Después de este cambio
   a) la frecuencia de oscilación se modificará por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterada).
   b) el desplazamiento máximo de la partícula cambiará por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterado).
   c) la magnitud de la aceleración máxima de la partícula cambiará por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterada).

17-4 Energía en el movimiento armónico simple

5. Una partícula sujeta a un resorte realiza un movimiento armónico simple. Cuando se halla en $x = x_{máx}/2$, su rapidez es
   A) $v_x = v_{máx}$. B) $v_x = \sqrt{3}v_{máx}/2$.
   C) $v_x = \sqrt{2}v_{máx}/2$. D) $v_x = v_{máx}/2$.
6. Una partícula sujeta a un resorte realiza un movimiento armónico simple. Si su energía total se duplica, *a*) el periodo de oscilación crecerá por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterado).
   b) la rapidez máxima de la partícula crecerá por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterada).
   c) la magnitud de la aceleración máxima de la partícula crecerá por un factor de
   A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
   E) 1 (permanece inalterada).

17-5 Aplicaciones del movimiento armónico simple

7. Un aro metálico redondo está suspendido del borde por un gancho. Puede oscilar de un lado a otro en el plano del gancho o en dirección perpendicular al plano del aro. ¿En qué modo será mayor la frecuencia de la oscilación?
   A) Oscilaciones en el plano del aro.
   B) Oscilaciones perpendiculares al plano del aro.
   C) La frecuencia de la oscilación será la misma en ambos modos.
8. ¿Cuáles son las unidades de κ en la ecuación 17-17?
   A) Newton/(metro · radian)
   B) Newton · metro/radian
   C) Kilogramo/(radian · segundo^2)
   D) Kilogramo · radian^2/segundo^2

17-6 Movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme

9. Un objeto de masa de masa m presenta movimiento circular uniforme en el plano xy. El círculo tiene el radio R y el objeto se desplaza alrededor del círculo con velocidad v. El movimiento se proyecta en el eje x, donde aparece como un movimiento armónico simple conforme a $x(t) = R\cos(\omega t + \phi)$.
   a) En esta proyección ω es
   A) v/R, B) m^2R.
   C) R/v. D) $v/(R \operatorname{sen} \omega t)$.
   b) En esta proyección ϕ es
   A) 0. B) vt/ω. C) π.
   D) ϕ no puede determinarse con la información disponible.

17-7 Movimiento armónico amortiguado

10. Sea ω' la frecuencia angular de un oscilador amortiguado y ω la frecuencia angular de un oscilador idéntico pero no amortiguado. La frecuencia amortiguada ω' será igual a $\omega/2$ si:
    A) $b = m\omega$. B) $b = \sqrt{2}m\omega$.
    C) $b = \sqrt{3}m\omega$. D) $b = 2m\omega$.

17-8 Oscilaciones forzadas y resonancia

11. Una vez extinguido todo el movimiento transitorio, un oscilador amortiguado forzado oscilará con
    A) la frecuencia impulsora.
    B) la frecuencia del oscilador amortiguado pero libre.
    C) la frecuencia del oscilador no amortiguado pero libre.
    D) cualquiera de las anteriores por ser iguales todas las frecuencias.
12. La frecuencia resonante de un oscilador amortiguado forzado es igual a
    A) la frecuencia impulsora.
    B) la frecuencia del oscilador amortiguado pero libre.
    C) la frecuencia de un oscilador no amortiguado pero libre.
    D) cualquiera de las anteriores porque todas las frecuencias son iguales.

17-9 Oscilaciones de dos cuerpos (Opcional)

13. Una molécula diatómica puede concebirse como una mancuerna: dos masas unidas por medio de un resorte ideal. El sistema oscila con una frecuencia ω, pero también puede girar alrededor del centro de masa. Si la molécula gira, ¿qué sucede con
    a) $x_{ec=eq}$ la separación de equilibrio?
    A) $x_{ec=eq}$ disminuye.
    B) $x_{ec=eq}$ no cambia.
    C) $x_{ec=eq}$ aumenta.
    b) ω, la frecuencia de vibración?
    A) ω disminuye.
    B) ω no cambia.
    C) ω aumenta.

PREGUNTAS

1. Dé ejemplos de movimientos que sean más o menos armónicos simples. ¿Por qué hay tan pocos movimientos que sean exactamente de este tipo?
2. Un resorte típico de mampara está tenso en su estado normal, es decir, las vueltas están firmemente unidas y resisten la separación. ¿Obedece a la ley de Hooke?
3. ¿Se cumple la ley de Hooke, así sea aproximadamente, en un trampolín? ¿Y en un resorte enrollado hecho con alambre de plomo?
4. ¿Qué sucede con el movimiento en un sistema oscilatorio, si se cambiara el signo del término fuerza, $-kx$, en la ecuación 17-2?
5. Un resorte tiene una constante de fuerza k y un objeto de masa m cuelga de él. El resorte se corta a la mitad y el mismo objeto se suspende de una de las mitades. ¿Cómo se relacionan las frecuencias de oscilación antes y después de cortarlo?
6. Un resorte sin tensión tiene una constante de fuerza k. Lo estira una pesa que cuelga de él hasta una longitud de equilibrio dentro del límite elástico. ¿Tiene el resorte la misma constante de fuerza k en los desplazamientos desde esta nueva posición de equilibrio?
7. Suponga que tenemos un bloque de masa desconocida y un resorte de constante de fuerza desconocida. Demuestre cómo podemos predecir el periodo de oscilación del sistema bloque-resorte con sólo medir la extensión del resorte producida al sujetar el bloque al resorte.
8. Cualquier resorte real tiene masa. Si ésta se tiene en cuenta, explique en términos cualitativos cómo influirá ello en el periodo de oscilación del sistema bloque-resorte.
9. ¿Puede haber un oscilador que no sea armónico simple ni siquiera con amplitudes pequeñas? Es decir, ¿puede haber una fuerza restauradora no lineal en un oscilador incluso en amplitudes arbitrariamente pequeñas?
10. ¿De qué manera las siguientes propiedades de un oscilador armónico simple se ven afectadas al duplicar la amplitud: periodo, constante de fuerza, energía mecánica total, velocidad máxima, aceleración máxima?
11. ¿Qué cambios pueden efectuarse en un oscilador armónico que duplique la rapidez máxima del objeto oscilante?
12. Una persona se encuentra en una báscula de baño, la cual descansa sobre una plataforma suspendida en un gran resorte. Todo el sistema realiza un movimiento armónico simple en dirección vertical. Describa las variaciones en la lectura de la báscula durante un periodo de movimiento.
13. ¿Podría construirse alguna vez un péndulo simple verdadero? Explique su respuesta.
14. ¿Pueden los estándares de masa, longitud y tiempo basarse en las propiedades de un péndulo? Explique su respuesta.
15. Teniendo en cuenta los aspectos elásticos e inerciales en cuestión, explique el hecho de que cuando un objeto de masa m oscila verticalmente en un resorte, el periodo depende de m pero es independiente de g, y de que, en cambio, ocurre lo contrario en un péndulo simple.
16. Prediga con argumentos cualitativos si un péndulo que oscila con gran amplitud tendrá un periodo mayor o menor que el de las oscilaciones con una amplitud pequeña. (Considere los casos extremos.)
17. Al acercarse a 180° la amplitud θ_m en la ecuación 17-25, ¿a qué valor espera que se aproxime el periodo? Explique su respuesta en términos físicos.
18. ¿Qué sucede con la frecuencia de un columpio a medida que sus oscilaciones pasan de una amplitud grande a otra pequeña?
19. ¿Cómo se ve afectado el periodo de un péndulo cuando su punto de suspensión *a*) se mueve horizontalmente en el plano de la oscilación con la aceleración a; *b*) se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración a; *c*) se mueve verticalmente hacia abajo con una aceleración $a < g$; con una aceleración $a > g$? ¿Cuál de los tres casos –o ninguno– se aplica a un péndulo montado en una carreta que rueda por un plano inclinado?
20. ¿Por qué se excluyó en la ecuación 17-29 un eje que pasa por el centro de masa al utilizar esta ecuación para determinar I? ¿Se aplica esta ecuación al eje? ¿Cómo puede determinarse I en este caso empleando los métodos del péndulo físico?
21. Una esfera hueca se llena de agua a través de un hoyo. Cuelga de un hilo largo y, al salir el agua del hoyo del fondo, se observa que el periodo de oscilación primero aumenta y luego disminuye. Explique su respuesta.
22. *a*) El efecto de la masa, m, de la cuerda atada a la pesa, de masa M, de un péndulo consiste en alargar el periodo en él, respecto al de un péndulo simple en que $m = 0$. Demuestre esto. *b*) aunque el efecto que la masa de la cuerda tiene en el péndulo consiste en aumentar su periodo, una cuerda de longitud L que oscile sin nada en el extremo ($M = 0$) tiene un periodo menor al de un péndulo simple de longitud L. Demuéstrelo.
23. Si un péndulo torsional se lleva a la Luna, ¿habrá algún cambio en su frecuencia de oscilación? ¿Si se lleva un péndulo simple? ¿Un oscilador de resorte-bloque? ¿Y un péndulo físico?
24. ¿Cómo puede un péndulo utilizarse para trazar una curva senoidal?
25. ¿Existe alguna conexión en la relación de T en función de x en el nivel molecular con la relación de F y x en un resorte? Explique su respuesta.
26. *a*) ¿En qué circunstancias la masa reducida de un sistema de dos cuerpos será igual a la de uno de ellos? Explique su respuesta. *b*) ¿Cuál es la masa reducida si los cuerpos tienen la misma masa? *c*) ¿Dan los casos *a*) y *b*) valores extremos de la masa reducida?
27. ¿Por qué la tina de una lavadora suele montarse sobre resortes?
28. ¿Por qué se acostumbra utilizar aparatos amortiguadores en la maquinaria? Dé un ejemplo.
29. Dé algunos ejemplos de fenómenos comunes en que la resonancia desempeña un papel importante.
30. La marea lunar es mucho más importante que la marea solar. Pero ocurre lo contrario en las mareas de la atmósfera terrestre. Explique esto sirviéndose de las ideas de resonancia, teniendo presente que la atmósfera tiene un periodo natural de oscilación de casi 12 horas.
31. En la figura 17-19, ¿a qué valor se aproxima la amplitud de las oscilaciones forzadas a medida que la frecuencia impulsora ω se acerca a *a*) cero y *b*) el infinito?
32. Los edificios de diferente altura reciben cantidad diferente de daño durante un sismo. Explique por qué.
33. Un cantante, que sostenga una nota de la frecuencia adecuada, podrá romper un vaso si es de excelente calidad. No puede hacerlo si el vaso es de mala calidad. Explique por qué.

EJERCICIOS

17-1 Sistemas de oscilaciones

17-2 El oscilador armónico simple

17-3 Movimiento armónico simple

1. Un bloque de 3.94 kg extiende 15.7 cm un resorte desde su posición no estirada. Se quita el bloque y se cuelga del mismo resorte un objeto de 0.520 kg. Encuentre su periodo de oscilación.
2. Un oscilador se compone de un bloque de 512 g de masa, conectado a un resorte. Cuando hace que oscile con una amplitud de 34.7 cm, se observa que repite su movimiento cada 0.484 s. Calcule *a*) el periodo, *b*) la frecuencia, *c*) la frecuencia angular, *d*) la constante de fuerza, *e*) la rapidez máxima y *f*) la fuerza máxima ejercida sobre el bloque.
3. Un altavoz produce un sonido musical por la oscilación de un diafragma. Si la amplitud de la oscilación se limita a 1.20×10^{-3} mm, ¿qué frecuencias producirán en el diafragma la aceleración mayor que g?
4. Un objeto de 5.22 kg se sujeta al extremo inferior de un resorte vertical y se hace que vibre. Su rapidez máxima es 15.3 cm/s y el periodo es de 645 ms. Calcule *a*) la constante de fuerza del resorte, *b*) la amplitud del movimiento y *c*) la frecuencia de oscilación.
5. En una rasuradora eléctrica, la hoja se mueve hacia adelante y hacia atrás una distancia de 2.00 mm. El movimiento es armónico simple, con una frecuencia de 120 Hz. Determine *a*) la amplitud, *b*) la rapidez máxima de la hoja, y *c*) la aceleración máxima de la hoja.
6. Por lo que respecta a las oscilaciones, puede considerarse que un automóvil está montado en cuatro resortes. Los resortes de cierto automóvil de 1,460 kg de masa se ajustan de modo que las vibraciones tengan una frecuencia de 2.95 Hz. *a*) Calcule la constante de fuerza de los cuatro resortes (supuestamente idénticos). *b*) ¿Cuál será la frecuencia de vibración si viajan a bordo cinco personas cuyo peso promedio es de 73.2 kg?
7. Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación

$$x = (6.12 \text{ m}) \cos[(8.38 \text{ rad/s})t + 1.92 \text{ rad}].$$

Encuentre *a*) el desplazamiento, *b*) la velocidad y *c*) la aceleración en el tiempo $t = 1.90$ s. Determine asimismo *d*) la frecuencia y *e*) el periodo del movimiento.

8. La escala de una báscula de resorte que incluye de 0 a 50.0 lb mide 4.00 in de longitud. Se observa que un paquete suspendido de ella oscila verticalmente con una frecuencia de 2.00 Hz. ¿Cuánto pesa el paquete?
9. El pistón de cabeza cilíndrica de una locomotora tiene un carrera de 76.5 cm. ¿Qué velocidad máxima alcanza si las ruedas motrices realizan 193 rev/min y el pistón se desplaza en un movimiento armónico simple?
10. Un objeto de 2.14 kg cuelga de un resorte. Un cuerpo de 325 g sujeto al cuerpo estira el resorte 1.80 cm más. Se retira el cuerpo y se hace oscilar el objeto. Encuentre el periodo del movimiento.
11. En un puerto, las olas hacen que la superficie del mar se eleve y descienda en movimiento armónico simple, con un periodo de 12.5 h. ¿Cuánto tarda el agua en descender de su altura máxima a la mitad de ella sobre su nivel promedio (equilibrio)?
12. Un bloque se halla en un pistón que se desplaza verticalmente con movimiento armónico simple. *a*) ¿A qué amplitud del movimiento se separarán el bloque y el pistón si el periodo de movimiento de este último es 1.18 s? *b*) Si el pistón tiene una amplitud de 5.12 cm al moverse, calcule la frecuencia máxima con que ambos entrarán en contacto continuamente.
13. Un oscilador es un bloque conectado a un resorte ($k = 456$ N/m). En algún momento t, la posición (medida desde el lugar de equilibrio), la velocidad y la aceleración del bloque son $x = 0.112$ m, $v_x = -13.6$ m/s, $a_x = -123$ m/s^2. Calcule *a*) la frecuencia, *b*) la masa del bloque y *c*) la amplitud de oscilación.
14. Dos partículas efectúan un movimiento armónico simple de igual amplitud y frecuencia en la misma línea recta. Se pasan una a otra cuando siguen direcciones contrarias cada vez que su desplazamiento es la mitad de su amplitud. Encuentre la diferencia de fase entre ellas.
15. Se mantiene en reposo a tres vagones de minas con un peso de 10,000 kg en una pendiente de 26.0°, sobre un riel que usa un cable paralelo a la pendiente (Fig. 17-23). Se observa que el cable se estira 14.2 cm debajo de unos frenos acoplados, separando uno de los vagones. Determine *a*) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de los dos vagones restantes y *b*) la amplitud de las oscilaciones.

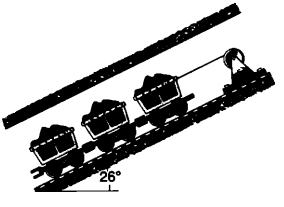


FIGURA 17-23. Ejercicio 15.

16. Un tubo U está lleno de un líquido homogéneo. Un pistón hace descender temporalmente el líquido en un lado. Se quita el pistón y el nivel del líquido oscila a ambos lados. Demuestre que el periodo de oscilación es $\pi\sqrt{2L/g}$, donde L es la longitud total del líquido en el tubo.
17. Un madero cilíndrico está cargado con plomo en un extremo, de modo que flota verticalmente en el agua como se aprecia en la figura 17-24. La longitud de la parte sumergida es $L = 2.56$ m. Lo ponemos en oscilación vertical. *a*) Demuestre que la oscilación es armónica simple. *b*) Encuentre el periodo de oscilación. No tenga en cuenta el hecho de que el agua tiene un efecto amortiguador en el movimiento.

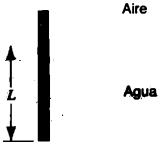


FIGURA 17-24. Ejercicio 17.

17-4 Energía en el movimiento armónico simple

18. Un sistema oscilatorio de bloque-resorte tiene una energía mecánica de 1.18 J, una amplitud de 9.84 cm y una rapidez máxima de 1.22 m/s. Calcule *a*) la constante de fuerza del resorte, *b*) la masa del bloque y *c*) la frecuencia de la oscilación.

19. Una resortera grande (e hipotética) se estira 1.53 m para lanzar un proyectil de 130 g con suficiente rapidez para escapar de la Tierra (11.2 km/s). *a*) ¿Cuál es su constante de fuerza, si toda la energía potencial la convertimos en energía cinética? *b*) Suponga que una persona común puede ejercer una fuerza de 220 N. ¿Cuántas personas se necesitan para estirar la resortera?

20. *a*) Cuando el desplazamiento es la mitad de la amplitud x_m, ¿qué parte de la energía total es cinética y qué parte es potencial en el movimiento armónico simple? *b*) ¿En qué desplazamiento es una mitad de la energía cinética y la otra mitad es potencial?

21. Una partícula de 12.3 kg experimenta un movimiento armónico simple con una amplitud de 1.86 mm. Su aceleración máxima es 7.93 km/s^2. *a*) Encuentre el periodo del movimiento. *b*) ¿Cuál es su aceleración máxima? *c*) Calcule la energía mecánica total de este oscilador armónico simple.

22. Un objeto de 5.13 kg se desplaza por una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de un resorte con una constante de fuerza de 9.88 N/cm. El objeto se desplaza 53.5 cm y se le imprime una velocidad inicial de 11.2 m/s de regreso a la posición de equilibrio. Encuentre *a*) la frecuencia del movimiento, *b*) la energía potencial inicial del sistema, *c*) la energía cinética total y *d*) la amplitud del movimiento.

23. Un objeto de 1.26 kg de masa sujeto a un resorte cuya constante de fuerza es 5.38 N/cm se hace oscilar extendiendo el resorte 26.3 cm e imprimiéndole una velocidad de 3.72 m/s hacia la posición de equilibrio del resorte. Con los resultados obtenidos en el problema 9, calcule *a*) la amplitud y *b*) el ángulo de fase del movimiento armónico simple resultante.

24. Se suspende un bloque de 4.00 kg de un resorte con una constante de fuerza de 5.00 N/cm. Una bala de 50.0 g disparada contra él, desde abajo, con una rapidez de 150 m/s se incrusta en el bloque. *a*) Determine la amplitud del movimiento armónico simple resultante. *b*) ¿Qué parte de la energía cinética original de la bala aparece como energía mecánica en el oscilador?

17-5 Aplicaciones del movimiento armónico simple

25. Obtenga la longitud de un péndulo simple cuyo periodo es 1.00 s en lugares donde $g = 9.82$ m/s^2.

26. Un péndulo simple de 1.53 m de longitud realiza 72.0 oscilaciones en 180 s en cierto lugar. Encuentre la aceleración debida a la gravedad en ese punto.

27. El periodo de un péndulo simple está dado por la serie en la ecuación 17-25. *a*) ¿Para qué valor de θ_m es el segundo término de la serie igual a 0.02? *b*) ¿Qué valor tiene el tercer término de la serie en esta amplitud?

28. Si un péndulo tiene un periodo de 1.00 s en el ecuador, ¿cuál será su periodo en el polo sur? (Fig. 14-6.)

29. El hecho de que g varíe de un lugar a otro en la superficie terrestre atrajo la atención cuando en 1672 Jean Richer llevó un reloj de péndulo de París a Cayena, la Guayana Francesa, y descubrió que perdía 2.5 min/día. Si $g = 9.81$ m/s^2 en París, calcule g en Cayena.

30. Se determina g midiendo el periodo de un péndulo. ¿Con qué exactitud (en segundos) habría que medir el tiempo en 100 oscilaciones de un péndulo de 10 m de largo para conseguir un error de 0.1% en la medición de g? Calcule en milisegundos el error porcentual y el error absoluto. Compare su respuesta con el ejercicio 9 del Capítulo 14.

31. Una bola de demolición de 2,500 kg oscila del extremo de una grúa, como se aprecia en la figura 17-25. El segmento oscilante del cable mide 17.3 m. Encuentre el periodo de oscilación suponiendo que el sistema puede tratarse como un péndulo simple.

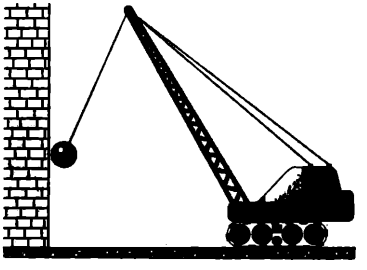


FIGURA 17-25. Ejercicio 31.

32. Se da una relación interesante entre el sistema de bloque-resorte y el péndulo simple. Supóngase que cuelga usted un objeto de masa M en el extremo de un resorte y que, cuando el objeto está en equilibrio, estira el resorte una distancia h. Demuestre que la frecuencia de este sistema es la misma que la de un péndulo simple de masa m y de longitud h, aun cuando $m \neq M$ (Fig. 17-26).

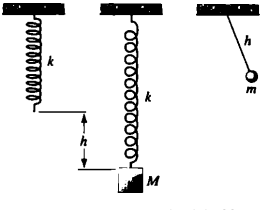


FIGURA 17-26. Ejercicio 32.

33. Un aro circular de 65.3 cm de radio y de 2.16 kg de masa se halla suspendido de un clavo horizontal. *a*) Determine su frecuencia de oscilación con pequeños desplazamientos del equilibrio. *b*) ¿Cuánto mide de largo el péndulo simple equivalente?

34. Un ingeniero quiere calcular la inercia rotacional de un objeto de forma extraña de 11.3 kg que gira alrededor de un eje a través de su centro de masa. El objeto está sostenido por un alambre en su centro de masa y sobre el eje deseado. El alambre tiene una constante torsional $\kappa = 0.513$ N · m. El ingeniero observa que este péndulo oscila 20.0 ciclos durante 48.7 s. ¿Qué valor se calcula para la inercia rotacional?

35. Una esfera sólida de 95.2 kg con 14.8 cm de radio está suspendida de un alambre vertical conectado al techo de un cuarto. Se requiere un par de 0.192 N · m para hacer girar la esfera por un

ángulo de 0.850 rad. Determine el periodo de oscilación cuando se suelta a la esfera de esta posición.

36. Un péndulo físico consta de un metro que se hace girar en un hoyo pequeño perforado en el metro a una distancia x de la marca de 50.0 cm. El periodo de oscilación observado es de 2.50 s. Determine la distancia x.

37. Un metro columpiándose de un extremo oscila con una frecuencia f_0. ¿Cuál será la frecuencia en función de f_0, si se cortara la tercera parte inferior del metro?

38. La figura 17-27 muestra un péndulo físico construido con secciones de igual longitud de un mismo tubo. El radio interno del tubo es 10.2 cm y el espesor es 6-40 mm. *a*) Calcule el periodo de oscilación alrededor del pivote mostrado. *b*) Suponga que se construye un nuevo péndulo físico girando 90° la sección inferior alrededor de un eje vertical por su centro. Demuestre que el nuevo periodo de oscilación alrededor del mismo pivote es aproximadamente 2% menor que el del péndulo original.

FIGURA 17-27. Ejercicio 38.

39. Un péndulo cuyo extremo superior está conectado de modo que le permite oscilar libremente en cualquier dirección puede servir para repetir un experimento que Foucault mostró públicamente en 1851 en París. Si se hace oscilar el péndulo, el plano de oscilación gira lentamente respecto a una línea trazada sobre el piso, aun cuando la tensión del alambre que sostiene la pesa y la atracción gravitacional de la Tierra en la pesa se encuentren en un plano vertical. *a*) Demuestre que esto se debe a que la Tierra no es un marco de referencia inercial. *b*) Demuestre que, en un péndulo de Foucault a una latitud θ, el periodo de rotación del plano es 24 sen 0 en horas. *c*) Explique en términos simples el resultado cuando $\theta = 90°$ (los polos) y $\theta = 0°$ (el ecuador).

17-6 Movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme

40. Dibuje la trayectoria de una partícula que se desplaza en el plano xy de acuerdo con $x = x_m \cos(\omega t - \pi/2)$ y $y = 2x_m \cos \omega t$.

41. Los electrones en un osciloscopio son desviados por dos fuerzas eléctricas perpendiculares entre sí, de modo que en un tiempo cualquiera t el desplazamiento está dado por $x = A \cos \omega t$ y $y = A \cos(\omega t + \phi_y)$. Describa la trayectoria de los electrones y determine su ecuación cuando *a*) $\phi_y = 0°$, *b*) $\phi_y = 30°$ y *c*) $\phi_y = 90°$.

42. Una partícula de masa m se desplaza en un plano fijo a lo largo de la trayectoria $\vec{r} = \hat{\imath}A \cos \omega t + \hat{\jmath}A \cos 3\omega t$. *a*) Dibuje la trayectoria de la partícula. *b*) Calcule la fuerza que actúa sobre ella. Encuentre además *c*) su energía potencial y *d*) su energía total en función del tiempo. *e*) ¿Es periódico el movimiento? De ser así, determine el periodo.

43. La órbita de la Luna alrededor de la Tierra, proyectada sobre un diámetro, puede considerarse un movimiento armónico simple. Calcule la constante efectiva de fuerza k en este movimiento.

17-7 Movimiento armónico amortiguado

44. En el sistema de la figura 17-17, el bloque tiene una masa de 1.52 kg y una constante de fuerza de 8.13 N/m. La fuerza de fricción está dada por $-b(dx/dt)$, donde $b = 227$ g/s. Suponga que se empuja el bloque a un lado a una distancia de 12.5 cm y que se suelta. *a*) Calcule el intervalo temporal necesario para que la amplitud pierda una tercera parte de su valor inicial. *b*) ¿Cuántas oscilaciones realiza el bloque en ese tiempo?

45. Tomando las derivadas, verifique que la ecuación 17-39 es una solución de la ecuación 17-38 en el oscilador amortiguado, a condición de que la frecuencia ω' esté dada por la ecuación 17-40.

46. Un oscilador armónico amortiguado tiene un bloque ($m = 1.91$ kg), un resorte ($k = 12.6$ N/m) y una fuerza de amortiguamiento ($F = -bv_x$). Al inicio oscila con una amplitud de 26.2 cm; a causa del amortiguamiento, la amplitud disminuye tres cuartas partes de su valor inicial al cabo de cuatro ciclos completos. *a*) ¿Qué valor tiene b? *b*) ¿Cuánta energía "se perdió" durante ellos?

17-8 Oscilaciones forzadas y resonancia

47. Considere las oscilaciones forzadas de un sistema amortiguado de bloque-resorte. Demuestre que en la resonancia *a*) la amplitud del oscilador es $x_m = F_m/b\omega$, y que *b*) la rapidez máxima del bloque oscilante es $v_{máx} = F_m/b$.

48. Por sustitución directa verifique que la ecuación 17-43 es la solución de la ecuación 17-42.

49. Verifique que la ecuación 17-43 es la forma más general de la solución de estado estacionario en un oscilador forzado (Ec. 17-42). Sea

$$x(t) = \frac{F_m}{G} \cos(\omega''' t - \beta)$$

y demuestre que ω''' debe ser igual a la frecuencia impulsora ω''.

50. *a*) Demuestre que la ecuación 17-39, solución al oscilador armónico amortiguado sin fuerza impulsora, es al mismo tiempo la solución de la ecuación 17-42, ecuación para el oscilador armónico amortiguado forzado. Hágalo por sustitución directa. *b*) Desde el punto de vista físico, ¿qué representa esta solución?

51. Un automóvil de 2,200 lb que transporta cuatro pasajeros de 180 lb se desplaza por una accidentada carretera de terracería. Las asperezas del terreno se hallan a 13 ft de distancia una de otra. Se observa que el automóvil rebota con una amplitud máxima cuando va a una velocidad de 10 mi/h. Ahora se detiene y los cuatro pasajeros salen de él. ¿Cuánto se eleva la carrocería en su suspensión con esta reducción de peso?

52. Comenzando con la ecuación 17-43, calcule la velocidad v_x ($= dx/dt$) en el movimiento oscilatorio forzado. Demuestre que la amplitud de la velocidad es

$$v_m = F_m/[(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}.$$

La forma de las ecuaciones de la sección 17-8 es idéntica a las que representan un circuito eléctrico que contiene una resistencia R, una inductancia L y una capacitancia C en serie con una fuerza electromotriz alterna $V = V_m \cos \omega' t$. Por tanto, b, m, k y F_m se parecen a R, L, $1/C$ y V_m, respectivamente, y X y V son los análogos a la carga eléctrica q y la corriente i; respectivamente. En el caso eléctrico la amplitud de corriente i_m, semejante a la amplitud de velocidad v_m, sirve para describir la calidad de la resonancia.

17-9 Oscilaciones de dos cuerpos (Opcional)

53. Supóngase que el resorte de la figura 17-21*a* tiene una constante de fuerza $k = 252$ N/m. Sean $m_1 = 1.13$ kg y $m_2 = 3.24$ kg. Calcule el periodo de oscilación del sistema de dos cuerpos.

54. *a*) Calcule la masa reducida de las siguientes moléculas atómicas: O_2, HF y CO. Exprese sus respuestas en unidades atómicas

unificadas; la masa de un átomo de hidrógeno es 1.01 u. *b*) Se sabe que una molécula HF vibra a una frecuencia de $f = 8.7 \times 10^{13}$ Hz. Encuentre la "constante de fuerza" efectiva k para las fuerzas acopladoras entre los átomos. Basándose en su experiencia personal con resortes comunes, ¿diría usted que este "resorte molecular" es relativamente rígido o no?

55. Muestre que la energía cinética del oscilador de dos cuerpos de la figura 17-21a está dada por $K = \frac{1}{2}mv_x^2$, donde m es la masa reducida y v_x $(= v_{1x} - v_{2x})$ es la velocidad relativa. Puede ayudar el hacer notar que el momento lineal es contrario mientras el sistema oscila.

PROBLEMAS

1. En sólidos las frecuencias de ubicación de los átomos a temperaturas normales son del orden de 10.0 THz. Imagine que los átomos están conectados entre sí por medio de "resortes". Suponga que un átomo de plata vibra con esta frecuencia y que el resto de ellos se encuentran en reposo. Calcule la constante de fuerza efectiva. Un mol de plata tiene un masa de 108 g y contiene 6.02×10^{23} átomos.
2. En la figura 17-28 aparece un astronauta en un dispositivo para medir la masa corporal. Diseñado para emplearse en los vehículos espaciales, tiene por objeto permitirles a los astronautas medir su masa en las condiciones ingrávidas de la órbita terrestre. Es una silla montada en un resorte, el astronauta mide su periodo de oscilación en la silla; la masa se obtiene por la fórmula del periodo en un sistema oscilante de bloque-resorte. *a*) Si M es la masa del astronauta y m es la masa efectiva de esa parte del aparato que también oscila, demuestre que

$$M = (k/4\pi^2)T^2 - m,$$

donde T es el periodo de oscilación y k es la constante de fuerza. *b*) La constante de fuerza es $k = 605.6$ N/m para el aparato y el periodo de oscilación de la silla vacía es 0.90149 s. Calcule la masa efectiva de la silla. *c*) Con un astronauta en la silla el periodo de oscilación es 2.08832 s. Calcule la masa del astronauta.

FIGURA 17-28. Problema 2.

3. Dos bloques ($m = 1.22$ kg y $M = 8.73$ kg) y un resorte ($k = 344$ N/m) están dispuestos sobre una superficie horizontal y sin fricción, como se muestra en la figura 17-29. El coeficiente de fricción estática entre ellos es 0.42. Determine la máxima amplitud posible del movimiento armónico simple, si no ocurre resbalamiento entre los bloques.

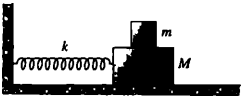


FIGURA 17-29. Problema 3.

4. En ciertas moléculas diatómicas, la fuerza de interacción entre dos átomos puede representarse mediante $F = -a/r^2 + b/r^3$, donde a y b son constantes positivas y r es la distancia de separación de los átomos. Trace una gráfica F en función de r. Después *a*) demuestre que la separación en equilibrio es b/a; *b*) Demuestre que la constante de fuerza es a^4/b^3 en las oscilaciones pequeñas alrededor de esta separación de equilibrio; *c*) encuentre el periodo de este movimiento.
5. Dos resortes están conectados a un bloque de masa m, que puede deslizarse por una superficie horizontal sin fricción, como se aprecia en la figura 17-30. Demuestre que la frecuencia de la oscilación del bloque es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2},$$

donde f_1 y f_2 son las frecuencias a que el bloque oscilaría si estuviera conectado sólo al resorte 1 o 2. (El equivalente eléctrico de este sistema es una combinación en serie de dos capacitores.)

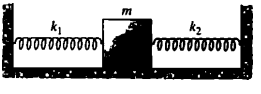


FIGURA 17-30. Problema 5.

6. Dos resortes están unidos y conectados a un bloque de masa m como se ve en la figura 17-31. La superficie no tiene fricción. Si los resortes tienen por separado las constantes de fuerza k_1 y k_2, demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}},$$

donde f_1 y f_2 son las frecuencias a que oscilaría el bloque si estuviera conectado sólo al resorte 1 o 2. (El equivalente eléctrico de este sistema es una combinación en paralelo de dos capacitores.)

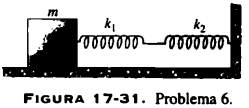


FIGURA 17-31. Problema 6.

7. Un resorte sin masa con una constante de fuerza de 3.60 N/cm se corta en mitades. *a*) ¿Cuál es la constante de cada mitad? *b*) Las dos mitades, suspendidas por separado, sostienen un bloque de masa M (Fig. 17-32). El sistema vibra a una frecuencia de 2.87 Hz. Calcule el valor de la masa M.

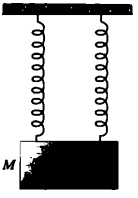


FIGURA 17-32. Problema 7.

8. Si la masa de un resorte m_s no es insignificante sino pequeña en comparación con la masa m del objeto suspendido de ella, el periodo del movimiento es $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$. Demuestre este resultado (*Sugerencia*: La condición $m_s \ll m$ es equivalente a la suposición de que el resorte se estira proporcionalmente a su longitud.) (Consúltese una solución completa del caso general en H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, vol. 37, 1969, p. 447.)

9. Demuestre que las relaciones generales entre los dos valores iniciales de la posición $x(0)$ y de la velocidad $v_x(0)$, y la amplitud x_m y el ángulo de fase ϕ de la ecuación 17-6, son

$$x_m = \sqrt{[x(0)]^2 + [v_x(0)/\omega]^2} \quad \text{y} \quad \tan\phi = -v_x(0)/\omega x(0).$$

10. Resuelva la ecuación 17-16, que expresa la conservación de energía, para dt e integre el resultado. Suponga que $x = x_m$ en $t = 0$ y demuestre que se obtiene la ecuación 17-6 (con $\phi = 0$), el desplazamiento en función del tiempo.

11. Un bloque de masa M, en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, está conectado a un soporte rígido por medio de un resorte con una constante de fuerza k. Una bala de masa m y de rapidez v lo golpea como se advierte en la figura 17-33. La bala queda incrustada dentro del bloque. En función de m, M, v y k, determine la amplitud del movimiento armónico simple resultante.

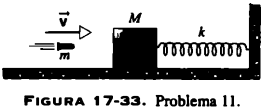


FIGURA 17-33. Problema 11.

12. Considere un resorte sin masa con una constante de fuerza k en un campo gravitacional uniforme. Conecte a él un objeto de masa m. *a*) Demuestre que, si $x = 0$ marca la posición relajada del resorte, la posición de equilibrio estático está dada por $x = mg/k$ (Fig. 17-34). *b*) Demuestre que la ecuación del movimiento del sistema masa-resorte es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

y que la solución del desplazamiento en función del tiempo es $x = x_m \cos(\omega t + \phi) + mg/k$ donde $\omega = \sqrt{k/m}$. *c*) Demuestre, pues, que el sistema tiene los mismos ω, v, a, f y T en un campo gravitacional uniforme que cuando no existe este campo, con el único cambio de que la posición de equilibrio ha sido desplazada hasta mg/k. *d*) Ahora considere la energía del sistema $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h - x)$ = constante, y demuestre que su derivada respecto al tiempo conduce a la ecuación de movimiento de la parte *b*). *e*) Pruebe que, cuando el objeto cae de $x = 0$ a una posición de equilibrio estático, $x = mg/k$, una mitad de la pérdida de la energía potencial gravitacional se convierte en ganancia de la energía potencial elástica y la otra mitad en ganancia de la energía cinética. *f*) Finalmente, considere el sistema en movimiento alrededor de la posición de equilibrio estático. Calcule por separado el cambio de la energía potencial gravitacional y de la energía potencial elástica, cuando el objeto se mueve hacia arriba una distancia x_m y cuando desciende una distancia x_m. Demuestre que el cambio total de la energía potencial es el mismo en ambos casos, a saber: $\frac{1}{2}kx_m^2$. En vista de los resultados de *c*) y de *f*), puede simplemente ignorarse el campo gravitacional uniforme al analizar con sólo modificar la posición de referencia de $x = 0$ a $x_0 = x - mg/k = 0$. La nueva curva de la energía potencial $[U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \text{constante}]$ tiene la misma forma parabólica que cuando no existe ese campo $[U(x) = \frac{1}{2}kx^2]$.

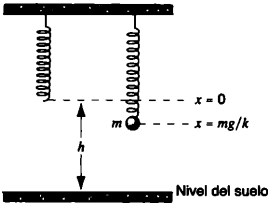


FIGURA 17-34. Problema 12.

13. Un cilindro sólido está conectado a un resorte horizontal sin masa de modo que ruede sin deslizar en la superficie horizontal, como se ve en la figura 17-35. La constante de fuerza k del resorte es 2.94 N/cm. Si se suelta el sistema del reposo en una posición donde el resorte es estirado 23.9 cm, calcule *a*) la energía cinética traslacional y *b*) la energía cinética rotacional del cilindro cuando cruza por la posición de equilibrio. *c*) Demuestre que en tales condiciones el centro de masa del cilindro efectúa un movimiento armónico simple con un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{3M/2k},$$

donde M es la masa del cilindro.

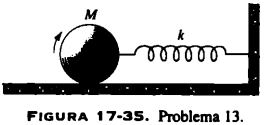


FIGURA 17-35. Problema 13.

14. *a*) Pruebe que en un movimiento armónico simple la energía potencial promedio es igual a la energía cinética promedio cuando se toma el promedio respecto al tiempo en un periodo del movimiento; demuestre también que cada promedio es igual a $\frac{1}{4}kx_m^2$. *b*) Pruebe que, cuando se toma el promedio respecto a la posición durante un ciclo, la energía potencial promedio equivale a $\frac{1}{6}kx_m^2$ y la energía cinética promedio a $\frac{1}{3}kx_m^2$. *c*) Explique en términos físicos por qué los resultados de *a*) y de *b*) son distintos.

15. Un péndulo físico se compone de un disco sólido uniforme de masa $M = 563$ g y de radio $R = 14.4$ cm, sostenido en un plano vertical por un pivote situado a una distancia $d = 10.2$ cm del centro del disco, como se muestra en la figura 17-36. Se desplaza un ángulo pequeño y luego se suelta. Determine el periodo del movimiento armónico simple resultante.

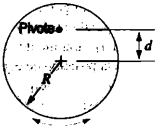


FIGURA 17-36. Problemas 15.

16. Un péndulo está formado por un disco uniforme de 10.3 cm de radio y de 488 g de masa, conectado a una varilla uniforme de 52.4 cm de longitud, con una masa de 272 g (Fig. 17-37). *a*) Calcule la inercia rotacional del péndulo alrededor del pivote. *b*) ¿Qué distancia hay entre éste y el centro de masa del péndulo? *c*) Calcule el periodo de oscilación para ángulos pequeños.

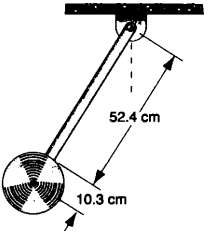


FIGURA 17-37. Problema 16.

17. Un péndulo se forma haciendo girar una varilla larga y delgada de longitud L y de masa m alrededor de un punto de ella que está a una distancia d sobre el centro. *a*) Encuentre el periodo de amplitud pequeña de este péndulo en función de d, L, m y g. *b*) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando $d = L/\sqrt{12} = 0.289L$.

18. Una rueda puede girar libremente alrededor de su eje fijo. Un resorte está conectado a uno de sus rayos, a un distancia x del eje, como se observa en la figura 17-38. Suponiendo que la rueda es un aro de masa M y de radio R, obtenga la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones de este sistema en función de M, R, r y de la constante de fuerza k. Explique los casos especiales $r = R$ y $r = 0$.

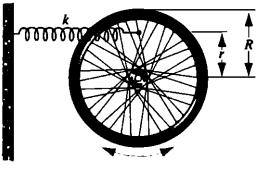


FIGURA 17-38. Problema 18.

19. Una partícula se suelta del reposo en el punto P dentro de un tazón hemisférico de radio R. *a*) Demuestre que, cuando P está cerca del fondo del tazón, la partícula experimenta movimiento armónico simple. *b*) Determine la longitud del péndulo simple equivalente.

20. Un péndulo físico tiene dos puntos posibles de pivote: uno ocupa una posición fija y el otro es ajustable a lo largo del péndulo, como se indica en la figura 17-39. Su periodo es T cuando está suspendido del pivote fijo. Después se invierte y se cuelga del pivote ajustable. La posición del pivote se mueve hasta que por tanteo el péndulo tiene el mismo periodo que antes: T. Demuestre que la aceleración en caída libre g está dada por

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

donde L es la distancia entre los dos puntos de pivote. Nótese que g puede medirse en esta forma sin que se necesite conocer la inercia rotacional del péndulo ni ninguna otra de sus dimensiones salvo L.

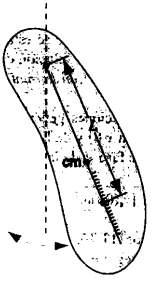


FIGURA 17-39. Problema 20.

21. Un disco de 2.50 kg y de 42.0 cm de diámetro está sostenido por una varilla ligera de 76.0 cm de largo, que gira en su extremo como se ve en la figura 17-40. *a*) El resorte liviano y torsional no está conectado al inicio. ¿Cuál es el periodo de oscilación? *b*) El resorte está conectado ahora de modo que, en equilibrio, la varilla cuelga verticalmente. ¿Cuál debería ser su constante de torsión, de manera que el nuevo periodo de oscilación sea 500 ms más corto que antes?

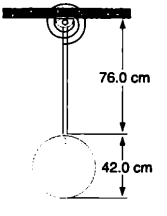


FIGURA 17-40. Problema 21.

22. Un péndulo simple de longitud L y de masa m está suspendido dentro de un automóvil que se desplaza con una rapidez cons-

tante v alrededor de un círculo de radio R. Si experimenta oscilaciones pequeñas en dirección radial alrededor de su posición de equilibrio, ¿cuál será su frecuencia de oscilación?

23. Suponga una galaxia extraña donde la estrellas están distribuidas uniformemente alrededor de un anillo de radio R y de masa total M, menos una estrella (masa m) que se halla en el centro del anillo. *a*) Suponga que la estrella central es desplazada una distancia z del plano del anillo a lo largo de su eje de simetría. Demuestre que la fuerza gravitacional en ella debida al anillo es $F_z = GMmz/(R^2 + z^2)^{3/2}$. *b*) Suponiendo $z << R$, determine la frecuencia f de oscilación si se desplaza la estrella una distancia z sobre el eje y luego se la suelta. *c*) Estime la frecuencia de oscilación en una galaxia de masa y de radio iguales al de la Vía Láctea.

24. Suponga que una fuerza impulsora F actúa horizontalmente a la derecha del punto O (el centro de oscilación) en la figura 17-12. Suponga que el péndulo se encuentra inicialmente en reposo. *a*) Al combinar los efectos de traslación y de rotación, demuestre que la aceleración resultante de la partícula en el punto P es cero. *b*) ¿Qué conclusión se desprende respecto a la fuerza en P que proviene de la fuerza aplicada F? Por esta propiedad, al centro de oscilación se le llama a veces centro de percusión.

25. Suponga que está examinando las características de un sistema de suspensión de un automóvil de 2,000 kg. La suspensión se comba 10 cm cuando el peso total del automóvil se coloca sobre ella. Además, la amplitud de la oscilación disminuye 50% durante una oscilación completa. Calcule los valores de k y de b en el resorte y en el sistema amortiguador de impactos en las ruedas. Suponga que cada una sostiene 500 kg.

26. Los osciladores no lineales forzados no necesitan oscilar en la frecuencia de impulso. Considere el oscilador cuártico impulsado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx^3 = F\cos\omega_d t,$$

donde m, k, F y ωd son constantes. Demuestre que $x(t) = A\cos\omega t$ es una solución de esta ecuación si $\omega = \omega_d/3$ y (2) $F \propto \omega_d^3$.

27. *a*) Demuestre que cuando $m_2 \to \infty$ en ecuación 17-46, $m \to m_1$. *b*) Pruebe que el efecto de una pared no infinita $m_2 < \infty$ en las oscilaciones de un cuerpo de masa m_1 en el extremo de un resorte conectado a ella consiste en reducir el periodo o en aumentar la frecuencia de la oscilación en comparación con *a*). *c*) Demuestre que cuando $m_2 = m$ el efecto es como si se cortara el resorte a la mitad, oscilando cada cuerpo independientemente alrededor del centro de masa en la mitad.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Imagine un sistema compuesto por dos objetos obligados a moverse sobre el eje x. El primero está conectado a un resorte unido al origen y el segundo está conectado a un resorte unido al primero. Los dos objetos tienen la misma masa, 0.10 kg, y la misma constante de fuerza, 1.0 N/m. *a*) Simule numéricamente su movimiento suponiendo que se tira del segundo y luego se suelta a una distancia de 1.0 cm de la posición de equilibrio. Elabore una gráfica del movimiento. *b*) Utilice una transformación rápida de Fourier (disponible en algunos programas de hojas de cálculo) para probar que el movimiento presenta dos frecuencias características. ¿Cuáles son?

2. Un objeto de masa m se desplaza sujeto a una fuerza que genera una energía potencial de $U(x) = \frac{1}{4}kx^4$. A este tipo de movimiento se le llama *oscilador cuártico*. Nótese que la frecuencia de la oscilación depende de la amplitud de las que se produzcan aquí. Suponiendo una masa $m = 0.10$ kg y una constante de fuerza $k = 100$ N/m^3, simule numéricamente el movimiento de diversas amplitudes. Grafique los resultados y encuentre la relación entre la amplitud y la frecuencia en este sistema.

CAPÍTULO 18

MOVIMIENTO ONDULATORIO

El movimiento ondulatorio aparece prácticamente en todas las ramas de la física. Se observan frecuentemente las ondas superficiales en los depósitos de agua. Las ondas sonoras y luminosas son esenciales para percibir el ambiente, porque estamos provistos de receptores (ojos y oídos) capaces de detectarlas. La semejanza de las descripciones físicas y matemáticas de estos tipos de ondas indica que el movimiento ondulatorio es uno de los temas unificadores de la física.

En este capítulo y en el siguiente se dan descripciones verbales y matemáticas de las ondas. Se utiliza el ejemplo de las ondas mecánicas, en parte porque ya fueron expuestas las leyes de la mecánica en el libro. Más adelante se explican las leyes que rigen otros tipos de ondas (entre ellas las luminosas y otras electromagnéticas). Con el propósito de simplificar la exposición, nos concentraremos en el estudio de las ondas armónicas (es decir, en las que pueden representarse mediante las funciones seno y coseno), pero los principios que examinaremos se aplican asimismo a formas de onda más complejas.

18-1 ONDAS MECÁNICAS

Las ondas son una parte común y esencial del ambiente. Nos rodean ondas sonoras, luminosas, acuáticas y de otros tipos, que estamos en condiciones de controlar y emplear para transmitir información o energía de un lugar a otro.

En todas las clases de ondas se utilizan descripciones matemáticas similares, de ahí que podamos aprender mucho acerca de ellas en general si estudiamos a fondo un tipo en particular. En este capítulo vamos a examinar las *ondas mecánicas* solamente. Escogeremos un tipo especial de onda mecánica: la oscilación de una cuerda estirada como la de una guitarra.

Las ondas mecánicas se desplazan por un medio elástico. Pueden originarse cuando provocamos una perturbación inicial en algún sitio de este último. La perturbación se desplaza por el medio gracias a las propiedades elásticas del medio.

En el nivel microscópico, las fuerzas entre átomos hacen que se propaguen las ondas mecánicas. Cada átomo ejerce una fuerza sobre los que lo rodean, y a través de ella transmite su movimiento a los cercanos. Sin embargo, las partículas del medio no experimentan desplazamiento neto alguno en dirección de la onda; conforme pasa la onda, simplemente oscilan y recorren una distancia pequeña alrededor de su posición de equilibrio.

Por ejemplo, una hoja que flote en un lago puede subir y bajar al pasar una onda, pero después que haya pasado casi recobrará su posición original. Una onda sonora se desplaza por el aire, pero no se observa movimiento neto en las moléculas del aire en la dirección que sigue la onda. La onda puede transportar energía y momento de un lugar a otro, sin que ninguna partícula material realice ese recorrido. En el siglo XV, Leonardo da Vinci observó respecto a las ondas del agua: "A menudo sucede que la onda escapa del lugar de su creación, no así el agua; a semejanza de las ondas que el viento produce en un trigal, vemos las ondas deslizarse por él mientras los granos no se mueven".

18-2 TIPOS DE ONDAS

Al mencionar las ondas acuáticas, luminosas y sonoras como ejemplos del movimiento ondulatorio, estamos clasificándolos atendiendo a sus propiedades físicas generales. También podemos clasificarlas en otras formas.

1. *Dirección de la partícula en movimiento.* Las ondas mecánicas pueden clasificarse examinando cómo la dirección del movimiento de las partículas en el medio se relaciona con la de la propagación de la onda. Tendremos una onda *transversal* si su movimiento es perpendicular a la dirección de propagación. Por ejemplo, cuando en un extremo se hace oscilar una cuerda bajo tensión, una onda transversal la recorre; la perturbación se desplaza por la cuerda, pero las partículas de ésta vibran en ángulo recto con la dirección en que se propaga la perturbación (Fig. 18-1*a*). A esta categoría pertenecen las ondas luminosas a pesar de no ser mecánicas.

Tendremos una onda *longitudinal* si el movimiento de las partículas en una onda mecánica oscila en dirección de la propagación. Por ejemplo, cuando en un extremo hacemos oscilar un resorte bajo tensión, una onda longitudinal se mueve por él; las espirales vibran hacia adelante y hacia atrás, paralelamente a la dirección en que la perturbación se propaga por el resorte (Fig. 18-1*b*). Las ondas sonoras en un gas pertenecen a este categoría. Las estudiaremos más a fondo en el Capítulo 19.

Algunas ondas no son ni puramente longitudinales ni puramente transversales. Así, en las ondas de la superficie del agua las partículas se desplazan hacia arriba y abajo, hacia adelante y atrás, describiendo trayectorias elípticas a medida que las ondas pasan por ellas.

2. *Número de dimensiones.* Las ondas pueden clasificarse según se propaguen en una, dos o tres dimensiones. Las que se mueven a lo largo de una cuerda o resorte en la figura 18-1 son unidimensionales. Las ondas o rizos superficiales del agua tienen dos dimensiones que se producen al dejar caer una piedra en un estanque tranquilo (Fig. 18-2). Y son tridimensionales las ondas sonoras y luminosas que se dispersan radialmente desde una fuente pequeña.

3. *Periodicidad.* Las ondas pueden clasificarse también por la forma en que las partículas del medio se desplazan respecto al tiempo. Por ejemplo, podemos producir un *pulso* que se propague en una cadena estirada, con sólo aplicar un movimiento lateral en su extremo (Fig. 18-1*c*). Las partículas permanecen en reposo hasta que el pulso llegue a ellas, luego se mueven durante un breve lapso y después vuelven al reposo. Si continuamos haciendo oscilar el extremo de la cuerda (figura 18-1*a*), creamos un *tren de ondas* que se propagan por la cuerda. Si el movimiento es periódico, produciremos un *tren periódico de ondas* en el que cada partícula presenta movimiento periódico. El caso especial más simple de este tipo es la *onda armónica*, donde todas las partículas experimentan movimiento armónico simple.

4. *Forma del frente de onda.* Imagine una piedra que se deja caer en un lago tranquilo. Se propagan rizos circulares hacia afuera del punto donde entró en el agua (Fig. 18-2). En uno de ellos todos los puntos se hallan en el mismo estado de movimiento. Estos puntos definen una superficie denominada *frente de onda.* Si el medio tiene densidad uniforme, las ondas se mueven en ángulo recto con el frente de onda. Se llama *rayo* la línea normal al frente, e indica la dirección del movimiento de las ondas.

Los frentes de onda tienen muchas formas. Una fuente puntual en la superficie del agua produce ondas bidimensionales con frentes circulares, y rayos que irradian hacia afuera desde el punto de la perturbación (como en la figura 18-2). En cambio, un palo muy largo que se deje caer horizontalmente en el agua, produciría (casi en el centro) perturbaciones que se propagan como líneas rectas donde los rayos son líneas paralelas. La analogía tridimensional en que las perturbaciones siguen una sola dirección, es la *onda plana.* En un momento dado, las condiciones son iguales en todas partes en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Los frentes de onda son planos y los rayos son rectas paralelas (Fig. 18-3*a*). La analogía tridimensional de las ondas circulares son las ondas esféricas. En ellas la perturbación se propaga hacia afuera en todas direcciones desde

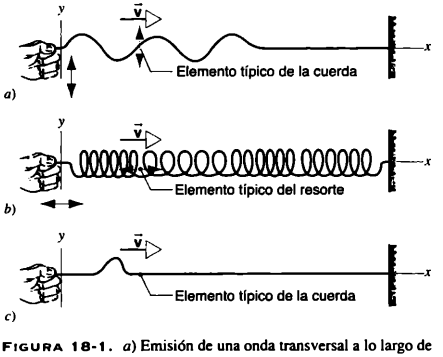


FIGURA 18-1. *a*) Emisión de una onda transversal a lo largo de una cuerda. Los elementos de la cuerda vibran en ángulo recto con la dirección en que se propaga la onda. *b*) Emisión de una onda longitudinal a lo largo de un resorte. Los elementos del resorte vibran paralelamente a la dirección en que se propaga la onda. *c*) Emisión de un solo pulso a lo largo de una cuerda.

FIGURA 18-2. Ondas en la superficie de un lago. Los rizos circulares representan los frentes de onda. Los rayos, perpendiculares a los frentes de onda, indican la dirección en que se mueve la onda.

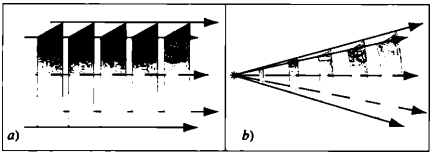


FIGURA 18-3. *a*) Onda plana. Los planos representan frentes de onda separados por una longitud de onda; las flechas representan rayos. *b*) Onda esférica. Los frentes de onda, separados por una longitud de onda, son superficies esféricas, y los rayos, siguen la dirección radial.

una fuente puntual de ondas. Los frentes de onda son esféricos, y los rayos, líneas radiales que salen de la fuente en todas direcciones (Fig. 18-3*b*). Lejos de la fuente, los frentes esféricos presentan una curvatura muy pequeña, y en una región limitada pueden considerarse a menudo planas. Por supuesto, los frentes de onda presentan muchas otras formas.

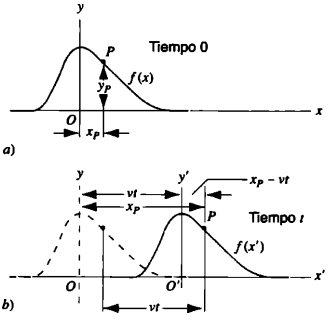


FIGURA 18-4. *a*) Pulso transversal presentado como una instantánea en el tiempo $t = 0$. El punto P representa un lugar particular en la fase del pulso, *no* un punto particular del medio (la cuerda, por ejemplo). *b*) En un tiempo t más tarde, el pulso ha recorrido una distancia vt en la dirección x positiva. El punto P en la fase también la ha recorrido. El pico del pulso define el origen de la coordenada x'.

18-3 ONDAS VIAJERAS

Vamos a estudiar un ejemplo de onda mecánica: una forma de onda transversal que se desplaza en una cuerda larga y extendida. Suponemos una cuerda "ideal" donde la perturbación, sin importar si se trata de un pulso o un tren de ondas, conserva su forma al difundirse. Para que eso ocurra, han de ser muy pequeñas las pérdidas por fricción y otros mecanismos de disipación de la energía. La perturbación se halla en el plano xy, y se propaga en la dirección x.

En la figura 18-4*a* se muestra una forma de onda arbitraria en $t = 0$; podemos considerar que es una instantánea del pulso que se desplaza por la cuerda de la figura 18-1*c*. Supongamos que el pulso sigue la dirección positiva x con una rapidez v. En un tiempo más tarde t, el pulso habrá recorrido una distancia vt, como se indica en la figura 18-4*b*. Nótese que la forma de onda es la misma en $t = 0$ que en momentos posteriores.

La coordenada y indica el desplazamiento transversal de un punto particular en la cuerda. Depende tanto de la posición x como del tiempo t. Esta dependencia en ambas variables se indica como $y(x,t)$.

Podemos representar la forma de onda de la figura 18-4*a* así:

$$y(x, 0) = f(x), \qquad (18\text{-}1)$$

donde f es una función que describe la forma de la onda. En el tiempo t, la forma de onda debe describirse todavía mediante la misma función f, porque hemos supuesto que la forma no cambia al propagarse la onda. En relación con el origen O' del marco de referencia que se desplaza junto con el pulso, la forma se describe por medio de la función $f(x')$, como se aprecia en la figura 18-4*b*. La relación entre las coordenadas x en los dos marcos de referencia es $x' = x - vt$, como se ve en la figura 18-4*b*. Así pues, en el tiempo t, la onda se describe con

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt). \qquad (18\text{-}2)$$

En otras palabras, la función $f(x - vt)$ tiene la misma forma respecto al punto $x = vt$ en el tiempo t, que la función $f(x)$ en relación con el punto $x = 0$ en el tiempo $t = 0$.

Si queremos describir enteramente la onda, es preciso especificar la función f. Más adelante estudiaremos las ondas armónicas, en las cuales f es una función seno o coseno.

Las ecuaciones 18-1 y 18-2 juntas indican que podemos transformar una función de cualquier forma en una onda, viajando en la dirección positiva x, con sólo sustituir en todas por x la cantidad $x - vt$ que aparece en $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(x - vt) = (x - vt)^2$. Más aún, una onda que se propague en la dirección positiva x dependerá de x, y de t *sólo* en la combinación $x - vt$; por tanto, $x^2 - (vt)^2$ no la representa.

Sigamos el movimiento de una parte (o *fase*) de la onda, como la de la del sitio P de la forma de onda en la figura 18-4. Si queremos que la onda conserve su forma al desplazarse, la coordenada y (y_P de P) no debe cambiar. En la ecuación 18-2 vemos que la única manera de que eso ocurra, es que en x_P (la coordenada x de P), aumente a medida que t crece de modo que la cantidad $x_P - vt$ mantenga un valor fijo. Es decir, al evaluar esta cantidad, se obtiene el mismo resultado en P en la figura 18-4*b*, y en P en la figura 18-4*a*. Esto se aplica a cualquier lugar en la forma de onda y durante todos los tiempos t. Así pues, el movimiento de una fase particular de la onda deberá tener

$$x - vt = \text{constante}. \qquad (18\text{-}3)$$

Podemos verificar que la ecuación 18-3 caracteriza el movimiento de la fase de la forma de onda, con sólo derivar respecto al tiempo, obteniendo así

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dt} = v. \qquad (18\text{-}4)$$

FIGURA 18-5. Un observador situado en un punto particular del eje x, registraría este desplazamiento y en función del tiempo a medida que pasa el pulso de la figura 18-4. Nótese que la forma parece invertida, porque el borde frontal del pulso viajero llega al observador momentos antes. Es decir, aquí los desplazamientos que registra en esos momentos están más cerca del origen.

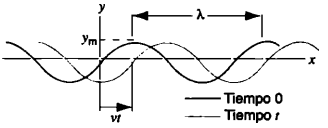


FIGURA 18-6. En $t = 0$ (color más oscuro), la cuerda tiene la forma senoidal dada por $y = y_m \operatorname{sen} 2\pi x/\lambda$. Un tiempo t más tarde (color más claro), la onda recorrió a la derecha una distancia $x = vt$, y la cuerda presenta una forma dada por $y = y_m \operatorname{sen} 2\pi(x - vt)/\lambda$.

La velocidad dx/dt, describe el movimiento de la fase de la onda, de ahí que se le conozca como *velocidad de fase*. Suponemos que v es una constante positiva, independientemente de cualquier propiedad de la onda, pero quizá (como veremos luego) sea dependiente de las propiedades del medio.

Si la onda se desplaza en la dirección *negativa* x, lo único que necesitamos es reemplazar v por $-v$. En este caso obtendríamos

$$y(x, t) = f(x + vt), \tag{18-5}$$

donde una vez más, $f(x)$ representa la forma en $t = 0$. Dicho de otra manera, al sustituir en $f(x)$ la cantidad $x + vt$ en vez de x, se produce una onda que se moverá a la izquierda de la figura 18-4. Entonces el movimiento de cualquier fase de la onda puede caracterizarse por la condición de que $x + vt =$ constante, y por analogía con la ecuación 18-4 podemos demostrar que $dx/dt = -v$; eso significa que el componente x de la velocidad de fase es negativo en este caso.

La función $y(x, t)$ contiene la descripción completa de la forma de la onda y de su movimiento. En un momento dado —digamos t_1—, la función $y(x, t_1)$ produce y a partir de x, que define una curva. Esta curva representa la forma actual de la cuerda en ese momento, y puede considerarse una "instantánea" de la onda. Por otra parte, podemos examinar el movimiento de un punto en la cuerda —digamos, en la coordenada fija x_1—. Entonces la función $y(x_1, t)$, nos indica la coordenada y en ese punto en función del tiempo. La figura 18-5 muestra cómo un punto en el eje x podría moverse con el tiempo, al pasar por allí el pulso de la figura 18-4, siguiendo la dirección positiva x. En los tiempos cercanos a $t = 0$, el punto no se mueve en absoluto. Después comienza a hacerlo de manera gradual, al llegar el primer borde del pulso de la figura 18-4. Una vez terminado el pico de la onda, el desplazamiento del punto vuelve rápidamente a cero al pasar el último borde.

Ondas senoidales

La descripción anterior es muy general. Se aplica a formas arbitrarias de onda, tanto a las transversales como a las longitudinales. Pongamos por ejemplo, el caso de una forma de onda transversal de forma senoidal, que se presta a aplicaciones muy importantes. Supóngase que en el tiempo $t = 0$, tenemos un tren de ondas a lo largo de una cuerda dadas por

$$y(x, 0) = y_m \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} x. \tag{18-6}$$

La forma de la onda aparece en la figura 18-6. El desplazamiento máximo y_m recibe el nombre de *amplitud* de la curva senoidal. El valor del desplazamiento transversal y, es el mismo en cualquier x, que en $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. El símbolo λ representa la *longitud de onda* del tren de ondas, e indica la distancia entre dos puntos contiguos de la onda, que tengan la misma fase. Si la onda se propaga en la dirección $+x$ con la rapidez de fase v, la ecuación de onda es

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt). \tag{18-7}$$

Adviértase que la ecuación presenta la forma $f(x - vt)$ que se requiere en una onda viajera (Ec. 18-2).

El *periodo* T de la onda, es el tiempo necesario para que un punto en determinada coordenada x cumpla un ciclo completo de movimiento transversal. Durante el tiempo T, la onda recorre una distancia vT que debe corresponder a una longitud de onda λ, así que

$$\lambda = vT. \tag{18-8}$$

La inversa del periodo se llama la *frecuencia* f de la onda: $f = 1/T$. La frecuencia tiene unidades de ciclos por segundo o hertz (Hz). En el Capítulo 17 discutimos acerca del periodo y la frecuencia.

Poniendo la ecuación 18-8 en la ecuación 18-17, obtenemos otra expresión de la onda:

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{18-9}$$

En esta forma, es evidente que en cualquier momento y tiene el mismo valor en x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente, y que y tiene en cualquier posición el mismo valor en los tiempos t, $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

Para reducir la ecuación 18-9 a una forma más compacta, introducimos dos magnitudes: el *número de onda* k y la *frecuencia angular* ω. Se definen por medio de

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \tag{18-10}$$

El número de onda k es, como ω, una magnitud angular, y las unidades de ambas se dan en radianes. Por ejemplo, las unidades de k podrían ser rad/m, y las de ω rad/s. Expresada en estas magnitudes, la ecuación de una onda senoidal que sigue la dirección positiva x (a la derecha de la figura 18-6) es

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{18-11}$$

La ecuación de una onda senoidal que siga la dirección negativa x (a la izquierda de la figura 18-6) es

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t). \tag{18-12}$$

Al comparar las ecuaciones 18-8 y 18-10, vemos que la rapidez de fase v de la onda (que a menudo llamaremos *rapidez de onda*) está dada por

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \tag{18-13}$$

Velocidad transversal de una partícula

El movimiento de una partícula en una onda transversal, como la de la figura 18-6, se da en la dirección y. La rapidez de onda describe el movimiento de barda en la dirección del desplazamiento (en la dirección x). *No* se caracteriza por el movimiento transversal de las partículas en la cuerda.

Para encontrar la velocidad transversal de una partícula en la cuerda, se determina el cambio de la coordenada y con el tiempo. Nos concentramos en una partícula de la cuerda, es decir, en cierta coordenada x. Por tanto, necesitamos la derivada de y respecto a t en una x constante. Esto se representa mediante el símbolo $\partial y/\partial t$, que indica la *derivada parcial* de y respecto a t, manteniendo constante el resto de las variables de las que puede depender y. Representamos la velocidad de la partícula que varía con x (su lugar) y también con t, como $u_y(x, t)$. Si suponemos que se trata de una onda senoidal de la forma de la ecuación 18-11, tendremos entonces

$$u_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t]$$

$$= -y_m\omega \cos(kx - \omega t) \tag{18-14}$$

Según el lugar de una partícula y el tiempo en que es observada, la ecuación 18-14 muestra que la velocidad transversal puede fluctuar entre $-y_m\omega$ a $+ y_m\omega$.

Prosiguiendo en esta forma, podemos calcular la aceleración transversal de la partícula en el punto x de acuerdo con

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = -y_m\omega^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$= -\omega^2 y. \tag{18-15}$$

La ecuación 18-15 presenta la misma forma que la ecuación 17-5; la aceleración transversal en cualquier punto es proporcional a su desplazamiento transversal, sólo que en dirección opuesta. Ello significa que las partículas de la cuerda experimentan un movimiento armónico transversal simple al pasar las ondas senoidales.

Recuerde las diferencias entre la rapidez v de la onda, y la velocidad transversal u_y de la partícula. Esa rapidez v representa la onda completa; todos los puntos en esta fase de la onda siguen la misma dirección con la rapidez v. No obstante, la velocidad transversal u_y de una partícula depende del lugar de la partícula y del tiempo. En un instante una partícula podría tener $u_y = 0$, y otra podría moverse con la velocidad transversal máxima (que es $y_m\omega$, según la ecuación 18-14). Un instante después los papeles podrían invertirse. Conviene señalar que, como se explica en la siguiente sección, la rapidez de onda v depende de las propiedades del medio y no de las de la onda. Por el contrario, la velocidad transversal de la partícula depende de las propiedades de la onda —entre ellas amplitud y frecuencia—, como se aprecia en la ecuación 18-14, y no de las del medio.

Fase y constante de fase

En las ondas viajeras de las ecuaciones 18-11 y 18-12, hemos supuesto que el desplazamiento y es cero en la posición $x = 0$ durante el tiempo $t = 0$. Por supuesto, no debe ser así necesariamente. La expresión general de la onda senoidal viajera en la dirección positiva x es

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi). \tag{18-16}$$

La magnitud que aparece en el argumento del seno —a saber, $kx - \omega t - \phi$—, recibe el nombre de *fase* de la onda. Se dice que están "en fase" dos ondas de igual fase (o con fases que difieran en un múltiplo entero de 2π), es decir, que ejecutan el mismo movimiento al mismo tiempo.

Al ángulo ϕ se le conoce como *constante de fase*. Esta constante no afecta a la forma de la onda; la mueve hacia adelante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo. Para visualizar eso, reescribimos la ecuación 18-16 en dos formas equivalentes:

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}\left[k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right] \tag{18-17a}$$

o bien,

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}\left[kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]. \tag{18-17b}$$

La figura 18-7*a* ofrece una "instantánea" en cualquier tiempo t de las dos ondas representadas en las ecuaciones 18-11 (donde $\phi = 0$) y 18-16. Nótese que cualquier punto en la onda

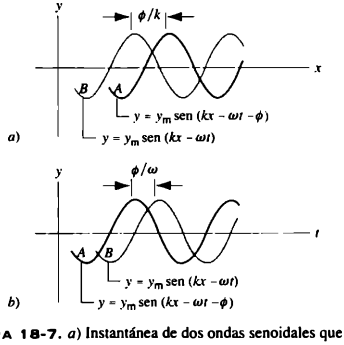


FIGURA 18-7. *a*) Instantánea de dos ondas senoidales que se propagan en la dirección positiva x. La onda A tiene una constante de fase ϕ, y la onda B tiene $\phi = 0$. La primera se halla a una distancia de ϕ/k delante de la segunda. *b*) Movimiento de un solo punto en el tiempo debido a las dos ondas. La onda A está un tiempo ϕ/ω delante de la onda B. Nótese que, en la gráfica de y en función de t, "delante" significa "a la izquierda de"; mientras que en una gráfica de y en función de x, significa "a la derecha de", si las ondas siguen la dirección positiva x.

descrita por la ecuación 18-17*a* (cierta cresta, por ejemplo), está a una distancia ϕ/k *adelante* del punto correspondiente en la onda descrita por la ecuación 18-11.

En forma equivalente, si quisiéramos observar el desplazamiento en una posición fija x debida a las dos ondas representadas en las ecuaciones 18-11 y 18-16, obtendríamos el resultado indicado en la figura 18-7*b*. La onda descrita en la ecuación 18-17*b* también está *adelante* de la onda que tiene $\phi = 0$, en este caso por una diferencia temporal ϕ/ω.

Cuando la constante de fase en la ecuación 18-16 es positiva, la onda correspondiente se encuentra adelante de una onda descrita por una ecuación similar que tenga $\phi = 0$. Por ello introdujimos la constante de fase con un signo negativo en la ecuación 18-16. Cuando una onda está adelante de otra en el tiempo o en el espacio, se dice que "guía". En cambio, al introducir una constante negativa de fase en la ecuación 18-16, la onda correspondiente se mueve detrás de la que tenga $\phi = 0$, por lo que se dice entonces que la onda "se rezaga".

Si nos concentramos en un punto particular de la cuerda, digamos x_1, el desplazamiento y en él puede escribirse

$$y(t) = -y_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi'),$$

donde hemos sustituido una nueva constante de fase $\phi' = \phi - kx_1$. Esta expresión de $y(t)$ se parece a la ecuación 17-6, referente al movimiento armónico simple. Así pues, un elemento determinado de la cuerda experimenta movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio, conforme este tren de ondas se desplaza por la cuerda.

PROBLEMA RESUELTO 18-1. En un extremo de una larga cuerda horizontal, una onda senoidal transversal es generada por una barra que mueve el extremo hacia arriba, y abajo una distancia de 1.30 cm. El movimiento es continuo y se repite periódicamente 125 veces por segundo. *a*) Si se descubre que la distancia entre las crestas contiguas de onda es 15.6 cm, calcule la amplitud, frecuencia, rapidez y longitud de onda del movimiento. *b*) Suponiendo que la onda siga la dirección $+x$, y que en $t = 0$, el elemento de la cuerda en $x = 0$ se halla en posición de equilibrio $y = 0$, y que se mueve hacia abajo, encuentre la ecuación de la onda.

Solución *a*) Al recorrer la barra un total de 1.30 cm, el extremo de la cuerda se aleja $\frac{1}{2}$ (1.30 cm) = 0.65 cm de la posición de equilibrio, primero arriba de ella y luego debajo; por tanto, la amplitud y_m es 0.65 cm.

El movimiento entero se repite 125 veces por segundo, y por lo mismo la frecuencia es 125 vibraciones por segundo, es decir, $f = 125$ Hz.

La distancia entre las crestas contiguas de onda dada como 15.6 cm, es la longitud de onda como se ve en la figura 18-6. Por tanto, $\lambda = 15.6$ cm $= 0.156$ m.

La rapidez de la onda está dada por la ecuación 18-13:

$$v = \lambda f = (0.156 \text{ m})(125 \text{ s}^{-1}) = 19.5 \text{ m/s}.$$

b) La expresión general del movimiento de una onda senoidal transversal en la dirección $+x$, está dada por la ecuación 18-16,

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi).$$

Al imponer las condiciones iniciales ($y = 0$ y $\partial y/\partial t <$ o para $x = 0$ y $t = 0$, obtenemos

$$y_m \operatorname{sen}(-\phi) = 0 \quad \text{y} \quad -y_m\omega\cos(-\phi) < 0,$$

lo cual significa que la constante de fase ϕ puede considerarse cero (o cualquier otro múltiplo entero de 2π). Por tanto, en esta onda

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

y con los valores que acabamos de encontrar,

$$y_m = 0.65 \text{ cm},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.156 \text{ m}} = 40.3 \text{ rad/m},$$

$$\omega = vk = (19.5 \text{ m/s})(40.3 \text{ rad/m}) = 786 \text{ rad/s},$$

obtenemos como ecuación de la onda

$$y(x, t) = (0.65 \text{ cm}) \operatorname{sen}[(40.3 \text{ rad/m})x - (786 \text{ rad/s})t].$$

PROBLEMA RESUELTO 18-2. A medida que la onda del problema resuelto 18-1 pasa a través de la cuerda, las partículas de esta última se mueven hacia abajo y arriba en ángulo recto con la dirección del movimiento ondulatorio. *a*) Encuentre expresiones para la velocidad y aceleración de una partícula P situada en $x_P = 0.245$ m. *b*) Evalúe el desplazamiento transversal, la velocidad y aceleración de esta partícula cuando $t = 15.0$ ms.

Solución *a*) Para una partícula en $x_P = 0.245$ m, ver que se incluya m en la onda del problema resuelto 18-1, por medio de la ecuación 18-14 obtenemos

$$\begin{aligned} u_y(x_P, t) &= -(0.65 \text{ cm})(786 \text{ rad/s}) \\ &\quad \times \cos[(40.3 \text{ rad/m})(0.245 \text{ m}) - (786 \text{ rad/s})t] \\ &= -(511 \text{ cm/s}) \cos[9.87 \text{ rad} - (786 \text{ rad/s})t]. \end{aligned}$$

De manera análoga, usando la ecuación 18-15 encontramos que la magnitud de la aceleración máxima es $\omega^2 y_m = 4.02 \times 10^5$ cm/s^2, así que

$$a_y(x_P, t) = -(4.02 \times 10^5 \text{ cm/s}^2) \operatorname{sen}[9.87 \text{ rad} - (786 \text{ rad/s})t].$$

b) En $t = 15.0$ ms, evaluamos las expresiones de y, u_y y a_y, y nos da

$$y = -0.61 \text{ cm}, \quad u_y = +173 \text{ cm/s}, \quad a_y = +3.8 \times 10^5 \text{ cm/s}^2.$$

Es decir, la partícula se aproxima a su desplazamiento negativo máximo, sigue la dirección positiva y (alejándose de ese máximo) y acelera en la dirección positiva y (su velocidad crece a medida que la partícula se dirige a su posición de equilibrio).

18-4 RAPIDEZ DE ONDA EN UNA CUERDA ESTIRADA

Hasta ahora hemos obtenido una expresión general de una onda transversal (por ejemplo, la ecuación 18-16). La rapidez de fase se da en la ecuación 18-13: $v = \lambda f = \omega/k$. Sin embargo, la expresión anterior nada nos dice de la rapidez de fase; muestra tan sólo cómo la longitud de onda y la frecuencia se relacionan entre sí respecto a la rapidez de onda.

La rapidez de fase de una onda senoidal puede obtenerse a partir de las propiedades mecánicas del medio por donde se propaga la onda (en este caso una cuerda estirada). En la presente sección, vamos a determinar la rapidez de fase aplicando las leyes de Newton al movimiento de la onda a través de la cuerda. En otros casos (como el sonido que se propaga en un gas), pueden emplearse métodos similares para encontrar una expresión de la rapidez de onda.

La rapidez de una onda depende de las propiedades del medio, suponiéndose que es independiente de la frecuencia y de la longitud de onda. (Si la rapidez depende de estas dos últimas variables, se dice que el medio es *dispersivo*, aspecto que explicaremos más adelante en esta sección.) Los elementos de la cuerda ejercen tracción en sus vecinos con una fuerza dada por la tensión F en la cuerda. Cuanto más grande sea la tensión, mayor será la fuerza entre los elementos contiguos, y más rápidamente cualquier perturbación se propagará a través de ella. En conclusión, la rapidez de la onda debe incrementarse al aumentar la tensión.

En cambio, la inercia de los elementos limita la eficacia con que la tensión los acelerará para mover la onda por la cuerda. Así, con la misma tensión, la rapidez de la onda será menor en cuerdas provistas de elementos más masivos. La masa de los elementos pequeños puede darse en términos de la *densidad de masa* μ (masa por longitud unitaria), que en una cuerda uniforme es igual a la masa dividida entre su longitud. Así pues, con base en los principios generales anteriores, cabe suponer que

$$v \propto \frac{F^a}{\mu^b},$$

donde a y b, son los exponentes que deben determinarse a partir del análisis.

Resulta que podemos deducir los valores de a y b, basándonos en un *análisis dimensional*, es decir, sólo hay una combinación de fuerza y de densidad de masa que produce una cantidad con las dimensiones de velocidad. Con este tipo de análisis (véase Ej. 5), se deduce $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$, así que $v \propto \sqrt{F/\mu}$, o introduciendo una constante de proporcionalidad C, tenemos $v = C\sqrt{F/\mu}$. Como veremos en seguida, el análisis mediante las leyes de Newton ofrece el mismo resultado, y prueba que $C = 1$.

Análisis mecánico

Por medio de este análisis, obtendremos ahora una expresión para, la rapidez de un pulso en una cuerda estirada. En la figura 18-8, presentamos una "instantánea" de un pulso de onda que en una cuerda avanza de izquierda a derecha con una rapidez v. Podemos imaginar que la cuerda entera no se mueve así, sino de derecha a izquierda con la misma rapidez, de manera que el pulso de onda permanece fijo en el espacio (quizá tirando de la cuerda mediante un tubo sin fricción que tenga la forma deseada del pulso). Ello significa simplemente lo siguiente: no suponemos que el marco de referencia sean las paredes entre las que se estira la cuerda; más bien, escogemos un marco de referencia que ofrece movimiento uniforme respecto a él. En efecto, observamos el pulso mientras el movimiento se desplaza por la cuerda con la misma velocidad que el pulso. En cualquiera de los marcos podemos utilizar las leyes de Newton, porque se refiere sólo a las aceleraciones, y éstas son iguales en ambos marcos. Por mera casualidad seleccionamos un marco más adecuado.

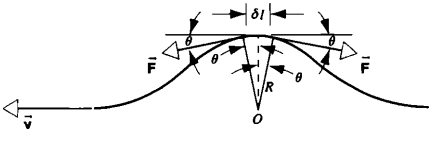


FIGURA 18-8. Un pulso que se dirige a la derecha en una cuerda estacionaria, equivale a un pulso en una posición fija de una cuerda que se dirige a la izquierda. Consideramos las fuerzas de tensión en una sección de la cuerda de longitud δl en el pulso "fijo".

Consideramos una pequeña sección del pulso de longitud δl, como se muestra en la figura 18-8. La sección forma aproximadamente un arco de círculo con radio R. La masa δm de este elemento es $\mu\ \delta l$, donde μ es la densidad de masa de la cuerda. La tensión F de dicha cuerda, es un jalón tangencial en los extremos de este pequeño segmento. Los componentes horizontales de $\vec{F}$ se cancelan, y los verticales son iguales a F sen θ. En consecuencia, la fuerza vertical total F_y es $2F$ sen θ. Dado que θ es pequeño, podemos suponer que sen $\theta \approx \theta$. En la figura 18-8 vemos que $2\theta = \delta l/R$, y de ese modo obtenemos

$$F_y = 2F \operatorname{sen}\theta \approx 2F\theta = F\frac{\delta l}{R}. \qquad (18\text{-}18)$$

Esta ecuación contiene la fuerza que da origen a la aceleración centrípeta v^2/R de las partículas de la cuerda dirigidas hacia O. Nótese que la velocidad tangencial v de este elemento de masa en la parte superior del arco es horizontal, y su magnitud es igual a la rapidez de onda. Al aplicarle la segunda ley de Newton al elemento de la cadena δm, tenemos $\Sigma F_y = (\delta m)\, a_y$, o utilizando la ecuación 18-18,

$$F\frac{\delta l}{R} = (\delta m)\, a_y = (\delta m)\frac{v^2}{R} = (\mu\ \delta l)\frac{v^2}{R},$$

donde hemos empleado $a_y = v^2/R$ para la aceleración centrípeta, y $\delta m = \mu\delta l$ para la masa del elemento de la cuerda. A partir de los elementos primero y último de la ecuación anterior obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (18\text{-}19)$$

Con base en el análisis mecánico, la ecuación 18-19 muestra que la constante C introducida en el análisis dimensional tiene el valor 1.

Si la amplitud del pulso fuera muy grande comparada con la longitud de la cuerda, no habríamos podido usar la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Más aún, la tensión F en la cuerda habría cambiado con la presencia del pulso, pero supusimos que no cambiaba su tensión original en la cuerda extendida. Así pues, nuestro resultado se aplica sólo con desplazamientos transversales relativamente pequeños de la cuerda, caso que se presta a muchas aplicaciones en la práctica.

Una onda periódica que entra en un medio, suele deberse a una influencia externa que perturba el medio a cierta frecuencia. La que se propaga por él tendrá la misma frecuencia que su fuente. Las propiedades del medio determinan la rapidez de la onda. Con una frecuencia f de ella y con su rapidez v en el medio, la longitud de la onda periódica *en ese medio*

se obtiene mediante la ecuación 18-13, $\lambda = v/f$. Cuando una onda pasa de un medio a otro de distinta rapidez de onda (por ejemplo, dos cuerdas de distinta densidad lineal de masa), la frecuencia en uno de ellos ha de ser igual a la del otro. (De lo contrario, habrá discontinuidad en el punto donde se unan las dos cuerdas.) Con todo, las longitudes de onda difieren entre sí. La relación entre ellas se deduce de la igualdad de las frecuencias f_1 y f_2 en ambos medios, es decir, $f_1 = f_2$ nos da

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}. \qquad (18\text{-}20)$$

Rapidez de grupo y dispersión (Opcional)

Las ondas senoidales puras son una herramienta matemática muy útil, que nos ayuda a entender el movimiento ondulatorio. En la práctica, nos servimos de otras clases de ondas para transportar energía e información. Pueden ser periódicas y no senoidales (como las ondas cuadradas o de "dientes de sierra"), aunque también pueden ser pulsos no periódicos como las de la figura 18-4.

Nos hemos valido de la rapidez de fase para describir el movimiento de dos tipos de onda: el pulso que conserva su forma al ir desplazándose (Fig. 18-4), y la onda senoidal pura (Fig. 18-6). En otros casos, hay que utilizar una rapidez diferente, denominada *rapidez de grupo*, que es aquella con que se mueve la información en una onda real.

La figura 18-9 muestra un pulso que se propaga a través de un medio. Su forma cambia conforme avanza; el pulso se esparce o *dispersa*. (La dispersión no es lo mismo que disipación de energía. El contenido energético del pulso en la figura 18-9 puede permanecer constante al desplazarse, aunque el pulso se disperse. Suponemos que el medio es *dispersivo*, pero no necesariamente *disipativo*.) Como se aprecia en la sección 18-7, cualquier onda periódica puede considerarse la suma o sobreposición de una serie de ondas senoidales de diversa frecuencia o longitud de onda. Las frecuencias, las amplitudes y fases de las ondas senoidales compuestas, han de escogerse rigurosamente siguiendo un procedimiento matemático estándar, llamado *análisis de Fourier*, de modo que las ondas se sumen para que produzcan la forma de onda deseada. En la mayoría de los medios reales, su rapidez de propagación (es decir, la rapidez de fase) depende de la frecuencia o longitud de onda del componente en particular. Las ondas pueden propagarse con su propia velocidad. Así, a medida que lo hacen, las relaciones de fase de los componentes pueden cambiar, y la forma de onda de la suma de ellos se modificará al irse desplazando la onda. Éste es el origen de la dispersión: las ondas componentes se mueven a distinta rapidez de fase. No se da una relación simple entre la rapidez de los componentes y la del grupo de la onda: la relación depende de la dispersión del medio.

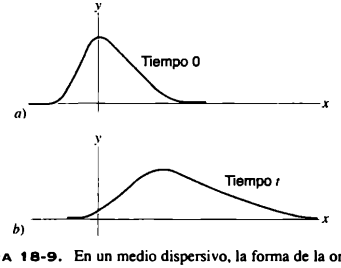


FIGURA 18-9. En un medio dispersivo, la forma de la onda cambia al propagarse ésta.

Algunos medios reales son aproximadamente no dispersivos; en tal caso, la onda conserva su forma y todas las ondas componentes avanzan con la misma rapidez. Un ejemplo de ellos, son las ondas sonoras en el aire. Si éste fuera lo bastante dispersivo, la conversación sería imposible porque la forma de onda producida por las cuerdas vocales de la voz de un amigo suyo se distorsionaría al momento de llegar al oído. Más aún, sería en vano el esmero que ponen los músicos de una orquesta para tocar exactamente al mismo tiempo, porque (si el aire dispersara el sonido) las notas de alta frecuencia llegarían al oído del público con una velocidad diferente a la de las notas de baja frecuencia, y los sonidos no se escucharían en el mismo momento. Por fortuna eso no sucede con las ondas sonoras. Las ondas luminosas en el vacío son perfectamente no dispersivas; su dispersión en los medios reales causa efectos, como el espectro de colores en el arco iris.

En los medios no dispersivos, todas las ondas componentes de una forma de onda compleja tienen la misa rapidez de fase, y la rapidez de grupo de esta última es igual al valor común de la rapidez de fase. Sólo en este caso, podemos hablar de rapidez de fase de la forma de onda entera. En el presente capítulo supondremos que se trata de ondas mecánicas que se propagan en un medio no dispersivo. ■

18-5 LA ECUACIÓN DE ONDA (Opcional)

En el Capítulo 17 explicamos el fenómeno tan común de la oscilación. He aquí una de las causas de su gran frecuencia: la ecuación básica que describe a un sistema oscilatorio [$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, Ec. 17-6], es una solución de la ecuación 17-5,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x,$$

que es una ecuación de forma general susceptible de obtenerse de un análisis mecánico de varias situaciones físicas, algunas de las cuales se señalan en la sección 17-5.

La situación se parece al caso del movimiento ondulatorio. Como demostramos en esta sección, el análisis mecánico nos da una ecuación de otra forma muy común, cuya solución es una onda de la forma de la ecuación 18-2 o 18-5.

En la figura 18-10 se muestra un elemento de una cuerda larga bajo la tensión F. Una onda ha hecho que se desplace de su posición de equilibrio en $y = 0$. Consideremos el elemen-

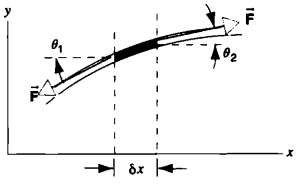


FIGURA 18-10. Un elemento pequeño de longitud δx de una cuerda larga bajo tensión F. La figura representa una instantánea del elemento en determinado tiempo durante el paso de un onda.

to de la cuerda de longitud δx, y apliquemos la segunda Ley de Newton para analizar *cómo* se hace para moverlo.

Sobre el elemento actúan dos fuerzas ejercidas por las porciones de la cuerda a ambos lados del elemento. Tienen la misma magnitud, porque la tensión se distribuye uniformemente a lo largo de la cuerda, pero su dirección es un poco distinta porque actúan tangencialmente a la cuerda en los puntos extremos del elemento. El componente y de la fuerza neta es

$$\sum F_y = F \operatorname{sen} \theta_2 - F \operatorname{sen} \theta_1 .$$

Tenemos en cuenta únicamente los desplazamientos respecto al equilibrio, de manera que los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños y podemos escribir $\operatorname{sen} \theta \approx \tan \theta$, lo cual nos da

$$\sum F_y \approx F \tan \theta_2 - F \tan \theta_1 = F\, \delta(\tan \theta), \quad (18\text{-}21)$$

donde $\delta(\tan \theta) = \tan \theta_2 - \tan \theta_1$. Esta fuerza resultante ha de ser igual a la masa del elemento, $\delta m = \mu\, \delta x$, multiplicada por el componente y de la aceleración. Si es posible prescindir de la fuerza de fricción y de otras de disipación, la segunda ley de Newton nos da

$$\sum F_y = \delta m\, a_y$$

$$F\delta(\tan \theta) = \mu\, \delta x\, a_y$$

$$\frac{\delta(\tan \theta)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} a_y .$$

En el componente y de la aceleración a_y, utilizamos la aceleración transversal de una partícula, $\partial^2 y/\partial t^2$. También reemplazamos $\tan \theta$, que es la pendiente de la cuerda, por la derivada parcial equivalente $\partial y/\partial x$. Al realizar estas sustituciones, obtenemos

$$\frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \quad (18\text{-}22)$$

Ahora tomamos el límite de la ecuación 18-22 a medida que el elemento de masa va volviéndose muy pequeño. El lado izquierdo viene en la forma estándar para expresar la derivada respecto a x como un límite:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ,$$

y la ecuación 18-22 se convierte en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \quad (18\text{-}23)$$

Al reemplazar μ/F con $1/v^2$ de la ecuación 18-19, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \quad (18\text{-}24)$$

La ecuación 18-24 es la forma general de la que describen las ondas: la segunda derivada de desplazamiento ondulatorio y respecto a la coordenada x en dirección de la propagación, es igual a $1/v^2$ multiplicada por la segunda derivada respecto al tiempo. A esta forma general de la ecuación se le conoce como *ecuación de onda*. No sólo ocurre en la mecánica, sino también en otras situaciones. Por ejemplo, como se discutirá en el Capítulo 38, si empleamos las ecuaciones del electromagnetismo en vez de las ecuaciones de la mecánica (leyes de Newton), obtendremos una ecuación exactamente de la misma forma que la ecuación 18-24, salvo que el desplazamiento y se reemplaza por la intensidad de un campo eléctrico o magnético. La rapidez de propagación v en las ondas electromagnéticas que se propagan en un vacío, se transforma en la velocidad de la luz c.

Veamos ahora cómo nuestra fórmula general de una onda viajera, $y(x, t) = f(x \pm vt)$, es la solución de la ecuación 18-24. Efectuamos un simple cambio de variable, y con z representamos $x \pm vt$, de manera que $y = f(z)$. Entonces, al utilizar varias veces la regla de cadena del cálculo,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm v \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d}{dz}\left(\pm v \frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = (\pm v)^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dz^2} .$$

Por tanto,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ,$$

y así satisfacemos la ecuación 18-24. Puede probarse que *sólo* las combinaciones $x \pm vt$ en f satisfacen la ecuación de onda, de manera que todas las ondas viajeras han de tener la forma de las ecuaciones 18-2 o 18-5.

Cuando se quiere expresar los resultados anteriores en otra forma, la ecuación 18-23 obtenida de las leyes de Newton, representa una onda viajera, únicamente si $\mu/F = 1/v^2$. En conclusión, esta explicación ofrece una obtención independiente de la ecuación 18-19 para la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de una cuerda estirada. ■

18-6 ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Si como en la figura 18-1, agitamos un extremo de una cuerda larga, la mano estará realizando trabajo en ella. Es decir, le aplicamos energía. Ésta se desplaza por la cuerda en forma de

onda, y un amigo en el otro extremo podría extraerla. El transporte de energía constituye una importante propiedad de las ondas. En la presente sección vamos a examinar la energía de una onda en una cuerda estirada.

En la figura 18-11*a* se ve una onda que se propaga por la cuerda en los tiempos t_1 y t_2 (un tiempo $T/4$ más tarde). Consideremos dos elementos en la cuerda con una longitud dx. El elemento A se halla en una cresta de la onda en t_1, tras lo cual se desplaza hacia abajo y cruza el eje en t_2. El elemento B lo cruzaba en t_1, pero se encuentra sobre una cresta de la onda en t_2.

El elemento A se halla en reposo en t_1, mientras que en t_2 tiene la velocidad máxima de la partícula. De ahí que gane energía cinética entre t_1 y t_2. El elemento A tiene casi su longitud relajada dx en el tiempo t_1, pero en el tiempo t_2 ha sido estirado a una mayor longitud mediante la tensión en la cuerda. Adquiere así energía potencial de t_1 a t_2. Por el contrario, el elemento B pierde energía cinética entre t_1 y t_2. Más aún, se estira en t_1, pero alcanza su longitud relajada en t_2, así que su energía potencial también disminuye. Podemos, pues, considerar la propagación de una onda a lo largo de la cuerda atendiendo a la energía cinética y potencial de cada uno de sus elementos. Al calcular cómo la energía cambia con el tiempo determinaremos la potencia entregada por la onda.

La figura 18-11*b* ofrece una vista ampliada de un elemento de la cuerda en un punto arbitrario durante su movimiento. La longitud se extendió de su longitud relajada dx a dl. El elemento tiene una masa $dm = \mu\, dx$, y se mueve con la velocidad u_y dada por la ecuación 18-14, de modo que su energía cinética dK es

$$dK = \tfrac{1}{2}\, dm\, u_y^2 = \tfrac{1}{2}\,(\mu\, dx)[-y_m\omega \cos(kx - \omega t)]^2. \quad (18\text{-}25)$$

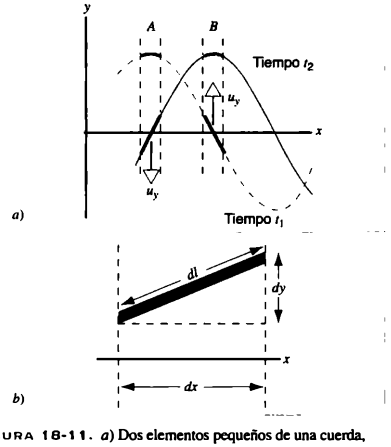


FIGURA 18-11. *a*) Dos elementos pequeños de una cuerda, designados como A y B, se muestran en una onda en el tiempo t_1 y de nuevo en el tiempo t_2 (un cuarto de ciclo después). La onda se desplaza hacia la derecha (en dirección de x creciente). *b*) Vista amplificada de un elemento pequeño de la cuerda en un tiempo arbitrario.

Este cambio de energía cinética ocurrió en el tiempo dt que tarda la onda en recorrer una distancia en el eje x, igual al componente x de la longitud del elemento, es decir, $dt = dx/v$, donde v es la rapidez de onda. La rapidez con que la onda transporta la energía cinética es dK/dt, esto es,

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 \frac{dx}{dt}\cos^2(kx - \omega t)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t). \quad (18\text{-}26)$$

Para calcular la energía potencial en el elemento, hay que evaluar el trabajo realizado por la fuerza de tensión F, cuando se estira el elemento de una longitud dx a la longitud dl, es decir, $dU = F(dl - dx)$. Al aproximar dl como la hipotenusa de un triángulo rectángulo como en la figura 18-11*b*, obtenemos

$$dU = F\left[\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx\right]$$
$$= F dx\left[\sqrt{1 + (\partial y/\partial x)^2} - 1\right]. \quad (18\text{-}27)$$

La magnitud $\partial y/\partial x$ nos da la pendiente de la cuerda, y esta pendiente será pequeña si la amplitud de onda no resulta demasiado grande. Entonces podemos utilizar la expansión binomial $(1 + z)^n \approx 1 + nz + \cdots$ para escribir

$$dU = F dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 1\right] = \tfrac{1}{2}F dx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \quad (18\text{-}28)$$

Con $\partial y/\partial x = -y_m k \cos(kx - \omega t)$, podemos calcular que la rapidez con que se transporte energía potencial en la cuerda es

$$\frac{dU}{dt} = \tfrac{1}{2}F\frac{dx}{dt}[-y_m k \cos(kx - \omega t)]^2$$
$$= \tfrac{1}{2}F v y_m^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (18\text{-}29)$$

Usando las ecuaciones 18-19 y 18-13, podemos escribir $F = v^2\mu = (\omega/k)^2\mu$; sustituimos este resultado en la ecuación 18-29, y lo comparamos con la ecuación 18-26; así, se deduce de inmediato que $dU/dt = dK/dt$.

Nótese que dK y dU son cero, cuando el elemento alcanza su máximo desplazamiento (como en el caso del elemento A en el tiempo t_1), y ambas dK y dU tienen sus valores máximos cuando el elemento cruza el eje x (como en el caso del elemento A en el tiempo t_2). Aunque el movimiento de un elemento de la cuerda nos recuerda al oscilador armónico simple, hay una diferencia muy importante: la energía mecánica $dE = dU + dK$ del elemento de masa *no* es constante, sino que varía de cero en las crestas y valles a un máximo donde la cuerda cruza el eje. Esto no debiera sorprendernos, pues el elemento de masa no es un sistema aislado: los elementos contiguos realizar trabajo en él para modificar su energía.

Potencia e intensidad en el movimiento ondulatorio

Puesto que $dU/dt = dK/dt$, tenemos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 2\frac{dU}{dt} = \mu\omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t). \quad (18\text{-}30)$$

La rapidez con que se transmite energía mecánica en la cuerda, es simplemente la potencia: $P = dE/dt$. Esta magnitud varía con el lugar en la cuerda y también con el tiempo. Por lo regular queremos conocer la potencia promedio P_{pro}:

$$P_{pro} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{pro} = \mu\omega^2 y_m^2 v[\cos^2(kx - \omega t)]_{pro}. \qquad (18\text{-}31)$$

A menudo observamos ondas durante un tiempo muy largo comparado con el periodo de la onda, de modo que tomamos el promedio en muchos ciclos de oscilación. El valor promedio de $\cos^2$ en cualquier número de ciclos completos es $\frac{1}{2}$, de modo que

$$P_{pro} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 v. \qquad (18\text{-}32)$$

La propiedad general que caracteriza a las ondas, es el hecho de que la rapidez promedio de la transferencia de energía depende del *cuadrado* de la amplitud y del *cuadrado* de la frecuencia.

El cálculo anterior, supone que la onda transporta energía sin pérdidas por fricción ni por otras fuerzas de disipación. No se pierde energía mecánica con la energía interna de la cuerda ni se transfiere calor al ambiente.

Asimismo, hemos supuesto que la amplitud de la onda permanece constante al propagarse. Esto sucede (en una aproximación ideal) en las ondas de una cuerda, y se aplica en forma rigurosa a la onda plana ideal (como en la figura 18-3*a*). Sin embargo, en los frentes de onda esféricos (como en la figura 18-3*b*) su contenido de energía no cambia, pero ésta se dispersa en una superficie cada vez mayor conforme la onda se desplaza. En las ondas esféricas a menudo conviene más describirlas a partir de su *intensidad I*, que se define como *la potencia promedio por superficie unitaria transmitida en un área A perpendicularmente a la dirección en que se propaga la onda*, esto es,

$$I = \frac{P_{pro}}{A}. \qquad (18\text{-}33)$$

La unidad de la intensidad en el SI es watts por metro al cuadrado (W/m^2).

Igual que en el caso de la potencia de una onda, la intensidad siempre es proporcional al cuadrado de la amplitud. No obstante, en las ondas circulares o esféricas la amplitud no es constante conforme avance el frente de onda. En una onda esférica, como la que pudiera emitir una fuente puntual de luz o sonido, el área superficial de un frente de onda de radio r es $4\pi r^2$, de modo que la intensidad es proporcional a $1/r^2$. Si se duplica la distancia con una fuente de ondas esféricas, la intensidad adquiere un cuarto del tamaño, y la amplitud de onda la mitad del tamaño.

18-7 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

A menudo observamos a dos o más ondas desplazarse simultáneamente por la misma región del espacio, independientemente una de otra. Por ejemplo, el sonido que llega a nuestros oídos proveniente de una orquesta sinfónica es muy complejo, pero podemos identificar el sonido emitido por cada instrumento. Los electrones en las antenas de los radios y televisores son puestos en movimiento por una serie de señales procedentes de varios centros emisores, pero a pesar de ello podemos sintonizar una estación en particular, y la señal recibida de ella es fundamentalmente la misma que la que recibiríamos, si el resto de las estaciones dejara de transmitir.

Los ejemplos precedentes ejemplifican el *principio de superposición*: cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de una partícula cualquiera en determinado momento, es simplemente la suma de los desplazamientos que podrían producir las ondas que actúan de manera individual. Supóngase, por ejemplo, que dos ondas se desplazan simultáneamente a través de la misma cuerda estirada. Sean $y_1(x, t)$ y $y_2(x, t)$, los desplazamientos que experimentaría si cada onda operara por su cuenta. Entonces el desplazamiento de la cuerda cuando actúan ambas ondas será

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t). \qquad (18\text{-}34)$$

En las ondas mecánicas de medios elásticos se cumple el principio de superposición, siempre que la fuerza restauradora varíe en forma lineal con el desplazamiento.

La figura 18-12 muestra una secuencia temporal de "instantáneas" de dos pulsos que se propagan en direcciones opuestas en la misma cuerda estirada. Cuando los pulsos se sobreponen, el desplazamiento de la cuerda es la suma algebraica de los desplazamientos individuales ocasionados por uno de los dos pulsos, tal como lo exige la ecuación 18-34. Los pulsos tan sólo se mueven uno a través de otro, desplazándose como si no existiera el otro.

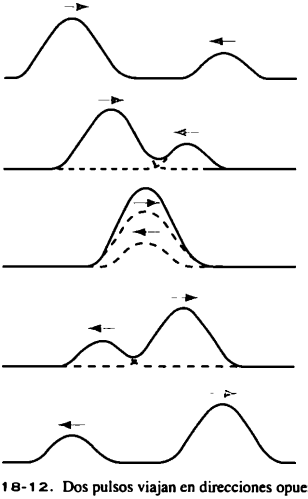


FIGURA 18-12. Dos pulsos viajan en direcciones opuestas a través de una cuerda estirada. El principio de superposición se aplica al cruzarse entre sí.

El principio de superposición puede parecernos un resultado demasiado obvio, pero hay casos en que no se cumple. Supóngase, por ejemplo, que una de las ondas tenga una amplitud tan grande, que rebasa el límite elástico del medio. La fuerza de restauración deja de ser directamente proporcional al desplazamiento de una partícula en el medio. Entonces, sin importar la amplitud de la segunda onda (así sea muy pequeña), su efecto en un punto no es una función lineal de su amplitud. Más aún, la segunda onda cambiará pasando por la región no lineal, y se alterará su comportamiento posterior. Esta situación se presenta sólo rara vez y en la generalidad de las circunstancias el principio de superposición es válido (como suponemos a lo largo del texto).

Análisis de Fourier (Opcional)

En física la importancia del principio de superposición consiste en que, cuando se cumple, permite analizar como una combinación de ondas simples, un movimiento ondulatorio complicado. De hecho, según lo demostró el matemático francés J. Fourier (1768-1830), lo único que necesitamos para construir la forma más general de la onda periódica, son ondas armónicas simples. También demostró que cualquier movimiento periódico de una partícula puede representarse como una combinación de movimientos armónicos simples. Por ejemplo, si $y(x)$ representa la forma de onda (en un momento determinado) de una fuente que tenga una longitud de onda λ, podremos analizar $y(x)$ como sigue:

$$y(x) = A_0 + A_1 \operatorname{sen} kx + A_2 \operatorname{sen} 2kx + A_3 \sin 3kx + \cdots + B_1 \cos kx + B_2 \cos 2kx + B_3 \cos 3kx + \cdots, \quad (18\text{-}35)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$. A esta expresión, se le llama serie de Fourier. Los coeficientes A_n y B_n tienen valores bien definidos para cualquier movimiento periódico $y(x)$. Por ejemplo, la onda de dientes de sierra de la figura 18-13*a* puede describirse por medio de

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} kx - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2kx - \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen} 3kx - \cdots.$$

Si el movimiento no es periódico, como en el caso de un pulso, la suma se reemplaza por una integral, la integral de Fourier. De ahí la posibilidad de representar cualquier movimiento (de pulso o continuo) de una fuente de ondas a partir de una superposición de movimientos armónicos simples; cualquier forma de onda así generada, puede analizarse como una combinación de componentes que individualmente son ondas armónicas simples. Una vez más se prueba así la importancia del movimiento armónico y de las ondas armónicas.

Sólo en el caso de un medio no dispersivo, la forma de onda mantendrá su forma conforme se propague. En un medio dispersivo no cambia la forma de las ondas componentes senoidales, sino que cada una lo hará a una velocidad distinta. En este caso, la forma de onda combinada se modifica al alterarse la relación de fase entre los componentes. La onda también puede cambiar su forma si pierde energía mecánica con el medio por resistencia del aire, por viscosidad o fricción interna. A menudo esas fuerzas disipativas dependen de la rapidez, de ahí que los componentes de Fourier más afectados sean

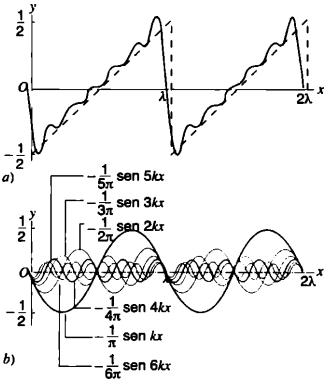


FIGURA 18-13. *a*) La línea punteada es una onda de dientes de sierra que se encuentra comúnmente en electrónica. Puede representarse como una serie de Fourier de ondas senoidales. *b*) Se incluyen las seis primeras ondas senoidales de la serie que representan la onda de dientes de sierra, y su suma se indica como la curva gruesa en la parte *a*). A medida que se incluyen más términos, la serie de Fourier se convierte en una mejor aproximación de la onda.

aquéllos cuyas partículas tienen mayor velocidad (es decir, aquéllos con frecuencias altas, conforme a la ecuación 18-14, donde u_y depende de ω). También en este caso la forma de onda puede cambiar, a medida que los componentes de más alta frecuencia pierden amplitud con mayor rapidez. Un ejemplo de este fenómeno, es el deterioro que con el tiempo sufre el sonido de las cuerdas de los pianos. El movimiento vibratorio de una cuerda de piano inmediatamente después de ser percutida por el martillo, abarca una amplia gama de frecuencias que le dan su tono característico. Los componentes de alta frecuencia de un movimiento tan complejo disipan su energía más rápidamente que los de baja frecuencia, de ahí que la característica de un tono sostenido cambie con el tiempo. ■

18-8 INTERFERENCIA DE ONDAS

Cuando dos o más ondas se combinan en un punto determinado, se dice que *interfieren*, y a este fenómeno se le conoce como *interferencia*. Como veremos luego, la forma de onda resultante depende mucho de las fases relativas de las ondas que interfieren. La figura 18-14 ofrece un ejemplo de ellas.

Primero vamos a estudiar dos ondas senoidales transversales de igual amplitud y longitud de onda, las cuales se propagan en la dirección x con la misma velocidad. Supondremos que la constante de fase de una onda es ϕ y que la otra tiene $\phi = 0$. En la figura 18-15 se incluyen dos ondas individuales y_1 y y_2, y su suma $y_1 + y_2$ en un momento particular de los dos casos de ϕ cerca de 0 (las ondas están casi en fase), y ϕ cerca de 180° (las ondas están casi fuera de fase). Con sólo sumar

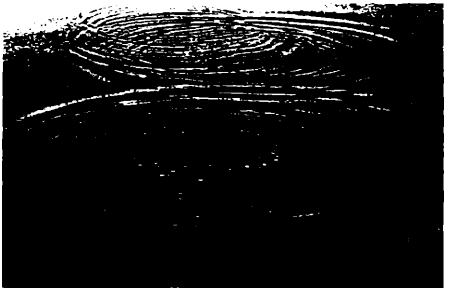


FIGURA 18-14. Dos trenes de ondas: en este caso, rizos circulares debidos a dos perturbaciones, interfieren donde se sobreponen en determinados puntos. El desplazamiento en un punto cualquiera es la superposición de desplazamientos individuales causados por las dos ondas.

los desplazamientos individuales en cada x, se observa que en el primer caso casi se refuerzan completamente las dos ondas, y que la resultante tiene aproximadamente el doble de amplitud de los componentes individuales; por el contrario, en el segundo caso hay una cancelación casi completa en todos los puntos, y la amplitud resultante se acerca a cero. A estos casos se les conoce, respectivamente, como interferencia *constructiva* e interferencia *destructiva*.

Veamos ahora cómo la interferencia aparece en las ecuaciones de las ondas. Consideramos un caso general en que las dos ondas tienen las constantes de fase ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente. Sus ecuaciones son

$$y_1(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi_1) \qquad (18\text{-}36)$$

y

$$y_2(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi_2). \qquad (18\text{-}37)$$

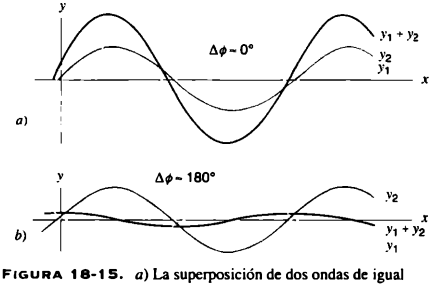


FIGURA 18-15. *a*) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que están casi en fase, produce una onda casi del doble de amplitud de uno u otro componente. *b*) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que están casi 180° fuera de fase, produce una onda cuya amplitud se aproxima a cero. Nótese que la longitud de la onda resultante no cambia en ninguno de los dos casos.

Encontremos ahora la onda resultante. Aplicando el principio de superposición, tomamos la suma de las ecuaciones 18-36 y 18-37, y obtenemos

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m[\operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi_1) \\ &\quad + \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi_2)]. \end{aligned} \qquad (18\text{-}38)$$

Según la identidad trigonométrica de la suma de los senos de dos ángulos,

$$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2}(B - C), \qquad (18\text{-}39)$$

con un poco de rearreglo obtenemos

$$y(x, t) = [2y_m \cos(\Delta\phi/2)] \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi'), \qquad (18\text{-}40)$$

donde $\phi' = (\phi_1 + \phi_2)/2$. La magnitud $\Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1)$ recibe el nombre de *diferencia de fase* entre las dos ondas.

Esta onda resultante corresponde a otra que tiene la misma frecuencia, pero con una amplitud $2y_m|\cos(\Delta\phi/2)|$. Si $\Delta\phi$ es muy pequeña (cercana a 0°), la amplitud resultante será prácticamente $2y_m$ (como se advierte en la figura 18-15*a*). Cuando $\Delta\phi$ es cero, las dos ondas se sobreponen por completo: la cresta de una cae sobre la de la otra, y lo mismo sucede con los valles que dan la interferencia constructiva total. La amplitud resultante es el doble de cualquiera de las dos ondas. En cambio, si $\Delta\phi$ se aproxima a 180°, será casi cero (como se aprecia en la figura 18-15*b*). Cuando $\Delta\phi$ es exactamente 180°, la cresta de una onda cae en el valle de la otra. La amplitud resultante será cero conforme a la interferencia destructiva total.

Nótese que la ecuación 18-40 siempre presenta la forma de una onda senoidal. Así pues, al sumar las dos ondas senoidales de una misma longitud de onda y amplitud, se obtiene siempre una onda senoidal de idéntica longitud de onda. También podemos sumar los componentes que tengan igual longitud de onda pero amplitud diferente. En este caso, la resultante es una vez más una onda senoidal con idéntica longitud de onda, pero la amplitud no presenta la forma simple dada en la ecuación 18-40. Si las amplitudes individuales son y_{1m} y y_{2m}, la amplitud resultante será $y_{1m} + y_{2m}$, cuando las ondas estén

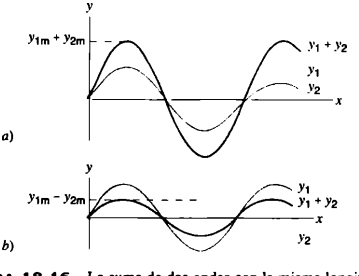


FIGURA 18-16. La suma de dos ondas con la misma longitud de onda y fase pero con distinta amplitud (color más claro) da una resultante de la misma longitud de donda y fase. *a*) Se suman las amplitudes si las ondas están en fase, y *b*) se restan si están 180° fuera de fase.

en fase ($\Delta\phi = 0$) (Fig. 18-16*a*); en cambio, será $y_{1m} - y_{2m}$, si están fuera de fase ($\phi = 180°$). En este caso no puede existir una interferencia destructiva, aunque haya interferencia destructiva parcial

PROBLEMA RESUELTO 18-3. Dos ondas se desplazan en la misma dirección en una cuerda e interfieren entre sí. Poseen la misma longitud de onda y se mueven con velocidad idéntica. Su amplitud es 9.7 mm y la diferencia de fase es 110° entre ellas. *a*) ¿Cuál es la amplitud de la onda combinada resultante de la interferencia de las dos ondas? *b*) ¿A qué valor debería cambiarse la diferencia de fase para que la onda combinada tenga una amplitud igual a la de las ondas originales?

Solución *a*) La amplitud de la onda combinada (siempre una cantidad positiva) se dio en la ecuación 18-40:

$$2y_m|\cos(\Delta\phi/2)| = 2(9.7\text{ mm})|\cos(110°/2)| = 11.1\text{ mm}.$$

b) Si la magnitud $2y_m|\cos(\Delta\phi/2)|$ es igual a y_m, hemos de tener

$$2|\cos(\Delta\phi/2)| = 1,$$

o

$$\Delta\phi = 2\cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = 120° \quad \text{o} \quad -120°.$$

Cualquiera de las dos ondas puede adelantarse a la otra por 120° (más o menos un múltiplo entero de 360°) para producir la onda deseada de la combinación.

18-9 ONDAS ESTACIONARIAS

En la sección anterior analizamos el efecto de sobreponer dos ondas componentes de igual magnitud y frecuencia que siguen una misma dirección en la cuerda. ¿Qué efecto se logra si se propagan por ella en dirección *opuesta*?

La figura 18-17 es una representación gráfica del efecto de sumar las formas de onda componentes para conseguir la resultante. Dos ondas viajeras aparecen en ella: una se dirige a la izquierda y otra a la derecha. Se incluyen "instantáneas" de las dos ondas y de su resultante en intervalos de un cuarto de periodo.

Una característica especial surge de esta superposición: en la cuerda hay algunos puntos, denominados *nodos*, donde el desplazamiento es cero *en todo momento*. (La figura 18-16 también mostraba algunos puntos donde la resultante tenía un desplazamiento cero, pero incluirá una instantánea de ondas viajeras *en determinado momento*. Si un instante después tomamos otra, encontraremos que los puntos ya no tienen desplazamiento cero, porque la onda se propaga. En la figura 18-17*c*, los ceros siguen siendo tales en todo momento.) Entre los nodos se encuentran *antinodos*, donde el desplazamiento oscila con la máxima amplitud. Se llama *onda estacionaria*, a un patrón de nodos y antinodos.

Para hacer un análisis matemático de ella, representamos las dos ondas mediante

$$y_1(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

$$y_2(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t).$$

Por tanto, la resultante puede escribirse

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$
$$= y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t) \qquad (18\text{-}41)$$

o, aplicando la relación trigonométrica de la ecuación 18-39,

$$y(x, t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \qquad (18\text{-}42)$$

La ecuación 18-42 es la ecuación de una onda estacionaria. No puede representar una onda viajera, porque ni x y t *no* aparecen en la combinación $x - vt$ o $x + vt$ que requiere ella.

Nótese que una partícula en cualquier lugar x experimenta movimiento armónico simple, y que todas las partículas vibran con igual frecuencia angular ω. En una onda viajera, cada partícula de la cuerda vibra con la misma amplitud. En una onda estacionaria, *la amplitud no es igual en las partículas, sino que varía con la ubicación x de la partícula.* De hecho, la amplitud, $|2y_m \operatorname{sen} kx|$, tiene un valor *máximo* de $2y_m$ en las posiciones donde $kx = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$ Es decir,

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

o, al sustituir $k = 2\pi/\lambda$

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (18\text{-}43)$$

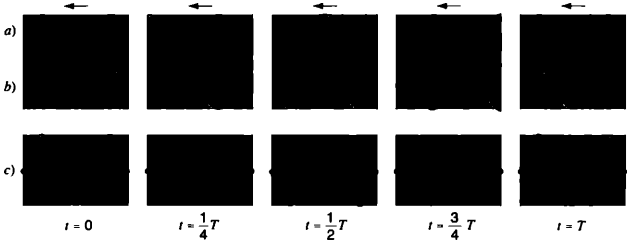


FIGURA 18-17. *a*) y *b*) Dos ondas viajeras de la misma longitud de onda y amplitud que siguen direcciones opuestas. *c*) Superposición de las ondas en varios momentos. Se indican con puntos los nodos en el patrón de la onda estacionaria. Nótese que las ondas viajeras no tienen nodos.

Estos puntos son los antinodos, y el espacio entre ellos es una mitad de longitud de onda.

La amplitud tiene un valor *mínimo* de cero en las posiciones, donde $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, así que

$$kx = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

o bien,

$$x = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{18-44}$$

Los puntos anteriores son los nodos, y también se encuentran separados media longitud de onda. La separación entre un nodo y el antinodo adyacente es un cuarto de longitud de onda.

Resulta evidente que la energía no se transporta a través de la cuerda hacia la derecha ni hacia la izquierda, pues no puede fluir más allá de los nodos de la cuerda, los cuales siempre están en reposo, de ahí que permanezca "estacionaria" en ella, aunque alterne entre la energía cinética vibratoria y la energía elástica potencial. Cuando los antinodos alcanzan su desplazamiento máximo, la energía que permanece se almacena íntegramente como energía potencial, sobre todo como energía potencial elástica asociada al estiramiento de la cuerda. Cuando todas las partes de la cuerda pasan simultáneamente por el equilibrio (como en las instantáneas primera y segunda de la figura 18-17*c*), la energía se guarda en su totalidad como energía cinética. La figura 18-18 ofrece una descripción más detallada del cambio de energía entre las formas cinética y potencial durante un ciclo de oscilación. Compare en las figuras 18-18 y 18-25, el sistema oscilatorio de bloque-resorte. ¿En qué se parecen ambos?

También podemos considerar el movimiento, como una oscilación de la cuerda en su conjunto: cada partícula experimenta un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω, y una amplitud que depende de su ubicación. Las partes pequeñas de la cuerda tienen inercia y elasticidad; la cuerda entera puede concebirse como un grupo de osciladores acoplados, de ahí que la cuerda vibratoria sea la misma en teoría que el sistema de bloque-resorte, salvo que éste presenta sólo una frecuencia natural, y la cuerda vibratoria tiene gran cantidad de frecuencias naturales (véase Secc. 18-10).

La reflexión en una frontera

Si queremos crear una onda estacionaria en una cuerda, sobrepondremos dos ondas que siguen dirección contraria. Una forma de lograrlo, consiste en enviar una onda a lo largo de una cuerda, de manera que encuentre su reflexión que retorna. Aquí vamos a examinar más a fondo el proceso de la reflexión.

A manera de ejemplo nos concentraremos en un pulso, y no en una onda senoidal. Supóngase que un pulso se propaga a través de una cuerda que está fija por un extremo, como se

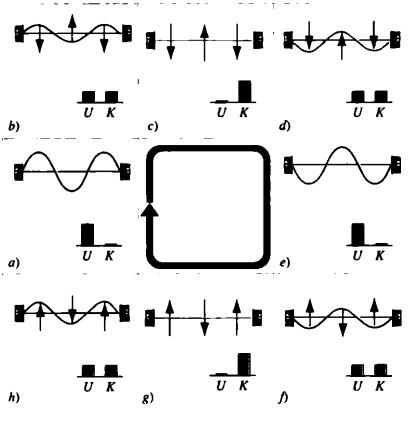


FIGURA 18-18. Onda estacionaria en una cuerda estirada que muestra un ciclo de oscilación. En *a*), la cuerda se halla momentáneamente en reposo con los antinodos en su desplazamiento máximo. La energía de la cuerda es enteramente energía potencial elástica. *b*) Un octavo de ciclo más tarde, el desplazamiento se reduce, y una parte de la energía es potencial y la otra es cinética. Los vectores indican la velocidad instantánea de las partículas de la cuerda en ciertos sitios. *c*) El desplazamiento es cero; no existe energía potencial y la cinética alcanza su nivel máximo. Las partículas de la cuerda tienen su velocidad máxima. *d*)-*h*) El movimiento continúa a través del resto del ciclo; continuamente se intercambia energía entre las formas potencial y cinética.

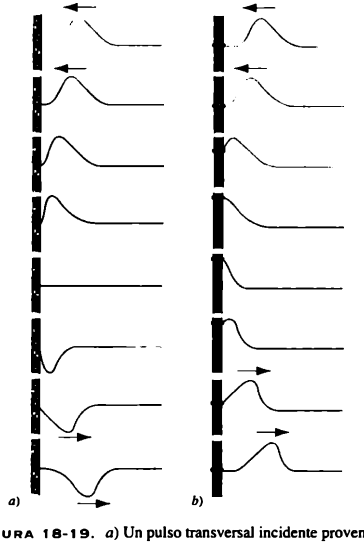


FIGURA 18-19. *a*) Un pulso transversal incidente proveniente de la derecha se refleja contra una pared rígida. Nótese que la fase del pulso reflejado está invertida o cambiada 180°. *b*) Aquí el extremo de la cuerda se mueve libremente, y la cuerda está conectada a un lazo que puede deslizarse libremente a lo largo de la cuerda. No cambia la fase del pulso reflejado.

advierte en la figura 18-19*a*. Cuando el pulso llega a ese extremo, ejerce una fuerza ascendente sobre el soporte. Éste no se mueve pues es rígido, y por la tercera ley de Newton debe ejercer en la cuerda una fuerza igual pero opuesta. La fuerza seguirá una dirección ascendente en la figura 18-19*a*, y hace que un pulso invertido se desplace en dirección contraria a través de la cuerda. Los pulsos incidente y reflejado, deben tender a producir desplazamientos opuestos en el extremo fijo de la cuerda, con el fin de mantener fijo el punto. Podemos considerar que se trata de una situación de interferencia destructiva total: las ondas incidentes y reflejadas han de estar 180° fuera de fase. *Al reflejarse de un extremo fijo, una onda transversal pasa por un cambio de fase de 180°.*

En la figura 18-19*b* se incluye la reflexión de un pulso en un extremo libre de una cuerda estirada, es decir, en un extremo que puede moverse libremente en dirección transversal. El extremo de la cuerda está atado a un anillo muy ligero que se desliza sin fricción por una varilla transversal. Cuando el pulso llega al extremo libre, ejerce una fuerza sobre el elemento de la cuerda. Este elemento acelera y, como en el caso de un péndulo, su movimiento lo lleva más allá del punto de equilibrio; "dispara" con demasiada potencia y ejerce una fuerza de reacción sobre la cuerda. Se genera así un pulso que regresa propagándose a lo largo de la cuerda en dirección contraria a la del pulso incidente. Una vez más obtenemos reflexión, sólo que ahora en un extremo libre. Sin duda éste experimentará un desplazamiento máximo de partículas en el anillo; un tren de ondas incidentes y reflejadas debe interferir constructivamente en ese punto, si queremos tener un máximo allí. Así pues, la onda reflejada siempre está en fase con la incidente en ese punto. *En el extremo libre, una onda transversal se refleja sin cambiar de fase.*

Hasta ahora hemos supuesto que la onda se refleja en la frontera sin perder intensidad. En la práctica, siempre se descubre que en cualquier frontera entre dos medios se producen una reflexión y transmisión parcial; por ejemplo, al observar un vidrio ordinario de ventana, observamos que una parte de la luz se refleja hacia nosotros, que otra parte se transmite a través del vidrio. Este efecto se demuestra con ondas transversales en la cuerda, atando dos de distinta densidad de masa. Cuando una onda que se propaga por una de las cuerdas, llega al punto donde se unen; una parte de la energía de la onda se transmite a la otra cuerda y una parte se refleja hacia atrás. La amplitud de la onda reflejada es menor que la de la onda incidente original, porque la onda transmitida a la segunda cuerda se lleva un poco de la energía incidente.

Si la segunda cuerda tiene mayor densidad de masa que la primera, la onda reflejada en la primera cuerda seguirá experimentado un cambio de fase de 180° con la reflexión. Pero como su amplitud es menor que la de la onda incidente, el punto de frontera no es un nodo y se mueve. Así ocurre transferencia neta de energía en la primera cuerda hacia la segunda. Si ésta tiene menor densidad de masa, se producirá una reflexión parcial sin cambio de fase, pero una vez más la energía se transmite a la segunda cuerda. En la práctica, la mejor manera de conseguir un "extremo libre" para una cuerda, consiste en atarla a otra larga y mucho más liviana. La energía transmitida es insignificante, y la segunda cuerda sirve para mantener la tensión en la primera.

Adviértase que la onda transmitida se desplaza con una velocidad distinta a la de las ondas incidente y reflejada. La velocidad depende de la relación $v = \sqrt{F/\mu}$, y la tensión es igual en ambas cuerdas, pero su densidad es distinta. La onda se desplaza, pues, más lentamente en la más densa. La frecuencia de la onda transmitida es la misma que la de las ondas incidente y reflejada. (De no ser así, habría una discontinuidad en el punto donde las cuerdas se juntan.) Las que tienen igual frecuencia, pero que se desplazan con distinta velocidad, presentan longitudes de onda también distintas. A partir de la relación $\lambda = v/f$, concluimos que en la cuerda más densa, donde v es más pequeña, la longitud de nodo es más corta. Este fenómeno de cambio de longitud de onda, al pasar ésta de una medio a otro, aparecerá frecuentemente en nuestro estudio de las ondas luminosas. También ocurre en las ondas sonoras: una cuerda —digamos, la de una guitarra— vibra con cierta frecuencia y longitud de onda; la que se transmite al aire tiene la misma frecuencia que la de la cuerda, pero distinta longitud de onda, porque la velocidad en la cuerda difiere de su velocidad en el aire.

18-10 ONDAS ESTACIONARIAS Y RESONANCIA

Supongamos una cuerda de longitud L que está sujeta por ambos extremos, como la que podríamos encontrar en una guitarra o un violín. Si la pulsamos cerca de la mitad y luego examinamos su movimiento, posiblemente descubramos que tiene el aspecto de la figura 18-20*a*. Una onda estacionaria se establece con un nodo en ambos extremos, y un antinodo en la mitad.

¿Por qué al puntear la cuerda producimos ondas estacionarias? La forma inicial de la cuerda en el momento de liberarla podría ser triangular, susceptible de analizarse como la suma de los términos seno y coseno aplicando el método del

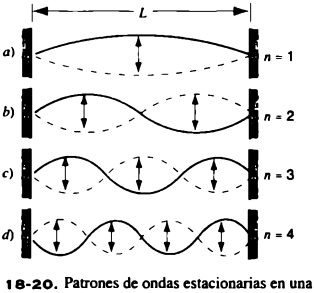


FIGURA 18-20. Patrones de ondas estacionarias en una cuerda de longitud L estirada entre dos soportes fijos. Se muestran cuatro patrones, correspondientes a diversas longitudes de onda y frecuencias.

análisis de Fourier descrito en la sección 18-7. Las ondas se propagan por la cuerda, se reflejan en los extremos, e interfieren con las otras que se mueven a través de ella. Las frecuencias más altas tienden a extinguirse más rápidamente por amortiguamiento, y dejan tan sólo las ondas estacionarias correspondientes a la frecuencia más baja posible, que aparece en la figura 18-20*a*. El espaciamiento entre los nodos siempre es $\lambda/2$; por ello, en el caso del patrón de ondas estacionarias de la figura 18-20*a*, tenemos $L = \lambda/2$.

Podemos producir una onda estacionaria diferente en la cuerda, con sólo poner un dedo ligeramente cerca del centro para evitar que se mueva, y pulsando aproximadamente 1/4 del espacio entre ambos extremos. Este procedimiento producirá una onda estacionaria semejante a la de la figura 18-20*b*. En ella, $L = \lambda$. Al amortiguar y pulsar la cuerda en lugares bien seleccionados, podemos crear los patrones de onda estacionaria que se muestran en las figuras 18-20*c* y 18-20*d*, donde $L = 3\lambda/2$ y $L = 2\lambda$, respectivamente.

El lector observa lo siguiente: la condición de una onda estacionaria que debe crearse en una cuerda de longitud L fija en ambos extremos es

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

o bien,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (18\text{-}45)$$

donde λ_n, es la *n-ésima* longitud de onda en esta serie infinita. Nótese que n, es el número de medias longitudes de onda o "ciclos" que aparecen en el patrón de la figura 18-20. Si usamos la ecuación 18-13 ($v = \lambda f$), podremos escribir la ecuación 18-45, así:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (18\text{-}46)$$

Éstas son las frecuencias permitidas de las ondas estacionarias en la cuerda.

Si tenemos en cuenta la semejanza entre un resorte vibratorio y un oscilador armónico simple, nos preguntaremos por qué el oscilador simple (como el sistema de bloque-resorte) tiene sólo una frecuencia permitida, mientras que la cuerda tiene una cantidad infinita. En el sistema, la inercia se concentra en un solo elemento (el bloque); en cambio, en la cuerda, la inercia se distribuye por todo el sistema. Asimismo, la elasticidad del sistema bloque-resorte está concentrada en un elemento (el resorte), mientras que en la cuerda se distribuye por todo el sistema. A diferencia del sistema, sólo tiene una manera de guardar energía cinética y potencial; en cambio, la cuerda vibrante dispone de muchas formas para almacenarla.

En términos generales, un sistema concentrado de N elementos, tiene N frecuencias de oscilación (cada una de las cuales corresponde a un patrón de oscilación). En la figura 18-21 se incluye un ejemplo del sistema con uno, dos o tres elementos. El límite, mientras N tiende al infinito, nos lleva al sistema totalmente distribuido de la cuerda estirada con un número infinito de frecuencias vibratorias.

Resonancia en la cuerda estirada

La figura 18-22 muestra las exposiciones de tiempo de un estudiante que pulsa un extremo de una cuerda fija por el otro. Los patrones resultantes de la oscilación, son exactamente como las ondas estacionarias de la figura 18-20. Un examen atento revelará que la mano del estudiante se mueve hacia atrás, y adelante en una pequeña amplitud con una de las frecuencias de la ecuación 18-46. Podemos considerarlas como frecuencias naturales del sistema vibratorio. La mano es la fuerza impulsora que hace oscilar la cuerda; cuando la frecuencia oscilatoria es igual a una de las frecuencias naturales, se produce una oscilación de gran amplitud, en analogía exacta con nuestra explicación que sobre el oscilador forzado dimos en la sección 17-8.

Si el estudiante pulsa la cuerda, su mano realiza trabajo en ella para bombear energía en el sistema vibratorio. El sistema pierde energía, quizás a la energía interna de la cuerda, a la resistencia del aire o al apoyo en el extremo fijo. Como en el caso del oscilador forzado, con el tiempo se alcanza un estado estacionario, donde la energía suministrada por el estudiante equilibra exactamente la pérdida por la cuerda ante las fuerzas disipativas.

Si el estudiante pulsa la cuerda con una frecuencia distinta a una de las frecuencias naturales, la onda reflejada vuelve a su mano fuera de fase con ese movimiento. En este caso, la cuerda realiza trabajo en la mano, además del que ésta efectúa en ella. No se produce ningún patrón de onda estacionaria fija; la amplitud del movimiento resultante de la cuerda es pequeña, y no muy distinta al del movimiento de la mano del estudiante. Esta situación nos recuerda al movimiento errático y

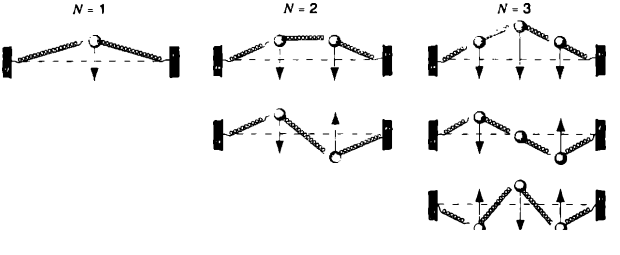


FIGURA 18-21. Algunos patrones de la oscilación en un oscilador que tiene elementos concentrados (en este caso, cuerpos oscilantes conectados mediante resortes de masa insignificante). Cada patrón de movimiento tiene una frecuencia natural distinta, y el número de ellas es igual al de los cuerpos oscilantes.

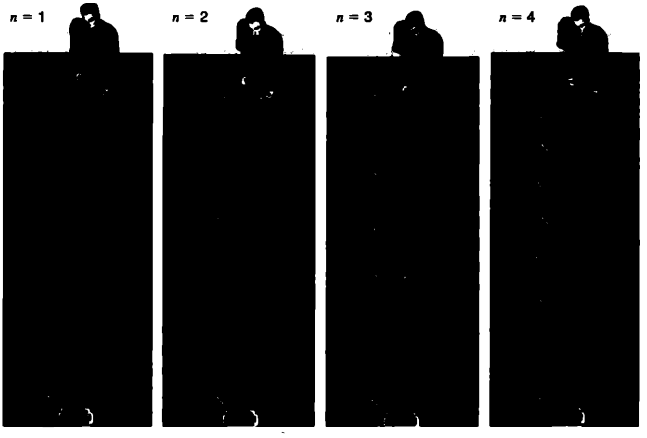


FIGURA 18-22. Un estudiante agita una cuerda estirada (un tubo de goma) en cuatro frecuencias resonantes, produciendo cuatro patrones de ondas estacionarias. Las letras N y A indican los nodos y los antinodos, respectivamente.

de pequeña amplitud de un columpio al ser empujado con otra frecuencia que no sea la natural. En la resonancia, el movimiento de la mano está en fase con la de la cuerda, por lo cual la cuerda no pierde energía a través del trabajo efectuado por la mano del estudiante.

En realidad, el movimiento de la cuerda constituye una excelente aproximación a los patrones de onda estacionaria de la figura 18-20, pero no muy precisa. La frecuencia resonante es casi —pero no exactamente— una frecuencia natural del sistema. Los nodos aparentes no son verdaderos, porque un poco de energía debe fluir más allá de ellos por la cuerda para compensar las pérdidas por amortiguamiento. Si no hubiera amortiguamiento, la frecuencia resonante sería una frecuencia natural y la amplitud crecería sin límite, mientras la mano del estudiante siguiera suministrando energía. Con el tiempo, el límite elástico sería rebasado y la cuerda se rompería.

Si fuera posible pulsar la cuerda con una serie de frecuencias, su movimiento seleccionaría aquellas que fuesen iguales a sus frecuencias naturales. El movimiento en ellas se reforzaría y ocurriría en una gran amplitud, en tanto que el resto de ellas se amortiguaría o suprimiría. Este principio rige la producción de sonidos en los instrumentos musicales como veremos en el siguiente capítulo.

PROBLEMA RESUELTO 18-4. En el sistema de la figura 18-23, un motor pone en movimiento la cuerda a una frecuencia de 120 Hz. La cuerda tiene una longitud $L = 1.2$ m, y su densidad de masa lineal es 1.6 g/m. ¿A qué valor debe ajustarse la tensión (aumentando el peso suspendido) para conseguir el patrón del movimiento que tenga cuatro ciclos?

Solución Para determinar la tensión podemos sustituir la ecuación 18-19 en la ecuación 18-46 y obtener

$$F = \frac{4L^2 f_n^2 \mu}{n^2}.$$

Se comprueba que la tensión correspondiente a $n = 4$ (en 4 ciclos) es

$$F = \frac{4(1.2\text{ m})^2(120\text{ Hz})^2(0.0016\text{ kg/m})}{4^2} = 8.3\text{ N}.$$

Lo anterior corresponde a un peso suspendido de 2 lb, aproximadamente.

PROBLEMA RESUELTO 18-5. Una cuerda de violín afinada para el concierto en La (nota musical) (440 Hz), tiene una longitud de 0.34 m. *a*) ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más largas de las resonancias en la cuerda? *b*) ¿Cuáles son las longitudes de onda correspondientes que llegan al oído del oyente?

Solución *a*) Las longitudes de onda resonantes de una cuerda de longitud $L = 0.34$ m, se obtienen directamente de la ecuación 18-45:

$$\lambda_1 = 2L/1 = 2(0.34\text{ m}) = 0.68\text{ m},$$

$$\lambda_2 = 2L/2 = 0.34\text{ m},$$

$$\lambda_3 = 2L/3 = 0.23\text{ m}.$$

FIGURA 18-23. Problema resuelto 18-4. Se conecta una cuerda bajo tensión a un vibrador. En un vibrador de frecuencia fija se producirán patrones de ondas estacionarias con ciertos valores discretos de la tensión en la cuerda.

b) Cuando una onda pasa de un medio (la cuerda) a otro (el aire) de distinta velocidad de onda, la frecuencia no cambia, pero sí la longitud de onda. La ecuación 18-20 nos da la relación entre las longitudes de onda. Para determinar la longitud de onda de la cuerda, notamos que el modo resonante más bajo $f = 440$ Hz y $\lambda = 0.68$ m, así que

$$v = f\lambda = (440\ \text{Hz})(0.68\ \text{m}) = 299\ \text{m/s}.$$

En el aire, la rapidez de onda es 343 m/s, y con base en la ecuación 18-20 obtenemos

$$\lambda_{\text{aire}} = \lambda_{\text{resorte}} \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{resorte}}} = \lambda_{\text{resorte}} \frac{343\ \text{m/s}}{299\ \text{m/s}} = 1.15\lambda_{\text{resorte}}$$

Y así calculamos las longitudes de onda en el aire:

$$\lambda_1 = 0.78\ \text{m}, \qquad \lambda_2 = 0.39\ \text{m}, \qquad \lambda_3 = 0.26\ \text{m}.$$

OPCIÓN MÚLTIPLE

18-1 Ondas mecánicas

18-2 Tipos de ondas

18-3 Ondas viajeras

1. Una perturbación puede escribirse

$$y(x, t) = (e^{-(x/b)^2} e^{2x/b} e^{-t^2})^a.$$

Esta perturbación
A) no es una onda viajera.
B) una onda viajera con rapidez $v = a$.
C) una onda viajera con rapidez $v = a/b$.
D) una onda viajera con rapidez $v = b$.

2. Una onda viajera tiene la forma

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) + B\,\text{sen}(kx - \omega t),$$

que también puede escribirse

$$y(x, t) = D\,\text{sen}(kx - \omega t - \phi),$$

donde
a)
A) $D = A + B$ B) $D = |A| + |B|$
C) $D^2 = A^2 + B^2$ D) $D = A - B$
y
b)
A) $\phi = \tan^{-1}(A/B)$. B) $\phi = \tan^{-1}(B/A)$.
C) $\phi = \tan^{-1}(-A/B)$. D) $\phi = 0$.

3. Suponga la rapidez transversal máxima $u_{\text{máx}}$ de una partícula en una onda, y que la velocidad de esta última es v. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es más verdadera?
A) $u_{\text{máx}}$ siempre es mayor que v.
B) $u_{\text{máx}}$ siempre es igual a v.
C) $u_{\text{máx}}$ siempre es menor que v.
D) $u_{\text{máx}}$ no se relaciona con v.

18-4 Rapidez de onda en una cuerda estirada

4. Una cuerda está extendida horizontalmente entre un punto fijo y una polea sin fricción; la cuerda pasa por la polea y un objeto de masa m cuelga del extremo de la cuerda. La tensión en ella es T_0; la rapidez de la onda en esta cuerda es v_0. Una segunda cuerda se conecta al lado de la primera, pasa por la misma polea y luego se ata al mismo objeto. Suponiendo que ambas cuerdas proporcionen el mismo sostén al objeto,
a) Ahora la tensión en la primera cuerda será
A) $T_0/2$. B) T_0. C) $2T_0$.
b) Ahora la rapidez de una onda en la primera cuerda será
A) $\sqrt{v_0/2}$. B) $v_0/\sqrt{2}$. C) $v_0/2$.
D) v_0. E) $\sqrt{2}v_0$.
En seguida, las dos cuerdas se tuercen para hacer una que tenga el doble de densidad de masa. La nueva cuerda todavía está conectada al mismo objeto colgante.
c) Ahora la rapidez de una onda en la cuerda será
A) $\sqrt{v_0/2}$. B) $v_0/\sqrt{2}$. C) $v_0/2$.
D) v_0. E) $\sqrt{2}v_0$.

5. La dispersión ocurre conforme un pulso de onda se propaga por un medio porque
A) las frecuencias de onda diferentes pierden energía con diversa rapidez.
B) las amplitudes de onda diferentes pierden energía con diversa rapidez.
C) las frecuencias de onda diferentes se desplazan por el medio con distinta rapidez.
D) las amplitudes de onda diferentes se desplazan por el medio con diferente longitud de onda.

18-5 La ecuación de onda (Opcional)

6. ¿Cuál de las siguientes funciones *no* es una solución de la ecuación de onda (Ec. 18-24)?
A) $y = \text{sen}\,x\cos t$ B) $y = \tan(x + t)$
C) $y = x^3 - 6x^2t + 12xt^2 - 8t^3$
D) $y = \text{sen}(x + t)\cos(x - t)$

7. ¿Cuál de las siguientes funciones *es* una solución a la ecuación de onda (Ec. 18-24)?
A) $y = x^2 - t^2$ B) $y = \text{sen}\,x^2\,\text{sen}\,t$
C) $y = \log(x^2 - t^2) - \log(x - t)$
D) $y = e^x\,\text{sen}\,t$

18-6 Energía en el movimiento ondulatorio

8. Cierta onda en una cuerda con una amplitud A_0 y una frecuencia f_0, transfiere energía con una rapidez promedio de P_0. Si se duplican la frecuencia y la amplitud, la nueva onda transferirá energía con una rapidez promedio de
A) P_0. B) $4P_0$. C) π^2P_0.
D) $4\pi^2P_0$. E) $16P_0$.

9. Una onda en una cuerda cruza el punto $x = 0$ con una amplitud A_0, con una frecuencia angular ω_0 y con una rapidez promedio de transferencia de energía P_0. A medida que se dirige hacia abajo de la cuerda, va perdiendo energía en el punto $x = l$. La rapidez promedio de la transferencia es ahora $P_0/2$.
a) En el punto $x = l$ la frecuencia angular de la onda
A) sigue siendo ω_0.
B) puede ser menor que ω_0, pero es mayor que $\omega_0/\sqrt{2}$.
C) puede ser menor que ω_0, pero es mayor que $\omega_0/2$.
D) es igual a $\omega_0/\sqrt{2}$.
E) es igual a $\omega_0/2$.

b) En el punto $x = l$, la amplitud de la onda
A) sigue siendo A_0.
B) puede ser menor que A_0, pero es mayor que $A_0/\sqrt{2}$.
C) puede ser menor que A_0, pero es mayor que $A_0/2$.
D) es igual a $A_0/\sqrt{2}$.
E) es igual a $A_0/2$.

18-7 El principio de superposición

18-8 Interferencia de ondas

10. Dos ondas se desplazan hacia abajo por la misma cuerda. Tienen la misma velocidad, frecuencia (f_0) y longitud de onda, pero distintas constantes de fase $\phi_1 > \phi_2$ y amplitudes ($A_1 > A_2$).
a) Según los principios de la superposición, la onda resultante tendrá una amplitud A tal que

A) $A = A_1 + A_2$. B) $A = A_1 - A_2$.
C) $A_2 \leq A \leq A_1$. D) $A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2$.

b) Según los principios de la superposición, la onda resultante tendrá una frecuencia f tal que

A) $f = f_0$. B) $f_0/2 < f < f_0$.
C) $0 < f < f_0$. D) $f = 2f_0$.

11. Dos ondas que se mueven a través de la misma cuerda, se definen por medio de $y_1 = 2 \text{ sen } (kx - \omega t + 0)$ y $y_2 = 2 \text{ sen } (kx - \omega t + 2\pi)$. La amplitud de la onda resultante es

A) 0. B) 2. C) $2\sqrt{2}$. D) 4.

18-9 Ondas estacionarias

12. En la ecuación de la onda estacionaria (Ec. 18-42), ¿qué representa la magnitud ω/k?
A) La rapidez transversal de las partículas de la cuerda.
B) La rapidez de una de las ondas componentes.
C) La rapidez de la onda estacionaria.
D) Una cantidad que no depende de las propiedades de la cuerda.

13. Una onda estacionaria se produce en una cuerda, cuando dos ondas de igual amplitud, frecuencia y longitud de onda se mueven en una cuerda en dirección contraria. Si reducimos a la mitad la longitud de onda original de las dos ondas y si su rapidez no cambia, la frecuencia angular de oscilación de la onda estacionaria
A) disminuirá a la mitad. B) permanecerá inalterada.
C) se duplicará.

14. Suponga que uno de los componentes de la onda estacionaria (escrito en la ecuación 18-41) presenta una constante de fase adicional $\Delta\phi$. ¿Cómo afectará esto a la onda estacionaria?
A) La onda tendrá otra frecuencia.
B) La onda tendrá otra amplitud.
C) La onda tendrá un espaciamiento diferente entre los nodos.
D) No ocurrirá nada de lo anterior.

15. En una onda estacionara de una cuerda, el espaciamiento entre nodos es Δx. Si se duplica la tensión de la cuerda, pero la frecuencia de las ondas estacionarias no cambia, el espaciamiento se convertirá en

A) $2\Delta x$. B) $\sqrt{2}\Delta x$.
C) $\Delta x/2$. D) $\Delta x/\sqrt{2}$.

18-10 Ondas estacionarias y resonancia

16. Se estira una cuerda entre puntos fijos. Tiene una densidad de masa μ, está bajo una tensión F y su longitud es L. Vibra a la menor frecuencia permisible.
a) La rapidez de onda de la cuerda depende de

A) μ. B) F. C) L.
D) μ y F. E) μ, F y L.

b) La menor frecuencia permisible de la onda estacionaria depende de

A) μ. B) F. C) L.
D) μ y F. E) μ, F y L.

c) La menor longitud de onda estacionaria permisible depende de

A) μ. B) F. C) L.
D) μ y F. E) μ, F y L.

17. Una banda de goma de 10 cm de largo obedece la Ley de Hooke. Cuando la extendemos a una longitud total de 12 cm, la menor frecuencia resonante es f_0. Luego la estiramos a una longitud de 13 cm. Ahora, la menor frecuencia resonante será
A) mayor que f_0.
B) la misma que f_0.
C) menor que f_0.
D) diferente, pero la dirección del cambio depende de la constante elástica y de la tensión original.

PREGUNTAS

1. ¿Cómo probaría experimentalmente que la energía se asocia a una onda?
2. La energía puede ser transferida por partículas, lo mismo que por ondas. ¿De qué manera pueden distinguirse experimentalmente estos métodos de la transferencia?
3. ¿Puede generarse un movimiento ondulatorio donde las partículas del medio vibren con movimiento armónico angular simple? De ser así, explique cómo y describa la onda.
4. Al analizar el movimiento de una onda elástica que se propaga por un medio material, a menudo prescindimos de la estructura de la materia. ¿Cuándo se justifica esto y cuándo no?
5. ¿En qué forma la amplitud e intensidad de las ondas superficiales del agua varían con la distancia de la fuente?
6. ¿Cómo podemos crear ondas planas? ¿Y ondas esféricas?
7. Un bote de motor al pasar produce una estela que hace que las olas lleguen a la playa. Con el tiempo, el periodo en que arriban a la orilla va acortándose cada vez más. ¿Por qué?
8. Las siguientes funciones en que A es una constante tienen la forma $y = f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt), \qquad y = A\sqrt{x - vt},$$
$$y = A(x + vt)^2, \qquad y = A \ln (x + vt).$$

Explique por qué no son útiles en el movimiento ondulatorio.
9. ¿Podemos crear en una cuerda una forma de onda que presente discontinuidad de la pendiente en un punto, es decir, un ángulo puntiagudo? Explique su respuesta.

10. La ley del cuadrado inverso no se aplica exactamente a la disminución de los sonidos con la distancia. ¿Por qué no?
11. Cuando dos ondas interfieren, ¿altera una el avance de la otra?
12. ¿Se pierde energía cuando las ondas interfieren? Explique su respuesta.
13. ¿Por qué no observamos los efectos de la interferencia entre los haces luminosos emanados de dos lámparas ni entre las ondas sonoras emitidas por dos violines?
14. Como se aprecia en la figura 18-17, dos veces durante el ciclo la configuración de las ondas estacionarias en una cuerda estirada es una línea recta, exactamente lo que sería si la cuerda no estuviera vibrando en absoluto. Explique esto desde el punto de vista de la conservación de la energía.
15. Dos ondas de la misma amplitud y frecuencia se propagan a través de una misma cuerda. En cierto momento ésta parece una recta. ¿Siguen necesariamente ambas ondas la misma dirección? ¿Cuál es su relación de fase?
16. Si dos ondas difieren sólo en la amplitud y se propagan en direcciones contrarias por un medio, ¿producirán ondas estacionarias? ¿Se transporta energía? ¿Hay nodos?
17. La reflexión parcial de la energía ondulatoria por discontinuidades en la trayectoria de transmisión suele causar mucho desperdicio, y puede reducirse al mínimo introduciendo dispositivos de "acoplamiento de impedancia" entre las secciones de la trayectoria que limita con la discontinuidad. Por ejemplo, un megáfono ayuda a acoplar la columna de aire de la boca y de la garganta al aire afuera de la boca. Dé otros ejemplos y explique en términos cualitativos, cómo estos dispositivos reducen al mínimo las pérdidas por reflexión.
18. Suponga que las ondas estacionarias en una cuerda son una superposición de ondas viajeras, y por medio de las ideas de la superposición explique por qué no existen nodos verdaderos en la cuerda resonante de la figura 18-23, ni siquiera en el extremo "fijo". (*Sugerencia*: Tenga en cuenta los efectos del amortiguamiento.)
19. Las ondas estacionarias en una cuerda se demuestran mediante un sistema como el de la figura 18-23. Una lámpara fluorescente ilumina la cuerda y el vibrador es activado por la misma toma eléctrica que proporciona energía a la luz. La cuerda muestra una curiosa variación de color en la dirección transversal. Explique esto.
20. Al explicar las ondas transversales en una cuerda, nos ocupamos exclusivamente de los desplazamientos en un plano individual, el plano xy. Si todos se encuentran en un plano, se dice que la onda es una onda plana polarizada. ¿Pueden darse desplazamientos en un plano que no sea el que se estudió? De ser así, ¿pueden combinarse dos ondas polarizadas planas? ¿Qué aspecto tendrá después cada una de ellas?
21. Una onda transmite energía. ¿Transfiere momento? ¿Puede transferir el momento angular? (Consúltese "Energy and Momentum Transport in String Waves" de D. W. Juenker, *American Journal of Physics*, enero de 1976, p. 94.)
22. Durante el sismo acaecido en la ciudad de México el 19 de septiembre de 1985, las zonas más dañadas se alternaron con las que sufrieron poco daño. Los edificios de cinco a 15 pisos fueron los más afectados. Explique esos efectos basándose en las ondas estacionarias y en la resonancia.

EJERCICIOS

18-1 Ondas mecánicas

18-2 Tipos de ondas

18-3 Ondas viajeras

1. Una onda tiene una rapidez de 243 m/s y una longitud de 3.27 cm. Calcule *a*) su frecuencia, y *b*) su periodo.
2. Al mecer un bote, un niño produce ondas superficiales del agua en un lago tranquilo hasta ese momento. Se observa que el bote realiza 12 oscilaciones en 30 s, y también que en 5.0 s una cresta de onda llega a la playa situada a 15 m de distancia. Encuentre *a*) la frecuencia, *b*) la velocidad y *c*) la longitud de onda de las olas.
3. Una onda senoidal se propaga a través de una cuerda. Un punto tarda 178 ms en pasar del desplazamiento máximo al desplazamiento cero. La longitud de onda es 1.38 m. Determine *a*) el periodo, *b*) la frecuencia y *c*) la rapidez de la onda.
4. Escriba una expresión que defina una onda transversal que se desplaza a lo largo de una cuerda en la dirección $+x$, con una longitud de onda de 11.4 cm, con una frecuencia de 385 Hz y una amplitud de 2.13 cm.

18-4 Rapidez de onda en una cuerda estirada

5. Suponiendo que la rapidez de onda en una cuerda extendida dependa de la tensión F y de la densidad de masa lineal μ como $v \propto F^a/\mu^b$, por medio del análisis dimensional demuestre que $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$.
6. La ecuación de una onda transversal que se desplaza por una cuerda está dada por

$$y = (2.30\ \text{mm})\ \text{sen}\,[(1{,}822\ \text{rad/m})x - (588\ \text{rad/s})t].$$

Calcule *a*) la amplitud, *b*) la longitud de onda, *c*) la frecuencia, *d*) la velocidad y *e*) la rapidez transversal máxima de una partícula de la cuerda.

7. La ecuación de una onda transversal que se desplaza por una cuerda muy larga está dada por

$$y = (6.0\ \text{cm})\ \text{sen}\,[(2.0\pi\ \text{rad/m})x + (4.0\pi\ \text{rad/s})t].$$

Calcule *a*) la amplitud, *b*) la longitud de onda, *c*) la frecuencia, *d*) la velocidad, *e*) la dirección de propagación de la onda y *f*) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

8. Calcule la rapidez de una onda transversal en una cuerda de 2.15 m de longitud y una masa de 62.5 g bajo la tensión de 487 N.
9. La rapidez de una onda en una cuerda es 172 m/s cuando la tensión es 123 N. ¿A qué valor debemos aumentar la tensión si queremos elevar la velocidad a 180 m/s?
10. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es

$$y = (1.8\ \text{mm})\ \text{sen}\,[(23.8\ \text{rad/m})x + (317\ \text{rad/s})t].$$

La cuerda está bajo la tensión de 16.3 N. Determine su densidad lineal de masa.

11. Una onda transversal armónica simple se propaga a través de una cuerda hacia la dirección izquierda (o $-x$). En la figura 18-24 se incluye una gráfica del desplazamiento en función de la posición en el tiempo $t = 0$. La tensión de la cuerda es 3.6 N y su densidad lineal es 25 g/m. Calcule *a*) la amplitud, *b*) la longitud de onda, *c*) la rapidez de onda, *d*) el periodo y *e*) la rapidez máxima de una partícula en la cuerda. *f*) Anote una ecuación que describa a la onda viajera.

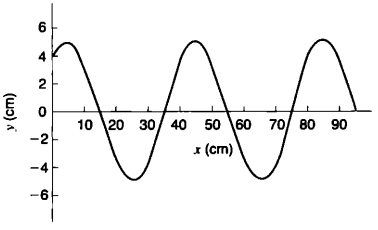


FIGURA 18-24. Ejercicio 11.

12. En la figura 18-25*a*, la cuerda 1 tiene densidad lineal de masa de 3.31 g/m, y la 2 una densidad de masa lineal de 4.87 g/m. Están bajo tensión debido a un bloque suspendido de masa M = 511 g. *a*) Calcule la rapidez de onda en ellas. *b*) El bloque se divide ahora en dos (con $M_1 + M_2 = M$), y el aparato se rearregla como se indica en la figura 18-25*b*. Determine M_1 y M_2, tal que la rapidez de onda de las dos cuerdas sea igual.

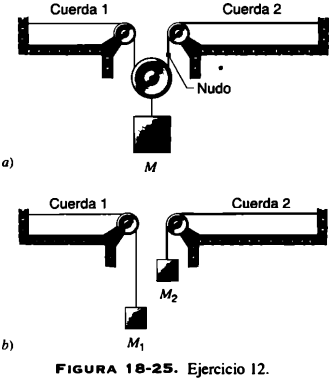


FIGURA 18-25. Ejercicio 12.

13. Un alambre de 10.3 m de largo y con una masa de 97.8 g, es estirado bajo una tensión de 248 N. Si en sus extremos se generan dos pulsos separados en el tiempo por 29.6 ms, ¿dónde se encontrarán los pulsos?

18-5 La ecuación de onda (Opcional)

14. En un sistema simétrico esférico, la ecuación de onda tridimensional está dada por

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

a) Demuestre que

$$y(r, t) = \frac{A}{r}\,\text{sen}\,(kr - \omega t)$$

es una solución de esta ecuación de onda. *b*) ¿Cuáles son las dimensiones de la constante A?

18-6 Energía en el movimiento ondulatorio

15. Una cuerda de 2.72 m de largo, tiene una masa de 263 g. Su tensión es 36.1 N. ¿Cuál debe ser la frecuencia de las ondas viajeras de 7.70 mm, a fin de que la potencia transmitida promedio sea 85.5 W?

16. Una fuente lineal emite una onda cilíndrica de expansión. Suponiendo que el medio no absorba energía, determine *a*) la intensidad; y *b*) la amplitud de la onda dependiendo de la distancia de la fuente.

17. Un observador mide una intensidad de 1.13 W/m^2 a una distancia desconocida, de una fuente de ondas esféricas cuya salida de potencia se ignora. El observador camina 5.30 m acercándose a la fuente, y mide una intensidad de 2.41 W/m^2 en este nuevo lugar. Calcule la salida de potencia de la fuente.

18. *a*) Demuestre que la intensidad I, es el producto de la densidad de energía u (energía por volumen unitario) y la rapidez de propagación v de una perturbación de onda, es decir, que $I = uv$. *b*) Calcule la densidad de energía en una onda sonora situada a 4.82 km de una sirena de 47.5 kW, suponiendo que las ondas sean esféricas, que la propagación sea isotrópica sin absorción atmosférica y que la velocidad del sonido sea 343 m/s.

18-7 El principio de superposición

18-8 Interferencia de ondas

19. ¿Qué diferencia de fase entre dos ondas viajeras idénticas en las demás dimensiones que siguen la misma dirección en una cuerda estirada, originará una onda combinada con una amplitud 1.65 veces la de la amplitud común de las dos ondas combinadas? Exprese su respuesta en grados y en radianes.

20. Determine la amplitud de la onda resultante cuando se combinan dos ondas senoidales que tienen igual frecuencia y que se desplazan en la misma dirección, si su amplitud es de 3.20 cm y de 4.19 cm, y si su fase difiere en $\pi/2$ rad.

21. En el caso en que las ondas componentes de la ecuación 18-38 tengan diferente amplitud y_{m1} y y_{m2}, demuestre que la magnitud encerrada en corchetes de la ecuación 18-40 se convierte en $[y_{m1}^2 + y_{m2}^2 + 2y_{m1}y_{m2}\cos\Delta\phi]^{1/2}$, y que la constante de fase ϕ' se transforma en

$$\phi' = \text{sen}^{-1}\left[\frac{y_{m1}\,\text{sen}\,\phi_1 + y_{m2}\,\text{sen}\,\phi_2}{(y_{m1}^2 + y_{m2}^2 + 2y_{m1}y_{m2}\cos\Delta\phi)^{1/2}}\right].$$

Verifique que ambas expresiones se reducen a los resultados esperados, cuando $y_{m1} = y_{m2} = y_m$.

22. Dos pulsos se desplazan a lo largo de una cuerda en dirección contraria, como se advierte en la figura 18-26. *a*) Si la rapidez de onda es 2.0 m/s y si los pulsos están a una distancia de 6.0 cm, dibuje los patrones al cabo de 5.0, 10, 15, 20 y 25 ms. *b*) ¿Qué sucede con la energía en t = 15 ms?

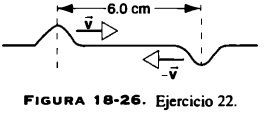


FIGURA 18-26. Ejercicio 22.

23. Tres ondas senoidales viajan en la dirección positiva x a través de la misma cuerda. Las tres ondas tienen la misma frecuencia. Sus amplitudes están en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$, y sus ángulos de fase son 0, $\pi/2$ y π, respectivamente. Grafique la forma de onda resultante, y explique su comportamiento a medida que crece t.
24. Cuatro ondas senoidales se desplazan en la dirección positiva x en la misma cuerda. Las frecuencias se encuentran en la relación 1:2:3:4, y sus amplitudes están en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, respectivamente. Cuando $t = 0$ en $x = 0$, las ondas primera y tercera están 180° fuera de fase con la segunda y cuarta. Grafique la forma de onda resultante cuando $t = 0$, y explique su comportamiento conforme t aumenta.

18-9 Ondas estacionarias

25. Una cuerda fija en ambos extremos mide 8.36 m de largo y tiene una masa de 122 g. Está sujeta a una tensión de 96.7 N y se hace vibrar. *a*) ¿Qué rapidez tienen las ondas en la cuerda? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria más larga posible? *c*) Indique la frecuencia de esa onda.
26. Una cuerda de nailon de una guitarra tiene una densidad de masa lineal de 7.16 g/m, y se halla bajo una tensión de 152 N. Los soportes fijos están separados por una distancia de 89.4 cm. La cuerda vibra en el patrón de onda estacionaria que aparece en la figura 18-27. Calcule *a*) la rapidez, *b*) la longitud de onda y *c*) la frecuencia de las ondas componentes cuya superposición da origen a esta vibración.

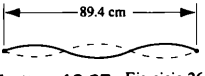


FIGURA 18-27. Ejercicio 26.

27. La ecuación de una onda transversal que se desplaza por una cuerda está dada por

$$y = (0.15\text{ m})\,\text{sen}\,[(0.79\text{ rad/m})x - (13\text{ rad/s})t].$$

a) ¿Cuál es desplazamiento en $x = 2.3$ m, $t = 0.16$ s? *b*) Escriba la ecuación de una onda que, al ser sumada a la onda en cuestión, produciría ondas estacionarias en la cuerda. *c*) ¿Cuál es el desplazamiento de la onda estacionaria resultante en $x = 2.3$ m, $t = 0.16$ s?
28. Una cuerda vibra según la ecuación

$$y = (0.520\text{ cm})\,\text{sen}\,[(1.14\text{ rad/cm})x]\cos[(137\text{ rad/s})t].$$

a) ¿Cuáles son la amplitud y rapidez de las ondas componentes, cuya superposición puede dar origen a esta vibración? *b*) Calcule la distancia entre los nodos. *c*) ¿Qué velocidad tiene una partícula de la cuerda en la posición $x = 1.47$ cm en el tiempo $t = 1.36$ s?
29. Las vibraciones de un diapasón de 622 Hz generan ondas estacionarias en una cuerda sujeta con grapas en ambos extremos. La rapidez de onda en la cuerda es 388 m/s. La onda estacionaria tiene cuatro ciclos y una amplitud de 1.90 mm. *a*) ¿Qué longitud tiene la cuerda? *b*) Escriba una ecuación para obtener el desplazamiento de la cuerda en función de la posición y el tiempo.

18-10 Ondas estacionarias y resonancia

30. Una cuerda de violín de 15.0 cm, fija por ambos extremos, vibra en su modo $n = 1$. La rapidez de las ondas en este alambre es de 250 m/s, y la del sonido en el aire es de 348 m/s. ¿Cuáles son *a*) la frecuencia, y *b*) la longitud de onda de la onda sonora emitida?
31. ¿Cuáles son las tres frecuencias más bajas de las ondas estacionarias en un alambre de 9.88 m de largo que tiene una masa de 0.107 kg, y que estiramos con una tensión de 236 N?
32. Un alambre de 1.48 m de largo tiene una masa de 8.62 g, y se halla bajo una tensión de 122 N. Está sujetado rígidamente en ambos extremos y se hace vibrar. Calcule *a*) la rapidez de las ondas en el alambre, *b*) la longitud de onda de las ondas que producen ondas estacionarias de uno y dos ciclos en el alambre y *c*) las frecuencias de las ondas en *b*).
33. Se mantiene fijo un extremo de una cuerda de 120 cm. El otro está sujeto a un anillo sin peso que puede deslizarse por una varilla sin fricción, como se ve en la figura 18-28. ¿Cuáles son las tres longitudes más largas posibles de las ondas estacionarias en la cuerda? Dibuje las ondas estacionarias correspondientes.

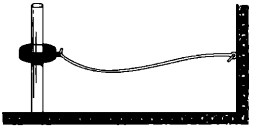


FIGURA 18-28. Ejercicio 33.

34. Se estira una cuerda de 75.6 cm entre soportes fijos. Se observa que tiene frecuencias resonantes de 420 y 315 Hz, y ninguna otra entre esas dos frecuencias. *a*) ¿Cuál es la frecuencia resonante más baja de la cuerda? *b*) ¿Cuál es la rapidez de onda en ella?

PROBLEMAS

1. Una onda con frecuencia de 493 Hz tiene una rapidez de 353 m/s. *a*) ¿A qué distancia se encuentran dos puntos cuya fase difiere en 55.0°? *b*) Encuentre la diferencia de fase entre dos desplazamientos en el mismo punto, pero en momentos que difiere 1.12 ms.
2. Escriba la ecuación de una onda que sigue una dirección negativa a lo largo del eje x, y que tiene una amplitud de 1.12 cm, una frecuencia de 548 Hz y una rapidez de 326 m/s.
3. El esfuerzo tensil S en un alambre, se define como la fuerza de tensión por superficie unitaria transversal. Demuestre que la rapidez de las ondas transversales en él es $v = (S/\rho)^{1/2}$, donde ρ es la densidad de masa del alambre. *b*) Teniendo en cuenta un factor razonable de seguridad, el esfuerzo tensil máximo al que está sujeto el acero es 720 MPa. La densidad del acero es 7.8 g/cm^3. Calcule la rapidez máxima de una onda transversal en un alambre de acero.

4. Una onda senoidal continua se desplaza a través de una cuerda con una rapidez de 82.6 cm/s. Se descubre que el desplazamiento de las partículas de la cuerda en $x = 9.60$ cm varía en el tiempo, según la ecuación $y = (5.12\text{ cm})\,\text{sen}\,[(1.16\text{ rad}) - (4.08\text{ rad/s})t]$. La densidad de masa lineal de la cuerda es 3.86 g/cm. *a*) Determine la frecuencia de la onda. *b*) Determine la longitud de onda. *c*) Escriba la ecuación general que nos da el desplazamiento transversal de la partícula de la cuerda en función de la posición y el tiempo. *d*) Calcule la tensión de la cuerda.
5. Pruebe que la pendiente de una cuerda en un punto cualquiera, es numéricamente igual a la razón de la rapidez de la partícula a la de la onda en ese punto.
6. En una onda de una cuerda estirada, encuentre la razón de la rapidez máxima de la partícula (la máxima con que una partícula individual se mueve transversalmente a la onda) a la rapidez de onda. Si a la cuerda le sobreponemos una onda de cierta frecuencia y amplitud, ¿dependería esta razón de rapidez del material de que está hecha la cuerda como alambre o nailon?
7. El tipo de banda de hule usado en el interior de las bolas de béisbol y de golf, sigue la Ley de Hooke en intervalo largo de alargamiento de la banda. Un segmento de este material tiene un longitud no extendida L y una masa m. Cuando se aplica la fuerza F, la banda se estira una longitud adicional ΔL. *a*) ¿Cuál es la rapidez (en función de m, ΔL y de la constante de fuerza k) de las ondas transversales de la banda? *b*) Basándose en su respuesta a *a*), demuestre que el tiempo requerido para que un pulso transversal recorra la longitud de la banda es proporcional a $1/\sqrt{\Delta L}$ si $\Delta L << L$, y que es constante si $\Delta L >> L$.
8. Una cuerda uniforme de masa m y de longitud L, cuelga del techo. *a*) Demuestre que la rapidez de una onda transversal en ella es una función de y, la distancia del extremo inferior y que está dada por $v = \sqrt{gy}$. *b*) Demuestre que el tiempo que una onda transversal tarda en recorrer la longitud de la cuerda, está dada por $t = 2\sqrt{L/g}$. *c*) ¿Afecta la masa real de la cuerda a los resultados de *a*) y de *b*)?
9. Un alambre no uniforme de longitud L y de masa M, tiene una densidad de masa lineal variable dada por $\mu = kx$, donde x es la distancia de un extremo del alambre, y k es una constante. *a*) Demuestre que $M = kL^2/2$. *b*) Pruebe que el tiempo t requerido para que un pulso generado en un extremo del alambre llegue al otro extremo, está dado por $t = \sqrt{8ML/9F}$; donde F, es la tensión en el alambre.
10. Un aro circular uniforme de cuerda gira en dirección de las manecillas del reloj sin gravedad (véase Fig. 18-29). La rapidez tangencial es v. Calcule la rapidez de las ondas en esta cuerda. (Nótese que la respuesta no depende del radio del aro, ni de la densidad de masa lineal de la cuerda.)

FIGURA 18-29. Problema 10.

11. En la época de Handel, los violines se construían para tocar un "La" a 422.5 Hz. (¿Cómo lo sabemos?) Sin embargo, las orquestas modernas están afinadas (o entonadas) para tocar esa nota a 440 Hz. Suponga lo siguiente: en igualdad de circunstancias, ¿en qué porcentaje necesita un músico aumentar la tensión en las cuerdas para lograr que hoy un violín de la época de Handel no desafine?
12. Una onda senoidal transversal es generada en un extremo de una cuerda larga y horizontal, por una barra que se desplaza hacia arriba y abajo recorriendo una distancia de 1.12 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 120 veces por segundo. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de 117 g/m, y se mantiene a una tensión de 91.4 N. Determine *a*) la magnitud máxima de la rapidez transversal u_y, y *b*) la magnitud máxima del componente transversal de la tensión. *c*) Demuestre que los dos valores máximos calculados antes, ocurren en los mismos valores de fase de la onda. ¿Cuál es el desplazamiento transversal y en las condiciones en que se da esta transferencia máxima de potencia? *d*) ¿Cuál es la potencia máxima transferida en la cuerda? *e*) ¿Cuál es el desplazamiento transversal y en las condiciones en que se realiza la transferencia? *f*) ¿Cuál es la transferencia mínima de potencia en la cuerda? *g*) ¿Cuál es el desplazamiento y en las condiciones en que se realiza esta transferencia mínima?
13. Examine detenidamente las dos fuentes puntuales S_1 y S_2 en la figura 18-30, que emiten ondas de la misma frecuencia f y amplitud A. Comienzan en la misma fase, y esta relación de fase se conserva todo el tiempo. Considere el punto P, donde r_1 es casi igual a r_2. *a*) Demuestre que la superposición de estas dos ondas genera una, cuya amplitud y_m varía con la posición P aproximadamente según

$$y_m = \frac{2A}{r}\cos\frac{k}{2}(r_1 - r_2),$$

donde $r = (r_1 + r_2)/2$. *b*) Demuestre después que la cancelación total ocurre cuando $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$; donde n, es un entero cualquiera, y que el reforzamiento total ocurre cuando $r_1 - r_2 = n\lambda$. Es una hipérbola el lugar de los puntos cuya diferencia de distancia respecto a dos puntos fijos es una constante; los puntos fijos son los focos. Por eso, cada valor de n da una línea hiperbólica de la interferencia destructiva, y una línea hiperbólica de interferencia constructiva. La amplitud de las ondas procedentes de S_1 y S_2 difieren, las cancelaciones son parciales en los puntos, donde r_1 y r_2 no son aproximadamente iguales (cerca de las fuentes, por ejemplo).

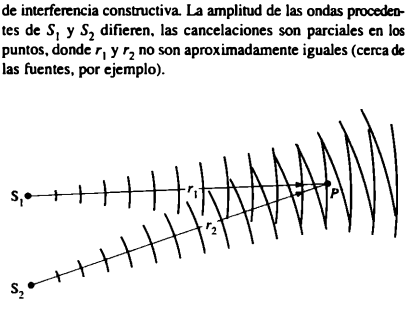


FIGURA 18-30. Problema 13.

14. Una fuente S y un detector D de ondas de alta frecuencia, se encuentran a una distancia d entre sí en el suelo. Se comprueba que la onda directa proveniente de S está en fase en D, con la onda proveniente de S que se refleja contra una capa horizontal a una altitud H (Fig. 18-31). Los rayos incidente y reflejado forman el mismo ángulo con la capa reflectora. Cuando la capa se eleva una distancia h, no se detecta señal alguna en D. No tenga en cuenta la absorción en la atmósfera, y encuentre la relación entre d, h, H y la longitud de onda λ de las ondas.

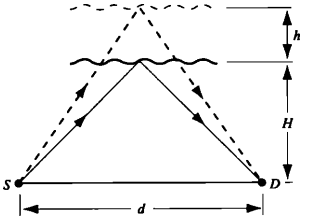


FIGURA 18-31. Problemas 14 y 15.

15. Consulte el problema 14 y la figura 18-31. Suponga que d = 230 km y que H = 510 km. Las ondas son ondas de radio 13.0 MHz ($v = 3.00 \times 10^8$ m/s). En el detector D, la fuerza combinada de las señales fluctúa de un máximo a cero, y de nuevo a un máximo seis veces en 1 minuto. ¿A qué rapidez vertical se mueve la capa reflectora? (Se desplaza lentamente de modo que la distancia vertical cubierta en 1 min es pequeña en comparación con H y con d.)
16. Considere una onda estacionaria, que es la suma de dos ondas que siguen direcciones opuestas, pero que son idénticas en los demás aspectos. Demuestre que la energía cinética máxima de cada ciclo de la onda es $2\pi^2 \mu y_m^2 f v$.
17. Una onda viajera incidente de amplitud A_i, se refleja sólo parcialmente de una frontera, siendo A_r la amplitud de la onda reflejada. La superposición resultante de las dos ondas que tienen distinta amplitud y siguen direcciones opuestas, origina un patrón de ondas estacionarias, cuya envolvente aparece en la figura 18-32. La relación de onda estacionaria (ROE), se define como $(A_i + A_r)/(A_i - A_r) = A_{máx}/A_{mín}$; la reflexión porcentual, se define como la razón de la potencia promedio en la onda reflejada a la potencia promedio de la onda incidente, multiplicada por 100. *a*) Demuestre que en el 100% de la reflexión ROE = ∞, y que sin reflexión ROE = 1. *b*) Demuestre que una medición de ROE poco antes de la frontera, revela la reflexión porcentual que ocurre en la frontera según la fórmula

$$\% \text{ reflexión} = [(\text{ROE} - 1)^2/(\text{ROE} + 1)^2](100).$$

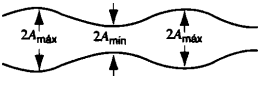


FIGURA 18-32. Problemas 17 y 18.

18. Estime *a*) la ROE, y *b*) la reflexión porcentual en la frontera de la envolvente del patrón de onda estacionaria que se observa en la figura 18-32.
19. Dos cuerdas de densidad de masa lineal μ_1 y μ_2 están atadas en $x = 0$, y son estiradas hasta alcanzar una tensión F. Una onda $y = A \operatorname{sen} k_1 (x - v_1 t)$ en la cuerda de densidad μ_1, llega a la unión entre las dos cuerdas, donde una parte se transmite a la cuerda de densidad μ_2 y una parte se refleja. Designe estas ondas como $B \operatorname{sen} k_2(x - v_2 t)$ y $C \operatorname{sen} k_1(x + v_1 t)$, respectivamente. *a*) Suponiendo que $k_2 v_2 = k_1 v_1 = \omega$, y que el desplazamiento del nudo proveniente de las ondas incidente y que refleja es igual al que proviene de la onda transmitida, pruebe que $A = B + C$. *b*) Si se supone que las dos cuerdas cerca del nudo tienen la misma pendiente (¿por qué?) —es decir, dy/dx en la cuerda 1 = dy/dx en la cuerda 2—, demuestre que

$$C = A\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}.$$

¿En qué condiciones es negativa C?
20. Puede haber interferencia en las ondas con distinta frecuencia. *a*) Demuestre que la resultante de las dos ondas

$$y_1(x, t) = y_m \operatorname{sen}(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x, t) = y_m \operatorname{sen}(k_2 x - \omega_2 t)$$

puede escribirse así

$$y(x, t) = 2y_m \cos\left[\frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta\omega t)\right] \operatorname{sen}(k' x - \omega' t).$$

b) ¿Qué es ω'/k'? *c*) Describa en términos cualitativos el movimiento de esta onda.
21. En un experimento acerca de las ondas estacionarias, una cuerda de 92.4 cm de largo se conecta a la punta de un diapasón eléctrico, que vibra perpendicularmente a la longitud de la cuerda con una frecuencia de 60.0 Hz. La masa de la cuerda es 44.2 g. ¿Bajo cuánta tensión debe la cuerda estar (se sujetan pesos al otro extremo) para que vibre con cuatro ciclos?
22. Un alambre de aluminio de L_1 = 60.0 cm y con una superficie transversal 1.00×10^{-2} cm^2, está conectado a un alambre de acero de la misma superficie. El alambre compuesto, cargado con un bloque m de 10.0 kg de masa, está dispuesto como se indica en la figura 18-33, de manera que la distancia L_2 de la unión con la polea de sostén es 86.6 cm. Se crean ondas transversales en el alambre utilizando una fuente externa de frecuencia variable. *a*) Determine la frecuencia más baja de excitación en que se observan las ondas estacionarias, de modo que la unión en el alambre es un nodo. *b*) ¿Cuál es el número total de nodos observados en esta frecuencia, excluyendo los dos en los extremos del alambre? La densidad del aluminio es 2.60 g/cm^3, y la del acero es 7.80 g/cm^3.

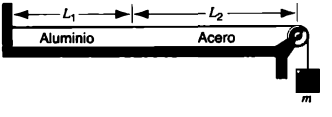


FIGURA 18-33. Problema 22.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Una función simple está dada por $y(x) = x(\pi - x)$ en la región $0 < x < \pi$. Se desea que esta función sea aproximada por una serie de funciones seno en la forma $y(x) \approx a_1 \operatorname{sen} x + a_3 \operatorname{sen} 3x + a_5 \operatorname{sen} 5x + \cdots$. *a*) Con un programa de graficación, estime los valores de a_1, a_3 y a_5 que ofrecen el mejor ajuste visual. *b*) Use un programa de matemáticas simbólicas (Maple o Mathematica) para evaluar las integrales

$$I_n = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 nx\, dx$$

y

$$I_0 = \int_0^\pi \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx,$$

donde n y m son enteros, pero no iguales entre sí. *c*) Encuentre los valores *exactos* de los coeficientes a_n para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, evaluándo para ello

$$a_n = \frac{1}{I_n} \int_0^\pi x(\pi - x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

¿Por qué funciona este método? Compare sus respuestas con el proceso de inspección visual.

CAPÍTULO 10

ONDAS SONORAS

En el Capítulo 18 estudiamos ondas mecánicas transversales, en particular las vibraciones de una cuerda estirada. Ahora nos ocuparemos de las ondas mecánicas longitudinales, en particular de las ondas sonoras. Lo que llamamos sonido es una vibración mecánica longitudinal con frecuencias que fluctúan entre unos 20 y 20,000 Hz, que es el intervalo normal de la audición humana. Las ondas de mayor frecuencia, que se conocen como ondas ultrasónicas, sirven para localizar objetos bajo el agua y obtener imágenes médicas. Las ondas longitudinales (y transversales) de menor frecuencia, llamadas infrasónicas, aparecen como ondas sísmicas en los terremotos.

En el presente capítulo examinaremos las propiedades de las ondas sonoras, su propagación y su producción por parte de los sistemas vibratorios.

19-1 PROPIEDADES DE LAS ONDAS SONORAS

A semejanza de la onda transversal en la cuerda, el sonido es una onda mecánica: la perturbación se propaga por la intervención de fuerzas mecánicas (elásticas) entre las partículas del medio. Pueden desplazarse a través de cualquier medio material (sólido, líquido o gas). En los sólidos pueden ser longitudinales o transversales; en cambio, en los líquidos (que no pueden soportar las fuerzas de cizallamiento) son sólo longitudinales, lo cual significa que las partículas del medio oscilan en la misma dirección en que se desplaza la onda.

Cuando hablamos de ondas sonoras, casi siempre nos referimos a las ondas longitudinales cuya frecuencia fluctúa entre 20 y 20,000 Hz, es decir, el intervalo normal de la audición humana. Sin embargo, la rama de la física y de la ingeniería que trata de las ondas sonoras, denominada *acústica*, suele incluir el estudio de ondas mecánicas de todas las frecuencias, tanto las vibraciones transversales como las longitudinales en el caso de los sólidos. En este capítulo vamos a concentrarnos en las ondas sonoras en el aire, que son estrictamente longitudinales.

Aunque una fuente pequeña de sonido en una superficie abierta emite ondas tridimensionales, simplificaremos el problema considerando ondas unidimensionales. La figura 19-1 indica cómo una onda de este tipo podría crearse en un tubo largo lleno de aire. En un extremo está instalado un pistón, que podría representar el cono en movimiento de un altavoz. A medida que el pistón fluctúa, comprime y expande (rarifica)

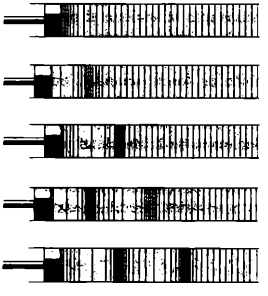


FIGURA 19-1. Ondas sonoras generadas en un tubo por un pistón en movimiento, que podrían representar el cono móvil de un altavoz. Las líneas verticales dividen el medio compresible del tubo en capas de la misma masa.

alternativamente el aire cercano. Esta perturbación se propaga hacia delante del tubo como onda sonora. Al pasar la onda por un punto, las moléculas del aire oscilan alrededor de sus posiciones de equilibrio, paralelamente a la dirección en que se desplaza ella.

Como veremos luego, podemos describir la onda sonora tanto en función de los cambios de la presión local en el medio como en función del desplazamiento de las moléculas del aire respecto a su posición de equilibrio. Ambas descripciones aportan la misma información, sólo que sus expresiones matemáticas son un poco diferentes.

19-2 ONDAS SONORAS VIAJERAS

Al oscilar el pistón de la figura 19-1, produce variaciones de densidad del aire en el tubo de un lugar a otro y también de un momento a otro, como se advierte en la figura 19-1. A las regiones de gran densidad se les conoce como *compresiones* y a las de poca densidad como *rarefacciones*. Conforme se propaga la onda sonora, las compresiones y las rarefacciones se desplazan a lo largo del tubo.

La densidad en el tubo la expresamos como $\rho(x, t)$, una función del lugar y del tiempo. La densidad no perturbada del aire en el tubo es ρ_0, y la onda sonora causa fluctuaciones en la densidad $\Delta\rho(x, t)$ sumamente pequeñas en comparación con ρ_0. En otras palabras, $\rho(x, t) = \rho_0 + \Delta\rho(x, t)$, donde $\Delta\rho(x, t)$ puede ser positiva o negativa pero $|\Delta\rho(x, t)| \ll \rho_0$.

También podemos describir la onda sonora a partir de la variación de la presión dentro del tubo. Las variaciones se desplazan a través del tubo en fase con las de la densidad: cuando esta última alcanza su nivel máximo en un sitio determinado, la presión también lo alcanza allí. La presión no perturbada en ausencia de la onda sonora es p_0, y las fluctuaciones de presión $\Delta p(x, t)$ pueden ser positivas o negativas, pero resultan muy pequeñas en comparación con p_0. La presión total en el punto con la coordenada x y el tiempo t es $p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t)$.

Supongamos que se accione al pistón de modo que su posición pueda describirse mediante una función seno o coseno; entonces la densidad y la presión del aire dentro del tubo variarán también en forma senoidal. En la figura 19-2*a* se muestra una instantánea de la densidad del aire en un determinado momento; las figuras 19-2*b* y *c* incluyen las variaciones correspondientes de la densidad y presión del aire. La densidad fluctúa con una amplitud $\Delta\rho_m$ alrededor del valor ρ_0, y la presión lo hace con una amplitud Δp_m alrededor de p_0. En las ondas senoidales, prescindimos ahora de cualquier constante de fase y entonces podemos escribir

$$\Delta\rho(x, t) = \Delta\rho_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{19-1}$$

En forma semejante, las variaciones de presión pueden escribirse así

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{19-2}$$

Por lo regular, es mejor describir la onda sonora a partir de su variación de presión.

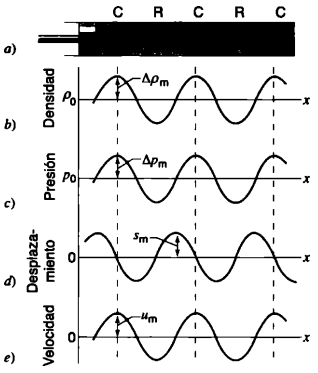


FIGURA 19-2. *a*) Compresiones C y rarefacciones R en una onda sonora que se propaga a través de un tubo. *b*) Instantánea de la densidad, que varía con la amplitud $\Delta\rho_m$ alrededor del valor ρ_0. *c*) Instantánea de la presión que varía con la amplitud Δp_m alrededor de p_0. *d*) Desplazamiento longitudinal que muestra en todos los lugares x como un elemento pequeño del aire ha sido desplazado de su posición de equilibrio. *e*) Velocidad longitudinal de los elementos pequeños del aire.

La relación entre la amplitud de presión Δp_m y la de densidad $\Delta\rho_m$ se basa en las propiedades mecánicas del medio. En la ecuación 15-5 introducimos el módulo volumétrico $B = -\Delta p/(\Delta V/V)$, que describe el cambio de volumen de un elemento del fluido en respuesta a una modificación de la presión. Con $\rho = m/V$, tenemos $d\rho = (m/V^2)dV = -(\rho/V)dV$. Reemplazando las diferenciales por diferencias, podemos escribir $\Delta\rho = -\rho(\Delta V/V)$. Al utilizar la ecuación 15-5 para sustituir $\Delta V/V$ con $-\Delta p/B$, y ρ por su valor no perturbado ρ_0 (porque las fluctuaciones $\Delta\rho$ son pequeñas), tenemos

$$\Delta\rho = -\rho\frac{\Delta V}{V} = -\rho_0\frac{-\Delta p}{B} = \Delta p\frac{\rho_0}{B}$$

o, en función de la amplitud de la densidad y de la presión,

$$\Delta\rho_m = \Delta p_m\frac{\rho_0}{B}. \tag{19-3}$$

Dado que la ecuación 15-5 se aplica a todos los fluidos (no sólo al aire), la ecuación 19-3 también se aplica a las ondas sonoras en todos los fluidos.

Es necesario recordar una advertencia cuando se utilice la ecuación 19-3. Conforme una onda sonora se desplaza a lo largo del tubo, comprime y expande alternativamente todos los volúmenes pequeños de aire. Cuando se comprime un elemento del volumen de un gas, se realiza trabajo en él de manera que aumentan su energía interna y su temperatura. En los fluidos, la rapidez con que la energía puede fluir (en forma de calor) de un elemento a otro suele ser bastante pequeña, así que su incremento relacionado con la compresión no tiene suficiente tiempo en las frecuencias de las ondas sonoras para ser trans-

ferido como calor a las regiones cercanas más frías asociadas a las rarefacciones. A este fenómeno lo llamamos proceso *adiabático* (sin transferencia de calor), de ahí que en la ecuación 19-3 debamos emplear el módulo volumétrico adiabático. De lo contrario, si el calor pudiera fluir de modo que las regiones vecinas alcanzaran una temperatura común, utilizaríamos el módulo volumétrico *isotérmico* (temperatura constante). En un gas como el aire, el módulo volumétrico adiabático es unas 1.4 veces mayor que el isotérmico. En el Capítulo 23 se estudian más a fondo los procesos isotérmicos y adiabáticos.

El sonido como onda de desplazamiento

Así como en el Capítulo 18 examinamos el desplazamiento y la velocidad de las "partículas" de un medio en las ondas transversales mecánicas de una cuerda, también conviene analizar el desplazamiento y la velocidad asociadas a la onda sonora longitudinal. En este caso, las "partículas" del medio se refieren a los elementos de volumen del fluido.

En la figura 19-3 se ve un elemento de gas dentro del tubo por donde se propaga la onda sonora. El elemento tiene masa δm y el estado de equilibrio se sitúa en la coordenada x, su espesor es δx y su superficie transversal es A. La densidad no perturbada del elemento de fluido es

$$\rho_0 = \frac{\delta m}{A\,\delta x}. \tag{19-4}$$

Al pasar la onda sonora, este elemento oscila alrededor de su posición de equilibrio. Mediante la función $s(x, t)$ representamos el desplazamiento del elemento de esa posición. El valor de la función varía de un lugar a otro y también de tiempo en tiempo, conforme la onda sonora desplaza los elementos. La función $s(x, t)$ se parece a la de onda transversal $y(x, t)$, con una importante excepción: el desplazamiento s se mide en dirección de la propagación de una onda longitudinal, no en ángulos rectos con la dirección de ella (en el caso de la onda transversal del Capítulo 18).

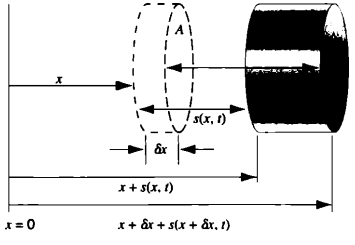


FIGURA 19-3. Un elemento de aire de espesor δx y de superficie transversal A se halla originalmente en x. La onda sonora lo desplaza en $s(x, t)$.

En respuesta a la onda sonora, el borde izquierdo del elemento del fluido pasa de la coordenada x a la coordenada $x + s(x, t)$, como se ve en la figura 19-3. El borde derecho del elemento pasa de la coordenada $x + \delta x$ a $x + \delta x + s(x + \delta x, t)$. Es decir, en respuesta a la onda sonora no sólo se mueve el elemento del fluido, sino que su espesor cambia de δx a $[x + \delta x + s(x + \delta x, t)] - [x + s(x, t)] = \delta x + s(x + \delta x, t) - s(x, t)$, expresión que puede escribirse así:

$$\delta x\left[1 + \frac{s(x + \delta x, t) - s(x, t)}{\delta x}\right].$$

En el límite de un elemento muy delgado del volumen, donde $\delta x \to 0$, el cociente de la expresión anterior puede escribirse como $\partial s/\partial x$, la derivada parcial de s respecto a x; por eso el espesor del elemento es $\delta x[1 + \partial s/\partial x]$. Ahora la densidad de este elemento es

$$\rho = \frac{\delta m}{A\,\delta x(1 + \partial s/\partial x)} = \frac{\rho_0}{1 + \partial s/\partial x} \tag{19-5}$$

si utilizamos la ecuación 19-4 para ρ_0. Hemos supuesto que las variaciones de densidad son muy pequeñas, por lo cual $\partial s/\partial x \ll 1$. Por medio de la expansión binomial (Apén. I), $(1 + z)^{-1} = 1 - z + \cdots$, conservamos sólo el primer término de la expansión y obtenemos $\rho = \rho_0(1 - \partial s/\partial x)$. El cambio de densidad es $\Delta\rho(x, t) = \rho - \rho_0$; es decir

$$\Delta\rho(x, t) = -\rho_0\frac{\partial s}{\partial x}. \tag{19-6}$$

En las ondas senoidales podemos servirnos de la ecuación 19-1 para $\Delta\rho(x, t)$, obteniendo con ello

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\Delta\rho(x, t)}{\rho_0} = -\frac{\Delta\rho_m}{\rho_0}\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t).$$

Al integrar respecto a x se tiene

$$s(x, t) = \frac{\Delta\rho_m}{k\rho_0}\cos(kx - \omega t) = s_m\cos(kx - \omega t). \tag{19-7}$$

La amplitud de desplazamiento es

$$s_m = \frac{\Delta\rho_m}{k\rho_0} = \frac{\Delta p_m}{kB}, \tag{19-8}$$

donde hemos empleado la ecuación 19-3 para relacionar $\Delta\rho_m$ a Δp_m.

Nótese que la variación del desplazamiento se expresa como una función coseno cuando las variaciones del desplazamiento están 90° fuera de fase con las de la presión y la densidad. La forma de onda del desplazamiento aparece en la figura 19-2*d*. En lugares donde la presión y la densidad presentan su nivel máximo o mínimo, el desplazamiento de los elementos del fluido es cero; es máximo o mínimo cuando las variaciones de presión y de densidad son cero. Por ejemplo, en una compresión los elementos del fluido situados a la izquierda han de tener desplazamientos positivos y los de la derecha desplazamientos negativos, lo cual es compatible con los elementos en el centro de la compresión que tienen desplazamientos cero.

Al oscilar un elemento del fluido alrededor de su posición de equilibrio, su velocidad longitudinal es

$$u_x(x, t) = \frac{\partial s}{\partial t} = \omega s_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) = u_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \tag{19-9}$$

donde la amplitud de la variación de velocidad es

$$u_m = \omega s_m = \frac{\omega \Delta p_m}{kB} = \frac{v \Delta p_m}{B} \tag{19-10}$$

si utilizamos las ecuaciones 19-8 y 18-13 ($v = \omega/k$). Una vez más, conviene señalar que es una velocidad longitudinal, dirigida a lo largo del eje del tubo (paralelamente a la dirección en que se propaga la onda). Las variaciones de velocidad están en fase con la de la presión y de la densidad, como se aprecia en la figura 19-2*e*.

Hemos descrito la onda sonora en función de una onda de presión o de desplazamiento, pero en general las dos descripciones no son equivalentes. Sólo cuando una onda longitudinal se propaga en una sola dirección podemos alternar las dos descripciones. Si examinamos la reflexión de una onda sonora en el extremo de un tubo o si sobreponemos dos ondas sonoras que interfieren en un punto, pueden cometerse serios errores al utilizar la descripción de la onda de desplazamiento.* Por ejemplo, tomemos dos ondas sonoras emitidas de distintas fuentes (dos altavoces, por ejemplo) que siguen distinta dirección y que interfieren en un punto, de modo que una onda produce un cambio de presión Δp y la otra $-\Delta p$. Con base en la descripción de la presión, cabe esperar una interferencia destructiva allí porque las presiones se suman como escalares. Pero los desplazamientos (que siguen la dirección en que se desplazan ambas ondas) no suman cero porque los vectores siguen direcciones contrarias. *Por lo regular, es preferible describir una onda sonora como onda de presión* a fin de evitar problemas. Más aún, según veremos en la siguiente sección, es el cambio de presión y no el desplazamiento el que detecta el oído y los micrófonos.

PROBLEMA RESUELTO 19-1. La variación máxima de presión Δp_m que el oído humano puede tolerar en sonidos fuertes es de 28 Pa a 1,000 Hz. El sonido audible más débil a esa frecuencia tiene una amplitud de presión aproximada de 2.8×10^{-5} Pa. Determine las amplitudes correspondientes de densidad y de desplazamiento. El módulo volumétrico del aire en condiciones normales es 1.4×10^5 Pa y la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s a temperatura ambiente.

Solución El número de onda es

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \times 10^3 \text{ Hz}}{343 \text{ m/s}} = 18.3 \text{ rad/m}.$$

La densidad del aire en tales condiciones es 1.21 kg/m³. Por tanto, cuando $\Delta p_m = 28$ Pa y empleando la ecuación 19-3, obtenemos

$$\Delta \rho_m = \Delta p_m \frac{\rho_0}{B} = (28 \text{ Pa}) \frac{1.21 \text{ kg/m}^3}{1.4 \times 10^5 \text{ Pa}}$$

$$= 2.4 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

y empleando la ecuación 19-8,

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{kB} = \frac{28 \text{ Pa}}{(18.3 \text{ rad/m})(1.4 \times 10^5 \text{ Pa})}$$

$$= 1.1 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Las amplitudes del desplazamiento con sonidos muy fuertes son aproximadamente 10^{-5} m, un valor en verdad pequeño. En los sonidos muy débiles, tenemos asimismo

$$\Delta \rho_m = (2.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}) \frac{1.21 \text{ kg/m}^3}{1.4 \times 10^5 \text{ Pa}}$$

$$= 2.4 \times 10^{-10} \text{ kg/m}^3$$

y

$$s_m = \frac{2.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}}{(18.3 \text{ rad/m})(1.4 \times 10^5 \text{ Pa})} = 1.1 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Esto representa cerca de una décima del radio de un átomo típico e indica cuán sensible ha de ser el oído humano para detectar vibraciones de amplitud tan pequeña.

19-3 LA RAPIDEZ DEL SONIDO

Como en el caso de la onda mecánica transversal, la rapidez de una onda sonora dependerá de la razón de una propiedad elástica del medio y de una propiedad inercial. En analogía con la sección 18-4, podríamos conjeturar que la propiedad elástica es la presión no perturbada y que la propiedad inercial es la densidad no perturbada, para intentar después un análisis dimensional basado en

$$v \propto \frac{p_0^a}{\rho_0^b}$$

con el propósito de determinar los exponentes a y b. El análisis dimensional nos da $a = b = \frac{1}{2}$, lo cual habría que verificar. Sin embargo, en este caso no somos tan afortunados como en el de las ondas transversales: la expresión $v = (p_0/\rho_0)^{1/2}$ no ofrece el valor correcto de la rapidez del sonido. Por ejemplo, en el aire y a 20°C obtendríamos $v = 289$ m/s partiendo de esta expresión, cantidad que no concuerda con el valor medido, $v = 343$ m/s. Según recordará el lector, el análisis dimensional nos da sólo la dependencia funcional y no es capaz de ofrecernos los valores de las constantes adimensionales que pueden formar parte de la ecuación. En este caso, es obvio que omitimos una constante importante.

En cambio, recurramos a un análisis mecánico. En vez de una onda senoidal, es más simple considerar sólo un pulso compresional individual que se desplaza hacia delante por el tubo. Tiene una rapidez v, la del sonido. El incremento de

*Una explicación más amplia de este punto se muestra en "Pressure and Displacement in Sound Waves" de C. T. Tindle, *American Journal of Physics*, septiembre de 1984, p. 749.

presión es una constante Δp dentro del pulso que tiene un ancho L.

La figura 19-4*a* muestra el pulso a punto de entrar en un elemento de fluido de longitud L_0 y una superficie transversal A donde la presión no perturbada es p_0. Al cabo de un tiempo t, el borde inicial del pulso habrá alcanzado el extremo del elemento de fluido, el cual ahora ha sido comprimido a la longitud L (Fig. 19-4*b*).

Durante el tiempo t dos fuerzas horizontales actúan sobre el elemento: el pulso compresional ejerce una fuerza $(p_0 + \Delta p)A$ a la derecha, mientras que a la derecha el fluido no perturbado ejerce una fuerza p_0A que opera hacia la izquierda. La fuerza externa neta en el elemento durante este intervalo es $A\ \Delta p$ que actúa hacia la derecha.

A este elemento no podemos aplicarle la forma de partícula de las leyes newtonianas, porque no se comporta como una partícula; ninguna de sus partes se mueve de igual manera. Más bien, podemos tratarlo como un sistema de partículas y emplear la ley de Newton en la formación de la ecuación 7-17 ($\Sigma F_{\text{ext},x} = Ma_{\text{cm},x}$). Medido desde el extremo derecho del elemento, el centro de masa se desplaza de una ubicación $-L_0/2$ a $-L/2$ en el tiempo t. Usando la ecuación 2-28 en la forma $x - x_0 = \frac{1}{2}a_xt^2$, su aceleración es

$$a_{\text{cm},x} = \frac{2(x - x_0)}{t^2} = \frac{2[(-L/2) - (-L_0/2)]}{t^2} = -\frac{\Delta L}{t^2}, \tag{19-11}$$

donde $\Delta L = L - L_0$ es el cambio de longitud del elemento del fluido. La masa de éste es $M = \rho_0AL_0$ y, en consecuencia, la segunda ley de Newton nos da

$$A\ \Delta p = (\rho_0AL_0)(-\Delta L/t^2). \tag{19-12}$$

Si el pulso se mueve con una rapidez v, el tiempo que tarda en cruzar el elemento del fluido es $t = L_0/v$. Al efectuar esta sustitución en la ecuación 19-12 y al rearreglar los términos, obtenemos

$$v^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{-\Delta p}{A\ \Delta L/AL_0}. \tag{19-13}$$

La magnitud $A\ \Delta L$ es el cambio de volumen del elemento de fluido ΔV, y AL_0 es su volumen original V. Con estas sustituciones, el segundo factor del lado derecho de la ecuación 19-13 se convierte en $-\Delta p/(\Delta V/V)$, que no es sino el módulo volumétrico B. Si tomamos la raíz cuadrada a ambos lados, podremos escribir entonces la ecuación 19-13 como

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}. \tag{19-14}$$

La ecuación 19-14 contiene la velocidad del sonido en fluidos atendiendo al módulo volumétrico y a la densidad. Nótese que, como en el caso de las ondas transversales en una cuerda, depende exclusivamente de las propiedades del medio y no de la frecuencia ni de la longitud de onda.

En los gases, el módulo volumétrico puede escribirse γp_0, donde γ es una constante (denominada *razón de calores específicos* y explicada en el Capítulo 23) que depende del tipo de gas y generalmente tiene valores entre 1.3 y 1.7. En el aire, $\gamma = 1.4$; este factor explica la discrepancia en el resultado de la velocidad del sonido obtenida con el análisis dimensional al inicio de la sección.

La ecuación 19-14 se aplica a los fluidos (gases y líquidos) pero no a los sólidos. En estos últimos puede haber un módulo de corte y un módulo compresional; el análisis suele complicarse más que en el caso unidimensional simple aquí presentado.

La tabla 19-1 contiene algunos valores representativos de la velocidad del sonido en varios materiales.

Finalmente, señalamos que en esta sección hemos tratado el fluido como un medio continuo. En cambio, en un gas los espacios entre las moléculas son grandes (en comparación con el tamaño de las moléculas) y ellas se desplazan con un movimiento térmico aleatorio. Las oscilaciones producidas por una onda sonora se sobreponen a dichos movimientos. El impulso aplicado a una molécula se transmite a otra sólo después que la primera se haya desplazado a través del espacio vacío entre ellas y que haya chocado con la segunda. Así, se observa una estrecha conexión entre la rapidez molecular promedio en un fluido y la de un sonido en él. En particular, conforme vamos elevando la temperatura, la rapidez molecular y

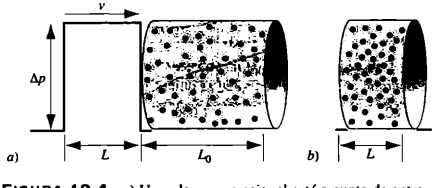


FIGURA 19-4. *a*) Un pulso compresional está a punto de entrar en un elemento de fluido de longitud no perturbada L_0. *b*) Un tiempo t más tarde, llegó ya al extremo derecho del elemento y lo comprimió hasta una longitud L.

TABLA 19-1 Velocidad del sonido[a]

Medio	*Velocidad* (m/s)
Gases	
Aire (0°C)	331
Aire (20°C)	343
Helio	965
Hidrógeno	1,284
Líquidos	
Agua (0°C)	1,402
Agua (20°C)	1,482
Agua de mar[b]	1,522
Sólidos[c]	
Aluminio	6,420
Acero	5,941
Granito	6,000

[a]A 0°C y 1 atm de presión, si no se indica lo contrario.
[b]A 20°C y con 3.5% de salinidad.
[c]Ondas longitudinales; la velocidad de las ondas transversales es aproximadamente la mitad de las longitudinales.

la rapidez promedio del sonido en un gas aumentan exactamente del mismo modo.

19-4 POTENCIA E INTENSIDAD DE LAS ONDAS SONORAS

En la sección 18-6 determinamos la intensidad de las ondas transversales en una cuerda considerando la energía cinética y potencial asociada al movimiento angular. Podemos efectuar el mismo tipo de análisis en las ondas sonoras si calculamos la energía cinética debida al movimiento de los elementos del fluido y la energía interna almacenada en cada uno (cuya forma se parece mucho a la energía potencial), a medida que pasa la onda. Sin embargo, para calcular la energía interna hay que conocer algunos detalles del comportamiento dinámico de los gases que se estudiarán en el Capítulo 23. Por eso vamos a emplear otro método para encontrar la potencia transferida por una onda sonora.

A medida que la onda se propaga, cada elemento del fluido ejerce una fuerza sobre el de adelante de él. Si el incremento de la presión en el elemento es Δp, la fuerza que ejerce sobre el siguiente será $F_x = A\,\Delta p$, donde A es su superficie transversal. Al aplicar la ecuación 19-2 a la presión, descubrimos que la fuerza es

$$F_x = A\,\Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{19-15}$$

La velocidad u_x de una porción delgada del fluido está dada por la ecuación 19-9. La potencia suministrada al elemento del fluido es

$$P = u_x F_x = A\,\Delta p_m u_m \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{19-16}$$

Utilizamos la ecuación 19-10 y podemos escribir lo anterior así

$$P = \frac{Av(\Delta p_m)^2}{B} \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{19-17}$$

Igual que en la sección 18-6, suponemos que observamos las ondas durante un tiempo muy largo en comparación con el periodo de su oscilación. El valor promedio de $\operatorname{sen}^2\theta$ en varios ciclos completos es $\frac{1}{2}$, así que la potencia promedio es

$$P_{pro} = \frac{Av(\Delta p_m)^2}{2B} = \frac{A(\Delta p_m)^2}{2\rho v} \tag{19-18}$$

usando la ecuación 19-14 para reemplazar B por ρv^2.

Como en la onda transversal, la potencia depende del *cuadrado* de la amplitud, en este caso la amplitud de la presión. Nótese que la frecuencia no aparece explícitamente en la ecuación 19-18 (aunque lo haría si expresáramos la potencia promedio en función de la amplitud del desplazamiento). Así pues, al medir las amplitudes de la presión podemos comparar directamente la intensidad de los sonidos que presenten frecuencias *diferentes*. Por tal razón, los instrumentos que miden los cambios de presión son preferibles a los que miden los desplazamientos; más aún, como vimos en el problema resuelto 19-1, el desplazamiento de los sonidos perceptibles más débiles son muy pequeños y sería difícil medirlos de modo directo.

Cuando se comparan varios sonidos, conviene más utilizar la *intensidad* (potencia promedio por superficie unitaria) de la onda. Conforme a la ecuación 19-18, podemos obtener inmediatamente la intensidad I:

$$I = \frac{P_{pro}}{A} = \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v}. \tag{19-19}$$

La respuesta del oído a un sonido de creciente intensidad es más o menos logarítmica, y por ello conviene introducir una escala logarítmica de intensidad denominada *nivel de sonido, NS:*

$$NS = 10 \log \frac{I}{I_0}. \tag{19-20}$$

El *nivel de sonido* se define respecto a una intensidad de referencia I_0, que se decide que sea 10^{-12} W/m^2 (un valor típico en el umbral de la audición humana). Los niveles así definidos se miden en unidades de *decibeles* (dB). Un sonido de intensidad I_0 tiene un nivel de sonido de 0 dB, en tanto que en el intervalo superior de la audición, denominado umbral del dolor, su intensidad es 1 W/m^2 y su nivel de sonido es de 120 dB. Multiplicar la intensidad I por un factor de 10 equivale a sumar 10 dB al nivel del sonido.

También podemos utilizar el dB como medida *relativa* para comparar diversos sonidos entre sí, en vez de emplear la intensidad de referencia. Supóngase que queremos comparar dos sonidos de intensidades I_1 y I_2:

$$NS_1 - NS_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0}$$

$$= 10 \log \frac{I_1}{I_2}. \tag{19-21}$$

Por ejemplo, el nivel de dos sonidos cuya razón de intensidad sea 2 es diferente en 10 log 2 = 3 dB.

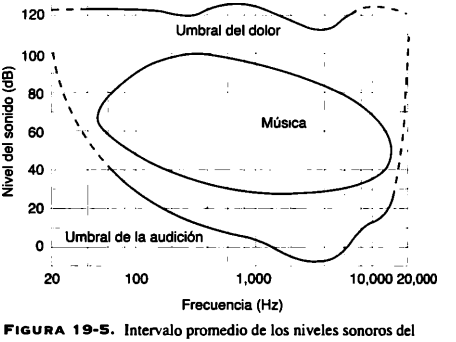


FIGURA 19-5. Intervalo promedio de los niveles sonoros del oído humano. Nótese la dependencia de los niveles de umbral respecto a la frecuencia. Un sonido que apenas si podemos escuchar a 100 Hz debe tener 1,000 veces la potencia acústica (30 dB más del nivel del sonido) que uno que apenas sea perceptible a 1,000 Hz, porque el oído es mucho menos sensible a 100 Hz.

TABLA 19-2 Algunas intensidades y niveles de sonido

Sonido	*Intensidad* (W/m²)	*Nivel de* (dB)
Umbral de audición	1×10^{-12}	0
Bisbiseo de las hojas	1×10^{-11}	10
Susurro (a 1 m)	1×10^{-10}	20
Calle de ciudad, sin tráfico	1×10^{-9}	30
Oficina, salón de clases	1×10^{-7}	50
Conversación normal (a 1 m)	1×10^{-6}	60
Taladro (o martillo) neumático (a 1 m)	1×10^{-3}	90
Grupo de rock	1×10^{-1}	110
Umbral del dolor	1	120
Motor de avión a propulsión (a 50 m)	10	130
Motor de nave espacial (a 50 m)	1×10^{8}	200

La sensibilidad del oído humano varía con la frecuencia. El umbral de 10^{-12} W/m² se aplica sólo a frecuencias de intervalo medio de 1,000 Hz aproximadamente. En frecuencias mayores, digamos de 10,000 Hz, el umbral crece a unos 10 dB (10^{-11} W/m²), mientras que a una frecuencia menor de 100 Hz el umbral será de unos 30 dB (10^{-9} W/m²). Se requiere incrementar 1,000 veces la intensidad del sonido a 100 Hz para provocar la misma reacción fisiológica que una intensidad sonora de 1,000 Hz. La figura 19-5 contiene la variación con frecuencia de los umbrales de la audición y del dolor; en la tabla 19-2 se incluyen algunos niveles representativos del sonido con su intensidad correspondiente.

PROBLEMA RESUELTO 19-2. De una fuente puntual se emiten uniformemente ondas sonoras esféricas en todas direcciones y la potencia radiada P es 25 W. ¿Cuáles son la intensidad y el nivel del sonido de onda situada a una distancia $r = 2.5$ m de la fuente?

Solución La potencia radiada P debe pasar en su totalidad por una esfera de radio r centrada en la fuente. Por tanto,

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Vemos que la intensidad del sonido disminuye como el cuadrado inverso de la distancia de la fuente. En términos numéricos tenemos

$$I = \frac{25\ \text{W}}{(4\pi)(2.5\ \text{m})^2} = 0.32\ \text{W/m}^2$$

y

$$NS = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$= 10 \log \frac{0.32\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} = 115\ \text{dB}.$$

Al comparar el resultado anterior con la lista de la tabla 19-2 se advierte que este nivel de sonido es peligroso para el oído humano.

19-5 INTERFERENCIA DE LAS ONDAS SONORAS

En la sección 18-8 explicamos la interferencia que puede darse cuando hay dos ondas simultáneamente en el mismo punto del espacio. A las ondas sonoras también se aplica el principio de superposición del cual nos servimos para sumar ondas transversales en una cuerda.

En la figura 19-6 se muestran dos altavoces activados por una fuente común. En el punto P la variación de presión debida exclusivamente al altavoz S_1 es Δp_1, y la debida a S_2 sólo es Δp_2. (Nótese que se trata de dos ondas esféricas y que por lo mismo no se describen en la ecuación 19-2; en particular, la amplitud de presión no permanece constante conforme la onda esférica se propaga, sino que disminuye como $1/r$). La perturbación total de la presión en el punto P es $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$.

El tipo de interferencia que ocurre en P depende de la *diferencia de fase* $\Delta\phi$ entre las ondas. En contraste con la sección 18-8, donde la diferencia de fase entre las ondas provenía de varias constantes de fase, en este caso ocurre porque las ondas pueden recorrer diversas distancias desde los altavoces para llegar al punto P. La diferencia de fase $\Delta\phi$ entre las dos ondas que arriban a P depende de la diferencia de trayectoria $\Delta L = |r_1 - r_2|$ de los altavoces a ese punto. La diferencia de trayectoria y la de fase se relacionan por medio de

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}. \qquad (19\text{-}22)$$

Es decir, una diferencia de fase de π corresponde a una diferencia de trayectoria de $\lambda/2$, una de 2π corresponde a una diferencia de trayectoria de λ, y así sucesivamente.

En algunos lugares del punto P las variaciones de presión llegan en fase ($\Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$) e interfieren constructivamente. En otros arriban fuera de fase ($\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$) e interfieren destructivamente. Si utilizamos la condición de la interferencia constructiva, $\Delta\phi = m(2\pi)$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$, la ecuación 19-22 muestra que la diferencia de trayectoria correspondiente en la interferencia constructiva es

$$\Delta L = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (19\text{-}23)$$

Es decir, la intensidad alcanza su valor máximo en los lugares donde $|r_1 - r_2| = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$. Si los altavoces se

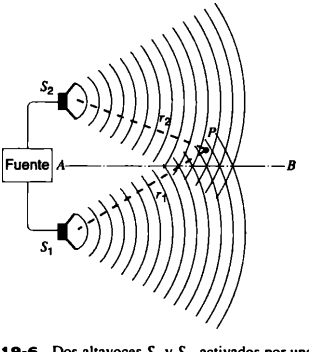


FIGURA 19-6. Dos altavoces S_1 y S_2, activados por una fuente común, emiten señales al punto P, donde las señales interfieren.

activan en fase, existe una interferencia destructiva en todos los puntos equidistantes (línea *AB*, que representa todo el plano medio).

En la interferencia destructiva la diferencia de fase es $\Delta\phi = (m + \frac{1}{2})2\pi$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$, y, por tanto, la diferencia de trayectoria será

$$\Delta L = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{19-24}$$

Es decir, en los lugares donde $|r_1 - r_2| = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots$, la intensidad presenta un valor mínimo (no necesariamente cero porque en general dos ondas arriban al punto *P* con amplitudes distintas). Los sitios de la interferencia destructiva corresponden a "puntos sordos" en el ambiente perceptivo de los altavoces.

Si los altavoces emiten una combinación de muchas longitudes de onda diferentes, algunos puntos *P* podrían mostrar interferencia destructiva en una longitud e interferencia constructiva en otra.

PROBLEMA RESUELTO 19-3. En la geometría de la figura 19-6, un oyente está sentado en un punto a una distancia de 1.2 m delante de un altavoz. Los dos altavoces, separados por una distancia *D* de 2.3 m, emiten tonos puros de longitud de onda λ. Las ondas están en fase cuando salen de los altavoces. ¿Con qué longitudes de onda escuchará un mínimo en la intensidad del sonido?

Solución Según los criterios de la ecuación 19-24, la intensidad mínima del sonido se presenta cuando las ondas de los dos altavoces interfieren de manera destructiva. Si el oyente está sentado frente al altavoz 2, $r_2 = 1.2$ m y r_1 puede obtenerse por medio de la fórmula pitagórica:

$$r_1 = \sqrt{r_2^2 + D^2} = \sqrt{(1.2\text{ m})^2 + (2.3\text{ m})^2} = 2.6\text{ m}.$$

Por tanto, $r_1 - r_2 = 2.6\text{ m} - 1.2\text{ m} = 1.4$ m y, conforme a la ecuación 19-24, tenemos

$$1.4\text{ m} = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots,$$

que corresponde a

$$\lambda = 2.8\text{ m}, 0.93\text{ m}, 0.56\text{ m}, \ldots.$$

En este lugar no se producirá una interferencia destructiva completa, pues las dos ondas que llegan al punto de observación tienen distinta amplitud si salen de los altavoces con la misma amplitud.

19-6 ONDAS ESTACIONARIAS LONGITUDINALES

A continuación vamos a ver lo que sucede cuando una onda sonora como la de la figura 19-1 alcanza el extremo del tubo. A semejanza de la onda transversal en una cuerda (Fig. 18-19), ocurre una reflexión y la onda reflejada vuelve al tubo en dirección contraria. Su comportamiento en el extremo reflejante depende de si el extremo del tubo está abierto o cerrado.

Supongamos primero que el tubo está cerrado por el extremo. Al desplazarse la onda por él y al llegar al extremo, puede comprimir las capas de aire contra la barrera fija en el extremo cerrado. Así pues, en ese extremo la presión puede variar con su amplitud máxima y *el extremo cerrado es un antinodo de ella*. Una onda de presión se refleja de un extremo cerrado también en forma similar a lo que sucede con una onda transversal de desplazamiento en el extremo libre de una cuerda (Fig. 18-19*b*). Por ejemplo, si una compresión incide en el extremo cerrado, se reflejará como tal hacia atrás por el tubo. A semejanza de lo que dijimos sobre las ondas transversales en cuerdas, señalamos que *una onda de presión longitudinal se refleja de un extremo cerrado sin cambio de fase.* El mismo efecto ocurre en el caso de una onda longitudinal que se propaga por un resorte, como un juguete Slinky, y que se refleja de un extremo *fijo:* una compresión se refleja como tal.

A continuación veamos lo que sucede si el extremo del tubo está abierto. La presión en él es igual a la presión ambiente p_0 del cuarto circundante. No es posible cambiarla en ese extremo salvo que modifiquemos la del cuarto entero, de ahí que la presión en el extremo abierto mantenga el valor p_0 y que *el extremo abierto sea un nodo de presión.* La comparación con la figura 18-19*a* revela que este caso se parece a la onda transversal de desplazamiento que se refleja del extremo fijo de una cuerda. El intento de la onda incidente en el extremo abierto por comprimir allí el aire causa rarefacción, la cual regresa por el tubo en dirección opuesta. Así, *una onda longitudinal de presión se refleja en un extremo abierto con un cambio de fase de 180°.* El mismo efecto se observa otra vez con un resorte de espiras: la compresión se refleja como rarefacción.

Ahora supongamos que un tren de ondas senoidales se desplazan a lo largo del tubo. Se reflejan en el extremo y éste se comporta como un nodo de presión (si el extremo está abierto) o como un antinodo de presión (si el extremo está cerrado). Suponemos que la fuente del tren de ondas es un altavoz colocado en el extremo opuesto. Su movimiento envía una onda compresional a lo largo del tubo y la superposición de las ondas originales y las reflejadas origina un patrón de ondas estacionarias, igual que en las ondas transversales de una cuerda. Dentro del tubo aparecerá un patrón de nodos y antinodos de presión (que no son puntos, como en el caso de las ondas transversales en una cuerda, sino planos).

Si se decide que la frecuencia (o longitud de onda) de la fuente sea un valor determinado que depende de la longitud del tubo, se establece un patrón de ondas estacionarias en toda su extensión, en forma similar a los patrones que aparecen en la figura 18-20. Si hay un nodo de presión en el extremo del altavoz, se le devuelve poca energía procedente del patrón de ondas estacionarias en el tubo y tendremos entonces una condición de resonancia. La frecuencia impulsora ha de ser igual a una de las frecuencias naturales del sistema que dependen de la longitud del tubo.

En la figura 19-7*a* se muestra un tubo que está excitado por un altavoz en un extremo y que está abierto en el otro. Según señalamos con anterioridad, el extremo del altavoz es un nodo de presión en resonancia y también lo es el extremo abierto. En la figura 19-7*a* se aprecian las variaciones resultantes

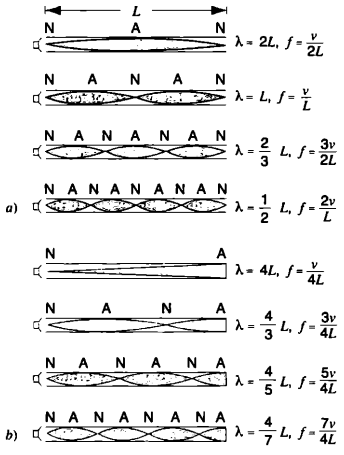


FIGURA 19-7. *a*) Ondas de presión de los cuatro primeros modos resonantes de un tubo activado por un altavoz y abierto en el otro extremo. Hay un nodo de presión N en cada extremo y los antinodos A están entre los nodos. Las curvas indican la variación senoidal de la presión dentro del tubo. *b*) Ondas de presión de los cuatro primeros modos resonantes de un tubo que está cerrado en un extremo. El extremo cerrado es un antinodo de presión. Nótese la diferencia de los patrones vibratorios y de las longitudes de onda entre los tubos abiertos y cerrados.

en la amplitud de presión de las ondas estacionarias.* Estos patrones se asemejan mucho a los de la figura 18-20. En el primer modo de oscilación, la longitud L del tubo es igual a $\lambda/2$, donde λ es la longitud de la onda producida por el altavoz en esa condición resonante. Así pues, la longitud de onda es $2L$ y la frecuencia correspondiente es $f = v/\lambda = v/2L$. Las otras resonancias de la figura 19-7*a* tienen longitudes de onda sucesivamente menores que en general pueden escribirse así

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (19\text{-}25)$$

Las frecuencias resonantes correspondientes, que se determinan mediante la expresión $f = v/\lambda$ con las longitudes de onda anteriores, son las siguientes:

$$f_n = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(tubo abierto).} \qquad (19\text{-}26)$$

Aquí v representa la velocidad de onda en el medio que llena al tubo, normalmente aire.

*Una demostración elegante de los sitios de los nodos de presión y de los antinodos puede obtenerse con un tubo flama de Rubens. Consúltese "Rubens Flame-tube Demonstration" de George W. Ficken y Francis C. Stephenson, *The Physics Teacher*, mayo de 1979, p. 306.

La figura 19-7*b* muestra el caso en que el tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro. Entonces el extremo cerrado ha de ser un antinodo de presión. La longitud L del tubo es $\frac{1}{4}\lambda$ en el primer modo resonante, de ahí que la fuente deba generar una onda con una longitud de onda de $4L$. En el siguiente modo la longitud de onda cambia, de manera que ahora L es $\frac{3}{4}\lambda$; por tanto, $\lambda = \frac{4}{3}L$. Continuando la serie vemos que en este caso la expresión general de la longitud de onda de los modos resonantes es

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad (19\text{-}27)$$

Nótese que sólo los valores impares del entero n aparecen en este caso. Las frecuencias resonantes correspondientes son

$$f_n = n\frac{v}{4L}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \text{(tubo cerrado).} \qquad (19\text{-}28)$$

Según veremos en la siguiente sección, las frecuencias resonantes dadas en las ecuaciones 19-26 o 19-28 determinan las notas musicales que producen los instrumentos de viento.

El nodo de presión en un extremo abierto no se encuentra *exactamente* al final del tubo. La onda se extiende un poco en el medio y rebasa el tubo, así que la longitud efectiva de éste es ligeramente mayor que la real y sus frecuencias resonantes son ligeramente menores. En los tubos estrechos de forma cilíndrica la corrección de la longitud es más o menos $0.6R$, donde R es su radio. En un tubo abierto por ambos extremos la corrección se efectúa en los dos. En un tubo de 0.6 m de longitud y de 1 cm de radio (valores normales de los instrumentos de viento más pequeños como el clarinete o la flauta), la frecuencia más baja sin corrección en el extremo será de 286 Hz si el tubo está abierto y de 143 Hz si está cerrado. Con la corrección en los extremos, los valores correspondientes serán 280 Hz y 142 Hz. Las correcciones son pequeñas pero muy importantes.

PROBLEMA RESUELTO 19-4. La figura 19-8 muestra un aparato que permite medir la velocidad del sonido en el aire usando la condición de resonancia. Un altavoz pequeño se sostiene arriba de un tubo cilíndrico parcialmente lleno de agua. Al ajustar el nivel de ella, la longitud del aire en la columna puede modificarse hasta que el tubo entre en resonancia; entonces se escucha un incremento en la intensidad del sonido. En un experimento, el altavoz se mantiene en una frecuencia fija de 1080 Hz y se observan tres resonancias cuando el nivel del agua está a una distancia de $x_1 = 6.5$ cm, $x_2 = 22.2$ cm y $x_3 = 37.7$ cm debajo de la parte superior del tubo. Con estos datos calcule el valor de la velocidad del sonido.

Solución La columna de aire funciona como un tubo de longitud variable y cerrado por un extremo. El patrón de ondas estacionarias muestra un nodo de presión cerca del altavoz y un antinodo de presión en la superficie del agua. Como no conocemos la corrección de los extremos, con la ecuación 19-28 no es posible utilizar directamente los datos para determinar la velocidad del sonido. No obstante, basándonos en las condiciones de resonancia de la figura 19-7*b* observamos que la distancia entre los nodos adyacentes de presión es $\frac{1}{2}\lambda$; lo mismo sucede con la distancia entre los antinodos. En

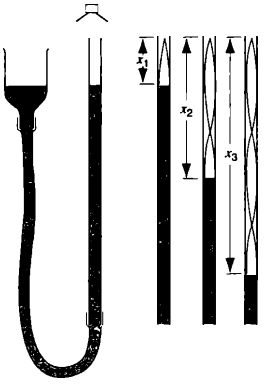


FIGURA 19-8. Problema resuelto 19-4. Aparato con que se mide la velocidad del sonido en el aire. El nivel del agua puede ajustarse elevando y descendiendo el depósito a la izquierda, el cual se conecta al tubo por medio de una manguera. A la derecha se aprecian las formas de onda de los tres primeros modos resonantes con una longitud fija.

conclusión, a partir de las dos primeras resonancias estos datos nos permiten concluir que

$$\tfrac{1}{2}\lambda = x_2 - x_1 = 22.2 \text{ cm} - 6.5 \text{ cm} = 15.7 \text{ cm}.$$

y, en forma similar, a partir de las resonancias segunda y tercera,

$$\tfrac{1}{2}\lambda = x_3 - x_2 = 37.7 \text{ cm} - 22.2 \text{ cm} = 15.5 \text{ cm}.$$

El promedio de los dos valores anteriores, que tomamos como el mejor valor en esta medición, es 15.6 cm correspondiente a una longitud de onda de 2(15.6 cm) = 31.2 cm = 0.312 m. Por tanto, deducimos que la velocidad del sonido es

$$v = \lambda f = (0.312 \text{ m})(1{,}080 \text{ Hz}) = 337 \text{ m/s}.$$

Aparte de la corrección en los extremos, ¿qué factores físicos en este experimento (entre ellos las propiedades del aire) podrían influir en el valor medido?

19-7 SISTEMAS VIBRATORIOS Y FUENTES DE SONIDO*

Un sistema vibratorio transmite una onda por el aire a los oídos del oyente. Éste es el principio básico de la producción de sonidos por la voz o los instrumentos musicales. Ya hemos estudiado la propagación de la onda sonora; ahora debemos estudiar el sistema vibratorio que la produce, si queremos entender la naturaleza del sonido.

*Una lista de referencias acerca de la física de los instrumentos musicales y temas afines se da en "Resource Letter MA-2: Musical Acoustics" de Thomas D. Rossing, *American Journal of Physics*, julio de 1987, p. 589.

Según señalamos en la sección 18-10 al hablar de la cuerda vibratoria y en la sección anterior al tratar de la columna de aire, un sistema distribuido tiene gran cantidad (quizá infinita) de frecuencias naturales de vibración. Son las frecuencias a las que *puede* vibrar. La que se obtendrá depende de cómo se haga que vibre.

Supóngase que el sistema puede vibrar en varias frecuencias $f_1, f_2, f_3, \ldots$. Las escribimos en orden ascendente de manera que $f_1 < f_2 < f_3 < \cdots$. A la más baja f_1, se le conoce como frecuencia *fundamental*, y modo fundamental al modo correspondiente de oscilación. Se da el nombre de *sobretonos* a las frecuencias más altas; f_2 es el primer sobretono, f_3 es el segundo, y así sucesivamente.

En algunos sistemas, todos los sobretonos son múltiplos enteros del fundamental:

$$f_n = nf_1, \tag{19-29}$$

donde n es un entero. En tal caso, los sobretonos reciben el nombre de *armónicos*. El primer miembro de una secuencia armónica es el fundamental, el segundo armónico es el primer sobretono, y así sucesivamente.

¿Por qué algunos sistemas vibratorios producen sonidos agradables y otros sonidos ásperos o discordantes? Cuando varias frecuencias se escuchan al mismo tiempo, se crea una sensación agradable si están en la razón de enteros pequeños como 3:2 o 5:4. Si un sonido produce sobretonos que son armónicos, sus vibraciones incluirán frecuencias con esas razones y darán un sonido agradable. En caso de no ser armónicos, probablemente el sonido será discordante. Al diseñar un instrumento musical se pone mucho esmero para producir secuencias de este tipo en los armónicos. Algunos instrumentos, entre ellos los que se basan en cuerdas vibratorias, da sobretonos que automáticamente son armónicos, cuando las vibraciones tienen una amplitud pequeña. En otros casos, la forma del instrumento ha de ser diseñada con mucho cuidado para hacerlo armónico; la campana es un ejemplo de ello. Los armónicos que crea el instrumento le dan riqueza y diversidad al tono y son indispensables para la belleza del sonido del instrumento. Si los instrumentos originaran sólo secuencias fundamentales, todos emitirían el mismo sonido.

Los instrumentos musicales se clasifican en tres categorías: los que se basan en cuerdas vibratorias, lo que se basan en columnas vibratorias de aire y los sistemas más complejos como platillos, varillas y membranas vibratorias.

Cuerdas que vibran

A esta categoría pertenecen los instrumentos con cuerdas friccionadas con un arco (los violines, por ejemplo), las cuerdas pulsadas (guitarra, clavicordio) y cuerdas de percusión (piano).

Si se fricciona, se pulsa o se percute una cuerda fija por ambos extremos, las vibraciones transversales se propagarán a través de la cuerda; estas perturbaciones se reflejan en los extremos fijos y se forma un patrón de ondas estacionarias. Se excitan los modos naturales de vibración de la cuerda y las

vibraciones dan origen a ondas longitudinales en el aire circundante, que las transmite al oído como sonido musical.

Hemos visto (Sec. 18-10) que una cuerda de longitud L, fija en ambos extremos, puede resonar a las frecuencias de la ecuación 18-46:

$$f_n = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (19\text{-}30)$$

Aquí v es la rapidez que tienen en la cuerda las ondas transversales viajeras, cuya superposición puede considerarse la causa de las vibraciones; la rapidez v ($= \sqrt{F/\mu}$) es la misma en todas las frecuencias. (Nótese que v *no* es la velocidad del sonido en el aire; a pesar de que la ecuación 19-30 parece idéntica a la 19-26, v representa diferentes cantidades en ambas.) En cualquiera de esas frecuencias la cuerda contiene un número entero n de ciclos entre sus extremos; tiene nodos en los extremos y $n - 1$ nodos adicionales igualmente espaciados en toda su extensión (Fig. 19-9).

Si al inicio la cuerda está torcida de modo que su forma es la misma en *cualquiera* de los armónicos posibles, vibrará únicamente a la frecuencia de él. Las condiciones iniciales suelen obtenerse percutiendo o friccionando la cuerda; en tales casos no sólo el fundamental sino muchos armónicos aparecen en la vibración resultante. Tenemos entonces una superposición de varios modos naturales de oscilación. El desplazamiento real es la suma de varios armónicos de diversa amplitud. Los impulsos emitidos a través del aire hacia el oído y el cerebro dan origen a un efecto neto que caracteriza al instrumento de cuerdas. La calidad del sonido de una nota con una frecuencia particular tocada por él depende del número de armónicos presentes y de su intensidad respectiva. En la figura 19-10 se muestran los espectros sonoros y las formas de onda correspondientes del piano y del violín.

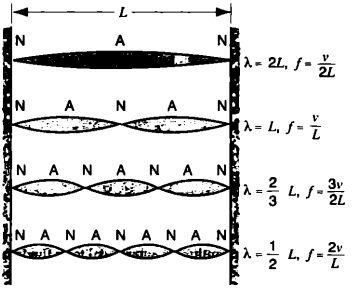


FIGURA 19-9. Los cuatro primeros modos resonantes de una cuerda vibratoria fija en ambos extremos. Los nodos y antinodos del desplazamiento se indican con N y A.

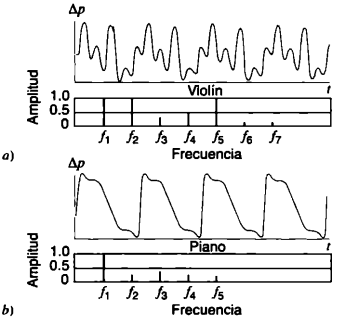


FIGURA 19-10. Formas de onda y espectros sonoros de dos instrumentos de cuerda, *a*) violín y *b*) piano, que tocan una nota de frecuencia fundamental (La de concierto). El espectro sonoro debajo de cada forma de onda muestra los armónicos presentes en el tono complejo junto con sus amplitudes relativas.

Columnas de aire vibratorias

El tubo de un órgano constituye un ejemplo simple de cómo un sonido se origina en una columna vibratoria de aire. Si ambos extremos están abiertos y si una corriente de aire se dirige contra un borde en uno de ellos, pueden crearse en el tubo ondas estacionarias longitudinales. La columna de aire resuena entonces con sus frecuencias naturales de vibración, dadas en la ecuación 19-26. Como en el caso de la cuerda friccionada, la frecuencia fundamental y los armónicos se producen al mismo tiempo. Si un extremo del tubo está cerrado, la primera se reduce a la mitad en relación con su valor en un tubo abierto de la misma longitud; sólo hay armónicos impares que modifican la calidad del sonido. En otras palabras, un tubo abierto produce el mismo tono fundamental que un tubo cerrado con la mitad de longitud, pero la calidad de los tonos difiere porque la mezcla de armónicos es diferente en los dos tubos.

Los instrumentos de lengüeta, como el clarinete, producen los tonos en otra forma. Se impulsa aire a través de una abertura estrecha, uno de cuyos lados está cubierto con una lengüeta que posee propiedades elásticas. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, el aire de alta velocidad que cruza la pequeña abertura crea una región local de baja presión dentro de la boquilla. La presión exterior es más fuerte que la del interior, lo cual impulsa la lengüeta hacia adentro para que cubra la abertura. En cuanto hace esto, se interrumpe el flujo de aire, se elimina la región dinámica de baja presión y la lengüeta se abre, permitiendo que el aire comience a fluir otra vez. Al repetirse la apertura y el cierre del paso del aire, aparecen variaciones máximas de presión en el extremo de la boquilla, que se comportan entonces como un antinodo de la presión. En un clarinete el otro extremo está abierto, por eso las resonancias del instrumento son las de la ecuación 19-28 para un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro. Algunos instrumentos de viento, como la flauta, utilizan un método similar al órgano

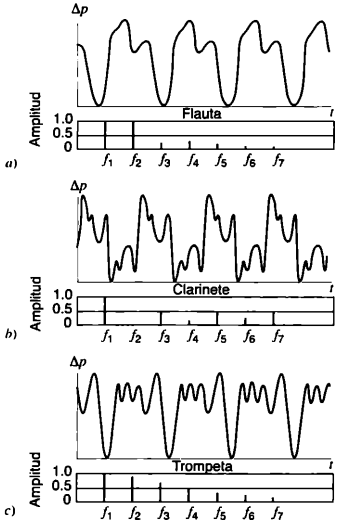


FIGURA 19-11. Formas de onda de algunos instrumentos de viento: *a*) flauta, *b*) clarinete y *c*) trompeta, con sus espectros sonoros, como en la figura 19-10. Adviértase que el espectro del clarinete muestra principalmente los armónicos impares cuando la flauta y la trompeta tienen este tipo de armónicos y también armónicos pares.

para producir el tono, de modo que la boquilla se comporta como un extremo abierto; sus frecuencias resonantes están dadas por la ecuación 19-26. Otros instrumentos (oboe, saxofón) que utilizan una lengüeta para crear su tono tienen una perforación cónica (es decir, ahusada) en vez de cilíndrica, lo cual les permite emitir sonidos que son aproximadamente armónicos, impares y pares. Los instrumentos de bronce (trompeta y trombón, por ejemplo) se llaman también *de lengüeta de labios*, porque los labios del ejecutante funcionan como una lengüeta, pero una vez más su perforación es ligeramente ahusada y por ello los sonidos contienen todos los armónicos. En la figura 19-11 se muestran las formas de onda de algunos instrumentos de viento.

Otros sistemas vibratorios

Las varillas, los platillos y las membranas estiradas que vibran también dan origen a ondas sonoras. Pongamos el caso de una membrana flexible extendida, como una piel de tambor. Si se percute con un golpe, un pulso bidimensional se propaga hacia afuera del punto de percusión y se refleja una y otra vez en la frontera. Se hace vibrar periódicamente un punto de la membrana, y trenes continuos de ondas se desplazan a lo largo de ella. Igual que en el caso unidimensional de la cuerda, también aquí pueden crearse ondas estacionarias en la membrana bidimensional. Todas tienen cierta frecuencia natural (o típica) de la membrana. Una vez más, a la frecuencia más baja se le conoce como fundamental y a las otras como armónicos. En general, hay muchos armónicos junto con la fundamental cuando vibra la membrana. Estas vibraciones pueden provocar ondas sonoras de la misma frecuencia.

Los nodos de una membrana vibratoria no son puntos (como en una cuerda vibratoria) ni planos (como en un tubo) sino líneas. La frontera de la membrana debe ser una línea nodal pues no está fija. Los modos posibles de vibración junto

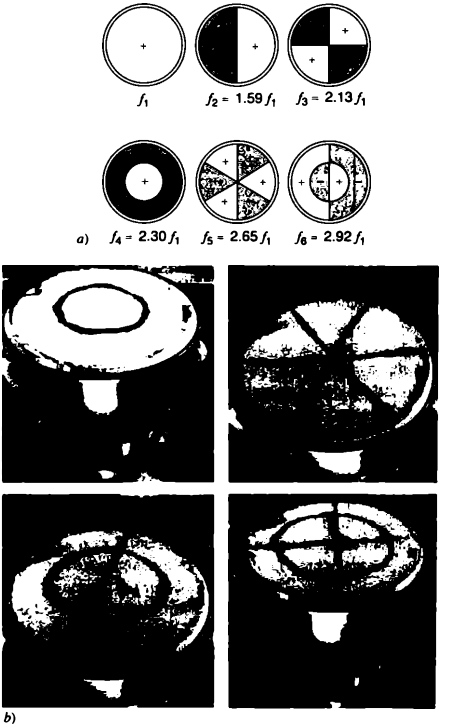


FIGURA 19-12. *a*) Los seis modos resonantes más bajos de un parche de tambor sujeto con prensas en su borde. Las líneas representan los nodos; el borde también es una línea nodal. Los signos + o − indican que, en cierto momento, una región se mueve hacia arriba y sale de la página o hacia abajo y entre ella. En este caso los sobretonos no son múltiplos enteros del tono fundamental y por lo mismo no son armónicos. *b*) Los patrones vibratorios de un timbal en los modos 4, 5, 6 y un modo adicional no se muestran en *a*). Se vuelven visibles rociando polvo negro en el parche del tambor y se hacen vibrar a la frecuencia apropiada usando un vibrador mecánico. Al vibrar el parche, el polvo se agita y termina acumulándose en las líneas nodales donde no hay movimiento.

con sus líneas nodales se muestran en la figura 19-12, para una membrana circular fija en su borde. La frecuencia natural de cada nodo está dada en función de la frecuencia fundamental f_1. Las frecuencias de los sobretonos no son armónicos, es decir, no son múltiplos enteros de f_1. Ésta es la razón de que las varillas y platillos se usen poco como instrumentos musicales. En instrumentos como el xilófono y la marimba, se percuten pequeñas barras de madera o de metal, y así se las hace vibrar. La forma de las barras se modifica cuidadosamente, haciéndolas más delgadas en el centro, de modo que los sobretonos se conviertan aproximadamente armónicos.

19-8 PULSOS

Examinamos antes el efecto de las ondas que se sobreponen para crear regiones de máxima y mínima (cero) intensidad, como en el caso de una onda estacionaria dentro de un tubo. Esto explica un tipo de interferencia que llamamos *interferencia en el espacio.*

El mismo principio de superposición nos conduce a otro tipo de interferencia, el de *interferencia en el tiempo.* En este caso analizamos la superposición de dos ondas en un punto como función del tiempo. Esta superposición, que generalmente origina formas de onda muy complejas, adopta una forma extremadamente simple cuando las dos ondas tienen casi la misma frecuencia. En el sonido se presenta esta situación cuando, por ejemplo, dos instrumentos o dos cuerdas de guitarra son afinadas una en relación con otra.

Consideremos un punto en el espacio por donde pasan las ondas. La figura 19-13*a* muestra la presión que en ese punto producen por separado dos ondas en función del tiempo. Para simplificar la exposición hemos supuesto que las dos ondas tienen igual amplitud, aunque esto no es necesario. La presión resultante en ese punto en función del tiempo es la suma de las presiones individuales y se grafica en la figura 19-13*b*. Vemos

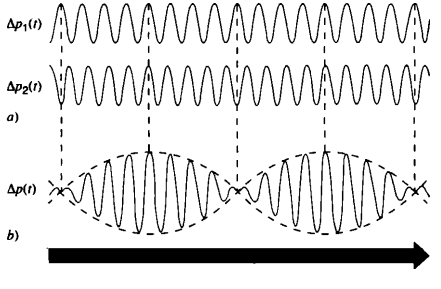


FIGURA 19-13. *a*) Dos formas de ondas senoidales de frecuencia casi igual. *b*) Superposición de las dos formas de onda. Nótese que las dos ondas en la parte *a*) pasan de estar en fase, dando una resultante de gran amplitud, a estar fuera de fase, dando una resultante de amplitud cero. Las curvas punteadas muestran la variación senoidal del envolvente modulador con la frecuencia angular ω_{amp}.

que la amplitud de la onda resultante no es constante, sino que varía con el tiempo. Tratándose de un sonido, la amplitud variable causa variaciones de sonoridad, denominadas *pulsos.*

Representemos con la siguiente expresión la variación de la presión en el tiempo (para x constante) producida por una onda

$$\Delta p_1(t) = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega_1 t,$$

donde hemos escogido la constante de fase que nos permita escribir la onda en esta forma simple. La variación de presión en el mismo punto producida por la otra onda de igual amplitud se representa así

$$\Delta p_2(t) = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega_2 t,$$

Conforme al principio de superposición, la presión resultante será

$$\begin{aligned}\Delta p(t) &= \Delta p_1(t) + \Delta p_2(t)\\ &= \Delta p_m(\operatorname{sen} \omega_1 t + \operatorname{sen} \omega_2 t).\end{aligned} \tag{19-31}$$

Y por medio de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A - B}{2} \operatorname{sen} \frac{A + B}{2},$$

la ecuación 19-31 puede escribirse

$$\Delta p(t) = \left[2\Delta p_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) t. \tag{19-32}$$

Hasta ahora todo lo que hemos hecho se aplica a dos ondas cualesquiera, sin que importe su frecuencia. Cuando ésta es casi igual, la ecuación 19-32 puede simplificarse escribiendo el segundo factor en función de la frecuencia angular promedio ω_{pro} de las dos ondas,

$$\omega_{pro} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{19-33}$$

El primer factor, encerrado en los corchetes de la ecuación 19-32, produce una amplitud variable en el tiempo a la variación senoidal del segundo factor. Este factor de amplitud cambia con la frecuencia angular

$$\omega_{amp} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}. \tag{19-34}$$

En función de ω_{pro} y ω_{amp}, podemos escribir la ecuación 19-32 como

$$\Delta p(t) = [2\Delta p_m \cos \omega_{amp} t] \operatorname{sen} \omega_{pro} t. \tag{19-35}$$

Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, la frecuencia de amplitud ω_{amp} es pequeña y la amplitud fluctúa con lentitud. La figura 19-13 contiene la superposición de las dos ondas de acuerdo con la ecuación 19-32. Nótese que, en el caso de frecuencias casi iguales, la variación rápida de la onda resultante ocurre casi con la misma frecuencia de una de las dos ondas sumadas. Su amplitud total varía lentamente con la frecuencia de amplitud ω_{amp}, que se define como el "envolvente" dentro del cual se realiza la variación más rápida. Este fenómeno es una forma de *modulación de amplitud,* que tiene un equivalente (bandas laterales) en los receptores radiofónicos de amplitud modulada.

En el caso de la figura 19-13*b*, el oído percibirá un tono a una frecuencia f_{pro} ($= \omega_{pro}/2\pi$), que es aproximadamente la misma que las frecuencias f_1 ($= \omega_1/2\pi$) o f_2 ($= \omega_2/2\pi$) de las dos ondas componentes. El tono aumenta alternativamente fuerte o débil, a medida que la amplitud cambia con el tiempo, mostrando los niveles máximos y mínimos de la figura 19-13*b*.

Un pulso –es decir, un máximo de intensidad– se produce siempre que cos $\omega_{amp}t$ es igual a + 1 o a − 1, ya que la intensidad depende del *cuadrado* de la amplitud. Cada uno de los valores anteriores ocurre una vez en cada ciclo del envolvente (Fig. 19-13), de modo que el número de pulsos por segundo es el doble del número de ciclos por segundo del envolvente. Entonces la frecuencia angular del pulso ω_{pulso} será

$$\omega_{pulso} = 2\omega_{amp} = |\omega_1 - \omega_2|. \qquad (19\text{-}36)$$

Usando $\omega = 2\pi f$ podemos reescribir la expresión anterior así:

$$f_{pulso} = |f_1 - f_2|. \qquad (19\text{-}37)$$

Así pues, *el número de pulsos por segundo es igual a la diferencia entre las frecuencias de las ondas componentes.* El oído puede detectar los pulsos entre dos tonos hasta una frecuencia de 15 Hz, aproximadamente. A frecuencias más elevadas no es posible distinguir los pulsos individuales en los sonidos producidos. Los músicos acostumbran escuchar con mucha atención para detectar los pulsos cuando afinan ciertos instrumentos. Modifican el tono hasta que la frecuencia de los pulsos disminuye y éstos desaparecen.

PROBLEMA RESUELTO 19-5. Una cuerda de violín que debería afinarse para concierto en La (440 Hz) está un poco desafinada. Se oyen tres pulsos por segundo cuando se toca en su modo fundamental junto con un diapasón de concierto en La. *a*) ¿Cuáles son los valores posibles de la frecuencia fundamental de la cuerda? *b*) Suponga que la cuerda se toca en su primer armónico junto con un diapasón una octava más arriba de concierto en La (880 Hz). ¿Cuántos pulsos por segundo se escucharían? *c*) Cuando se aumenta un poco la tensión de la cuerda, crece el número de pulsos por segundo en el modo fundamental. ¿Cuál fue la frecuencia original de este último?

Solución *a*) Gracias a la ecuación 19-37 sabemos que por la frecuencia de pulsos (3 Hz) la frecuencia f_1 de la cuerda no es igual a la frecuencia f_2 del diapasón (440 Hz), pero con el solo número de pulsos por segundo no es posible determinar si la cuerda tiene una frecuencia más alta o más baja. Por tanto, las frecuencias posibles son

$$f_1 = 440 \text{ Hz} \pm 3 \text{ Hz} = 443 \text{ Hz} \quad \text{o} \quad 437 \text{ Hz}.$$

b) En el primer sobretono la frecuencia de la cuerda es el doble de su frecuencia fundamental y, por tanto, 886 u 874 Hz. Cuando se toca contra un diapasón de 880 Hz, la diferencia de frecuencia es 6 Hz en ambos casos, de modo que se escucharán seis pulsos por segundo. *c*) Al aumentar la tensión de la cuerda crece la rapidez de las ondas transversales y, en consecuencia, también la frecuencia fundamental (Ec. 19-30). Como sabemos que esto incrementa la frecuencia de pulsos, concluimos que la frecuencia del modo fundamental fue antes mayor que 440 Hz, puesto que el aumento de la frecuencia hizo aún mayor la diferencia debida a 440 Hz. Por tanto, la cuerda estaba afinada originalmente a 443 Hz, y hay que reducir la tensión si queremos afinarla bien.

19-9 EL EFECTO DOPPLER

Cuando un oyente se dirige hacia una fuente estacionaria de sonido, el tono (frecuencia) se oye más alto de lo que lo percibiría un oyente en reposo. Escuchará un tono más bajo si se aleja de la fuente. El tono de un silbato de locomotora o de una sirena de un carro de bomberos es más alto cuando la fuente se acerca al oyente que cuando ha pasado y se aleja.

En un trabajo escrito en 1842, el austriaco Christian Johann Doppler (1803-1853) puso de manifiesto el hecho de que el color de un cuerpo luminoso cambiará con su movimiento relativo y con el del observador. El *efecto Doppler*, nombre con que se le conoce, se aplica a las ondas en general. El propio Doppler menciona la aplicación de su principio a las ondas sonoras. En 1845, Buys Ballot efectuó una prueba experimental en Holanda "usando un dibujo locomotriz de un vagón abierto con varios trompeteros".

El observador en movimiento, la fuente en reposo

A continuación estudiaremos el efecto Doppler en las ondas sonoras, considerando sólo el caso especial en que la fuente y el observador se mueven en la línea que los une. Adoptemos un marco de referencia en reposo en el medio por donde se propaga el sonido. La figura 19-14 muestra una fuente sonora S en reposo y un observador O que se dirige a la fuente con una rapidez v_o. Los círculos representan frentes de onda, con una longitud de onda de espaciamiento. Un observador en reposo en el medio recibirá vt/λ ondas en el tiempo t, donde v es la velocidad del sonido en el medio y λ es la longitud de onda. A causa del movimiento hacia la fuente, el observador recibe $v_o t/\lambda$ más ondas en este mismo tiempo t. La frecuencia f' que

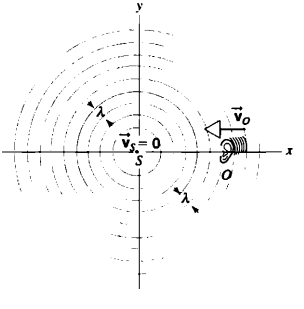


FIGURA 19-14. Una fuente de sonido estacionaria S emite frentes de onda esféricos, que aparecen separados por una longitud de onda. Un observador O, representado por el oído, se mueve con rapidez v_o hacia ella. El observador encuentra más ondas por segundo que otro que está en reposo; por tanto, mide una frecuencia más elevada. El observador debería medir una frecuencia *menor* del movimiento alejándose de la fuente.

escucha es el número de ondas recibidas por unidad de tiempo, esto es,

$$f' = \frac{vt/\lambda + v_O t/\lambda}{t} = \frac{v + v_O}{\lambda} = \frac{v + v_O}{v/f}.$$

Es decir,

$$f' = f\frac{v + v_O}{v} = f\left(1 + \frac{v_O}{v}\right). \qquad (19\text{-}38)$$

La frecuencia f' escuchada por el observador es la frecuencia f que se oye en reposo más el incremento $f(v_o/v)$ proveniente del movimiento del observador. Cuando éste se *aleja* de la fuente estacionaria, *disminuye* la frecuencia $f(v_o/v)$ correspondiente a las ondas que no llegan a él en cada unidad de tiempo debido al movimiento de alejamiento. Entonces

$$f' = f\frac{v - v_O}{v} = f\left(1 - \frac{v_O}{v}\right). \qquad (19\text{-}39)$$

Por tanto, la relación general que se da cuando *la fuente se halla en reposo* respecto al medio, pero *cuando el observador se mueve* será

$$f' = f\frac{v \pm v_O}{v}, \qquad (19\text{-}40)$$

donde el signo + se aplica al acercamiento a la fuente y el signo − al de alejamiento de ella. Nótese que el cambio de frecuencia se debe a que el observador intercepta un número mayor o menor de ondas por segundo a consecuencia del movimiento a través del medio.

La fuente en movimiento, el observador en reposo

Cuando la fuente se dirige *hacia* un observador estacionario, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda (Fig. 19-15), porque la fuente se mueve detrás de las ondas que se acercan; por tanto, las crestas se compactan más. Si la frecuencia de la fuente es f y si su rapidez es v_s, durante cada vibración recorre una distancia v_s/f y la longitud de onda se acorta en esa cantidad. Así pues, la longitud de onda del sonido que llega al observador no es $\lambda = v/f$ pero $\lambda' = v/f - v_s/f$. La frecuencia que escucha el observador aumenta y está dada por

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_S)/f} = f\frac{v}{v - v_S}. \qquad (19\text{-}41)$$

Si la fuente *se aleja* de él, la longitud de onda emitida es v_s/f mayor que λ, de manera que el observador oye una frecuencia menor, a saber:

$$f' = \frac{v}{(v + v_S)/f} = f\frac{v}{v + v_s}. \qquad (19\text{-}42)$$

Así, la relación general que se da cuando el *observador está en reposo* respecto al medio y la *fuente se mueve a través de él* será

$$f' = f\frac{v}{v \pm v_S}, \qquad (19\text{-}43)$$

donde el signo − se aplica al acercamiento al observador y el signo + a su alejamiento. Nótese que aquí el cambio es el acortamiento o la reducción de la longitud de onda transmitida a través del medio, debido al movimiento de la fuente a través del medio.

Si *ambos la fuente y el observador se mueven* por el medio transmisor, el lector deberá ser capaz de demostrar que éste escucha una frecuencia

$$f' = f\frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}, \qquad (19\text{-}44)$$

donde los signos superiores (+ numerador, − denominador) corresponden a la fuente y al observador que se desplaza por la línea que los une en la dirección que acerca uno al otro, y los signos de inferiores en la dirección que los aleja uno del otro. La ecuación 19-44 incorpora cuatro posibilidades, como se advierte en el problema resuelto 19-6. Nótese que esa ecuación se reduce a la ecuación 19-40 cuando $v_s = 0$ y a la ecuación 19-43 cuando $v_o = 0$, como debe ser.

Si una fuente de sonido se aleja de un observador y se dirige a una pared, él escuchará dos notas de distinta frecuencia. El movimiento atenúa el tono de la nota escuchada directamente de la fuente que se aleja. La otra se debe a las ondas reflejadas de la pared y tiene un tono más alto (porque la fuente se dirige *a* la pared y ésta "oye" la frecuencia mayor). La superposición de los trenes de estas dos ondas produce pulsos. Un efecto parecido se da cuando una onda proveniente de una fuente estacionaria se refleja en un objeto en movimiento. La frecuencia de pulsos sirve para deducir la velocidad del objeto. Éste es el principio básico de los monitores de velocidad de radar, y también se usa para seguir los satélites.

La explicación de esta sección se aplica al cambio Doppler en las ondas sonoras y en otras ondas mecánicas similares. También las ondas luminosas muestran el éfecto Doppler, pero

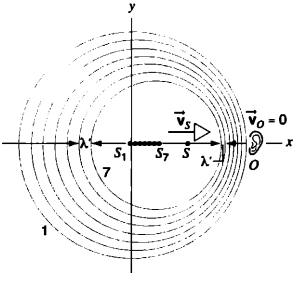


FIGURA 19-15. Aquí el observador O se halla en reposo, y la fuente se mueve hacia él con una rapidez v_s. El frente de onda 1 se emitió cuando la fuente estaba en S_1, el frente de onda 7 cuando la fuente estaba en S_7, y así sucesivamente. La fuente se halla en S en el momento de realizar este dibujo. El observador mide una longitud de onda menor por el "amontonamiento" de los frentes de onda a lo largo del movimiento. Un observador situado en el eje negativo x, desde el cual se alejaría la fuente, mediría una longitud de onda más larga.

como no hay un medio de propagación de la luz, no se aplican las fórmulas expuestas en esta sección. En el Capítulo 39 se trata del efecto Doppler en las ondas luminosas.

PROBLEMA RESUELTO 19-6. La sirena de una patrulla emite un tono puro a una frecuencia de 1,125 Hz. Calcule la frecuencia que percibirá usted en su automóvil en las siguientes circunstancias: *a*) su automóvil se halla en reposo y la patrulla se dirige hacia usted a 29 m/s (65 mi/h); *b*) la patrulla está en reposo y su automóvil se dirige a ella a 29 m/s; *c*) usted y la patrulla se dirigen uno a otro a 14.5 m/s; *d*) usted se desplaza a 9 m/s y la patrulla lo persigue a 38 m/s.

Solución Las cuatro partes del problema pueden resolverse por medio de la ecuación 19-44. *a*) Aquí $v_o = 0$ (su automóvil se halla en reposo) y $v_s = 29$ m/s. Escogemos el signo (−) de la parte superior del denominador de la ecuación, porque la patrulla se dirige hacia usted. Así, usando $v = 343$ m/s con la velocidad del sonido en aire quieto, obtendremos

$$f' = f\frac{v}{v - v_S} = (1{,}125\ \text{Hz})\frac{343\ \text{m/s}}{343\ \text{m/s} - 29\ \text{m/s}} = 1{,}229\ \text{Hz}.$$

b) En este caso $v_s = 0$ (la patrulla se encuentra en reposo) y $v_o = 29$ m/s. Escogemos el signo (+) de la parte superior del numerador de la ecuación 19-44, porque usted se dirige hacia la patrulla, y obtenemos

$$f' = f\frac{v + v_O}{v} = (1{,}125\ \text{Hz})\frac{343\ \text{m/s} + 29\ \text{m/s}}{343\ \text{m/s}} = 1{,}220\ \text{Hz}.$$

c) En este caso $v_s = 14.5$ m/s y $v_o = 14.5$ m/s. Escogemos el signo superior en el numerador y en el denominador de la ecuación 19-44, porque usted y la patrulla se dirigen uno a otro. Así, obtenemos

$$f' = f\frac{v + v_O}{v - v_S} = (1{,}125\ \text{Hz})\frac{343\ \text{m/s} + 14.5\ \text{m/s}}{343\ \text{m/s} - 14.5\ \text{m/s}} = 1{,}224\ \text{Hz}.$$

d) Aquí $v_o = 9$ m/s y $v_s = 38$ m/s. Usted se aleja de la patrulla, de modo que escogemos el signo (−) de la parte inferior en el numerador, pero la patrulla se dirige *hacia* usted y por eso seleccionamos el signo de la parte superior (−) en el denominador. El resultado es

$$f' = f\frac{v - v_O}{v - v_S} = (1{,}125\ \text{Hz})\frac{343\ \text{m/s} - 9\ \text{m/s}}{343\ \text{m/s} - 38\ \text{m/s}} = 1{,}232\ \text{Hz}.$$

Nótese que en los cuatro casos de este problema, la velocidad relativa entre usted y la patrulla es igual —29 m/s—, sólo que las frecuencias percibidas son distintas en ellos. El cambio Doppler en el sonido no depende exclusivamente de la velocidad relativa entre la fuente y el observador, sino también de su velocidad respecto al medio que lo transporte.

Efectos a gran velocidad (Opcional)

Cuando v_o y v_s presentan una magnitud parecida a v, casi siempre hay que modificar las fórmulas que acabamos de dar para el efecto Doppler. Es preciso porque la relación lineal entre la fuerza restauradora y el desplazamiento supuestos hasta ahora quizá ya no se dé en el medio. Así pues, la rapidez con que se propagan las ondas deja de ser la velocidad de fase normal y su forma cambia con el tiempo. Los componentes del movimiento en ángulo recto con la línea que une fuente y observador también contribuyen al efecto Doppler con estas velocidades altas. No se aplica la fórmula de Doppler cuando v_o o v_s superan a v; por ejemplo, si $v_s > v$, la fuente aventaja la onda en una dirección; si $v_o > v$ y si el observador se aleja de la fuente, la onda nunca alcanza al observador.

Hay muchos casos en que la fuente se desplaza por un medio con una velocidad mayor que la de fase de la onda en él. Entonces el frente de onda adopta la forma de un cono con el cuerpo en movimiento en su ápice. Algunos ejemplos son la onda de la proa que una lancha de carreras produce en el agua y la "onda de choque" proveniente de un avión o de un proyectil que se desplaza por el aire con una velocidad mayor a la del sonido (velocidades supersónicas). Otro ejemplo es la radiación Cerenkov, la cual consiste en las ondas luminosas emitidas por partículas cargadas que se desplazan a través de un medio con una velocidad mayor que la de fase de la luz en ese medio. Un tipo de esta radiación es el resplandor azul del agua que a menudo rodea el núcleo de un reactor nuclear.

En la figura 19-16*a* se muestran las posiciones actuales de las ondas esféricas que generó en varias posiciones una fuente durante su movimiento. El radio de cada esfera en este

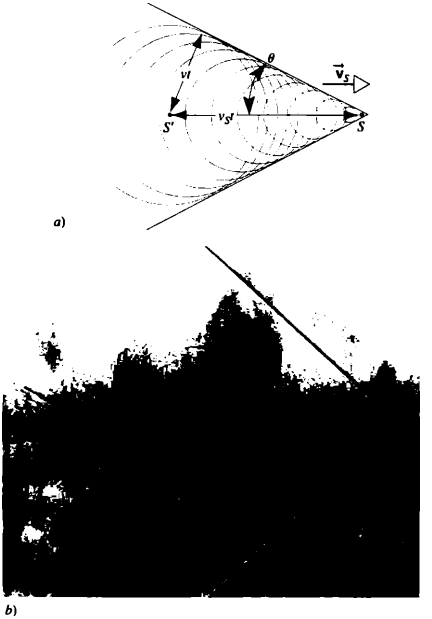


FIGURA 19-16. *a*) Frentes de onda de una onda que se desplaza a velocidad supersónica. Los frentes de onda son esféricos y su envolvente es un cono. Compare esta figura con la figura 19-15. *b*) Fotografía de un proyectil disparado con una arma en Mach 2. Nótese el cono de Mach.

momento es el producto de la velocidad de onda v y del tiempo t transcurrido desde que la fuente estuvo en su centro. El envolvente de las ondas es un cono cuya superficie forma un ángulo θ con la dirección en que se desplaza la fuente. De la figura obtenemos el resultado

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v}{v_S}. \tag{19-45}$$

En las ondas superficiales del agua el cono se reduce a un par de líneas que se intersectan. En aerodinámica a la razón v_s/v se le conoce como *número de Mach*. Un avión que vuele a una velocidad supersónica genera un *cono de Mach* semejante al de la figura 19-16. Cuando su borde intercepta el suelo debajo, escuchamos un "estallido sónico", el cual (en contra de la opinión popular) *no* se asocia a un avión que "rompe la barrera del sonido". No es más que el efecto total de la concentración de energía sonora radiada del avión en la superficie, que en condiciones normales irradia en todas direcciones a velocidades subsónicas. Como se aprecia en la fotografía de la figura 19-16*b*, cabe la posibilidad de escuchar dos estallidos sónicos provenientes del mismo avión, uno del borde frontal y otro del borde trasero. (Asimismo, nótese que el cono de Mach nunca intercepta al proyectil; por tanto, los pasajeros del avión no escuchan el estallido sónico.) ■

OPCIÓN MÚLTIPLE

19-1 Propiedades de las ondas sonoras

19-2 Ondas sonoras viajeras

1. ¿Qué es más grande en una onda sonora dentro de un fluido, las variaciones de densidad relativa, $\Delta\rho_m/\rho_0$, o las variaciones de la presión relativa, $\Delta p_m/p_0$?
   A) $\Delta p_m/p_0 > \Delta\rho_m/\rho_0$, siempre.
   B) $\Delta p_m/p_0 = \Delta\rho_m/\rho_0$, siempre.
   C) $\Delta p_m/p_0 < \Delta\rho_m/\rho_0$, siempre.
   D) La que es más grande varía, dependiendo de la presión y del módulo volumétrico.

19-3 La velocidad del sonido

2. Una varilla delgada de acero de 12 km de longitud se cuelga de un tubo sin fricción. Con un martillo un investigador la golpea suavemente en un extremo. El investigador situado en el otro extremo escucha el golpe.
   A) en el mismo instante.
   B) casi en forma instantánea.
   C) aproximadamente 2 segundos más tarde.
   D) aproximadamente 30 segundos más tarde.
   E) aproximadamente 1/2 minuto después.
3. ¿Qué es más grande, la velocidad de una onda sonora v o la amplitud de las variaciones de velocidad u_m de las partículas oscilatorias del sonido?
   A) v siempre es mayor que u_m.
   B) v y u_m son iguales
   C) v debe ser menor que u_m.
   D) Las dos velocidades no están relacionadas entre sí.

19-4 Potencia e intensidad de las ondas sonoras

4. Una fuente puntual emite uniformemente ondas esféricas sonoras en todas direcciones. La variación del nivel del sonido (NS) en función de la distancia r respecto a la fuente puede escribirse así
   A) $NS = -b \log r^a$
   B) $NS = a - b(\log r)^2$
   C) $NS = a - b \log r$
   D) $NS = a - b/r^2$

   donde a y b son constantes *positivas*.
5. Si la potencia promedio de una onda sonora se expresa a partir de las amplitudes de desplazamiento s_m y de las frecuencias f,
   A) $P_{pro} \propto f^2 s_m^2$. B) $P_{pro} \propto f s_m^2$.
   C) $P_{pro} \propto f^{-1} s_m^2$. D) $P_{pro} \propto f^{-2} s_m^2$.

19-5 Interferencia de las ondas sonoras

6. Una forma de mejorar el desempeño de los altavoces graves en un sistema sonoro consiste en conectar un tubo curvo a la parte posterior del altavoz que pasa cerca del frente, de manera que las ondas sonoras proveniente de él puedan interferir constructivamente con las ondas procedentes de la parte frontal (Fig. 19-17). Si la longitud de onda promedio proveniente del altavoz es λ, la longitud de tubo que produce interferencias constructivas deberá ser
   A) $\lambda/4$. B) $\lambda/2$. C) $3\lambda/4$. D) λ.

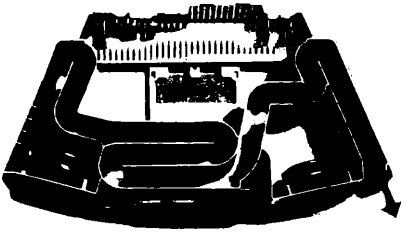


FIGURA 19-17. Pregunta de opción múltiple 6.

19-6 Ondas longitudinales estacionarias

7. ¿Qué patrón presentan las frecuencias resonantes de un tubo cerrado por ambos extremos?
   A) El mismo que un tubo abierto por ambos extremos $f_n = nv/2L$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
   B) El mismo que un tubo cerrado por un extremo $f_n = nv/4L$, $n = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
   C) $f_n = nv/8L$, $n = 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
   D) Un tubo cerrado por ambos extremos no tiene frecuencias resonantes.

19-7 Sistemas vibratorios y fuentes de sonido

8. La octava tecla del pulgar de un clarinete hace que el modo de resonancia pase del tono fundamental al primer sobretono. Al

oprimir la tecla se produce una pequeña abertura en la parte posterior del clarinete. ¿Dónde debe estar este hoyo?

A) Cerca de un nodo de presión para un tono fundamental.
B) Cerca de un antinodo de presión en un tono fundamental típico.
C) Cerca de un nodo de presión en un primer sobretono típico.
D) Cerca de un antinodo de presión en un primer sobretono típico.

9. Se (toca) fricciona una cuerda de violín de longitud L de modo que su sonido sea una mezcla del tono fundamental con los tres primeros sobretonos. ¿A qué distancia del extremo de la cuerda debe ubicarse un pequeño micrófono receptor para que transmita todos estos tonos?

A) $L/2$ B) $L/3$ C) $L/4$ D) $L/8$

19-8 Pulsos

10. Le dan tres diapasones un poco diferentes. Cuando golpea A y B, se escucha la frecuencia de pulso f_{AB}. Cuando golpea A y C se escucha la frecuencia de pulso f_{AC}. Se observó que $f_{AB} < f_{AC}$.

a) ¿Cuál diapasón tiene la frecuencia más alta?

A) A B) B C) C
D) No puede darse la respuesta con la información disponible.

b) ¿Cuál diapasón tiene la frecuencia intermedia?

A) A B) B C) C
D) No puede darse la respuesta con la información disponible.

c) B y C se golpean al mismo tiempo. ¿Cuál será la frecuencia observada?

A) $|f_{AB} + f_{BC}|$ B) $|f_{AB} - f_{BC}|$
C) Tanto $|f_{AB} + f_{BC}|$ o $|f_{AB} + f_{BC}|$ se escucharán.
D) Como $|f_{AB} + f_{BC}|$ y $|f_{BC} - f_{BC}|$ se escucharán simultáneamente.

19-9 El efecto Doppler

11. Una fuente sonora se dirige hacia un observador. La fuente pasa una fuente idéntica que se encuentra en reposo. El observador puede escuchar el sonido producido por ambas fuentes.

a) Antes que la fuente móvil pase a la fuente estacionaria, el observador oye

A) un tono más alto procedente de la fuente en movimiento.
B) un tono más alto procedente de la fuente estacionaria.
C) el mismo tono procedente de ambas fuentes.

b) En el instante en que la fuente móvil pasa a la fuente estacionaria, el observador escucha

A) un tono más alto proveniente de la fuente en movimiento.
B) un tono más alto proveniente de la fuente estacionaria.
C) el mismo tono proveniente de las dos fuentes.

c) Después que la fuente móvil pasa a la fuente estacionaria, el observador oye

A) un tono más alto proveniente de la fuente móvil.
B) un tono más alto proveniente de la fuente estacionaria.
C) el mismo tono proveniente de las dos fuentes.

12. Tres músicos experimentan con el efecto Doppler. El músico A viaja en un automóvil con una velocidad u alejándose del músico B, quien permanece inmóvil. El músico C viaja en un automóvil y se dirige a B desplazándose a la misma velocidad que A (Fig. 19-18). El músico A toca una nota a una frecuencia f_A en su trompeta. B escucha la nota, ajusta su trompeta y toca *la misma nota que oyó*. C escucha sólo la nota tocada por B. *a*) Suponga que los tres músicos siempre están en línea recta. En comparación con la nota original tocada por el músico A, la nota final escuchada por C tendrá

A) el mismo tono. B) un tono más alto.
C) un tono más bajo.

b) Ahora suponga que A se dirige al norte y se aleja de B, mientras que C se dirige al norte y se aproxima a B. En comparación con la nota original tocada por el músico A, la nota final escuchada por C tendrá

A) el mismo tono. B) un tono más alto.
C) un tono más bajo.

FIGURA 19-18. Pregunta de opción múltiple 12.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué el sonido no se propaga por el vacío?
2. Mencione algunas fuentes de ondas infrasónicas y ultrasónicas.
3. Las ondas ultrasónicas sirven para conocer las estructuras internas del cuerpo. Pueden, por ejemplo, distinguir entre los líquidos y los tejidos humanos blandos mucho mejor que los rayos X. ¿Cómo? ¿Por qué todavía se usan los rayos X?
4. ¿Qué pruebas experimentales hay para suponer que la velocidad del sonido en el aire es la misma en todas las longitudes de onda?
5. Dé una explicación cualitativa de por qué la velocidad del sonido en el plomo es menor que en el cobre.
6. Las ondas transversales en una cuerda pueden ser polarizadas planas. ¿Pueden estar polarizadas las ondas sonoras?
7. Las campanas a menudo dan un sonido menos agradable que el del piano o del violín. ¿Por qué?
8. Por breve tiempo se hace sonar una campana en una escuela. Momentos después su sonido es inaudible. Siga las ondas sonoras y la energía que transfieren desde el momento de la emisión hasta que se vuelven inaudibles.
9. El tono de los instrumentos de viento se eleva y el de los instrumentos de cuerdas cae conforme una orquesta entra en calor. Explique por qué.
10. Explique cómo se afina un instrumento de cuerdas.
11. ¿Es la resonancia una característica conveniente en todos los instrumentos musicales? Dé ejemplos.
12. Cuando se golpea una punta de un diapasón, la otra también vibra aunque el extremo inferior del diapasón esté sujeto firmemente en una prensa de tornillo. ¿Cómo sucede esto? Es decir, ¿cómo la segunda punta "se entera" de que alguien golpeó la primera?
13. ¿Cómo puede una onda sonora propagarse hacia abajo por un tubo de órgano y reflejarse en su extremo abierto? Al parecer, no hay nada que la refleje.
14. ¿Cómo podemos localizar experimentalmente la posición de los nodos y de los antinodos en una cuerda, en una columna de aire y en una superficie vibratoria?
15. Explique cómo se produce una nota cuando se sopla en la parte superior de un tubo de ensayo. ¿Cuál será el efecto al soplar más fuerte? ¿Al aumentar la temperatura del aire dentro del tubo?

16. ¿Cómo podría reducirse el nivel de ruido en un taller de máquinas?
17. Las sirenas de niebla emiten sonidos de tono muy bajo. ¿Con qué fin?
18. ¿Son las ondas longitudinales en el aire siempre audibles como sonidos cualquiera que sea su frecuencia o intensidad? ¿Cuáles frecuencias dan a una persona la máxima sensibilidad, tolerancia e intervalo?
19. ¿Cuáles son los propósitos comunes de las válvulas de una corneta y de la bomba de un trombón? El clarín no tiene válvulas. ¿Cómo podemos obtener entonces varias notas con él? ¿Cuáles notas pueden producirse? ¿Por qué?
20. Explique cómo al friccionar (o tallar) la cuerda de un violín se hace que vibre.
21. ¿Qué significa cero decibeles? ¿Podría la intensidad de referencia fijarse de modo que permitiera niveles negativos de sonido en decibeles? De ser así, ¿cómo?
22. Explique los factores que determinan el intervalo de frecuencias en su voz y la calidad de ella.
23. Explique el origen del sonido en los silbidos ordinarios.
24. ¿Qué propiedades físicas del sonido corresponden a las sensaciones humanas de tono, sonoridad y calidad del tono?
25. ¿Qué diferencia hay entre una nota de violín y la misma nota cantada por la voz humana que permite distinguirlas?
26. ¿De veras se oye mejor cuando cantamos bajo la regadera? De ser así, ¿cuáles son las razones físicas?
27. Explique el sonido audible producido al deslizar un dedo húmedo alrededor del borde de un vaso de vino.
28. ¿Oscilará una cuerda pulsada de violín más o menos tiempo si no tuviera caja armónica? Explique su respuesta.
29. ¿Es la cuerda pulsada de violín un ejemplo de una oscilación amortiguada forzada? ¿Cómo sonaría si no estuviese amortiguada?
30. Un tubo puede servir de filtro acústico, al discriminar las frecuencias no naturales que pasan por él y las frecuencias naturales. El amortiguador de un automóvil constituye un ejemplo de ello. *a*) Explique cómo funciona este filtro. *b*) ¿En qué forma podemos determinar la frecuencia de corte debajo de la cual no se transmite sonido alguno?
31. Explique los factores que mejoran la acústica en las salas de concierto.
32. ¿Qué efecto tiene utilizar megáfonos o ahuecar las manos delante de la boca para proyectar la voz por cierta distancia?
33. Una luz centelleante disipa gran cantidad de energía y es esencialmente instantánea. ¿Cómo se transforma la energía en las ondas sonoras del trueno? (Véase "Thunder" de Arthur A. Few, *Scientific American*, julio de 1975, p. 80.)
34. Las ondas sonoras sirven para medir la velocidad con que la sangre fluye en las arterias y en las venas. Explique cómo.
35. Suponga que Jorge emite un silbido y Gloria lo oye. Ella escuchará un aumento de frecuencia si corre hacia Jorge o si éste corre hacia ella. ¿Son iguales los incrementos de frecuencia en ambos casos? Suponga la misma velocidad de la carrera.
36. Suponga que, en el efecto Doppler aplicado al sonido, la fuente y el receptor se hallan en reposo dentro del mismo marco de referencia, pero que el medio transmisor (el aire) se mueve respecto a él. ¿Habrá un cambio en la longitud de onda o en la frecuencia recibidas?
37. Está de pie en medio de la carretera y un autobús viene hacia usted a una velocidad constante, con el claxon sonando. Debido al efecto Doppler, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante el tono del claxon?
38. ¿Cómo podría el efecto Doppler utilizarse en un instrumento para detectar el latido cardiaco de un feto? (Este tipo de mediciones se efectúan en forma sistemática; véase "Ultrasound in Medical Diagnosis" de Gilbert B. Devey y Peter N. T. Wells, *Scientific American*, mayo de 1978, p. 98.)
39. Los murciélagos analizan las características de los objetos —entre ellas, tamaño, forma, distancia, dirección y movimiento— percibiendo la forma en que los sonidos de alta frecuencia que emiten se reflejan en los objetos y vuelven a ellos. Explique en términos cualitativos cómo estas características afectan a las ondas sonoras reflejadas. (Consúltese "Information Content of Bat Sonar Echoes" de J. A. Simmons, D. J. Howell y N. Suga, *American Scientist*, marzo-abril de 1975, p. 204.)
40. Suponga que logra detectar un objeto golpeando con ondas que se reflejen contra él (como en un sonar o radar, por ejemplo). Considere después que los murciélagos y los delfines emiten ondas sonoras de 100 kHz de frecuencia; no obstante, los murciélagos detectan objetos tan pequeños como los insectos y en cambio los delfines sólo peces pequeños. ¿A qué se debe la diferencia?
41. La trompeta natural *Do* es un instrumento de latón sin válvulas, que puede tocar sólo las notas C_4, G_4, C_5, E_5, G_5, B_5^-, C_6, ... ¿Caracteriza esta secuencia a un tubo abierto por ambos extremos o un tubo cerrado por un extremo y abierto por el otro? ¿A qué tipo pertenecerealmente la trompeta?
42. ¿Tiene un efecto Doppler el sonido cuando el observador o la fuente se mueven en ángulo recto con la línea que los conecta? ¿De qué manera entonces puede determinarse el efecto cuando el movimiento tiene un componente en ángulo recto con esta línea?
43. Dos barcos con sirenas de vapor del mismo tono silban en el puerto. ¿Supone usted que esto cause un patrón de interferencia con regiones de alta y baja intensidad? De no ser así, explique por qué.

EJERCICIOS

Cuando se necesite en los problemas, utilice la velocidad del sonido en el aire = 343 m/s y la densidad del aire = 1.21 kg/m^3, salvo que se especifique lo contrario.

19-1 Propiedades de las ondas sonoras

19-2 Ondas sonoras viajeras

1. Una onda longitudinal senoidal continua se envía a lo largo de un resorte enrollado desde una fuente vibratoria conectada a él. La fuente tiene una frecuencia de 25 Hz y la distancia entre las rarefacciones sucesivas del resorte es 24 cm. *a*) Determine la velocidad de onda. *b*) Si el desplazamiento longitudinal máximo en el resorte es 0.30 cm y si la onda sigue la dirección $-x$, escriba la ecuación correspondiente. Suponga que la fuente se encuentra en $x = 0$ y que el desplazamiento $s = 0$ en la fuente cuando $t = 0$.
2. La presión en la onda sonora viajera está dada por la ecuación

$$\Delta p = (1.48 \text{ Pa}) \operatorname{sen} [(1.07\ \pi \text{ rad/m})x - (334\ \pi \text{ rad/s})t].$$

Encuentre *a*) la amplitud de presión, *b*) la frecuencia, *c*) la longitud de onda y *d*) la rapidez de onda.

19-3 La rapidez del sonido

3. Para examinar los tumores en tejidos blandos se emplea el ultrasonido diagnóstico con una frecuencia de 4.50 MHz. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de esta onda en el aire? *b*) Si la longitud de onda en el aire de una onda ultrasónica es 1,500 m/s, ¿cuál es su longitud de onda en el tejido?
4. Las ondas sonoras pueden propagarse a través de un gas si la longitud de onda es grande —con un factor aproximado de 10— respecto a la trayectoria libre media de las moléculas. Tratándose del aire a temperatura ambiente, la trayectoria es de unos 0.1 pm. Calcule la frecuencia arriba de la cual las ondas sonoras no podrían propagarse.
5. La figura 19-19 contiene una imagen sumamente detallada de un transistor en un circuito microelectrónico, formado por un microscopio acústico. Las ondas sonoras tienen una frecuencia de 4.2 GHz. Su rapidez en el helio líquido donde está inmerso el espécimen es 240 m/s. *a*) ¿Qué longitud de onda tienen estas ondas acústicas de frecuencia ultraalta? *b*) Los conductores en forma de listón de la figura tienen ≈ 2 pm de ancho. ¿A cuántas longitudes de onda corresponde esto?

FIGURA 19-19. Ejercicio 5.

6. *a*) Una regla para calcular la distancia de una luz de relámpago consiste en contar los segundos que transcurren entre el tiempo en que uno observa el relámpago hasta que escucha el trueno y luego dividir el conteo entre 5. Se supone que el resultado es la distancia en millas. Explique la regla y determine su error porcentual a 0°C y a 1 atm de presión. *b*) Redacte una regla semejante para calcular la distancia en kilómetros.
7. Una columna de soldados, que marcha a 120 pasos por minuto, mantiene el ritmo con la música de una banda a la vanguardia. Se observa que los hombres de la retaguardia avanzan con el pie izquierdo cuando los de la banda lo hacen con el derecho. ¿Qué longitud aproximada tiene la columna?
8. Asiste usted a un gran concierto al aire libre y está sentado a 300 m del micrófono del escenario. Vía satélite, a todo el mundo se transmite el concierto en vivo en estéreo. Supóngase que un oyente se encuentra a 5,000 km de distancia. ¿Quién de ustedes escucha primero la música y con qué diferencia de tiempo?
9. Los sismos generan ondas sonoras en la Tierra. A diferencia del gas, hay ondas transversales (S) y longitudinales (P) en un sólido. Por lo regular la rapidez aproximada de las primeras es 4.5 km/s y la de las segundas es 8.2 km/s. Un sismógrafo registra las ondas P y S provenientes de los sismos. Las primeras ondas P llegan 3 min antes que las primeras S (Fig. 19-20). ¿A qué distancia se produjo el sismo?

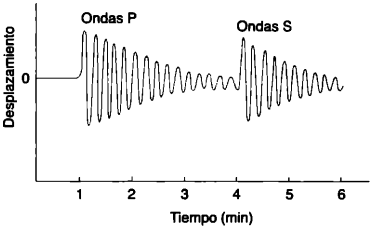


FIGURA 19-20. Ejercicio 9.

19-4 Potencia e intensidad de las ondas sonoras

10. Demuestre que la intensidad de las ondas sonoras I puede escribirse en función de la frecuencia f y de la amplitud del desplazamiento s_m en la forma
$$I = 2\pi^2 \rho v f^2 s_m^2 .$$
11. Una fuente emite ondas esféricas isotrópicamente (es decir, con igual intensidad en todas direcciones). La intensidad de la onda a 42.5 m de la fuente es 197 μW/m^2. Determine la salida de potencia de la fuente.
12. Una onda sonora de 313 Hz de frecuencia tiene una intensidad de 1.13 μW/m^2. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones del aire ocasionada por el sonido?
13. Una onda sonora de 1.60 μW/cm^2 de intensidad atraviesa una superficie de 4.70 cm^2 de área. ¿Cuánta energía cruza la superficie en 1 h?
14. Encuentre la razón de intensidad de dos sonidos cuyo nivel difiere 1.00 dB.
15. Cierto nivel de sonido se incrementa en 30 dB más. Demuestre que *a*) su intensidad crece por un factor de 1,000, y *b*) que su amplitud de presión lo hace por un factor de 32.
16. Un vendedor afirmó que un sistema estereofónico podía generar 110 W de potencia de audio. Al probar el sistema con varios altavoces instalados para que simularan una fuente puntual, el cliente comprobó que podía acercarse a 1.3 m con el sonido a todo volumen antes de que le lastimara los oídos. ¿Debería denunciar a la empresa ante algún organismo de defensa del consumidor?
17. Calcule la densidad de energía en una onda sonora a 4.82 km de una sirena de emergencia de 5.20 kW, suponiendo que la onda sea esférica y que la propagación sea isotrópica sin absorción atmosférica.
18. Está de pie a una distancia D de una fuente isotrópica de ondas sonoras. Camina 51.4 m hacia la fuente y observa que la intensidad de ellas se ha duplicado. Calcule la distancia D.
19. Estime el máximo nivel posible en decibeles de las ondas sonoras en el aire. (*Sugerencia*: Ponga la amplitud de presión a 1 atm.)
20. Suponga que el nivel sonoro promedio del habla humana es 65 dB. ¿Cuántas personas que en un cuarto hablen al mismo tiempo a 65 Db se necesitan para generar un nivel de 80 dB?
21. Suponga que el bisbiseo de una hoja produce 8.4 dB. Determine el nivel sonoro proveniente de un árbol con 2.71×10^5 hojas que bisbisean.

22. En una prueba, un avión subsónico de propulsión vuela a una altitud de 115 m. El nivel de sonido en el suelo al pasar por encima es de 150 dB. ¿A qué altitud deberá volar para que el ruido en el suelo no supere los 120 dB, el umbral del dolor? Ignore el tiempo finito necesario para que el sonido llegue al suelo.

19-5 Interferencia de las ondas sonoras

23. Una onda sonora de 42.0 cm de longitud de onda entra en el tubo de la figura 19-21. ¿Cuál debe ser el radio más pequeño r para que se escuche un mínimo en el detector?

FIGURA 19-21. Ejercicio 23.

24. Dos altavoces estereofónicos se encuentran a una distancia de 2.12 m. Suponga que la amplitud del sonido proveniente de cada uno es aproximadamente igual en la posición de un oyente, quien se encuentra 3.75 m delante de ellos (Fig. 19-22). *a*) ¿Con qué frecuencias en el intervalo audible (20-20,000 Hz) habrá una señal mínima? *b*) ¿Con qué frecuencia alcanza el sonido un máximo?

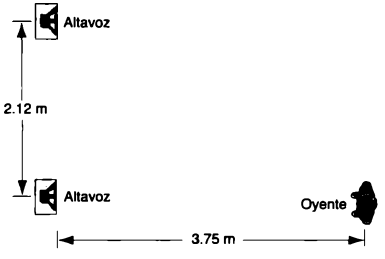


FIGURA 19-22. Ejercicio 24.

25. Una fuente sonora esférica se coloca en P_1 cerca de una pared reflectora AB y un micrófono en el punto P_2, figura 19-23. La frecuencia del sonido es variable. Calcule las dos frecuencias más bajas en que la intensidad del sonido alcanzará su nivel máximo, como se observa en P_2. La fase no cambia con la reflexión; el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

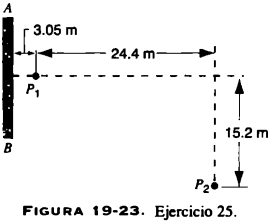


FIGURA 19-23. Ejercicio 25.

26. Dos fuentes sonoras están a una distancia de 5.00 m entre sí. Emiten sonido en la misma amplitud y frecuencia, 300 Hz, pero están 180° fuera de fase. ¿En qué puntos de la línea que las conecta la intensidad del sonido llegará a su máximo?

19-6 Ondas longitudinales estacionarias

27. Las cuerdas de un violoncelo tienen una longitud L. *a*) ¿A qué longitud ΔL deben acortarse mediante la digitación para cambiar el tono en una razón de frecuencia r? *b*) Encuentre ΔL si $L = 80.0$ cm y $r = \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

28. Una onda sonora en un medio fluido se refleja en una barrera de modo que se forma una onda estacionaria. La distancia entre los nodos es 3.84 cm y la rapidez de propagación es 1520 m/s. Calcule la frecuencia.

29. Un pozo con lados verticales y con agua en el fondo resuena a 7.20 Hz y a ninguna frecuencia menor. El aire dentro de él tiene una densidad de 1.21 kg/^{3} y un módulo volumétrico de 1.41×10^5 Pa. ¿Cuál es su profundidad?

30. En la figura 19-24, S es un pequeño altavoz activado por un oscilador de audio y un amplificador, ajustable en una frecuencia de 1,000 a 2,000 Hz exclusivamente. D es un tubo cilíndrico de lámina metálica de 45.7 cm de largo y abierto por ambos extremos. *a*) ¿A qué frecuencias habrá resonancia cuando la frecuencia emitida por el altavoz pase de 1000 a 2000 Hz? *b*) Dibuje los nodos de desplazamiento en cada resonancia. Prescinda de los efectos del borde.

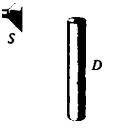


FIGURA 19-24. Ejercicio 30.

31. Las terrazas de un anfiteatro en Los Angeles (Fig. 19-25) miden 36 in de ancho (0.914 m). ¿Qué frecuencia tendrá el tono con que se refleja el único aplauso que se produce en el centro del escenario?

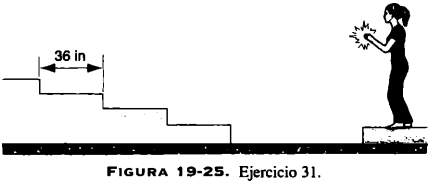


FIGURA 19-25. Ejercicio 31.

32. Un túnel que conduce a través de una colina amplifica enormemente los tonos a 135 y 138 Hz. Determine la longitud más corta que el túnel podría tener.

19-7 Sistemas vibratorios y fuentes de sonido

33. *a*) Calcule la velocidad de las ondas en una cuerda de violín de 820 mg que mide 22.0 cm de largo, si la frecuencia del tono fundamental es 920 Hz. *b*) Calcule la tensión de la cuerda.

34. Si una cuerda de violín se afina a cierta nota, ¿en qué factor debe aumentarse su tensión para que no emita una nota que tenga una frecuencia doble de la original (es decir, una nota de una octava más alta de tono)?

35. Una cuerda de violín mide 30 cm de largo entre sus extremos fijos y tiene una masa de 2.0 g. La cuerda toca una nota La

(440 Hz) cuando se toca sin digitación. ¿Dónde debemos poner los dedos para tocar un Do (528 Hz)?

36. Un tubo abierto de órgano tiene una frecuencia fundamental de 291 Hz. El primer sobretono ($n = 3$) de un tubo cerrado tiene la misma frecuencia que el segundo armónico del tubo abierto. ¿Cuánto mide de largo cada uno?

19-8 Pulsos

37. Un diapasón de frecuencia desconocida produce tres pulsos por segundo con un diapasón estándar de 384 Hz de frecuencia. La frecuencia de los pulsos disminuye cuando un pequeño trozo de cera se coloca en una punta del primer diapasón. ¿Cuál es su frecuencia?

38. La cuerda La de un violín está demasiado tensa. Se escuchan cuatro pulsos por segundo cuando suena junto con un diapasón que vibra exactamente al tono de concierto en La (440 Hz). ¿Cuál es el periodo de vibración de las cuerdas del violín?

39. Recibe usted cuatro diapasones. El de menor frecuencia vibra a 500 Hz. Al utilizar dos al mismo tiempo se escuchan las siguientes frecuencias de pulso: 1, 2, 3, 5, 7 y 8 Hz. ¿Cuáles son las frecuencias posibles de los tres diapasones restantes?

19-9 El efecto Doppler

40. Una fuente S genera ondas circulares en la superficie de un lago, cuyo patrón de crestas de onda se muestra en la figura 19-26. La rapidez de ellas es 5.5 m/s y la separación entre crestas es de 2.3 m. Se encuentra usted en un buque pequeño que se dirige a S con una rapidez constante de 3.3 m/s respecto a la orilla. ¿Qué frecuencia de ondas observa?

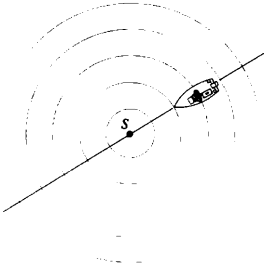


FIGURA 19-26. Ejercicio 40.

41. Las turbinas en los motores de un avión a propulsión que vuela a una velocidad de 193 m/s producen un ruido de 15.8 kHz. ¿A qué frecuencia lo escuchará el piloto de un segundo avión que trata de alcanzarlo y que vuela a una velocidad de 246 m/s?

42. Una ambulancia que emite un silbido a 1,602 Hz alcanza y rebasa a un ciclista que pedalea a 2.63 m/s. Después de ser rebasado, éste escucha una frecuencia de 1,590 Hz. ¿A qué velocidad va la ambulancia?

43. Un silbido de 538 Hz de frecuencia se mueve en un círculo de 71.2 cm de radio, a una rapidez angular de 14.7 rad/s. ¿Cuáles son *a*) las frecuencias más bajas, y *b*) las más altas escuchadas por una persona que está lejos y en reposo respecto al centro del círculo?

44. En 1845, Buys Ballot probó por primera vez el efecto Doppler en el sonido. Colocó a un trompetero en un vagón de plataforma tirado por una locomotora y a otro músico cerca de las vías. Si los dos tocan una nota de 440 Hz y si se producen 4.0 pulsos/s al acercarse uno a otro, ¿a qué velocidad avanzará el vagón?

45. Estime la rapidez del proyectil que aparece en la fotografía de la figura 19-16*b*. Suponga que la velocidad del sonido en el medio por donde se desplaza es 380 m/s.

46. Un sonar emite ondas de 148 kHz, desde una patrulla oculta, hacia un camión que se aproxima a una velocidad de 44.7 m/s. Calcule la frecuencia de las ondas reflejadas que detecta la patrulla.

47. Una alarma acústica antirrobo es una fuente que emite ondas de 28.3 kHz de frecuencia. ¿Cuál será la frecuencia de pulsos de las reflejadas en el intruso que camina a 0.95 m/s alejándose directamente de la alarma?

48. Una sirena que emite una sonido de 1,000 Hz de frecuencia se aleja de usted hacia un risco con una rapidez de 10.0 m/s. *a*) ¿Qué frecuencia tiene el sonido que escucha proveniente de la sirena? *b*) ¿Qué frecuencia tiene el sonido que escucha reflejado en el risco? *c*) Calcule la frecuencia de los pulsos. ¿Podría escucharlos? Suponga que la velocidad del sonido en el aire es 330 m/s.

49. Una persona en un automóvil toca una trompeta que suena a 438 Hz. El automóvil se dirige hacia un muro a 19.3 m/s. Calcule *a*) la frecuencia del sonido recibido en el muro, y *b*) la frecuencia del sonido reflejado que vuelve a la fuente.

50. En una explicación de los cambios Doppler de ondas ultrasónicas (de alta frecuencia) utilizadas en el diagnóstico médico, los autores señalan: "Por cada milímetro por segundo que se mueve una estructura del cuerpo, la frecuencia de la onda ultrasónica incidente varía aproximadamente 1.3 Hz/MHz". ¿Qué velocidad de las ondas en el tejido deduce usted de esta afirmación?

51. Un murciélago revolotea en una cueva, navegando muy eficazmente gracias a *bleeps* ultrasónicos (emisiones cortas de sonido de alta frecuencia que duran un milisegundo o menos y que se repiten varias veces por segundo). Suponga que la frecuencia de emisión del murciélago es 39.2 kHz. Durante una picada rápida hacia una superficie plana de muro, el murciélago se mueve a 8.58 m/s. Calcule la frecuencia del sonido que escucha reflejado contra el muro.

PROBLEMAS

1. La velocidad del sonido en cierto metal es v. Un extremo de un tubo grande hecho de ese metal tiene una longitud L y se le da un golpe duro. Un oyente situado en el otro extremo escucha dos sonidos: uno proveniente de la onda que se propagó a lo largo del tubo y el otro proveniente de la que se propagó a través del aire. *a*) Si v_{aire} es la velocidad del sonido en el aire, ¿qué intervalo temporal t transcurre entre la llegada de los dos sonidos? *b*) Un martillo golpea una larga varilla de aluminio en un extremo. Una persona, cuyo oído está cerca del otro extremo de la varilla, oye el sonido del golpe dos veces, con un intervalo de 120 ms entre ellos. ¿Cuánto mide de largo la varilla?

2. Se deja caer una piedra en un pozo. El sonido de la salpicadura se escucha 3.00 s más tarde. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

3. Cierto altavoz produce un sonido con una frecuencia de 2.09 kHz y con una intensidad de 962 $\mu W/m^2$ a una distancia de 6.11 m. Suponga que no hay reflejos y que el altavoz emite lo mismo en todas direcciones. *a*) Determine la intensidad a 28.5 m. *b*) Calcule la amplitud de desplazamiento a 6.11 m. *c*) Calcule la amplitud de presión a 6.11 m.

4. *a*) Si dos ondas sonoras, una en el aire y otra en el agua, presentan la misma intensidad,¿cuál será la razón de amplitud de presión en el agua a la de la onda en el aire? *b*) Si las amplitudes de presión son iguales, ¿cuál es la razón de intensidad de las ondas? Suponga que el agua se encuentra a 20°C.

5. Una fuente lineal (por ejemplo, un largo tren carguero en una vía recta) emite una onda cilíndrica que se expande. Suponiendo que el aire no absorbe energía, determine cómo *a*) la intensidad y *b*) la amplitud de la onda dependen de la distancia respecto a la fuente. Ignore los reflejos y suponga que los puntos están cerca del centro del tren.

6. En la figura 19-27 se incluye un interferómetro acústico, aparato que sirve para demostrar la interferencia de las ondas sonoras. *S* es una fuente sonora (un altavoz, por ejemplo) y *D* un detector de sonido como el oído o un micrófono. Puede modificarse la trayectoria de *SBD*, pero la trayectoria *SAD* está fija. El interferómetro contiene aire y se comprueba que la intensidad del sonido tiene un valor mínimo de 10 $\mu W/cm^2$ en una posición de *B* y que continuamente se eleva a un valor máximo de 90 $\mu W/cm^2$ en una segunda posición a 1.65 cm de la primera. Calcule *a*) la frecuencia del sonido emitido de la fuente y *b*) la amplitud relativa de las ondas que llegan al detector en las dos posiciones de *B*. *c*) ¿Cómo puede ser posible que las ondas tengan diferente amplitud, teniendo en cuenta que se originan en la misma fuente?

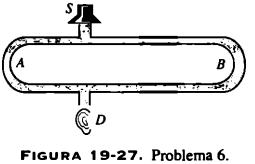


FIGURA 19-27. Problema 6.

7. Cierto altavoz (supuestamente una fuente puntual) emite 31.6 W de potencia acústica. Un pequeño micrófono con una superficie transversal efectiva de 75.2 mm^2 está situado a 194 m de él. Calcule *a*) la intensidad del sonido en el micrófono, *b*) la potencia incidente en el micrófono y *c*) la energía que llega al micrófono en 25.0 min.

8. El *tiempo de reverberación* de un auditorio o sala de conciertos es el que se requiere para que una intensidad sonora (in W/m^2) disminuya en un factor de 10^6. El tiempo de reverberación depende de la frecuencia del sonido. Suponga que en una sala de conciertos el tiempo de reverberación para una nota de cierta frecuencia sea 2.6 s. Si se toca en un nivel sonoro de 87 dB, ¿cuánto tardará el nivel en descender a 0 dB (el umbral del oído humano)?

9. Para concentrar el sonido se usa un gran reflector parabólico que tiene una abertura circular de radio 0.50 m. Si del centro se suministra energía al oído de un detectáfono a través de un tubo de 1.0 cm y con una eficiencia del 12%, ¿a qué distancia puede entenderse una conversación susurrada? (Suponga que el nivel sonoro de un susurro es 20 dB a 1.0 m de la fuente, supuestamente puntual, y que el umbral de audición es 0 dB.)

10. El periodo de una estrella variable pulsante puede estimarse suponiendo que realiza pulsaciones longitudinales radiales en el modo fundamental de la onda estacionaria, es decir, el radio varía periódicamente a través del tiempo, con un antinodo de desplazamiento en la superficie. *a*) ¿Espera usted que el centro de la estrella sea un nodo o antinodo de desplazamiento? *b*) Por analogía con un tubo abierto de órgano, pruebe que el periodo de pulsación *T* está dado por

$$T = \frac{4R}{v_s},$$

donde *R* es el radio de equilibrio de la estrella y v_s es la rapidez promedio del sonido. *c*) Las estrellas enanas blancas comunes se componen de material con un módulo volumétrico de 1.33×10^{22} Pa y una densidad de 1.0×10^{10} kg/m^3. Tienen un radio igual a 0.009 radios solares. ¿Cuál es el periodo aproximado de pulsación de una enana blanca? (Véase "Pulsating Stars" de John R. Percy, *Scientific American*, junio de 1975, p. 66.)

11. En la figura 19-28, una varilla *R* está sujeta en su centro con una prensa; un disco *D* en su extremo se introduce en un tubo de vidrio que tiene picadura de corcho distribuida en su interior. Un émbolo *P* está en el otro extremo. Se hace vibrar la varilla longitudinalmente y se mueve el émbolo hasta que la picadura forma un patrón de nodos y antinodos (forma bordes bien definidos en los antinodos de presión). Si conocemos la frecuencia *f* de las vibraciones longitudinales en la varilla, una medición de la distancia promedio *d* entre antinodos sucesivos determina la velocidad del sonido *v* en el gas del tubo. Demuestre que

$$v = 2fd.$$

Éste es el método de Kundt para determinar la velocidad de sonido en varios gases.

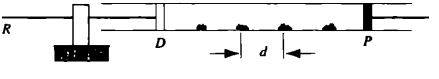


FIGURA 19-28. Problema 11.

12. Un tubo de 1.18 m de largo está cerrado en un extremo. Un alambre extendido se coloca cerca de este extremo. Mide 33.2 cm de largo y tiene una masa de 9.57 g. Está fijo en ambos extremos y vibra en su modo fundamental. Por medio de la resonancia hace vibrar la columna de aire dentro del tubo a su frecuencia fundamental. Calcule *a*) la frecuencia con que oscila la columna de aire, y *b*) la tensión del alambre.

13. Una cuerda de violín de 30.0 cm con una densidad lineal de masa de 0.652 g/m se pone cerca de un altavoz al que alimenta un oscilador de audio de frecuencia variable. Se comprueba que se hace oscilar sólo a frecuencias de 880 y de 1320 Hz, a medida que hacemos variar continuamente la frecuencia del oscilador en un intervalo de 500-1,500 Hz. ¿Qué tensión tiene la cuerda?

14. Recibe usted cinco diapasones, todo ellos con una frecuencia diferente. Al probar cada par de diapasones, *a*) ¿qué número máximo de frecuencias de pulso podrán obtenerse?, *b*) ¿qué número mínimo de frecuencias de pulso podrán obtenerse?

15. La velocidad de la luz en el agua es 2.25×10^8 m/s (aproximadamente tres cuartos de la velocidad en el vacío). Un haz de electrones de alta velocidad de un betatrón emite radiación de Cerenkov en el agua; el frente de onda es un cono con un ángulo de 58.0°. Calcule la velocidad de los electrones dentro del agua.

16. Dos diapasones idénticos oscilan a 442 Hz. Una persona se halla en la línea entre ellos. Calcule la frecuencia de pulso medida por este individuo si *a*) permanece de pie y si los diapasones se mueven hacia la derecha a 31.3 m/s, y *b*) permanecen estacionarios y el oyente se desplaza hacia la derecha a 31.3 m/s.

17. Un avión vuela a 396 m/s a una altitud constante. El estruendo sónico llega a un observador en el suelo 12.0 s después que el avión pasa por arriba de su cabeza. Determine la altitud del avión. Suponga que la velocidad del sonido es 330 m/s.

18. La figura 19-29 muestra un transmisor y un receptor de ondas contenidas en un solo instrumento. Sirve para medir la velocidad V de un objeto blanco (representado como una placa plana) que se dirige hacia la unidad, analizando las ondas reflejadas en él. *a*) Aplique dos veces las ecuaciones de Doppler: primero con el blanco como observador y luego con el blanco como fuente; demuestre después que la frecuencia f_r de las ondas reflejadas en el receptor se relaciona con su frecuencia de fuente f_s por medio de

$$f_r = f_s\left(\frac{v + V}{v - V}\right),$$

donde v es la velocidad de las ondas. *b*) En muchas situaciones concretas, $V \ll v$. En este caso, pruebe que la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{f_r - f_s}{f_s} \approx \frac{2V}{v}.$$

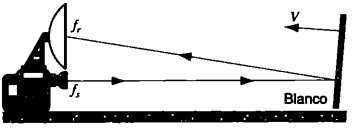


FIGURA 19-29. Problema 18.

19. Dos submarinos se hallan en curso de una colisión frontal durante unas maniobras en el Atlántico Norte. El primero avanza a 20.2 km/h y el segundo a 94.6 km/h. El primer submarino envía una señal sonar (onda sonora en el agua) a 1,030 Hz. Este tipo de ondas se desplazan a 5470 km/h. *a*) El segundo submarino capta la señal reflejada. ¿Qué frecuencia escucha el segundo detector sonar? *b*) El primer submarino capta la señal reflejada. ¿Qué frecuencia escucha el primer detector sonar? (Fig. 19-30.) El mar está tranquilo; suponga que no hay corrientes.

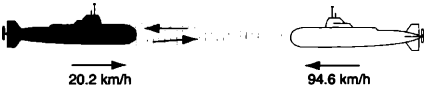


FIGURA 19-30. Problema 19.

20. Un submarino que se dirige al norte con una velocidad de 75.2 km/h respecto al piso marino emite una señal sonar (ondas en el agua que se usan en forma semejante al radar; tabla 19-1) de 989 Hz de frecuencia. Si en ese lugar del mar una corriente se dirige hacia el norte a 30.5 km/h respecto a tierra firme, ¿qué frecuencia observará un barco arrastrado con la corriente al norte del submarino? (*Sugerencia*: En las ecuaciones de Doppler todas las velocidades han de tomarse respecto al medio.)

21. Una sirena de 2,000 Hz y un oficial de defensa civil se hallan en reposo respecto a la Tierra. ¿Qué frecuencia oye el oficial si el viento sopla a 12 m/s, *a*) de la fuente al observador, y *b*) del observador a la fuente?

22. Dos trenes en vías paralelas se dirigen una hacia otra a 34.2 m/s respecto al suelo. Uno sopla una sirena a 525 Hz. *a*) ¿Qué frecuencia se escuchará en el otro cuando el aire está tranquilo? *b*) ¿Qué frecuencia se escuchará en el otro si el viento sopla a 15.3 m/s paralelamente a las vías y hacia el silbido? *c*) ¿Qué frecuencia se oirá cuando se invierta la dirección del viento?

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Escriba un programa de computadora para un sonar Doppler. El programa debe pedir la velocidad del sonido, la frecuencia del pulso de salida, la frecuencia del pulso reflejado y el retraso temporal entre el pulso de salida y el de vuelta. Luego comunicará al usuario la distancia probable del blanco y su(s) velocidad(es) posible(s) de acercamiento o de alejamiento respecto a la fuente. Pruebe el programa con los datos siguientes: la velocidad del sonido es 340 m/s; la frecuencia del pulso de salida es 20 kHz; la frecuencia del pulso reflejado es 20.612 kHz; y el retraso temporal entre ambos pulsos es de 0.230 s.

2. Generalice el programa anterior de modo que los datos procedentes de dos pulsos consecutivos sirvan para determinar la distancia del blanco y su velocidad. Además el programa deberá pedir la velocidad con que se envían los pulsos de salida. Suponga que son omnidireccionales, pero que la dirección de los pulsos de entrada puede resolverse. Pruebe el programa con los siguientes datos: la velocidad del sonido es 340 m/s; la frecuencia del pulso de salida es 20 kHz y los pulsos se envían una vez por segundo; un pulso reflejado de 20.921 kHz proveniente de 40° NE se recibe 0.288 s después de enviar el primero; un segundo pulso reflejado de 20.921 kHz proveniente de 36.5° NE se recibe 0.311 s después de enviar el segundo.

CAPÍTULO 20

TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD*

La teoría especial de la relatividad no merece la reputación de material difícil. No es complicada desde el punto de vista matemático; la mayor parte de sus detalles pueden entenderse usando técnicas bien conocidas por los lectores de este libro. Tal vez el aspecto más interesante de la relatividad especial, es su insistencia en que reemplacemos con ideas nuevas algunas de las referentes al espacio y tiempo que hemos adquirido durante años de experiencias del "sentido común".

*Las ideas esenciales de la relatividad especial fueron expuestas de modo formal en un escrito de Albert Einstein que se publicó en 1905.** En este capítulo explicaremos los postulados básicos de la teoría y sus consecuencias, describiremos los métodos matemáticos que nos permiten transformar en otro marco de referencia las mediciones hechas en un marco y estudiaremos algunas de las consecuencias que tiene en cinemática y en dinámica.*

20-1 PROBLEMAS CON LA FÍSICA CLÁSICA

La cinemática propuesta por Galileo y la mecánica de Newton que constituyen el fundamento de lo que llamamos *física clásica*, cosecharon muchos triunfos. Destacan sobre todo, el conocimiento del movimiento de los planetas y el uso de la teoría cinética para explicar algunas propiedades de los gases. Pero varios fenómenos experimentales no pueden entenderse con estas teorías clásicas exitosas en otros aspectos. Vamos a analizar algunos de esos problemas. Nos ocuparemos de ejemplos de experimentos diseñados especialmente para detectar las limitaciones de la física clásica y, como veremos, para probar la teoría especial de la relatividad de Einstein.

Problemas con nuestras ideas sobre el tiempo

El pion (π^+ o π^-), es una partícula que puede crearse en un acelerador de partículas de gran energía. Se trata de partículas muy inestables; las que se generan en reposo se desintegran (en otras partículas) con una vida media apenas de 26.0 ns (26.0×10^{-9}s). En un experimento se crearon piones en movimiento con una rapidez de $v = 0.913c$ (donde c es la velocidad de la luz (3.00×10^8 m/s). En este caso se observó que se desplazan en el laboratorio a una distancia promedio de $D = 17.4$ m antes de desintegrarse; concluimos, pues, que lo hacen en un tiempo dado por $D/v = 63.7$ ns, mucho mayor que la vida medida de los piones en reposo (26.0 ns). Este efecto llamado *dilatación en el tiempo*, indica que algo en el movimiento relativo entre el pion y el laboratorio alargó en un factor aproximado de 2.5 el intervalo temporal medido. Ello no puede explicarse mediante la física newtoniana, en la cual el tiempo es una coordenada universal que posee valores idénticos para todos los observadores.

* Algunos profesores querrán posponer el estudio de la relatividad hasta después que se estudien las ondas electromagnéticas en el Capítulo 38. Los efectos relativistas en el movimiento ondulatorio se explican en el Capítulo 39. Puede exponerse este capítulo en forma abreviada posponiendo las secciones 20-4 a 20-7.

** En ese año publicó sus trabajos sobre el movimiento browniano y el efecto fotoeléctrico. Fue por el segundo trabajo (y no específicamente por su teoría de la relatividad) que en 1921 recibió el Premio Nobel de Física. En 1917, Einstein propuso además una teoría *general* de la relatividad. Ésta trata del efecto de la gravedad en el espacio y en el tiempo, algunas de cuyas consecuencias se comentaron en la sección 14-9. En el presente capítulo vamos a ocuparnos exclusivamente de la teoría *especial* en que no interviene la gravedad.

Problemas con nuestras ideas sobre la longitud

Supóngase que un observador en el laboratorio antes mencionado puso un marcador en un lugar en que se forma el pión, y otro en el lugar donde se desintegra. La distancia entre los marcadores se mide y se descubre que es 17.4 m. Ahora consideremos la situación según otro observador que se desplaza junto con el pión a una velocidad de $u = 0.913c$. Este observador para quien el pión parece estar en reposo, mide su vida y determina que es 26.0 ns (característica de los piones en reposo). Para él la distancia entre los marcadores que muestran la formación y el deterioro del pión es $(0.913c)(26.0 \times 10^{-9}\text{s}) = 7.1$ m. En conclusión, dos observadores que están en movimiento relativo miden distintos valores de un mismo intervalo de longitud. También esto es incompatible con la física newtoniana, en la cual las coordenadas espaciales son absolutas y dan idénticas lecturas a todos los observadores.

Problemas con nuestras ideas sobre la rapidez

La figura 20-1 muestra un juego entre *A* y *B* visto por un observador *O*. Los tres observadores se encuentran en reposo dentro de este marco de referencia. *A* lanza una pelota con una velocidad superluminal (más rápida que la luz) hacia *B*, quien la atrapa. La señal luminosa que transporta la vista de *A* lanzando la pelota, se dirige al observador *O* como sucede con la señal que lleva la vista de *B* atrapando la pelota. Ambas señales luminosas se desplazan a una velocidad *c*, menor que la de la pelota lanzada por *A*. En el lugar del observador *O*, como se aprecia en la figura 20-1, la señal proveniente de *B* llega antes que la proveniente de *A*. Por tanto, según *O*, *B* atrapa la pelota antes que *A* la lance. La física newtoniana permite acelerar proyectiles hasta velocidades ilimitadas, y por lo mismo podemos observar estas aparentes violaciones de la (*causalidad*) relación causa-efecto.

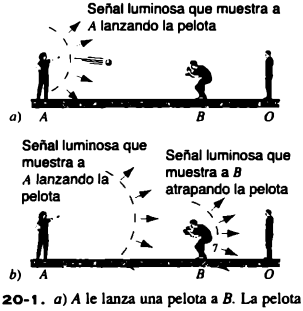


FIGURA 20-1. *a)* *A* le lanza una pelota a *B*. La pelota se mueve más rápidamente que la luz, y por lo mismo se encuentra adelante de la señal luminosa que muestra *A* lanzando la pelota. *b)* La señal luminosa donde aparece *B* atrapando la pelota, llegará al observador *O* antes que la señal luminosa donde *A* aparece lanzando la pelota. Tales incongruencias lógicas contradicen la posibilidad de acelerar las partículas a velocidades mayores que la de la luz.

Problemas con nuestras ideas sobre la energía

El positrón (e^+) es la *antipartícula* del electrón (e^-). Ambos tienen la misma masa pero carga eléctrica opuesta: la del electrón es negativa y la del positrón es positiva. Los positrones se emiten en un tipo común de proceso de desintegración radiactiva. Cuando encuentran electrones en la materia ordinaria, observamos el proceso de *aniquilación de electrón-positrón*, donde ambas partículas desaparecen y en su lugar queda sólo la radiación electromagnética (rayos gamma, que se parecen mucho a la luz ordinaria, sólo que su longitud de onda es mucho menor). Este proceso puede representarse simbólicamente así:

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{radiación}.$$

En la figura 20-2*a* se muestra gráficamente un sistema constituido por un electrón y un positrón, que al inicio se dirigen uno hacia otro a muy baja velocidad. Las dos partículas están en un contenedor que se halla totalmente dentro de nuestro sistema. En la figura 20-2*b* se han aniquilado una a otra, y en su lugar encontramos "radiación". En la figura 20-2*c*, la radiación ha sido absorbida por las paredes del contenedor en el proceso de aumento de su energía interna.

¿Podemos aplicarle a este sistema la ley de conservación de la energía expuesta en el Capítulo 13? Es evidente que no entra energía en la frontera del sistema y que tampoco sale de ella; además, no se realiza trabajo externo en él y no se transfiere energía hacia afuera ni hacia adentro. En este caso, esperamos que la energía total en el interior de la frontera permanezca constante. Pero hay energía en la radiación de la figura 20-2*b*, y en la energía interna de las paredes del contenedor en la figura 20-2*c* que no tiene un claro equivalente en la figura 20-2*a*. Al parecer, la ley de conservación de la energía se viola en este proceso. Si queremos preservarla como un ley fundamental de la física, es necesario explicar esta violación aparente.

Problemas con nuestras ideas sobre la luz

Einstein propuso su teoría especial de la relatividad en 1905, basándose en un experimento que había diseñado mentalmente. Cuando era un estudiante de 16 años, aprendió la teoría del electromagnetismo y había reflexionado sobre una paradoja: si uno se desplazara a la velocidad de la luz paralelamente a un haz luminoso que se propagara por el espacio vacío, observaría patrones eléctricos y magnéticos "estáticos". (En forma similar, en la figura 18-8 se muestra una perturbación "estática" en una cuerda, que será vista por un observador que se mueva en una cuerda con la misma velocidad que las ondas en ella.) No obstante, Einstein sabía que estos patrones en el espacio vacío violaban la teoría del electromagnetismo.

Tenía dos opciones para resolver la paradoja: o la teoría electromagnética estaba equivocada o lo estaba la cinemática clásica que permitía a un observador desplazarse junto con un haz luminoso. Con esa gran intuición que fue quizá su mejor cualidad, Einstein puso su fe en la teoría electromagnética y buscó una alternativa a la cinemática de Galileo y de Newton.

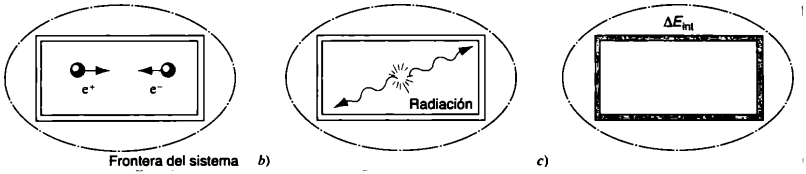


FIGURA 20-2. *a*) Un electrón y un positrón se acercan lentamente uno al otro dentro de un contenedor en nuestro sistema. *b*) Después de la aniquilación aparece la radiación. *c*) La energía radiante es absorbida por las paredes del contenedor, aumentando con ello su energía interna en ΔE_{int}.

Más adelante veremos en este capítulo, cómo la nueva cinemática, que constituye el fundamento de la relatividad especial, impide que un observador atrape un haz luminoso. Veremos también cómo se resuelven con ella otros problemas del tiempo, de la longitud, de la rapidez y de la energía comentados con anterioridad.

La prueba decisiva de cualquier teoría, es la precisión con que concuerda con los experimentos. La teoría especial de la relatividad ha sido sometida a pruebas exhaustivas durante los últimos 95 años y ha pasado todas. Donde ella y la física clásica predicen resultados distintos, los experimentos coinciden siempre con la teoría de la relatividad.

20-2 LOS POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Una teoría científica comienza con enunciados generales denominados *postulados*, cuyo fin es sentar sus bases. A partir de ellos se obtiene una serie de leyes matemáticas mediante ecuaciones que relacionan las variables físicas. Por último, se prueban en el laboratorio las predicciones de las ecuaciones. La teoría se sostiene mientras los experimentos no la contradigan; si esto último ocurre, los postulados son modificados o sustituidos y entonces se repite el ciclo.

Durante cerca de dos siglos la mecánica de Galileo y de Newton pasó todas las pruebas experimentales. En este caso, los postulados se refieren a la naturaleza absoluta del espacio y del tiempo. Basándose en su experimento mental sobre atrapar un haz luminoso, Einstein se dio cuenta de que había que reemplazar las leyes galileanas sobre el movimiento relativo. En su ensayo de 1905, titulado *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*, ofreció dos postulados que constituyen el fundamento de su teoría especial de la relatividad. A continuación reformulamos sus postulados en los siguientes términos:

Principio de la relatividad: *Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.*

Principio de la constancia de la velocidad de la luz: *La velocidad de la luz en el espacio libre, tiene el mismo valor* c *en todos los marcos de referencia inerciales.*

El primer postulado establece, que las leyes de la física son absolutas, universales e idénticas para todos los observadores inerciales. Las leyes que se aplican a un observador inercial no pueden violarse para *ninguno* de ellos.

El segundo postulado es mucho más difícil de aceptar, porque viola el "sentido común", el cual se funda firmemente en la cinemática galileana que hemos aprendido en las experiencias cotidianas. Supongamos tres observadores A, B y C, todos ellos en reposo dentro de un distinto marco de referencia inercial. El observador A emite un destello de luz y la ve desplazarse con una velocidad c. El marco del observador B se aleja de A a una velocidad $c/4$; la cinemática galileana predice que B mide el valor $c - c/4 = 3c/4$ para la velocidad de la luz emitida por A. El observador C está dentro de un marco que se dirige *hacia* A con una velocidad $c/4$; de acuerdo con Galileo, el observador C mide una velocidad de $c + c/4 = 5c/4$ para la velocidad de la luz emitida por A. En cambio, el segundo postulado de Einstein afirma que *los tres observadores miden la misma velocidad* c *para el pulso luminoso.*

Claro que no es así como se comportan los objetos ordinarios. Un proyectil disparado de un automóvil en movimiento, tiene una velocidad respecto al suelo que se determina mediante la suma vectorial de esa velocidad. Sin embargo, la velocidad de las ondas luminosas y de las partículas que se mueven con una rapidez cercana a c no se comportan en esa forma. Explicamos en la sección 20-6 la ley relativista de suma de velocidades, y mostramos que se reduce a la ley galileana del "sentido" común con velocidades bajas.

Einstein formuló sus postulados en una época en que era difícil o imposible efectuar pruebas experimentales. En las siguientes décadas, el advenimiento de aceleradores de partículas de gran energía permitieron estudiar el movimiento de las partículas a velocidades cercanas a c. Así, en 1964, se realizó un experimento en el CERN, laboratorio europeo cerca de Ginebra (Suiza) que trabajaba con esta clase de partículas. Se utilizó un acelerador de protones para producir un haz de partículas llamadas piones neutrales (π^0), las cuales decaen rápidamente (con una vida promedio aproximada de 10^{-16} s) y se transforman en dos rayos gamma:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Los rayos gamma son radiaciones electromagnéticas que se desplazan con la velocidad de la luz. En los experimentos se midieron directamente la velocidad de los rayos emitidos por los piones al desintegrarse, que se movían a una velocidad de $0.99975c$. De

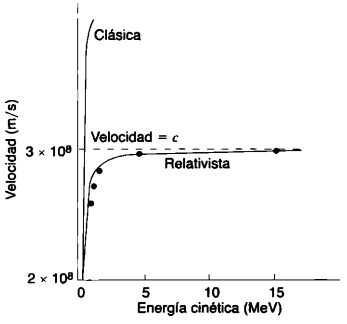


FIGURA 20-3. Los puntos representan las mediciones de la velocidad de los electrones acelerados, mediante una gran diferencia de voltaje hasta alcanzar una energía cinética conocida. Las mediciones muestran que, por mucha que sea la energía cinética, la velocidad no rebasa c. (Consúltese "Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons" de William Bertozzi, *American Journal of Physics*, mayo de 1964, p. 551.)

acuerdo con Galileo, los rayos gamma emitidos en dirección del movimiento de los piones, deberían tener una velocidad de $c + 0.99975c = 1.99975c$ en el marco de referencia del laboratorio. Según Einstein, su velocidad debía ser c. La velocidad medida era 2.9977×10^8 m/s, igual a c en 1 parte en 10^4, con lo cual se comprueba directamente el segundo postulado.

Los dos postulados tomados en conjunto tienen otra consecuencia: indican que *es imposible acelerar una partícula a una velocidad mayor que* c, *sin importar cuánta energía cinética le imprimamos.* También esta predicción puede verificarse en el laboratorio, y pone de manifiesto otra diferencia entre los postulados de la relatividad y los de la física clásica. Esta última no fija un límite máximo a la velocidad que un objeto puede alcanzar; la relatividad sí, esta última establece un tope que, conforme al primer postulado, ha de ser igual en todos los marcos de referencia.

En otro experimento llevado a cabo en 1964, se aceleraron electrones por una gran diferencia de voltaje (hasta 15 millones de volts), y su velocidad se determinó en forma directa. En la figura 20-3 vemos las velocidades medidas en función de la energía cinética que adquieren los electrones. Por mucho que se incremente el voltaje de aceleración, la velocidad nunca alcanza ni rebasa c. Una vez más, los experimentos a alta velocidad son incompatibles con las predicciones basadas en la cinemática de Galileo y de Newton, confirmando en cambio los postulados de la relatividad especial.

20-3 CONSECUENCIAS DE LOS POSTULADOS DE EINSTEIN

En la sección 20-1 se explicaron los problemas que plantea interpretar algunas mediciones del tiempo, de la longitud y de la velocidad fundadas en la física clásica. Veamos ahora cómo los postulados de Einstein permiten resolverlos.

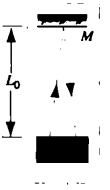


FIGURA 20-4. El reloj hace "tics" a intervalos Δt_0 determinados por el tiempo que un destello tarda en recorrer la distancia $2L_0$ del flash F al espejo M, y en regresar al detector D. (Se supone que la distancia lateral entre F y D es insignificante en comparación con L_0.)

La relatividad del tiempo

Consideremos a dos observadores: S se encuentra en reposo en el suelo, y S' está en un tren que avanza sobre una vía larga y recta con una velocidad constante u respecto a S. Los observadores llevan cronómetros idénticos que aparecen en la figura 20-4, y que consisten en una lámpara centelleante F conectada a un detector D y separada de un espejo M por una distancia L_0. La lámpara emite un destello que se dirige al espejo. Cuando la luz reflejada retorna a D, el reloj hace "tic" y se dispara otro destello. El intervalo temporal Δt_0 entre los "tics" es simplemente la distancia $2L_0$ recorrida por la luz, y dividida entre la velocidad de la luz c:

$$\Delta t_0 = 2L_0/c. \tag{20-1}$$

El intervalo Δt_0 es observado por S o por S', cuando el reloj se encuentra en reposo respecto al observador en cuestión.

A continuación examinaremos el caso en que un observador mira un reloj que lleva el otro. En la figura 20-5 se muestra una representación de la secuencia de eventos que S contempla* en el reloj de S' en el tren en movimiento. De acuerdo con S, el destello se emite en A, se refleja en B y se percibe en C. En este intervalo Δt, de acuerdo con S, el reloj recorrería hacia adelante una distancia horizontal de $u\Delta t$ desde el lugar donde se emitió el destello.

Para S, el haz luminoso cubre una distancia $2L$, donde $L = \sqrt{L_0^2 + (u\,\Delta t/2)^2}$, como se aprecia en la figura 20-5. El intervalo temporal medido por S para que la luz recorra esta distancia a una velocidad c (la misma medida por S') es

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2\sqrt{L_0^2 + (u\,\Delta t/2)^2}}{c}. \tag{20-2}$$

Sustituyendo L_0 en la ecuación 20-1 y resolviendo la ecuación 20-2 para Δt, se obtiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{20-3}$$

* Suponemos que S tiene una serie de relojes sincronizados, los cuales puede utilizar para tomar mediciones del tiempo en los puntos A, B y C. En la sección 20-5 se explica cómo establecer un sistema sincronizado de relojes.

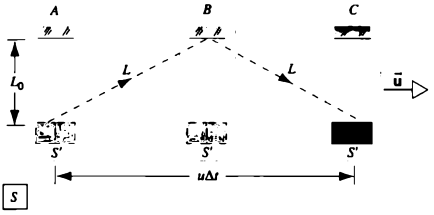


FIGURA 20-5. Dentro del marco de referencia de S, el reloj que S' lleva en el tren se mueve con una velocidad u. La línea punteada de longitud $2L$, indica la trayectoria del haz luminoso desde el punto de vista de S.

El factor en el denominador de la ecuación 20-3 siempre es menor o igual a 1, por lo cual $\Delta t \geq \Delta t_0$. En otras palabras, el observador respecto a quien el reloj se mueve (observador S), mide un intervalo mayor entre los "tics". A este efecto se le conoce como *dilatación del tiempo*. Se da el nombre de *tiempo propio*, al intervalo temporal Δt_0 medido por un observador (S' en este caso) respecto al cual el reloj se halla en reposo. El intervalo de momento apropiado entre los eventos es el mínimo existente entre ellos que un observador puede medir; todos los que se mueven respecto al reloj miden intervalos *más largos*.

La ecuación 20-3 nos permite comprender el problema de los experimentos dedicados al decaimiento de piones, explicados en la sección 20-1. Un pión en reposo se desintegra en un intervalo de 26.0 ns, que es el intervalo del tiempo propio y se denota como Δt_0. (Efectivamente, el pión es un reloj, y el intervalo entre su formación y su decaimiento puede considerarse un "tic" del reloj.) Un observador en el laboratorio, respecto al cual el pión se mueve a una velocidad de $u = 0.913c$, medirá un intervalo temporal de

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{26.0 \text{ ns}}{\sqrt{1 - (0.913)^2}} = 63.7 \text{ ns},$$

lo cual concuerda con el valor medido.

La ecuación 20-3, que se deduce de los postulados de Einstein, indica la relación entre los intervalos temporales conforme a la relatividad especial para observadores en movimiento relativo. Nótese que el factor en el denominador, difiere mucho de 1 sólo con velocidades que se acercan a la de la luz. Inclusive a una velocidad de $0.1c$, la ecuación 20-3 nos da $\Delta t = 1.005\Delta t_0$. En velocidades ordinarias, podemos hacer que $\Delta t = \Delta t_0$ alcance una excelente precisión. Es el resultado clásico (que se obtiene directamente de la ecuación 20-3 en el límite $u << c$) y concuerda con la experiencia del "sentido común".

La ecuación 20-3 es válida en cualquier dirección del movimiento relativo de S y S'. También lo es con cualquier tipo de reloj y no sólo con el especial que utilizamos en su obtención. Ha sido verificada experimentalmente no sólo con partículas elementales en decaimiento (el pión entre ellas) que se desplazan a gran velocidad, sino también con relojes atómicos precisos que se mueven uno respecto a otro con velocidades ordinarias (aviones de propulsión). Se prevé que incluso los relojes biológicos, como el del envejecimiento humano, se vean afectados por la dilatación del tiempo. Más adelante examinaremos en este capítulo un aspecto interesante de este efecto, denominado *paradoja de los gemelos*.

La relatividad de la longitud

En seguida vamos a analizar el efecto que los postulados de Einstein tienen en la medición de los intervalos de longitud. Supóngase que S' gira el reloj en el tren, de modo que la luz siga la dirección del movimiento del tren. La figura 20-6 contiene la secuencia de eventos observados por S para el reloj en movimiento. Según él, la longitud del reloj es L; como veremos, ésta difiere de la longitud L_0 medida por S', respecto a quien el reloj se halla en reposo.

Un destello de luz se emite en la posición A de la figura 20-6, y llega al espejo (posición B) un tiempo Δt_1 más tarde. La distancia total recorrida por la luz en este intervalo es $c\,\Delta t_1$, que también puede escribirse como la longitud L del reloj, más la distancia adicional $u\Delta t_1$ que por el movimiento del tren el espejo recorre hacia adelante en este tiempo. Es decir,

$$c\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \tag{20-4}$$

Durante el viaje de regreso del espejo al detector (posición C en la figura 20-6) que dura un intervalo Δt_2 según S, la luz recorre una distancia $c\,\Delta t_2$, que ha de ser igual a la longitud L menos la distancia $u\,\Delta t_2$ que el tren avanza durante este intervalo, es decir,

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \tag{20-5}$$

Luego de resolver las ecuaciones 20-4 y 20-5 con Δt_1 y Δt_2, sumamos para calcular el intervalo temporal total Δt y obtenemos

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - u} + \frac{L}{c + u}$$

$$= \frac{2L}{c}\frac{1}{1 - u^2/c^2}. \tag{20-6}$$

A partir de la ecuación 20-3, si hacemos $\Delta t_0 = 2L_0/c$,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{20-7}$$

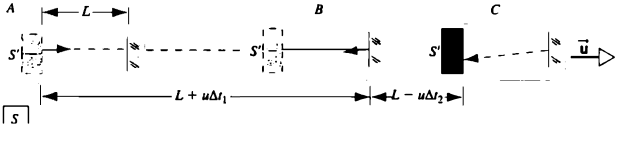


FIGURA 20-6. Aquí el reloj que S' lleva en el tren, emite su destello en la dirección que sigue el tren. Por razones de claridad, la figura en C ha sido desplazada hacia la derecha.

Al hacer las ecuaciones 20-6 y 20-7 iguales entre sí y al resolver, obtenemos

$$L = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2}. \qquad (20\text{-}8)$$

La ecuación 20-8 resume el efecto llamado *contracción de la longitud*. La longitud L_0 medida por un observador (digamos por S') que esté en reposo respecto al objeto que habrá de medirse, recibe el nombre de *longitud en reposo* (conocida también como *longitud propia*, por analogía con el tiempo propio). Todos los observadores en movimiento respecto a S', miden una longitud más corta, pero sólo en las dimensiones que siguen la dirección del movimiento; no se ven afectadas las mediciones de longitud transversales a la dirección del movimiento. El movimiento relativo no influye en la longitud L_0 en la situación representada en la figura 20-5.

La ecuación 20-8 sirve para resolver los problemas del concepto clásico de la longitud mencionados en la sección 20-1. Los dos marcadores colocados en el laboratorio en los sitios en que se forma y decae el pión, están separados por una distancia de 17.4 m. Puesto que se encuentran en reposo en el laboratorio, la distancia entre ellos es una longitud de reposo. Para un observador que se desplace junto con el pion, todo el laboratorio está en movimiento en $u = 0.913c$, y conforme a la ecuación 20-8 se mide la distancia entre los marcadores, descubriéndose que tiene una longitud contraída

$$L = (17.4\text{ m})\sqrt{1 - (0.913)^2} = 7.1\text{ m},$$

compatible con lo dicho en la sección 20-1.

En circunstancias normales ($u << c$) y los efectos de la contracción de longitud, resultan demasiado pequeños para ser observados. Por ejemplo, según un observador, un cohete de 100 m de largo lanzado de la Tierra con una velocidad lo suficientemente grande para escapar de la gravedad ($u = 11.2$ km/s), al ser medido se descubriría que se contrae apenas ¡dos diámetros atómicos!

La contracción de la longitud revela que los objetos en movimiento tienen una longitud más corta, que cuando se encuentran en reposo. No se da un acortamiento real, sino tan sólo una diferencia en los resultados medidos, del mismo modo que dos observadores en movimiento relativo miden una frecuencia distinta con la misma fuente de sonido (el efecto Doppler).

La adición relativista de velocidades

Modifiquemos ahora nuestro cronómetro, como se indica en la figura 20-7. La linterna F se coloca en el extremo del espejo y se reemplaza por un aparato P que emite partículas con una velocidad v_0, medida por un observador en reposo respecto a él.

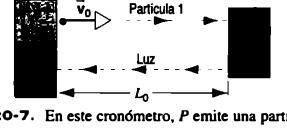


FIGURA 20-7. En este cronómetro, P emite una partícula a una velocidad v_0. Cuando la partícula llega a F, provoca la emisión de un destello que se dirige al detector D.

Se hace centellear la linterna cuando se golpea con una partícula, y el haz luminoso regresa al detector D. Así, el intervalo temporal Δt_0 medido por un observador (digamos, S') que está en reposo respecto al aparato, consta de dos partes: una debida a la partícula que recorre la distancia L_0 con una velocidad v_0, y otra originada por el haz luminoso que cubre la misma distancia a una velocidad c:

$$\Delta t_0 = L_0/v_0 + L_0/c. \qquad (20\text{-}9)$$

La secuencia de eventos observados por S mientras que S' lleva el cronómetro en el tren, es idéntica a la de la figura 20-6. La partícula emitida que va a una velocidad v según S, llega a F tras un intervalo Δt_1, durante el cual recorre una distancia $v\,\Delta t_1$, igual a la longitud (contraída) L, más la distancia adicional $u\,\Delta t_1$ recorrida por el tren en ese intervalo:

$$v\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \qquad (20\text{-}10)$$

En el intervalo Δt_2, el haz luminoso recorre una distancia $c\,\Delta t_2$ igual a la longitud L, menos la distancia $u\,\Delta t_2$ que avanza el tren en dicho intervalo:

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \qquad (20\text{-}11)$$

Al resolver las ecuaciones 20-10 y 20-11 para Δt_1 y Δt_2, podemos calcular el intervalo temporal total $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ entre los "tics" de acuerdo con S; después ese resultado, junto con la ecuación 20-9, se sustituye e introduce en la ecuación 20-3, y nos da, luego de utilizar la ecuación 20-8 para relacionar, (L_0 y L):

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2}. \qquad (20\text{-}12)$$

La ecuación 20-12 incluye una forma de la ley de adición de velocidades consistente con los postulados de Einstein; ahora nos interesa únicamente sumar las velocidades que siguen la dirección del movimiento relativo (la dirección de $\vec{u}$). Más adelante, en este capítulo demostraremos resultados más generales.

De acuerdo con Galileo y Newton, un proyectil disparado hacia adelante con una velocidad v_0 en un tren que avanza a una velocidad u, debería tener una velocidad $v_0 + u$ respecto a un observador situado en el suelo. Ello permite claramente alcanzar velocidades mayores que c. La diferencia entre el resultado clásico y el relativista, es el denominador de la ecuación 20-12, el cual puede ser reemplazado por 1 en circunstancias normales cuando las velocidades sean mucho menores que c. Este factor tan importante como veremos en el problema resuelto 20-2, impide que la velocidad relativa supere alguna vez c.

Si el proyectil es un haz luminoso ($v_0 = c$, según S'), la ecuación 20-12 de inmediato da $v = c$ para todos los observadores, sin importar su velocidad respecto a S' (esto es, independientemente de u). Por tanto, la ecuación 20-12 es consistente con el segundo postulado de Einstein.

PROBLEMA RESUELTO 20-1. Los muones son partículas elementales con un tiempo de vida (propio) de 2.2 μs. Se producen con velocidades muy altas en la atmósfera superior cuando los rayos cósmicos (partículas de gran energía provenientes del espacio) chocan

con moléculas de aire. Suponga que la altura L_0 de la atmósfera (su longitud en reposo) sea 100 km dentro del marco de referencia de la Tierra, y calcule la velocidad mínima que les permitirá sobrevivir un viaje a la superficie de la Tierra. Resuelva el problema en dos formas: *a*) en el marco de referencia de la Tierra, y *b*) en el marco de referencia de un muon.

Solución *a*) En el marco de referencia de la Tierra (Fig. 20-8*a*), el decaimiento del muon en movimiento se retrasa por efecto de la dilatación del tiempo. Si se mueve con una velocidad muy cercana a c, el tiempo que tarda en llegar de la parte superior de la atmósfera a la Tierra es

$$\Delta t = \frac{L_0}{c} = \frac{100\text{ km}}{3.00 \times 10^8\text{ m/s}} = 333\ \mu\text{s}.$$

El muon debe sobrevivir por lo menos 333 μs en el marco de referencia de la Tierra. A continuación calculamos la velocidad que dilata su tiempo de vida de su valor propio Δt_0 (= 2.2 μs) a este valor, conforme a la fórmula de dilatación del tiempo (Ec. 20-3):

$$333\ \mu\text{s} = \frac{2.2\ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Resolviendo, obtenemos

$$u = 0.999978c.$$

b) En el marco de referencia del muon, la atmósfera pasa delante a gran velocidad. En este marco, toda ella debe hacerlo en un tiempo igual al tiempo de vida (propio) del muon, de modo que la altura de la atmósfera no podrá ser mayor que

$$L = c\,\Delta t_0 = (3.00 \times 10^8\text{ m/s})(2.2 \times 10^{-6}\text{ s}) = 660\text{ m}.$$

Ésta es por supuesto la longitud contraída medida en el marco de referencia del muon (véase Fig. 20-8*b*). La relación entre la longitud en reposo L_0 (= 100 km), medida en el marco de referencia de la Tierra, y la longitud contraída, medida en el marco de referencia del muon, está dada por la ecuación 20-8 y, en consecuencia,

$$660\text{ m} = (100\text{ km})\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Al resolver para la velocidad u, obtendremos el mismo resultado dado en la parte *a*).

Nótese que la *dilatación del tiempo* dentro de un marco de referencia, puede observarse como *contracción de la longitud* dentro de otro. Tal interrelación del tiempo y del espacio es parte esencial de la relatividad especial.

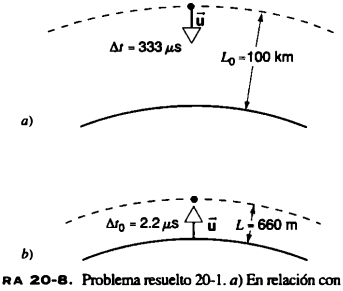


FIGURA 20-8. Problema resuelto 20-1. *a*) En relación con el marco de la Tierra, un muon tarda 333 μs en recorrer una distancia de 100 km a través de la atmósfera. *b*) En relación con el marco del muon, la atmósfera está apenas a 660 m de altura y el viaje tarda 2.2 μs.

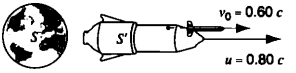


FIGURA 20-9. Problema resuelto 20-2. Un nave espacial se aleja de la Tierra con una velocidad de 0.80c. Un observador S' en la nave dispara un misil, y al medir su velocidad descubre que es 0.60c respecto a la nave.

PROBLEMA RESUELTO 20-2. Una nave espacial se aleja de la Tierra a una velocidad de 0.80c cuando dispara un misil paralelamente a la dirección en que avanza. El misil se desplaza con una velocidad de 0.60c respecto a la nave (Fig. 20-9). ¿Qué velocidad deberá tener el misil medida por un observador desde la Tierra? Compare su respuesta con las predicciones de la cinemática galileana.

Solución Este problema se parece al del observador y del tren. Aquí S' está en la nave y S en la Tierra; S' se mueve con una velocidad de u = 0.80c respecto a S. El misil avanza a una velocidad v_0 = 0.60c respecto a S', y nosotros buscamos su velocidad relativa S. Usando la ecuación 20-12 obtenemos

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2} = \frac{0.60c + 0.80c}{1 + (0.60c)(0.80c)/c^2}$$

$$= \frac{1.40c}{1.48} = 0.95c.$$

Conforme a la cinemática clásica (el numerador de la ecuación 20-12), un observador situado en la Tierra verá el misil moverse a 0.60c + 0.80c = 1.40c, rebasando así la rapidez máxima relativa de c que permite la relatividad. El lector puede ver cómo la ecuación 20-12 impone este límite. Aun cuando v_0 fuera 0.9999$\cdots c$, y u fuera 0.9999$\cdots c$, la velocidad relativa v medida por S seguirá siendo menor que c.

20-4 LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Los postulados de Einstein constituyen un primer paso en la resolución de los problemas señalados en la sección 20-1, pero hace falta una base matemática más formal para darles toda su fuerza y calcular los resultados previstos de una gama más amplia de procesos físicos. Por ejemplo, quizá queramos saber cómo los resultados de las mediciones de una energía o de la fuerza de un campo magnético difieren para observadores que se hallan en movimiento relativo.

Necesitamos una serie de relaciones denominadas *ecuaciones de transformación* que asocien las observaciones de un solo evento por parte de dos personas. Las ecuaciones de transformación tienen tres elementos: 1) Un observador S en reposo dentro de un marco inercial, 2) Otro observador S' en reposo dentro de otro marco inercial que se halla en movimiento con una velocidad constante respecto a S, y 3) Un evento individual que es observado *tanto* por S como por S'. De acuerdo con ellos, el evento tiene lugar en determinado conjunto de coordenadas en el espacio tridimensional y en un momento particular. Si conocemos la velocidad relativa de S y de S', será necesario calcular las coordenadas x', y', z', t' de un evento observado por S' desde

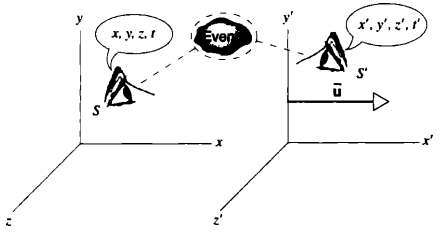


FIGURA 20-10. Dos observadores, cuyos marcos de referencia están representados por S y S', ven el mismo evento. S' se mueve respecto a S con una velocidad $\vec{u}$ en la dirección común xx'. S mide las coordenadas x, y, z, t del evento, mientras que S' *mide las coordenadas* x', y', z', t' del mismo evento.

las coordenadas x, y, z, t del *mismo evento* según S. Este problema lo simplificamos un poco sin perder generalidad, con sólo decidir que los ejes x y x' sigan la dirección de $\vec{u}$ (véase Fig. 20-10).

El problema anterior puede resolverse empleando la cinemática clásica de Galileo, y entonces las ecuaciones *de la transformación galileana* son

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{20-13}$$

Las tres primeras ecuaciones, corresponden a la experiencia del "sentido común". Por ejemplo, supóngase que S se halla en reposo en el suelo, y que mide la ubicación x de un poste de cerca. S', quien viaja en un automóvil que va a una velocidad de u respecto a S, encuentra efectivamente el poste en el lugar $x' = x - ut$ (Fig. 20-11). La cuarta ecuación, $t' = t$, se dio simplemente por sentada en la física clásica (como lo ejemplifica la coordenada temporal universal de Newton).

A las relaciones relativistas que buscamos, se les conoce como *ecuaciones de la transformación de Lorentz*. Se llaman así en honor del físico holandés H. A. Lorentz, quien las propuso (antes de Einstein) por una razón totalmente diferente, sin percatarse de sus consecuencias en la naturaleza del tiempo y espacio. Las ecuaciones pueden derivarse directamente de los postulados de Einstein si recurrimos a ciertas suposiciones razonables concernientes a la simetría y a la homogeneidad del espacio y tiempo. A manera de ejemplo de esta última propiedad, suponga que un observador S mide la longitud de una varilla sostenida por el observador S' dentro de otro marco inercial. El resultado de la medición de S no debería depender de donde se halle S' dentro del marco, ni de la hora del día en que efectúa la medición.

Las ecuaciones de la transformación de Lorentz derivadas de las suposiciones anteriores, son las siguientes:*

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2). \end{aligned} \tag{20-14}$$

Nótese que un objeto situado inicialmente en el origen de acuerdo con S (esto es, $x = 0$ en $t = 0$), también se encuentra situado inicialmente en el origen según S' (es decir, $x' = 0$ y $t' = 0$).

En las ecuaciones anteriores utilizamos el *factor de Lorentz* γ, definido como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{20-15}$$

En las ecuaciones de la relatividad, también conviene introducir el *parámetro de velocidad* β, definido como la razón entre la velocidad relativa u de los dos sistemas coordenados y la de la luz:

$$\beta = u/c. \tag{20-16}$$

En la tabla 20-1 se dan algunos valores muestra de β y γ, y en la figura 20-12 se indican las relaciones entre β y γ. El intervalo de γ es de 1 (con baja velocidad cuando $u << c$ o $\beta << 1$) a ∞ (con alta velocidad cuando $u \to c$ o $\beta \to 1$).

Nótese que las ecuaciones de la transformación de Lorentz se reducen a las de la transformación galileana (Ecs. 20-13) cuando $u << c$. Una forma fácil de demostrar esto, es hacer que $c \to \infty$, de modo que $u/c \to 0$. En este caso, como debería probarlo, las ecuaciones relativistas 20-14 se reducen directamente a las ecuaciones clásicas 20-13. Todos los resultados clásicos derivados de los capítulos anteriores concuerdan con el

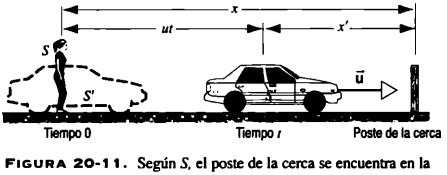


FIGURA 20-11. Según S, el poste de la cerca se encuentra en la coordenada x. Según S', que está en la coordenada ut respecto a S en el tiempo t, el poste se halla en la coordenada $x' = x - ut$. Nótese que los orígenes de S y de S' coinciden en $t = 0$.

* Véase la obtención de estas ecuaciones en *Basic Concepts in Relativity* de Robert Resnick y David Halliday (Macmillan, 1992).

TABLA 20-1 Valores muestra del parámetro de velocidad y el factor de Lorentz

β	γ	β	γ
0.00	1.000	0.90	2.29
0.10	1.005	0.99	7.09
0.30	1.048	0.999	22.4
0.60	1.25	0.9999	70.7

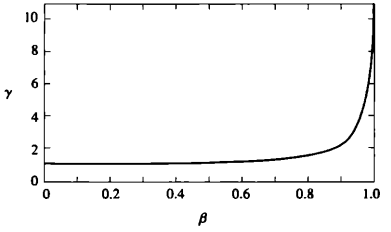


FIGURA 20-12. El factor de Lorentz γ en función del parámetro de velocidad β.

experimento cuando $u << c$. Sólo con grandes velocidades hay que tener en cuenta los efectos relativistas.

Las ecuaciones 20-14 nos permiten encontrar las coordenadas espaciales y temporales en S', si conocemos las de S. Pero suponga que queremos conocer las coordenadas en S, si conocemos las de S'. Desde el punto de vista de S' en la figura 20-10, S parece moverse en la dirección *negativa* x (o x'). Para obtener la *transformación inversa de Lorentz*, basta cambiar las coordenadas con prima y las sin prima en las ecuaciones 20-14 y sustituir $-u$ por u. Esto nos da

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma(t' + ux'/c^2). \end{aligned} \tag{20-17}$$

Podemos aplicar otro método de invertir la transformación de Lorentz (véase Ej. 14), resolviendo algebraicamente las ecuaciones 20-14 para x y t (tratando la primera y última ecuaciones como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas). Al hacerlo, obtenemos exactamente la transformación inversa dada por las ecuaciones 20-17 que conseguimos directamente con un argumento de simetría.

En la tabla 20-2 se resumen las ecuaciones de la transformación de Lorentz cuando la velocidad relativa entre los sistemas coordenados sigue la dirección común xx'. Se presentan las ecuaciones en cuatro formas: la transformación de Lorentz (Ecs. 20-14), la transformación inversa de Lorentz (Ecs. 20-17), y ambas transformaciones correspondientes de *intervalo*, de gran utilidad cuando se quiere transformar no una coordenada, sino un intervalo espacial o temporal, como $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ (la distancia entre dos eventos medidos por S'), o bien, $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ (el tiempo que transcurre entre dos eventos medido por S').

PROBLEMA RESUELTO 20-3. En un marco inercial S, una luz roja y una azul se hallan a una distancia $\Delta x = 2.45$ km; la primera tiene el valor mayor de x. La luz azul relampaguea, y 5.35 μs más tarde la luz roja también. El marco S' sigue la dirección de x creciente con una velocidad $u = 0.855c$. ¿Qué distancia hay entre los dos destellos y el tiempo entre ellos medidos en S'?

Solución El parámetro de Lorentz es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.855)^2}} = 1.928.$$

Los intervalos en S son $\Delta x = 2{,}450$ m y $\Delta t = 5.35 \times 10^{-6}$ s. A partir de la tabla 20-2, tenemos las transformaciones de los intervalos

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\,\Delta t) \\ &= 1.928[2{,}450 \text{ m} - (0.855)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(5.35 \times 10^{-6} \text{ s})] \\ &= 2{,}078 \text{ m} = 2.08 \text{ km} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2) \\ &= 1.928[5.35 \times 10^{-6} \text{ s} - (0.855)(2{,}450 \text{ m})/(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})] \\ &= -3.147 \times 10^{-6} \text{ s} = -3.15\ \mu\text{s}. \end{aligned}$$

En S', la luz roja se halla en la coordenada más lejana, pero la distancia es 2.08 km y no 2.45 km. Además, en S' la luz roja relampaguea *antes* que la verde (a diferencia de lo que se observó en S); el tiempo entre los centelleos es 3.15 μs según S'.

20-5 MEDICIÓN DE LAS COORDENADAS ESPACIO-TIEMPO DE UN EVENTO

Hasta ahora poco hemos dicho de cómo los observadores S y S' miden las coordenadas x, y, z, t y x', y', z', t' de un evento (como en el caso de los destellos luminosos del problema resuelto 20-3). El procedimiento que a continuación describimos, constituye el fundamento conceptual sobre el que descasan los actuales métodos de laboratorio.

Suponemos que S cuenta con un numeroso equipo de asistentes que le ayudan a establecer un sistema coordenado. Todos ellos reciben un reloj y una varilla medidora de cierta

TABLA 20-2 Ecuaciones de la transformación de Lorentz[a]

Transforamación de Lorentz	*Transformación inversa*	*Transformación de intervalos*	*Transformación inversa de intervalos*
$x' = \gamma(x - ut)$	$x = \gamma(x' + ut')$	$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t)$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\,\Delta t')$
$y' = y$	$y = y'$	$\Delta y' = \Delta y$	$\Delta y = \Delta y'$
$z' = z$	$z = z'$	$\Delta z' = \Delta z$	$\Delta z = \Delta z'$
$t' = \gamma(t - ux/c^2)$	$t = \gamma(t' + ux'/c^2)$	$\Delta t' = \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2)$	$\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2)$

[a]Aplique las ecuaciones anteriores sólo en el caso de movimiento relativo en la dirección xx'. El factor de Lorentz es $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

longitud. Por ejemplo, tres tienen varillas de 1 m de largo. Se les ordena colocar cada una en uno de los tres ejes coordenados, y esperar en la posición determinada por el extremo de la varilla hasta que vean un destello en el origen. Entonces pondrán su reloj en la lectura preestablecida de 3.33×10^{-9} s (3.33 ns, tiempo necesario para que la luz recorra la distancia de 1 m del origen al sitio del asistente). A otros tres asistentes, que también reciben uno de los ejes coordenados, se les entregan varillas de 2 m de longitud, y se les indica que al ver el destello pongan su reloj en la hora preestablecida de 6.67 ns (tiempo en que la luz cubre 2 m). Se envía cada asistente a su puesto con una varilla de longitud L y con un reloj puesto en $t = L/c$.

Cuando todos los asistentes se encuentran en su puesto, S emite un destello en el origen y al mismo tiempo pone el reloj en el origen, preestablecido en cero. Al llegar la señal luminosa a los otros relojes, cada uno se pone por turnos en la lectura preestablecida. Así, el reloj en el eje x con $x = 1$ m se pone en la lectura actual de 3.33 ns, cuando el reloj en el origen indica 3.33 ns; el reloj en el eje x con $x = 2$ m comienza en la lectura preestablecida de 6.67 ns cuando el reloj en el origen y el reloj en $x = 1$ indican 6.67 ns, y así sucesivamente con todos los relojes del sistema coordenado. El sistema resultante de varillas y relojes se describe gráficamente en la figura 20-13.

Supóngase que S quiere presentar en un diagrama el avance de una partícula al desplazarse ésta a través del sistema coordenado. Lo único que debe hacer junto con los asistentes, es vigilarla mientras se mueve y, al pasar cada punto, anotará la coordenada y la lectura en el reloj de ella.

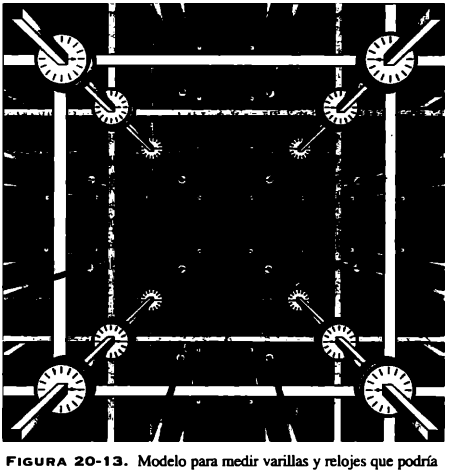


FIGURA 20-13. Modelo para medir varillas y relojes que podría emplear un observador dentro de un marco de referencia particular para determinar las coordenadas de tiempo-espacio de un evento.

Desde luego, esta calibración es válida sólo para el observador S. El observador S' y el resto de los observadores inerciales deberán realizar un procedimiento afín para definir un sistema coordenado y sincronizar sus relojes. Así, las varillas medidoras y los relojes de cada uno (que naturalmente están en reposo dentro de su marco) son exclusivos de ese marco inercial, y no dependen ni de las varillas ni de los relojes de los observadores en otros marcos.

Este procedimiento indica que el espacio y el tiempo no son coordenadas independientes, sino que la descripción de un evento ha de incluir sus coordenadas en ambos. (Dicho de otra manera, no podemos utilizar un reloj en un lugar para registrar el paso de una partícula por otro lugar.) Por tal razón, la relatividad especial suele formularse en función de las *coordenadas combinadas de espacio-tiempo x, y, z, t*. En ella, el espacio y el tiempo se tratan como coordenadas equivalentes.

20-6 LA TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES

En esta sección utilizaremos las ecuaciones de la transformación de Lorentz para relacionar la velocidad $\vec{v}$ de una partícula medida por un observador en el marco S, con su velocidad $\vec{v}'$, medida por un observador en el marco S', quien a su vez se mueve con una velocidad $\vec{u}$ respecto a S. En esta exposición hay que tener presentes los significados de esas tres velocidades.

Supóngase que el observador S descubre que la partícula se dirige de las coordenadas x_1, y_1, z_1, t_1 a x_2, y_2, z_2, t_2. Por su parte, el observador S' registra como x_1', y_1', z_1', t_1' y x_2', y_2', z_2', t_2', las observaciones de las coordenadas inicial y final de la misma partícula.

Calculemos v_x' $(= \Delta x'/\Delta t')$, el componente x' de la velocidad medida por S'. De la tabla 20-2 obtenemos las ecuaciones de transformación para los intervalos $\Delta x'$ y $\Delta t'$. Al dividir las dos obtenemos

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\,\Delta t)}{\gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2)} = \frac{\Delta x/\Delta t - u}{1 - u(\Delta x/\Delta t)/c^2},$$

o, al reemplazar $\Delta x/\Delta t$ por v_x,

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}. \tag{20-18}$$

En forma similar, conseguimos las ecuaciones de transformación para los componentes y y z de las velocidades:

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \quad \text{y} \quad v_z' = \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}. \tag{20-19}$$

Nótese que $v_y' \neq v_y$, aunque $\Delta y = \Delta y'$, porque $\Delta t \neq \Delta t'$. Consideraciones semejantes se aplican a v_z'. Éste es otro ejemplo de la diferencia entre la forma en que las transformaciones de Galileo y de Lorentz se ocupan de la coordenada temporal. Nótese que los denominadores de las tres ecuaciones contienen el factor v_x.

TABLA 20-3 Transformación de las velocidades de Lorentz

Transformación de velocidades	*Transformación inversa de velocidades*
$v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$	$v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}$
$v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$	$v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}$
$v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$	$v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}$

Las ecuaciones 20-18 y 20-19 dan la *transformación de velocidades de Lorentz.* Se parecen a las de la transformación de coordenadas de Lorentz: relacionan las observaciones en un marco de coordenadas con las de otro. En la tabla 20-3 se sintetizan esas ecuaciones, junto con la correspondiente transformación inversa de velocidades. Adviértase que la ecuación de la transformación inversa para v_x es idéntica a la ecuación 20-12, que obtuvimos de manera muy distinta. En esta última, la velocidad v_0 es igual a la velocidad v'_x medida por S'.

Examinemos ahora las ecuaciones 20-18 y 20-19 en el límite no relativista. ¿Se reducen a la transformación clásica de Galileo cuando $u << c$ (o, en forma equivalente, cuando $c \rightarrow \infty$)? En este caso las ecuaciones 20-18 y 20-19 se reducen a

$$v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad \text{y} \quad v'_z = v_z, \qquad (20\text{-}20)$$

que efectivamente son los resultados galileanos obtenidos mediante la ecuación 4-32 o derivando las ecuaciones 20-13, las ecuaciones de las transformaciones de coordenadas de Galileo.

A continuación demostraremos directamente que la transformación de velocidades de Lorentz, arroja el resultado exigido por el segundo postulado de Einstein (la constancia de la velocidad de la luz): una velocidad de c medida por un observador, debe también ser medida como c por otro. Supóngase que el evento común a observar por S y S', es el paso de un haz luminoso por la dirección x. El observador S mide $v_x = c$, y $v_y = v_z = 0$. ¿Qué velocidad mide el observador S'? Por medio de las ecuaciones 20-18 y 20-19 calculamos los componentes de la velocidad, que según la medición S' son

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{c - u}{1 - uc/c^2} = \frac{c - u}{(c - u)/c} = c,$$

$$v'_y = v'_z = 0.$$

Nótese que el resultado anterior se obtiene *independientemente de la velocidad relativa u entre S y S'*. Una velocidad c medida dentro de un marco de referencia inercial, da una velocidad de c medida en *todos* los marcos. Así, la velocidad de la luz es efectivamente igual para todos los observadores. La misma conclusión se aplica a cualquier dirección en que se propague el haz luminoso (véase Ej. 15).

PROBLEMA RESUELTO 20-4. Una partícula acelera del reposo en el laboratorio hasta alcanzar una velocidad de 0.60c. Vista desde un marco que se mueve con ella a una velocidad de 0.60c respecto al laboratorio, recibe entonces un incremento adicional de velocidad de 0.60c. Calcule la velocidad final de la partícula medida en el laboratorio.

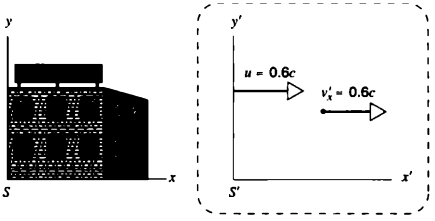


FIGURA 20-14. Problema resuelto 20-4. S', marco de referencia de la partícula tras la primera aceleración, se desplaza con una velocidad $u = 0.60c$ respecto al laboratorio (marco S). En relación con S', la partícula se mueve con una velocidad $v'_x = 0.60c$ después de la segunda aceleración.

Solución Una vez más, el problema se convierte en una aplicación directa de la transformación de velocidades de Lorentz, siempre y cuando sean especificados claramente los marcos de referencia S y S', así como el sistema que habrá de observarse. Claro que la partícula es el sistema; si buscamos su velocidad medida en el laboratorio, en forma natural lo asociaremos al marco S. El marco S' es entonces el de referencia inercial ocupado por la partícula después de la primera aceleración y antes de la segunda (véase Fig. 20-14). Respecto a este marco, la velocidad de la partícula tras la segunda aceleración es $v'_x = 0.60c$. La velocidad del marco S' respecto al marco S es $u = 0.60c$. Conocemos v'_x y u, y buscamos v_x que está dada por la transformación inversa de las velocidades en la tabla 20-3:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0.60c + 0.60c}{1 + (0.60c)(0.60c)/c^2} = \frac{1.20c}{1.36} = 0.88c.$$

La velocidad es menor que c, lo cual contradice la predicción de la transformación galileana que da $v_x = 1.20c$.

Supóngase que el marco S' es el de la partícula después de la segunda aceleración, de manera que $u = 0.88c$ respecto al marco original S (el laboratorio). Supongamos ahora una *tercera* aceleración, así que respecto al nuevo marco S', la partícula vuelve a moverse con una velocidad $v'_x = 0.60c$. Al repetir el procedimiento anterior, deberá demostrar que un observador en el marco del laboratorio (S) medirá la velocidad de $v'_x = 0.97c$ en este caso.

Sin importar cuántas veces aceleremos la partícula dentro de un marco de referencia que se mueve con la partícula, su velocidad medida en el marco original del laboratorio (o en cualquier otro) nunca superará c.

20-7 CONSECUENCIAS DE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Ya hemos demostrado que algunas consecuencias inesperadas se producen al aplicar los postulados de Einstein a situaciones físicas. Ahora vamos a servirnos de la base más matemática de la transformación de Lorentz para probar la posibilidad de obtener esas mismas consecuencias y otras.

La relatividad del tiempo

En la sección 20-3 vimos que el efecto de la dilatación del tiempo se logra al aplicar los postulados de Einstein a las mediciones de los intervalos temporales por parte de dos observadores en movimiento uno respecto a otro. La figura 20-15 ofrece una perspectiva diferente del efecto. El reloj C' está en reposo dentro del marco de S', quien se desplaza a una velocidad u en relación con S. S' mide el intervalo temporal $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, donde la manecilla del reloj se mueve entre dos marcas, pasando la primera en el tiempo t'_1 y la segunda en el tiempo t'_2.

La manecilla del reloj C' que pasa las dos marcas, puede considerarse como dos eventos, que tienen lugar en el mismo sitio x'_0 según S' (porque el reloj C' se halla en reposo dentro de ese marco). No obstante, S (cuyo marco de referencia contiene una serie estacionaria de relojes sincronizados como el descrito en la sección 20-5) observa la manecilla de ese reloj pasar la primera marca en el sitio x_1 (donde el reloj estacionario local indica el tiempo t_1), y pasar la segunda marca en el sitio x_2 (donde *otro* reloj estacionario indica el tiempo t_2). Podemos encontrar la relación entre los intervalos temporales Δt y $\Delta t'$ directamente de la transformación inversa de Lorentz. Con base en la tabla 20-2 tenemos

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2). \qquad (20\text{-}21)$$

Esta expresión general contiene el intervalo temporal Δt medido por S, correspondiente al intervalo $\Delta t'$ medido por S' para los eventos que están separados por una distancia $\Delta x'$. De acuerdo con S', respecto a quien el reloj C' está en reposo, los dos eventos (la manecilla que pasa las dos marcas) tienen lugar en el mismo sitio x'_0, así que $\Delta x' = 0$. Dado que S' se halla en reposo respecto al reloj C', el intervalo temporal $\Delta t'$ medido por S', es el intervalo del tiempo correcto que representamos como Δt_0. Al sustituir $\Delta x' = 0$ y $\Delta t' = \Delta t_0$, e introducirlas en la ecuación 20-21, obtenemos

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

expresión idéntica a la ecuación 20-3, la de dilatación del tiempo.

El efecto de dilatación del tiempo es completamente simétrico. Si S' observa un reloj C en reposo en S, llegará a la conclusión de que el reloj está atrasado. Los observadores piensan que el reloj del otro está atrasado respecto a los que se encuentran en reposo dentro de su marco de referencia. La dilatación del tiempo suele sintetizarse con la frase "los relojes en movimiento están atrasados". Conviene recordarla, pero con un poco de cautela. La frase indica lo siguiente: un reloj que se mueve en relación con un marco con una serie de relojes sincronizados se atrasará *cuando sea cronometrado por ellos.* En otras palabras, sólo en el sentido de comparar un solo reloj en movimiento con dos relojes independientes sincronizados y estacionarios, podemos decir que "los relojes en movimiento están atrasados".

Examinemos otras tres consecuencias de la transformación de Lorentz que se relacionan con la medición del tiempo:

1. *La relatividad de la simultaneidad.* Supóngase que S' tiene dos relojes en reposo, situados en x'_1 y x'_2 y separados por el intervalo $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Un destello de luz emitido desde un punto intermedio entre ellos llega a los dos al mismo tiempo, según S' (Fig. 20-16*a*). En otras palabras, una medición suya del intervalo entre la llegada de las señales luminosas a los dos relojes da $\Delta t' = 0$. Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de S respecto a quien el marco de S' (incluidos los relojes) se mueve con una velocidad u (Fig. 20-16*b*). Desde luego, la señal luminosa llega al reloj 1 antes que al reloj 2; por tanto, su arribo a los lugares de los dos relojes *no* es simultáneo para S. Podemos, pues, llegar a la siguiente conclusión:

> *Si dos observadores están en movimiento relativo, en general no coinciden si dos eventos en lugares diferentes son simultáneos. Si para uno son simultáneos, para el otro no.*

La conclusión anterior se deduce directamente de la ecuación 20-21: si $\Delta t' = 0$ y $\Delta x' \neq 0$, entonces $\Delta t \neq 0$. Nótese que esto se da sólo cuando dos eventos acontecen en lugares distintos según S'. Cuando tienen lugar en el mismo sitio y son simultáneos para S', también lo serán para S.

2. *El cambio de Doppler.* En la sección 19-9 estudiamos el efecto Doppler en las ondas sonoras, en que el movimiento de una fuente o de un observador de ondas respecto al

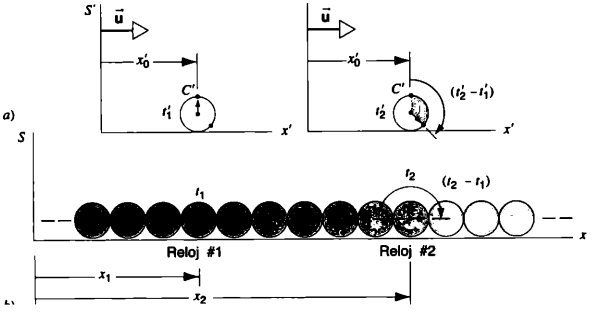


FIGURA 20-15. El reloj C' está fijo en la posición x'_0 dentro del marco de referencia S'. El observador S respecto al cual el reloj C' ésta en movimiento con una velocidad $\vec{u}$, compara la lectura de C' con otros dos relojes estacionarios en el sistema de relojes sincronizados (numerados 1 y 2), establecidos dentro del marco de S. Como se aprecia, el intervalo $t_2 - t_1$ medido por S es mayor que el intervalo $t'_2 - t'_1$. Por tanto, el observador S declara que, en comparación con los relojes en S, el reloj en movimiento está atrasado.

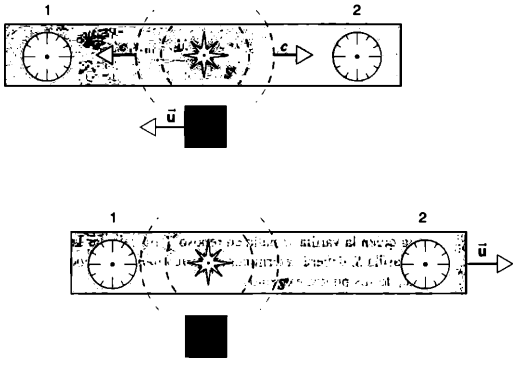


FIGURA 20-16. *a)* Dentro del marco de referencia de S', un destello en un punto intermedio entre dos relojes llega a ellos en el mismo instante. *b)* Dentro del marco de referencia de S, el destello llega al reloj 1 antes que al reloj 2.

medio que las conduce, causa un cambio en la frecuencia medida por él.

El "movimiento respecto al medio" no es un concepto válido en el caso de las ondas luminosas. En la relatividad especial, un cambio Doppler en la luz depende tan sólo de la velocidad relativa entre la fuente y el observador; a diferencia de las ondas sonoras, en las cuales empleamos varias fórmulas para explicar el movimiento de la fuente y del observador, en las ondas luminosas basta una fórmula que incluya sólo el movimiento *relativo*. Así, la fórmula relativista de Doppler es más fácil de aplicar que la clásica.

Otro aspecto del efecto Doppler en la relatividad especial no tiene un equivalente clásico. Es el *efecto transversal Doppler*, que a diferencia de los casos de la sección 19-9, se presenta cuando la fuente o el observador se desplazan perpendicularmente a la línea que los conecta. En realidad se trata de otro resultado de la dilatación del tiempo, y las medidas precisas del efecto representan algunas de las pruebas experimentales más sensibles de la dilatación del tiempo. En el Capítulo 39 lo estudiaremos más a fondo en el caso de la luz.

3. *La paradoja de los gemelos.* La dilatación del tiempo se aplica no sólo a las partículas elementales, sino también a todos los intervalos temporales naturales, entre ellos la frecuencia del pulso y la vida promedio del hombre. Este hecho sirve para proponer un acertijo aparente, que se conoce como la *paradoja de los gemelos.**

Supóngase que dos gemelos, Alfredo y Estela, se encuentran en una plataforma que se desplaza por el espacio. Estela emprende el viaje en una nave de gran velocidad rumbo a una estrella lejana, y Alfredo se queda en la plataforma. Durante el viaje, Alfredo puede vigilar el latido cardiaco y frecuencia respiratoria promedio de su hermana, descubriendo que son más lentos debido a la dilatación del tiempo: el proceso de envejecimiento ha disminuido su ritmo. Por tanto, Alfredo prevé que, una vez que su hermana regrese a la plataforma tras el viaje a la estrella, será más joven que él.

La paradoja parece presentarse cuando analizamos la situación desde el marco de referencia de Estela, es decir, consideramos que Alfredo y la plataforma son los que realizan el viaje. Conforme a este análisis, Alfredo es el gemelo que viaja y debería ser más joven al final del viaje. He aquí la paradoja: cuando se reúnen al finalizar el viaje, no puede ser cierto que Estela sea más joven, ni tampoco que lo sea Alfredo.

La solución de la paradoja se da cuando nos damos cuenta de que los gemelos no se hallan realmente en situaciones simétricas. Para que vuelvan a reunirse, uno de ellos deberá desacelerar e invertir la dirección, originándose así una aceleración fácilmente mensurable de uno de ellos. Dicho de otra manera, Estela debe pasar de un marco de referencia inercial (el que se aleja de Alfredo) a otro (el que se acerca a él). Por su parte, Alfredo no experimenta aceleración alguna, y permanece en el mismo marco durante todo el viaje. Es su hermana quien viaja y quien a su vez será más joven al regresar.

Aunque todavía no hemos logrado efectuar un experimento de este tipo con gemelos reales, se han hecho experimentos con relojes atómicos.** Se calibraron con mucho cuidado dos relojes idénticos; después, uno de ellos fue puesto en una línea aérea comercial en un recorrido por todo el mundo, y al retornar se comparó con su gemelo que había permanecido en su sitio. Desde luego, la velocidad del viaje fue mucho menor que c, pero los relojes atómicos brindan tal precisión que la pequeña asimetría resultante en su "envejecimiento" —cerca de 10^{-7} s— podría determinarse con facilidad y precisión. Se descubrió que el reloj en la línea aérea, que experimenta aceleración y por lo

* Más detalles sobre la paradoja de los gemelos, figuran en *Basic Concepts in Relativity* de Robert Resnick y David Halliday (Macmillan, 1992), p. 156.

**Véase "Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains", de J. C. Hafele y Richard E. Keating, *Science*, 14 de julio de 1972, p. 166.

mismo era el verdadero viajero, era en verdad "más joven" (es decir, iba más lento) después del viaje.

La lectura de este reloj ha de corregirse atendiendo al tiempo que pasa en otro potencial gravitacional, un efecto de la relatividad *general*. En conclusión, las correcciones de la relatividad especial y general tienen gran importancia práctica, cuando relojes tan precisos se transportan de un sitio a otro.

La relatividad de la longitud

La contracción de la longitud, tema expuesto en la sección 20-3, se obtiene directamente de las ecuaciones de la transformación de Lorentz. Primero, debemos entender que para medir la longitud de un objeto, hay que hacer una determinación *simultánea* de los extremos del objeto (Fig. 20-17). *No conviene medir en cierto momento la coordenada de un extremo de un objeto en movimiento, y en otro la coordenada del otro extremo.*

Supóngase (Fig. 20-18) que S' transporta una varilla medidora de longitud en reposo L_0. El observador S desea medir su longitud. De acuerdo con S', en cuyo marco de referencia la varilla se halla en reposo, sus extremos están en las coordenadas x'_2 y x'_1, de modo que $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = L_0$, su longitud en reposo. Por medio de las coordenadas calibradas y sincronizadas establecidas con el procedimiento descrito en la sección 20-5, el observador S determina al mismo tiempo las coordenadas x_2 y x_1 de los extremos de la varilla. El intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$ da su longitud L de acuerdo con S. Con base en la ecuación de intervalo de la tabla 20-2, tenemos

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t). \qquad (20\text{-}22)$$

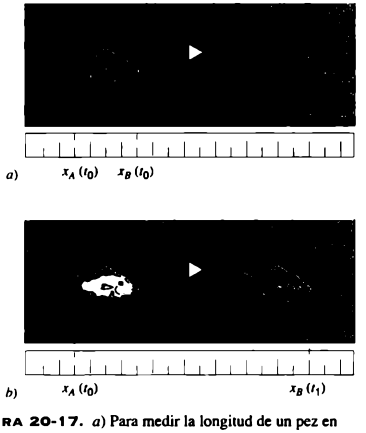


FIGURA 20-17. *a)* Para medir la longitud de un pez en movimiento, hay que determinar *simultáneamente* la posición de su cabeza y de su cola. *b)* Si la determinación es no simultánea, la medición no nos dará la longitud.

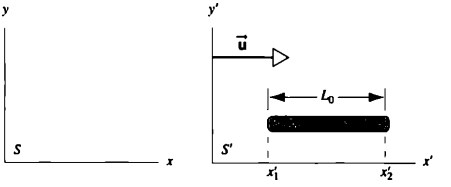


FIGURA 20-18. Se determina que los extremos de la varilla medidora están en las coordenadas x'_1 y x'_2 según S', en relación con quien la varilla se halla en reposo. Para calcular la longitud de la varilla S, deberá determinar *al mismo tiempo* las coordenadas x_1 y x_2 de sus puntos extremos.

Haciendo $\Delta t = 0$ (porque S realizó una determinación *simultánea* de x_2 y x_1), resolvemos para $\Delta x (= L)$ y obtenemos

$$L = \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2},$$

expresión idéntica a la ecuación 20-8.

Hemos deducido la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud, a partir de los postulados (Secc. 20-3) y de la transformación de Lorentz (esta sección). Pero no son deducciones independientes, porque la transformación de Lorentz también se consiguió de ellos. En última instancia, la relatividad especial se deduce totalmente de los postulados de Einstein.

Igual que la dilatación en el tiempo, la contracción de la longitud es un efecto válido para todos los observadores en movimiento relativo. Preguntas como "¿Una varilla medidora en movimiento *realmente* se encoge?, tienen sentido sólo en cuanto se refieren a mediciones hechas por observadores en movimiento relativo. La esencia de la relatividad consiste en lo siguiente: los resultados de las mediciones de la longitud y de los intervalos temporales, están sujetos al estado de movimiento del observador respecto a los eventos que se pretenden medir, se refieren exclusivamente a los efectuados por un observador en determinado marco de referencia. Si otros observadores pusieran la varilla en reposo dentro de su marco inercial individual, cada uno mediría el mismo valor de la longitud. En este aspecto, la relatividad especial es una teoría de la medición que se limita a afirmar "el movimiento afecta a la medición".

PROBLEMA RESUELTO 20-5. Un observador S está de pie sobre una plataforma de longitud $D_0 = 65$m en una estación espacial. Un cohete pasa a una velocidad relativa de $0.80c$, desplazándose paralelamente al borde de la plataforma. El observador nota que la parte frontal y posterior del cohete se alinean simultáneamente con los extremos de la plataforma en determinado momento (Fig. 20-19*a*). *a)* De acuerdo con S, ¿cuánto tiempo tarda el cohete en pasar por un punto particular de la plataforma? *b)* ¿Cuál es la longitud en reposo L_0 del cohete? *c)* De acuerdo con el observador S' en el cohete, ¿cuál es la longitud D de la plataforma? *d)* Según S', ¿cuánto tarda el observador S en pasar toda la longitud del cohete? *e)* De acuerdo con S, los extremos del cohete alinean al mismo tiempo los extremos de la plataforma. ¿Son simultáneos a S' estos eventos?

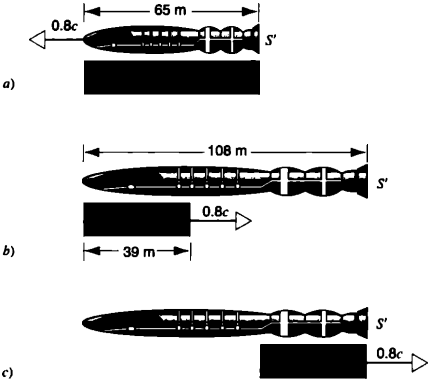


FIGURA 20-19. Problema resuelto 20-5. *a*) A partir del marco de referencia de S en reposo sobre la plataforma, el cohete que pasa se alinea simultáneamente con la parte frontal y posterior de ella. *b*) y *c*) A partir del marco de referencia del cohete, la plataforma que pasa se alinea primero con la parte frontal del cohete y luego con la parte posterior. Nótense los efectos distintos de la contracción de la longitud en ambos marcos.

Solución *a*) Según S, la longitud L del cohete es igual a la longitud D_0 de la plataforma. El tiempo que tarda en pasar por un punto particular medido por S es

$$\Delta t_0 = \frac{L}{0.80c} = \frac{65\text{ m}}{2.40 \times 10^8\text{ m/s}} = 0.27\ \mu\text{s}.$$

Éste es el intervalo de tiempo propio, porque S lo mide entre dos eventos que tienen lugar en el mismo punto del marco de referencia de S (el frente del cohete pasa un punto, y luego la parte posterior atraviesa el mismo punto).

b) S mide la longitud contraída L del cohete. Podemos encontrar su longitud en reposo L_0, usando la ecuación 20-8:

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{65\text{ m}}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 108\text{ m}.$$

c) De acuerdo con S, la plataforma está en reposo, por lo cual 65 m es su longitud en reposo D_0. Por tanto, para S' la longitud contraída de la plataforma es

$$D = D_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = (65\text{ m})\sqrt{1 - (0.80)^2} = 39\text{ m}.$$

d) Para que S pase toda la longitud del cohete, S' concluye que deberá recorrer una distancia igual a su longitud de reposo, es decir, 108 m. El tiempo necesario para ello es

$$\Delta t' = \frac{108\text{ m}}{0.80c} = 0.45\ \mu\text{s}.$$

Adviértase que éste *no* es el intervalo de tiempo propio para S', quien determina el intervalo de tiempo empleando un reloj en la parte frontal del cohete para medir en qué tiempo S cruza esa parte, y otro reloj en la parte posterior para medir el tiempo en que pasa por esa parte. Así pues, los dos eventos tienen lugar en distintos puntos de S', y por eso no puede separarlos un tiempo propio para S'. El intervalo temporal correspondiente medido por S para los dos eventos, calculados en la parte *a*), *es* el intervalo temporal propio para S, porque los dos eventos *ocurren* en el mismo punto en S. Los intervalos temporales medidos por S y S' deberían relacionarse mediante la fórmula de dilatación del tiempo:

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{0.27\ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 0.45\ \mu\text{s},$$

lo cual concuerda con el valor antes calculado, partiendo de la longitud propia del cohete en S'.

e) De acuerdo con S', el cohete tiene una longitud en reposo de $L_0 = 108$ m, y la plataforma tiene una longitud contraída de $D = 39$ m. Así pues, no es posible que S' observe que los dos extremos de ambos se alinean simultáneamente. Para él la secuencia de eventos se muestra gráficamente en las figuras 20-19*b* y 20-19*c*. El intervalo temporal $\Delta t'$ entre los dos eventos que ocurren simultáneamente en S, puede calcularse a partir de la ecuación de intervalos para $\Delta t'$ en la tabla 20-2, cuando $\Delta t = 0$; así obtenemos

$$\Delta t' = -\gamma u\,\Delta x/c^2 = \frac{-(0.80c)(-65\text{ m})}{c^2\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 0.29\ \mu\text{s}.$$

Podemos comprobar el resultado anterior, señalando que para S' el intervalo temporal entre las situaciones de las figuras 20-19*b* y 20-19*c* ha de ser el necesario para que la plataforma avance una distancia de 108 m − 39 m = 69 m, lo que dura un tiempo

$$\Delta t' = \frac{69\text{ m}}{0.80c} = 0.29\ \mu\text{s},$$

lo cual concuerda con el valor calculado partiendo de la transformación de intervalos. Este último resultado explica la relatividad de la simultaneidad: dos eventos simultáneos para S (el alineamiento de los dos extremos del cohete con los dos de la plataforma) *no pueden* ser simultáneos para S'.

20-8 MOMENTO RELATIVISTA

Hasta ahora hemos investigado el efecto de dos postulados de Einstein referentes a las variables cinemáticas de tiempo, desplazamiento y velocidad vistas desde dos marcos inerciales distintos. En la presente sección y en la siguiente, ampliamos nuestro esfuerzo para incluir las variables dinámicas de momento y energía. Aquí examinaremos la concepción relativista del momento lineal.

Consideremos la colisión que aparece en la figura 20-20*a*, vista desde el marco de referencia S. Dos partículas con una masa m cada una, se desplazan con velocidad igual y opuesta v y $-v$ sobre el eje x. Chocan en el origen, y la distancia entre sus líneas de acercamiento han sido ajustadas, de manera que tras la colisión se desplazan a lo largo del eje y con velocidades finales iguales y contrarias (Fig. 20-20*b*). Suponemos que la colisión es perfectamente elástica, y que por lo mismo no se pierde energía cinética. Entonces las velocidades finales han de ser v y $-v$.

Aplicando la fórmula clásica ($\vec{p} = m\vec{v}$), los componentes del momento total $\vec{P}$ del sistema de dos partículas en el marco S son

$$\begin{aligned} \text{Inicial:}\quad & P_{xi} = mv + m(-v) = 0, \\ & P_{yi} = 0. \\ \text{Final:}\quad & P_{xf} = 0, \\ & P_{yf} = mv + m(-v) = 0. \end{aligned}$$

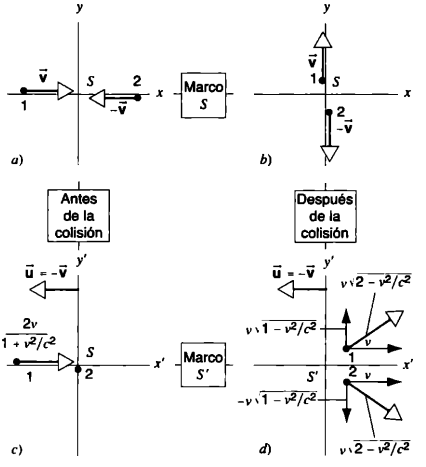


FIGURA 20-20. Una colisión entre dos partículas de la misma masa se muestra *a*) antes que ocurra dentro del marco de referencia de S, *b*) después de ocurrir dentro del marco de referencia de S, *c*) antes que ocurra dentro del marco de referencia de S' y *d*) después de ocurrir dentro del marco de referencia de S'.

En consecuencia, $P_{xi} = P_{xf}$ y $P_{yi} = P_{yf}$; el momento inicial (vectorial) es igual al momento final, conservándose el momento dentro del marco S.

Analicemos ahora la misma colisión desde el marco S', que se mueve respecto al marco S con una velocidad $u = -v$ (Fig. 20-20*c*). Nótese que en el marco S', la partícula 2 se halla en reposo antes de la colisión. Utilizamos la transformación de velocidades de Lorentz (Ecs. 20-18 y 20-19), para encontrar los componentes y' y x' transformados de las velocidades inicial y final, como las observaría S'. Estos valores que el lector debería calcular, se incluyen en las figuras 20-20*c* y 20-20*d*.

A continuación usamos las velocidades anteriores para encontrar los componentes del momento total del sistema en el marco S':

$$P'_{xi} = m\left(\frac{2v}{1 + v^2/c^2}\right) + m(0) = \frac{2mv}{1 + v^2/c^2},$$

$$P'_{yi} = 0,$$

$$P'_{xf} = mv + mv = 2mv,$$

$$P'_{yf} = mv\sqrt{1 - v^2/c^2} + m(-v\sqrt{1 - v^2/c^2}) = 0.$$

Vemos que P'_{xi} *no* es igual a P'_{xf}, y S' concluirá que el momento *no* se conserva.

En la ecuación anterior, es evidente que la ley de conservación del momento lineal que nos ha sido útil en varias aplicaciones, no cumple el primer postulado de Einsten (la ley ha de ser igual en todos los marcos inerciales) si calculamos el momento como $p = mv$. En consecuencia, *si queremos mantener la conservación del momento como una ley general compatible con el primer postulado, habrá que encontrar otra definición de momento.* La definición ha de reunir dos propiedades. 1) Debe producir una ley de conservación del momento que satisfaga el principio de la relatividad; si el momento se conserva según un observador en un marco inercial, también se conservará para los observadores en *todos* los marcos. 2) A velocidades bajas, la nueva definición debe reducirse a $\vec{p} = m\vec{v}$, que sabemos que funciona perfectamente bien en el caso no relativista.

La fórmula relativista del momento de una partícula con masa m que se desplace con la velocidad $\vec{v}$ es

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (20\text{-}23)$$

En función de los componentes, podemos escribir la ecuación 20-23 así:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{y} \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (20\text{-}24)$$

La velocidad v que aparece en el denominador de estas expresiones, es *siempre* la de la partícula medida dentro de un marco inercial. *No* es la velocidad de un marco inercial. La velocidad en el numerador puede ser cualquiera de los componentes del vector de velocidad.

Veamos ahora cómo esta definición restablece la conservación del momento en la colisión considerada. Dentro del marco S, las velocidades antes y después son iguales y opuestas, así que la ecuación 20-23 otra vez da cero con los momentos inicial y final. Como el lector podrá verificar, dentro del marco S' es posible utilizar las magnitudes de las velocidades dadas en las figuras 20-20*c* y 20-20*d* para obtener

$$P'_{xi} = P'_{xf} = \frac{2mv}{1 - v^2/c^2}, \qquad P'_{yi} = P'_{yf} = 0. \qquad (20\text{-}25)$$

Por tanto, los momentos inicial y final son iguales dentro del marco S'. El momento se conserva dentro de los marcos S y S'. De hecho, la definición de momento en la ecuación 20-23 produce conservación del momento dentro de *todos* los marcos inerciales, como lo exige el principio de relatividad.

Nótese asimismo que, en el límite de velocidades bajas, el denominador de la ecuación 20-23 es casi igual a 1; en ellas la ecuación 20-23 se reduce a la conocida fórmula clásica $\vec{p} = m\vec{v}$. También la ecuación 20-23 satisface este criterio necesario de las fórmulas relativistas.

Por supuesto, la prueba definitiva es la concordancia con el experimento. La figura 20-21 contiene un conjunto de datos basados en determinaciones independientes del momento, y de la velocidad de los electrones. Están graficados como p/mv, que debería tener el valor constante de 1 conforme a la física clásica. Los resultados coinciden con la ecuación relativista, pero no con la clásica. Adviértase que las predicciones clásicas y relativistas concuerdan en velocidades bajas; de hecho, la diferencia entre las dos no es evidente hasta que la velocidad supera $0.1c$, lo cual explica la imposibilidad de observar las correlaciones relativistas en experimentos con objetos ordinarios de laboratorio.

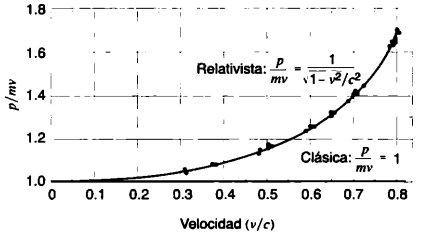


FIGURA 20-21. La razón p/mv se grafica para los electrones de varias velocidades. Conforme a la física clásica, $p = mv$ y, por tanto, las ecuaciones clásicas predicen que $p/mv = 1$. Los datos concuerdan claramente con el resultado relativista y no con el clásico. A velocidades bajas, las predicciones clásica y relativista son indistinguibles.

PROBLEMA RESUELTO 20-6. ¿Cuál es el momento de un protón que se desplaza con una velocidad de $v = 0.86c$?

Solución Por medio de la ecuación 20-23, obtenemos

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$= \frac{(1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg})(0.86)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{\sqrt{1 - (0.86)^2}}$$
$$= 8.44 \times 10^{-19}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

donde las unidades kg · m/s generalmente no son idóneas para resolver este tipo de problemas. La alternativa consiste en evaluar la magnitud pc:

$$pc = (8.44 \times 10^{-19}\,\text{kg}\cdot\text{m/s})(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})$$
$$= 2.53 \times 10^{-10}\,\text{J}$$
$$= 1{,}580\,\text{MeV},$$

donde hemos empleado el factor de conversión 1 MeV = 1.60×10^{-13} J. El momento se consigue de este resultado, dividiendo por el símbolo c (no su valor numérico), y así obtenemos

$$p = 1{,}580\,\text{MeV}/c.$$

Las unidades MeV/c del momento, se utilizan a menudo en los cálculos relativistas porque, como veremos en la siguiente sección, la magnitud pc suele aparecer en ellos.

20-9 ENERGÍA RELATIVISTA

En comparación con lo que hemos dicho sobre el momento en la sección anterior, la relatividad especial nos ofrece un nuevo enfoque en la energía cinética. Indicaremos primero la dificultad de estudiar la colisión que se muestra gráficamente en la figura 20-20. Si recurrimos a la expresión clásica $\frac{1}{2}mv^2$, la colisión no conserva la energía cinética dentro del marco S'. (Escogimos las velocidades finales dentro del marco S para poder conservar la energía cinética.) Con las velocidades de las figuras 20-20c y 20-20d, podemos demostrar (véase Ej. 38) que cuando $K = \frac{1}{2}mv^2$, las energías cinéticas inicial y final totales son

$$K'_i = \frac{2mv^2}{(1 + v^2/c^2)^2}, \qquad K'_f = mv^2(2 - v^2/c^2). \tag{20-26}$$

Por tanto, K'_i no es igual a K'_f, y la colisión que conserva la energía cinética de conformidad con $S(K_i = K_f)$, y que por lo mismo es elástica, no la conserva según S', de ahí que sea inelástica. Tal situación viola el postulado de relatividad; el tipo de colisión (elástica frente a inelástica) debería depender de las propiedades de los objetos en colisión, y no del marco de referencia desde donde la veamos. Igual que en el caso del momento, necesitamos una nueva definición de energía cinética si queremos preservar la conservación de la energía y el postulado de la relatividad.

La expresión clásica de la energía cinética también viola el segundo postulado, pues admite velocidades mayores a la de la luz. No tiene límite (ni en la dinámica clásica ni en la relativista) la energía que podemos imprimirle a una partícula. Con todo, si permitimos que la energía cinética aumente sin restricción alguna, la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$, significa que la velocidad también ha de incrementarse en la misma forma, lo cual violaría el segundo postulado. Debemos, pues, encontrar la forma de redefinir la energía cinética, para que la de una partícula pueda acrecentarse sin límite mientras su velocidad sea menor que c.

La expresión relativista de la energía cinética de una partícula, puede obtenerse utilizando esencialmente el mismo procedimiento con el que obtuvimos la expresión clásica, comenzando con la forma de partícula del teorema de trabajo-energía (véase Prob. 16). El resultado de este cálculo es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \tag{20-27}$$

La ecuación 20-27 es muy diferente a la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$, pero puede demostrarse (véase Ej. 35) que la ecuación 20-27 se reduce a esta última en el límite de velocidades bajas ($v << c$). En la ecuación 20-27, el lector puede observar que la expresión relativista de la energía cinética permite que una partícula posea energía ilimitada, aunque su velocidad sea menor que la de la luz. En la figura 20-3 se mostró una comparación entre las formas clásica y relativista de la dependencia de la energía cinética respecto a la velocidad; la forma relativista concuerda mucho mejor con los datos que la forma clásica, y la expresión relativista permite que K se vuelva muy grande, mientras que v sigue siendo menor que c. Hoy se consiguen indirectamente resultados similares en todas las instalaciones con los aceleradores grandes del mundo. Se aceleran las partículas a velocidades muy cercanas a c, y los parámetros de su diseño han de basarse en la dinámica relativista. Así, los aceleradores modernos son en realidad un laboratorio para probar la relatividad especial. Sobra decir que su éxito viene a confirmar en forma impresionante la relatividad especial.

Utilice la ecuación 20-27 de la energía cinética para demostrar que ésta se conserva dentro del marco S' de la colisión presentada en la figura 20-20 (véase Ej. 39).

PROBLEMA RESUELTO 20-7. En el Stanford Linear Collider*, se acelera a los electrones hasta que alcanzan una energía cinética de 50 GeV. Calcule su velocidad como *a*) fracción de *c*, y *b*) como una diferencia de *c*. Para el electrón, $mc^2 = 0.511$ MeV $= 0.511 \times 10^{-3}$ GeV.

Solución *a*) Primero resolvemos la ecuación 20-27 para v, para obtener

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + K/mc^2)^2}}, \tag{20-28}$$

y, por tanto,

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 50\ \text{GeV}/0.511 \times 10^{-3}\ \text{GeV})^2}}$$

$$= 0.999\ 999\ 999\ 948c.$$

Las calculadores no son confiables con una precisión de 12 cifras significativas. A continuación, se ofrece una forma de evitar este problema. Podemos escribir la ecuación 20-28 como $v = c(1 + x)^{1/2}$, donde $x = -1/(1 + K/mc^2)^2$. Dado que $K >> mc^2$, tenemos $x << 1$, podemos servirnos de la expansión binomial para escribir $v \approx c(1 + \frac{1}{2}x)$, esto es

$$v \approx c\left[1 - \frac{1}{2(1 + K/mc^2)^2}\right], \tag{20-29}$$

que nos da

$$v = c(1 - 5.2 \times 10^{-11}).$$

La expresión anterior nos lleva al valor de v dado antes.

b) A partir de este resultado tenemos

$$c - v = 5.2 \times 10^{-11}c = 0.016\ \text{m/s} = 1.6\ \text{cm/s}.$$

Energía y masa en la relatividad especial

La ecuación 20-27 también podemos expresarla así

$$K = E - E_0, \tag{20-30}$$

donde la *energía relativista total* E, se define como

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{20-31}$$

y la *energía en reposo* E_0, se define así

$$E_0 = mc^2. \tag{20-32}$$

En realidad, la energía en reposo es la energía relativista total de una partícula medida dentro del marco de referencia donde la partícula se halla en reposo.**

Esta energía puede considerarse la energía interna de una partícula o sistema de partículas en ese estado. Conforme a la ecuación 20-32, siempre que agreguemos energía ΔE a un objeto material en reposo, acrecentaremos su masa en $\Delta m = \Delta E/c^2$. Si comprimimos un resorte y aumentamos su energía potencial en ΔU, su masa crecerá en $\Delta U/c^2$. Cuando elevamos la temperatura de un objeto y con ello su energía interna en ΔE_{int}, incrementaremos su masa en $\Delta E_{int}/c^2$. Estos cambios de masa son pequeños, y normalmente superan nuestra capacidad de medirlos tratándose de objetos comunes (porque c^2 es un número muy grande); pero en el caso de decaimientos y reacciones de los núcleos y de las partículas subnucleares, el cambio relativo de masa puede ser lo bastante grande como para medirlo.

La inclusión de la energía en reposo como otra forma de energía, permite interpretar la situación de la figura 20-2 desde la perspectiva de conservación de la energía. En la figura 20-2*a*, la energía total dentro de la frontera del sistema es $E_i = 2m_ec^2$, donde m_e es la masa de un electrón o positrón (se desprecian las pequeñas energías cinéticas de las partículas). En la figura 20-2*b* hay radiación cuya energía total E_R, es igual a E_i, y el incremento de la energía interna en la figura 20-2*c* es otra vez igual a E_i. Así pues, la energía total se conserva y el proceso representa la conversión de una forma de energía (en reposo) en otra (energía de la radiación o energía interna de las paredes del contenedor).

La ecuación 20-32 indica que es preciso incluir la energía en reposo entre los tipos de la que caracteriza a un sistema. La suma de todos los tipos posibles, es decir, la *energía relativista total*, ha de conservarse en todas las interacciones. No se requiere, por ejemplo, que la energía en reposo y cinética se conserven por separado y, de hecho, no se mantienen.

Consideremos el proceso de decaimiento radiactivo, en el cual un núcleo pesado se divide en dos fragmentos más pequeños, proceso conocido como *fisión espontánea*. Si queremos conservar el momento, es necesario que los fragmentos se alejen volando uno del otro. Cuando el núcleo inicial se halla originalmente en reposo, la energía cinética evidentemente no se conserva en el proceso. La medición revela que la energía total en reposo de los dos es menor que la del núcleo original; en consecuencia, esta última tampoco se conserva. Pese a ello, la suma de la energía en reposo más energía cinética se conserva, y la reducción de la energía en reposo se debe al incremento de la primera.

Podemos aplicar la ecuación 20-32 a otros sistemas aislados, formados por partículas y radiación. Tomemos una estrella como el Sol de nuestro sistema. Cada segundo irradia una energía de 4×10^{26} J. Como lo hicimos con la aniquilación de electrón-positrón, consideramos la energía radiante como una disminución de la energía en reposo del sistema y el cambio correspondiente de masa será

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4 \times 10^{26}\ \text{J}}{(3 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = -4 \times 10^9\ \text{kg}$$

en cada segundo. Tal reducción de la masa es muy importante a juzgar por los criterios comunes, pero muy pequeña comparada con la masa total del Sol (2×10^{30} kg). En un año, su masa disminuye apenas una fracción de 6×10^{-14}.

PROBLEMA RESUELTO 20-8. Dos pelotas de golf de 35 g, se lanzan una contra otra con una velocidad de 1.7 m/s. Se golpean fron-

* Consúltese "The Stanford Linear Collider" de John R. Rees, *Scientific American*, octubre de 1989, p. 58.

** A menudo m en la ecuación 20-32, recibe el nombre de *masa en reposo* m_0, y se distingue de la "masa relativista", la cual se define como $m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Decidimos no utilizar esta última, porque puede ser un concepto engañoso. Cuando hablemos de la masa, siempre nos referiremos a la masa en reposo.

talmente sin que se separen. ¿En cuánto difieren la masa de las pelotas combinadas y la suma de la masa de las dos pelotas originales?

Solución Tratamos las dos pelotas de golf como un sistema aislado. No se realiza en él trabajo externo alguno, por lo cual podemos escribir la conservación de energía como $\Delta K + \Delta E_0 = 0$. Con $\Delta K = K_f - K_i$, donde $K_f = 0$ y K_i es la energía cinética total de las dos pelotas antes de la colisión, tenemos

$$\Delta K + \Delta E_0 = (0 - K_i) + \Delta E_0 = 0,$$

o bien,

$$\Delta E_0 = K_i = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (0.035\ \text{kg})(1.7\ \text{m/s})^2 = 0.101\ \text{J}.$$

Este incremento de la energía en reposo podría darse en forma de energía interna, la cual aumente quizá la temperatura del sistema combinado. El aumento correspondiente de la masa es

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0.101\ \text{J}}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-18}\ \text{kg}.$$

Un aumento tan pequeño supera con mucho nuestra capacidad de medirlo.

PROBLEMA RESUELTO 20-9. En un experimento de 1989 realizado en el Stanford Linear Collider, se produjeron partículas Z^0 cuando un haz de electrones chocó frontalmente con otro de positrones de la misma energía cinética. Calcule la energía cinética de los dos haces que se necesita para obtener el Z^0, que tiene una energía en reposo de 91.2 GeV (1 Gev = 10^9 eV).

Solución Igual que en la colisión entre las pelotas de golf estudiada en el problema 20-8, supondremos que el sistema consta de e^+ y e^- iniciales, y que no se intercambia energía con el ambiente en el proceso de formar la partícula Z^0. El intercambio de la energía en reposo entre el estado inicial (un electrón y un positrón con una energía en reposo de 0.511 MeV cada una) y el estado final Z^0 es

$$\Delta E_0 = 91.2\ \text{GeV} - 2(0.511\ \text{MeV}) = 91.2\ \text{GeV},$$

Aquí es muy insignificante la energía total en reposo del electrón y del positrón (1.022 MeV = 0.001022 GeV). Partiendo de la conservación de la energía en este sistema aislado, tenemos $\Delta K + \Delta E_0 = 0$; así que

$$\Delta K = -\Delta E_0 = -91.2\ \text{GeV} = K_f - K_i.$$

Si suponemos que Z^0 se produce en reposo, $K_f = 0$, y la energía del positrón y del electrón han de ser $\frac{1}{2}(91.2\ \text{GeV}) = 45.6$ GeV. En contraste con el problema resuelto anterior, el cambio relativo en energía en reposo (o en masa) dentro del sistema es importante en este caso, pues la masa final es unas 100,000 veces mayor que la inicial.

Conservación de la energía relativista total

La energía relativista total, está dada por la ecuación 20-30 como

$$E = K + E_0. \qquad (20\text{-}33)$$

En las interacciones de partículas a velocidades relativistas, podemos sustituir el principio de conservación de la energía anterior, por uno basado en la energía relativista total:

En un sistema aislado de partículas, la energía relativista total permanece constante.

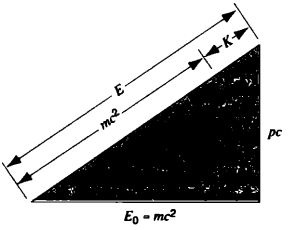


FIGURA 20-22. Mnemotécnico de gran utilidad para recordar las relaciones entre E_0, p, K y E. Nótese que es necesario utilizar la magnitud pc para poner todas las variables en unidades de energía.

La manipulación de las ecuaciones 20-23 y 20-31, nos ofrece una relación útil entre la energía total, el momento y la energía en reposo:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}. \qquad (20\text{-}34)$$

La figura 20-22 muestra una mnemotécnica muy eficaz para recordar esta relación, que tiene la forma del teorema pitagórico sobre los lados del triángulo.

Como la energía en reposo de las partículas inicial y final era igual en la colisión descrita en la figura 20-20, la conservación de la energía relativista total equivale a la de la energía cinética en esa colisión. En términos generales, la colisión de las partículas con mucha energía puede crear nuevas partículas, y por ello la energía final en reposo quizá no sea igual a la inicial (véase Prob. res. 20-11). Tales colisiones han de analizarse, aplicando la conservación de la energía relativista E: la energía cinética no se conserva cuando la energía en reposo cambia en una colisión.

PROBLEMA RESUELTO 20-10. Un acelerador genera un haz de kaones neutrales ($m_K c^2 = 498$ MeV) con 325 MeV de energía cinética. Considere un kaón que decae en el vuelo entre dos piones ($m_\pi c^2 = 140$ MeV). Calcule la energía cinética de cada pión, en el caso especial en que los piones avanzan paralela o antiparalelamente a la dirección del haz de kaones.

Solución La energía de las partículas que quedan tras el decaimiento, puede determinarse aplicando los principios de conservación de la energía relativista total y del momento. Según la ecuación 20-33, esta energía es

$$E_K = K + m_K c^2 = 325\ \text{MeV} + 498\ \text{MeV} = 823\ \text{MeV}.$$

El momento inicial puede encontrarse a partir de la ecuación 20-34:

$$p_K c = \sqrt{E_K^2 - (m_K c^2)^2} = \sqrt{(823\ \text{MeV})^2 - (498\ \text{MeV})^2}$$
$$= 655\ \text{MeV}.$$

La energía total del sistema final formado por los dos piones es

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{(p_1 c)^2 + (m_\pi c^2)^2} + \sqrt{(p_2 c)^2 + (m_\pi c^2)^2}$$
$$= 823\ \text{MeV}, \qquad (20\text{-}35)$$

que aplicando la conservación de la energía relativista total, hemos igualado a la energía total inicial de 823 MeV. Así, tenemos una ecuación en las dos incógnitas p_1 y p_2.

Si queremos encontrar una segunda ecuación en las dos incógnitas, recurriremos a la conservación del momento. El momento final del sistema de dos piones en dirección del haz es $p_1 + p_2$; al hacer este resultado igual al momento inicial p_K, obtenemos

$$p_1c + p_2c = p_Kc = 655 \text{ MeV}. \qquad (20\text{-}36)$$

Tenemos ahora dos ecuaciones (Ecs. 20-35 y 20-36) en dos incógnitas p_1 y p_2. Al resolver la ecuación 20-36 para p_2c, y al sustituirla en la ecuación 20-35, obtenemos (después de un poco de manipulación algebraica) una ecuación cuadrática para p_1c, que puede resolverse aplicando métodos algebraicos ordinarios para conseguir

$$p_1c = 668 \text{ MeV o } -13 \text{ MeV}.$$

Dado que las designaciones 1 y 2 de los dos piones son arbitrarias, la solución da un pión que se desplaza paralelamente al haz con el momento $p_1 = 668$ MeV/c, mientras que el otro sigue la dirección contraria con el momento $p_2 = -13$ MeV/c. Las energías cinéticas correspondientes se encuentran empleando las ecuaciones 20-30 y 20-34, que dan

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (m_\pi c^2)^2} - m_\pi c^2$$

$$K_1 = \sqrt{(668 \text{ MeV})^2 + (140 \text{ MeV})^2} - 140 \text{ MeV} = 543 \text{ MeV},$$

$$K_2 = \sqrt{(-13 \text{ MeV})^2 + (140 \text{ MeV})^2} - 140 \text{ MeV} = 0.6 \text{ MeV}.$$

Este problema también puede resolverse de modo distinto, realizando una transformación de Lorentz con un marco de referencia donde los kaones estén en reposo. Los dos piones se emiten en el marco en direcciones opuestas (porque el momento total ha de ser cero) y, en consecuencia, comparten por igual la energía del decaimiento. La solución de los momentos y de las energías, se logra retornando la transformación al marco del laboratorio (véase Ej. 43). En el siguiente problema, se demuestra otra aplicación de esta técnica.

PROBLEMA RESUELTO 20-11. En 1956, el descubrimiento del antiprotón p (partícula con la misma energía en reposo que un protón, 938 MeV, pero con carga eléctrica opuesta), tuvo lugar en Berkeley mediante la siguiente reacción:

$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \text{p} + \bar{\text{p}},$$

en que los protones acelerados incidían en el blanco de los que se hallaban en reposo en el laboratorio. La mínima energía cinética incidente necesaria para desencadenar la reacción, recibe el nombre de energía cinética *de umbral*, en que las partículas finales se desplazan juntas como si formaran una sola unidad. Calcule la energía cinética de umbral que se requiere para producir antiprotones en esta reacción.

Solución Desde el punto de vista conceptual, este problema es el caso contrario del anterior. Aquí las partículas se juntan para formar un compuesto. Demostramos un método alterno resolviendo dentro del marco de referencia del centro de masa, donde los dos protones se unen con momentos iguales y opuestos para constituir una nueva partícula en reposo (Fig. 20-23).

La energía relativista total dentro del marco de centro de masa S', es la energía en reposo de los productos que se obtienen en reposo dentro de este marco; por tanto,

$$E'_f = 4m_pc^2.$$

La energía inicial, no es más que la suma de las energías totales de los dos protones originales de la reacción:

$$E'_i = E'_1 + E'_2.$$

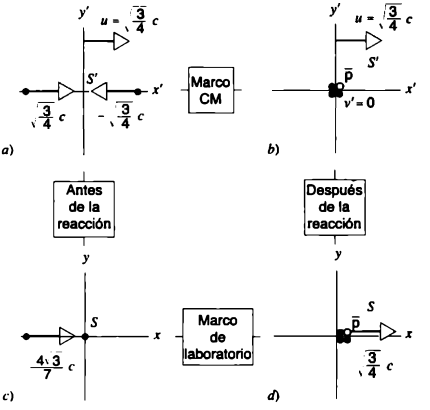


FIGURA 20-23. Problema resuelto 20-11. Producción de un antiprotón, visto desde *a*) y *b*), el marco del centro de masa (CM), y *c*) y *d*) el marco de laboratorio. Compare esta figura con la 20-20.

La conservación de la energía requiere $E'_i = E'_f$, y como las energías E'_1 y E'_2 son iguales en el marco S', tendremos

$$E'_1 = E'_2 = 2m_pc^2.$$

La magnitud correspondiente de la velocidad de uno de los protones de la reacción en el marco S', se obtiene resolviendo la ecuación 20-31 para v/c, que nos da

$$\frac{v'_1}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_pc^2}{E'_1}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Ahora hacemos una transformación de Lorentz para regresar al laboratorio usándola como la velocidad de transformación, que coloca en reposo uno de los protones, y al otro le imprime una velocidad v que puede determinarse partiendo de la expresión de la transformación inversa de la velocidad para v_x en la tabla 20-3. Utilizando $v' = c\sqrt{3/4}$ y $u = c\sqrt{3/4}$, y eliminado el subíndice x, tendremos

$$v = \frac{v' + u}{1 + uv'/c^2} = \frac{2c\sqrt{3/4}}{1 + (\sqrt{3/4})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}c.$$

Ésta es la velocidad del protón incidente dentro del marco de laboratorio. Su energía total se calcula con base en la ecuación 20-31:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1 - (4\sqrt{3}/7)^2}} = 7m_pc^2,$$

y la energía cinética de umbral es

$$K = E - m_pc^2 = 6m_pc^2 = 6(938 \text{ MeV})$$
$$= 5{,}628 \text{ MeV} = 5.628 \text{ GeV}.$$

El acelerador Bevatron de Berkeley, fue diseñado teniendo presente este experimento, a fin de crear un haz de protones cuya energía superara los 5.6 GeV. El descubrimiento del antiprotón en esta reacción les valió a Emilio Segrè y a Owen Chamberlain, el Premio Nobel de 1959 que se otorga a los experimentadores.

20-10 EL SENTIDO COMÚN Y LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Hemos llegado a un punto donde podemos revisar nuestra exposición de la relatividad especial, y reflexionar sobre su relación con el sentido común. Ante todo, conviene señalar que la relatividad influye en todos los aspectos de la física; en este capítulo nos hemos concentrado en la mecánica, y más adelante analizaremos su efecto en el electromagnetismo. En efecto, hay que reexaminar rigurosamente todas las áreas de la física desde la perspectiva de la relatividad especial, comprobando su consistencia con los dos postulados. Es preciso señalar que la relatividad ha pasado todas las pruebas experimentales sin la mínima discrepancia. Es una teoría de gran valor estético, pues nos ofrece una visión más satisfactoria que la física clásica sobre la validez de diversas perspectivas y simetrías. Es, asimismo, una teoría de gran valor práctico: proporciona a los ingenieros, una guía adecuada para construir enormes aceleradores de partículas, y a los que desean los estándares, les da los procedimientos idóneos para corregir las lecturas de los relojes atómicos cuando son trasladados a otro sitio.

El primer postulado de la relatividad, es en realidad una consecuencia de la primera ley de Newton, la de la inercia, que definió el concepto de marcos inerciales, y ofreció la primera idea de que los observadores inerciales llegaron a conclusiones idénticas al ver un experimento donde no interviene una fuerza neta. No representa un gran avance ampliar el concepto y afirmar que también las extraerán en un experimento donde *sí* intervenga una fuerza neta. Por último, ¿por qué seleccionamos las leyes de la mecánica en esta equivalencia? Llegamos al primer postulado, ampliándolo a la equivalencia de observadores inerciales en *todas* las leyes de la física.

El segundo postulado también es razonable. Parece poco realista poder transmitir una señal a una velocidad infinita, con lo cual se lograría una comunicación instantánea en todo el universo. Más aún, los experimentos dedicados a la relatividad del tiempo, indican que la comunicación instantánea entre puntos distantes no concuerda con la observación. Si existe una velocidad tope, seguramente (según el primer postulado) habrá de ser igual para todos los observadores sin importar su estado de movimiento.

A algunos puede impactarlos el primer contacto con la relatividad de la simultaneidad, el evidente encogimiento de las varillas en movimiento y la reducción del tiempo. Con todo, basta que reflexionen un poco para convencerse de que las opciones clásicas son aún más perturbadoras. Por ejemplo, una varilla rígida clásica de longitud bien definida, es un concepto compatible con la relatividad; una señal (digamos, un movimiento rápido) en un extremo no puede transmitirse instantáneamente al otro. Hay que renunciar a la creencia de que todos los observadores son capaces de emplear la *misma* varilla medidora. La reemplazamos con la que le da a cada uno una varilla, y le permite usarla para efectuar mediciones dentro de determinado marco de referencia. No se prefiere un instrumento ni un resultado de la medición a otros. Por último, la relatividad proporciona una excelente simetría entre los observadores; no afirma la *realidad* de los relojes que se atrasan, sino que a partir de dos perspectivas distintas, dos observadores en movimiento relativo entre sí ven que el reloj del otro se atrasa. No se requiere otorgarle un estatus preferencial a uno de ellos, ni a ningún otro observador inercial.

Según la física clásica, el espacio y el tiempo son absolutos. De ello se deduce que las leyes de la física han de ser diferentes para cada observador. Por el contrario, la relatividad establece que han de ser iguales para todos ellos y que, en consecuencia, el espacio y el tiempo se convierten en conceptos relativos. Es pues evidente, que la relatividad es "más absoluta" que la física clásica. El complejo y arbitrario mundo físico de la física clásica, donde cada observador debe aplicar un conjunto especial de leyes físicas, se vuelve el mundo más uniforme y simple de la relatividad.

La relatividad amplía nuestra concepción del universo al ponernos entre muchos observadores inerciales de él. Integra conceptos que eran tratados por separado en la perpectiva de la física clásica; por ejemplo, espacio y tiempo en espacio-tiempo, masa y energía en energía en reposo. Traza el camino para arribar a una teoría unitaria unificadora que abarque todas las interacciones posibles entre las partículas: electricidad y magnetismo en electromagnetismo; electromagnetismo y las llamadas fuerzas débiles (causantes de ciertos procesos del decaimiento radiactivo) en la interacción electrodébil; las interacciones nucleares electrodébiles y fuertes en una de las grandes teorías unificadoras propuestas; finalmente, éstas y la gravedad en la hipotética Teoría de Todo. Einstein, quien conoció sólo la primera de las unificaciones anteriores, se habría sentido muy complacido con los progresos ulteriores.

OPCIÓN MÚLTIPLE

20-1 Problemas con la física clásica

20-2 Los postulados de la relatividad especial

20-3 Consecuencias de los postulados de Einstein

1. Un piloto de una nave espacial que se aleja de la Tierra a $0.86c$, envía una señal de rayos láser a ella.

   a) El piloto mide la velocidad v de la señal láser, y descubre que es

   A) $v < c$. B) $v = c$. C) $v > c$.

   b) Las personas en la Tierra al medir la velocidad v del haz láser, encuentran que es

   A) $v < c$. B) $v = c$. C) $v > c$.

2. Una nave espacial de 20 m de largo (medida por un piloto de ella), pasa a una velocidad constante por una plataforma espacial de 40 m de largo (medida por un trabajador en ella). El trabajador mide la longitud de la nave cuando ésta pasa, y descubre que tiene 18 m de largo.

a) ¿Con qué rapidez pasa la nave por la plataforma?

A) $v \approx c/100$. B) $v \approx c/10$. C) $v \approx c/2$.
D) $v = c$. E) $v > c$.

b) El piloto obtiene las siguientes medidas de la longitud de la plataforma

A) 36 m. B) 38 m. C) 42 m. D) 44 m.

c) El piloto observa un reloj en la plataforma por un minuto (según el reloj de la nave). Pero este reloj indicará que el tiempo transcurrido es

A) 49 s. B) 54 s. C) 60 s. D) 67 s.

d) El trabajador observa un reloj en la nave por un minuto (según el reloj de la plataforma). Pero el reloj de la nave indicará que el tiempo transcurrido es

A) 54 s. B) 60 s. C) 67 s. D) 78 s.

e) El piloto lanza un misil con una velocidad de $0.9c$ respecto a la nave. En relación con la plataforma, su velocidad es

A) mayor que B) igual que C) menor que

la velocidad de la luz medida por el trabajador.

20-4 La transformación de Lorentz

20-5 Medición de las coordenadas espacio-tiempo de un evento

20-6 La transformación de velocidades

3. Una nave espacial se aleja de la Tierra a $0.90c$. La velocidad de la Tierra medida por la nave es

A) 0. B) $0.45\,c$. C) $0.90\,c$. D) $1.9\,c$.

4. Una nave espacial que se aleja a $0.60c$ de la Tierra, dispara dos misiles, uno hacia atrás y el otro hacia delante. Se disparan ambos misiles con una rapidez de $0.80c$ en relación con la nave.

a) La velocidad del misil disparado hacia la Tierra, tiene una velocidad v_1 respecto a ella, donde

A) $v_1 < 0.6c$. B) $0.6c < v_1 < 0.8c$.
C) $0.8c < v_1 < c$. D) $v_1 = 1.4c$.
E) $v_1 > 1.4c$.

b) El misil disparado hacia la Tierra tiene una velocidad v_2 respecto a ella, donde

A) $v_2 < 0.2c$. B) $v_2 = 0.2c$.
C) $0.2c < v_2 < 0.6c$. D) $0.6c < v_2 < 0.8c$.
E) $0.8c < v_2 < c$.

c) La velocidad del misil que se dispara alejándose de la Tierra, medida por el otro misil es v_3, donde

A) $v_3 < 0.6c$. B) $0.6c < v_3 < 0.8c$.
C) $0.8c < v_3 < c$. D) $v_3 = 1.6c$.
E) $v_3 > 1.6c$.

20-7 Consecuencias de la transformación de Lorentz

5. Dos eventos A y B son simultáneos y ocurren en el mismo lugar dentro del marco S. En cualquier otro marco S'

A) los eventos tendrán lugar en el mismo sitio, pero también podrían ocurrir en otro tiempo.
B) los eventos tendrán lugar en sitio diferente, pero seguirán siendo simultáneos.
C) los eventos ocurrirán simultáneamente y en el mismo sitio.
D) los eventos no ocurrirán simultáneamente ni en el mismo sitio.

6. Dos eventos A y B ocurren simultáneamente, pero en distinto sitio dentro del marco S. En otro marco S'

A) los eventos podrían ocurrir simultáneamente y en el mismo sitio.
B) los eventos podrían ocurrir simultáneamente o en el mismo sitio, pero no en ambas formas.
C) los eventos podrían ocurrir simultáneamente, pero no en el mismo sitio.
D) los eventos no podrían ocurrir simultáneamente, pero sí en el mismo sitio.
E) los eventos no pueden ocurrir simultáneamente, y tampoco en el mismo sitio.

7. Dos eventos A y B no son simultáneos, pero ocurren en el mismo sitio dentro del marco S. En otro marco S'

A) los eventos podrían ocurrir simultáneamente o en el mismo sitio.
B) los eventos podrían ocurrir simultáneamente o en el mismo sitio, pero no en ambas formas.
C) los eventos podrían ocurrir simultáneamente, pero no en el mismo sitio.
D) los eventos no pueden ocurrir simultáneamente, pero sí en el mismo sitio.
E) los eventos no pueden ocurrir simultáneamente, y tampoco en el mismo sitio.

20-8 Momento relativista

8. Una partícula de masa m y con un momento de magnitud $2mc$, choca con otra de masa m, la cual se encuentra en reposo. Las dos se mantienen juntas después de la colisión.

a) *Antes* de la colisión, la velocidad de la partícula en movimiento es

A) menor que $c/2$. B) entre $c/2$ y c.
C) entre c y $2c$. D) $2c$.

b) La magnitud del momento total después de la colisión es

A) menor que $2mc$. B) igual a $2mc$.
C) entre $2mc$ y $3mc$. D) mayor que $3mc$.

c) La velocidad de las dos partículas después de la colisión es

A) menor que $c/2$. B) igual a $c/2$.
C) entre $c/2$ y c. D) mayor que c.

20-9 Energía relativista

9. ¿Cuál de los siguientes decaimientos está prohibido por la conservación de la energía (apéndice F).

A) $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$
B) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$
C) $p \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}_e$
D) $\rho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$

10. *a*) La velocidad de un electrón que tiene una energía cinética de $K \gg m_e c^2$ is v_1, donde

A) $v_1 \ll c$. B) $v_1 \approx c$.
C) $v_1 > c$. D) $v_1 \gg c$.

b) ¿Cuál será la velocidad de un electrón cuya energía cinética es $4K$?

A) Entre v_1 y c. B) menos de $2v_1$.
C) Igual a $2v_1$. D) Mayor que $2v_1$.
E) Tanto A) como C) son correctos.

11. Un protón energético emitido por el Sol tiene una energía total mayor que 100 GeV. ¿Cuánto tiempo transcurre medido desde

la Tierra, desde el momento en que sale del Sol hasta que llega a ella?

A) ≈6 s. B) ≈1 min.
C) ≈9 min. D) ≈20 min.

E) La pregunta no puede contestarse sin más datos sobre la energía del protón.

20-10 El sentido común y la relatividad especial

PREGUNTAS

1. La velocidad de la luz en el vacío es una constante verdadera de la naturaleza, independiente de la longitud de onda de la luz y de la selección de un marco de referencia (inercial). ¿En alguna forma entonces el segundo postulado de Einstein está contenido en el primero?
2. Explique el problema que encaró el joven Einstein, es decir, ¿qué aspecto presentaría una onda electromagnética a alguien que corriera a su lado con una velocidad c?
3. ¿Es válido en la relatividad el concepto de fluido incompresible? ¿Y los cuerpos perfectamente rígidos?
4. Un cuasar (objeto cuasiestelar) se aleja de la Tierra a la mitad de la velocidad de la luz. ¿Qué velocidad tendrá respecto a la Tierra, la luz que se detecta procedente de ella?
5. Los cuasares son los objetos más intrínsecamente luminosos. La brillantez de muchos fluctúa, a menudo, en un escala temporal de un día más o menos. ¿Cómo puede la rapidez de los cambios de la brillantez servir para estimar un límite superior del tamaño de tales objetos? (*Sugerencia*: Los puntos separados no pueden cambiar en forma coordinada, si no se envía información de uno a otro.)
6. La velocidad de barrido de la cola de un cometa supera a veces la de la luz. Explique este fenómeno y demuestre que no contradice a la relatividad.
7. Considere un frente esférico de onda luminosa que se genera desde una fuente puntual. Desde el punto de vista de un observador situado en la fuente, ¿cuál es la diferencia de velocidad de las partes del frente que siguen direcciones opuestas? ¿Cuál es la velocidad relativa de una de ellas respecto a la otra?
8. Con dos frases de Herman Bondi, podemos captar el espíritu de los dos postulados de Einstein, asignándoles los siguientes nombres: 1) El principio de "la irrelevancia de la velocidad", y 2) El principio de la "unicidad de la luz". ¿En qué sentido es irrelevante la velocidad y única la luz en ambos enunciados?
9. Un haz proveniente de un láser, cae en ángulos rectos sobre un espejo plano y se refleja en él. ¿Qué velocidad tendrá el haz reflejado si el espejo *a*) está fijo en el laboratorio, y *b*) se dirige directamente hacia el láser con una velocidad v?
10. Dé un ejemplo tomado de la física clásica, en que el movimiento de un reloj influya en su rapidez, es decir, la forma en que marca el tiempo. (La magnitud del efecto puede depender de la naturaleza específica del reloj.)
11. Aunque en la relatividad (donde el movimiento es relativo y no absoluto) comprobamos que "los relojes en movimiento se atrasan", este efecto nada tiene que ver con el movimiento que altera su funcionamiento. ¿Con qué se relaciona entonces?
12. Hemos visto que si varios observadores contemplan dos eventos, A y B, uno de ellos puede decir que el evento A ocurrió primero, y el otro que el evento B fue el que sucedió primero. ¿Qué diría usted a un amigo si le pregunta cuál de los dos tuvo lugar primero?
13. Sea el evento A, la salida de un avión de San Francisco, y el evento B, su arribo a Nueva York. ¿Es posible encontrar a dos observadores que no concuerden en el orden temporal de estos eventos? Explique su respuesta.
14. Dos observadores, uno en reposo en S y otro en reposo en S', llevan un metro orientado paralelamente a su movimiento relativo. Al efectuar la medición, descubren que el metro del otro es más corto. ¿Le parece esto una paradoja? Explique su respuesta. (*Sugerencia*: Compare lo anterior con la siguiente situación. Arturo se despide de Alberto, quien se encuentra en la parte trasera de una camioneta que se aleja del primero. Arturo dice que Alberto se vuelve más pequeño. Y éste dice lo mismo de aquél. ¿Están midiendo lo mismo?
15. ¿De qué manera el concepto de simultaneidad interviene en la medición de la longitud de un objeto?
16. En la relatividad, las coordenadas temporal y espacial se combinan y se tratan en forma más o menos equivalente. ¿Tienen el tiempo y el espacio fundamentalmente la misma naturaleza, o se dan diferencias esenciales entre ellos que se conservan inclusive en la relatividad?
17. En la "paradoja de los gemelos", explique (en función de los latidos cardiacos, de las actividades mentales y físicas, etc.), por qué el gemelo más joven que regresa del viaje no ha vivido más tiempo que su tiempo correspondiente, aun cuando el gemelo que permaneció en casa diga lo contrario. Explique, pues, la afirmación: "Se envejece de acuerdo con su tiempo propio".
18. Si unas partículas de masa cero tienen una velocidad c dentro de un marco de referencia, ¿puede encontrarse en reposo dentro de otro? ¿Pueden tener una velocidad que no sea c?
19. Una partícula con masa cero (posiblemente un neutrino), puede transportar momento. Sin embargo, conforme a la ecuación 20-23 ($p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$), el momento es directamente proporcional a la masa y, por tanto, debería ser cero si la masa lo es. Explique su respuesta.
20. ¿Cuántas expresiones relativistas se le ocurren en las cuales el factor γ de Lorentz interviene como un simple multiplicador?
21. ¿Es la masa de una partícula compuesta estable (un núcleo de oro, por ejemplo) mayor, igual o menor que la suma de la masa de sus componentes? Explique su respuesta.
22. Algunas veces la masa de las partículas elementales se da en unidades de MeV/c^2; por ejemplo, la masa de un electrón es $0.511\ \text{MeV}/c^2$. ¿Se trata realmente de una unidad de masa? Explique su respuesta.
23. "La relación $E_0 = mc^2$ es esencial para que funcione una planta eléctrica basada en la fisión nuclear, pero su importancia es insignificante en el caso de una planta de combustibles fósiles." ¿Es verdadera esta afirmación? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
24. Una planta hidroeléctrica genera electricidad, porque el agua cae bajo la acción de la gravedad a través de una turbina, lo cual hace girar el eje del generador. Conforme al concepto de masa-energía, ¿debe identificarse el aspecto de la energía (la electricidad) con una reducción de la masa en alguna parte? ¿Es ésta una afirmación verdadera? Explique por qué, o por qué no.
25. Algunos dicen que la relatividad complica las cosas. Dé ejemplos que prueben lo contrario, es decir, en que las simplifique.

EJERCICIOS

20-1 Problemas con la física clásica

20-2 Los postulados de la relatividad especial

20-3 Consecuencias de los postulados de Einstein

1. Prescindiendo de los efectos debidos a los movimientos rotacional y orbital de la Tierra, un marco de laboratorio no es en rigor un marco inercial, porque una partícula puesta allí en reposo generalmente no permanecerá en ese estado; caerá bajo los efectos de la gravedad. Pero a menudo los eventos ocurren con tanta rapidez, que no tomamos en cuenta la caída libre y tratamos como inercial el marco. Considere, por ejemplo, un electrón de 1.0 MeV (en que $v = 0.941c$) que es proyectado horizontalmente hacia una cámara de pruebas de laboratorios, y que recorre una distancia de 20 cm. *a*) ¿Cuánto tardará en caer, y *b*) a qué distancia caerá durante este intervalo? ¿Qué puede concluir respecto a la conveniencia del laboratorio como marco inercial en este caso?
2. Un electrón de 100 MeV, donde $v = 0.999987c$, se desplaza por el eje de un tubo al vacío que tiene una longitud de 2.86 m medida por un observador S en el laboratorio, respecto al cual el tubo se halla en reposo. En cambio, un observador S' que se mueve junto con el electrón, verá que este tubo pasa por allí con una velocidad v. ¿Qué longitud del tubo debe medir este observador?
3. Una varilla está paralela al eje x de un marco de referencia S, moviéndose por el eje con una velocidad de $0.632c$. Su longitud en reposo es 1.68 m. ¿Cuál será su longitud medida en el marco S?
4. El tiempo de vida medio de los muones detenidos en un bloque de plomo en el laboratorio, se mide y se descubre que es 2.20 μs. El tiempo de vida medio de los muones de alta velocidad en un haz de rayos cósmicos vistos desde la Tierra es 16.0 μs al medirla. Calcule la velocidad de estos muones de rayos cósmicos.
5. Una partícula inestable de gran energía entra en un detector, y deja una estela de 1.05 mm de largo antes de decaer. Su velocidad relativa al detector fue de $0.992c$. ¿Cuál es su vida promedio normal? Es decir, ¿cuánto habría tardado en decaer si hubiera estado en reposo respecto al detector?
6. Una partícula se desplaza por el eje x' del marco S' con una velocidad de $0.43c$. El marco S' se desplaza con una velocidad de $0.587c$ respecto al marco S. ¿Cuál es su velocidad medida dentro del marco S?
7. Una nave espacial de 130 m de longitud, pasa una estación con una velocidad de $0.740c$. *a*) ¿Cuál es la longitud de la nave medida por la estación cronometradora? *b*) ¿Qué intervalo temporal entre el paso del extremo frontal y posterior de la nave registrará el monitor de la estación?
8. Se crea un pión en los niveles más altos de la atmósfera, cuando una partícula de rayos cósmicos y de gran energía choca con un núcleo atómico. El pión así formado desciende hacia la Tierra con un velocidad de $0.99c$. Los piones tienen una vida de 26 ns en un marco de referencia donde estén en reposo. ¿Qué distancia recorrerá por la atmósfera un pión típico medido en un marco fijo respecto a la Tierra antes de decaer?
9. Un satélite necesita una velocidad aproximada de 7.91 km/s para dar vuelta a la Tierra en una órbita baja. Suponga que dos satélites giran alrededor de ella en dirección opuesta. *a*) ¿Cuál es su velocidad relativa cuando se encuentran? Evalúe la ecuación galileana clásica de las velocidades. *b*) ¿Qué error fraccional se cometió por no haber usado la ecuación de la transformación relativista (correcta)?

20-4 La transformación de Lorentz

10. ¿Cuál debe ser el valor del parámetro de velocidad β para que el factor de Lorentz γ sea *a*) 1.01? *b*) 10.0? *c*) 100? *d*) 1,000?
11. Encuentre el parámetro de la velocidad de una partícula que tarda 2 años más que la luz en recorrer una distancia de 6.0 años luz.
12. El observador S asigna a un evento las coordenadas $x = 100$ km, $t = 200$ μs. Encuentre las coordenadas de este evento en el marco S', el cual se mueve en dirección de x creciente con una rapidez $0.950c$. Suponga que $x = x'$ *en* $t' = 0$.
13. El observador S señala que un evento ocurrió en el eje x, con $x = 3.20 \times 10^8$ m en el tiempo $t = 2.50$ s. *a*) El observador S' se mueve en la dirección de x creciente a una velocidad de $0.380c$. ¿Qué coordenadas indicará S' para el evento? *b*) ¿Qué coordenadas indicará S'', si S'' se desplazará en la dirección de x decreciente con la misma velocidad?
14. Demuestre las ecuaciones 20-17 para la transformación inversa de Lorentz, invirtiendo algebraicamente las ecuaciones 20-14 de su transformación.

20-5 Medición de las coordenadas espacio-tiempo de un evento

20-6 La transformación de velocidades

15. Supóngase que el observador S emite un haz luminoso en la dirección y ($v_x = 0$, $v_y = c$). El observador S' se mueve con una velocidad u en la dirección x. *a*) Encuentre los componentes v'_x y v'_y de la velocidad del haz luminoso de acuerdo con S', y *b*) demuestre que éste mide una velocidad c del haz luminoso.
16. Un protón de rayos cósmicos se acerca a la Tierra sobre su eje con una velocidad de $0.787c$ hacia el polo norte y otro hacia el polo sur con una velocidad de $0.612c$ (véase Fig. 20-24). Calcule la velocidad relativa con que una partícula se acerca a otra. (*Sugerencia*: Conviene considerar la Tierra y una de las partículas, como los dos marcos de referencia inercial.)

FIGURA 20-24. Ejercicio 16.

17. Se dice que la galaxia A se aleja de nosotros a una velocidad de $0.347c$. La galaxia B, situada exactamente en la dirección opuesta, también hace lo mismo con igual velocidad. ¿Qué velocidad

recesional debería encontrar un observador en la galaxia A encontrar *a*) para nuestra galaxia, y *b*) para la galaxia B?

18. De las mediciones del corrimiento al rojo de la luz emitida, se deduce que el *cuasar* Q_1 se aleja de nosotros con una velocidad de 0.788*c*. El cuasar Q_2, que se encuentra en la misma dirección en el espacio, pero más cerca de nosotros, se aleja con una velocidad de 0.413*c*. ¿Qué velocidad de Q_2 mediría un observador situado en Q_1?

19. En la figura 20-25, *A* y *B* son trenes sobre vías perpendiculares que parten de la estación *S*. Sus velocidades están en el marco de la estación (marco *S*). *a*) Calcule v_{AB}, la velocidad del tren *B* respecto al tren *A*. *b*) Calcule v_{BA}, la velocidad del tren *A* respecto al tren *B*. *c*) Comente el hecho de que estas dos velocidades relativas no señalan en direcciones contrarias.

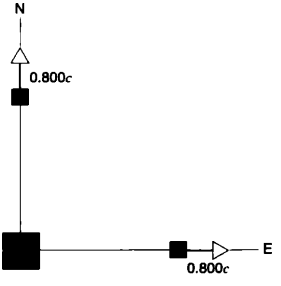


FIGURA 20-25. Ejercicio 19.

20-7 Consecuencias de la transformación de Lorentz

20. Un electrón se mueve con una velocidad tal, que en 1s podría darle la vuelta a la Tierra en el ecuador. *a*) ¿Qué velocidad tiene en función de la de la luz? *b*) ¿Cuál es su energía cinética *K*? *c*) ¿Qué error porcentual se comete, si se utiliza la fórmula clásica para calcular *K*?

21. El radio en reposo de la Tierra mide 6,370 km, su velocidad orbital alrededor del Sol es de 29.8 km/s. ¿Cuánto parecerá acortarse el diámetro terrestre para un observador, cuya posición le permite mirar pasar la Tierra por él a esta velocidad?

22. Un avión cuya longitud de reposo es 42.4 m, se desplaza respecto a la Tierra con una velocidad constante de 522 m/s. *a*) ¿En qué fracción de su longitud de reposo parecerá haberse acortado a los ojos de un observador situado en la Tierra? *b*) ¿Cuánto tardará en retrasarse 1 μs para los relojes de la Tierra, un reloj del avión? (Suponga que sólo se aplica la relatividad especial.)

23. Una nave espacial cuya longitud en reposo es 358 m, tiene una velocidad de 0.728*c* respecto a cierto marco de referencia. Un micrometeorito con una velocidad de 0.817*c* en este marco, rebasa a la nave en una vía antiparalela. ¿Cuánto tarda en hacerlo?

24. Un reloj se mueve sobre el eje *x* a una velocidad de 0.622*c*, indica cero cuando cruza el origen. *a*) Calcule el factor de Lorentz. *b*) ¿Qué hora indica el reloj al pasar $x = 183$ m?

25. Un viajero espacial despega de la Tierra y avanza a una velocidad de 0.988*c* hacia la estrella Vega, que está a una distancia de 26.0 años luz. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido en los relojes de la Tierra *a*) cuando el viajero llega a ella, y *b*) cuando los observadores en la Tierra reciban el aviso de que ya llegó? *c*) ¿Cuántos años más le calcularán los observadores en la Tierra, en relación con la edad que tenía al iniciar el viaje?

26. Quiere usted realizar un viaje redondo desde la Tierra en una nave espacial, yendo a velocidad constante en línea recta durante 6 meses para regresar después a la misma velocidad. Quiere además, a su regreso, encontrar la Tierra como será 1,000 años en el futuro. *a*) ¿A qué velocidad va? *b*) ¿Importa o no si sigue una trayectoria recta en su viaje? Si por ejemplo, recorriera un círculo durante 1 año, ¿esperaría saber que en los relojes de la Tierra transcurrieron 1,000 años cuando regrese?

20-8 Momento relativista

27. Demuestre que 1 kg. m/s = 1.875×10^{21} MeV/c.

28. Una partícula tiene un momento igual a *mc*. Calcule su velocidad.

29. Calcule el parámetro de velocidad β, de una partícula con un momento de 12.5 MeV/*c*, si es *a*) un electrón, y *b*) un protón.

20-9 Energía relativista

30. Encuentre el parámetro de velocidad β y el factor de Lorentz γ, para un electrón cuya energía cinética es *a*) 1.0 keV, *b*) 1.0 MeV y *c*) 1.0 GeV.

31. Encuentre el parámetro de velocidad β y el factor de Lorentz γ, para una partícula cuya energía cinética es10 MeV, si dicha partícula es *a*) un electrón, *b*) un protón y *c*) una partícula alfa.

32. Una partícula tiene una velocidad de 0.990*c* en un marco de referencia de laboratorio. ¿Cuál es su energía cinética, su energía total y su momento si es *a*) un protón, o *b*) un electrón?

33. Se piensa que los cuasares son los núcleos de galaxias activas en las primeras etapas de su formación. Un cuasar típico emite energía a una velocidad de 1.20×10^4 W. ¿A qué velocidad se reduce su masa para suministrarla? Exprese su respuesta en unidades de masa solar por año, en que una unidad (msa) es la masa de nuestro Sol.

34. Calcule la velocidad de una partícula *a*) cuya energía cinética sea el doble de su energía en reposo, y *b*) cuya energía total sea el doble de su energía en reposo.

35. *a*) Mediante la expansión binomial (véase Ap. I), demuestre que la ecuación 20-27 se reduce a la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$, cuando $v << c$. *b*) Evalúe el segundo término de la expansión para calcular el valor de v/c, en que el error al utilizar la expresión clásica es a lo sumo a 1%.

36. Un automóvil de 1,000 kg se desplaza a 20 m/s. Calcule la energía cinética empleando la ecuación no relativista y la ecuación relativista. ¿Cuál es la diferencia relativa entre estos resultados?

37. Encuentre el momento de una partícula de masa *m*, a fin de que su energía total sea el triple de su energía en reposo.

38. Utilice las velocidades de la figura 20-20 en el marco *S'*, y demuestre que, según éste, las energías cinéticas antes y después de la colisión calculadas clásicamente están dadas por las ecuaciones 20-26.

39. Reconsidere la colisión de la figura 20-20. Por medio de la ecuación 20-27 referente a la energía cinética relativista, calcule las energías cinéticas inicial y final dentro del marco *S'*, y pruebe así que la energía cinética se conserva en este marco como en el *S*.

40. Considere los siguientes objetos, todos los cuales se mueven en espacio libre: un fotón de 2.0 eV, un electrón de 0.40 MeV y un protón de 10 MeV. *a)* ¿Cuál de ellos se desplaza con mayor rapidez? *b)* ¿Cuál con la menor rapidez? *c)* ¿Cuál tiene el momento máximo? *d)* ¿Y el momento más pequeño? (*Nota*: Un fotón es una partícula luminosa de masa cero.)

41. ¿Cuánto trabajo debe efectuarse para aumentar la velocidad de un electrón de *a)* 0.18*c* a 0.19*c*, y *b)* de 0.98*c* a 0.99*c*? Nótese que el aumento de velocidad (0.01*c*), es el mismo en todos los casos.

42. Dos partículas idénticas chocan y se mantienen juntas, con una masa de 1.30 mg cada una que se mueve con velocidad igual pero opuesta de 0.580*c* en el marco de referencia de laboratorio. Determine la masa de la partícula resultante.

43. *a)* Considere el decaimiento del caón descrito en el problema resuelto 20-10, pero utilice un marco de referencia (el del centro de masa), donde los caones se hallan en reposo inicialmente. Demuestre que los dos piones emitidos en el decaimiento se dirigen en dirección contraria, pero con velocidad igual de 0.827*c*. *b)* ¿Cuál es la velocidad de los caones originales observados en el marco del laboratorio? *c)* Suponga que los dos piones se emiten dentro del marco de centro de masa con las velocidades $v'_x = +0.827c$ y $v'_x = -0.827c$. Calcule las velocidades correspondientes en ese marco, para demostrar que las energías cinéticas en él son idénticas a las que se encuentran en la solución al problema resuelto 20-10.

44. Una partícula alfa con una energía cinética de 7.70 MeV, choca con un núcleo ^{14}N en reposo. Se producen un núcleo ^{17}O y un protón; este último se emite a 90° en dirección de la partícula alfa incidente, y transporta 4.44 meV de energía cinética. La energía restante de las partículas son: partícula alfa, 3,730.4 MeV; ^{14}N, 13,051 MeV; protón, 939.29 MeV; ^{17}O, 15,843 MeV. *a)* Calcule la energía cinética del núcleo ^{17}O. *b)* ¿En qué ángulo respecto a la dirección de la partícula alfa incidente se desplaza el núcleo ^{17}O?

20-10 El sentido común y la relatividad especial

PROBLEMAS

1. La longitud de una nave espacial se mide y se comprueba que es exactamente la mitad de su longitud en reposo. *a)* ¿Cuál es su velocidad respecto al marco del observador? *b)* ¿Con qué factor se atrasa el reloj de la nave en comparación con los del marco del observador?

2. El marco S' se mueve en relación con el marco S a 0.620*c* en dirección de x creciente. Dentro del marco S' se mide una partícula, y se descubre que tiene una velocidad de 0.470*c* en dirección de x' creciente. *a)* ¿Cuál es su velocidad respecto al marco S? *b)* ¿Cuál sería su velocidad respecto a S, si avanzara (a 0.470*c*) hacia x' decreciente dentro del marco S'? En ambos casos compare sus respuestas con las predicciones de la ecuación clásica de la transformación de velocidades.

3. Un experimentador hace los arreglos necesarios para disparar simultáneamente dos flashes, uno azul situado en el origen de su marco de referencia, y otro rojo situado en $x = 30.4$ km. Un segundo observador que se dirige a 0.247*c* hacia x creciente, también ve los destellos. *a)* ¿Qué intervalo temporal encuentra entre ellos? *b)* ¿Cuál de los destellos dice él que ocurre primero?

4. El marco inercial S' se desplaza con una velocidad de 0.60*c* respecto al marco S en dirección de x creciente. Dentro del marco S, el evento 1 tiene lugar en el origen con $t = 0$, y el evento 2 en el eje x con $x = 3.0$ km y con $t = 4.0$ ps. ¿Qué tiempos de ocurrencia registra el observador S' con esos mismos eventos? Explique la inversión del orden temporal.

5. Demuestre que

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2,$$

es independiente de γ y u.

6. Un núcleo radiactivo se desplaza con una velocidad constante de 0.240*c*, sobre el eje x de un marco de referencia S fijo respecto al laboratorio. Decae emitiendo un electrón cuya velocidad es 0.780*c*, medida dentro de un marco de referencia S' que se mueve junto con el núcleo. Considere primero los casos en que el electrón emitido se mueve *a)* sobre el eje común xx', y *b)* sobre el eje y', y determine en ambos casos, su velocidad (magnitud y dirección) medida dentro del marco S. *c)* Pero suponga que el electrón emitido, visto ahora desde el marco S, avanza a lo largo del eje y de él con una velocidad de 0.780*c*. ¿Cuál es su velocidad (magnitud y dirección) medida dentro del marco S'?

7. Una nave espacial en reposo dentro de un marco de referencia S, recibe un incremento de velocidad de 0.500*c*. Después recibe otro incremento igual dentro del nuevo marco, y este proceso continúa hasta que su velocidad respecto a su marco original S rebasa los 0.999*c*. ¿Cuántos incrementos requiere?

8. Un observador S ve un destello de luz roja a 1,210 m de distancia, y otro de luz azul 730 m más cerca y en la misma línea recta. Mide el intervalo temporal entre ambos destellos y comprueba que es de 4.96 μs; el destello de luz roja ocurre primero. *a)* Calcule la velocidad, magnitud y dirección relativas de un segundo observador S', que registraría los destellos como si ocurrieran en el mismo lugar. *b)* Desde el punto de vista de S', ¿cuál de los destellos se producirá primero y cuál es el intervalo de tiempo medido entre ellos?

9. Considere el problema anterior. Suponga que el observador S ve los dos destellos en la misma posición que en ese problema, sólo que ahora ocurren con mayor cercanía temporal. ¿Cuál puede ser esta cercanía que todavía permita determinar el marco S' donde tienen lugar en el mismo sitio?

10. *a)* ¿Puede en teoría una persona ir de la Tierra al centro galáctico (que está a una distancia aproximada de 23,000 años luz) en el tiempo de una vida normal? Explique su respuesta usando argumentos referentes a la dilatación del tiempo y a la contracción de la longitud. *b)* ¿Qué velocidad constante haría falta para efectuar el viaje en 30 años (tiempo propio)?

11. Los observadores S y S' están de pie en el origen de sus respectivos marcos, los cuales se mueven uno en relación con otro a una velocidad de 0.600*c*. Tienen un reloj ordinario que, como de costumbre, ponen en cero cuando los dos orígenes coinciden. El observador S mantiene a la vista el reloj de S'. *a)* ¿Qué hora marcará este último cuando el reloj de S indique 5.00 μs? *b)* ¿Qué hora leerá el observador S en el reloj de S', cuando su reloj marque 5.00 μs?

12. Demuestre que dos eventos A y B separados por una distancia Δr y simultáneos en el marco S, se separarán una distancia mayor dentro de cualquier otro marco S'.

13. *a*) Si pueden medirse la energía cinética K y el momento p de una partícula, debería ser posible determinar su masa e identificarla de ese modo. Demuestre que

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}.$$

b) ¿A qué se reduce la expresión anterior como $v/c \to 0$, donde v es la velocidad de la partícula? *c*) Determine la masa de una partícula, cuya energía cinética es 55.0 MeV, y cuyo momento es 121 MeV/c; exprese su respuesta en términos de la masa m del electrón.

14. En una colisión de gran energía de una partícula primaria de rayos cósmicos, en la parte superior de la atmósfera terrestre —120 km arriba del nivel del mar—, se crea un pión con una energía total de 135 GeV que desciende verticalmente. En su marco propio, decae 35.0 ns después de ser generado. ¿A qué altitud sobre el nivel del mar se realiza el decaimiento? La energía en reposo de un pión es 139.6 MeV.

15. Una partícula de masa m que se desplaza con una velocidad relativista, tiene una colisión completamente inelástica con otra partícula idéntica que se halla en reposo al inicio. Calcule *a*) la velocidad de la partícula resultante, y *b*) su masa. Exprese sus respuestas en función del factor γ de Lorentz de la partícula incidente.

16. *a*) Suponga que tenemos una partícula acelerada del reposo por la acción de una fuerza F. Si suponemos que la segunda ley de Newton aplicable a una partícula ($F = dp/dt$), es válida en la relatividad, demuestre que usando el teorema de trabajo-energía, la energía cinética final K puede escribirse como $K = \int v\, dp$. *b*) Por medio de la ecuación 20-23 referente al momento relativista, demuestre que al realizar la integración en *a*) se obtiene la ecuación 20-27 para la energía cinética relativista.

17. *a*) En la física experimental de altas energías, se hace que las partículas energéticas circulen en dirección contraria en los llamados anillos de almacenamiento, y se permite que choquen frontalmente. En este sistema cada una tiene la misma energía cinética total K en el laboratorio. Las colisiones pueden verse como totalmente inelásticas; la energía en reposo de las partículas más toda la energía cinética disponible, puede usarse para generar nuevas partículas y dotarles de energía cinética. Demuestre que la energía disponible en este sistema puede escribirse así:

$$E_{\text{nuevo}} = 2mc^2\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right),$$

donde m es la masa de las partículas en colisión. *b*) ¿De cuánta energía se dispone cuando se emplean protones de 100 GeV en esta forma? *c*) ¿Qué energía de protones se requerirá para contar con 100 GeV? (*Nota*: Compare sus respuestas con las del problema 18, que describe otro sistema menos eficaz de bombardeo de energía.)

18. *a*) Un protón de masa m, al que se acelera en un sincrotrón de protones hasta alcanzar una energía cinética K, choca con otro (blanco) en reposo dentro del laboratorio. La colisión es enteramente inelástica; la energía en reposo de los dos, más toda la energía cinética consistente con la ley de conservación del momento, está disponible para generar partículas y dotarlas de energía cinética. Demuestre que la energía disponible para ello está dada por

$$E_{\text{nuevo}} = 2mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{K}{2mc^2}\right)}.$$

b) ¿De cuánta energía se dispone cuando se emplean de esta manera protones de 100 GeV? *c*) ¿Cuánta energía de protones se necesitará para contar con 100 GeV? (*Nota*: Compare este problema con el 17.)

19. Una partícula de masa M originalmente en reposo, es golpeada por otra de masa m que se mueve con velocidad v_i. Tras la colisión, las dos siguen direcciones opuestas con la misma velocidad v_f. Suponiendo una colisión elástica relativista, encuentre la razón de las masas M/m en función de $\beta = v_i/c$. Demuestre que esto se reduce al valor no relativista de 3 como $v_i \to 0$. (*Nota*: Aunque este problema puede resolverse en forma manual, también es un buen problema para resolverlo con un sistema algebraico con ayuda de la computadora, como los programas Maple o Mathematica.)

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Una nave espacial se dirige a la estrella más cercana (otra que no sea el Sol) con una aceleración constante de g, medida por los ocupantes. Pasa la primera mitad del viaje acelerando en g y la segunda mitad desacelerando en g. ¿Cuánto dura un viaje sencillo medido por los viajeros espaciales? ¿Cuánto dura un viaje sencillo medido por los habitantes de la Tierra?

CAPÍTULO 21

TEMPERATURA

Con este capítulo iniciamos el estudio de la física térmica, rama que se ocupa de los cambios en las propiedades de los sistemas que ocurren cuando se realiza trabajo en ellos (o por parte de ellos) y se les agrega (o se les quita) energía calorífica. En los sistemas como en los gases confinados las propiedades en cuestión son presión, volumen, temperatura, energía y —como veremos— entropía, propiedad que se explica en el Capítulo 24.

Este capítulo versa sobre la temperatura, concepto en que se fundan todas las leyes de la termodinámica. Ya lo utilizamos en capítulos anteriores; ahora debemos definirlo con precisión como hicimos con otras nociones que hemos encontrado. También vamos a introducir el concepto de gas ideal, que será un sistema útil al analizar la termodinámica y al dar ejemplos de ella.

21-1 TEMPERATURA Y EQUILIBRIO TÉRMICO

Todos tenemos un sentido natural de la temperatura y lo hemos empleado espontáneamente en capítulos anteriores. En este queremos definirla en forma rigurosa. Del mismo modo que fuimos más allá del significado ordinario de "empujar" y "tirar" al definir la fuerza, lo mismo debemos hacer con el de "caliente" y "frío" al definir la temperatura. Antes de ocuparnos directamente de ella, hay que delimitar el concepto de *equilibrio térmico*, que trata la cuestión de si la temperatura de dos sistemas es o no igual.

La figura 21-1*a* muestra dos sistemas *A* y *B* que, entre muchas cosas, podrían ser bloques metálicos o gases confinados. Están aislados uno de otro y del ambiente, es decir, no sale ni entra energía. Por ejemplo, los sistemas pueden estar rodeados de paredes gruesas hecha de Styrofoam, sustancia rígida e impermeable. Se dice que las paredes son *adiabáticas*, es decir, *térmicamente aislantes*. Los cambios en las propiedades medidas de uno de los sistemas no repercuten en las del otro.

Como se aprecia en la figura 21-1*b*, sustituimos la pared adiabática que separa los dos sistemas por otra que permita el

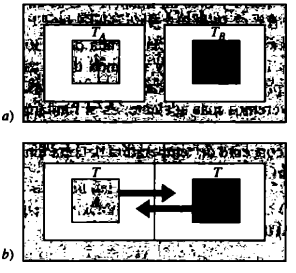


FIGURA 21-1. *a*) Los sistemas *A* y *B* están separados por una pared adiabática. Tienen temperaturas distintas T_A y T_B. *b*) Están separados por una pared diatérmica, que permite intercambiar energía entre ellos. Con el tiempo alcanzarán el equilibrio térmico y después tendrán la misma temperatura *T*.

flujo de energía en una forma que denominamos calor en el Capítulo 13. Un ejemplo de ello podría ser una lámina delgada y rígida de cobre. Esa pared se denomina *diatérmica*, es decir, *conductora térmica.*

Cuando los dos sistemas se ponen en contacto mediante una pared diatérmica, el paso de energía calorífica por ella —si es que ocurre— hace que cambien las propiedades de los dos sistemas. Si se trata de gases confinados, su presión pudiera alterarse. Los cambios son relativamente rápidos al inicio, pero se vuelven más lentos con el tiempo, hasta que finalmente todas las propiedades medidas de los sistemas se aproximan a valores constantes. Cuando ello ocurre, decimos que los dos sistemas se encuentran en *equilibrio térmico* entre sí. Así, una prueba de si dos sistemas están o no en equilibrio térmico consiste en ponerlos en contacto térmico: si sus propiedades no cambian, lo estarán; si cambian, no lo estarán.

Tal vez sea difícil o hasta imposible colocar dos sistemas en equilibrio térmico por medio de una pared diatérmica. (Quizá sean demasiado voluminosos para moverlos o estén demasiado separados.) Por ello generalizamos el concepto de equilibrio térmico para que no haya necesidad de ponerlos en contacto.

Una forma de probar dos sistemas individuales consiste en utilizar un tercer sistema *C*. Al ponerlo en contacto con *A* y luego con *B*, podríamos descubrir que *A* y *B* se hallan en equilibrio térmico sin que siquiera los pongamos en contacto directo. Esto se resume en un postulado llamado *ley cero de la termodinámica*, la cual se enuncia así:

> *Si los sistemas* A *y* B *están en equilibrio térmico con un tercer sistema* C, *estarán en equilibrio térmico entre sí.*

La ley anterior puede parecer simple pero no lo es. Hay situaciones donde un sistema *C* puede tener interacciones equivalentes con dos *A* y *B*, pero éstos no tendrán una interacción similar entre sí. Por ejemplo, si *A* y *B* son clavos no magnetizados de hierro y *C* es un imán, *A* y *C* se atraerán entre sí como hacen *B* y *C*. Pero *A* y *B* no se atraerán.

La ley cero apareció en la década de 1930, mucho después que las leyes primera y segunda de la termodinámica habían sido propuestas, aceptadas y designadas con un nombre. Como veremos más adelante, es el fundamento del concepto de temperatura, esencial para esas dos leyes. La ley que establece el concepto de temperatura debería tener un número menor, de ahí el nombre de cero.

Temperatura

Cuando dos sistemas se hallan en equilibrio térmico, decimos que tienen la misma *temperatura.* Supóngase, por ejemplo, que son dos gases y que inicialmente su temperatura, presión y volumen son diferentes. Luego de colocarlos en contacto y esperar suficiente tiempo para que alcancen el equilibrio, generalmente su presión no será igual y tampoco su volumen; en cambio, su temperatura tendrá siempre el mismo equilibrio térmico. *Sólo mediante este argumento basado en el equilibrio térmico podemos introducir la noción de temperatura en física.*

Aunque estamos familiarizados con el significado común de la temperatura, es necesario asignarle un significado exacto si queremos que sea útil como medida científica. Nuestra noción subjetiva de ella no es confiable en absoluto. Una experiencia frecuente consiste en tocar un barandal metálico al aire libre en un día muy frío y luego un objeto cercano de madera. El barandal se sentirá más frío, a pesar de que ambos tienen la misma temperatura. Lo que se prueba al tocar un objeto frío no es sólo su temperatura, sino también su capacidad de extraer de la mano energía (en forma de calor) por transferencia. En tales casos, la mano da una medida subjetiva e incorrecta de la temperatura. La subjetividad puede demostrarse de modo convincente metiendo la mano izquierda en agua fría y la derecha en agua caliente. Si después se meten las dos en agua templada, la mano izquierda sentirá el agua más caliente de lo que es y la mano derecha la sentirá más fría.

En uso corriente de la ley cero *llamamos termómetro* el sistema *C*, al que se refiere la formulación de la ley. Si alcanza por separado el equilibrio térmico con los sistemas *A* y *B* (que pueden ser baldes de agua muy separados entre sí), y si ofrece la misma lectura, concluiremos que se encuentran en equilibrio térmico y que, por tanto, tienen la misma temperatura. Nótese que, para probar si dos sistemas tienen o no igual temperatura, no tenemos que crear una escala. Si nuestro termómetro (sistema *C*) es del tipo de mercurio en vidrio, no es necesario que esté marcado en grados. Basta ponerlo en contacto con el sistema *A*, marcar el nivel de mercurio y luego colocarlo en contacto con el sistema *B*, observando si el mercurio alcanza el mismo nivel.

He aquí una formulación de la ley cero en función de la temperatura:

> *Existe una magnitud escalar denominada temperatura, que es una propiedad de todos los sistemas termodinámicos en equilibrio. Dos sistemas están en equilibrio si y sólo si sus temperaturas son iguales.*

Así pues, la ley cero define el concepto de temperatura y permite construir termómetros y utilizarlos.

21-2 ESCALAS DE TEMPERATURA

Como se ve en la tabla 1-1, la temperatura (representada con el símbolo *T*) es una de las siete unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades (SI), de ahí que debamos definirla con mucho rigor y diseñar métodos para medirla que puedan reproducirse en los laboratorios de cualquier parte del mundo. Más adelante en esta sección describiremos los termómetros basados en las conocidas escalas Fahrenheit y Celsius. Son escalas de uso práctico y las temperaturas que miden carecen de un profundo significado físico. La *escala Kelvin* es la que se ha adoptado como fundamental en esta disciplina. Se basa en el reconocimiento de que, si bien no tiene límite la

temperatura máxima de un sistema, sí lo tiene su nivel mínimo. Este *cero absoluto de la temperatura* se define como cero en la escala Kelvin, que la mide en grados sobre este límite inferior absoluto. Cuando la temperatura aparece en una ecuación de importancia fundamental para la física, se refiere siempre a esta escala Kelvin (o absoluta).

Para determinar el tamaño del grado en la escala Kelvin, hay que identificar un sistema calibrador al que, por convención internacional, le asignamos una temperatura específica. Para ello seleccionamos un sistema donde el hielo, el agua líquida y el vapor de agua coexistan en equilibrio térmico. Ese punto, muy cercano al punto de congelación del agua a presión atmosférica, recibe el nombre de *punto triple de agua*. (Se seleccionó en vez de punto de congelación porque se reproduce con mayor uniformidad.) La figura 21-2 muestra una celda de punto triple como la que se emplea en el National Institute of Standards and Technology (NIST). El termómetro que se desea calibrar se introduce en el pozo de una celda de punto triple.

Por convención internacional se decidió que la temperatura Kelvin en el punto triple es

$$T_{tr} = 273.16\ \text{K} \quad \text{(exactamente)}, \tag{21-1}$$

donde K (kelvin) es la unidad base de la temperatura en la escala Kelvin. Así, el *kelvin*, nombre que le damos al grado en la escala, se define como 1/273.16 de la temperatura del punto triple del agua. En lugar de la ecuación 21-1, la comunidad internacional pudo haber escogido T_{tr} = 100 K u otro número cualquiera, pero no lo hizo. La selección por la que optaron estaba diseñado de modo que el tamaño del grado en la escala Kelvin (1 kelvin) fuera igual al del grado de una escala Celsius ya bien establecida.

Nótese que no usamos el símbolo de grado al indicar una temperatura en esta escala. Podríamos decir, por ejemplo, que el punto de fusión del plomo es 600.7 K, esto es, 600.7 kelvin.

Queda por describir cómo se mide la temperatura Kelvin de un sistema, tema que abordaremos en la sección 21-3.

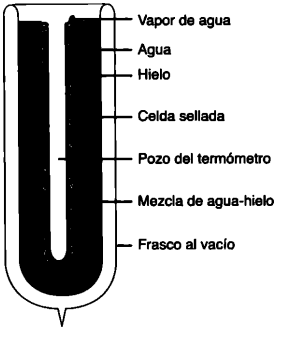


FIGURA 21-2. Celda de punto triple del National Institute of Standards and Technology. La celda interna en forma de **U** contiene agua pura y se sella después de extraer el aire. Se sumerge en un baño de agua-hielo. El sistema se encuentra en el punto triple cuando hay vapor de hielo, agua y vapor de agua que están en equilibrio dentro de la celda. El termómetro que se desea calibrar se introduce en el pozo central.

Las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit

En casi todos los países del mundo la escala Celsius (llamada antes escala centígrada) se usa en las medidas comunes y comerciales, así como en algunas científicas. Tradicionalmente se fundaba en dos puntos de calibración: el punto normal de congelamiento del agua, definido como 0°C, y el punto normal de ebullición del agua, definido como 100°C. Los dos puntos servían para calibrar termómetros y otras temperaturas se deducían después por interpolación o extrapolación. Adviértase que el símbolo de grado (°) se emplea para expresar las temperaturas en esta escala.

Hoy ya no se emplean esos dos puntos fijos para definirla, sino que se define una temperatura (T_C) en la escala Celsius a partir de la temperatura correspondiente Kelvin T por medio de

$$T_C = T - 273.15. \tag{21-2}$$

Los puntos de congelación y de ebullición del agua (a una presión de 1 atm) se miden hoy en la escala Kelvin y luego se convierten en la de Celsius usando la ecuación 21-2. Los valores experimentales son, respectivamente, 0.00°C y 99.975°C, que en la práctica concuerdan con el fundamento histórico de la definición de la escala Celsius. Nótese que en la ecuación 21-2 se indica que la temperatura Celsius del punto triple del agua es 0.01°C. Según señalamos, ese valor se aproxima a la temperatura del punto de congelación del agua. Nótese asimismo que, conforme a la ecuación 21-2, el cero absoluto de la temperatura es −273.15°C.

La escala Fahrenheit también se basa en dos puntos fijos que, tras varias selecciones, se convirtieron en 1. el punto normal de congelación del agua, definido como 32°F, y 2. el punto normal de ebullición del agua, definido como 212°F. Ahora se considera que la relación entre esta escala y la Celsius es

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32. \tag{21-3}$$

Igual que en la escala Celsius, en la Fahrenheit el símbolo de grado sirve para indicar las temperaturas, por ejemplo, 98.6°F (temperatura bucal normal del cuerpo humano).

La conversión de una escala a otra se hace fácilmente: basta recordar unos cuantos puntos correspondientes como los de la figura 21-3, que compara las escalas Kelvin, Celsius y Fahrenheit. También hay que recurrir a la igualdad entre un

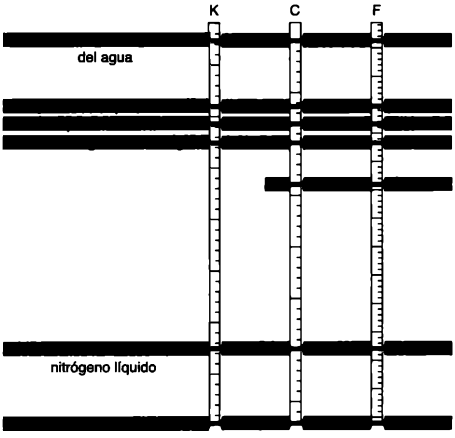


FIGURA 21-3. Comparación de las escalas Kelvin, Celsius y Fahrenheit. Nótese que las dos últimas coinciden en −40°.

intervalo de 9 grados en la de Fahrenheit y a un *intervalo* de 5 grados en la de Celsius, que expresamos así:

$$9\ F^\circ = 5\ C^\circ. \tag{21-4}$$

Nótese que los *intervalos* anteriores se expresan como F° y C°, no como °F o °C. Por tanto, podríamos escribir o decir: "La temperatura aquí es 90°F. Sería más agradable si fuera 15 F° más fría".

21-3 MEDICIÓN DE LAS TEMPERATURAS

En esta sección vamos a abordar el problema de medir las temperaturas de un sistema en la escala Kelvin. Una vez efectuada la medición, será fácil calcular la temperatura del sistema en las escalas Celsius y Fahrenheit por medio de las ecuaciones 21-2 y 21-3. Para realizar la medición se necesita un termómetro. ¿Qué forma adoptará éste?

En teoría, cualquier propiedad de una sustancia que varíe con la temperatura puede ser la base del termómetro. A continuación se mencionan algunos ejemplos: el volumen de un líquido (como en el conocido termómetro de mercurio en vidrio), la presión de un gas conservado a volumen constante, la resistencia eléctrica de un alambre, la longitud de una tira metálica o el color de un filamento de lámpara eléctrica. Todos ellos tienen una temperatura variable y se emplean frecuentemente como termómetros. *La selección de una de las propiedades anteriores produce un dispositivo sensible o escala de temperatura "particular", que se define sólo para esa propiedad y que no necesariamente concuerda con otras propiedades.* Desde luego, por definición de la ecuación 21-1, todos los termómetros concordarán en el punto triple de agua. Pero se plantea la pregunta: ¿concordarán en otras temperaturas más elevadas o más bajas? La respuesta es negativa como se comprueba en el problema resuelto 21-1. Pese a ello, un termómetro "particular" cuando se calibra adecuadamente con normas aceptadas puede ser una norma secundaria útil para medir la temperatura. En efecto, casi todas las mediciones se llevan a cabo con este tipo de termómetros.

Supongamos que nuestro termómetro se basa en un sistema en el cual se mide el valor de una propiedad termométrica todavía no especificada X. La temperatura es una función de X. Escogemos la relación más simple posible, a saber, una relación lineal

$$T^* = aX \tag{21-5}$$

donde a es una constante. La temperatura dada por la ecuación 21-5 la designamos mediante T^* y no por T, porque será una temperatura del dispositivo sensible y no una auténtica temperatura Kelvin. Podemos determinar el valor de a con sólo medir X en el punto triple del agua, obteniendo el valor X_{tr}. Para la temperatura en función de X tenemos entonces

$$T^*(X) = (273.16\ \mathrm{K})\frac{X}{X_{tr}}. \tag{21-6}$$

Queda únicamente por escoger una adecuada propiedad X dependiente de la temperatura y comprobar si puede diseñarse un método que nos dé la verdadera temperatura Kelvin y no T^*.

PROBLEMA RESUELTO 21-1. La resistencia de una bobina de platino aumentará en un factor de 1.392 entre el punto triple del agua y su punto de ebullición a presión atmosférica (es decir, el punto normal de ebullición). ¿Qué temperatura del punto normal de ebullición se mide con este termómetro?

Solución En este caso, la propiedad termométrica generalizada X que aparece en la relación definitoria de la ecuación 21-6 es la resistencia R. No nos dan R_{tr}, pero nos dicen que $R = 1.392\ R_{tr}$. Por consiguiente, al sustituir X por R, la ecuación 21-6 queda así:

$$T^*(R) = T_{tr}\frac{R}{R_{tr}} = (273.16\ \mathrm{K})(1.329) = 380.2\ \mathrm{K}.$$

Este valor indica la "temperatura de la resistencia de platino" del agua en ebullición. Otros termómetros ofrecerán valores distintos. Por ejemplo, el punto normal de ebullición del agua medido por un termómetro (una *pila termoeléctrica*), basada en el voltaje generado por dos alambres diferentes (cobre y constantano) es 412.5 K. La temperatura verdadera Kelvin del punto normal de ebullición (Fig. 21-3) es 373.125 K. Aunque estos termómetros de "escala particular" son indispensables en la práctica cuando están bien calibrados, no podemos recurrir a ellos para proporcionar medidas consistentes de la temperatura en la escala Kelvin.

El termómetro de gas a volumen constante

La propiedad termométrica que resulta más idónea para medir la temperatura en la escala Kelvin es la presión p ejercida por un volumen fijo de gas. El dispositivo con que se pone en

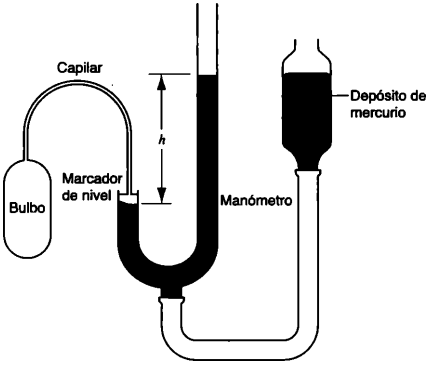


FIGURA 21-4. Termómetro de gas a volumen constante. El bulbo puede sumergirse en una celda de punto triple y luego en el baño de un líquido cuya temperatura tratamos de medir. La diferencia entre la presión del gas dentro del tubo y la presión atmosférica se calcula a partir de la altura h de la columna de mercurio en el manómetro. La simplicidad del dibujo oculta la complejidad de un termómetro de gas como los que se encuentran, por ejemplo, en los laboratorios nacionales de estandarización de muchos países.

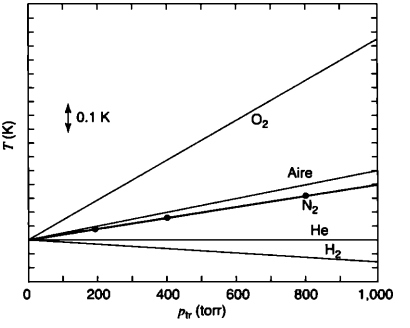


FIGURA 21-5. A medida que la temperatura del gas nitrógeno en un termómetro de gas a volumen constante se reduce de 800 a 400 torr y luego a 200, la temperatura deducida del sistema se acerca al límite correspondiente a una presión de cero. Otros gases se aproximan al mismo límite. El intervalo entero de la escala vertical es de cerca de 1 K en condiciones normales.

práctica recibe el nombre de *termómetro de gas con volumen constante*. En la figura 21-4 se incluye un esquema de sus características esenciales. Un matraz lleno de gas puede sumergirse alternativamente en un baño del líquido cuya temperatura deseamos medir o en un baño de punto triple. El volumen del gas en el matraz (o bulbo), que según suponemos es nitrógeno, se conserva constante elevando o bajando el depósito lleno de mercurio, de modo que el nivel de este último en el brazo izquierdo del manómetro siempre coincide con un marcador fijo.

He aquí el procedimiento con que se mide la temperatura:

Paso 1: *a*) Se sumerge el matraz (o bulbo) lleno de nitrógeno en un baño de punto triple y en el manómetro se lee la presión p_{tr} del gas contenido. Supongamos que, en un caso particular, p_{tr} = 800 torr. *b*) Se sumerge el matraz (o bulbo) en el baño cuya temperatura se quiere medir y se lee la nueva presión p. Calcule T^* a partir de la ecuación 21-6, donde X se reemplaza por p y X_{tr} con p_{tr}. En la figura 21-5 el resultado, que puede considerarse provisional, se grafica como un punto a 800 torr.

Paso 2: Devuelva el matraz (o bulbo) del termómetro al baño de punto triple y extraiga un poco de gas, con lo cual reducirá su densidad. Ahora p_{tr} tiene un valor más pequeño, digamos 400 torr. Entonces retornamos el matraz (o bulbo) al baño cuya temperatura tratamos de determinar, medimos un nuevo valor de p y calculamos una nueva temperatura provisional T^*, también graficada en la figura 21-5.

Continuamos el método, reducimos paso por paso la cantidad de gas dentro del matraz (o bulbo) y, en cada nuevo valor de p_{tr} calculamos T^*. Si graficamos los valores de T^* en función de p_{tr}, podemos extrapolar la curva resultante a la intersección con el eje en $p_{tr} = 0$. En la figura 21-5 se muestran los puntos de datos del gas nitrógeno y la extrapolación resultante de línea recta.

Si repetimos este procedimiento de extrapolación paso por paso con gases que no sean el nitrógeno, conseguiremos los resultados de la figura 21-5. Vemos que, al reducir la presión del punto triple p_{tr} (y por lo mismo la densidad del gas), las lecturas de la temperatura en los termómetros a volumen constante se aproximan al mismo valor T, sin importar cuál gas se use. Podemos considerar T como la temperatura del sistema y definimos una *escala de temperatura de gas ideal:*

$$T = (273.16\ \text{K}) \lim_{p_{tr} \to 0} \frac{p}{p_{tr}} \quad (\text{constante } V). \qquad (21\text{-}7)$$

Dentro de este contexto, definimos el "gas ideal" como aquel que produciría la misma temperatura T en todas las presiones sin necesidad de extrapolación. En la sección 21-5 volveremos a ocuparnos de los gases ideales.

Si queremos que la temperatura sea una magnitud física verdaderamente fundamental, es indispensable que su definición no dependa de las propiedades de determinados materiales. Por ejemplo, no convendría que una magnitud tan importante se basara en la expansividad térmica del mercurio, en la resistividad eléctrica del platino ni en cualquiera otra propiedad de un "manual". Escogemos el termómetro de gas como estándar precisamente porque ninguna de esas propiedades intervienen en su funcionamiento. Obtendremos siempre la misma respuesta con cualquier gas que utilicemos.

La temperatura más baja que puede medirse con un termómetro de gas es 1 K, aproximadamente. Para conseguirla hay que emplear helio de baja presión, que sigue siendo gas a temperaturas más bajas que cualquier otro.

TABLA 21-1 Temperatura de algunos sistemas

Sistema	*Temperatura* (K)
Plasma en un reactor de prueba de fusión	10^8
Centro del Sol	10^7
Superficie del Sol	6×10^3
Punto de fusión del tungsteno	3.6×10^3
Punto de congelamiento del agua	2.7×10^2
Punto de ebullición normal de N_2	77
Punto de ebullición normal de ^4He	4.2
Temperatura media del universo	2.7
Refrigerador de dilución $^3He - {}^4He$	5×10^{-3}
Desmagnetización adiabática de sal paramagnética	10^{-3}
Experimentos de condensación de Bose-Einstein	2×10^{-8}

Podemos demostrar que las temperaturas medidas con un termómetro de gas a volumen constante son verdaderas temperaturas Kelvin en el intervalo donde el termómetro puede usarse. Es necesario aplicar métodos especiales para medir las que salen de este rango. La tabla 21-1 contiene la temperatura Kelvin de algunos sistemas y procesos.

La escala internacional de temperatura

La medición exacta de una temperatura con un termómetro de gas es una tarea difícil, pues a veces requiere muchos meses de trabajo intenso en el laboratorio; cuando se termina, se considera un acontecimiento internacional. Por eso, en la práctica el termómetro de gas sirve sólo para establecer ciertos puntos fijos con los cuales después se calibran otros termómetros secundarios más fáciles de usar.

TABLA 21-2 Puntos fijos primarios en la Escala Internacional de Temperatura[a] de 1990

Sustancia	*Estado*	*Temperatura* (K)
Helio	Punto de ebullición	3–5[c]
Hidrógeno	Punto triple	13.8033
Hidrógeno	Punto de ebullición[b]	17.025–17.045[c]
Hidrógeno	Punto de ebullición	20.26–20.28[c]
Neón	Punto triple	24.5561
Oxígeno	Punto triple	54.3584
Argón	Punto triple	83.8058
Mercurio	Punto triple	234.3156
Agua	Punto triple	273.16
Galio	Punto de fusión	302.9146
Indio	Punto de congelación	429.7485
Estaño	Punto de congelación	505.078
Zinc	Punto de congelación	692.677
Aluminio	Punto de congelación	933.473
Plata	Punto de congelación	1,234.93
Oro	Punto de congelación	1,337.33
Cobre	Punto de congelación	1,357.77

[a]Véase "The International Temperature Scale de 1990 (ITS-90)" de H. Preston-Thomas, *Metrologia*, 27 (1990), p. 3.
[b]Este punto de ebullición es para una presión de $\frac{1}{3}$ atm. El resto de los puntos de ebullición, fusión o congelación son a una presión de 1 atm.
[c]La temperatura del punto de ebullición varía un poco con la presión del gas arriba del líquido. La escala de temperatura da la relación entre T y p que puede servir para calcular T de una p determinada.

La Escala Internacional de Temperatura ha sido adoptada para calibrar los termómetros destinados al uso científico o industrial. Consta de varios procedimientos que en la práctica ofrecen las mejores aproximaciones posibles a la escala Kelvin. La escala que se adopte tiene una serie de puntos fijos, junto con dispositivos especiales que sirven para interpolar entre ellos y extrapolar más allá del punto más alto. El Comité Internacional de Pesas y Medidas revisa y perfecciona la escala con una periodicidad aproximada de 20 años. En la tabla 21-2 se muestran los puntos fijos de la versión de 1990 de la Escala Internacional de Temperatura.

21-4 EXPANSIÓN TÉRMICA

Podemos aflojar una tapadera metálica muy ajustada de una jarra sosteniéndola bajo una corriente de agua caliente. Al elevarse su temperatura, la tapadera se expande un poco en relación con el vidrio de la jarra. La expansión térmica no siempre es conveniente, como se aprecia en la figura 21-6. Las carreteras de puentes suelen incluir ranuras de expansión para neutralizar los cambios de longitud a medida que cambia la temperatura.

Los oleoductos de las refinerías a menudo contienen un lazo de expansión, de modo que el tubo no se pandee cuando aumente la temperatura. Los materiales que se usan en las obturaciones dentales poseen propiedades de expansión semejantes a los del esmalte de los dientes. En la construcción de aviones, a menudo se diseñan remaches y otros sujetadores en

FIGURA 21-6. Vías de ferrocarril deformadas por la expansión térmica en un día muy caluroso. Hoy las vías vienen en longitudes de 1,500 ft, y para impedir el pandeo se colocan a la temperatura máxima anual de la localidad o a una temperatura cercana a ella.

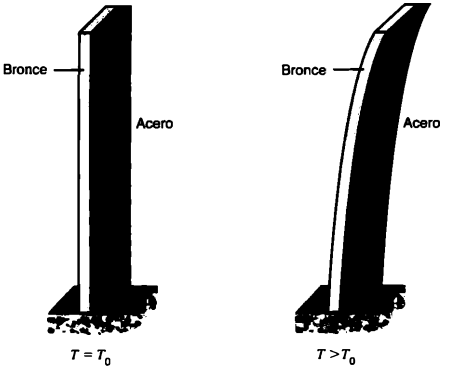


FIGURA 21-7. Tira bimetálica, formada por una tira de bronce y otra de acero unidas por soldadura, a una temperatura T_0. A temperaturas más elevadas, la tira se dobla como se muestra en la figura; a temperaturas más bajas se dobla en otra forma. El funcionamiento de algunos termostatos se basa en este principio: se aplica el movimiento al final de la tira para hacer contacto eléctrico o para interrumpirlo.

forma tal que sean enfriados en hielo seco antes de colocarlos y luego se permite que se expandan para lograr un buen ajuste. Los termómetros y los termostatos pueden basarse en la diferencias de expansión entre los componentes de una tira metálica (Fig. 21-7). En un termómetro corriente, la tira bimetálica está enroscada en una hélice que se enrolla y se desenrolla con los cambios de temperatura (Fig. 21-8). Los termómetros de líquido en vidrio se basan en el hecho de que algunos líquidos, entre ellos el mercurio o el alcohol, se expanden más que los contenedores de vidrio.

Para entender esta expansión basta tomar un simple modelo de la estructura de un sólido cristalino. Los átomos se sostienen juntos en una disposición regular por la acción de fuerzas eléctricas, que se asemejan a las que ejercería una serie de resortes conectados a los átomos. Así, podemos visualizar el cuerpo sólido como un bastidor de resorte (Fig. 21-9).

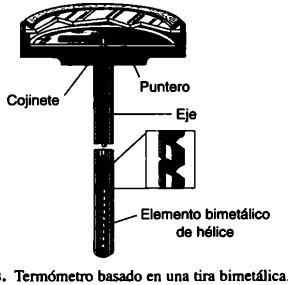


FIGURA 21-8. Termómetro basado en una tira bimetálica. Se le da a ésta la forma de hélice, que se enrolla o desenrolla al cambiar la temperatura.

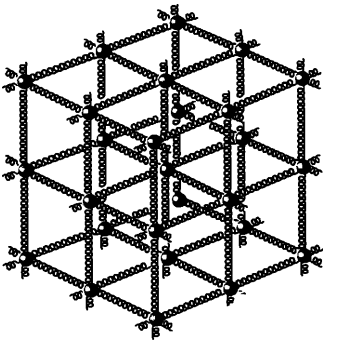


FIGURA 21-9. Un sólido se comporta en muchos aspectos como si fuera un conjunto de átomos unidos por fuerzas elásticas (representadas por resortes en la figura).

Los "resortes" son muy rígidos y de ninguna manera ideales (problema 1 del Capítulo 17); hay unos 10^{23} por centímetro cúbico. Los átomos del sólido están vibrando a cualquier temperatura. La amplitud de las vibraciones es de unos 10^{-9} cm, cerca de un décimo del diámetro atómico y la frecuencia es cercana a 10^{13} Hz. Cuando se eleva la temperatura, los átomos vibran con mayor amplitud y crece la distancia promedio entre ellos (consúltese la explicación del fundamento microscópico de la expansión térmica al final de la sección). Esto causa una expansión de todo el cuerpo sólido.

Se da el nombre de *expansión lineal* al cambio de *cualquier* dimensión lineal de un sólido: longitud, anchura o espesor. Si L es la longitud de esta dimensión, el cambio de temperatura ΔT provocará un cambio en la longitud ΔL. Por medio de experimentos descubrimos que, si ΔT es lo bastante pequeño, el cambio de longitud ΔL será proporcional al de temperatura ΔT y a la longitud original L. Podemos, pues, escribir

$$\Delta L = \alpha L \, \Delta T, \tag{21-8}$$

donde α, denominado *coeficiente de expansión lineal*, tiene diversos valores según el material. Al reescribir la fórmula obtenemos

$$\alpha = \frac{\Delta L / L}{\Delta T}, \tag{21-9}$$

de modo que α significa un cambio fraccional de longitud por grado de cambio de temperatura.

En rigor, el valor de α depende de la temperatura real y de la de referencia escogidas para determinar L (problema 5). No obstante, su variación suele ser insignificante en comparación con la exactitud con que deben efectuarse las mediciones. A veces basta seleccionar un valor promedio susceptible de tratarse como constante en cierto intervalo de temperaturas. En la tabla 21-3 se ofrecen los valores experimentales del coeficiente de la expansión lineal promedio de algunos sólidos comunes. En todas las sustancias incluidas, el cambio de

TABLA 21-3 Algunos coeficientes de expansión lineal[a] promedios

Sustancia	$\alpha(10^{-6}$ por C°)
Hielo	51
Plomo	29
Aluminio	23
Bronce	19
Cobre	17
Acero	11
Vidrio (ordinario)	9
Vidrio (Pirex)	3.2
Aleación de invar	0.7
Cuarzo (fundido)	0.5

[a]Se muestran los valores promedio típicos en el intervalo de temperatura de 0°C a 100°C, menos los del hielo que fluctúan entre −10°C y 0°C.

tamaño consiste en una expansión a medida que aumenta la temperatura porque α es positiva. El orden de magnitud de la expansión aproximada es de 1 milímetro por metro de longitud por 100 grados Celsius. (Nótese que usamos C°, no °C, para expresar los cambios de temperatura. Nótese asimismo que, como 1 K es lo mismo que 1 C°, podemos usar las diferencias de temperatura Kelvin o Celsius en la ecuación 21-9.)

PROBLEMA RESUELTO 21-2. Una escala métrica de acero debe marcarse de manera que los intervalos de milímetros tengan una precisión aproximada de 5×10^{-5} mm con una temperatura determinada. ¿Cuál es la variación máxima de la temperatura permisible durante la maniobra?

Solución Con base en la ecuación 21-8 tenemos

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L} = \frac{5 \times 10^{-5}\ \text{mm}}{(11 \times 10^{-6}/\text{C°})(1.0\ \text{mm})} = 4.5\ \text{C°},$$

donde tomamos de la tabla 21-3 el valor de α del acero. La temperatura durante el marcado debe ser conservada en el límite de 5 C°, aproximadamente, y usar la escala dentro del mismo intervalo de temperatura a la cual se realizó el marcado.

Nótese que, si se empleara la aleación invar en vez de acero, podría lograrse la misma precisión en un intervalo de temperatura de unos 75 C°; o, en forma equivalente, si pudiera mantenerse la misma variación de temperatura (5 C°), podríamos alcanzar gran exactitud debido a los cambios de temperatura de unos 3×10^{-6} mm.

En muchos sólidos, llamados *isotrópicos*, el cambio porcentual de longitud para una alteración de la temperatura es igual en todas sus direcciones. La expansión se asemeja mucho a una ampliación fotográfica, salvo que es un sólido tridimensional. Por eso, si tenemos una placa plana con un hoyo, $\Delta L/L$ ($= \alpha\,\Delta T$) con determinado ΔT es idéntico para la longitud, el espesor, la diagonal de la cara, la diagonal del cuerpo y el diámetro del hoyo. Todas las líneas, tanto rectas como curvas, se alargan en la razón α por grado de aumento de la temperatura. Si rayamos nuestro nombre en la placa, la línea que lo representa sufrirá el mismo cambio fraccional de longitud que cualquier otra. En la figura 21-10 se muestra la analogía de la ampliación fotográfica.

FIGURA 21-10. Regla de acero a dos temperaturas diferentes. Aumenta la expansión en todas las dimensiones: la escala, los números, el hoyo y el espesor se incrementan en el mismo factor. (La expansión indicada está muy exagerada; para conseguirla se requeriría un aumento de temperatura de unos 20,000 C°)

Teniendo presentes estas ideas, debería usted ser capaz de demostrar (ejercicios 22 y 23) que, con gran exactitud, el cambio fraccional en la superficie A por cambio de un grado de temperatura en un sólido isotrópico es 2α, es decir,

$$\Delta A = 2\alpha A\,\Delta T, \tag{21-10}$$

y que el cambio fraccional en el volumen V por cambio de grado de temperatura en un sólido isotrópico 3α, esto es,

$$\Delta V = 3\alpha V\,\Delta T. \tag{21-11}$$

Las ecuaciones 21-8 a 21-11 no pueden aplicarse a la expansión de los fluidos, por no tener una forma bien definida y, en consecuencia, el coeficiente de expansión lineal no es una magnitud significativa del fluido. Más bien, definimos el *coeficiente de expansión volumétrica* β de un fluido por analogía con la ecuación 21-8 o 21-11:

$$\Delta V = \beta V\,\Delta T. \tag{21-12}$$

En los líquidos, el coeficiente es relativamente independiente de la temperatura. Suelen expandirse con una temperatura creciente (esto es, $\beta > 0$). A temperatura ambiente los valores ordinarios de β en los líquidos fluctúan entre 200×10^{-6}/C° a $1{,}000 \times 10^{-6}$/C°, más de un orden de magnitud mayores que el coeficiente de la mayoría de los sólidos 3α según la ecuación 21-11). En los gases, β depende mucho de la temperatura; de hecho, en un gas ideal (que se explica en la siguiente sección) es posible demostrar que $\beta = 1/T$, con T expresada en kelvins (véase el ejercicio 36). En un gas a temperatura ambiente y con presión constante, β es cerca de $3{,}300 \times 10^{-6}$/C°, un orden de magnitud mayor que el coeficiente en los líquidos ordinarios.

El líquido más común, el agua, no se comporta como la mayoría de los líquidos. En la figura 21-11 incluimos su curva de expansión volumétrica. Nótese que por arriba de 4°C el agua se expande al elevarse la temperatura, pero no linealmente. (En otras palabras, β no es constante en estos intervalos.) A medida que la temperatura desciende de 4°C a 0°C, el agua se expande en vez de contraerse; decrece así su densidad, motivo por el cual los lagos se congelan primero en la superficie superior. En ningún otro líquido común se observa esta expansión con temperatura decreciente.

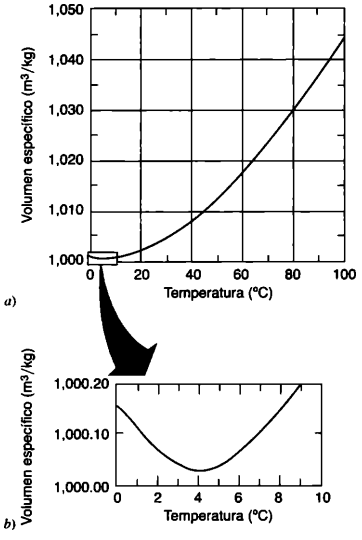


FIGURA 21-11. *a)* Volumen específico (ocupado por una masa determinada) del agua en función de su temperatura. El volumen específico es el inverso de la densidad (masa por unidad de volumen). *b)* Agrandamiento de la región cerca de 4°C, que muestra un volumen específico mínimo (o una densidad máxima).

Base microscópica de la expansión térmica (Opcional)

En el nivel microscópico, la expansión térmica de un sólido indica un incremento en la separación promedio entre los átomos de un sólido. La curva de la energía potencial de dos átomos contiguos en un sólido cristalino en función de su separación internuclear es asimétrica como la de la figura 21-12. A medida que los átomos se aproximan, al reducirse su separación a partir del valor de equilibrio r_0, entran en juego fuertes fuerzas de repulsión y la energía potencial crece muchísimo ($F = -dU/dr$); al distanciarse, y a medida que su separación aumenta a partir del valor de equilibrio, intervienen unas fuerzas de atracción un poco más débiles y la energía potencial se incrementa con mayor lentitud. Con cierta energía vibracional la separación de los átomos pasa periódicamente de un valor mínimo a un valor máximo; la separación promedio es mayor que la de equilibrio a causa de la naturaleza asimétrica de la curva de energía potencial. Con una energía vibracional aún mayor aumenta la separación promedio. El efecto se acrecienta porque, como se aprecia en la figura 21-12, la energía cinética es menor con separaciones mayores; así, las partículas se mueven más lentamente y pasan más tiempo en las separaciones grandes, que entonces hacen una aportación mayor al promedio temporal. Dado que la energía vibracional crece al elevarse la temperatura, la

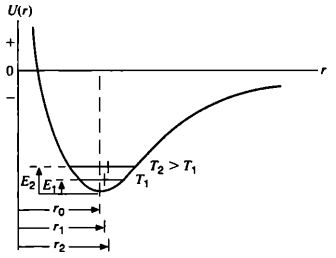


FIGURA 21-12. Curva de energía potencial de dos átomos contiguos en un sólido en función de su distancia de separación internuclear. La separación de equilibrio es r_0. Debido a que la curva es asimétrica, la separación promedio (r_1, r_2) aumenta con la temperatura (T_1, T_2) y la energía vibracional (E_1, E_2) se incrementa.

separación promedio entre los átomos aumenta con ella y todo el sólido se expande.

Nótese que si la curva de la energía potencial fuera simétrica alrededor de la separación de equilibrio, la separación promedio sería igual a la de equilibrio por grande que fuera la amplitud de la vibración. La expansión térmica es, pues, una consecuencia directa de la desviación respecto a la curva característica de la energía potencial en los sólidos.

Conviene precisar que los modelos microscópicos antes descritos son una simplificación de un fenómeno complejo que puede tratarse con mayor profundidad recurriendo a la mecánica estadística y a la teoría cuántica. ■

21-5 EL GAS IDEAL

La figura 21-5 indica que los gases reales, como oxígeno, nitrógeno y helio, se distinguen entre sí por las relaciones entre sus propiedades termodinámicas, entre ellas la presión y la temperatura. Pero en la figura se observa que sus propiedades parecen convergir al examinarlos en densidades cada vez más bajas. Llegamos así al concepto de *gas ideal*, es decir, aquel cuyas propiedades representan el comportamiento limitante de los gases reales a una densidad bastante baja.

El gas ideal es una abstracción pero de gran utilidad ya que 1. los gases reales —a baja densidad— se aproximan al comportamiento de él, y 2. sus propiedades termodinámicas se relacionan entre sí en una forma especialmente simple. En la física abundan este tipo de abstracciones y ya encontramos muchas de ellas: las colisiones perfectamente elásticas, las varillas sin masa y las cuerdas no extensibles.

En la figura 21-13 se muestra gráficamente un dispositivo que permite estudiar las propiedades de los gases reales y, extrapolando a densidades suficientemente bajas, deducir las propiedades del gas ideal. Un cilindro aislado que descansa sobre un depósito térmico contiene cierta cantidad de gas, que

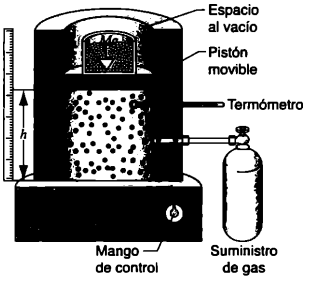


FIGURA 21-13. Se introduce gas en un cilindro que está en contacto con un depósito térmico a la temperatura (ajustable) T. El pistón ejerce una fuerza descendente total Mg sobre el gas, el cual en equilibrio es balanceado por la fuerza ascendente debida a la presión del gas. El volumen del gas puede determinarse midiendo la altura h del pistón arriba del fondo del cilindro; la temperatura del gas se mide con un termómetro adecuado. Un suministro de gas permite agregar más al cilindro; suponemos que se cuenta con un mecanismo para extraer gas y para modificar el suministro a fin de admitir otras clases de gas.

podemos controlar agregando o extrayendo gas por medio del aparato de suministro. La temperatura del depósito —y por tanto la del gas— puede regularse con sólo girar una perilla de control. Un pistón, cuya posición determina el volumen del gas, puede moverse sin fricción hacia arriba y abajo del cilindro. En la parte superior del pistón se agregan o se quitan pesas, mostradas en la figura como balas de plomo; con ello se obtiene la presión producida por el gas. Así, ejercemos control sobre las variables presión, volumen, temperatura y cantidad del gas (número de moles n o de moléculas N).

Mediante experimentos de laboratorio con gases reales se descubrió que su presión p, su volumen V y su temperatura T se relacionan con una buena aproximación a través de

$$pV = NkT \tag{21-13}$$

Aquí N es el número de moléculas contenidas en el volumen V, y k es una constante denominada *constante de Boltzmann*. Su valor medido con tres cifras significativas es

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}. \tag{21-14}$$

La temperatura T en la ecuación 21-13 *siempre* debe expresarse en kelvins.

A menudo conviene más escribir la ecuación 21-13 en forma un poco diferente que exprese la cantidad de gas no en función del número de moléculas N, sino en función del número de moles n. (El mol es una de las siete unidades básicas del SI; sección 1-5.) Las dos miden la cantidad de gas y se relacionan por medio de

$$N = nN_A, \tag{21-15}$$

donde N_A es la *constante de Avogadro*, es decir, el número de moléculas contenidas en un mol de cualquier sustancia. Su valor es

$$N_A = 6.02 \times 10^{23}\ \text{moléculas/mol}. \tag{21-16}$$

En función del número de moles, podemos escribir la ecuación 21-13 así:

$$pV = nRT, \tag{21-17}$$

donde $R = kN_A$ es una constante, denominada *constante molar de gas*. Su valor es

$$R = 8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K}. \tag{21-18}$$

Las ecuaciones 21-13 y 21-17 son formas completamente equivalentes de la *ley del gas ideal*. Ésta es una idealización de las propiedades de los gases reales y una excelente descripción de ellos cuando la presión y la densidad son bajas. Por ello las líneas de la figura 21-5 que representan varios gases convergían en una sola temperatura al disminuir la presión (y, en consecuencia, la cantidad) del gas. La ley explica además por qué es indispensable conservar constante el volumen del gas en el termómetro de la figura 21-4, si queremos examinar la dependencia de la presión respecto a la temperatura.

En el Capítulo 22 exploraremos la ley del gas ideal analizando su estructura microscópica a partir de las propiedades de las moléculas. También es posible "juntar las partes" de esta ley estudiando una sola relación entre dos de las variables de la ecuación y manteniendo constantes las otras. A continuación se dan tres ejemplos de esta clase de experimentos:

1. El investigador italiano Amadeo Avogadro (1776-1856), cuyo nombre lleva una constante física, descubrió lo siguiente: en las mismas condiciones de presión y temperatura, los volúmenes iguales de gases distintos contienen la misma cantidad de moléculas ($V \propto N$ con p y T constantes). Por aquella época se discutía mucho la existencia de átomos y moléculas; este descubrimiento, llamado *ley de Avogadro*, había de darle un apoyo decisivo a la teoría atómica.

2. El experimentador anglo-irlandés Robert Boyle (1627-1691) descubrió que, si mantenemos constante la temperatura de una cantidad fija de gas, la presión ejercida por él será inversamente proporcional al volumen que ocupa ($p \propto V^{-1}$ con T y N constantes). A esta observación se le conoce como *ley de Boyle*.

3. Si mantenemos constante una cantidad fija de gas, el experimento demuestra que el volumen de gas será directamente proporcional a su temperatura ($V \propto T$ con p y N constantes). Estos experimentos fueron efectuados por los franceses Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850) y J. A. C. Charles (1746-1823), de ahí que a esa relación se le conozca como *ley de Gay-Lussac* o *ley de Charles*.

PROBLEMA RESUELTO 21-3. Un cilindro aislado ajustado provisto de un pistón (Fig. 21-13) contiene oxígeno a una temperatura de 20°C y a una presión de 15 atm en un volumen de 22 litros. Se baja el pistón, disminuyendo con ello el volumen del gas a 16 litros, y al mismo tiempo se eleva la temperatura a 25°C. Suponiendo que el oxígeno se comporte como un gas ideal en tales condiciones, ¿cuál será su presión final?

Solución Según la ecuación 21-13, como la cantidad del gas permanece inalterada, tenemos

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f},$$

o bien

$$p_f = p_i \left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{V_i}{V_f}\right).$$

Por tener esta expresión la forma de una razón, no necesitamos convertir p y V en unidades del SI, pero *debemos expresar T en unidades de temperatura absoluta (Kelvin).* Por tanto,

$$p_f = (15\ \text{atm})\left(\frac{273 + 25\ \text{K}}{273 + 20\ \text{K}}\right)\left(\frac{22\ \text{L}}{16\ \text{L}}\right) = 21\ \text{atm}.$$

OPCIÓN MÚLTIPLE

21-1 Temperatura y equilibrio térmico

1. Considere cuatro objetos, *A*, *B*, *C* y *D*. Se comprueba que *A* y *B* están en equilibrio térmico. También se comprueba que *C* y *D* lo están, *no así A* y *C*. Se concluye que
   A) *B* y *D* se encuentran en equilibrio térmico.
   B) *B* y *D* podrían encontrarse en equilibrio térmico, pero no necesariamente.
   C) *B* y *D* no pueden encontrarse en equilibrio térmico.
   D) la ley cero de la termodinámica no se aplica en este caso, ya que hay más de tres objetos.
2. Los objetos *B* y *C* se encuentran inicialmente en equilibrio térmico. Los objetos *A* y *C* no lo están inicialmente, pero se pone a los dos en contacto térmico y rápidamente alcanzan el equilibrio. Después de hacer esto,
   A) *B* y *C* también se encontrarán en equilibrio térmico.
   B) *B* y *C* podrían encontrarse en equilibrio térmico, pero no necesariamente.
   C) *B* y *C* no pueden encontrarse en equilibrio térmico.

21-2 Escalas de temperatura

3. ¿En qué temperatura coinciden las escalas Fahrenheit y Celsius?
   A) −40°F B) 0°F C) 32°F
   D) 40°F E) 104°F
4. ¿En qué temperatura coinciden las escalas Fahrenheit y Kelvin?
   A) −100°F B) 273°F C) 574°F D) 844°F

21-3 Medición de la temperatura

21-4 Expansión térmica

5. Una gran losa metálica plana a una temperatura T_0 tiene un hoyo. Se calienta el metal hasta que alcanza la temperatura $T > T_0$. Después del calentamiento la superficie del hoyo
   A) aumenta. B) disminuye.
   C) conserva su tamaño.
   D) posiblemente cambie de tamaño según su forma.
6. ¿Por qué un vaso a veces se rompe si vaciamos rápidamente agua hirviente en él?
   A) El agua caliente se expande, extendiendo el vaso.
   B) El agua caliente se enfría cuando toca el vaso, contrayendo y reduciendo el vaso.
   C) El vaso se calienta y se expande, haciendo que las moléculas se separen.
   D) El interior del vaso se expande más rápidamente que el exterior, haciendo que se rompa.
7. Un termómetro de vidrio lleno de mercurio se encuentra inicialmente en equilibrio a 20°C en un baño de agua. Después lo sumergimos en un baño a 30°C. La columna de mercurio en el termómetro
   A) aumentará a 30°C y luego se detendrá.
   B) primero aumentará por arriba de 30°C, luego volverá a 30°C y se detendrá.
   C) primero descenderá por debajo de 20°C, luego aumentará por arriba de 30°C y se detendrá.
   D) primero caerá por debajo de 20°C, luego aumentará a 30°C y finalmente retornará a 30°C y se detendrá.
8. Una tira de cobre se remacha a otra de aluminio. Después se calientan los dos metales. ¿Qué sucede?
   A) La tira se expande sin doblarse.
   B) La tira se expande y se dobla hacia el cobre.
   C) La tira se expande y se dobla hacia el aluminio.
9. La variación diaria de la temperatura en el puente Golden Gate de San Francisco a veces supera los 20°C. El puente mide aproximadamente 2 km de largo y está hecho de acero (con una cinta asfáltica en la carretera).
   a) ¿Cuál es su cambio aproximado de longitud con esta variación de temperatura?
   A) 4.4 cm B) 44 cm C) 4.4 m D) 44 m
   b) Si los constructores olvidaron incluir juntas de expansión, ¿qué tamaño aproximado tendrá un "chichón" que se forme en la mitad del puente cuando se expanda?
   A) 2.1 cm B) 21 cm C) 2.1 m D) 21 m

21-5 El gas ideal

10. ¿Qué tiene mayor densidad (masa por unidad de volumen): el aire seco o el húmedo? Suponga que los dos poseen la misma temperatura y presión.
    A) Aire seco. B) Aire húmedo.
    C) Las densidades son iguales.
11. ¿Cuál de las siguientes cantidades tiene la más grande densidad de partícula (moléculas por unidad de volumen)?
    A) 0.8 l de gas nitrógeno a 350 K y a 100 kPa
    B) 1.0 l de gas hidrógeno a 350 K y a 150 kPa
    C) 1.5 l de gas oxígeno a 300 K y a 80 kPa
    D) 2.0 l de gas helio a 300 K y a 120 kPa
12. Cuatro contenedores contienen cada un 0.5 moles de uno de los siguientes gases. ¿Cuál tiene la temperatura más elevada?
    A) 8.0 l de gas helio a 120 kPa
    B) 6.0 l de gas neón a 160 kPa
    C) 4.0 l de gas argón a 250 kPa
    D) 3.0 l de gas criptón a 300 kPa

PREGUNTAS

1. ¿Es la temperatura un concepto microscópico o macroscópico?
2. ¿Podemos definir la temperatura como una magnitud obtenida en función de la longitud, la masa y el tiempo? Imagine un péndulo, por ejemplo.
3. El cero absoluto es una temperatura mínima. ¿Existe también una temperatura máxima?
4. ¿Puede un objeto estar más caliente que otro si tienen la misma temperatura? Explique su respuesta.
5. Las trampas para langosta están diseñadas en forma tal que puedan fácilmente caer en ellas, pero no le sea tan fácil escapar. ¿Puede crearse una pared diatérmica que permita al calor fluir en una dirección solamente? Explique su respuesta.
6. ¿Hay otras magnitudes físicas además de la temperatura que tiendan a igualarse si se unen dos sistemas distintos?
7. Un trozo de hielo y un termómetro más caliente se hallan suspendidos en un recinto aislado y al vacío, de modo que no estén en contacto. ¿Por qué la lectura del termómetro disminuye con el tiempo?
8. ¿Qué cualidades hacen una propiedad termométrica adecuada para emplearse en un termómetro práctico?
9. ¿Qué problemas surgen cuando definimos la temperatura en función de la densidad del agua?
10. Sea p_3 la presión de un tubo de un termómetro de gas con volumen constante, cuando el tubo tiene una temperatura de 273.16 K de punto triple y sea p la presión cuando tiene una temperatura ambiente. Se dan tres termómetros de gas: para A el gas es oxígeno y p_3 = 20 cm Hg; para B también es oxígeno pero p_3 = 40 cm Hg; para C es hidrógeno y p_3 = 30 cm Hg. Los valores medidos de p en los tres termómetros son p_A, p_B y p_C. *a*) Un valor aproximado de la temperatura ambiente T puede obtenerse con los siguientes termómetros utilizando

$$T_A = (273.16\ \text{K})(p_A/20\ \text{cm Hg}),$$

$$T_B = (273.16\ \text{K})(p_B/40\ \text{cm Hg}),$$

$$T_C = (273.16\ \text{K})(p_C/30\ \text{cm Hg}).$$

Marque como verdaderos o falsos los siguientes enunciados: 1. con el método descrito, los tres termómetros darán el mismo valor de T. 2. Los dos termómetros de oxígeno coincidirán entre sí, pero no con el termómetro de hidrógeno. 3. Los tres termómetros darán un valor diferente de T. *b*) En caso de que los tres discrepen, explique cómo modificaría el método de usarlos para que indique el mismo valor de T.
11. Al explicar los efectos relacionados con la concentración creciente de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre (el llamado efecto invernadero), el jefe de redacción de una conocida revista de negocios escribió: "Las regiones polares podrían ser tres veces más calurosas que hoy...". ¿Qué cree que haya querido decir literalmente? (Consúltese "Warmth and Temperature: A Comedy of Errors" de Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, noviembre de 1984, p. 517.)
12. Al parecer no es posible alcanzar el cero absoluto de la temperatura en forma experimental, pero en el laboratorio se han logrado temperaturas hasta de 0.00000002 K. ¿Por qué los físicos se esforzarían, como de hecho lo hacen, por conseguir temperaturas todavía más bajas? ¿Acaso no son ya bastante bajas para las aplicaciones prácticas?
13. Ponemos dos cubos sin taparlos —uno con agua caliente y el otro con agua fría— afuera a una temperatura por debajo del punto de congelación. Generalmente el de agua caliente comenzará a congelarse antes. ¿Por qué? ¿Qué sucedería si cubriéramos los cubos?
14. ¿Puede asignarse temperatura a un vacío?
15. ¿Posee un sentido innato de dirección nuestra "percepción de la temperatura"?, es decir, ¿lo más caliente significa necesariamente temperaturas más altas, o se trata simplemente de una convención arbitraria? A propósito, Celsius escogió originalmente el punto de vapor como 0°C y el punto de hielo como 100°C.
16. En las etiquetas de muchos medicamentos se le indica al usuario guardarlos a 86°F. ¿Por qué a esa temperatura? (*Sugerencia*: Haga la conversión a la escala Celsius.) (Véase *The Science Almanac*, 1985-1986, p. 430.)
17. ¿Cómo recomendaría medir la temperatura de *a*) el Sol, *b*) la atmósfera superior de la Tierra, *c*) un insecto, *d*) la Luna, *e*) el piso del mar y *f*) el helio líquido?
18. Al examinar las escalas Celsius, Fahrenheit y Kelvin, ¿alguna de ellas destaca como "la escala de la naturaleza"? Explique su respuesta.
19. ¿Es un gas mejor que otro para usarlo como termómetro estándar de gas con volumen constante?
20. Mencione algunas objeciones contra la utilización de agua en vidrio como termómetro. ¿Es mejor el mercurio en vidrio? Si su respuesta es afirmativa, explíquela.
21. ¿Cuáles son las dimensiones de α, el coeficiente de expansión lineal? ¿Depende su valor de la unidad usada de longitud? Cuando se usan los grados Fahrenheit en vez de los grados Celsius como unidad del cambio termométrico, ¿se altera el valor numérico de α? De ser así, ¿en qué forma? De no ser así, demuéstrelo.
22. Una bola metálica puede pasar por un anillo de metal. Cuando la calentamos, se pega a él. ¿Qué sucedería si calentáramos el anillo y no la bola?
23. Una tira bimetálica, formada por dos tiras unidas por remaches, sirven de elemento de control en el termostato común. Explique su funcionamiento.
24. Dos tiras, una de hierro y otra de zinc, están unidas por remaches una al lado de otra, formando una barra recta que se pandea al ser calentada. ¿Por qué está el hierro dentro de la curva?
25. Explique cómo el periodo de un reloj de péndulo puede mantenerse constante con la temperatura, conectando tubos verticales de mercurio al extremo inferior del péndulo.
26. ¿Por qué debe una chimenea ser independiente, es decir, no formar parte del soporte estructural de la casa?
27. El agua se expande al congelarse. ¿Puede definir un coeficiente de expansión volumétrica para el proceso de congelación?
28. Explique por qué la expansión de un líquido en un tubo de vidrio no produce la verdadera expansión del líquido.
29. En igualdad de circunstancias, ¿depende el cambio de volumen de un objeto al aumentar su temperatura de si tiene cavidades en el interior?
30. ¿Por qué es mucho más difícil hacer una determinación exacta del coeficiente de expansión de un líquido que de un sólido?
31. Un modelo común de un sólido supone que los átomos son puntos que realizan un movimiento armónico simple alrededor de pequeñas posiciones de rejilla. ¿Cuál será su coeficiente de expansión líneal?
32. Explique el hecho de que la temperatura del mar a grandes profundidades es muy constante durante todo el año, a una temperatura aproximada de 4°C.
33. Explique por qué los lagos se congelan primero en la superficie.

34. ¿Por qué los tubos de agua se rompen en invierno?
35. Del hecho de que el hielo flote en el agua, ¿qué podemos concluir sobre cómo el punto de fusión del hielo depende de la presión?
36. Dos cuartos de igual tamaño se comunican a través de una puerta abierta. Pero su temperatura promedio se mantiene en un valor distinto. ¿En cuál de los dos hay más aire?
37. Se descubre que el peso de una bolsa plana, delgada y vacía no se altera cuando se llena de aire. ¿Por qué?
38. ¿Por qué el humo en vez de caer se eleva de una vela encendida?
39. ¿Cambian la presión y el volumen de aire en una casa cuando la temperatura del horno aumenta de modo considerable? Si la respuesta es negativa, ¿se viola la ley del gas ideal?

EJERCICIOS

21-1 Temperatura y equilibrio térmico

21-2 Escalas de temperatura

1. El punto de ebullición y de fusión del agua en la escala Fahrenheit se escogió de modo que la diferencia entre las dos temperaturas fuera 180 F°, número que se divide uniformemente entre 2, 3, 4, 5, 6 y 9. Diseñe una escala termométrica S en forma tal que el cero absoluto sea 0°S y $T_{pe,\,agua} - T_{pf,\,agua} = 180$ S°. *a)* ¿Cuál es la fórmula de conversión de Celsius a S? *b)* ¿Cuáles son $T_{pe,\,agua}$ y $T_{pf,\,agua}$ en S?
2. El cero absoluto es −273.15°C. Encuentre el cero absoluto en la escala Fahrenheit.
3. Repita el ejercicio 1, pero escoja la nueva escala termométrica Q de manera que el cero absoluto 0°Q y $T_{pe,\,agua} - T_{pf,\,agua} = 100$ Q°. *a)* ¿Cuál es la fórmula de conversión de Celsius a Q? *b)* ¿Cuál es $T_{pe,\,agua}$ y $T_{pf,\,agua}$ en Q? *c)* Esta escala existe en realidad. ¿Cuál es su nombre oficial?
4. *a)* La temperatura en la superficie solar es de unos 6,000 K. Exprésela en la escala Fahrenheit. *b)* Exprese la temperatura normal del cuerpo humano, 37.0°C, en la escala Fahrenheit. *c)* En Estados Unidos continental, la temperatura más baja que se ha registrado es −70°F en Rogers Pass (Montana). Exprésela en la escala Celsius. *d)* Exprese el punto normal de ebullición del oxígeno, −183°C en la escala Fahrenheit. *e)* ¿En qué temperatura Fahrenheit un cuarto le parecería demasiado caluroso?
5. Si el médico le dice que tiene usted una temperatura de 310 K, ¿debería preocuparse? Explique su respuesta.
6. ¿A qué temperatura es la lectura de la escala Fahrenheit igual a *a)* el doble de la de Celsius, y *b)* la mitad de ésta?

21-3 Medición de la temperatura

7. Un *termómetro de resistencia* es aquel en que la resistencia eléctrica cambia con la temperatura. Podemos definir las que se miden con él en kelvins como directamente proporcionales a la resistencia R, medida en ohms (Ω). Se descubre que un termómetro de este tipo tiene una resistencia R de 90.35 Ω cuando su bulbo se pone en agua a la temperatura de punto triple (273.16 K). ¿Qué temperatura indica el termómetro si el bulbo se coloca en un ambiente tal que su resistencia sea 96.28 Ω?
8. Un termopar está hecha de dos metales, unidos en dos puntos tales que se produce un pequeño voltaje cuando las dos uniones tienen temperatura diferente. En un termopar de hierro y constantano, con una unión conservada en 0°C, el voltaje de salida pasa linealmente de 0 a 28.0 mV a medida que la temperatura aumenta de 0 a 510°C. Encuentre la temperatura de la unión variable cuando la salida del termopar es 10.2 mV.
9. La amplificación o *ganancia* de un amplificador de transistores puede depender de la temperatura. La ganancia de uno en particular a una temperatura ambiente (20.0°C) es 30.0, en tanto que a 55.0°C es 35.2. ¿Cuál será la ganancia a 28.0°C, si depende linealmente de la temperatura en este intervalo limitado?
10. Si la temperatura de gas en el punto de vapor es 373.15 K, ¿cuál será el valor límite de la razón de la presión de un gas en el punto de vapor y en el punto triple del agua cuando conservamos el gas a un volumen constante?
11. Se montan dos termómetros de gas con volumen constante: en uno se usa nitrógeno como gas y en el otro helio. Ambos contienen suficiente gas para que $p_{tr} = 100$ cm Hg. ¿Qué diferencia existe entre sus presiones si se introducen en un baño de agua en el punto de ebullición? ¿Cuál de las dos presiones es más alta? (Fig. 21-5).

21-4 Expansión térmica

12. Un poste de aluminio mide 33 m de altura. ¿Cuánto aumenta su longitud al elevarse su temperatura 15C°?
13. El espejo de vidrio Pyrex en el telescopio de Mount Palomar Observatory (el telescopio Hale) tiene un diámetro de 200 in. Las temperaturas más extremas registradas en el observatorio son −10°C y 50°C. Determine el cambio máximo de diámetro del espejo.
14. Un hoyo circular en una placa de aluminio mide 2.725 cm de diámetro a 12°C. ¿Qué diámetro tiene cuando su temperatura se eleva a 140°C?
15. Se colocan las vías de un ferrocarril cuando la temperatura es de −5.0°C. Una sección estándar de la vía medirá entonces 12.0 m de largo. ¿Qué espacio debe dejarse entre las secciones para que no haya compresión cuando la temperatura alcance los 42°C?
16. Una ventana de vidrio mide 200 cm por 300 cm a 10°C. ¿Cuánto crece su superficie cuando la temperatura es de 40°C? Suponga que el vidrio llega a expanderse libremente.
17. Un cubo de bronce tiene un longitud de lado de 33.2 cm a 20.0°C. Calcule *a)* el aumento de la superficie, y *b)* el del volumen cuando se calienta a 75.0°C.
18. ¿Qué volumen tiene una bola de plomo a −12°C si su volumen es de 530 cm^3 a 160°C?
19. *a)* Basándose en la gráfica de la figura 21-11, calcule el coeficiente de la expansión volumétrica del agua a una temperatura ambiente de (20°C). *b)* ¿Cuál es el coeficiente de expansión volumétrica cerca de 4°C?
20. Poco después de formarse la Tierra, el calor liberado por la desintegración de elementos radiactivos aumentó la temperatura interna promedio de 300 a 3,000 K, valor aproximado al cual se conserva todavía. Suponiendo un coeficiente promedio de expansión volumétrica de $3.2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, ¿cuánto se agrandó el radio de la Tierra desde su formación?

21. Con una regla de acero a la temperatura ambiente de 20°C se mide una varilla y se descubre que tiene una longitud de 20.05 cm. Tanto la varilla como la regla se colocan en un horno a 270°C; la varilla mide ahora 20.11 cm si usamos la misma regla. Calcule el coeficiente de la expansión térmica del material de que está hecha la varilla.

22. La superficie A de una placa rectangular es ab. Su coeficiente de expansión térmica es α. Una vez que la temperatura llega a ΔT, el lado a es más largo en Δa y el lado b es más largo en Δb. Demuestre que, si prescindimos de la pequeña cantidad $\Delta a\ \Delta b/ab$ (Fig. 21-14), $\Delta A = 2\alpha A\ \Delta T$, con lo cual se comprueba la ecuación 21-10.

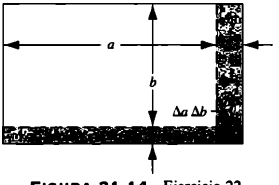


FIGURA 21-14. Ejercicio 22.

23. Pruebe que, si no tenemos en cuenta las cantidades extremadamente pequeñas, el cambio de volumen de un sólido después de expandirse por un aumento de temperatura ΔT está dado por $\Delta V = 3\alpha V\Delta T$, donde α es el coeficiente de expansión lineal (Ec. 21-11).

24. Cuando elevamos 100C° la temperatura de una moneda de cinco centavos de cobre (que no es de cobre puro), su diámetro aumentó 0.18%. Calcule el incremento porcentual en *a*) la superficie de la cara, *b*) el espesor, *c*) el volumen y *d*) la masa de la moneda. *e*) Calcule su coeficiente de expansión lineal.

25. La densidad es la masa dividida entre el volumen. Si el volumen V depende de la temperatura, lo mismo sucede con la densidad ρ. Demuestre que el cambio de densidad $\Delta\rho$ con el de temperatura ΔT está dado por

$$\Delta\rho = -\beta\rho\ \Delta T,$$

donde β es el coeficiente de expansión volumétrica. Explique el signo de menos.

26. Cuando elevamos de 60 a 100°C la temperatura de un cilindro metálico, su longitud aumenta en 0.092%. *a*) Determine el cambio porcentual de la densidad. *b*) Identifique el metal.

27. Una varilla de acero mide 3.000 cm de diámetro a 25°C. Un anillo de bronce tiene un diámetro interior de 2.992 cm a 25°C. ¿A qué temperatura común el anillo simplemente se deslizará por la varilla?

28. Una barra compuesta de longitud $L = L_1 + L_2$ está hecho de una barra de material 1 y de longitud L_1, conectada a otra de material 2 y de longitud L_2, como se ve en la figura 21-15. *a*) Demuestre que el coeficiente efectivo de expansión lineal α de esta última está dado por $\alpha = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)/L$. *b*) Usando acero y bronce, diseñe una barra compuesta cuya longitud sea 52.4 cm y cuyo coeficiente efectivo de expansión lineal sea $13 \times 10^{-6}/C°$.

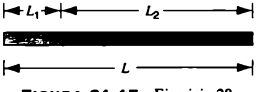


FIGURA 21-15. Ejercicio 28.

29. A 100°C un frasco de vidrio se llena totalmente con 891 g de mercurio. ¿Qué masa de este metal se necesita para llenarlo a −35°C? (El coeficiente de expansión lineal del vidrio es $9.0 \times 10^{-6}/C°$; el de expansión volumétrica del mercurio es $1.8 \times 10^{-4}/C°$.)

30. *a*) Pruebe que el cambio en la inercia rotacional I con la temperatura de un objeto sólido está dado por $\Delta I = 2\alpha I\ \Delta T$. *b*) Una varilla uniforme y delgada de bronce, que se hace girar libremente a 230 rev/s alrededor de un eje perpendicularmente a su centro, se calienta sin contacto mecánico hasta que su temperatura aumenta 170C°. Calcule el cambio de velocidad angular.

31. Un cilindro colocado en cojinetes sin fricción se hace girar alrededor de su eje. Después se calienta sin contacto mecánico hasta que su radio aumenta 0.18%. ¿Cuál es el cambio porcentual *a*) del momento angular del cilindro, *b*) su velocidad angular y *c*) la energía rotacional?

32. *a*) Pruebe que el cambio del periodo P de un péndulo físico con la temperatura está dado por $\Delta P = \frac{1}{2}\alpha P\Delta T$. *b*) Un péndulo de reloj hecho de invar tiene un periodo de 0.500 s y es preciso a 20°C. Si el reloj se usa en un clima donde la temperatura promedio es 30°C, ¿qué corrección aproximada al tiempo marcado se requiere al cabo de 30 días?

33. Un reloj con un péndulo hecho de bronce está diseñado para marcar exactamente la hora a 20°C. ¿Qué error cometerá en segundos por hora, si funciona a 0°C?

34. Una copa de aluminio con una capacidad de 110 cm^3 está llena de glicerina a 22°C. ¿Cuánta glicerina escurrirá de ella, si elevamos a 28°C la temperatura de la copa y de la glicerina? (El coeficiente de expansión volumétrica de la glicerina es $5.1 \times 10^{-4}/C°$.)

35. Un tubo vertical de vidrio que mide 1.28 m de largo está lleno con un líquido a 20.0°C. ¿Cuánto cambiará la altura de la columna líquida cuando el tubo sea calentado hasta que alcance 33.0°C? Suponga que $\alpha_{vidrio} = 1.1 \times 10^{-5}/C°$ y $\beta_{líquido} = 4.2 \times 10^{-5}/C°$.

21-5 El gas ideal

36. *a*) Aplique la ley del gas ideal y la definición del coeficiente de expansión volumétrica (Ec. 21-12) para demostrar que $\beta = 1/T$ en un gas ideal a presión constante. *b*) ¿En qué unidades debe expresarse T? Si se expresa en ellas, ¿puede expresar β en unidades de $(C°)^{-1}$? *c*) Estime el valor de β para un gas ideal a temperatura ambiente.

37. *a*) Calcule el volumen ocupado por 1.00 mol de un gas ideal en condiciones normales, es decir, con un presión de 1.00 atm ($= 1.01 \times 10^5$ Pa) y una temperatura de 0°C (273 K). *b*) Demuestre que el número de moléculas por centímetro cúbico (el *número de Loschmidt*) es 2.68×10^{19} en tales condiciones.

38. El mejor vacío que puede conseguirse en el laboratorio corresponde a una presión aproximada de 10^{-18} atm o 1.01×10^{-13} Pa. ¿Cuántas moléculas hay por centímetro cúbico en él a 22°C?

39. Cierta cantidad de un gas ideal a 12.0°C y a una presión de 108 kPa ocupa un volumen de 2.47 m^3. *a*) ¿Cuántas moléculas del gas hay? *b*) Si la presión llega ahora a 316 kPa y si elevamos la temperatura a 31.0°C, ¿qué volumen ocupará el gas?

40. Gas oxígeno con un volumen de 1,130 cm^3 a 42.0°C y una presión de 101 kPa se expande hasta que su volumen es 1,530 cm^3 y su presión es 106 kPa. Encuentre *a*) el número de moles de oxígeno del sistema, y *b*) su temperatura final.

41. La llanta de un automóvil tiene un volumen de 988 in.^{3} y contiene aire a una presión manométrica de 24.2 lb/in.^{2}, en que la temperatura es −2.60°C. Determine la presión manométrica del aire dentro de la llanta cuando su temperatura se eleva a 25.6°C y su volumen aumenta a 1,020 in.^{3}. (*Sugerencia*: No es necesario hacer la conversión de las unidades inglesas a las del SI. ¿Por qué? Utilice p_{atm} = 14.7 lb/in.^{2}.)
42. Calcule la masa de la atmósfera terrestre. Exprese su cálculo en una fracción de masa de la Tierra. Recuerde que la presión atmosférica equivale a 101 kPa.
43. Una burbuja de aire de 19.4 cm^3 de volumen se halla en el fondo de un lago de 41.5 m de profundidad, donde la temperatura es 3.80°C. La burbuja llega a la superficie cuya temperatura es de 22.6°C. Suponga que la temperatura de la burbuja es igual a la del agua circundante y encuentre su volumen poco antes que aflore a la superficie.
44. Un tubo abierto-cerrado con una longitud de L = 25.0 m contiene aire a presión atmosférica. Se lanza verticalmente a un lago de agua fresca hasta que el agua alcanza la mitad del tubo, como se aprecia en la figura 21-16. ¿Qué profundidad h tiene el borde inferior del tubo? Suponga que la temperatura es la misma en todas partes y que no cambia.

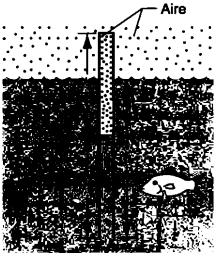


FIGURA 21-16. Ejercicio 44.

PROBLEMAS

1. Todos sabemos que los objetos calientes y fríos calientan o enfrían la temperatura del ambiente. Si la diferencia termométrica ΔT entre un objeto y su ambiente ($\Delta T = T_{obj} - T_{amb}$ (de ambiente)) no es demasiado grande, la rapidez del enfriamiento o del calentamiento del objeto será aproximadamente proporcional a dicha diferencia, es decir,

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A(\Delta T),$$

donde A es una constante. El signo de menos aparece porque ΔT disminuye con el tiempo si ΔT es positivo, y aumenta si es negativo. A esto se le conoce como *ley de enfriamiento de Newton*. *a*) ¿De qué factores depende A? ¿Cuáles son sus dimensiones? *b*) Si en algún instante t = 0 la diferencia de temperatura es ΔT_0, demuestre que es

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

en el tiempo t posterior.

2. Muy temprano por la mañana se descompone el calentador de una casa. La temperatura fuera de ella es −7.0°C, de modo que la temperatura del interior desciende de 22 a 18°C en 45 minutos. ¿Cuánto tardará esta última en descender otros 4.0C°? Suponga que la temperatura externa no cambie y que se aplique la ley del enfriamiento de Newton (problema 1).
3. Demuestre que cuando la temperatura de un líquido en un barómetro tiene un cambio de ΔT, y la presión es constante, la altura h también tiene un cambio de $\Delta h = \beta h \Delta T$ donde β es la expansión volumétrica del líquido. Desprecie la expansión del tubo de vidrio.
4. Un termómetro se construye con dos bulbos que contienen gas, los cuales se ponen en un baño de agua, como se ilustra en la figura 21-17. La diferencia de presión entre ellos se mide por medio de un manómetro de mercurio, como se indica en la figura. Los depósitos, no incluidos en el diagrama, mantienen un volumen constante de gas en los bulbos. No se observa diferencia alguna en la presión cuando ambos baños se hallan en el punto triple del agua. La diferencia de presión es 120 mm Hg si uno está en el punto triple y el otro en el punto de ebullición del agua. Finalmente, la diferencia de presión es 90.0 mm Hg cuando un baño se halla en el punto triple y el otro a una temperatura desconocida que debe medirse. Encuentre esta última.

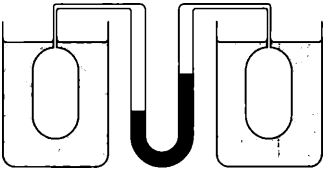


FIGURA 21-17. Problema 4.

5. Demuestre que, si α depende de la temperatura T,

$$L \approx L_0 \left[1 + \int_{T_0}^{T} \alpha(T)\, dT \right],$$

donde L_0 es la longitud a la temperatura de referencia T_0.

6. En un experimento hubo que mover una pequeña fuente radiactiva a ciertas velocidades sumamente lentas. Se logra sujetándola a un extremo de una varilla de aluminio y calentando la sección central de la varilla en forma controlada. Si en la figura 21-18 la sección efectiva calentada de la varilla es 1.8 cm, ¿a qué velocidad constante debe hacerse que cambie su temperatura, si queremos que la fuente se desplace con una velocidad constante de 96 nm/s?

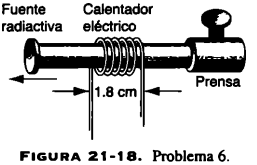


FIGURA 21-18. Problema 6.

7. *a*) Demuestre que si la longitud de dos varillas de diferentes sólidos son inversamente proporcionales a sus respectivos coeficientes de expansión lineal a la misma temperatura inicial, la diferencia de longitud entre ellos será constante en todas las temperaturas. *b*) ¿Cuál debería ser la longitud de varillas de acero y de bronce a 0°C, de modo que su diferencia de longitud sea 0.30 m en todas las temperaturas?

8. A consecuencia de un aumento de temperatura de 32C°, una barra con una grieta en el centro se pandea hacia arriba, como se ve en la figura 21-19. Si la distancia fija $L_0 = 3.77$ m y el coeficiente de expansión lineal es $25 \times 10^{-6}/C°$, encuentre x, la distancia a la que se eleva el centro.

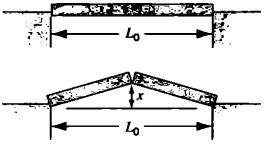


FIGURA 21-19. Problema 8.

9. En la figura 21-20 se muestra la variación del coeficiente de la expansión volumétrica del agua entre 4°C y 20°C. La densidad del agua a 4°C es 1,000 kg/m³. Calcule la densidad del agua a 20°C de temperatura.

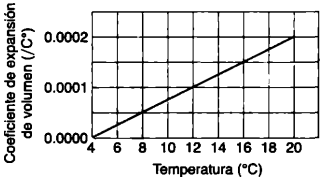


FIGURA 21-20. Problema 9.

10. Considere un termómetro de mercurio en vidrio. Suponga que la sección transversal A del capilar es constante y que V es el volumen del bulbo de mercurio a 0.00°C. Suponga además que el mercurio llena exactamente el bulbo a esa temperatura. Demuestre que, a una temperatura T en °C, la longitud L de la columna de mercurio dentro del capilar es

$$L = \frac{V}{A}(\beta - 3\alpha)T,$$

esto es, proporcional a la temperatura donde β es el coeficiente de expansión volumétrica del mercurio y α es el coeficiente de expansión lineal del vidrio.

11. A 20°C, tres varillas rectas de igual longitud de aluminio, invar y acero, forman un triángulo equilátero con bisagras en los vértices. ¿A qué temperatura el ángulo opuesto a la varilla de invar tendrá 59.95°? En el apéndice I se incluyen las fórmulas trigonométricas necesarias.

12. Un tubo de gas casi lleno con mercurio se conecta al extremo inferior de la varilla de un péndulo de hierro de 100 cm de largo. ¿Qué altura debe alcanzar el mercurio en el tubo de vidrio, para que el centro de masa del péndulo no suba ni baje al cambiar la temperatura? (La superficie transversal del tubo es igual a la de la varilla. No tenga en cuenta la masa del vidrio. El hierro tiene una densidad de 7.87×10^3 kg/m³ y un coeficiente de expansión lineal igual a $12 \times 10^{-6}/C°$. El coeficiente de expansión volumétrica del mercurio es $18 \times 10^{-5}/C°$.

13. Un cubo de aluminio de 20 cm de lado flota dentro del mercurio. ¿A qué profundidad se sumergirá el bloque cuando la temperatura ascienda de 270 a 320 K? (El coeficiente de expansión volumétrica del mercurio es $1.8 \times 10^{-4}/C°$).

14. El alambre Dumet se inventó para tener en cuenta la expansión del vidrio en las lámparas eléctricas. Consta de un núcleo de níquel-acero (invar) rodeado de una capa de cobre. El diámetro del núcleo y de la capa se escogen de modo que el alambre reproduzca las características de expansión del vidrio. *a*) Demuestre que la razón del radio del núcleo de níquel-acero al de la capa de cobre debería ser

$$\frac{r_{\text{níquel-acero}}}{r_{\text{cobre}}} = \sqrt{\frac{\alpha_{\text{cobre}} - \alpha_{\text{vidrio}}}{\alpha_{\text{cobre}} - \alpha_{\text{níquel-acero}}}}$$

b) ¿Cuál es el valor típico de esta razón?

15. La distancia entre las torres del tramo principal del puente Golden Gate cerca de San Francisco es de 4,200 ft (Fig. 21-21). La comba del cable a la mitad entre ellas a 50°F es de 470 ft. Suponga que $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/F°$ para el cable y calcule *a*) el cambio de longitud del cable, y *b*) el cambio de la comba con un cambio de temperatura de 10 a 90°F. Suponga que no hay inclinación ni separación de las torres y que el cable tiene forma parabólica.

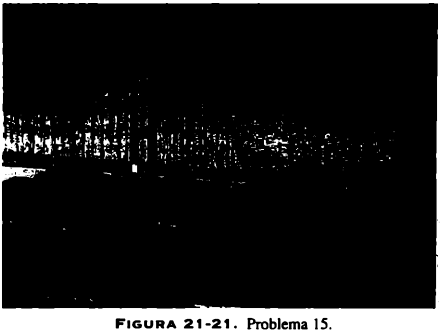


FIGURA 21-21. Problema 15.

16. Un globo aerostático meteorológico se infla un poco con helio a una presión de 1.00 atm (76.0 cm Hg) y a una temperatura de 22.0°C. El volumen del gas es 3.47 m³. A una elevación de 6.50 km, la presión atmosférica disminuye a 36.0 cm Hg y el helio se ha expandido por no estar sujeto a ninguna restricción de la bolsa confinante. A esta altura la temperatura del gas es −48.0°C. ¿Cuál será su volumen?

17. Dos recipientes de 1.22 l y 3.18 l de volumen contienen gas kriptón y están conectados por un tubo delgado. Al inicio tienen la misma temperatura, 16.0°C, y presión, 1.44 atm. El recipiente más grande se calienta entonces a 108°C y el más pequeño permanece a 16.0°C. Calcule la presión final. (*Sugerencia*: No hay filtraciones.)

18. El recipiente A contiene un gas ideal a una presión de 5.0×10^5 Pa y a una temperatura de 300 K. Mediante un tubo delgado está conectado a un recipiente B cuyo volumen es cuatro veces mayor que el de A (Fig. 21-22). B contiene el mismo gas ideal a una presión de 1.0×10^5 Pa y a una temperatura de 400 K. Se abre la válvula conectora y se alcanza el equilibrio a una presión común, mientras que la temperatura de los dos recipientes se mantiene constante en su valor inicial. ¿Cuál es la presión final del sistema?

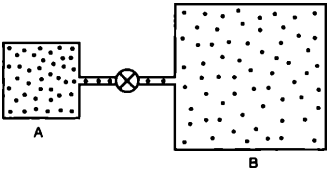


FIGURA 21-22. Problema 18.

19. La variación de presión en la atmósfera terrestre, que según se supone tiene una temperatura uniforme, está dada por $p = p_0 e^{-Mgy/RT}$, donde M es la masa molar del aire. Demuestre que $n_V = n_{V0} e^{-Mgy/RT}$ donde n_V es el número de moléculas por unidad de volumen.

20. Una burbuja de jabón de radio $r_0 = 2.0$ mm flota libremente dentro de la jarra de una campana al vacío. La presión en el interior de la jarra es originalmente $p = 1$ atm. Se enciende la bomba de vacío y lentamente se reduce la presión interna a cero, mientras que la temperatura del gas dentro de la burbuja permanece constante. ¿Cuál es el radio de la burbuja de jabón cuando la presión externa desciende a cero? La tensión superficial de una burbuja de jabón es $\gamma = 2.50 \times 10^{-2}$ N/m. (Problema 1 para resolver por computadora.)

21. Un manómetro lleno de mercurio con dos brazos de distinta longitud de la misma superficie transversal se sella herméticamente a la misma presión p en ambos brazos, como se aprecia en la figura 21-23. Con la temperatura constante, se introducen en el fondo otros 10.0 cm^3 más de mercurio. El nivel a la izquierda aumenta 6.00 cm y a la derecha 4.00 cm. Calcule la presión p.

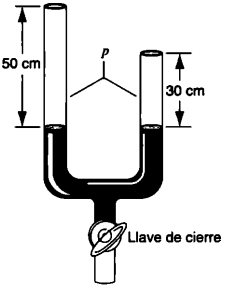


FIGURA 21-23. Problema 21.

22. La "tensión superficial" de un globo aerostático esférico es proporcional a su radio. Originalmente el globo está lleno de 10.0 l de un gas ideal a 80°C y a 103 kPa. El gas se enfría a 20°C; determine el nuevo volumen del globo. Suponga que la presión afuera de él se mantiene estable a 101 kPa.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Una burbuja de jabón con una tensión superficial $\gamma = 2.50 \times 10^{-2}$ N/m tiene un radio $r_0 = 2.0$ mm cuando la presión fuera de ella es 1.0 atmósfera. *a*) Calcule numéricamente su radio si la presión externa disminuye a 0.5 atm. *b*) Calcule numéricamente el radio de la burbuja, si elevamos a 2.0 atm la presión externa.

2. Un globo pequeño se llena con gas nitrógeno (supuestamente ideal) en el fondo de Marianas Trench, 35,000 ft por debajo de la superficie del mar. El globo tiene al inicio un radio de 1.0 cm, carece de masa y puede expandirse infinitamente sin tensión superficial, pero conservando siempre su forma esférica. Suponga que el gas ideal dentro del globo tiene una temperatura de 4°C en todo el problema. El globo comienza a ascender a la superficie, se expande al subir y se mueve con una fuerza de retraso f proporcional a la velocidad v, y su radio r está dada por

$$f = 6\pi\eta r v,$$

donde $\eta = 1.7 \times 10^{-3}$ N · s/m es la viscosidad del agua. *a*) Calcule la fuerza inicial de flotación que opera sobre el globo. *b*) ¿Cuál será su tamaño en la superficie? *c*) Resuelva numéricamente este problema para averiguar cuánto tarda el globo en ascender a la superficie.

CAPÍTULO 22

PIEDADES MOLECULARES DE LOS GASES

En la sección 21-5 explicamos la ley del gas ideal, que se expresa en términos de presión, volumen y temperatura. Al ocuparnos de las propiedades mensurables a gran escala de los gases, adoptamos un enfoque macroscópico sobre lo que describimos. Dicha ley nada nos dice acerca del hecho de que los gases —y cualquier tipo de materia— constan de partículas que pueden ser átomos o moléculas.

En este capítulo adoptamos un enfoque microscópico y tratamos de explicar las propiedades macroscópicas de un gas a partir de las propiedades de sus moléculas. Si el número de moléculas es muy grande —y generalmente lo es—, esos promedios nos dan cantidades bien definidas. El nombre formal del enfoque es teoría cinética de los gases, donde el adjetivo "cinético" indica que tratamos de las partículas en movimiento.

22-1 NATURALEZA ATÓMICA DE LA MATERIA

Hoy ninguna persona informada duda que la materia esté constituida por átomos. Tal vez el lector se sorprenda al enterarse de que la aceptación universal de la existencia de los átomos por parte de la comunidad científica se dio apenas a principios de la década de 1900. Muchas teorías respecto a la naturaleza atómica de la materia se remontan a la época de los griegos, pero ninguna gozaba de suficiente apoyo en los experimentos como para excluir otros puntos de vista. En la actualidad la hipótesis de la existencia de los átomos es tan importante para entender la naturaleza del mundo circundante que Richard Feynman, Premio Nobel de Física, escribió: "En caso de destruirse la totalidad de los conocimientos científicos, confío que se salve el relativo a los átomos."

La creencia moderna en los átomos se originó en 1828, año en que el botánico escocés Robert Brown observaba en su microscopio que unos minúsculos granos de polen suspendidos en el agua experimentaban movimiento aleatorio interminable. Ahora a este fenómeno lo llamamos *movimiento browniano*. Brown observó asimismo que el mismo movimiento ocurría cuando en un fluido se suspendía polvo de carbón, vidrio, roca y de varios minerales. El movimiento parecía ser una propiedad fundamental de la materia, como en realidad resultó serlo.

En 1905, Einstein (quien no conocía el informe en que Brown mostraba sus observaciones) predijo que el efecto se produciría, y lo presentó como prueba directa de que el fluido donde la partícula estaba suspendida estaba formada por átomos. Una partícula suspendida en un fluido es bombardeada en todos lados por sus átomos, que se encuentran en un movimiento constante de agitación térmica. Supongamos que N es el número promedio de colisiones de partícula-átomo en cualquier lado de la partícula durante un breve intervalo temporal Δ_t. *En promedio*, igual número de colisiones tendrán lugar en el otro lado. Pero debido a que las colisiones ocurren al azar el promedio fluctuará en los dos lados. Así pues, en cualquier intervalo particular Δ_t habrá ligeramente más colisiones en uno de los lados de la partícula. Tales desequilibrios aleatorios ocurren en tres dimensiones, de manera que la partícula bombardeada, que suele ser más masiva por muchos órdenes de

magnitud que los átomos que la bombardean, se desplaza en una forma errática típica del movimiento browniano.

Algunos años después del análisis del movimiento browniano que hizo Einstein, el físico y químico francés Jean Baptiste Perrin (1870-1942) efectuó mediciones cuantitativas del efecto. En la figura 22-1 se ilustra una muestra de sus datos. En ésta se aprecia el movimiento browniano de una partícula diminuta de resina de goma suspendida en agua y vista mediante microscopio. Perrin medía las coordenadas x y y de la partícula cada 30 s y marcaba su posición con un punto sobre la gráfica. (Los segmentos de línea recta de la figura se dibujaron simplemente para conectar los puntos; la partícula no los sigue, sino que se desplaza en la misma forma errática que caracteriza la figura entera.)

Las magnitudes que pueden medirse directamente con el patrón de *trayectoria al azar* de la figura 22-1 son Δx y Δy, las cuales son respectivamente los cambios en las coordenadas x y y de la partícula entre observaciones sucesivas. Dado que Δx y Δy pueden ser positivos o negativos, su valor promedio en muchas mediciones es cero. Los parámetros importantes son los valores promedio de los *cuadrados* de estas magnitudes $[(\Delta x)^2]_{pro}$ y $[(\Delta y)^2]_{pro}$, que son intrínsecamente positivos.

Einstein obtiene la siguiente expresión para $[(\Delta x)^2]_{pro}$, si la partícula bombardeada es una esfera de radio a suspendida en un gas:

$$[(\Delta x)^2]_{pro} = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A}\Delta t. \qquad (22\text{-}1)$$

Aquí η (letra griega "eta") es una medida de la viscosidad del gas (Sec. 16-6). Esta magnitud entra porque, cuando a una partícula suspendida se le da un "puntapié" debido a un desequilibrio del bombardeo atómico, disminuye su rapidez por

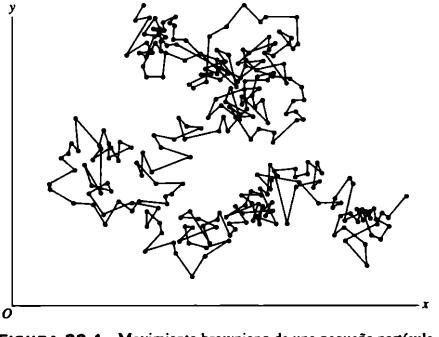


FIGURA 22-1. Movimiento browniano de una pequeña partícula de resina de goma cuyo radio mide unos $3\mu m$. Los puntos, conectados por líneas rectas, marcan las posiciones de la partícula a intervalos de 30 s. Su trayectoria constituye un ejemplo de una *fractal*, curva donde cualquier sección pequeña se asemeja a la curva en general. Por ejemplo, si tomamos un segmento corto de 30 s y los vemos a intervalos más reducidos —quizá de 0.1 s—, la gráfica del movimiento en ese segmento se parecerá a la figura entera.

las fuerzas viscosas semejantes a la fricción. R en la ecuación 22-1 es la constante molar del gas, T es la temperatura Kelvin y N_A es la constante de Avogadro.

Si N_A fuera mucho más grande de lo que es en realidad, el movimiento browniano se reduciría porque las rapideces de las colisiones serían más similares en lados opuestos de la partícula suspendida. En cambio, aumentaría si N_A fuera mucho menor de lo que es en realidad. Por tanto, con $[(\Delta x)^2]_{pro}$ medida, la ecuación 22-1 puede servir para deducir N_A. Luego de recopilar muchos datos, de los cuales la figura 22-1 es una muestra pequeña, Perrin descubrió que $N_A \approx 6 \times 10^{23}$ moléculas/mol, lo cual concuerda con los resultados conseguidos en la época con otros métodos. Por este trabajo, que corrobora en forma tan tajante la existencia de los átomos, obtuvo en 1926 el Premio Nobel de Física. En *Atoms*, libro que publicó en 1913, escribió con mucho entusiasmo acerca de sus observaciones del movimiento browniano: "La teoría atómica ha triunfado. Hasta hace poco sus todavía numerosos adversarios fueron por fin derrotados, y ahora uno tras otro renuncian a su error...".

Propiedades del gas ideal

En la sección 21-5 describimos las propiedades microscópicas del gas ideal y mostramos que se relacionaban por la ley que los rige ($pV = nRT$). Ahora que hemos aportado las pruebas de que la materia se compone de átomos, vamos a estudiar más a fondo sus propiedades microscópicas. En las secciones restantes del capítulo recurriremos al gas ideal como el sistema termodinámico de referencia.

1. *El gas ideal consta de partículas que siguen un movimiento aleatorio y que obedecen las leyes del movimiento de Newton.* Las partículas pueden ser átomos individuales o grupos de átomos. En uno y otro caso les asignaremos el nombre de "moléculas". Éstas se mueven en todas direcciones y con una amplia gama de velocidades.

2. *El número total de moléculas es "grande".* Una molécula le imprime momento a una pared de su contenedor cuando rebota contra ella. Suponemos que las moléculas son tantas que la rapidez con que se imprime momento a una superficie A del contenedor es esencialmente constante.

3. *El volumen ocupado por las moléculas es una fracción muy pequeña del que ocupa el gas.* Sabemos que cuando un gas se condensa y adquiere forma de líquido, este último es mucho menor que el gas. Así, las moléculas son "pequeñas" y verosímil nuestra suposición.

4. *Sobre la molécula no pueden actuar fuerzas salvo durante una colisión, ya sea con las paredes del contenedor, ya sea con otra molécula.* Si seguimos una molécula en particular, veremos que describe una trayectoria zigzagueante formada por segmentos rectos, con velocidad constante entre encuentros impulsivos.

5. *Todas las colisiones son (i) elásticas y (ii) de duración insignificante.* La parte (i) nos indica que la energía cinética total de las moléculas es constante. La parte (ii) nos indica que lo es la energía potencial total de las moléculas (que puede de intervenir sólo durante una colisión).

En el modelo de gas ideal, suponemos que todas las moléculas de un gas de cierto tipo son idénticas y que, por consiguiente, su masa es idéntica. La masa de una molécula se obtiene sumando las masas de los átomos que constituyen la molécula. En el Apéndice d figuran las masas atómicas (en unidades de u), que a menudo se incluyen en una tabla periódica de los elementos. Por ejemplo, la masa de una molécula de dióxido de azufre (SO_2) se da en términos de la masa atómica del azufre y del oxígeno como

$$m = m(\mathrm{S}) + 2m(\mathrm{O}) = 32.1\ \mathrm{u} + 2(16.0\mathrm{u}) = 64.1\ \mathrm{u}.$$

En vez del número de moléculas N, a menudo es preferible describir la cantidad de un gas a partir del número de moles n; la relación entre estas dos medidas equivalentes se describe en la ecuación 21-15, $N = nN_A$, donde N_A es la constante de Avogadro con un valor de $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ moléculas/mol.

La masa de un mol de cualquier sustancia, denominada *masa molar* M, es la masa de una molécula multiplicada por el número de moléculas por mol, es decir,

$$M = mN_A. \tag{22-2}$$

La masa molar, medida en gramos, es numéricamente igual a la masa molecular, medida en u. Así pues, la masa molar de SO_2 es $M = 64.1$ g/mol $= 0.0641$ kg/mol.

En el resto del capítulo demostraremos cómo el análisis de un gas como grupo de moléculas que cumplen con las leyes de Newton nos ofrece una conexión entre sus propiedades termodinámicas macromoleculares y algunas propiedades microscópicas como la velocidad molecular promedio o la distancia promedio que una molécula recorre entre colisiones.

22-2 PERSPECTIVA MOLECULAR DE LA PRESIÓN

En esta sección asociaremos la presión ejercida por un gas sobre las paredes de su contenedor al bombardeo constante en ellas por las moléculas del gas, punto de vista que propuso quizá, por primera vez el científico suizo Daniel Bernoulli (1700-1782). Tomaremos el gas ideal como sistema y obtendremos una expresión de la presión que ejerce, teniendo en cuenta las propiedades de las moléculas que lo constituyen.

Consideremos N moléculas de un gas ideal confinado en una caja cúbica con una longitud de lado L, como se aprecia en la figura 22-2. Denotemos con A_1 y A_2, cada una con una superficie L^2, las caras en ángulo recto con el eje x. Concentrémonos en una sola molécula de masa m, cuya velocidad $\vec{v}$ puede separarse en los componentes v_x, v_y y v_z. Cuando choca contra la cara A_1, rebota con sus componentes x de velocidad invertida porque se supone que todas las colisiones son elásticas, es decir, $v_x \rightarrow -v_x$. No se produce efecto alguno en v_y o v_z, por lo cual el cambio en el momento de la molécula tiene sólo un componente x dado por

momento final − momento inicial =

$$-mv_x - (mv_x) = -2mv_x. \tag{22-3}$$

Puesto que el momento total se conserva en la colisión, el momento impartido a A_1 es $+2mv_x$.

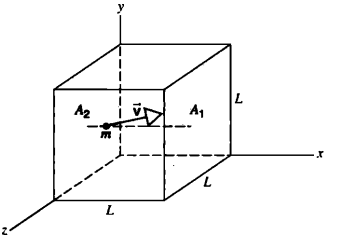


FIGURA 22-2. Una caja cúbica de lado L contiene un gas ideal. Se muestra una molécula de gas que se desplaza con una velocidad $\vec{v}$ hacia el lado A_1.

Supóngase que esta molécula llega a A_2 sin chocar con ninguna otra en su trayectoria. El tiempo que tarda en cruzar el cubo es L/v_x. (Si la molécula choca contra una de las otras caras de la caja al dirigirse a A_2, el componente x de esta velocidad no cambia y tampoco el tiempo de recorrido.) En A_2 otra vez es invertido su componente x de velocidad y retorna a A_1. Suponiendo que no se produzcan colisiones con otras moléculas, el viaje redondo tarda $2L/v_x$, que es el tiempo que transcurre en las colisiones con A_1. La fuerza promedio de impulso ejercida por esta molécula en A_1 es el momento transferido, dividido entre el intervalo temporal de las transferencias, es decir,

$$F_x = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}. \tag{22-4}$$

Para obtener la fuerza *total* en A_1 —es decir, la rapidez con que *todas* las moléculas de gas imparten momento a A_1—, hay que sumar la magnitud mv_x^2/L para todas las moléculas. Después, para calcular la presión se divide esta fuerza entre la superficie de A_1, a saber: L^2. En consecuencia, la presión será

$$p = \frac{1}{L^2}\frac{mv_{1x}^2 + mv_{2x}^2 + \cdots}{L}$$

$$= \frac{m}{L^3}(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots), \tag{22-5}$$

donde v_{1x} es el componente x de la velocidad de la molécula 1, v_{2x} es la de la molécula 2, y así sucesivamente. Si N es el número total de moléculas dentro del contenedor, Nm será la masa total y Nm/L^3 será la densidad ρ. Por tanto, $m/L^3 = \rho/N$, y

$$p = \rho\left(\frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots}{N}\right). \tag{22-6}$$

La cantidad dentro del paréntesis en la ecuación 22-6 es el valor promedio de v_x^2, para todas las moléculas del contenedor que representamos mediante $(v_x^2)_{\mathrm{pro}}$. Entonces

$$p = \rho(v_x^2)_{\mathrm{pro}}. \tag{22-7}$$

En cualquier molécula, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Tenemos muchas moléculas y se mueven enteramente al azar, por eso los valores promedio de v_x^2, v_y^2 y v_z^2 son iguales, y el valor de cada uno es exactamente una tercera parte del valor promedio de v^2.

Las moléculas no muestran preferencia por el movimiento a lo largo de uno de los tres ejes, de ahí que $(v_x^2)_{pro} = \frac{1}{3}(v^2)_{pro}$, y por eso la ecuación 22-7 se convierte en

$$p = \tfrac{1}{3}\rho(v^2)_{pro}. \qquad (22\text{-}8)$$

Aunque obtuvimos el resultado anterior prescindiendo de las colisiones entre moléculas, el resultado es verdadero aun cuando tengamos en cuenta las colisiones. Dado el intercambio de velocidades en una colisión elástica de partículas idénticas, siempre habrá una molécula que choque contra A_2 con el momento mv_x correspondiente a la molécula que rebotó de A_1 con ese mismo momento. Por lo demás, el tiempo que duran las colisiones es insignificante comparado con el que transcurre entre ellas. Así, el prescindir de las colisiones no es más que un medio fácil para realizar el cálculo. También podríamos haber escogido un contenedor de cualquier forma: el cubo sólo lo simplifica. Si bien hemos calculado la presión ejercida únicamente sobre un lado, de la ley de Pascal se deduce que es igual en todas las caras y en todo el interior. (Esto se aplica tan sólo si la densidad del gas es uniforme.) En una muestra grande de gas, los efectos gravitacionales podrían ser importantes, y deberíamos tener en cuenta la densidad variable (Sec. 15-3 y problema 19 del Capítulo 21.)

La raíz cuadrada de $(v^2)_{pro}$ recibe el nombre de velocidad *raíz cuadrática media* de las moléculas y es una medida muy útil de la rapidez molecular promedio. La ecuación 22-8 nos permite calcular esta rapidez partiendo de los valores medidos de la presión y densidad del gas. Por tanto,

$$v_{rcm} \equiv \sqrt{(v^2)_{pro}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \qquad (22\text{-}9)$$

En la ecuación 22-8 relacionamos la magnitud macroscópica (la presión p) con un valor promedio de una magnitud microscópica, es decir, con $(v^2)_{pro}$ o v^2_{rcm}.

PROBLEMA RESUELTO 22-1. Calcule la rapidez raíz cuadrática media de las moléculas de hidrógeno a 0.00°C y a una presión de 1.00 atm, suponiendo que el hidrógeno es un gas ideal. ¿En qué condiciones tiene una densidad ρ de 8.99×10^{-2} kg/m³?

Solución Dado que $p = 1.00$ atm $= 1.01 \times 10^5$ Pa,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})}{8.99 \times 10^{-2}\ \text{kg/m}^3}} = 1{,}840\ \text{m/s}.$$

La expresión anterior es igual a 4,120 mi/h, es decir un poco más de una milla por segundo.

La tabla 22-1 contiene los resultados de cálculos de algunos gases a temperatura ambiente. Los valores de v_{rcm} se refieren a la rapidez de las moléculas entre las colisiones. Debido a estas últimas, las moléculas del gas cambian constantemente de dirección y no se desplazan rápidamente en una dirección seleccionada. Tal contraste entre las velocidades de intercolisión explican el gran retraso entre abrir un frasco de perfume en un extremo de un cuarto y percibir su aroma en el otro. No obstante, el poder demostrar que uno huela el perfume se debe a las corrientes de convección inevitables en el cuarto. Si pudieran ser eliminadas, el retraso sería mucho mayor. La rapidez con que un gas se difunde en otro será mucho menor que la rapidez rms de las moléculas en difusión.

TABLA 22-1 Algunas rapideces moleculares a temperatura ambiente (300 K)

Gas	*Masa molecular m* (u)	v_{rcm} (m/s)
Hidrógeno	2.0	1,920
Helio	4.0	1,370
Vapor de agua	18.0	645
Nitrógeno	28.0	517
Oxígeno	32.0	483
Dióxido de carbono	44.0	412
Dióxido de azufre	64.1	342

PROBLEMA RESUELTO 22-2. La caja cúbica de la figura 22-2 mide 10 cm de lado y contiene oxígeno a una presión de 1.0 atm y una temperatura $T = 300$ K. *a)* ¿Cuántos moles de oxígeno hay dentro de la caja? *b)* ¿Cuántas moléculas? *c)* ¿Con qué frecuencia aproximada chocan las moléculas de oxígeno contra una cara de la caja? (*Sugerencia*: Para simplificar el problema, supongamos que las moléculas se mueven todas con la misma rapidez v_{rcm}, que no chocan entre sí y que una tercera parte de ellas oscilan entre cada par de caras opuestas del cubo.)

Solución *a)* Al resolver la ecuación del gas ideal (Ec. 21-17) para n —el número de moles—, obtenemos

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})(0.10\ \text{m})^3}{(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})} = 0.041\ \text{mol}.$$

Aquí hemos reemplazado V por L^3 y utilizado el hecho de que, en unidades del SI, 1 atm $= 1.01 \times 10^5$ Pa.

b) El número de moléculas se deduce de la ecuación 21-15:

$$N = nN_A = (0.041\ \text{mol})(6.02 \times 10^{23}\ \text{moléculas/mol}) = 2.5 \times 10^{22}\ \text{moléculas}$$

c) Considere el movimiento oscilatorio de una molécula individual. El tiempo promedio entre las colisiones en una cara es $2L/v_{rcm}$ y la frecuencia con que choca contra ella es la inversa de este valor, esto es, $v_{rcm}/2L$. Si la caja contiene N moléculas, conforme a nuestra suposición $\frac{1}{3}N$ de ellas realizan lo mismo. De ahí que la frecuencia total con que las moléculas chocan contra la cara en cuestión sea $(\frac{1}{3}N)(v_{rcm}/2L)$. En la tabla 22-1 vemos que v_{rcm} para el oxígeno a 300 K es 483 m/s. Por tanto,

$$\text{Rapidez} \approx \frac{Nv_{rcm}}{6L} = \frac{(2.5 \times 10^{22}\ \text{moléculas})(483\ \text{m/s})}{(6)(0.1\ \text{m})} = 2.0 \times 10^{25}\ \text{colisiones/s}.$$

Un análisis más riguroso, que tenga en cuenta las velocidades y la dirección variables de las moléculas, nos da 2.8×10^{25} colisiones/s. Así pues, la respuesta aproximada no dista mucho de ser la correcta.

Al resolver problemas en física, hacemos a menudo suposiciones sumamente simplificadas si buscamos sólo ese tipo de respuesta.

PROBLEMA RESUELTO 22-3. El uranio natural consta fundamentalmente de dos isótopos, fisionables ^{235}U (0.7% abundancia) y prácticamente no fisionables ^{238}U (99.3%). *a*) En el caso UF_6 (hexafluoruro de uranio) que contiene una mezcla natural de los dos a una temperatura común T, calcule la razón de la rapidez rcm de las moléculas del gas que contiene ^{235}U a los que contienen ^{238}U. *b*) Si se hace pasar el gas por una barrera porosa, las moléculas más rápidas emergen primero y la abundancia resultante de ambos tipos de moléculas en el lado extremo de la barrera serán proporcionales a su rapidez rcm. ¿Cuál será la abundancia relativa de las moléculas de gas que contienen ^{235}U después de pasar éste por las barreras? *c*) ¿Cuántas veces debe hacerse que el gas cruce la barrera antes que la abundancia de ^{235}U alcance 3%? Esta abundancia es típica del enriquecimiento de ^{235}U necesario para el combustible de uranio en los reactores de fisión.

Solución *a*) Considere dos muestras del gas UF_6, idénticas salvo que una contiene exclusivamente ^{235}U y la otra exclusivamente ^{238}U. Las masas moleculares de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ son $m(235) = 235\text{ u} + 6(19\text{ u}) = 349\text{ u}$ y $m(238) = 238\text{ u} + 6(19\text{ u}) = 352\text{ u}$. La razón de densidades —en igualdad de condiciones— es la de las masas moleculares, de manera que, según la ecuación 22-9,

$$\frac{v_{rcm}(235)}{v_{rcm}(238)} = \sqrt{\frac{m(238)}{m(235)}} = \sqrt{\frac{352\text{ u}}{349\text{ u}}} = 1.0043.$$

b) La abundancia relativa de las dos clases de moléculas de gas en la muestra mezclada es igual a la de los isótopos de uranio que contienen. Al entrar en la barrera, la razón es $0.007/0.993 = 0.00705$. De conformidad con nuestra suposición, el paso por ella aumenta esta razón en el factor calculado en *a*), así que

$$\text{razón después de 1 paso} = 0.00705 \times 1.0043 = 0.00708.$$

c) El gas que entra en la primera barrera tiene una razón de isótopos, calculada en *b*), de 0.00705. Tras franquear la barrera n veces, queremos que la razón del gas emergente sea $0.030/0.97 = 0.03093$. Esta razón aumenta 1.0043 en cada paso, por lo cual

$$(1.0043)^n\,(0.00705) = 0.03093.$$

Si resolvemos esta relación para n (tomando logaritmos) encontramos que $n \approx 350$.

22-3 LA TRAYECTORIA LIBRE MEDIA

Suponga que pudiera seguir la trayectoria zigzagueante (Fig. 22-3) de una molécula típica dentro de un gas conforme se desplaza y choca con otras. En particular, midamos la distancia en línea recta que la molécula escogida cubre entre las colisiones y calculemos su valor promedio. A esta cantidad se le llama *trayectoria libre media* λ. Dado que, la molécula elegida no es "especial", todas las del gas presentan la misma trayectoria. Desde luego, es imposible seguir una sola y efectuar estas mediciones, pero en la presente sección obtendremos el resultado de ellas.

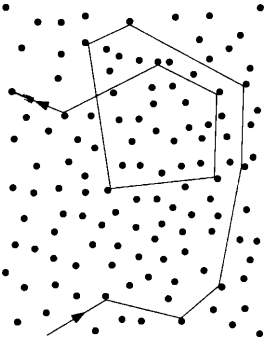


FIGURA 22-3. Molécula que se desplaza por un gas y choca con otras en su trayectoria. Por supuesto, éstas también se mueven y sufren colisiones.

Supongamos que las moléculas de un gas son esferas de diámetro d. Tendrá lugar una colisión cuando el centro de dos de ellas se acerque a una distancia d entre sí. Una descripción equivalente de las colisiones hechas por una molécula cualquiera consiste en considerar que tenga un diámetro $2d$ y el resto de ellas como partículas puntuales (Fig. 22-4).

Supongamos en forma provisional que la molécula de diámetro $2d$ no ejerce fuerza alguna sobre las moléculas puntuales entre las cuales se desplaza. En el tiempo t la molécula "gorda" generará un cilindro de superficie transversal πd^2, longitud $L_{cil} = vt$ (donde v es la rapidez de la molécula) y de volumen $V_{cil} = \text{área} \times \text{longitud} = (\pi d^2)(vt)$. Sea V el volumen de la caja donde está encerrado el gas y supongamos que contiene N moléculas. Entonces el número de moléculas (puntuales) dentro del cilindro de la figura 22-5 es

$$N_{cil} = N\frac{V_{cil}}{V} = \frac{N\pi d^2 vt}{V}. \qquad (22\text{-}10)$$

Como la molécula en movimiento y las moléculas puntuales *sí* ejercen fuerzas una sobre otra, este número es también el de colisiones que la molécula móvil sufre en el tiempo t.

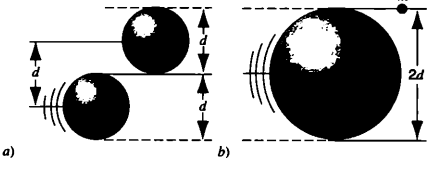


FIGURA 22-4. *a*) Una colisión ocurre cuando los centros de dos moléculas se aproximan a una distancia d entre sí, donde d es el diámetro molecular. *b*) Una representación equivalente pero más adecuada consiste en pensar que la molécula en movimiento tiene un diámetro $2d$, siendo puntuales las otras moléculas.

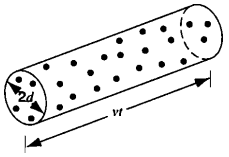


FIGURA 22-5. Molécula con un diámetro equivalente $2d$ (como en la figura 22-4*b*) que se desplaza con una rapidez v y que en el tiempo t genera un cilindro de área de la base πd^2 y de longitud vt. El número de colisiones que sufre la molécula en ese tiempo es igual al de las moléculas (consideradas puntuales) que se encuentran dentro del cilindro. En realidad, este cilindro se doblará muchas veces cuando las colisiones cambian la dirección de la trayectoria de la molécula; la trayectoria se enderezó para facilitar la descripción.

El cilindro de la figura 22-5 está roto y cambia de dirección con cada colisión.

La trayectoria libre media λ es la distancia total que la molécula en movimiento recorre en el tiempo t, dividida entre las colisiones que experimenta en ese tiempo, es decir,

$$\lambda = \frac{L_{cil}}{N_{cil}} = \frac{vtV}{N\pi d^2 vt} = \frac{V}{N\pi d^2}. \qquad (22\text{-}11)$$

Como se advierte en la ecuación 21-13, podemos escribir la ley del gas ideal en la forma $pV = NkT$, en que k es la constante de Boltzmann. Conforme a la ecuación anterior, $V/N = kT/p$ y la ecuación 22-11 queda así

$$\lambda = \frac{kT}{\pi d^2 p}. \qquad (22\text{-}12)$$

La ecuación 22-12 se basa en la suposición de una sola molécula en movimiento que choca con blancos fijos. En realidad, la que estamos siguiendo choca con blancos móviles. Cuando todas se desplazan, las dos v de la ecuación 22-11 no son iguales, de ahí que no se cancelen. La v en el numerador ($= v_{pro}$) es la rapidez molecular promedio medida respecto a la caja donde está encerrado el gas. La v en el denominador ($= v_{rel}$) es la rapidez relativa promedio respecto al resto de las moléculas. Es la rapidez relativa la que rige la velocidad de las colisiones.

Podemos ver cualitativamente que $v_{rel} > v_{pro}$ como sigue. Dos moléculas de rapidez v que avanzan una hacia otra tienen $v_{rel} = 2v$, que es mayor que v. Es fácil demostrar que dos moléculas que se muevan en ángulos rectos una respecto a otra en la misma dirección tendrán $v_{rel} = \sqrt{2}\ v$, que naturalmente es mayor que v. Dos moléculas que se mueven con rapidez v en la misma dirección tienen $v_{rel} = 0$, que es menor que v. Si el ángulo entre las velocidades de las moléculas en colisión (suponiendo que presenten la misma rapidez) fluctúa entre 0° y 60°, entonces $0 \le v_{rel} \le v$, y $v \le v_{rel} \le 2v$ si el ángulo oscila entre 60° y 180° (el último correspondiente a una colisión frontal). Por ser aleatorias las colisiones, hay mayores probabilidades de que el ángulo de colisión en el intervalo de 60° a 180° que en el intervalo de 0° a 60°. Por tanto, la rapidez relativa en promedio será mayor que v.

Una conclusión similar se cumple en el promedio si las moléculas muestran una distribución de varias rapideces. Se obtiene $v_{rel} = \sqrt{2}\ v_{pro}$ con un cálculo completo que tenga en cuenta la distribución real de rapideces de las moléculas. Así, la ecuación 22-12 se convierte en

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \qquad \text{(trayectoria libre media).} \qquad (22\text{-}13)$$

La ecuación anterior relaciona dos magnitudes microscópicas (λ y d) con dos macroscópicas (p, y T).

Para moléculas de aire al nivel del mar, $\lambda \approx 10^{-7}$ m o 0.1 μm. A una altura de 100 km, la densidad del aire se reduce tanto que $\lambda \approx 16$ cm. En 300 km, $\lambda \approx 20$ km. En muchas aplicaciones científicas e industriales, el aire debe extraerse por bombeo de un contenedor sellado, creándose un vacío. El concepto de esta trayectoria pierde su importancia, una vez aminorada la presión al punto que la trayectoria libre media calculada en la ecuación 22-13 supere las dimensiones del contenedor; en esa etapa las moléculas chocan más a menudo con las paredes del contenedor que entre sí.

Tanto en la ciencia como en la industria tiene gran interés la capacidad de los gases de conducir calor, su viscosidad y la rapidez con que se difunden de las regiones de alta concentración a las de baja concentración. Tales propiedades son proporcionales a la trayectoria libre media de las moléculas del gas. Los diseñadores de aceleradores de partículas de alta energía, como los que trabajan en CERN y en Fermilab, hacen lo posible por extraer la mayor cantidad posible de aire de los enormes anillos circulares alrededor de los cuales las partículas aceleradas han de circular miles de veces, sin que choquen contra una molécula residual de aire.

PROBLEMA RESUELTO 22-4. ¿Cuáles son *a*) la trayectoria libre media y *b*) la frecuencia promedio de colisión es del nitrógeno a temperatura ambiente ($T = 300$ K) y la presión atmosférica ($p = 1.01 \times 10^5$ Pa)? Una molécula de nitrógeno tiene un diámetro efectivo de $d = 3.15 \times 10^{-10}$ m y, en las condiciones mencionadas, una rapidez promedio $v_{pro} = 478$ m/s.

Solución *a*) A partir de la ecuación 22-13,

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{(\sqrt{2}\pi)(3.15 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})}$$

$$= 9.3 \times 10^{-8}\ \text{m}.$$

El resultado es unos 300 diámetros moleculares. En promedio, la distancia entre las moléculas de un gas es igual a la raíz cúbica del volumen ocupado por una sola molécula o $(V/N)^{1/3}$. Con base en la ecuación 21-13 ($pV = NkT$) podemos escribir esto como $(kT/p)^{1/3}$, lo cual resulta ser 3.4×10^{-9} m, aproximadamente, que equivale a 11 diámetros moleculares. En una trayectoria libre media λ una molécula pasará cerca de 27 moléculas más antes de sufrir una colisión. *b*) La frecuencia promedio de colisiones es la velocidad media dividida entre la trayectoria libre media, esto es,

$$\text{frecuencia} = \frac{v_{pro}}{\lambda} = \frac{478\ \text{m/s}}{9.3 \times 10^{-8}\ \text{m/colisiones}}$$

$$= 5.1 \times 10^9\ \text{colisiones/segundo}$$

En promedio, todas las moléculas de nitrógeno experimentan más de 5,000 millones de colisiones por segundo.

22-4 LA DISTRIBUCIÓN DE LAS VELOCIDADES MOLECULARES

Por medio de la ecuación 22-9 podemos calcular v_{rcm}, la rapidez de raíz cuadrada media de las moléculas de un gas ideal. Pero supongamos que queremos conocer cómo sus rapideces están distribuidas alrededor del promedio. Es poco probable que todas ellas tengan la misma rapidez, porque las colisiones pronto alterarían la situación. Las rapideces cercanas a cero o mucho mayores que v_{rcm} también son poco probables; requerirían una secuencia de colisiones preferenciales que difícilmente se daría en una condición de equilibrio térmico.

El físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) fue el primero en resolver el problema de la distribución de las velocidades en un gas que contenga numerosas moléculas. La *distribución de velocidades de Maxwell* —nombre con que se le conoce— en una muestra de gas a una temperatura T que contenga N moléculas, cada una con una masa m, es

$$N(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}. \qquad (22\text{-}14)$$

La figura 22-6 muestra una gráfica de esta ecuación para moléculas de oxígeno a temperatura ambiente.

En la ecuación 22-14 la interpretación de $N(v)$ es que el producto (adimensional) $N(v)\,dv$ nos dice el número de moléculas cuya velocidad fluctúa entre v y $v + dv$. En forma gráfica, este producto con $v = 600$ m/s se representa en la figura 22-6 como el área sombreada de la estrecha tira vertical situada en esa velocidad.

No caiga en la tentación de interpretar $N(v)$ como "el número de moléculas con una rapidez v". Es una interpretación absurda pues, aunque el número puede ser extenso, no puede ser infinito, pero sí lo es el de rapideces disponibles. La probabilidad de que una molécula tenga una rapidez expresada con mucha precisión, digamos 600.34326759... m/s, es exactamente cero. No obstante, el número de las moléculas cuya rapidez se halla dentro de un intervalo estrecho, como 600 a 602 m/s, tiene un valor preciso diferente de cero.

Si sumamos (integramos) el número de moléculas en cada intervalo diferencial de rapidez dv de $v = 0$ a $v \to \infty$, debemos obtener N, número total del sistema. En otras palabras, ha de ser cierto que

$$N = \int_0^\infty N(v)\,dv. \qquad (22\text{-}15)$$

Nótese que la integral en la ecuación 22-15 puede interpretarse como el área total bajo la curva de distribución de la figura 22-6. La cantidad de moléculas cuya rapidez se encuentre entre cualquier valor dado, digamos v_1 y v_2, es igual a el área bajo la curva de distribución de velocidades entre esos límites.

A medida que la temperatura va creciendo, lo mismo sucede con la rapidez de las moléculas; por tanto, la curva de distribución de las velocidades ha de hacerse más amplia. Como no cambia el área bajo la curva (que es la cantidad total de moléculas), la curva también debe aplanarse al elevarse la temperatura. En la figura 22-7 se ve la forma en que la curva de distribución de las moléculas de oxígeno con $T = 80$ K se ensancha y se aplana cuando aumentamos la temperatura a 300 K.

La distribución de velocidades de las moléculas en un líquido se asemeja a la de la figura 22-6. Nos permite entender por qué el agua en un plato terminará por evaporarse por completo. La velocidad necesaria para que una molécula de agua

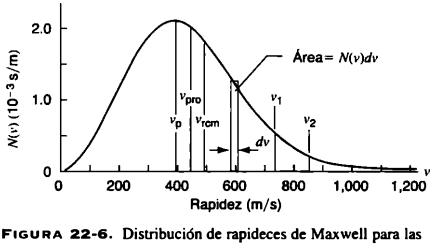


FIGURA 22-6. Distribución de rapideces de Maxwell para las moléculas de un gas. La curva graficada caracteriza a las moléculas de oxígeno con $T = 300$ K. El número de moléculas con rapideces en cualquier intervalo dv es $N(v)dv$, indicado por la estrecha franja sombreada. El número con rapideces entre cualesquiera límites v_1 y v_2 está dado por el área bajo la curva entre ellos.

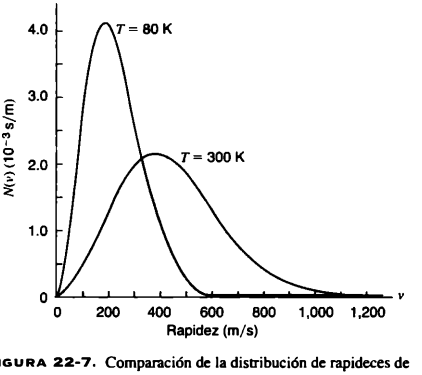


FIGURA 22-7. Comparación de la distribución de rapideces de Maxwell para las moléculas de oxígeno a dos temperaturas. En general, las moléculas tienen menor rapidez promedio con temperaturas más bajas, aunque ambas distribuciones cubran la gama entera de rapideces. El área de las dos distribuciones es igual, porque también lo es la cantidad total de moléculas en los dos casos.

escape de la superficie ocupará un lugar muy distante en la cola de la curva, como se aprecia en la figura 22-6. Sólo poquísimas moléculas alcanzarán velocidades por arriba de ese umbral. Con su salida disminuye la energía cinética promedio de las restantes, lo cual deja el agua a una temperatura menor. Así se explica por qué la evaporación es un proceso de enfriamiento. Pero si el plato no está aislado térmicamente de su ambiente, la energía fluirá y entrará en el agua a partir del entorno, manteniéndola en equilibrio térmico con él. Entrará en el agua en forma de calor para compensar la energía que extrajeron las moléculas "rápidas" que escapaban; este proceso continuará hasta que ya no quede agua.

La ecuación 22-14 muestra asimismo que la distribución de las velocidades moleculares depende de la masa de la molécula, lo mismo que de la temperatura. En una temperatura determinada, cuanto menor sea la masa, con mayor rapidez se moverá la molécula. Así pues, existen mayores probabilidades de que el hidrógeno salga de la atmósfera superior de la Tierra que el oxígeno o el nitrógeno.

Consecuencias de la distribución de velocidades

Se consigue abundante información útil en la ecuación 22-14, referente a la distribución de velocidades.

1. *La velocidad más probable* v_p. Es la velocidad a la cual $N(v)$ de la ecuación 22-14 tiene su valor máximo. La obtenemos exigiendo que $dN/dv = 0$ y resolviendo para v. Como debería usted verificar, el resultado es

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (22\text{-}16)$$

Aquí hemos efectuado las sustituciones $k = R/N_A$ (Ec. 21-17) y $m = M/N_A$ (Ec. 22-2).

2. *La velocidad promedio* v_{pro}. Para determinar la velocidad promedio de las moléculas, se suman todas las velocidades individuales y se divide después entre el número de moléculas. La forma más sencilla de hacerlo consiste en sumar los productos de la velocidad v en cada intervalo de ellas y el número $N(v)dv$ en él. Por tanto,

$$v_{pro} = \frac{1}{N}\int_0^\infty vN(v)\,dv. \qquad (22\text{-}17)$$

En el siguiente paso se sustituye $N(v)$ en la ecuación 22-14 y se evalúa la integral. El resultado es

$$v_{pro} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (22\text{-}18)$$

3. *La velocidad raíz cuadrada media* v_{rcm}. Esta magnitud ya la encontramos en la ecuación 22-9 de páginas anteriores. Para calcularla a partir de la ecuación de distribución procedemos igual que antes, salvo que ahora determinamos el valor promedio de v^2 (y no el de v). Después de integrar, llegamos así a

$$(v^2)_{pro} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 N(v)\,dv = \frac{3kT}{m}. \qquad (22\text{-}19)$$

La velocidad raíz cuadrada media es la raíz cuadrada de esta cantidad, es decir,

$$v_{rcm} = \sqrt{(v^2)_{pro}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (22\text{-}20)$$

4. *La energía cinética tradicional promedio por molécula* K_{trans}. Nótese primero lo siguiente: como suponemos que nuestro gas ideal es monoatómico, la energía cinética es la única clase que pueden tener las moléculas. Una molécula esencialmente puntual no puede tener energía de rotación, y suponemos que no se dan cambios en la energía interna de ellas.

Para encontrar K_{trans}, hay que localizar primero la energía cinética traslacional del conjunto de N moléculas y dividir luego entre N. La energía total K es

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2) \\ &= \tfrac{1}{2}mN\frac{(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2)}{N} \\ &= \tfrac{1}{2}mNv_{rcm}^2. \end{aligned}$$

Al reemplazar v^2_{rcm} en la ecuación 22-20 y al dividir entre N —número total de moléculas—, se obtiene

$$K_{trans} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad (22\text{-}21)$$

En el Capítulo 23 volveremos a ocuparnos de esta relación tan importante.

5. *La ley del gas ideal.* Hemos obtenido dos ecuaciones para v_{rcm}, velocidad raíz cuadrada media de las moléculas, ecuaciones 22-9 y 22-20. Al hacerlas igual nos queda

$$v_{rcm}^2 = \frac{3p}{\rho} = \frac{3RT}{M}.$$

La densidad ρ puede escribirse como nM/V. Con esta sustitución la igualdad anterior se reduce a $pV = nRT$. Hemos, pues, recobrado la ley del gas ideal con la investigación de las velocidades moleculares.

Verificación experimental de la distribución de velocidades de Maxwell

Maxwell obtuvo su ley de distribución de velocidad en 1860, y fue apenas en 1920 cuando se llevaron a cabo los primeros intentos para comprobarla con la medición directa. Pese a ello, los métodos mejoraron rápidamente y, en 1955, R. C. Miller y P. Kusch de Columbia University ofrecieron una verificación experimental muy precisa de la predicción de Maxwell.

Su aparato se ilustra en la figura 22-8. En una serie de experimentos, las paredes del horno O, que contiene metal de talio, se calentaban, en una serie de experimentos, hasta alcanzar una temperatura uniforme de 870 ± 4 K. A esta temperatura el vapor de talio llena el horno a una presión de 3.2×10^{-3}. Algunas de sus moléculas escapan de la ranura S hacia el espacio muy evacuado del exterior, cayendo en el cilindro en rotación R.

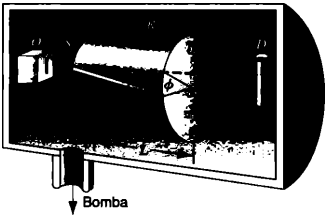


FIGURA 22-8. Aparato con que Miller y Kusch verificaron la distribución de rapideces de Maxwell. Un haz de moléculas de talio sale del horno O por la ranura S, recorre el surco helicoidal en el cilindro en rotación R y choca contra el detector D. La velocidad angular ω del cilindro puede modificarse para que las moléculas de diversa velocidad pasen por él.

Este cilindro de longitud L tiene unos 700 surcos helicoidales cortados en él; sólo uno de ellos aparece en la figura 22-8. Para una rapidez angular determinada ω del cilindro, únicamente las moléculas de una rapidez bien definida v pueden atravesar los surcos sin golpear las paredes. La rapidez v se obtiene con

$$\text{tiempo de recorrido por el surco} = \frac{L}{v} = \frac{\phi}{\omega}$$

o bien

$$v = \frac{L\omega}{\phi},$$

donde ϕ (Fig. 22-8) es el desplazamiento angular entre la entrada y la salida de un surco helicoidal. Así, el cilindro en rotación es un *selector de velocidades* en que la velocidad se escoge mediante la rapidez angular (controlable) ω. La intensidad del haz se registra mediante el detector D en función de la rapidez seleccionada v. La figura 22-9 muestra la notable coincidencia entre la teoría (línea gruesa) y el experimento (círculos abiertos y llenos) para el vapor de talio.

La distribución de rapideces en el *haz* (distinta de la distribución en el *horno*) no es proporcional a $v^2e^{-mv^2/2kT}$ como en la ecuación 22-14, sino a $v^3e^{-mv^2/2kT}$. Considere un grupo de moléculas dentro del horno, cuya velocidad se encuentra dentro de un intervalo pequeño v_1 a $v_1 + \delta v$, donde v_1 es menor que la rapidez más probable v_p. Siempre podemos encontrar otro intervalo igual de rapideces δv, que abarque de v_2 a $v_2 + \delta v$, donde v_2 que será mayor que v_p, se escoge de modo que los dos intervalos contengan la misma cantidad de moléculas. No obstante, de la ranura S escaparán más moléculas en el intervalo más alto que en el más bajo para formar el haz, porque las moléculas "bombardean" la ranura con mayor frecuencia, exactamente con el factor v_2/v_1. Así pues, en igualdad de condiciones las moléculas rápidas se ven favorecidas al escapar del horno, en proporción exacta con su rapidez; las moléculas en el haz tienen una distribución v^3 en vez de una v^2. Este efecto está incluido en la curva teórica de la figura 22-9.

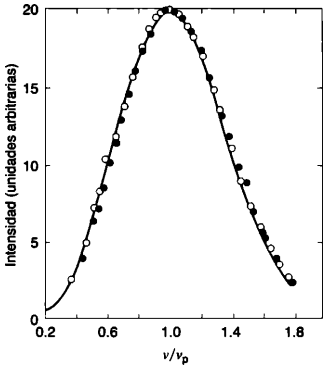


FIGURA 22-9. Resultados del experimento para verificar la distribución de rapideces de Maxwell. Los círculos abiertos muestran los datos tomados con la temperatura del horno a $T = 870$ K y los círculos cerrados indican los datos con $T = 944$ K. Cuando se grafican las distribuciones en función de v/v_p, ambas deberán ser idénticas. La curva sólida es la distribución de Maxwell. Los datos concuerdan mucho con la curva.

PROBLEMA RESUELTO 22-5. Diez partículas tienen las siguientes velocidades en m/s: 0, 1.0, 2.0, 3.0, 3.0, 3.0, 4.0, 4.0, 5.0 y 6.0. Calcule *a*) su rapidez promedio, *b*) su rapidez raíz cuadrada media y *c*) su rapidez más probable.

Solución *a*) La rapidez promedio se obtiene de

$$v_{pro} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n = \frac{1}{10}[0 + 1.0 + 2.0 + 3.0 + 3.0 + 3.0 + 4.0 + 4.0 + 5.0 + 6.0] = 3.1 \text{ m/s}.$$

b) La rapidez cuadrada media es el valor promedio de v^2:

$$(v^2)_{pro} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n^2 = \frac{1}{10}[0 + (1.0)^2 + (2.0)^2 + (3.0)^2 + (3.0)^2 + (3.0)^2 + (4.0)^2 + (4.0)^2 + (5.0)^2 + (6.0)^2] = 12.5 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

y la rapidez raíz cuadrada media es

$$v_{rcm} = \sqrt{(v^2)_{pro}} = \sqrt{12.5 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 3.5 \text{ m/s}.$$

c) De las diez partículas, tres tienen una velocidad de 3.0 m/s, dos una velocidad de 4.0 m/s, y las cinco restantes tienen una velocidad diferente. Por tanto, la rapidez más probable v_p de una partícula es

$$v_p = 3.0 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA RESUELTO 22-6. Se mantiene a 300 K un contenedor lleno con N moléculas de gas de oxígeno. ¿Qué cantidad de moléculas tiene una velocidad en el intervalo 599-601 m/s? La masa molar M del oxígeno es 0.032 kg/mol.

Solución Este intervalo de rapideces δv (= 2 m/s) es tan pequeño que podemos tratarlo como un diferencial dv. El número de moléculas en este intervalo es $N(v)dv$ y la fracción en él es $f = N(v)dv/N$, donde $N(v)$ se evalúa en $v = 600$ m/s, el punto medio del intervalo; véase la franja estrecha y sombreada de la figura 22-6. Usando la ecuación 22-14 con la sustitución $m/k = M/R$, calculamos la fracción

$$f = \frac{N(v)\,dv}{N} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}\,dv.$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$f = 2.6 \times 10^{-3} \text{ o } 0.26\%.$$

A temperatura ambiente, 0.26% de las moléculas de oxígeno tienen velocidades que se hallan dentro del pequeño intervalo entre 599 y 601 m/s. Si la tira sombreada de la figura 22-6 se dibujara a la escala de este problema, sería efectivamente muy delgada.

PROBLEMA RESUELTO 22-7. Calcule *a*) la rapidez más probable, *b*) la rapidez promedio y *c*) la rapidez rcm de las moléculas de oxígeno cuando $T = 300$ K.

Solución *a*) Con base en la ecuación 22-16 tenemos

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{(2)(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0.032\ \text{kg/mol}}} = 395\ \text{m/s}.$$

b) A partir de la ecuación 22-18 tenemos

$$v_{pro} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{(8)(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{(\pi)(0.032\ \text{kg/mol})}} = 445\ \text{m/s}.$$

c) Según la ecuación 22-20 tenemos

$$v_{rcm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{(3)(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0.032\ \text{kg/mol}}} = 483\ \text{m/s}.$$

En las ecuaciones que hemos utilizado nótese que, con un gas cualquiera a cierta temperatura,

$$v_p : v_{pro} : v_{rcm} = 1 : 1.128 : 1.225.$$

22-5 DISTRIBUCIÓN DE LAS ENERGÍAS MOLECULARES

Una descripción alterna del movimiento de las moléculas se consigue al examinar la distribución de la *energía* y no de la rapidez. En otras palabras, buscamos la distribución $N(E)$ tal que $N(E)dE$ dé el número de moléculas con energías entre E y $E + dE$.

Maxwell fue el primero en resolver el problema anterior. Obtendremos el resultado, llamado *distribución de energía de Maxwell-Boltzmann*, en el caso especial en que la energía cinética traslacional es la única forma de energía que tiene una molécula.

Consideramos otra vez la situación del problema resuelto 22-6, donde obtuvimos la fracción de las moléculas de oxígeno cuya velocidad fluctúa entre 599 y 601 m/s. Descubrimos que 0.26% de las moléculas que se encuentran en un contenedor a una temperatura de 300 K tienen rapideces dentro de ese intervalo. Una molécula con una rapidez de 599 m/s tiene una energía cinética de 9.54×10^{-21} J, y otra con una rapidez de 601 m/s tiene una energía cinética de 9.60×10^{-21} J. ¿Qué fracción de las moléculas de oxígeno tiene energías cinéticas dentro del intervalo 9.54×10^{-2} a 9.60×10^{-21} J?

Un poco de reflexión bastará para convencer al lector de que esta fracción también ha de ser 0.26%. No importa si contamos las moléculas atendiendo a su rapidez o a su energía cinética; mientras fijemos los límites superior e inferior del intervalo para tener las rapideces y las energías cinéticas correspondientes, contamos la misma cantidad de moléculas entre los límites. Es decir, el número con las energías cinéticas entre E y $E + dE$ es el mismo que el de las rapideces entre v y $v + dv$. En términos matemáticos, la conclusión anterior se expresa así:

$$N(E)\,dE = N(v)\,dv, \tag{22-22}$$

o bien

$$N(E) = N(v)\frac{dv}{dE}. \tag{22-23}$$

Dado que la energía es sólo cinética, debemos tener $E = \frac{1}{2}mv^2$ o $v = \sqrt{2E/m}$, y por tanto,

$$\frac{dv}{dE} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left(\tfrac{1}{2}E^{-1/2}\right). \tag{22-24}$$

Al sustituir las ecuaciones 22-14 y 22-24 en la ecuación 22-23, obtenemos

$$N(E) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(kT)^{3/2}}E^{1/2}e^{-E/kT}. \tag{22-25}$$

La ecuación 22-25 es la *distribución de energía de Maxwell-Boltzmann*. Para obtener el resultado anterior hemos supuesto que las moléculas del gas poseen sólo energía cinética traslacional, de ahí que la distribución se aplique exclusivamente a un gas monoatómico. En el caso de los que tienen moléculas más complejas, intervienen otros factores (entre ellos la energía cinética rotacional) en la ecuación 22-25. No obstante, el factor $e^{-E/kT}$, es una característica general de la distribución de Maxwell-Boltzman que se encuentra siempre sin que importe la forma de la energía E. Este factor, llamado generalmente *factor de Boltzmann*, a menudo se toma como una estimación aproximada de la probabilidad relativa de que una partícula posea una energía E en un grupo de partículas caracterizadas por la temperatura T.

Por medio de la ecuación 22-25 podemos calcular la fracción de las moléculas de gas cuyas energías fluctúan entre E y $E + dE$, que está dada por $N(E)dE/N$. Igual que antes, N es el número total de moléculas obtenido de

$$N = \int_0^\infty N(E)\,dE. \tag{22-26}$$

Una característica interesante de la distribución de energía de Maxwell-Boltzmann es la siguiente: es exactamente la misma para cualquier gas a una temperatura determinada, sin importar la masa de las moléculas (en contraste con la distribución de rapideces de Maxwell, ecuación 22-14, en la cual la masa aparece de modo explícito). Inclusive un "gas" de

electrones, en la medida en que pueden tratarse como partículas clásicas, tiene la misma distribución de energía que un gas de átomos pesados. Al aumentar la masa por algún factor, se reduce v^2 por el mismo factor, de manera que no cambia el producto mv^2, y por lo mismo tampoco la energía cinética.

En una aplicación simple el factor de Boltzmann, se toma un largo contenedor vertical lleno de gas, con su fondo descansando sobre la superficie de la Tierra. Supondremos que el gas se halla en equilibrio térmico a una temperatura uniforme T. Una molécula a una altura y arriba del fondo tiene una energía $E_0 + mgy$, donde E_0 es la energía de una molécula similar en el fondo del contenedor. Usando el factor de Boltzmann $e^{-E/kT}$, podemos deducir que, en comparación con el número en $y = 0$, el número de moléculas en la altura y es

$$\frac{N(y)}{N(0)} = \frac{e^{-(E_0 + mgy)/kT}}{e^{-E_0/kT}} \tag{22-27}$$

o bien

$$N(y) = N_0 e^{-mgy/kT} \tag{22-28}$$

donde $N_0 = N(0)$. Con $kT = pV/N$ según la ley del gas ideal, el factor m/kT en el exponente puede escribirse como $mN/pV = \rho/p$, donde ρ es la densidad del gas. Como hemos supuesto que el gas tiene temperatura uniforme, debemos tener $\rho/p = \rho_0/p_0$, donde ρ_0 y p_0 son los valores de la densidad y de la presión en la superficie terrestre. Más aún, en cualquier altura el número de moléculas en un elemento de volumen pequeño es proporcional a la densidad de esa altura, la cual a su vez lo es a la presión; por tanto, podemos escribir la ecuación 22-28 así:

$$p(y) = p_0 e^{-mgy/kT} = p_0 e^{-gy\rho_0/p_0}. \tag{22-29}$$

La ecuación 22-29 es idéntica a la ecuación 15-12 para la presión atmosférica en función de la altura por encima de la superficie terrestre. También obtuvimos la ecuación 15-12 suponiendo una temperatura uniforme de la atmósfera; resulta alentador el hecho de que el método dinámico aplicado en el Capítulo 15 y este método estadístico arrojen el mismo resultado.

PROBLEMA RESUELTO 22-8. Encuentre *a*) la energía promedio, y *b*) la energía más probable de un gas en equilibrio térmico a la temperatura T.

a) En analogía con la ecuación 22-17, la energía promedio E_{pro} puede escribirse así:

$$E_{pro} = \frac{1}{N}\int_0^\infty E\,N(E)\,dE.$$

Al sustituir la ecuación 22-25 obtenemos

$$E_{pro} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\int_0^\infty E^{3/2} e^{-E/kT}\,dE. \tag{22-30}$$

Para evaluar esta integral realice la sustitución $x^2 = E/kT$ y conviértala en la forma estándar para la integral definida del apéndice I. El resultado, que le recomendamos verificar, es

$$E_{pro} = \tfrac{3}{2}kT \tag{22-31}$$

resultado que concuerda exactamente con la ecuación 22-21 en este caso, en el cual hemos supuesto que la energía cinética es el único tipo de energía que pueden tener las moléculas de gas.

b) Para determinar la energía más probable tomamos la derivada de la ecuación 22-25, hacemos el resultado igual a cero y resolvemos para la energía. El resultado, que debería verificar el lector, es

$$E_p = \tfrac{1}{2}kT.$$

Nótese que *no* es igual a $\frac{1}{2}mv_p^2$, expresión que da una energía de kT. ¿Puede explicar por qué la energía correspondiente a la rapidez más probable no es la más probable?

22-6 ECUACIONES DE ESTADO DE LOS GASES REALES

La ecuación de estado de un gas ideal se aplica bastante bien a los gases reales en densidades suficientemente bajas. Pero no se les aplica *exactamente* en *cualquier* densidad y su desviación es cada vez mayor al aumentar la densidad. Es grande el interés por encontrar una ecuación de estado que describa los gases reales en una amplia gama de densidades. A continuación se explican dos de los métodos para ello.

La expansión virial

El primer método con que se obtiene una ecuación de estado para un gas real consiste en escribir

$$pV = nRT\left[1 + B_1\frac{n}{V} + B_2\left(\frac{n}{V}\right)^2 + \cdots\right], \tag{22-32}$$

donde $B_1, B_2, \ldots$, denominados *coeficientes viriales*, son funciones de la temperatura y se vuelven cada vez más pequeños al avanzar la serie. Claro que, en densidades molares pequeñas ($n/V \to 0$), la ecuación anterior se reduce a la ley del gas ideal. Así debe ser con todas las ecuaciones de estado de los gases porque la ley del gas ideal se aplica en el límite de densidades bajas. Los coeficientes viriales han de obtenerse en forma empírica, ajustando la ecuación 22-32 a los datos experimentales.

La ecuación de estado de Van der Waals

Esta ecuación, propuesta en 1873 por el físico escocés Johannes Diderik van der Waals (1837-1923), es

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \tag{22-33}$$

donde a y b son constantes cuyos valores han de conseguirse en experimentos. Una comparación de la ecuación 22-33 con la ley del gas ideal ($pV = nRT$) indica que Van der Waals (galardonado en 1910 con el Premio Nobel por su trabajo) descubrió esta ecuación corrigiendo los puntos percibidos de violación de la ley del gas ideal. Y así sucedió en realidad. Adviértase que, si hacemos las constantes a y b iguales a cero (o si permitimos que la densidad molecular n/V se vuelva muy pequeña), la ecuación 22-33 se reduce a la ley del gas ideal. A continuación investigaremos la línea de razonamiento que condujo a los términos que las contienen.

La corrección del volumen. En la sección 22-1 supusimos (propiedad 3) que el volumen ocupado por las moléculas de un gas ideal es insignificante. No ocurre lo mismo con los gases reales. Consideremos cada molécula de un gas real como una esfera dura de diámetro d. Dos de ellas no pueden aproximarse entre sí tanto que la distancia entre sus centros sea menor que d (Fig. 22-10). Por ello, el "volumen libre" por mol disponible para cada una disminuye el volumen de un hemisferio de *radio d* centrado en la otra molécula. Si estimamos d como 2.5×10^{-10} m (diámetro molecular típico), podremos determinar un valor aproximado de b de

$$b = \tfrac{1}{2}N_A(\tfrac{4}{3}\pi d^3) = 2 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/mol}.$$

Se obtiene el valor de $\frac{1}{2}$ porque, al aproximarse dos moléculas entre sí, el volumen donde interactúan no es una esfera completa sino el hemisferio que da a la dirección del acercamiento. En condiciones estándar de temperatura y presión, la densidad molar n/V de un gas ideal es 45 mol/m^3. Por tanto, $bn/V \approx 0.0009$, es decir 0.1%, aproximadamente. En tales condiciones, la corrección de volumen b es relativamente pequeña.

La corrección de la presión. En la sección 22-1 (propiedad 4) supusimos que sólo durante las colisiones las moléculas de un gas ideal ejercen fuerza una sobre otra. Esto no ocurre totalmente con los gases reales. Una molécula en el cuerpo del gas no experimentará fuerza neta alguna proveniente de las fuerzas que ejercen sobre ella las moléculas circundantes, es decir, estas fuerzas se balancearán y darán cero. Pero no sucede lo mismo con una molécula situada cerca de la pared del contenedor, como se aprecia en la figura 22-11. Experimentará una fuerza neta de atracción que la aleja de la pared debido a su interacción con las moléculas contiguas que se hallan dentro del alcance de la fuerza de atracción que ejerce. Así, la presión medida en la pared es un poco menor que la que podríamos llamar presión verdadera que existe en el cuerpo del gas.

La reducción de la presión a causa de las colisiones de la molécula C contra la pared es proporcional al número de moléculas en el hemisferio dentro del intervalo R de su fuerza de atracción y, por tanto, al número de moléculas por unidad de volumen o, alternativamente, a n/V. La fuerza neta debida a *todas* las moléculas que chocan contra la pared (C es un miembro típico de este grupo) también es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen, es decir a n/V. La disminución total de la presión es proporcional al producto de estas dos cantidades, es decir, $(n/V)^2$.

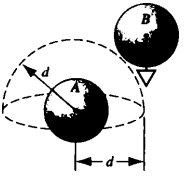


FIGURA 22-10. Si supusiéramos que las moléculas de un gas se comportan como esferas duras, al centro de la molécula B no se le permitiría moverse dentro del hemisferio de radio d centrado en la molécula A. Aquí d es el diámetro de una molécula. El volumen libre disponible para la molécula B es reducido por el del hemisferio centrado en cada molécula del gas.

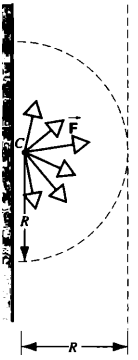


FIGURA 22-11. Una molécula de gas C (que aquí se toma por un punto) cerca de la pared del contenedor experimenta una fuerza neta que la aleja de la pared por la atracción de las moléculas vecinas, dentro del alcance R de la fuerza entre moléculas. La presión neta sobre las paredes del contenedor disminuye por acción de todas ellas a una distancia R de las paredes.

En otras palabras, si triplicamos el número de moléculas en un contenedor, la molécula C experimentará tres veces la fuerza no balanceada. En el gas entero habrá el triple de moléculas como C. Así, la reducción global de la presión se incrementa nueve veces. Para que p sea en la ecuación 22-33 la presión medida, es preciso incrementarla por un término proporcional a $(n/V)^2$ —es decir, en an^2/V^2 para obtener la presión "verdadera".

En la figura 22-12 se compara con una gráfica de la ecuación 22-33 una gráfica pV de un gas ideal a temperaturas variables en el gas de dióxido de carbón. Nótese que la desviación respecto al comportamiento ideal se da fundamentalmente con altas presiones y temperaturas bajas. Para CO_2 a 264 K, la gráfica contiene una región de pendiente positiva, lo cual indica que también la presión disminuye conforme reducimos el volumen en ella. Como semejante comportamiento es contrario a las expectativas de un gas, ello significa que parte del CO_2 se condensa en líquido, dejando menos de él en el estado gaseoso. Así pues, la ecuación de Van der Walls señala la existencia de mezclas de diversas fases, lo cual no puede hacer el gas ideal. Si quisiéramos comprimir una muestra de CO_2, descubriríamos que la gráfica $T = 264$ K no sigue la curva de la figura 22-12*b*, sino el segmento horizontal punteado AB.

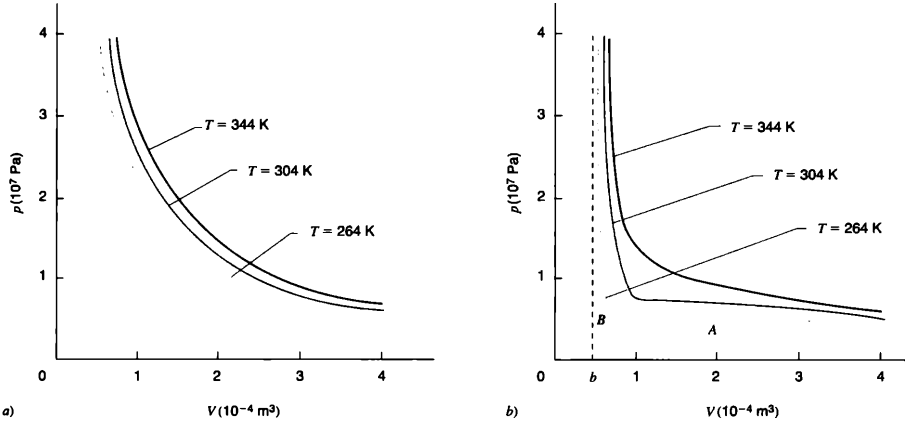


FIGURA 22-12. Gráficas pV de un mol de *a*) un gas ideal, y *b*) de CO_2, determinada mediante la ecuación de Van der Waals. Adviértase que las gráficas ideal y la de Van der Waals se comportan de modo similar con un volumen grande. Conforme se eleva la temperatura, el comportamiento de las gráficas se asemeja más al del gas ideal. Adviértase asimismo que, a medida que la presión va creciendo, el volumen se acerca al valor de b, como lo exige la ecuación 22-33, y no al valor de cero, como lo predice la ecuación de estado del gas ideal. La línea punteada AB ofrece una representación más realista del comportamiento con $T = 264$ K. Al comprimirse el gas a partir de A, parte de él se transforma en líquido por condensación y la presión permanece constante.

PROBLEMA RESUELTO 22-9. En el oxígeno, la medición de los coeficientes de Van der Waals nos da $a = 0.138\ \mathrm{J \cdot m^3/mol^2}$ y $b = 3.18 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/mol}$. Supóngase que 1.00 mol de oxígeno a $T = 50$ K están dentro de una caja cuyo volumen es $0.0224\ \mathrm{m^3}$. ¿Qué presión ejerce el gas conforme a *a*) la ley del gas ideal, y *b*) la ecuación de Van der Waals?

Solución *a*) La ley del gas ideal produce

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{(1.00\ \mathrm{mol})(8.31\ \mathrm{J/mol \cdot K})(50\ \mathrm{K})}{0.0224\ \mathrm{m^3}}$$

$$= 1.85 \times 10^4\ \mathrm{Pa} = 0.184\ \mathrm{atm}.$$

b) Los términos de la corrección de presión y de volumen en la ecuación de Van der Waals (22-33) son

$$\frac{an^2}{V^2} = \frac{(0.138\ \mathrm{J \cdot m^3/mol^2})(1.00\ \mathrm{mol})^2}{(0.0224\ \mathrm{m^3})^2} = 275\ \mathrm{Pa}$$

y

$$b = 3.18 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/mol}.$$

Al sustituir las cantidades anteriores en la ecuación de Van der Waals y al resolver la ecuación para p, se obtiene

$$p = 1.83 \times 10^4\ \mathrm{Pa} = 0.181\ \mathrm{atm}.$$

Con el oxígeno en tales condiciones, la ley del gas ideal y la ecuación de Van der Waals dan resultados que se hallan dentro de 2% uno de otro. Nótese que el término de corrección de la presión es apenas $(275\ \mathrm{Pa})/(1.83 \times 10^4\ \mathrm{Pa})$, esto es, 1.5%, aproximadamente. La corrección de volumen bn/V es sólo $(3.18 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/mol})(1.00\ \mathrm{mol})/(0.0224\ \mathrm{m^3})$, es decir cerca de 0.14%. Con temperaturas más bajas, al seguir el gas la dirección de la licuefacción, la ecuación de Van der Waals concordará mejor con el experimento que con la ley del gas ideal.

22-7 FUERZAS INTERMOLECULARES (Opcional)

Las fuerzas entre moléculas tienen origen electromagnético. Todas las moléculas son eléctricamente neutrales en el sentido de que la carga negativa de los electrones es igual y opuesta a la de los núcleos. Sin embargo, ello no significa que no interactúen en forma eléctrica. Por ejemplo, cuando dos moléculas se acercan entre sí, sus cargas sufren perturbación y se alejan un poco de su posición habitual en forma tal que la distancia promedio entre las cargas opuestas en las dos moléculas es un poco menor que entre cargas semejantes. Y así se origina una fuerza intermolecular de atracción. Esta reorganización interna tiene lugar sólo cuando las moléculas están lo bastante cerca, de modo que las fuerzas actúen sólo en una distancia corta; son fuerzas de corto alcance. La fuerza intermolecular adquiere carácter repulsivo si se acercan demasiado, de modo que las cargas externas comiencen a superponerse. Se repelen porque una molécula no puede reorganizarse internamente para evitar la repulsión de los electrones externos contiguos. Es esta repulsión al contacto lo que explica el comportamiento de bola de billar en las colisiones moleculares de los gases. Si no fuera así esta repulsión las moléculas pasarían una a través de la otra en vez de rebotar en la colisión.

Supongamos que las moléculas presentan una simetría aproximadamente esférica. Entonces podemos describir con diagramas las fuerzas intermoleculares graficando la energía potencial mutua de dos moléculas, U, en función de la distancia r entre sus centros. La fuerza F que opera sobre ambas se relaciona con la energía potencial U por medio de $F = -dU/dr$. En

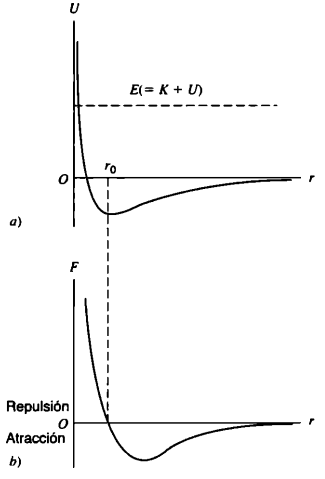


FIGURA 22-13. *a*) Energía potencial mutua U de dos moléculas en función de su distancia de separación r. La línea horizontal indica la energía mecánica E. *b*) La fuerza radial entre moléculas, dada por $-dU/dr$, corresponde a esta energía potencial. Esta última es mínima en la separación de equilibrio r_0, punto donde la fuerza es cero.

la figura 22-13*a* graficamos una $U(r)$ típica. Podemos imaginar que una molécula se encuentra fija en O. Entonces la otra es repelida de O cuando la pendiente de U sea negativa y será atraída hacia O si la pendiente es positiva. En r_0 no actúa fuerza alguna entre las moléculas; aquí la pendiente es cero. En la figura 22-13*b* graficamos la fuerza mutua $F(r)$ correspondiente a esta función de la energía potencial. La línea E en la figura 22-13*a* representa la energía mecánica de las moléculas en colisión. La intersección $U(r)$ con esta línea es un "punto de retorno" del movimiento (sección 12-5). La separación de los centros de las dos moléculas allí es la distancia del acercamiento más próximo. La distancia de separación en que la energía potencial mutua es cero puede considerarse la distancia aproximada del acercamiento mínimo en una colisión de baja energía y, por consiguiente, como el diámetro de la molécula. En las moléculas simples el diámetro mide cerca de 2.5×10^{-10} m. La distancia r_0 a la cual el potencial es mínimo (punto de equilibrio) es de unos 3.5×10^{-10} m en las moléculas simples; la fuerza y la energía potencial se aproximan a cero conforme r crece a unos 10^{-9}, es decir cerca de 4 diámetros. Así pues, la fuerza molecular tiene un alcance sumamente corto. Desde luego, las moléculas tienen diferente tamaño y organización interna de cargas, por lo cual las fuerzas intermoleculares varían de una a otra. No obstante, siempre muestra el comportamiento cualitativo indicado en la figura 22-13.

En un sólido, las moléculas vibran alrededor de la posición de equilibrio r_0. Su energía total E es negativa, esto es, se halla debajo del eje horizontal en la figura 22-13*a*. Las moléculas no tienen suficiente energía para escapar del pozo de potencial (de la fuerza atractiva de enlace). Los centros de vibración O están más o menos fijos en un sólido. En un líquido las moléculas presentan mayor energía vibracional alrededor de los centros que pueden moverse libremente, pero que permanecen más o menos a la misma distancia entre sí. En un gas la distancia promedio entre las moléculas es mucho mayor que el intervalo efectivo de las fuerzas intermoleculares, y las moléculas se desplazan en línea recta entre colisiones. Maxwell explica la relación entre el modelo de la teoría cinética de un gas y las fuerzas intermoleculares en los siguientes términos: "En vez de decir que las partículas son duras, esféricas y elásticas, podríamos decir que son centros de fuerzas cuya acción es imperceptible, salvo en alguna distancia pequeña, cuando de repente aparece como una fuerza repelente de grandísima intensidad. Es evidente que cualquiera de las dos suposiciones arrojará los mismos resultados".

Es interesante comparar las fuerzas intermoleculares medidas y la fuerza gravitacional de atracción entre las moléculas. Si por ejemplo escogemos una distancia de separación de 4×10^{-10} m, la fuerza entre dos átomos de helio es de casi 6×10^{-13} N. La fuerza gravitacional de tal separación es aproximadamente 7×10^{-42} N, cantidad menor que la fuerza intermolecular en un factor de 10^{29}. El anterior es un resultado común y revela que la gravitación es despreciable en las fuerzas intermoleculares.

Aunque éstas parecen ser pequeñas al ser examinadas con criterios ordinarios, recordemos que la masa de una molécula es tan pequeña (alrededor 10^{-26} kg) que estas fuerzas le pueden impartir aceleración instantánea del orden de 10^{15} m/s (10^{14} *g*). La aceleración puede durar muy poco, porque a veces una molécula sale con gran rapidez de la región de influencia de la otra. ■

OPCIÓN MÚLTIPLE

22-1 La naturaleza atómica de la materia

1. ¿Cuáles *dos* de los siguientes casos *no* corresponden al comportamiento de un gas ideal?
   A) Una molécula pierde energía cinética cuando choca elásticamente con otra.
   B) Hay energía potencial en la interacción de las moléculas.
   C) Las colisiones pueden modificar la energía interna de las moléculas.
   D) La rapidez de una molécula no cambia después de una colisión con las paredes del contenedor.

2. El gas en un contenedor cerrado es una mezcla de helio y de kriptón. La mezcla puede tratarse como un gas ideal si se supone que los átomos de ambas sustancias tienen
   A) la misma masa promedio. B) la misma rapidez promedio.
   C) el mismo momento promedio. D) la misma energía cinética.

22-2 Perspectiva molecular de la presión

3. ¿De dónde proviene el factor "3" en la ecuación 22-9?
   A) Es una aproximación de π.
   B) Se obtiene al comparar las unidades de presión y de densidad.
   C) Se relaciona con el número de dimensiones espaciales.
   D) Se obtiene al integrar v^2 para calcular el promedio.

22-3 La trayectoria libre media

4. *a*) ¿Aproximadamente en qué densidad, en moléculas/m^3, es la trayectoria libre media de las moléculas de nitrógeno igual al tamaño de un cuarto ($\approx$ 3 m)?
   A) 10^{23} moléculas/m^3 B) 10^{20} moléculas/m^3
   C) 10^{18} moléculas/m^3 D) 10^9 moléculas/m^3
   b) Suponiendo que la temperatura sea 300 K, ¿cuál es la presión aproximada?
   A) 10^{-1} atm B) 10^{-2} atm
   C) 10^{-5} atm D) 10^{-7} atm
5. Se mantiene constante la densidad del gas en una campana de choques y se cambia la temperatura. Si se duplica ésta, la trayectoria libre media
   A) se duplicará. B) no cambiará.
   C) disminuirá a la mitad.
6. En una cantidad fija de gas, ¿cómo se vería afectada la trayectoria libre media si
   a) se duplicara la densidad del gas?
   b) se duplicara la rapidez molecular media?
   c) se duplicaran tanto la densidad como la rapidez molecular media?
   A) También se duplicará la trayectoria libre media.
   B) No cambiará la trayectoria libre media.
   C) Disminuirá a la mitad la trayectoria libre media.
   D) La trayectoria libre media disminuirá a una cuarta parte de su valor original.

22-4 La distribución de las rapideces moleculares

7. Clasifique las rapideces v_p, v_{pro} y v_{rcm} de la más alta a la más baja con T = 350 K para moléculas de hidrógeno.
   A) $v_{rcm} > v_p > v_{pro}$ B) $v_{rcm} > v_{pro} > v_p$
   C) $v_{pro} > v_{rcm} > v_p$ D) $v_p > v_{pro} > v_{rcm}$
8. La rapidez raíz cuadrada media de las moléculas en aire tranquilo y a temperatura ambiente se aproxima más a
   A) rapidez de la marcha (2 m/s).
   B) la velocidad de un automóvil rápido (30 m/s).
   C) la velocidad de un avión supersónico (500 m/s).
   D) la velocidad de escape de la tierra (1.1×10^4 m/s).
   E) la velocidad de la luz (3×10^8 m/s).
9. ¿Cuál de las siguientes velocidades divide las moléculas en un gas en equilibrio térmico de manera que una mitad tiene velocidades mayores y otra velocidades menores?
   A) v_p B) v_{pro} C) v_{rcm}
   D) Ninguno de los anteriores.
10. ¿Cuál de las siguientes velocidades corresponde a una molécula con la energía cinética promedio?
   A) v_p B) v_{pro} C) v_{rcm}
   D) Ninguno de los anteriores.
11. Considerando la distribución de velocidades que se muestra en la figura 22-14, ¿cuál es el ordenamiento correcto de las velocidades?
   A) $v_{rcm} < v_{pro} < v_p$ B) $v_{rcm} < v_p < v_{pro}$
   C) $v_{pro} < v_{rcm} < v_p$ D) $v_{pro} < v_p < v_{rcm}$
   E) $v_p < v_{pro} < v_{rcm}$

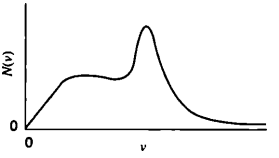


FIGURA 22-14. Pregunta de opción múltiple 11.

22-5 Distribución de las energías moleculares

22-6 Ecuaciones de estado de los gases reales

12. Cierto gas se encuentra que obedece la ecuación de Van der Waals. El volumen del gas cambia de V_i = 1,000nb a V_f = 2,000nb. Asuma que a es pequeña comparada con pV^2/n^2 pero no despreciable. Si el cambio en el volumen ocurrió a una presión constante entonces
   A) T_f es poco más que $2T_i$.
   B) T_f es poco menos que $2T_i$.
   C) T_f es exactamente igual a $2T_i$.
   D) La respuesta depende del valor de an^2/pV^2.
13. Un plasma es un gas formado por partículas cargadas. Si todas tienen la misma carga las fuerzas entre ellas serán repulsivas a cualquier distancia. Cuál será el signo de a en la ecuación de Van der Waals para este tipo de gas?
   A) Positivo B) Negativo
   C) El signo depende del signo de las cargas en el plasma.
   D) No hay signo, dado que la ecuación de Van der Waals sólo se aplica a fuerzas atractivas.

22-7 Fuerzas intermoleculares

PREGUNTAS

1. En la teoría cinética suponemos que el número de moléculas en un gas es grande. Los gases reales se comportan como un gas ideal en densidades bajas. ¿Son contradictorias ambas afirmaciones? Si no lo son, ¿qué conclusión extrae de ellas?
2. Hemos supuesto que las paredes del contenedor son elásticas para las colisiones moleculares. En realidad, las paredes pueden ser inelásticas. ¿Por qué esto no influye mientras la paredes tengan la misma temperatura que el gas?
3. Hemos supuesto que la fuerza que las moléculas ejercen sobre la pared de un contenedor estacionaria en el tiempo. ¿Cómo se justifica eso?
4. Sabemos que una piedra caerá al suelo si la soltamos. No les imponemos restricción alguna a las moléculas en el aire, y pese a ello no caen al suelo. ¿Por qué?
5. ¿Cómo se relaciona la rapidez del sonido con las variables del gas en el modelo de la teoría cinética?

6. ¿Por qué la atmósfera de la Tierra no se extingue por filtración? En la parte superior de ella los átomos a veces se desplazan con una velocidad mayor que la de escape. ¿No es sólo cuestión de tiempo?
7. Titán, una de las muchas lunas de Saturno, tiene atmósfera, pero nuestra Luna no. ¿A qué se debe?
8. ¿Cómo cree que cambie la composición del aire con la altitud?
9. ¿Obedecerá la ley del gas ideal un gas cuyas moléculas sean verdaderos puntos geométricos?
10. ¿Por qué las moléculas no siguen líneas perfectamente rectas entre las colisiones y qué efecto, fácilmente observable en el laboratorio, ocurre por ello?
11. Suponga que queremos obtener ^{238}U en vez de ^{235}U como producto final de un proceso de difusión. ¿Utilizaremos el mismo proceso? De no ser así, explique cómo habría que modificar el proceso de separación.
12. Considerando la difusión de gases entre sí, ¿puede hacer una analogía entre una muchedumbre que da empujones y numerosas "colisiones" en un gran plano inclinado con una pendiente de pocos grados?
13. ¿Esperaría usted que las moléculas reales presenten simetría esférica? De no ser así, ¿cómo cambiaría la función de energía potencial en la figura 22-13?
14. Aunque es posible licuar los gases reales, no puede hacerse lo mismo con un gas ideal. Explique la razón.
15. Demuestre que, al aumentar el volumen por mol, la ecuación de Van der Waals tiende a la ecuación de estado de un gas ideal.
16. Considere el caso en que la trayectoria libre media es mayor que la línea recta más larga de un contenedor. ¿Es un vacío perfecto para la molécula en el contenedor?
17. Mencione técnicas eficaces para incrementar las colisiones moleculares por unidad de tiempo en un gas.
18. Ofrezca una explicación cualitativa sobre la conexión entre la trayectoria libre media en el aire y el tiempo que tardamos en oler el amoniaco cuando se abre una botella en el otro lado de una habitación.
19. Si las moléculas no fueran esféricas, ¿qué significado daríamos a d en la ecuación 22-13 para la trayectoria libre media? ¿En cuáles gases las moléculas actuarían más como esferas rígidas?
20. ¿En qué sentido es la trayectoria libre media una propiedad macroscópica de un gas y no una propiedad microscópica?
21. Como la fuerza real entre dos moléculas depende de la distancia entre ellas, las fuerzas pueden causar deflexiones aun cuando las moléculas estén lejos de "contacto". Más aún, la deflexión debería depender del tiempo que operen y, por tanto, de su velocidad relativa. *a*) ¿Esperaría usted que la trayectoria libre media medida dependa de la temperatura, pese a que la densidad no cambia? *b*) De ser así, ¿esperaría que λ aumente o disminuya con la temperatura? *c*) ¿Cómo entra esta dependencia en la ecuación 22-13?
22. Cuando agitamos una lata de nueces mixtas, ¿por qué la más grande suele terminar arriba en la superficie, a pesar de ser más densa que las restantes?
23. Justifique cualitativamente la afirmación de que, en una mezcla de moléculas de distintos tipos en equilibrio completo, todos ellos tienen la misma distribución de Maxwell en la rapidez que tendrían si no hubiera otros tipos.
24. Un gas se compone de N partículas. Explique por qué $v_{rcm} \geq v_{pro}$ a pesar de la distribución de rapideces.
25. ¿Qué observación constituye una prueba fehaciente de que no todas las moléculas de un cuerpo se mueven con igual velocidad a una temperatura particular (o fija)?
26. La fracción de moléculas dentro de un intervalo δ_v de rapidez rcm disminuye al elevarse la temperatura de un gas. Explique por qué.
27. En la figura 22-15 se ve la distribución del componente x de las velocidades de las moléculas dentro de un contenedor a una temperatura fija. *a*) La distribución es simétrica alrededor de $v_x = 0$; haga plausible esto. *b*) ¿Qué representa el área total bajo la curva? *c*) ¿Cómo cambiará la distribución al elevarse la temperatura? *d*) ¿Cuál es el valor más probable de v_x? *e*) ¿Es igual a cero la rapidez más probable? Explique su respuesta.

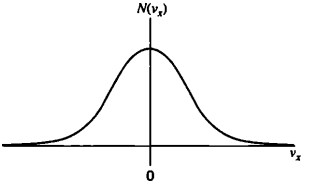


FIGURA 22-15. Pregunta 27.

28. El sistema de ranuras de la figura 22-8 selecciona sólo las moléculas que se desplazan en la dirección $+x$. ¿Se destruye con ello la validez del experimento como medida de la distribución de rapideces de las moléculas que se mueven en todas direcciones?
29. Cite ejemplos del movimiento browniano en los fenómenos físicos.
30. Del techo se suspende una pelota de golf mediante un hilo largo. Explique con detalle por qué el movimiento browniano no es evidente.
31. Sea ρ_n el número de moléculas por unidad de volumen en un gas. Si definimos ρ_n para un volumen muy pequeño en un gas —digamos, uno equivalente a 10 veces el volumen de un átomo—, ρ_n fluctuará con el tiempo en el intervalo de valores cero a algún valor máximo. ¿Cómo podemos justificar una afirmación de que ρ_n tiene un valor definido en todos los puntos del gas?

EJERCICIOS

22-1 La naturaleza atómica de la materia

1. El oro tiene una masa molar (atómica) de 197 g/mol. Considere una muestra de 2.56 g de vapor de oro puro. *a*) Calcule los moles presentes de oro. *b*) ¿Cuántos átomos de oro hay?
2. *a*) Calcule los moles en 1.00 m^3 de aire a 20.0°C y a una presión de 1.00 atm. *b*) ¿Cuál es la masa de este volumen de aire? Suponga que 75% de las moléculas son nitrógeno (N_2) y que 25% son oxígeno (O_2).
3. Un tanque de acero contiene 315 g de gas amoniaco (NH_3) a una presión absoluta de 1.35×10^6 Pa y a una temperatura de 77.0°C. *a*) ¿Qué volumen tiene el tanque? *b*) Más tarde se verifica el tanque cuando la temperatura descendió a 22.0°C y la

presión absoluta a 8.68×10^5 Pa. ¿Cuántos gramos de gas se filtraron de él?

4. *a*) Considere 1.00 mol de un gas ideal a 285 K y a una presión de 1.00 atm. Imagine que por lo regular las moléculas están espaciadas uniformemente en el centro de los cubos idénticos. Por medio de la constante de Avogadro, y suponiendo que el diámetro de una molécula sea 3.00×10^{-8} cm, calcule la longitud de uno de sus lados y la razón de esta longitud al diámetro de una molécula. La longitud del lado es una estimación de la distancia entre las moléculas del gas. *b*) Ahora considere un mol de agua que tiene un volumen de 18 cm^3. Una vez más imagine que las moléculas pueden esparcirse uniformemente en el centro de cubos idénticos y repita el cálculo con *a*).
5. Considere una muestra de gas argón a 35.0°C y a una presión de 1.22 atm. Suponga que el radio de un átomo (esférico) de argón es 0.710×10^{-10} m. Calcule la fracción del volumen del contenedor que ocupan los átomos.

22-2 Una perspectiva molecular de la presión

6. La masa de la molécula H_2 es 3.3×10^{-24} g. Si 1.6×10^{23} moléculas de hidrógeno por segundo chocan contra 2.0 cm^2 de la pared en un ángulo de 55° con la normal cuando se desplazan con una rapidez de 1.0×10^5 cm/s, ¿qué presión ejercen sobre la pared?
7. A una temperatura de 44.0°C y a una presión de 1.23×10^{-2} atm la densidad de un gas es 1.32×10^{-5} g/cm^3. *a*) Calcule v_{rcm} para las moléculas de un gas. *b*) Aplique la ley del gas ideal y encuentre su número de moles por unidad de volumen (densidad molar. *c*) Combinando los resultados de *a*) y *b*) determine la masa molar del gas e identifíquela.
8. Un contenedor cilíndrico de longitud 56.0 cm y 12.5 cm de diámetro contiene 0.350 moles de gas nitrógeno a una presión de 2.05 atm. Determine la rapidez rcm de sus moléculas.

22-3 Trayectoria libre media

9. A temperatura y presión estándar (0°C y 1.00 atm), la trayectoria libre media del gas helio es 285 nm. Determine *a*) el número de moléculas por metro cúbico, y *b*) el diámetro efectivo de los átomos de helio.
10. A 2,500 km sobre la superficie de la Tierra la densidad aproximada es 1.0 molécula/cm^3. *a*) ¿Qué trayectoria libre media predice la ecuación 22-13, y *b*) ¿qué importancia tiene en tales condiciones? Suponga un diámetro molecular de 2.0×10^{-8} cm.
11. ¿Con qué frecuencia, a una presión de 1.02 atm y a una temperatura de 18.0°C, la longitud de onda del sonido será del orden de la trayectoria libre media en el nitrógeno? Suponga que el diámetro de la molécula de este gas sea 315 pm.
12. En una acelerador de partículas los protones describen una trayectoria circular de 23.5 m de diámetro en una cámara con una presión de 1.10×10^{-6} mm Hg y de 295 K de temperatura. *a*) Calcule las moléculas de gas por metro cúbico a esta presión. *b*) ¿Cuál es la trayectoria libre media de las moléculas de gas en tales condiciones si el diámetro molecular mide 2.20×10^{-8} cm?
13. En el problema resuelto 22-4, ¿a qué temperatura la frecuencia promedio de colisión es igual a 6.0×10^9 s^{-1}? La presión permanece inalterada.

22-4 La distribución de las rapideces moleculares

14. Un grupo de 10 moléculas tiene las siguientes rapideces: 2.0, 3.0, 4.0, ... 11 km/s. *a*) Encuentre la rapidez promedio del grupo. *b*) Calcule su rapidez raíz cuadrada media.
15. *a*) Dos partículas se desplazan con las siguientes rapideces: cuatro a 200 m/s, dos a 500 m/s y cuatro a 600 m/s. Calcule el promedio y las rapideces raíz cuadrada media. ¿Es $v_{rcm} > v_{pro}$? *b*) Efectúe su propia distribución de rapideces en las 10 partículas y demuestre que $v_{rcm} \geq v_{pro}$ en su distribución. *c*) ¿En qué condición (si la hay) $v_{rcm} = v_{pro}$?
16. Calcule la rapidez raíz cuadrada media de las moléculas de amoniaco (NH_3) a 56°C. Un átomo de nitrógeno tiene masa de 2.33×10^{-26} kg y la del hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg.
17. La temperatura en el espacio interestelar es de 2.7 K. Determine la rapidez raíz cuadrada media de las moléculas de hidrógeno a esa temperatura (tabla 22-1).
18. Verifique la ecuación 22-16 evaluando $dN(v)/dv = 0$ y resolviendo para v.
19. Evalúe la integral en la ecuación 22-17 para verificar la ecuación 22-18.
20. Evalúe la integral en la ecuación 22-19 para comprobar que $(v^2)_{pro} = 3kT/m$.
21. Calcule la rapidez raíz cuadrada media de las partículas de humo con una masa de 5.2×10^{-14} g en el aire, a una temperatura de 14°C y a una presión de 1.07 atm.
22. ¿A qué temperatura los átomos del gas helio tienen la misma rapidez en rcm que las moléculas del gas hidrógeno a 26.0°C?
23. *a*) Calcule las temperaturas a que la rapidez rcm es igual a la de escape de la superficie terrestre en el hidrógeno y en el oxígeno moleculares. *b*) Haga lo mismo para la Luna, suponiendo que la aceleración gravitacional en la superficie es de 0.16*g*. *c*) La temperatura en lo alto de la atmósfera superior de la Tierra es de 1,000 K, aproximadamente. ¿Esperaría encontrar mucho hidrógeno allí? ¿Mucho oxígeno?
24. Le dan el siguiente grupo de partículas (N_n representa el número de las que tienen la rapidez v_n).

N_n	v_n (km/s)
2	1.0
4	2.0
6	3.0
8	4.0
2	5.0

a) Calcule la rapidez promedio v_{pro}. *b*) Calcule la rapidez raíz cuadrada media v_{rcm}. *c*) Entre las cinco rapideces que se anexan, ¿cuál es la más probable v_p en el grupo entero?

25. En el aparato de Miller y Kusch (Fig. 22-8), la longitud L del cilindro rotacional es 20.4 cm y el ángulo ϕ mide 0.0841 rad. ¿Qué rapidez rotacional corresponde a una rapidez seleccionada v de 212 m/s?
26. Se descubre que la rapidez más probable de las moléculas de un gas a una temperatura T_2 es la misma que su rapidez rcm cuando tienen una temperatura T_1. Calcule T_2/T_1.
27. Demuestre que la rapidez más probable es $v_p = \sqrt{3kT/m}$ en átomos de masa m que emergen como haz de una pequeña abertura en un horno de temperatura T.
28. Con la rapidez raíz cuadrada media un átomo de germanio (diámetro = 246 pm) escapa de un horno (T = 4,220 K) hacia una cámara que contiene átomos de argón frío (diámetro = 300 pm) a una densidad de 4.13×10^{19} átomos/cm^3. *a*) ¿Cuál es la rapidez de un átomo de germanio? *b*) Si este átomo y otro de argón chocan, ¿cuál será la distancia más corta entre sus centros,

suponiendo que ambos sean esféricos? *c*) Determine la frecuencia de colisiones inicial que experimenta el átomo de germanio.

22-5 La distribución de las energías moleculares

29. Calcule la fracción de partículas en un gas que se desplaza con energía cinética traslacional entre $0.01kT$ y $0.03kT$. (*Sugerencia:* Con $E \ll kT$, el término $e^{-E/kT}$) en la ecuación 22-25 puede reemplazarse por $1 - E/kT$. ¿Por qué?)
30. Encuentre la fracción de partículas en un gas que tienen energías cinéticas traslacionales dentro de un intervalo de $0.02kT$ centradas en la energía más probable. E_p. (*Sugerencia:* En esta región $N(E) \approx$ constante. ¿Por qué?)

22-6 Ecuaciones del estado de los gases reales

31. Estime la constante de Van der Waals para H_2O, si sabe que un kilogramo de agua tiene un volumen de $0.001\ m^3$. La masa molar del agua es 18 g/mol.
32. El valor de la constante *b* de Van der Waals para el oxígeno es $32\ cm^3$/mol. Calcule el diámetro de una molécula O_2.
33. Demuestre que la constante *a* en la ecuación de Van der Waals puede escribirse en unidades de

$$\frac{\text{energía por partícula}}{\text{densidad de partículas}}.$$

22-7 Fuerzas intermoleculares

PROBLEMAS

1. A una temperatura de 0°C y a una presión de 1.000 atm las densidades del aire, del oxígeno y del nitrógeno son, respectivamente, $1.293\ kg/m^3$, $1.429\ kg/m^3$, y $1.250\ kg/m^3$. A partir de estos datos calcule la fracción por masa de nitrógeno en el aire, suponiendo que sólo hay esos dos gases.
2. Según la *ley de Dalton*, cuando en un contenedor coexisten mezclas de gases que no tienen interacción química, la presión ejercida por cada componente a cierta temperatura es la misma que ejercería si él solo llenara totalmente el contenedor y la presión total es igual a la suma de las presiones parciales de los gases. Demuestre esta ley de la teoría cinética utilizando la ecuación 22-8.
3. Dos gases ideales están encerrados en un contenedor. Hay dos moles del primero, con una masa molar M_1. Las moléculas del segundo gas tienen una masa molar $M_2 = 3M_1$ y hay 0.5 moles de él. ¿Qué parte de la presión total sobre el contenedor es atribuible al segundo gas? (*Sugerencia*: Consúltese el problema 2.)
4. Calcule la trayectoria libre media de 35 bombones de gelatina azucarada en una jarra que se agita con mucha fuerza. El volumen de la jarra es 1.0 l y el diámetro de los bombones es 1.0 cm.
5. La trayectoria libre media *A* de las moléculas de un gas puede determinarse a partir de las mediciones (por ejemplo, la de la viscosidad del gas). A una temperatura de 20.0°C y a una presión de 75.0 cm Hg se tienen los valores de λ(argón) = 9.90×10^{-6} cm y λ (nitrógeno) = 27.5×10^{-6} cm. *a*) Encuentre la razón de los diámetros transversales efectivos del argón al nitrógeno. *b*) ¿Cuál será el valor de la trayectoria libre media del argón a 20.0°C y a 15.0 cm Hg? *c*) ¿Cuál será el valor de la trayectoria libre media del argón a −40.0°C y 75.0 cm Hg?
6. La probabilidad de que una molécula de gas recorra una distancia entre *r* y $r + dr$ antes de chocar con otra está dada por $Ae^{-cr}dr$, donde *A* y *c* son constantes. Haga la distancia del recorrido igual a la trayectoria libre media, a fin de encontrar *A* y *c* en función del número de moléculas *N* y la trayectoria libre media.
7. Dos contenedores tienen la misma temperatura. El primero contiene gas a la presión p_1, cuyas moléculas tienen masa m_1 y una rapidez raíz cuadrada media $v_{rcm,1}$. El segundo contiene moléculas de masa m_2 a una presión $2p_1$, con una rapidez promedio $v_{pro,2} = 2v_{rcm,1}$. Encuentre la razón $m_1{:}m_2$ de las masas de sus moléculas.
8. Un gas, no necesariamente en equilibrio térmico, consta de *N* partículas. La distribución de rapideces no es necesariamente maxwelliana. *a*) Demuestre que $v_{rcm} \geq v_{pro}$ cualquiera que sea la distribución de rapideces. *b*) ¿Cuándo se mantendrá la igualdad?
9. En la figura 22-16 se muestra una distribución hipotética de rapideces de las *N*, moléculas del gas con $N(v) = Cv^2$ para $0 < v < v_0$ y $N(v) = 0$ para $v > v_0$. Calcule *a*) una expresión de *C* en función de *N* y de v_0, *b*) la rapidez promedio de las partículas y *c*) la rapidez rcm de las partículas.

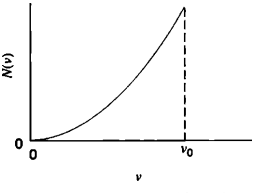


FIGURA 22-16. Problema 9.

10. Un gas de *N* partículas tiene la distribución hipotética de rapideces que se muestra en la figura 22-17 [$N(v) = 0$ para $v > 2v_0$]. *a*) Exprese *a* en función de *N* y de v_0. *b*) ¿Cuántas partículas tienen rapideces entre $1.50v_0$ y $2.00v_0$? *c*) Exprese la rapidez promedio en función de v_0. *d*) Encuentre v_{rcm}.

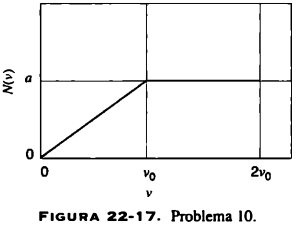


FIGURA 22-17. Problema 10.

11. En un gas donde todas las moléculas se desplazan con la misma rapidez v_{pro}, demuestre que $v_{rel} = \frac{4}{3}v_{pro}$ en vez de $\sqrt{2}\,v_{pro}$ (resultado que se obtuvo cuando consideramos la distribución real de las rapideces de las moléculas). (Ec. 22-13.)

12. El Sol es una enorme bola de gas ideal caliente. El resplandor que lo rodea en la imagen ultravioleta de la figura 22-18 es la corona, es decir, su atmósfera. Tiene una temperatura y una presión de 2.0×10^6 K y de 0.030 Pa, respectivamente. Calcule la rapidez rcm de los electrones libres de la corona.

FIGURA 22-18. Problema 12.

13. Suponga que un gas a una temperatura T que ocupa un volumen V está constituido por una mezcla de átomos: N_a átomos de masa m_a, cada uno con una rapidez rcm v_a y N_b y átomos de masa m_b, cuya rapidez rcm v_b. *a*) Obtenga una expresión de la presión total ejercida por el gas. *b*) Ahora suponga que $N_a = N_b$ y que los átomos diferentes se combinan a un volumen constante para formar moléculas de masa $m_a + m_b$. Una vez que la temperatura recobra su valor original, ¿cuál será la razón de la presión después de combinarse a la presión anterior?
14. Encuentre *todos* los coeficientes viriales de un gas que satisface a la ecuación de estado de Van der Waals.
15. La envoltura y la canasta de un globo aerostático de aire caliente tienen una masa combinada de 249 kg, y la envoltura posee una capacidad de 2,180 m^3. Cuando está totalmente inflado, ¿cuál debería ser la temperatura del aire en su interior para darle al globo una capacidad de levantamiento de 272 kg (además de su propia masa)? Suponga que el aire circundante, a 18.0°C, tiene una densidad de 1.22 kg/m^3.
16. En el espacio interestelar existen partículas sólidas muy pequeñas llamadas gramos. Las bombardean continuamente átomos de hidrógeno del gas circundante. A raíz de estas colisiones, los granos realizan el movimiento browniano en la traslación y en la rotación. Suponga que son esferas uniformes de 4.0×10^{-6} cm de diámetro y con una densidad de 1.0 g/cm^3, y que la temperatura del gas es 100 K. Calcule *a*) la rapidez raíz cuadrada media de los granos entre colisiones, y *b*) la frecuencia aproximada (rev/s) a la cual giran. (Suponga que la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional promedio son iguales.)
17. Como se aprecia en la figura 22-11, si las fuerzas intermoleculares son bastante grandes, la presión medida/p de un gas que se ajusta a la ecuación de estado de van der Waals podría ser cero. *a*) ¿Con qué valor del volumen por mol podría ocurrir eso? (*Sugerencia*: Hay dos soluciones; encuéntrelas e interprételas.) *b*) Demuestre que la presión cero sólo se da con una temperatura máxima; determínela a partir de los parámetros a y b en la ecuación de Van der Waals. *c*) Suponiendo que al oxígeno se le aplica esta ecuación con $a = 0.138\ J \cdot m^3/mol^2$ y $b = 3.18 \times 10^{-5}\ m^3/mol$, calcule la temperatura máxima en que $p = 0$ para el oxígeno y compare este valor con el punto normal de ebullición del oxígeno.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Escriba un programa que simule la trayectoria al azar de una partícula. Ésta parte del origen y después puede realizar un paso con incrementos Δx y Δy asignados aleatoriamente entre -1 y 1. *a*) Permita que la partícula "recorra" 200 pasos, y grafique el movimiento como en la figura 22.1 Escoja la escala de la gráfica para acomodar justamente los datos. B) permita que la partícula "recorra" 2,000 pasos pero esta vez grafique la posición de la partícula sólo al final de cada uno de los 10 pasos. Una vez más, escoja la escala de la gráfica para ajustar los datos. *c*) Repita el procedimiento, sólo que esta vez deje que la partícula recorra 20,000 pasos y grafique sólo la posición al final de cada 100 pasos. Compare las tres gráficas. ¿Crece su tamaño con el número de pasos? ¿Se parecen entre sí? Si las gráficas se barajaran, podría identificarlas?
2. Considere un gas de Van der Waals con $a = 0.10\ J \cdot m^3/mol^2$ y $b = 1.0 \times 10^{-4}\ m^3/mol$. *a*) Calcule la temperatura T_{cr}, la presión p_{cr} y el volumen V_{cr} donde $\partial p/\partial V = 0$ y $\partial^2 p/\partial V^2 = 0$. *b*) Grafique la presión en las isotermas en función del volumen para $0.80T_{cr}$, $0.85T_{cr}$, $0.90T_{cr}$, $0.95T_{cr}$, $1.00T_{cr}$, $1.05T_{cr}$, y $1.10T_{cr}$. La gráfica deberá extenderse de $V = 0$ a $V = 5V_{cr}$. *c*) ¿Qué importancia física tiene la isoterma T_{cr}?

CAPÍTULO 23

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

En los capítulos anteriores utilizamos el concepto de calor sin definirlo rigurosamente. En éste vamos a explorar la naturaleza del calor más a fondo. Ahora que ya conocemos las nociones de trabajo, de calor y energía interna, retomamos la primera ley de la termodinámica —expuesta en el Capítulo 13— y la sometemos a un análisis más profundo. Concluiremos el capítulo aplicándola a varios procesos termodinámicos y una vez más escogemos el gas ideal como nuestro sistema.

23-1 EL CALOR: ENERGÍA EN TRÁNSITO

Todos saben que si colocamos una taza de café caliente o un vaso de agua helada sobre una mesa a temperatura ambiente, el café se enfriará y el agua se pondrá más caliente; la temperatura de los dos se acercará a la de la habitación. En ambos casos el objeto tenderá al alcanzar equilibrio térmico con su ambiente.

En páginas anteriores señalamos que tales formas de ver el equilibrio térmico han de incluir algún intercambio de energía entre el sistema y el ambiente. En la Sección 13-7 (que el lector debería repasar) definimos el calor Q como energía transferida, digamos del café a la habitación, o de ésta al agua helada. En concreto:

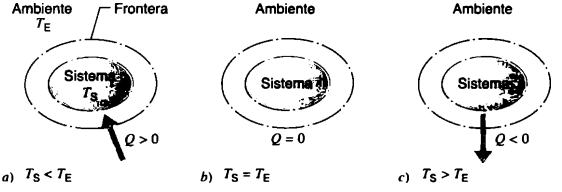
El calor es energía que fluye entre un sistema y su ambiente a causa de la diferencia de temperatura entre ellos.

En la figura 23-1 se resume esta concepción. Si la temperatura T_S de un sistema es menor que la temperatura T_E de su ambiente, fluirá energía hacia él en forma de calor. Escogimos la convención de signos de modo que Q sea positivo en este caso, que tiende a acrecentar la energía interna E_{int} del sistema. Por el contrario, cuando $T_S > T_E$, saldrá energía de él (con lo cual se incrementará E_{int}), y Q será negativo en este caso.

Como otras formas de energía, el calor puede expresarse en joules (J), unidad del SI. En la Sección 13-7 se mencionó la relación del joule con otras unidades con que a veces se mide la energía calorífica.

Ideas erróneas referentes al calor

El calor se parece al trabajo en que ambos representan formas de transferir energía. No son una propiedad intrínseca del sistema, es decir, no podemos decir que un sistema "contiene" cierta cantidad de calor ni de trabajo. A diferencia de algunas propiedades como la presión, la temperatura y la energía interna, no son



a) $T_S < T_E$ *b)* $T_S = T_E$ *c)* $T_S > T_E$

FIGURA 23-1. *a)* Si la temperatura T_S de una sistema es menor que la temperatura T_E de su ambiente, se le transfiere calor hasta que se logre el equilibrio térmico, como en *b)* y *c)* Si la temperatura de un sistema es mayor que la de su ambiente, se transfiere calor fuera de él.

propiedades del estado del sistema; tampoco son *funciones del estado*. Por el contrario, decimos que cierta cantidad de energía puede ser transferida e introducida o extraída del sistema en forma de calor o de trabajo. Los dos, pues, están asociados a un *proceso termodinámico*, es decir, a la interacción entre el sistema y su ambiente a medida que aquél pasa de un estado de equilibrio a otro.

Como se mencionó en la Sección 13-7, en el lenguaje común el calor se confunde a menudo con la temperatura o la energía interna. Cuando las instrucciones de una receta dicen "caliéntese a 300 grados", se habla de la temperatura (en la escala Fahrenheit). También oímos a la gente referirse al "calor generado" en la cubierta de los frenos al momento de detener el automóvil. En este caso, la temperatura y la energía interna del revestimiento se incrementaron a causa del trabajo de fricción realizado en ellos. La temperatura no aumentó porque se haya transferido calor a las cubiertas de los frenos desde algún objeto externo a una temperatura más alta. No existe ese objeto. La única transferencia de calor se efectuó *del* revestimiento de los frenos a temperatura elevada *a* su ambiente inmediato.

23-2 LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Sabemos que se transfiere calor entre un sistema y su ambiente cuando su temperatura es diferente. No obstante, aún no se describe el mecanismo en virtud del cual se lleva a cabo la transferencia. Son tres: conducción, convección y radiación térmica. Vamos a examinar cada uno por separado.

Conducción térmica

Si dejamos un atizador en el fuego suficiente tiempo, su mango se pondrá caliente. Se transfiere energía del fuego al mango mediante la *conducción térmica* a través de la vara metálica. Como veremos en el Capítulo 49, en los metales algunos de los electrones atómicos pueden moverse libremente dentro de los confines del objeto y, por tanto, están en condiciones de transmitir el incremento de su energía cinética de las regiones de alta temperatura a las de temperatura más baja. De ese modo una región de temperatura creciente cruza la varilla y llega a nuestra mano.

Consideremos el caso de una losa de un material homogéneo de espesor Δx y de superficie A (Fig. 23-2). Una cara la mantenemos a temperatura constante T y la otra a una temperatura constante un poco más elevada $T + \Delta T$; ambas temperaturas son uniformes a lo largo de su superficie respectiva. Supongamos la rapidez H ($= Q/\Delta t$) a la cual se transfiere calor a través de la losa. (En el SI la unidad de H es el joule/segundo, que es el watt.) Los experimentos muestran que H es 1. directamente proporcional a A: cuanto más grande sea la superficie disponible, mayor calor podrá transferirse por unidad de tiempo; 2. inversamente proporcional a Δx: cuanto más gruesa sea la losa, menor calor se

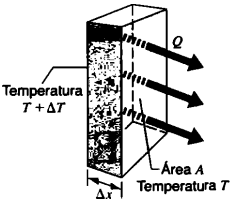


FIGURA 23-2. Fluye calor Q a través de una losa rectangular cuyo material tiene un espesor Δx y una superficie A.

transferirá por unidad de tiempo; 3. directamente proporcional a ΔT: a una temperatura más elevada corresponde una mayor transferencia de calor.

Los hallazgos experimentales anteriores los resumimos así:

$$H = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}, \tag{23-1}$$

expresión en que la constante de proporcionalidad k se denomina *conductividad térmica* del material. En el SI la unidad de k es el watt por metro kelvin (W/m · K).

En la tabla 23-1 se incluyen algunos valores de k para algunas sustancias. Una que tenga un valor alto es un buen conductor térmico, una que tenga un valor bajo es un mal conductor o, en forma equivalente, un buen aislante térmico. La figura 23-3 muestra un patio donde con tiras de abeto se separan losas de concreto. Como se muestra en la tabla 23-1, la conductividad térmica del concreto es más de cinco veces mayor que la del abeto; la conducción del calor del suelo (más caliente) a

TABLA 23-1 Algunas conductividades térmicas y valores R[a]

Material	*Conductividad, k* (W/m · K)	*Valor R* (ft² · F° · h/Btu)
Metales		
Acero inoxidable	14	0.010
Plomo	35	0.0041
Aluminio	235	0.00061
Cobre	401	0.00036
Plata	428	0.00034
Gases		
Aire (seco)	0.026	5.5
Helio	0.15	0.96
Hidrógeno	0.18	0.80
Materiales de construcción		
Espuma de poliuretano	0.024	5.9
Lana de roca	0.043	3.3
Fibra de vidrio	0.048	3.0
Abeto	0.14	1.0
Concreto	0.80	0.18
Vidrio de ventana	1.0	0.14

[a] Los valores se refieren a la temperatura ambiente. Nótese que los valores de k están dados en unidades del SI y los de R en las unidades británicas tradicionales. Los valores R se refieren a una losa de 1 in.

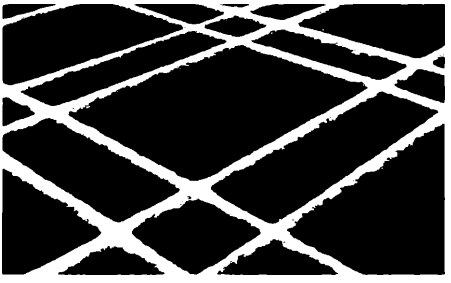


FIGURA 23-3. La nieve se derrite en el concreto, pero no en las tiras de abeto entre las secciones de él porque el concreto es un mejor conductor térmico que la madera.

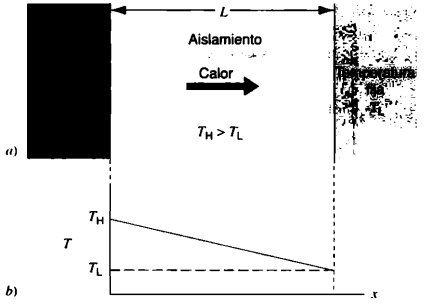


FIGURA 23-4. *a*) Conducción de calor a través de una varilla conductora aislada. *b*) Variación de temperatura a lo largo de la varilla.

través del concreto y del abeto al aire (más frío) hace que la nieve arriba del concreto sea la primera en derretirse.

Al seleccionar materiales de construcción, a menudo los encontramos clasificados por la *resistencia térmica*, llamada también valor R, que se define por medio de

$$R = \frac{L}{k}, \tag{23-2}$$

donde L es el espesor del material por donde se transfiere calor. De ahí que, cuanto más baja sea la conductividad, más alto será el valor R: los buenos aislantes tienen altos valores R. Desde el punto de vista numérico, este valor se evalúa según la ecuación 23-2 expresada en unidades inglesas de $ft^2 \cdot F^\circ \cdot h/Btu$. El valor R se determina para cierto espesor del material. Por ejemplo, un espesor de fibra de vidrio de 1 in tiene $R = 3$, en tanto que un espesor de madera de 1 in posee $R = 1$ (y, por tanto, conduce calor a una rapidez tres veces mayor que la fibra de vidrio). Una pulgada de aire tiene $R = 5$, pero el aire es un mal aislante térmico porque puede transferir más calor por convección y, en consecuencia, la conductividad térmica no es una medida confiable del valor aislante del aire. La tabla 23-1 contiene los valores R de losas de 1 pulgada de algunos materiales.

Examinemos ahora dos aplicaciones de la ecuación 23-1. Primero estudiamos el caso de una varilla larga de longitud L y la sección transversal uniforme A (Fig. 23-4*a*), en que un extremo se mantiene a temperatura elevada T_H y el otro a una temperatura baja T_L.* A esta situación la llamamos *estado estacionario*: las temperaturas y la rapidez de la transferencia del calor son constantes en el tiempo. En esta situación, todo incremento de energía entra en la varilla por el extremo caliente y sale por el extremo frío. Dicho de otra manera, a través de cualquier sección transversal a lo largo de la varilla mediremos la misma rapidez de la transferencia.

En este caso podemos escribir la ecuación 23-1 como

$$H = kA\frac{T_H - T_L}{L}. \tag{23-3}$$

Aquí L es el espesor del material en dirección de la transferencia de calor. La rapidez del flujo de calor H es una constante, y la temperatura desciende en forma lineal entre los extremos de la varilla (Fig. 23-4*b*).

A continuación abordamos el caso en que la losa tiene un espesor infinitesimal dx y una diferencia de temperatura dT entre sus caras. Dentro de este límite obtenemos

$$H = -kA\frac{dT}{dx}. \tag{23-4}$$

La derivada dT/dx recibe el nombre de *gradiente de temperatura*. Decidimos que la dirección positiva de la variable x en la ecuación 23-4 sea la dirección en que se transfiere calor. Dado que fluye en dirección de la temperatura *decreciente*, el gradiente dT/dx es intrínsecamente negativo. Introducimos un signo de menos en la ecuación 23-4 para asegurarnos de que H, la rapidez de transferencia de calor, sea una cantidad positiva.

La ecuación 23-4 se aplica en especial a casos donde no es uniforme la sección transversal del material por donde se transfiere calor. Un ejemplo ilustrativo es el problema resuelto 23-2.

PROBLEMA RESUELTO 23-1. Considere una losa constituida por dos materiales cuyo espesor es diferente, L_1 y L_2, y cuyas conductividades térmicas, k_1 y k_2, también lo son. Si las temperaturas de las superficies externas son T_1 y T_2 (con $T_2 > T_1$), calcule la rapidez de transferencia de calor a través de la losa compuesta (Fig. 23-5) en un estado estacionario.

* Podemos suponer que los extremos de la varilla se encuentran sumergidos en *depósitos térmicos*, los cuales pueden suministrar o absorber una cantidad ilimitada de calor mientras mantienen una temperatura constante. Un depósitos térmico podría ser un material de una cantidad o capacidad tan grandes que absorba el calor que fluye hacia la varilla o desde ella influye poco en su temperatura. También podría ser una mezcla de vapor y de agua conservados en el punto de ebullición, o hielo y agua en el punto de fusión, de modo que el calor absorbido produce un cambio de fase pero no de temperatura. Otras posibilidades de depósitos térmicos son los hornos o refrigeradores donde el calor se convierte finalmente en trabajo mecánico, o de éste se transforma en otra cosa, conservando fija la temperatura.

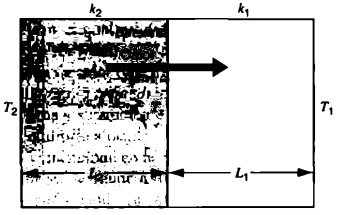


FIGURA 23-5. Problema resuelto 23-1. Conducción de calor a través de dos capas de material que tienen diferente conductividad térmica.

Solución Sea T_x la temperatura en la interfaz entre los dos materiales. Entonces la rapidez de transferencia de calor a través de la losa 2 será

$$H_2 = \frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2}$$

y a través de la losa 1 será

$$H_1 = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}.$$

En un estado estacionario $H_2 = H_1$, así que

$$\frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}.$$

Sea H la rapidez de transferencia de calor (igual en todas las secciones). Entonces, al resolver para T_x y al sustituir en una de las dos ecuaciones para H_1 o H_2, obtenemos

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{R_1 + R_2}.$$

La extensión a cualquier número de secciones en una serie es

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{\Sigma\,(L_n/k_n)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{\Sigma\, R_n}. \qquad (23\text{-}5)$$

PROBLEMA RESUELTO 23-2. Un tubo delgado y cilíndrico de metal transporta vapor a una temperatura de $T_S = 100°C$. Tiene un diámetro de 5.4 cm y está envuelto con aislante de fibra de vidrio cuyo espesor mide 5.2 cm. Una longitud de $D = 6.2$ m del tubo cruza una habitación donde la temperatura es $T_R = 11°C$. *a)* ¿Con qué rapidez pasa la energía calorífica por el aislante? *b)* ¿Cuánto aislante más hay que agregar para reducir a la mitad la rapidez con que se transfiere calor?

Solución *a)* La figura 23-6 muestra gráficamente la geometría adecuada para el cálculo. En un estado estacionario, la rapidez de transferencia de calor H será constante e igual en todas las capas cilíndricas delgadas, como la indicada por las líneas punteadas de la figura 23-6. A esta capa podemos considerarla como una losa de material, con un espesor dr y con una superficie de $2\pi rD$. Al aplicar la ecuación 23-4 a la geometría tenemos

$$H = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rD)\frac{dT}{dr}$$

o bien

$$H\frac{dr}{r} = -2\pi kD\,dT.$$

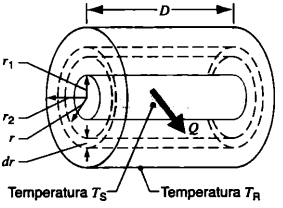


FIGURA 23-6. Problema resuelto 23-2. La superficie interna (radio r_1) del aislante en un tubo cilíndrico tiene una temperatura T_S y la superficie externa (radio r_2) tiene una temperatura T_R. El mismo calor Q fluye por todas las capas cilíndricas del aislante, como la intermedia de espesor dr y de radio r indicada por las líneas punteadas.

Suponemos que el tubo metálico delgado se encuentra a la temperatura del vapor, de modo que no entra en el cálculo. Integramos a partir del radio interno r_1 del aislante a una temperatura T_S al radio externo r_2 a una temperatura T_R:

$$\int_{r_1}^{r_2} H\frac{dr}{r} = -2\pi kD\int_{T_S}^{T_R} dT.$$

Extraemos la constante H a la izquierda de la integral y efectuamos la integración; de este modo obtenemos

$$H\ln\frac{r_2}{r_1} = -2\pi kD(T_R - T_S) = 2\pi kD(T_S - T_R).$$

Al resolver para H y al sustituir los valores numéricos, nos da

$$H = \frac{2\pi kD(T_S - T_R)}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$= \frac{2\pi(0.048\ \text{W/m}\cdot\text{K})(6.2\ \text{m})(89\ \text{K})}{\ln(7.9\ \text{cm}/2.7\ \text{cm})} = 155\ \text{W}.$$

Nótese que, si no hubiéramos introducido un signo de menos en la ecuación 23-4, el signo algebraico de H no habría sido positivo.

b) Para reducir a la mitad la rapidez de transferencia de calor, hay que aumentar r_2 al valor r'_2 tal que el denominador de la expresión anterior de H se duplique, es decir,

$$\frac{\ln(r'_2/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} = 2.$$

Resolviendo para r'_2 obtenemos

$$r'_2 = \frac{r_2^2}{r_1} = \frac{(7.9\ \text{cm})^2}{2.7\ \text{cm}} = 23\ \text{cm}.$$

Así, necesitamos casi cuatro veces el espesor del aislante para disminuir a la mitad la transferencia de calor. Este efecto se debe al agrandamiento de la superficie, y por lo mismo de la masa, contenida en cada losa delgada, a medida que aumentamos el radio en la geometría cilíndrica. Se dispone de más material para conducir calor en los radios externos, de ahí que debamos suministrar una cantidad creciente de aislante al ir creciendo r. Esto no es lo mismo que la geometría lineal, en la cual el calor transferido disminuye linealmente cuando aumenta el espesor del aislante. En la geometría esférica (que podría ser idónea para calcular la energía calorífica transferida del núcleo de la Tierra a su superficie), el cálculo es otra vez diferente (problema 3).

Convección

Si observa la llama de una vela o de un fósforo, verá cómo se transporta energía hacia arriba por *convección*. Este tipo de transferencia tiene lugar cuando un fluido, digamos el aire o el agua, entra en contacto con un objeto cuya temperatura es mayor que la de su ambiente. Se eleva la temperatura del líquido en contacto con el objeto caliente y (en la generalidad de los casos) se expande el líquido. El fluido caliente es menos denso que el fluido más frío circundante, por lo cual se eleva a causa de las fuerzas de flotación (Fig. 23-7). El fluido más frío del ambiente cae y toma el lugar del fluido más caliente que se eleva, iniciándose así una circulación convectiva.

La convección atmosférica contribuye mucho a determinar los patrones globales climatológicos y las variaciones meteorológicas diarias. Los pilotos de planeadores y los cóndores buscan las térmicas convectivas que provienen de la tierra más caliente y los mantienen en vuelo. Por el mismo proceso se transfieren enormes cantidades de calor en los mares. La región externa del Sol, denominada *fotosfera*, contiene muchas celdas de convección que transportan energía hacia la superficie solar y le dan a la superficie un aspecto granulado. Finalmente, se piensa que existen enormes celdas convectivas dentro del manto terrestre; sus superficies más externas son las placas tectónicas cuyos movimientos desplazan a los continentes.

Hasta ahora hemos descrito la convección *libre* o *natural*. La convección también puede ser artificial, como cuando un soplador de horno hace circular el aire para calentar las habitaciones de una casa.

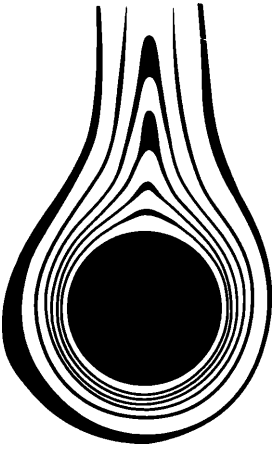


FIGURA 23-7. El aire se eleva por convección alrededor de un cilindro calentado. Las áreas negras representan una temperatura uniforme.

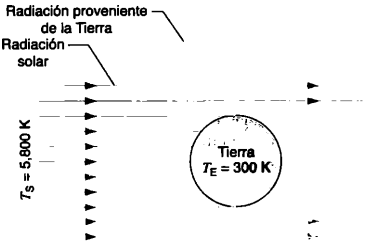


FIGURA 23-8. La Tierra intercepta y absorbe (casi toda) la radiación solar. Su temperatura T_E se ajusta al valor en que el calor que pierde por radiación es exactamente igual al calor solar que absorbe.

Radiación

La energía proveniente del Sol llega a nosotros debido a las ondas electromagnéticas que se desplazan libremente por el casi vacío del espacio intermedio. El mismo proceso nos calienta cuando estamos cerca de una fogata o de una hoguera al aire libre. Todos los objetos emiten este tipo de radiación electromagnética por su temperatura y también absorben parte de la que cae en ellos procedente de otros objetos. Cuanto más alta sea la temperatura de un objeto, más irradiará. En el Capítulo 45 del segundo volumen veremos que la energía irradiada es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura. Así, la temperatura promedio de la Tierra se estabiliza a unos 300 K porque a ella irradia energía hacia el espacio con la misma rapidez con que la recibe del Sol (Fig. 23-8).

23-3 LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

En el Capítulo 13 explicamos el concepto fundamental de la conservación de energía en un sistema de partículas. Como lo hicimos en el caso de la conservación del momento en el Capítulo 7, nos concentramos en un grupo específico de partículas u objetos que definimos como nuestro *sistema*. Trazamos una frontera imaginaria que lo separaba de su *ambiente* y luego explicamos rigurosamente todas las interacciones entre él y su entorno. Algunas veces, como en el caso de la conservación del momento, describimos estas interacciones partiendo de las fuerzas. Otras veces es conveniente hacerlo en función de la transferencia de calor.

Podemos definir nuestro sistema en cualquier forma adecuada, con tal que lo hagamos de modo coherente, y explicaremos todas las transferencias de energía hacia el sistema o

desde él. Por ejemplo, podríamos definirlo como un bloque de metal cuya temperatura es menor que la de su ambiente, de modo que la interacción incluya transferencia de calor del ambiente al bloque. También podríamos definirlo como el agua o el hielo que se mezcla en un recipiente aislado. En el último caso se da un intercambio de energía *dentro* del sistema, pero sin interacción con el entorno.

En un sistema termodinámico, donde la energía interna es el único tipo de ella que puede tener, la ley de conservación de la energía puede expresarse así:

$$Q + W = \Delta E_{int}. \qquad (23\text{-}6)$$

En la presente sección vamos a examinar la ecuación anterior, que es la formulación de la *primera ley de la termodinámica.* En esta ecuación:

Q es la energía transferida (como calor) entre el sistema y su ambiente, debido a una diferencia de temperatura entre ellos. Una transferencia que se efectúe enteramente dentro de la frontera del sistema no queda incluida en Q.

W es el trabajo hecho en el sistema o por él mediante fuerzas que actúan en su frontera. No se incluye el que realizan fuerzas que operan enteramente dentro de su frontera.

ΔE_{int} es el cambio de energía interna que ocurre cuando se transfiere energía hacia el sistema o se extrae de él en forma de calor o de trabajo.

Por convención hemos decidido que Q sea positivo cuando se transfiera calor *hacia* el interior del sistema y que W también lo sea cuando se efectúa trabajo *en* él. Con tales convenciones, los valores positivos de Q y W sirven para *incrementar* la energía interna del sistema.*

La ecuación 23-6 es una forma restringida de la ley general de conservación de la energía. Por ejemplo, el sistema como un todo puede estar en movimiento dentro de nuestro marco de referencia. Es decir, puede haber energía cinética relacionada con el movimiento del centro de masa del sistema. De ser así, deberíamos agregar el término ΔK_{cm} al lado derecho de la ecuación 23-6. Sin embargo, en los sistemas de que nos ocuparemos, el centro de masa estará siempre en reposo dentro de nuestro marco de referencia, de manera que no hace falta ese término.

La figura 23-9 indica cómo aplicar la ecuación 23-6. El sistema comienza en un *estado inicial de equilibrio* i en la figura 23-9*a*, donde las propiedades del sistema —entre ellas su energía interna E_{int}— tienen valores constantes bien definidos. Después permitimos que el sistema experimente un *proceso termodinámico* —es decir, que interactúe con el entorno como en la figura 23-9*b*—, durante el cual puede realizarse trabajo o intercambiarse energía calorífica. Cuando concluye el proceso, el sistema termina en un *estado de equilibrio final* f, en el que en general las propiedades del sistema tendrán valores constantes diferentes.

Hay varios procesos mediante los cuales un sistema puede llevarse de un estado inicial específico a un estado final también específico. Casi siempre los valores de Q y W serán distintos según el proceso que se escoja. Pero el experimento demuestra lo siguiente: aunque difieran individualmente, su suma $Q + W$ es la misma en todos los procesos que conectan un estado inicial al estado final. Como se aprecia en la ecuación 23-6, ésta es la base experimental para considerar la energía interna E_{int} como una verdadera *función del estado*, es decir, una propiedad tan intrínseca del sistema como la presión, la temperatura y el volumen. Para poner de manifiesto este punto de vista, podemos expresar la primera ley de la termodinámica en términos formales:

> *En todo proceso termodinámico entre los estados de equilibrio* i *y* f, *la magnitud* $Q + W$ *tiene el mismo valor para cualquier trayectoria entre* i *y* f. *Esta cantidad es igual al cambio de valor de una función de estado llamada energía interna* E_{int}.

La primera ley de la termodinámica es un resultado general que está pensada para aplicarse a todos los procesos de la naturaleza que se efectúan entre estados de equilibrio. No es necesario que todas las etapas del proceso estén en dicho estado; basta que lo estén en el inicial y el final. Así, la primera ley puede aplicarse a la explosión de un petardo en un tambor aislado de acero. Podemos explicar el equilibrio de energía antes de la explosión y después que el sistema haya recobrado el equilibrio; en este cálculo no hay que preocuparse de que la condición intermedia sea turbulenta ni de que la presión y la temperatura no estén bien definidas.

Dada su generalidad, la primera ley es una descripción un poco incompleta de la naturaleza. Nos indica que la energía ha de conservarse en todo proceso, pero no nos señala si un proceso en particular donde se cumpla puede o no ocurrir en realidad. Por

* Algunos autores definen como positivo el trabajo hecho *por* el sistema y entonces la primera ley se escribiría $Q - W = \Delta E_{int}$. Hemos optado por definir como positivo el trabajo efectuado sobre el sistema, a fin de que el trabajo termodinámico tenga la misma convención de signos que utilizamos en los capítulos anteriores al hacer referencia al trabajo mecánico.

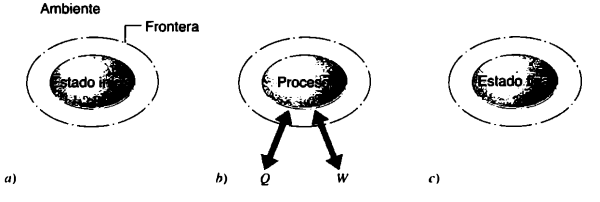


FIGURA 23-9. *a*) Un sistema en un estado inicial de equilibrio con su alrededor. *b*) Un proceso termodinámico durante su intercambio de calor Q o de trabajo W con su alrededor. *c*) Estado de equilibrio final alcanzado como resultado del proceso.

ejemplo, la explosión del petardo libera energía química almacenada en la pólvora que con el tiempo eleva la temperatura del gas dentro del tambor. Podemos imaginar que el gas caliente devuelve su energía térmica a los productos de la combustión, convirtiéndolos otra vez en pólvora y reensamblando el petardo, pero tal cosa nunca sucede. La conservación de la energía funciona en ambas direcciones, mientras que la naturaleza al parecer tiene una dirección favorita. Esta distinción la explica la *segunda* ley de la termodinámica, que explicaremos en el Capítulo 24.

En la física térmica como en la mecánica, hay que especificar muy bien el sistema al que van a aplicarse las leyes fundamentales como la ecuación 23-6. Por ejemplo, en la figura 23-10 se ilustra un serpentín calentador sumergido en el agua contenida en una cubeta aislada. La corriente que fluye por el serpentín proviene de un generador (ideal) que es activado por una pesa que cae con rapidez constante. Veamos qué valores de Q, W y ΔE_{int} resultan para diferentes elecciones arbitrarias de lo que decidimos llamar nuestro sistema:

1. *Sistema = agua solamente.* Se suministra calor al agua proveniente del serpentín, de modo que $Q > 0$. No se realiza trabajo porque el agua no se mueve bajo el influjo de una fuerza externa que opera sobre ella. Por tanto, $W = 0$. Así pues, conforme a la primera ley (Ec. 23-6) $\Delta E_{int} > 0$. El calor transferido al agua hace que su energía interna aumente y, en consecuencia, su temperatura también.

2. *Sistema = serpentín + pesa.* Mientras la pesa caiga con una rapidez constante, el serpentín mantendrá una temperatura constante. De ahí que el sistema permanezca en estado estacionario, sin que se transfiera energía dentro de su frontera. Por consiguiente, $\Delta E_{int} = 0$. Se transfiere energía calorífica del serpentín al agua, así que $Q < 0$. La fuerza gravitacional (externa) efectúa trabajo, de modo que $W > 0$. El sistema funciona como conductor de energía, ya que el trabajo ejecutado por la fuerza gravitacional se suministra al agua en forma de energía calorífica.

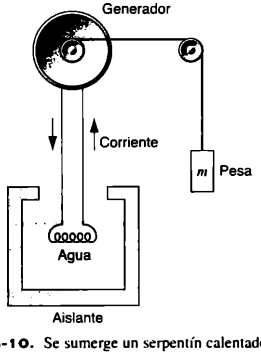


FIGURA 23-10. Se sumerge un serpentín calentador en agua; la corriente eléctrica que pasa por él proviene de un generador (ideal) activado por una pesa que cae. Los valores de Q, W y ΔE_{int} en la ecuación 23-6 dependen esencialmente de las partes del arreglo que definamos como el "sistema".

3. *Sistema = serpentín + pesa + agua.* La fuerza gravitacional realiza trabajo en el sistema y por lo mismo $W > 0$. El aislante en la cubeta impide que se transfiera energía al ambiente, así que $Q = 0$. Entonces, con base en la ecuación 23-6, $\Delta E_{int} > 0$. Una vez más el trabajo realizado por una fuerza externa produce un incremento en la energía interna y, en consecuencia, también en la temperatura del sistema.

4. *Sistema = serpentín + pesa + agua + Tierra.* En este caso la fuerza gravitacional es interna al sistema, de ahí que $W = 0$. Asimismo, $Q = 0$, igual que en la elección anterior del sistema. Así pues, de conformidad con la ecuación 23-6, debemos tener $\Delta E_{int} = 0$. Se produce la energía interna de parte del sistema por el aumento de temperatura en el agua, pero disminuye la energía interna de otra parte, ya que la pesa que cae y la Tierra se acercan una a otra, reduciendo así su energía potencial.

La lección que ofrece el análisis anterior es la necesidad de definir rigurosamente el sistema y conservar la definición a lo largo del análisis.

23-4 CAPACIDAD CALORÍFICA Y CALOR ESPECÍFICO

Podemos cambiar el estado de un cuerpo transfiriendo energía hacia él o desde él en forma de calor o realizando trabajo en el cuerpo. Una propiedad suya susceptible de modificarse es la temperatura T. El cambio de temperatura ΔT, correspondiente a la transferencia de cierta cantidad de energía calorífica Q, dependerá de las circunstancias en que se lleva a cabo la transferencia. Así, en el caso de un gas encerrado en un cilindro con un pistón móvil, puede agregarse calor y mantener fijo el pistón (con lo cual el volumen se mantiene constante), o podemos agregar calor y dejar que el pistón se mueva, pero conservando constante la fuerza en él (manteniendo así el gas bajo una presión constante). Hasta podemos modificar la temperatura efectuando trabajo en el sistema: frotando los dos objetos que ejercen fuerzas de fricción uno sobre otro. En este caso no es necesario que se transfiera calor.

Es útil definir la *capacidad calorífica* C de un cuerpo como la razón de la cantidad de energía calorífica Q transferida al cuerpo en un proceso cualquiera a su cambio de temperatura correspondiente ΔT, esto es,

$$C = \frac{Q}{\Delta T}. \tag{23-7}$$

El término "capacidad" puede resultar engañoso pues equivale a una afirmación sin sentido: "la cantidad de calor que un cuerpo puede tener", cuando lo que en realidad quiere indicar es simplemente la energía por grado de cambio de temperatura que se transfiere como calor cuando cambia la temperatura del cuerpo.

La capacidad calorífica por unidad de masa de un cuerpo, denominada *capacidad de calor específico*, o simplemente *calor específico*, caracteriza al material de que se compone:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\,\Delta T}. \tag{23-8}$$

La capacidad calorífica caracteriza a un cuerpo en particular, en tanto que el calor específico caracteriza a una sustancia. Por una parte, hablamos de la capacidad del recipiente de cobre y, por otra, del calor específico del cobre.

Ni una ni otra propiedad son constantes; ambas dependen de la temperatura (y, posiblemente, también de otras variables como la presión). Las ecuaciones anteriores dan sólo los valores promedios de ellas en el intervalo de temperatura ΔT. En el límite, a medida que $\Delta T \rightarrow 0$, es posible hablar del calor específico en una temperatura determinada T.

Podemos calcular el calor que debe suministrarse a un cuerpo de masa m, cuyo material tiene un calor específico c, para elevar su temperatura partiendo de la temperatura inicial T_i hasta la final T_f, dividiendo el cambio termométrico en N intervalos pequeños ΔT_n, si suponemos que c_n es constante en los intervalos pequeños y si sumamos las contribuciones que a la transferencia total de calor hacen todos los intervalos $n = 1, 2, \ldots N$. Esto nos da

$$Q = \sum_{n=1}^{N} mc_n \, \Delta T_n. \tag{23-9}$$

En el límite diferencial lo anterior se convierte en

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c \, dT, \tag{23-10}$$

donde c puede ser una función de la temperatura. A temperaturas ordinarias y en sus intervalos ordinarios, el calor específico puede considerarse una constante. Por ejemplo, el del agua varía en menos de 1% en el intervalo de 0°C a 100°C. Podemos, pues, escribir la ecuación 23-10 en la forma generalmente más útil

$$Q = mc(T_f - T_i). \tag{23-11}$$

TABLA 23-2 Calores específicos de algunas sustancias[a]

Sustancia	*Calor específico* (J/kg · K)	*Calor específico molar* (J/mol · K)
Sólidos elementales		
Plomo	129	26.7
Tungsteno	135	24.8
Plata	236	25.5
Cobre	387	24.6
Carbono	502	6.02
Aluminio	900	24.3
Otros sólidos		
Bronce	380	
Granito	790	
Vidrio	840	
Hielo (−10°C)	2,220	
Líquidos		
Mercurio	139	
Alcohol etílico	2,430	
Agua de mar	3,900	
Agua	4,190	

[a] Medidas a temperatura ambiente y a presión atmosférica, salvo que se especifique lo contrario.

La ecuación 23-8 no define el calor específico de manera absoluta. Hay que especificar además las condiciones en que el calor Q se agrega al material. Una condición común consiste en lo siguiente: la muestra permanece a una presión atmosférica normal (constante) mientras incorporamos calor, pero hay muchas otras posibilidades que en general conducen a otro valor de c. Para conseguir un valor único de c es preciso señalar las condiciones como calor específico a presión constante c_p, a volumen constante c_v, y así sucesivamente.

La tabla 23-2 contiene los valores de las capacidades de calor específico de varias sustancias comunes, medidas en condiciones de presión constante. Aunque las unidades se expresan en K, también puede trabajarse con temperaturas en °C, puesto que una *diferencia* de temperatura en °C es igual a la misma diferencia de temperatura en K.

PROBLEMA RESUELTO 23-3. Un cubo de cobre con una masa $m_c = 75$ g se coloca en un horno a una temperatura de $T_0 = 312$°C, hasta que alcanza su equilibrio térmico. Después se deja caer rápidamente en una jarra aislada que contiene agua de masa $m_w = 220$ g. La capacidad calorífica de la jarra es $C_b = 190$ J/K. Al inicio el agua y la jarra tienen una temperatura de $T_i = 12.0$°C. ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio T_f del sistema formado por cobre + agua + jarra?

Solución Una vez que el cubo de cobre se deja caer en la jarra, no entra ni sale energía del sistema ni en forma de calor ni de trabajo, así que no cambia su energía interna. Sin embargo, se operan otros cambios en la energía interna de los tres objetos —considerados ahora como subsistemas— que lo integran. La suma de los tres cambios debe dar cero, es decir,

$$\Delta E_{\text{int},c} + \Delta E_{\text{int},w} + \Delta E_{\text{int},b} = 0.$$

Sin embargo, $W = 0$ en los objetos (porque no se realiza trabajo en ninguno de ellos), de modo que según la ecuación 23-6 tendremos

$$Q_c + Q_w + Q_b = 0. \tag{23-12}$$

Conforme a las ecuaciones 23-7 y 23-11, la transferencia de calor en estos subsistemas es

$$\begin{aligned} &\text{Cobre:} \quad Q_c = m_c c_c (T_f - T_0) \\ &\text{Agua:} \quad Q_w = m_w c_w (T_f - T_i) \\ &\text{Jarra:} \quad Q_b = C_b (T_f - T_i) \end{aligned}$$

Nótese que hemos escrito las diferencias de temperatura como la temperatura final menos la inicial, así que Q_w y Q_b son positivos (es decir que se transfiere energía calorífica *a* los subsistemas de agua y jarra, con lo cual se reduce su energía interna) y Q_c es negativo. Al sustituir estas transferencias en la ecuación 23-12 anterior obtenemos

$$m_w c_w (T_f - T_i) + C_b (T_f - T_i) + m_c c_c (T_f - T_0) = 0.$$

Al resolver para T_f y al realizar las sustituciones, obtenemos

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{m_w c_w T_i + C_b T_i + m_c c_c T_0}{m_w c_w + C_b + m_c c_c} \\ &= \frac{(0.220\ \text{kg})(4{,}190\ \text{J/kg}\cdot\text{K})(12°\text{C}) + (190\ \text{J/K})(12°\text{C}) + (0.075\ \text{kg})(387\ \text{J/kg}\cdot\text{K})(312°\text{C})}{(0.220\ \text{kg})(4{,}190\ \text{J/kg}\cdot\text{K}) + 190\ \text{J/K} + (0.075\ \text{kg})(387\ \text{J/kg}\cdot\text{K})} \\ &= 19.6°\text{C}. \end{aligned}$$

Nótese que podemos utilizar °C en esta expresión, puesto que todas las temperaturas forman parte de las *diferencias* termométricas. No obstante, en la generalidad de las expresiones termodinámicas sólo pueden emplearse las temperaturas Kelvin.

A partir de los datos anteriores puede demostrarse que

$$Q_w = 7{,}010\ \text{J}, \quad Q_b = 1{,}440\ \text{J}, \quad \text{y} \quad Q_c = -8{,}450\ \text{J}.$$

La suma algebraica de las tres transferencias anteriores de calor es efectivamente cero, tal como lo exige la ecuación 23-12.

Calores de transformación

Cuando entra calor en un sólido o en un líquido, la temperatura de la muestra no se eleva necesariamente. Más bien, la muestra puede pasar de una *fase* o *estado* (sólido, líquido o gaseoso) a otro. Así, el hielo se derrite y el agua hierve, absorbiendo calor en ambos casos sin que se modifique la temperatura. En los procesos inversos (el agua se congela, el vapor se condensa) la muestra libera calor, una vez más a una temperatura constante.

La cantidad de calor por unidad de masa que debe transferirse para producir un cambio de fase recibe el nombre de *calor de transformación* o de *calor latente* (cuyo símbolo es L) para el proceso. Así pues, el calor total transferido durante un cambio de fase es

$$Q = Lm, \tag{23-13}$$

donde m es la masa de la muestra que cambia la fase. Al calor transferido durante el congelamiento o la fusión se le llama *calor de fusión* (cuyo símbolo es L_f), y *calor de vaporización* (cuyo símbolo es L_v) al que se transfiere durante la vaporización o la condensación. La tabla 23-3 muestra el calor de transformación de algunas sustancias.

Es importante conocer las capacidades caloríficas y el calor de transformación porque permiten medir una transferencia de calor determinando, ya sea en el cambio de temperatura de un material de capacidad calorífica conocida o la cantidad de una sustancia de calor de transformación conocido que cambia de una fase a otra. Por ejemplo, en los sistemas de baja temperatura que contienen helio líquido a 4 K, la rapidez con que el gas helio hierve a partir del líquido nos da una medida de la velocidad con que entra calor en el sistema.

TABLA 23-3 Algunos calores de transformación

Sustancia[a]	*Punto de fusión* (K)	*Calor de fusión* (kJ/kg)	*Punto de ebullición* (K)	*Calor de vaporización* (kJ/kg)
Hidrógeno	14.0	58.6	20.3	452
Oxígeno	54.8	13.8	90.2	213
Mercurio	234	11.3	630	296
Agua	273	333	373	2,256
Plomo	601	24.7	2,013	858
Plata	1,235	105	2,485	2,336
Cobre	1,356	205	2,840	4,730

[a] Las sustancias se enumeran por orden de puntos de fusión crecientes.

Capacidades caloríficas de los sólidos

Recuerde que el *calor específico* de un material (unidad en el SI: J/kg · K) es la capacidad calorífica por unidad de masa. En la tabla 23-2 vemos que los valores de esta magnitud varían mucho de un sólido a otro. Si multiplicamos el calor específico por la masa molar M obtendremos *el calor específico molar* (unidad en el SI: J/mol · K) o capacidad calorífica por mol. En la tabla 23-2 se aprecia que, salvo contadas excepciones (el carbono entre ellas), todos los sólidos tienen valores cercanos a 25 J/mol · K. Esta observación experimental tan interesante la hicieron por primera vez los científicos franceses P. L. Dulong (1785-1838) y A. T. Petit (1791-1820).

Al comparar los calores específicos molares en realidad estamos comparando muestras que contienen la misma cantidad de moles y no las que poseen masa idéntica. Las que tienen el mismo número de moles poseen la misma cantidad de átomos; concluimos que, a reserva de algunas excepciones, la energía calorífica requerida *por átomo* para elevar a cierto nivel la temperatura de un sólido es aproximadamente igual para todos ellos. Ésta es una prueba contundente en favor de la teoría atómica de la materia.

El calor específico molar varía con la temperatura, acercándose a cero a medida que $T \to 0$ y aproximándose al llamado valor Dulong-Petit sólo a temperaturas relativamente altas. La figura 23-11 ilustra la variación del plomo, el aluminio y el carbono. El bajo valor del calor específico molar del carbono, incluido en la tabla 23-2, se debe a que, a temperatura ambiente, esta sustancia todavía no alcanza su valor límite.*

* Los datos graficados en la figura 23-11 son los de calores específicos molares a volumen constante. Resulta prácticamente imposible evitar que un sólido se expanda a medida que aumentamos su temperatura, de ahí que las mediciones directas de dicha capacidad se efectúen en condiciones de presión constante. Los valores a volumen constante incluidos en la figura se obtienen efectuando una pequeña corrección basada en la teoría en los valores medidos a presión constante.

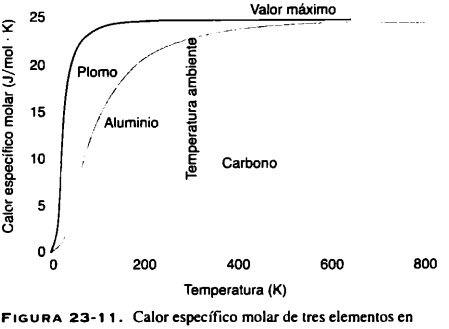


FIGURA 23-11. Calor específico molar de tres elementos en función de la temperatura. A temperaturas elevadas, el calor específico molar de todos los sólidos se aproxima al mismo valor máximo. En el plomo y el aluminio casi se alcanza el valor a temperatura ambiente, no así en el carbono.

En la Sección 23-6 veremos que el límite de temperatura alta de Dulong-Petit para el calor específico molar puede entenderse a partir de la física clásica. No obstante, si queremos conocer la variación termométrica completa de él habrá que hacer un análisis basado en la física cuántica. Einstein comprendió pronto que las mediciones del calor específico molar ofrecen una buena idea de cómo los átomos absorben energía, tema de gran trascendencia. Después de que se propuso la teoría cuántica, el primer problema que abordó fue explicar la variación termométrica del calor específico molar de los sólidos, ofreciendo una solución preliminar pero valiosa en 1906.*

Los datos graficados en la figura 23-11 varían suavemente y caracterizan los materiales cuyo estado no cambia en ese intervalo de temperatura. En otras palabras, no se funden ni pasan de una estructura cristalina a otra. La medición de la capacidad calorífica es útil al estudiar tales cambios. Por ejemplo, la figura 23-12*a* muestra la variación del calor específico molar del tantalio a temperaturas dentro del intervalo 3-5.5 K. Parece probable que algo le ocurra a $T = 4.4$ K, y así es. Por encima de ella, el tantalio conduce electricidad en la misma forma que el cobre y otros conductores bien conocidos. Pero por debajo de ella desaparece por completo su resistencia eléctrica; así, se convierte en un *superconductor*.

Otro ejemplo se da en la figura 23-12*b* que contiene el calor específico del latón en el intervalo 300-600°C. Un análisis con rayos X revela que un cambio de su estructura cristalino se da a 460°C, aproximadamente, de una estructura muy ordenada debajo de ese nivel a una estructura desordenada por arriba de él.

* Los detalles del cálculo efectuado por Einstein se toman de *Modern Physics* de Kenneth S. Krane (Wiley, 1996), Capítulo 10.

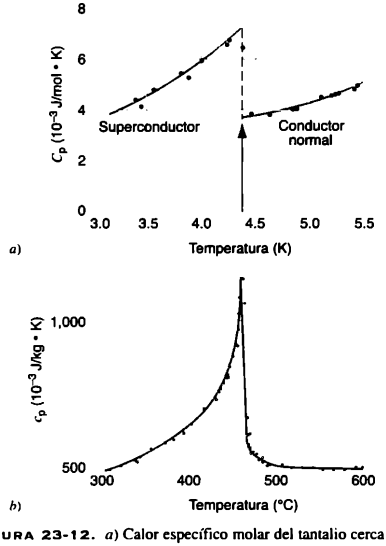


FIGURA 23-12. *a*) Calor específico molar del tantalio cerca de su temperatura de transición de superconducción. *b*) Calor específico del latón.

23-5 TRABAJO REALIZADO EN O POR UN GAS IDEAL

Hasta ahora en este capítulo hemos explorado las transferencias de energía en forma de calor partiendo de la primera ley de la termodinámica. En la presente sección vamos a explorarlas como trabajo y, tal como lo hicimos antes, escogeremos un gas ideal como sistema termodinámico. El aparato estilizado de la figura 21-13 indica cómo puede efectuarse trabajo en un gas ideal o por parte de él en diversas condiciones.

Si elevamos la temperatura del gas dentro del cilindro de la figura 21-13, se expandirá y levantará el pistón contra la gravedad; el gas hace trabajo (positivo) en el pistón. La fuerza hacia arriba que en éste ejerce el gas, debido a su presión p, está dada por pA, donde A es el área del pistón. Conforme a la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida *sobre* el gas *por* el pistón es igual y contraria a la ejercida *por* el gas *sobre* él. Por tanto, utilizando la ecuación 11-14 podemos escribir el trabajo W efectuado en el gas así:

$$W = \int F_x\,dx = \int (-pA)dx. \qquad (23\text{-}14)$$

Aquí dx representa el desplazamiento del pistón, y el signo de menos se incluye porque la fuerza ejercida sobre el gas por el pistón sigue una dirección contraria a su desplazamiento. Si *reducimos* la temperatura del gas, se contraerá en vez de expandirse; el trabajo realizado en él es positivo en este caso. Suponemos que el proceso descrito en la ecuación 23-14 se lleva a cabo lentamente, de modo que podemos suponer que el gas se encuentre en equilibrio térmico en todas las etapas intermedias. De lo contrario, la presión no se definiría con claridad durante el proceso y la integral de esa ecuación no podría ser evaluada fácilmente.

Podemos escribir la ecuación 23-14 en una forma más general que resulta de gran utilidad. Si el pistón se desplaza una distancia dx, el volumen del gas cambiará en $dV = A\,dx$. Así, el trabajo hecho en el gas es

$$W = -\int p\,dV. \qquad (23\text{-}15)$$

La integral se resuelve entre el volumen inicial V_i y el final V_f.

La ecuación 23-15 es el resultado más general en el trabajo efectuado en un gas. No hace referencia al agente externo que lo lleva a cabo; estacionarice simplemente que el trabajo hecho en el gas puede calcularse partiendo de su presión y de su cambio de volumen. Adviértase que el signo

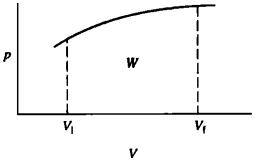


FIGURA 23-13. La magnitud del trabajo W efectuado en un gas por un proceso consistente en modificar arbitrariamente la presión es igual al área bajo la curva de presión en un diagrama pV entre los volúmenes inicial V_i y final V_f.

algebraico del trabajo está contenido implícitamente en esta ecuación: si el gas se expande, dV será positivo, W será negativo y p será una magnitud escalar que tiene sólo valores positivos. Por el contrario, si el gas se comprime, dV será negativo y el trabajo efectuado en el gas será positivo.

La ecuación 23-15 se parece al resultado general del trabajo realizado en un sistema por una fuerza variable F. En la figura 11-12 vimos que si graficamos F en función de x, el trabajo efectuado por F es simplemente la superficie bajo la curva entre x_i y x_f. La figura 23-13 indica la situación similar del trabajo hecho en el gas. Una gráfica como la de esa figura recibe el nombre de *diagrama pV*, con p graficado sobre el eje vertical (como F) y V sobre el eje horizontal (como x). *La magnitud del trabajo efectuado en el gas es igual a la superficie bajo la curva que representa al proceso en un diagrama pV.* El signo de W se determina según $V_f > V_i$ (caso en que W es positivo) como en la figura 23-14 o $V_f < V_i$ en el cual W es negativo. Una vez más, el trabajo efectuado *en* el gas es negativo si el proceso aumenta su volumen y positivo si lo reduce.

Evidentemente, la (fuerza) presión es no conservativa, como se aprecia en la figura 23-14. Supongamos que queremos llevar el gas ideal de las condiciones iniciales V_i y p_i (punto A) y ponerlo en las condiciones finales V_f y p_f (punto D). Podemos tomar muchas trayectorias entre A y D, dos de las cuales se ven en la figura 23-14. A lo largo de la trayectoria 1 (ABD), primero elevamos la presión de p_i a p_f con volumen constante. (Esto podríamos lograrlo girando la manija de control en el depósito térmico y aumentando así la temperatura del gas, mientras agregamos la cantidad exacta de peso al pistón para impedir que se mueva.) Después seguimos la trayectoria BD al aumentar la temperatura, pero sin que agreguemos

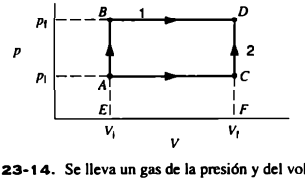


FIGURA 23-14. Se lleva un gas de la presión y del volumen en el punto A a los del punto D por dos trayectorias distintas, ABD y ACD. A lo largo de la trayectoria 1 (ABD) el trabajo es igual a la superficie del rectángulo $BDFE$, mientras que a lo largo de la trayectoria 2 (ACD) es igual a la superficie del rectángulo $ACFE$.

más peso al pistón, de modo que la presión permanece constante en el valor p_f mientras que el volumen crece de V_i a V_f. El trabajo realizado durante el procedimiento es la superficie del rectángulo $BDFE$ (el área debajo de la línea BD).

Podemos calcular W_1, el trabajo efectuado en el gas a lo largo de la trayectoria 1, con sólo considerar el trabajo hecho en los segmentos AB y BD:

$$W_1 = W_{AB} + W_{BD}.$$

Por ser constante el volumen en el segmento AB, de la ecuación 23-15 se concluye que $W_{AB} = 0$. En el segmento BD la presión es constante (en el valor p_f) y se saca de la integral. El resultado es

$$W_1 = W_{AB} + W_{BD}$$
$$= 0 - \int p\,dV = -p_f \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_f(V_f - V_i).$$

Si queremos seguir la trayectoria 2 (ACD), primero se eleva la temperatura manteniendo constante la presión en p_i (es decir, sin agregarle más peso al pistón), de modo que el volumen crece de V_i a V_f. Después aumentamos la temperatura de p_i a p_f con el volumen constante V_f, incrementando la temperatura y agregando peso al pistón para impedir que se mueva. En este caso el trabajo efectuado es la superficie bajo la línea AC el rectángulo $ACFE$. Esto podemos calcularlo así:

$$W_2 = W_{AC} + W_{CD}$$
$$= -\int p\,dV + 0 = -p_i \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_i(V_f - V_i).$$

Desde luego, $W_1 \neq W_2$, y el trabajo depende de la trayectoria.

Podemos efectuar varias operaciones en el gas y evaluar el trabajo hecho en cada caso.

Trabajo hecho a volumen constante

El trabajo es cero en cualquier proceso donde el volumen permanezca constante (como en los segmentos AB y CD de la figura 23-14):

$$W = 0 \quad (V \text{ constante}). \tag{23-16}$$

De la ecuación 23-15 deducimos directamente que $W = 0$ si V es constante. Nótese que no basta que el proceso comience y termine con el mismo volumen; éste ha de ser constante durante todo el proceso para que el trabajo desaparezca. Consideremos, por ejemplo, el proceso $ACDB$ en la figura 23-14. El volumen comienza y termina en V_i, pero el trabajo ciertamente no es cero. Lo es sólo en las trayectorias verticales como AB, que representan un proceso con volumen constante.

Trabajo hecho a presión constante

Aquí se aplica fácilmente la ecuación 23-15 porque p se saca de la integral:

$$W = -p \int dV$$
$$= -p(V_f - V_i) \quad (\text{constante } p). \tag{23-17}$$

Ejemplos de ellos son los segmentos AC y BD en la figura 23-14. Nótese que el trabajo realizado en el gas es negativo en los dos segmentos, porque el volumen aumenta en ellos.

Trabajo hecho a temperatura constante

Si el gas se expande y se contrae a temperatura constante, la relación entre p y V, dada por la ley del gas ideal ($pV = nRT$), es

$$pV = \text{constante}$$

En el diagrama pV, la gráfica de la ecuación pV = constante es exactamente igual a la de la ecuación xy = constante en el sistema coordenado xy; es la hipérbola de la figura 23-15.

Un proceso efectuado a temperatura constante recibe el nombre de *isotérmico* y la curva hiperbólica correspondiente en el diagrama pV se llama *isoterma*. Para determinar el trabajo hecho en un gas durante un proceso isotérmico utilizamos la ecuación 23-15, pero hay que encontrar la manera de resolver la integral cuando p varía. Para hacerlo empleamos la ecuación de estado del gas ideal y escribimos $p = nRT/V$; por tanto,

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} p\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV = -nRT\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V},$$

donde el último paso puede efectuarse porque suponemos que T es constante. Al resolver la integral obtenemos

$$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \qquad (\text{constante } T). \qquad (23\text{-}18)$$

Nótese que también es negativo siempre que $V_f > V_i$ ($\ln x$ es positivo con $x > 1$) y positiva siempre que $V_f < V_i$.

Trabajo hecho en aislamiento térmico

Separemos el cilindro de gas en la figura 21-13 del contacto con el depósito térmico y coloquémoslo en una losa de material aislante. Entonces el gas estará en total aislamiento de su ambiente; si realizamos trabajo en él, su temperatura cambiará en contraste con su comportamiento cuando estaba en contacto con el depósito. Se da el nombre de proceso *adiabático* al proceso que se lleva a cabo en aislamiento térmico.

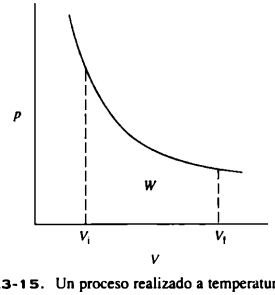


FIGURA 23-15. Un proceso realizado a temperatura constante (proceso isotérmico) se representa por medio de una hipérbola en un diagrama pV. El trabajo efectuado al cambiar el volumen es igual al área bajo la curva entre V_i y V_f.

Si dejamos que el gas cambie de volumen sin ninguna otra restricción, decimos —y esto lo demostraremos en la Sección 23-8— que su trayectoria se representa en un diagrama pV por medio de la curva parabólica

$$pV^\gamma = \text{constante} \qquad (23\text{-}19)$$

como se muestra en la figura 23-16. El parámetro adimensional γ, denominado *razón de calores específicos*, ha de determinarse experimentalmente para cualquier gas. Sus valores son típicos en el intervalo 1.1-1.8. Como γ es más grande que 1, la curva $pV\gamma$ = constante es un poco más pronunciada que la curva pV = constante en cualquier punto donde se intersecten. Como ilustra la figura 23-16, ello significa que el trabajo hecho por el gas al expandirse adiabáticamente de V_i a V_f es ligeramente menor que el hecho al expandirse isotérmicamente entre ambos volúmenes.

Podemos encontrar la "constante" en la ecuación 23-19 si conocemos γ, lo mismo que la presión y el volumen en un punto determinado de la curva. Si escogemos el punto inicial p_i, V_i en la figura 23-16, la "constante" tiene el valor $p_iV_i^\gamma$ y podemos escribir la ecuación como

$$pV^\gamma = p_iV_i^\gamma$$

o como

$$p = \frac{p_iV_i^\gamma}{V^\gamma}. \qquad (23\text{-}20)$$

Ahora podemos calcular el trabajo adiabático:

$$\begin{aligned} W &= -\int_{V_i}^{V_f} p\,dV \\ &= -\int_{V_i}^{V_f} \frac{p_iV_i^\gamma}{V^\gamma}\,dV = -p_iV_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= -\frac{p_iV_i^\gamma}{\gamma - 1}(V_i^{1-\gamma} - V_f^{1-\gamma}). \end{aligned}$$

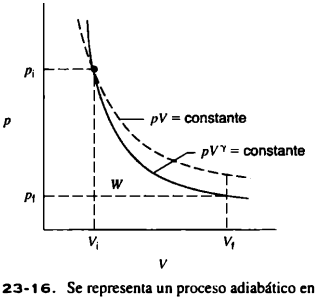


FIGURA 23-16. Se representa un proceso adiabático en un diagrama pV por medio de la curva parecida a una hipérbola pV^γ = constante. El trabajo efectuado al cambiar el volumen es igual al área bajo la curva entre V_i y V_f. Puesto que $\gamma >$, la curva adiabática presenta una pendiente negativa más pronunciada que la curva pV = constante.

Al introducir el factor de $V_i^{\gamma-1}$ dentro del paréntesis, podemos escribir el trabajo adiabático en la forma

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} - 1\right]. \qquad (23\text{-}21)$$

Si el gas se expande, $V_i/V_f < 1$ y el trabajo es otra vez negativo porque cuando un número menor que 1 es elevado a una potencia positiva cualquiera, el trabajo sigue siendo menor que 1. Al utilizar de nuevo $p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma}$, podemos escribir el trabajo adiabático en la forma equivalente

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_f V_f - p_i V_i) \quad \text{(adiabático)} \qquad (23\text{-}22)$$

PROBLEMA RESUELTO 23-4. Una muestra de gas de 0.11 mol se comprime de un volumen de 4.0 m³ a 1.0 m³, mientras su presión aumenta de 10 a 40 Pa. Compare el trabajo efectuado a lo largo de las tres trayectorias de la figura 23-17.

Solución La trayectoria 1 consta de dos procesos, una a presión constante seguido por otra con volumen constante. El trabajo realizado a presión constante se obtiene de la ecuación 23-17:

$$W = -p(V_f - V_i) = -(10\ \text{Pa})(1.0\ \text{m}^3 - 4.0\ \text{m}^3) = 30\ \text{J}.$$

El trabajo efectuado a volumen constante es cero (Ec. 23-16), por lo cual el trabajo total en la trayectoria 1 es

$$W_1 = 30\ \text{J} + 0 = 30\ \text{J}.$$

La trayectoria 2 representa un proceso isotérmico, en el cual T = constante. En consecuencia, $p_i V_i = p_f V_f = nRT$. El trabajo realizado durante el proceso isotérmico puede calcularse a partir de la ecuación 23-18, sustituyendo nRT por $p_i V_i$, lo cual nos da

$$W_2 = -p_i V_i \ln\frac{V_f}{V_i} = -(10\ \text{Pa})(4.0\ \text{m}^3)\ln\frac{1.0\ \text{m}^3}{4.0\ \text{m}^3} = 55\ \text{J}.$$

La trayectoria 3 es un proceso con volumen constante, en que el trabajo es cero nuevamente, seguida por otro con presión constante; así que el trabajo total en ella es

$$W_3 = 0 - p_f(V_f - V_i) = -(40\ \text{Pa})(1.0\ \text{m}^3 - 4.0\ \text{m}^3) = 120\ \text{J}.$$

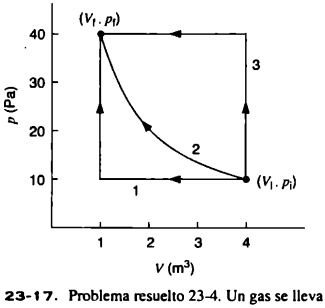


FIGURA 23-17. Problema resuelto 23-4. Un gas se lleva del punto inicial i al punto final f a lo largo de tres trayectorias. La trayectoria 2 es una isoterma.

Nótese que el trabajo es positivo en los tres procesos y que la magnitud aumenta según la superficie bajo cada trayectoria en el diagrama pV.

PROBLEMA RESUELTO 23-5. *a*) Calcule el módulo volumétrico B en un proceso adiabático de un gas ideal. *b*) Use el módulo volumétrico adiabático para calcular la velocidad del sonido en el gas como función de la temperatura. Evalúe para el aire a T = 20°C.

Solución *a*) En el límite diferencial, el módulo volumétrico (Ec. 15-5) puede escribirse

$$B = -V\frac{dp}{dV}.$$

En un proceso adiabático, ecuación 23-19 (pV^{γ} = constante) si tomamos la derivada respecto a V, la da

$$\frac{d(pV^{\gamma})}{dV} = \left(\frac{dp}{dV}\right)V^{\gamma} + p(\gamma V^{\gamma-1}) = 0,$$

o bien

$$V\frac{dp}{dV} = -\gamma p.$$

Por tanto,

$$B = \gamma p$$

en un proceso adiabático para un gas ideal.

b) En la sección 19-3 dijimos que la velocidad del sonido en un gas puede escribirse

$$v = \sqrt{B/\rho},$$

donde B es el módulo volumétrico y ρ es la densidad del gas. Usando el resultado de la parte *a*) y la ecuación de estado del gas ideal ($pV = nRT$), se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma(nRT/V)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{\rho V}}.$$

La cantidad ρV es la masa total del gas, que también puede escribirse nM, donde n es el número de moles y M la masa molar. Al efectuar esta sustitución se tiene

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

Así pues, la velocidad del sonido en un gas depende de la raíz cuadrada de la temperatura. En el aire, la masa molar promedio es de unos 0.0290 kg/mol, y el parámetro γ mide cerca de 1.4. Por tanto, con T = 20°C = 293 K,

$$v = \sqrt{\frac{(1.4)(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(293\ \text{K})}{0.0290\ \text{kg/mol}}} = 343\ \text{m/s}.$$

23-6 ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

En la sección 22-4 vimos que la energía cinética traslacional promedio por molécula de un gas ideal monoatómico es

$$K_{\text{trans}} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad (23\text{-}23)$$

En el gas éste es el almacenamiento total de su energía interna, porque la energía interna no puede adoptar otra forma. Sus

moléculas carecen de energía potencial; no puede vibrar y su rotación tampoco se asocia a la energía.

Así pues, la energía total de n moles de un gas ideal monoatómico es el número de moléculas ($= nN_A$) multiplicado por la energía promedio por molécula:

$$E_{int} = (nN_A)(K_{trans}) = (nN_A)(\tfrac{3}{2}kT)$$

o bien

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT. \qquad (23\text{-}24)$$

Aquí (Ec. 21-17) hemos reemplazado $N_A k$ por su equivalente, la constante molar del gas R.

La ecuación 23-24 muestra que, si modificamos la energía interna del gas —realizando trabajo en él o transfiriéndole calor—, su temperatura cambiará y, por tanto,

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2}nR\,\Delta T. \qquad (23\text{-}25)$$

Consideramos en seguida no la molécula monoatómica o puntual en que nos hemos concentrado, sino una compuesta por dos partículas puntuales separadas por cierta distancia. Este modelo ofrece una mejor descripción de los gases diatómicos, como O_2, N_2, o CO (monóxido de carbono). La molécula puede adquirir energía cinética girando alrededor de su centro de masa, y hay que tener en cuenta las aportaciones que hacen a la energía interna del gas los movimientos rotacionales de sus moléculas, así como sus movimientos de traslación.

La energía cinética rotacional de una molécula diatómica, representada gráficamente en la figura 23-18, puede escribirse

$$K_{rotacional} = \tfrac{1}{2}I_x\,\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\,\omega_y^2,$$

donde I es la inercia rotacional de la molécula cuando gira alrededor de un eje particular. En las masas puntuales, la rotación alrededor del eje z no se acompaña de energía cinética porque $I_z = 0$. La energía cinética total de una molécula diatómica es la suma de sus términos traslacional y rotacional, esto es

$$K = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}I_x\,\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\,\omega_y^2. \qquad (23\text{-}26)$$

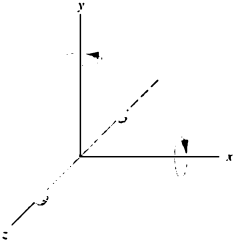


FIGURA 23-18. Una molécula diatómica, formada por dos átomos que se consideran partículas puntuales, se muestra junto con su eje sobre el eje z de un sistema coordenado. En esta orientación, la inercia de las rotaciones alrededor del eje z es cero y, por tanto, no hay un término en la energía cinética correspondiente a dicha rotación. La inercia rotacional de las rotaciones alrededor de los ejes x y y no son cero, por lo cual hay términos de energía cinética en ellas.

Para determinar la energía interna total del gas hay que calcular la energía promedio de una molécula y luego multiplicar el resultado por el número de ellas.

Los cinco términos de la ecuación 23-26 representan formas independientes en que una molécula puede absorber energía y reciben el nombre de *grados de libertad*. Un gas monoatómico tiene tres grados de libertad, pues tan sólo posee energía cinética traslacional ($K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$).

Como se aprecia en la ecuación 23-26, una molécula diatómica tiene cinco grados de libertad, tres grados traslacionales y dos rotacionales. Si aumentamos la energía interna de este gas en ΔE_{int}, es evidente que los tres grados traslacionales absorberán la misma cantidad de energía (porque todas las direcciones son equivalentes en él). De modo parecido, los dos grados rotacionales absorberán la misma cantidad de energía, pero al parecer no hay razón para que las cantidades sean iguales.

No obstante, James Clerk Maxwell desarrolló un teorema llamado *teorema de equipartición de la energía*, según el cual la energía de una molécula en promedio es compartida por igual entre *todas* las formas independientes en que puede absorber energía. En concreto,

> *Cuando el número de moléculas es grande, la energía promedio por molécula es $\frac{1}{2}kT$ para cada grado independiente de libertad.*

Ya hemos encontrado una equipartición de energía al estudiar el oscilador armónico simple unidimensional. En este caso la energía puede almacenarse en forma cinética o potencial y, como se aprecia en la figura 17-8, el promedio de la energía disponible lo comparten por igual ambas formas.

Usemos ahora el teorema de equipartición de la energía y escribamos con él una expresión de la energía interna de un gas ideal monoatómico. La energía promedio por molécula es $\frac{3}{2}kT$ (tres grados de libertad $\times\ \frac{1}{2}kT$ por cada uno). La energía total de N moléculas es

$$E_{int} = N(\tfrac{3}{2}kT) = \tfrac{3}{2}nRT \quad \text{(gas monoatómico)}. \qquad (23\text{-}27)$$

La ecuación 23-27 es idéntica a la 23-24. En un gas diatómico con cinco grados de libertad el resultado es

$$E_{int} = N(\tfrac{5}{2}kT) = \tfrac{5}{2}nRT \quad \text{(gas diatómico)}. \qquad (23\text{-}28)$$

Un gas poliatómico (más de dos átomos por molécula) generalmente tiene tres ejes posibles de rotación (salvo que los tres átomos se encuentren en una línea recta, como sucede con CO_2). La energía cinética de una molécula tendrá entonces un sexto término, $\frac{1}{2}I_z\omega_z^2$. Con seis grados de libertad la energía interna es

$$E_{int} = N(\tfrac{6}{2}kT) = 3nRT \quad \text{(gas poliatómico)} \qquad (23\text{-}29)$$

Las ecuaciones 23-27, 23-28 y 23-29 muestran un hecho intrínseco del teorema de equipartición de la energía, sin importar la naturaleza de sus moléculas,

La energía interna de un gas ideal depende exclusivamente de su temperatura.

No depende de su presión ni de su volumen.

Hasta ahora hemos examinado sólo las contribuciones de la energía cinética traslacional o rotacional a la energía interna de un gas. También contribuyen otros tipos de energía. Por ejemplo, una molécula diatómica que vibra libremente (imagine dos átomos puntuales conectados por un resorte) realiza dos contribuciones más: la energía potencial del resorte y la energía cinética de los átomos oscilantes. Así, una molécula diatómica que puede trasladarse, girar y vibrar debería tener 7(= 3 + 2 + 2) grados de libertad. En las moléculas poliatómicas puede haber más de dos términos vibracionales. Los modos vibracionales en la energía interna suelen ser manifiestos sólo a altas temperaturas del gas, en las cuales colisiones más violentas pueden hacer vibrar las moléculas.

Calores específicos molares de los sólidos

El teorema de equipartición de la energía también puede aplicarse a los calores específicos molares de los sólidos, tema que se estudió en la Sección 23-4. Como se advierte en la figura 21-9, un átomo en un sólido está fijo en una red (o la tiz) cristalina. Alrededor de su posición de equilibrio oscila hacia atrás y adelante en tres direcciones independientes, desplegando así tres grados de libertad asociados a su energía cinética. También posee energía potencial, relacionada con las fuerzas entre él y los átomos vecinos, una vez más en tres direcciones independientes. Se originan así tres grados más de libertad para un total de seis. Entonces la energía promedio por átomo es $6 \times \frac{1}{2}kT = 3kT$. En una muestra con N átomos, la energía interna total será entonces

$$E_{int} = N(3kT) = 3nN_A kT = 3nRT,$$

donde n es el número de moles.

Suponga que se agrega energía Q en forma de calor a la muestra sólida, elevándose así su temperatura en ΔT. Como no se realiza trabajo en el proceso ($W = 0$), la primera ley de la termodinámica ($Q + W = \Delta E_{int}$) nos dice que

$$Q = \Delta E_{int} = 3nR\,\Delta T.$$

Entonces el calor específico molar es

$$C = \frac{Q}{n\,\Delta T} = \frac{3nR\,\Delta T}{n\,\Delta T} = 3R$$
$$= (3)(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K}) \approx 25\ \text{J/mol}\cdot\text{K}.$$

Como se ve en la figura 23-11, esto es simplemente el límite de la temperatura alta observado en forma experimental para los calores específicos molares de los sólidos. Nótese lo siguiente: con el teorema (clásico) de equipartición de la energía se obtiene el valor correcto del calor específico molar en el límite de temperaturas suficientemente altas, pero fracasa con temperaturas más bajas. En esta región sólo un tratamiento basado en la física cuántica logra coincidir con los experimentos.

23-7 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE UN GAS IDEAL

Hemos empleado el teorema de equipartición de la energía para calcular el calor específico molar de un sólido. En seguida nos serviremos de él para calcular el de un gas ideal. El calor específico molar medido de una sustancia depende de la manera en que se le agrega el calor. Por ejemplo, en el caso de un gas, ¿se mantiene constante el volumen durante el proceso? ¿Se mantiene constante la presión? Vamos a explorar ambas posibilidades.

Calor específico molar a volumen constante

Introduzcamos n moles de un gas dentro de un cilindro equipado con un pistón. Fijemos la posición de este último de modo que no se produzca cambio del volumen y, por tanto, tampoco se efectúe trabajo; después agreguemos una cantidad de energía Q en forma de calor. Conforme a la primera ley de la termodinámica (ecuación 23-6), como W = 0, tenemos

$$Q = \Delta E_{int}. \qquad (23\text{-}30)$$

Con C_V representamos el calor específico molar a volumen constante, así que

$$C_V = \frac{Q}{n\,\Delta T} = \frac{\Delta E_{int}}{n\,\Delta T}. \qquad (23\text{-}31)$$

Con base en la ecuación 23-27, en un gas ideal monoatómico $\Delta E_{int} = \frac{3}{2}nR$ y, por tanto,

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12.5\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas monoatómico)} \qquad (23\text{-}32)$$

Si repetimos este desarrollo usando las ecuaciones 23-28 y 23-29 con gases diatómicos y poliatómicos, obtenemos

$$C_V = \tfrac{5}{2}R = 20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas diatómico)} \qquad (23\text{-}33)$$

$$C_V = 3R = 24.9\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas poliatómico)} \qquad (23\text{-}34)$$

Calor específico molar a presión constante

La figura 23-19 contiene dos isotermas de un gas ideal cuya temperatura difiere en ΔT. La trayectoria AB es el proceso de volumen constante antes examinado. La trayectoria AC es un

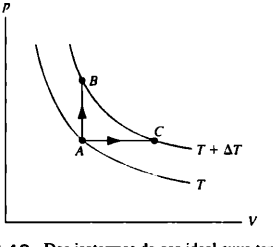


FIGURA 23-19. Dos isotermas de gas ideal cuya temperatura difiere en ΔT están conectadas mediante el proceso a volumen constante AB y el proceso a presión constante AC.

proceso con presión constante que conecta las dos isotermas. En la Sección 23-6 señalamos que *la energía interna de un gas ideal depende exclusivamente de la temperatura.* En todas las trayectorias que conectan a las dos isotermas en la figura 23-19, el cambio de energía interna posee el mismo valor, porque todas las trayectorias corresponden al mismo cambio de temperatura. En particular, el de energía interna es igual en las trayectorias AB y AC.

$$\Delta E_{\text{int},AB} = \Delta E_{\text{int},AC}. \tag{23-35}$$

Se hacen dos contribuciones al cambio de energía interna a lo largo de la trayectoria AC: el calor Q transferido al gas y el trabajo W realizado en el gas:

$$\Delta E_{\text{int},AC} = Q + W. \tag{23-36}$$

Nótense las convenciones de signos que están implícitas en la ecuación 23-36. Se supone que el calor transferido *del* ambiente es positivo y que tiende a incrementar la energía interna. Si disminuye el volumen, el trabajo hecho en el gas por el ambiente es positivo y tiende a aumentar la energía interna. Si el volumen crece ($W < 0$), consideramos que el gas efectúa trabajo en el ambiente y que tiende a disminuir su suministro de energía interna.

El calor transferido en un proceso a presión constante puede escribirse

$$Q = nC_p\,\Delta T, \tag{23-37}$$

donde C_p es *el calor específico molar a presión constante.* La ecuación 23-15 indica el trabajo en la trayectoria AC como $W = -p\Delta V$, que usando la ley del gas ideal puede escribirse así para este proceso con presión constante:

$$W = -p\,\Delta V = -nR\,\Delta T. \tag{23-38}$$

Al utilizar la ecuación 23-31 para conseguir el cambio de energía interna en la trayectoria AB, podemos sustituir en la ecuación 23-36 y encontrar

$$nC_V\,\Delta T = nC_p\,\Delta T - nR\,\Delta T$$

o bien

$$C_p = C_V + R. \tag{23-39}$$

A partir de las ecuaciones 23-32 a 23-34 calculamos después los calores específicos molares con una presión constante:

$$C_p = \tfrac{5}{2}R = 20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas monoatómico)}, \tag{23-40}$$

$$C_p = \tfrac{7}{2}R = 29.1\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas diatómico)}, \tag{23-41}$$

$$C_p = 4R = 33.3\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gas poliatómico)}. \tag{23-42}$$

Otro parámetro de interés, que puede medirse en forma directa independientemente de los valores de C_p y C_v, es la *razón de los calores específicos molares* γ, definidos como

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}. \tag{23-43}$$

El calor específico se relaciona con el calor específico molar mediante $c = C/M$, donde M es la masa molar de la sustancia; por ello podemos expresar γ como C_p/C_v. Por tal razón a γ se le conoce a menudo como *razón de calores específicos.* Ya antes utilizamos γ. En la expresión referente a la velocidad del sonido en un gas (problema resuelto 23-5) y en la relación entre presión y volumen en un proceso adiabático (Ec. 23-19).

TABLA 23-4 Calores específicos molares de los gases

Gas	C_p (J/mol · K)	C_v (J/mol · K)	$C_p - C_v$ (J/mol · K)	γ
Monoatómico				
Ideal	20.8	12.5	8.3	1.67
He	20.8	12.5	8.3	1.66
Ar	20.8	12.5	8.3	1.67
Diatómico				
Ideal	29.1	20.8	8.3	1.40
H_2	28.8	20.4	8.4	1.41
N_2	29.1	20.8	8.3	1.40
O_2	29.4	21.1	8.3	1.40
Poliatómico				
Ideal	33.3	24.9	8.3	1.33
CO_2	37.0	28.5	8.5	1.30
NH_3	36.8	27.8	9.0	1.31

Al utilizar las ecuaciones 23-40 a 23-42 con C_p y las ecuaciones 23-32 a 23-34 para C_v, obtenemos

$$\gamma = \tfrac{5}{3} = 1.67 \quad \text{(gas monoatómico)}, \tag{23-44}$$

$$\gamma = \tfrac{7}{5} = 1.40 \quad \text{(gas diatómico)}, \tag{23-45}$$

$$\gamma = \tfrac{4}{3} = 1.33 \quad \text{(gas poliatómico)}. \tag{23-46}$$

La tabla 23-4 ofrece una comparación de valores observados con las predicciones del modelo del gas ideal. La coincidencia es excelente.

PROBLEMA RESUELTO 23-6. Una familia entra en una cabaña de vacaciones invernales que lleva largo tiempo sin calefacción, cuya temperatura interna es igual a la del exterior (0°C). Consta de un solo cuarto en una superficie de piso de 6 por 4 m, con 3 m de altura. En el cuarto hay un calentador eléctrico de 2 kW. Suponiendo que sea perfectamente hermético y que el calor proveniente del calentador sea absorbido por los muebles, ¿cuánto tiempo después de encenderlo alcanzará la temperatura del aire el nivel de 21°C (70°F)?

Solución Supongamos que el aire en el cuarto (compuesto principalmente por nitrógeno y oxígeno) se comporta como un gas diatómico idea, de modo que (según la tabla 23-4) $C_v = 20.8$ J/mol · K. El volumen del cuarto es

$$V = (6\ \text{m})(4\ \text{m})(3\ \text{m}) = 72\ \text{m}^3 = 72{,}000\ \text{L}.$$

Dado que 1 mol de un gas ideal ocupa 22.4 l a 0°C y a 1 atm, el número de moles es

$$n = (72{,}000\ \text{L})/(22.4\ \text{L/mol}) = 3.2 \times 10^3\ \text{mol}.$$

Si el cuarto es hermético (véase la siguiente explicación), podemos pensar que la absorción del calor tiene lugar a volumen constante, situación en que

$$Q = nC_V\,\Delta T = (3.2 \times 10^3\ \text{mol})(20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(21\ \text{K}) = 1.4 \times 10^6\ \text{J}.$$

El calentador genera una potencia P de 2 kW y puede producirlo en un tiempo de

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{1.4 \times 10^6 \text{ J}}{2 \times 10^3 \text{ W}} = 700 \text{ s},$$

o cerca de 12 min.

Este problema contiene algunas suposiciones muy poco físicas respecto a la absorción del calor en el cuarto. Intente estimar la capacidad calorífica de algunos muebles para comprobar si fue razonable prescindir del efecto que tienen en la absorción (y por lo mismo en el tiempo necesario para lograr que la temperatura del cuarto alcance el nivel adecuado). La pérdida de calor a través de las paredes, situación que se examinó en la sección 23-2, también influirá considerablemente en este problema.

¿Es razonable la suposición de que el cuarto esté herméticamente cerrado? Si el aire en la cabaña tuviera una presión inicial de 1 atm cuando la temperatura era de 0°C, ¿cuál sería la presión interior con 21°C? ¿Cuál sería la fuerza resultante hacia afuera en el techo y en las paredes? Una suposición más razonable sería que el cuarto no es tan hermético, sino que al elevarse la temperatura escapará un poco de aire y, por tanto, mantendrá constante la presión. En el problema 16 se incluye un cálculo basado en esta suposición.

PROBLEMA RESUELTO 23-7. Considere una vez más la situación del problema 23-4,donde 0.11 mol de un gas ideal comienza en el punto inicial con un volumen de $V_i = 4.0 \text{ m}^3$ y la presión es $p_i = 10$ Pa. Supongamos que se saca el cilindro del depósito térmico y se comprime el gas adiabáticamente hasta que su volumen sea $V_f = 1.0 \text{ m}^3$. Determinemos el cambio de su energía interna, suponiendo que se trata de helio (gas monoatómico con $\gamma = 1.66$).

Solución Para encontrar el cambio de energía interna, podemos utilizar la ecuación 23-27 si conocemos el cambio de temperatura. Calculamos la temperatura inicial aplicando la ley del gas ideal (ya que se conocen p_i y V_i); podemos calcular la temperatura final si conocemos la presión y el volumen del punto final. La presión final se obtiene por medio de la relación adiabática, la ecuación 23-19:

$$p_f = \frac{p_i V_i^\gamma}{V_f^\gamma} = \frac{(10 \text{ Pa})(4.0 \text{ m}^3)^{1.66}}{(1.0 \text{ m}^3)^{1.66}} = 100 \text{ Pa}.$$

En el diagrama de pV de la figura 23-17, el punto final alcanzado en el proceso adiabático se encuentra verticalmente muy por encima del punto final alcanzado en el proceso isotérmico (40 Pa). Esto concuerda con el hecho de que sean más pronunciadas las adiabáticas que las isotérmicas, como se aprecia en la figura 23-16.

Ahora podemos proceder a encontrar las temperaturas inicial y final, y luego el cambio de energía interna:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{(10 \text{ Pa})(4.0 \text{ m}^3)}{(0.11 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})} = 44 \text{ K}.$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{(100 \text{ Pa})(1.0 \text{ m}^3)}{(0.11 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})} = 109 \text{ K}.$$

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2} nR\Delta T$$
$$= \tfrac{3}{2}(0.11 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(109 \text{ K} - 44 \text{ K}) = 89 \text{ J}.$$

El cambio de energía interna es positivo. Ello es consistente con la primera ley de la termodinámica ($Q + W = \Delta E_{int}$) porque $Q = 0$ en este proceso adiabático y el trabajo realizado al comprimir el gas es positivo.

23-8 APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Ahora que ya examinamos muchas de las propiedades del gas ideal, entre ellas su energía interna (Sección 23-6) y sus capacidades caloríficas (Sección 23-7), estamos en condiciones de estudiar los procesos por los que pasa un sistema constituido por él.

Procesos adiabáticos

En un proceso adiabático el sistema está tan bien aislado que no entra ni sale calor, y entonces $Q = 0$. En este caso la primera ley se expresa así:

$$\Delta E_{int} = W \quad \text{(proceso adiabático)} \qquad (23\text{-}47)$$

En seguida desarrollamos la relación entre p y V en un proceso adiabático realizado en un gas ideal, que utilizamos en la sección 23-5. Suponemos que el proceso se lleva a cabo con lentitud, así que la presión siempre está bien definida. Tratándose de un gas ideal, podemos escribir la ecuación 23-31 como

$$dE_{int} = nC_V\, dT.$$

Por tanto,

$$p\, dV = -dW = -dE_{int} = -nC_V\, dT. \qquad (23\text{-}48)$$

La ecuación de estado del gas puede escribirse en forma diferencial así

$$d(pV) = d(nRT)$$
$$p\, dV + V\, dp = nR\, dT. \qquad (23\text{-}49)$$

Sin embargo, $p\, dV$ es simplemente $-dW$, que es igual a $-dE_{int}$ (puesto que la ecuación 23-47 puede escribirse en forma diferencial $dE_{int} = dW$). Al resolver la ecuación 23-49 para $V\, dp$ y al sustituir la ecuación 23-48, tenemos

$$V\, dp = nC_V\, dT + nR\, dT = nC_p\, dT, \qquad (23\text{-}50)$$

donde el último resultado se obtuvo empleando la ecuación 23-39 $C_p = C_v + R$. Ahora tomamos la razón entre las ecuaciones 23-50 y 23-48, obteniendo así

$$\frac{V\, dp}{p\, dV} = \frac{nC_p\, dT}{-nC_V\, dT} = -\frac{C_p}{C_V} = -\gamma,$$

utilizando la ecuación 23-43 en la razón de los calores específicos molares γ. Reescribimos y encontramos

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V},$$

que podemos integrar entre el estado inicial i y el estado final f

$$\int_{p_i}^{p_f} \frac{dp}{p} = -\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$$

$$\ln \frac{p_f}{p_i} = -\gamma \ln \frac{V_f}{V_i},$$

que puede escribirse

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma. \qquad (23\text{-}51)$$

Dado que i y f son puntos arbitrarios, podemos escribir esta ecuación en la siguiente forma:

$$pV^{\gamma} = \text{constante}. \qquad (23\text{-}52)$$

Las ecuaciones 23-51 y 23-52 ofrecen la relación entre la presión y el volumen de un gas ideal sometido a un proceso adiabático. Con los valores de esas dos variables en el punto inicial, el proceso adiabático llegara a los puntos finales cuya presión y volumen se calculan partiendo de la ecuación 23-51. En forma equivalente, la ecuación 23-52 define una familia de curvas en un diagrama de pV. Todo proceso adiabático puede representarse por un segmento de una de ellas (Fig. 23-20).

Estos resultados pueden reescribirse en función de la temperatura empleando la ecuación de estado del gas ideal:

$$\begin{aligned}(pV)V^{\gamma-1} &= \text{constante}\\ TV^{\gamma-1} &= \text{constante}\end{aligned} \qquad (23\text{-}53)$$

Las constantes en la ecuación 23-53 no son la misma que la de la ecuación 23-52. En forma equivalente, la ecuación 23-53 puede escribirse así:

$$\begin{aligned}T_iV_i^{\gamma-1} &= T_fV_f^{\gamma-1}\\ T_f &= T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1}\end{aligned} \qquad (23\text{-}54)$$

Supóngase que comprimimos un gas en un proceso adiabático. Entonces $V_i > V_f$, y la ecuación 23-54 requiere que $T_f > T_i$. La temperatura del gas se eleva al ser comprimido, como observamos frecuentemente cuando se calienta una bomba de bicicleta. Por el contrario, la temperatura disminuye cuando el gas se expande, propiedad que a menudo se aprovecha para obtener temperaturas bajas en el laboratorio (Fig. 23-20).

Las ondas sonoras en el aire pueden representarse como procesos adiabáticos. A frecuencias audibles el aire es un mal conductor del calor. Se eleva la temperatura en las zonas de compresión de ellas, pero debido a la deficiente conducción no se da mucha transferencia de calor hacia las rarefacciones vecinas más frías; el proceso es, pues, adiabático. La compresión y la expansión del vapor en un motor o los gases calientes en los cilindros de un motor de combustión interna son esencialmente adiabáticas, porque no hay suficiente tiempo para transferir calor.

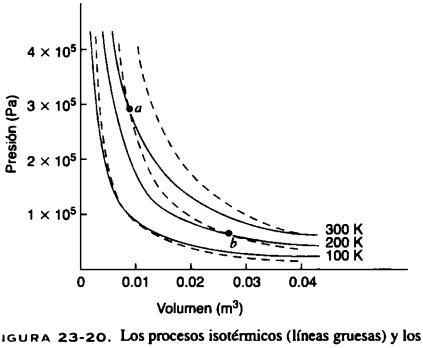


FIGURA 23-20. Los procesos isotérmicos (líneas gruesas) y los adiabáticos (líneas punteadas) realizados en 1 mol de gas diatómico ideal. Nótese que un *aumento* adiabático de volumen (por ejemplo, el segmento *ab*) se acompaña siempre de una *reducción* de la temperatura.

Procesos isotérmicos

En un proceso isotérmico, la temperatura permanece constante. Si el sistema es un gas ideal, la energía interna también deberá permanecer constante. Con $\Delta E_{int} = 0$, la primera ley de la termodinámica nos da

$$Q + W = 0 \quad \text{(proceso isotérmico, gas ideal)} \qquad (23\text{-}55)$$

Si en el gas se realiza una cantidad de trabajo (positivo) W, el gas liberará hacia el ambiente una cantidad equivalente de calor $Q = -W$. Nada del trabajo efectuado se queda en el gas como energía interna almacenada.

En la figura 23-20 se comparan los procesos isotérmicos y adiabáticos en un 1 mol de un gas ideal monoatómico.

Procesos a volumen constante

Si el volumen de un gas permanece constante, no se podría hacer trabajo alguno. En consecuencia, $W = 0$, y la primera ley de la termodinámica nos da

$$\Delta E_{int} = Q \quad \text{(proceso a volumen constante)} \qquad (23\text{-}56)$$

En este caso todo el calor que entra en el gas ($Q > 0$) se guarda en forma de energía interna ($\Delta E_{int} > 0$).

Procesos cíclicos

En un proceso cíclico llevamos a cabo una secuencia de operaciones que con el tiempo devuelven el sistema a su estado inicial, por ejemplo, el proceso de tres pasos de la figura 23-21. Como comienza y finaliza en el punto A, el cambio de energía interna del ciclo es cero. Así pues, de acuerdo con la primera ley,

$$Q + W = 0 \quad \text{(proceso cíclico)} \qquad (23\text{-}57)$$

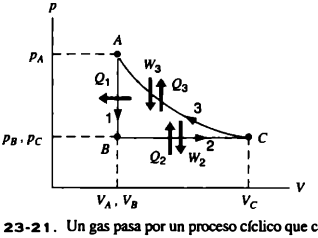


FIGURA 23-21. Un gas pasa por un proceso cíclico que comienza en el punto A y que incluye 1. un proceso con volumen constante AB, 2. un proceso con presión constante BC y 3. un proceso isotérmico CA.

TABLA 23-5 Aplicaciones de la primera ley

Proceso	*Restricción*	*Primera ley*	*Otros resultados*
Todos	Ninguna	$\Delta E_{int} = Q + W$	$\Delta E_{int} = nC_V\,\Delta T$, $W = -\int p\,dV$
Adiabático	$Q = 0$	$\Delta E_{int} = W$	$W = (p_f V_f - p_i V_i)/(\gamma - 1)$
Volumen constante	$W = 0$	$\Delta E_{int} = Q$	$Q = nC_V\,\Delta T$
Presión constante	$\Delta p = 0$	$\Delta E_{int} = Q + W$	$W = -p\Delta V$, $Q = nC_p\,\Delta T$
Isotérmico	$\Delta E_{int} = 0$	$Q = -W$	$W = -nRT\ln(V_f/V_i)$
Ciclo	$\Delta E_{int} = 0$	$Q = -W$	
Expansión libre	$Q = W = 0$	$\Delta E_{int} = 0$	$\Delta T = 0$

Lo que está subrayado se aplica sólo a los gases ideales; el resto se aplica en general.

donde Q y W indican los totales del ciclo. En la figura 23-21, el trabajo total es positivo porque existe más superficie positiva bajo la curva que representa el paso 3 que superficie negativa bajo la línea que representa el paso 2. Por consiguiente, $W > 0$ y de la ecuación 23-57 se deduce que $Q < 0$. De hecho, en cualquier ciclo que se efectúa en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, debemos tener $W > 0$ (y, por tanto, $Q < 0$), mientras que los ciclos realizados en dirección de las manecillas del reloj tienen $W < 0$ y $Q > 0$.

Expansión libre

En la figura 23-22 se describe el proceso de *expansión libre*. Al inicio el gas se encuentra en un costado del contenedor y, cuando se abre el grifo, se expande hacia la mitad previamente evacuada. No pueden levantarse pesas en este proceso, por lo cual tampoco se realiza trabajo. El contenedor está aislado y por eso el proceso es adiabático. En consecuencia, con $W = 0$ y con $Q = 0$, la primera ley de la termodinámica nos da

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{(expresión libre)} \qquad (23\text{-}58)$$

Así pues, permanece constante la energía interna de un gas ideal sometido a este tipo de expansión; como la energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura, lo mismo sucederá con su temperatura.

La expansión libre constituye un buen ejemplo de un proceso de *no equilibrio*. Si un gas tiene presión y volumen bien definidos (y, por tanto, temperatura), puede indicarse el estado del gas como un punto en el diagrama pV. La asignación de temperatura al gas significa que debe hallarse en equilibrio térmico; por eso cada punto en el diagrama representa un sistema en equilibrio. En el caso de la expansión libre, el estado inicial (todo el gas en un lado) es de equilibrio, lo mismo que su estado final; pero en momentos intermedios, a medida que el gas se desplaza apresuradamente de un lado al otro, ni la temperatura ni la presión poseen valores únicos y no es posible graficar el proceso en un diagrama pV. En la gráfica sólo aparecen los puntos inicial y final. No obstante, podemos recurrir todavía a la primera ley para analizar este proceso, puesto que el cambio de energía interna depende exclusivamente de ellos.

En la tabla 23-5 se resumen los procesos que acabamos de describir junto con sus transferencias de energía.

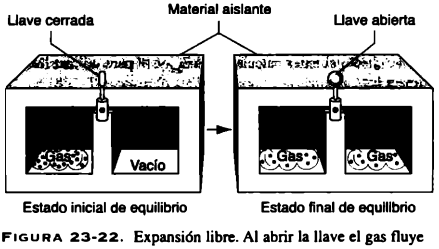


FIGURA 23-22. Expansión libre. Al abrir la llave el gas fluye de un lado del contenedor aislado al otro. No se realiza trabajo y tampoco se transfiere calor al ambiente.

PROBLEMA RESUELTO 23-8. Convirtamos en vapor 1.00 kg de agua líquida, hirviéndola a una presión atmosférica estándar (Fig. 23-23). El volumen pasa de un valor inicial de 1.00×10^{-3} m^3 como líquido a un valor 1.671 m^3 como vapor. En este proceso, determine *a*) el trabajo efectuado en el sistema, *b*) el calor que se le agrega y *c*) su cambio de energía interna.

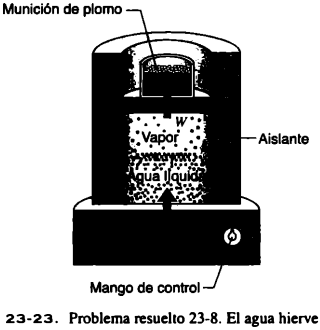


FIGURA 23-23. Problema resuelto 23-8. El agua hierve a presión constante. El calor fluye del depósito hasta que toda el agua se haya convertido en vapor. Al expandirse, el gas realiza trabajo a medida que levanta el pistón.

Solución *a*) El trabajo hecho en el gas durante el proceso a presión constante está dado por la ecuación 23-17:

$$W = -p(V_f - V_i)$$
$$= -(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})(1.671\ \text{m}^3 - 1.00 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)$$
$$= -1.69 \times 10^5\ \text{J} = -169\ \text{kJ}.$$

El trabajo realizado en el sistema es negativo; en forma equivalente, el sistema *efectúa* trabajo positivo en su ambiente al levantar el pistón provisto de pesas en la figura 23-23.

b) Con base en la ecuación 23-13 tenemos

$$Q = Lm = (2{,}256\ \text{kJ/kg})(1.00\ \text{kg}) = 2{,}260\ \text{kJ}.$$

Esta cantidad es positiva, como debe ser en un proceso donde se transfiere calor al sistema.

c) Determinamos el cambio de energía interna partiendo de la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 2{,}260\ \text{kJ} + (-169\ \text{kJ}) = 2{,}090\ \text{kJ}.$$

Esta cantidad es positiva e indica que la energía interna del sistema se incrementó durante el proceso de ebullición. La energía representa el trabajo interno efectuado al superar la fuerte atracción que las moléculas de H_2O tienen entre sí en el estado líquido.

Vemos que al hervir el agua, cerca de 7.5% (169 kJ/2260 kJ = 0.075) del calor agregado se transforma en trabajo externo al empujar la atmósfera hacia atrás. El resto se convierte en energía interna que se incorpora al sistema.

PROBLEMA RESUELTO 23-9. El ciclo que se describe en la figura 23-21 consta de tres procesos que comienzan en el punto A: reducción de la presión a volumen constante del punto A al punto B; aumento de volumen a presión constante del punto B al punto C; compresión isotérmica (disminución del volumen) del punto C al punto A nuevamente. Supongamos que el ciclo se lleva a cabo para 0.75 mol de un gas ideal diatómico, con $p_A = 3.2 \times 10^3$ Pa, $V_A = 0.21\ \text{m}^3$, y $p_B = 1.2 \times 10^3$ Pa. En cada uno de los tres procesos y en el ciclo encuentre Q, W y ΔE_{int}.

Solución El primer paso consiste en encontrar los valores de p, V y T en cada punto. En el punto A conocemos p_A y V_A y podemos resolver para T_A según la ley del gas ideal:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{(3.2 \times 10^3\ \text{Pa})(0.21\ \text{m}^3)}{(0.75\ \text{mol})(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})} = 108\ \text{K}.$$

En el punto B conocemos p_B y V_B (= V_A), y en forma semejante podemos calcular T_B:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{(1.2 \times 10^3\ \text{Pa})(0.21\ \text{m}^3)}{(0.75\ \text{mol})(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})} = 40\ \text{K}.$$

En el punto C conocemos p_C (= p_B) y T_C (= T_A, porque el proceso CA es una isotérmica). Entonces podemos determinar V_C:

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{(0.75\ \text{mol})(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(108\ \text{K})}{1.2 \times 10^3\ \text{Pa}} = 0.56\ \text{m}^3.$$

Con esta información puede calcularse la transferencia de calor, el trabajo realizado y el cambio de la energía interna en cada proceso. En el proceso 1 (AB) tenemos

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A)$$
$$= (0.75\ \text{mol})(20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(40\ \text{K} - 108\ \text{K}) = -1{,}060\ \text{J},$$
$$W_1 = 0 \quad \text{(proceso con volumen constante)},$$
$$\Delta E_{\text{int},1} = Q_1 + W_1 = -1{,}060\ \text{J} + 0 = -1{,}060\ \text{J}.$$

Durante este proceso el sistema transfiere energía al ambiente en forma de calor y su temperatura desciende, correspondiendo con un cambio negativo de energía interna.

En el proceso 2 (BC) a presión constante obtenemos

$$Q_2 = nC_p(T_C - T_B)$$
$$= (0.75\ \text{mol})(29.1\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(108\ \text{K} - 40\ \text{K}) = 1{,}480\ \text{J},$$
$$W_2 = -p(V_C - V_B)$$
$$= -(1.2 \times 10^3\ \text{Pa})(0.56\ \text{m}^3 - 0.21\ \text{m}^3) = -420\ \text{J},$$
$$\Delta E_{\text{int},2} = Q_2 + W_2 = 1{,}480\ \text{J} + (-420\ \text{J}) = 1{,}060\ \text{J}.$$

Durante este proceso se transfiere energía al gas en forma de calor y, al expandir el gas, se efectúa trabajo en su ambiente (el cual hace trabajo negativo en él).

A lo largo de la isoterma (CA), el trabajo está dado por la ecuación 23-18:

$$W_3 = -nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C}$$
$$= -(0.75\ \text{mol})(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(108\ \text{K}) \ln \frac{0.21\ \text{m}^3}{0.56\ \text{m}^3}$$
$$= 660\ \text{J},$$
$$\Delta E_{\text{int},3} = 0 \text{ (proceso isotérmico)},$$
$$Q_3 = \Delta E_{\text{int},3} - W_3 = 0 - 660\ \text{J} = -660\ \text{J}.$$

En el ciclo tenemos

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -1{,}060\ \text{J} + 1{,}480\ \text{J} + (-660\ \text{J})$$
$$= -240\ \text{J},$$
$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + (-420\ \text{J}) + 660\ \text{J} = 240\ \text{J},$$
$$\Delta E_{\text{int}} = \Delta E_{\text{int},1} + \Delta E_{\text{int},2} + \Delta E_{\text{int},3} = -1{,}060\ \text{J} + 1{,}060\ \text{J} + 0 = 0.$$

Nótese que, como se espera en el ciclo, $\Delta E_{\text{int}} = 0$ y que $Q = -W$. El trabajo total en el ciclo es positivo, como se prevé para un ciclo que tiene lugar en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.

Al resolver este tipo de problemas pueden emplearse expresiones que proporcionen directamente la transferencia de calor en procesos adiabáticos ($Q = 0$), compresión y volumen constantes. En otros procesos, como en el paso isotérmico de este problema, podemos encontrar Q sólo si antes calculamos ΔE_{int} y W para utilizar luego la primera ley.

OPCIÓN MÚLTIPLE

23-1 El calor: energía en tránsito

23-2 La transferencia de calor

1. Dos cilindros sólidos idénticos, largos y delgados, se usan para conducir calor de un depósito a una temperatura T_{caliente} a otro con temperatura $T_{\text{frío}}$. Originalmente están conectados en serie, como se ve en la figura 23-24*a*, y la rapidez de transferencia de calor es H_0. Si están conectados en paralelo y no como se muestra en la figura, ¿con qué velocidad se transfiere calor?

A) $16H_0$ B) $4H_0$ C) $2H_0$ D) $H_0/2$

E) La respuesta depende de la conductividad térmica, k, de los cilindros.

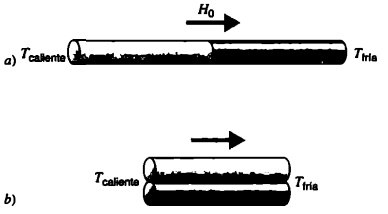


FIGURA 23-24. Pregunta de opción múltiple 1.

2. Dos cilindros sólidos largos y delgados tienen el mismo tamaño, pero están hecho de sustancias distintas, con dos conductividades térmicas. Están conectados en serie entre un depósito a una temperatura $T_{caliente}$ y otro a una temperatura $T_{fría}$. La temperatura en la frontera entre ellos es T_b. Puede concluirse que
   A) T_b es exactamente la mitad entre $T_{caliente}$ y $T_{fría}$.
   B) T_b se acerca más a $T_{caliente}$ que a $T_{fría}$.
   C) T_b se acerca más a $T_{fría}$ que a $T_{caliente}$.
   D) T_b se acerca más a la temperatura del depósito que está en contacto con el cilindro que tiene menor conductividad térmica.
   E) T_b está más cerca de la temperatura del depósito que está en contacto con el cilindro que tiene mayor conductividad térmica.
3. Una fuente de calor esférica de radio r_1 se encuentra en el centro de una esfera sólida uniforme de radio r_2. La rapidez con que se transfiere calor a través de la superficie de la esfera es proporcional a
   A) $r_2^2 - r_1^2$. B) $r_2 - r_1$.
   C) $\ln r_1 + \ln r_2$. D) $1/r_2 - 1/r_1$.
   E) $(1/r_2 - 1/r_1)^{-1}$.

23-3 Primera ley de la termodinámica

4. ¿Cuál de los siguientes procesos debe violar la primera ley? (Puede haber varias respuestas correctas.)
   A) $W > 0$, $Q < 0$ y $\Delta E_{int} = 0$
   B) $W > 0$, $Q < 0$ y $\Delta E_{int} > 0$
   C) $W > 0$, $Q < 0$ y $\Delta E_{int} < 0$
   D) $W < 0$, $Q > 0$ y $\Delta E_{int} < 0$
   E) $W > 0$, $Q > 0$ y $\Delta E_{int} < 0$

23-4 Capacidad calorífica y calor específico

5. Un cubo de 100 g de aluminio originalmente a 120°C se introduce en un contenedor aislado de agua cuya temperatura inicial es 18°C. Transcurrido algún tiempo, el sistema alcanza el equilibrio y la temperatura final del agua es 22°C. ¿Cuál es la temperatura final del cubo de aluminio?
   A) Es mayor que 22°C.
   B) Es igual a 22°C.
   C) Es menor que 22°C.
   D) Podría ser mayor o menor que 22°C, según la masa del agua.
6. El bloque A es un bloque de aluminio de 50 g a 90°C. El bloque B es un bloque de aluminio de 100 g. Los dos se colocan en dos contenedores de 1.0 litros de agua cuya temperatura original era 20°C. Cuando los sistemas alcanzan el equilibrio térmico, ¿cuál de los dos bloques tendrá la más alta temperatura final?
   A) El bloque A B) El bloque B
   C) Los bloques tendrán la misma temperatura final.
   D) La respuesta depende del calor específico del agua.
7. Un bloque de hielo de 1 kg a 0°C se introduce en un contenedor sellado perfectamente aislado que tiene 2 kg de agua también a 0°C. El agua y el hielo lo llenan por completo, pero éste es flexible. Al cabo de un tiempo cabe esperar
   A) que el agua se congele y, por consiguiente, que también aumente la masa del hielo.
   B) que el hielo se derrita y que, por consiguiente, su masa aumente.
   C) que la cantidad de agua y de hielo permanezcan constantes.
   D) que la cantidad de agua y de hielo disminuyan.

23-5 Trabajo realizado en un gas ideal o por él

8. ¿En cuál de las trayectorias entre el estado inicial i y el estado final f en la figura 23-25 se realiza el máximo trabajo en el gas?

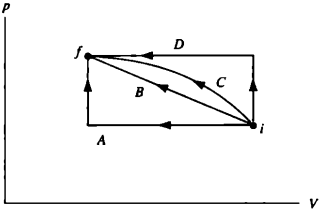


FIGURA 23-25. Pregunta de opción múltiple 8.

9. ¿Cuál de las siguientes situaciones *no* es una condición necesaria para un proceso en que realice trabajo un gas ideal? (Puede haber varias respuestas correctas.)
   A) $\Delta T \neq 0$ B) $\Delta p \neq 0$
   C) $\Delta V \neq 0$ D) $Q \neq 0$

23-6 Energía interna de un gas ideal

10. Examine los siguientes procesos que pueden efectuarse en un gas ideal: volumen constante, $\Delta V = 0$, presión constante $\Delta p = 0$; y temperatura constante $\Delta T = 0$. *a)* ¿En cuál de ellos $W = 0$? *b)* ¿En cuál $Q = 0$? *c)* ¿En cuál $W + Q = 0$? *d)* ¿En cuál $\Delta E_{int} = Q$? *e)* ¿En cuál $\Delta E_{int} = W$?
    A) $\Delta V = 0$ B) $\Delta p = 0$ C) $\Delta T = 0$
    D) En ninguno de ellos.

23-7 Calores específicos de un gas ideal

11. ¿Qué tipo de gas ideal tendrá el máximo valor con $C_p - C_v$?
    A) El monoatómico. B) El diatómico C) El poliatómico.
    D) El valor será igual en todos.
12. ¿Cuál será el valor más probable de C_T, el calor específico molar a temperatura constante?
    A) 0 B) $0 < C_T < C_V$
    C) $C_v < C_T < C_p$ D) $C_T = \infty$

23-8 Aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

13. ¿Cuál de los siguientes procesos queda prohibido por la primera ley de la termodinámica? (Puede haber varias respuestas correctas.)
    A) Un cubo de hielo se introduce en café caliente; el hielo se enfría más y el café se calienta más.
    B) Se pone cera sólida en una sartén metálica caliente; la cera se derrite y la sartén se enfría.
    C) Se pone agua fría en un vaso también frío; el vaso y el agua se enfrían más.
    D) Un estudiante construye un motor de automóvil que convierte en trabajo la energía calorífica liberada cuando el agua se transforma en hielo.
    E) Puede hacerse hielo seco dejando que el dióxido de carbono se expanda en una bolsa.

PREGUNTAS

1. A menudo se confunden la temperatura y el calor, como cuando decimos "el calor está muy fuerte hoy". A manera de ejemplo, distinga estos dos conceptos lo más rigurosamente que pueda.
2. Dé un ejemplo de un proceso en el cual no se transfiera calor a un sistema ni de él, pero en el cual sí cambie la temperatura del sistema.
3. ¿Puede el calor considerarse una forma de energía almacenada (potencial)? ¿Contradice tal interpretación el concepto del calor como energía en el proceso de transferencia debido a una diferencia de temperatura?
4. ¿Puede agregarse calor a una sustancia sin hacer que aumente su temperatura? De ser así, ¿contradice esto el concepto del calor como energía en el proceso de transferencia debido a una diferencia de temperatura?
5. ¿Por qué debe suministrarse energía para derretir el hielo? Después de todo, la temperatura no cambia.
6. Explique el hecho de que la presencia de gran cantidad de agua cercana, como un mar o un océano, tiende a moderar los extremos de la temperatura del clima en los lugares vecinos.
7. A medida que se derrite el hielo calentado, se forma un líquido y luego hierve. Sin embargo, cuando se caliente dióxido de carbono sólido, se transforma directamente en vapor —decimos que se sublima— sin que pase por el estado líquido. ¿Cómo se produce el dióxido de carbono líquido?
8. Se ponen cubos de agua caliente y fría en un clima helado. Explique cómo *a*) si tienen tapadera, el agua fría se congelará primero, pero *b*) si no la tienen, es posible que el agua caliente se congele primero.
9. ¿Por qué la temperatura de ebullición de un líquido aumenta con la presión?
10. Un bloque de madera y otro de metal tienen la misma temperatura. Cuando se enfrían, el bloque de metal se siente más frío que el de madera; cuando se calienten, el de metal se siente más caliente que el de madera. Explique el fenómeno. ¿A qué temperatura se sentirán igualmente calientes o fríos?
11. ¿Cuál es la mejor manera de utilizar una cuchara para enfriar una taza de café? Si se agita —lo cual supone realizar trabajo—, el café parece calentarse en vez de enfriarse.
12. ¿De qué manera una capa de nieve protege las plantas contra el frío? Durante las heladas, los cultivadores de cítricos en Florida acostumbran rociarlos con agua para que se congelen. ¿Cómo les ayuda esto?
13. Explique el efecto de la sensación térmica.
14. Pone usted la mano en un horno caliente para quitar una cacerola y se quema los dedos en el plato caliente. El aire en el horno tiene la misma temperatura que en la cacerola, pero usted no se quema los dedos. ¿Por qué?
15. Los trabajadores de la industria siderúrgica han observado que pueden meter fugazmente la mano en un metal caliente y derretido sin sufrir daño. Explique por qué.
16. ¿Por qué se emplea aislante más grueso en el desván que en las paredes de una casa?
17. ¿Tiene siempre el hielo una temperatura de 0°C? ¿Puede ser más frío? ¿Más caliente? ¿Y qué decir de una mezcla de agua-hielo?
18. *a*) ¿Puede calentarse el hielo a una temperatura por arriba de 0°C sin que se derrita? Explique su respuesta. *b*) ¿Puede enfriarse el agua hasta una temperatura por debajo de 0°C sin que se congele? Explique su respuesta. (Consúltese "The Undercooling of Liquids" de David Turnbull, *Scientific American*, enero de 1965, p. 38.)
19. Explique por qué el dedo se adhiere a una bandeja metálica con hielo que acaba de sacar del refrigerador.
20. Es difícil "hervir" huevos en agua en la cumbre de una montaña, porque el agua hierve allí a una temperatura relativamente baja. ¿Cuál es una forma práctica y sencilla de superar el problema?
21. ¿Se cocerá un huevo instantáneo más rápidamente si el agua hierve con la máxima intensidad del fuego que si hierve a fuego lento?
22. El agua es un refrigerante mucho que mejor que cualquier otro líquido. ¿Por qué? ¿Hay casos en que se preferirá otro líquido?
23. Explique por qué podría esperarse que el calor latente de vaporización de una sustancia sea considerablemente mayor que su calor latente de fusión.
24. Explique por qué el calor específico a presión constante es mayor que el calor específico con volumen constante.
25. ¿Por qué la diferencia entre C_p y C_v a menudo no se tiene en cuenta en los sólidos?
26. ¿Puede alguna vez C_p ser menor que C_v? Dé un ejemplo si contesta afirmativamente.
27. Los gases reales siempre se enfrían cuando llevan a cabo una expansión libre, no así un gas ideal. Explique la causa.
28. Exponga las semejanzas y especialmente las diferencias entre calor, trabajo y energía interna.
29. Describa el proceso de congelamiento del agua desde el punto de vista de la primera ley de la termodinámica. Recuerde que el hielo ocupa mayor volumen que una masa igual de agua.
30. Un termo contiene café. Se agita con mucha fuerza. Considere el café como el sistema. *a*) ¿Se eleva su temperatura? *b*) ¿Se le agregó calor? *c*) ¿Se realizó trabajo en él? *d*) ¿Cambió su energía interna?

31. ¿Se conserva la temperatura de un sistema aislado (sin interacción con el ambiente)? Explique su respuesta.
32. ¿Es el calor lo mismo que la energía interna? De no ser así, dé un ejemplo en que la de un sistema cambie sin que fluye calor a través de su frontera.
33. ¿Puede indicar si la energía interna de un cuerpo se adquirió mediante transferencia de calor o mediante la realización de trabajo?
34. Si se conocen la presión y el volumen de un sistema, ¿se determina siempre la temperatura en forma única?
35. Teniendo presente que la energía interna de un cuerpo consta de la energía cinética y potencial de sus partículas, ¿cómo distinguiría entre la energía interna y la temperatura?
36. Explique cómo podríamos conservar a temperatura constante un gas durante un proceso termodinámico.
37. En un día de invierno, la temperatura de la superficie interna de una pared es mucho menor que la temperatura interior y la de la superficie externa es mucho más alta que la temperatura del exterior. Explique el motivo.
38. ¿Puede transferirse energía a través de la materia por radiación? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo; si es negativa, explique por qué.
39. ¿Por qué un utensilio de cocina hecho de acero inoxidable tiene a menudo una capa de cobre o de aluminio en el fondo?
40. Suponga que puede transferirse calor por convección y por radiación, lo mismo que por conducción, y explique por qué un termo tiene una pared doble, está al vacío y recubierto de plata.
41. Un lago se congela primero en la superficie superior. ¿Interviene la convección? ¿Y qué decir de la conducción y de la radiación?
42. Explique por qué la temperatura de un gas desciende durante una expansión adiabática.
43. Comente la siguiente afirmación: "Hay dos formas de llevar a cabo un proceso adiabático. Una consiste en realizarla rápidamente y la otra en realizarlo en una caja aislada".

EJERCICIOS

23-1 El calor: energía en tránsito

23-2 La transferencia de calor

1. La rapidez promedio con que el calor fluye por la superficie de la Tierra en Estados Unidos es de 54 mW/m^2 y la conductividad térmica promedio de las rocas cercanas a la superficie es de 2.5 W/m · K. Suponiendo una temperatura en la superficie de 10°C, ¿cuál debería ser la temperatura a una profundidad de 33 km (cerca de la base de la corteza)? No tenga en cuenta el calor generado por elementos radiactivos; también puede prescindir de la curvatura de la Tierra.
2. Calcule la rapidez con que en un día muy frío de invierno se perdería calor a través de un muro de ladrillo que tiene un espesor de 6.2 m × 3.8 m. La temperatura interior es de 26°C y la exterior es de −18°C; suponga que el ladrillo tiene una conductividad térmica de 0.74 W/m · K.
3. Considere la losa de la figura 23-2. Suponga que $\Delta x = 24.9$ cm, $A = 1.80\ m^2$, y que el material es cobre. Si $T = 12.0$°C, $\Delta T = 136$°C, y si se alcanza un estado estacionario, calcule *a*) el gradiente de temperatura, *b*) la rapidez con que se transfiere calor y *c*) la temperatura en un punto de la varilla situado a 11.0 cm del extremo de alta temperatura.
4. *a*) Calcule la rapidez con que el cuerpo emite calor a través de la ropa de un esquiador, si se conocen los siguientes datos: la superficie corporal mide 1.8 m^2 y el espesor de la ropa es 1.2 cm; la temperatura de la piel es 33°C, en tanto que la superficie externa de la ropa tiene una temperatura de 1.0°C; la conductividad térmica de la ropa es 0.040 W/m · K. *b*) ¿Cómo cambiaría la respuesta si, después de una caída, la ropa del esquiador se empapara con agua? Suponga que la conductividad térmica del agua es 0.60 W/m · K.
5. Para cubrir una abertura de un área $2A$ se dispone de cuatro aislantes cuadrados de distinto material, todos ellos con el mismo espesor y superficie. Esto puede hacerse en una de las dos formas que se describen en la figura 23-26. ¿Cuáles sistemas, *a*) o *b*), generarán el menor flujo de calor si $k_2 \neq k_1$?

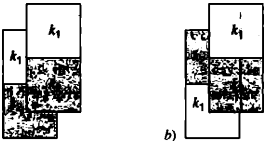


FIGURA 23-26. Ejercicio 5.

6. Demuestre que la temperatura T_x en la superficie de una losa compuesta (problema resuelto 23-1) está dada por
$$T_x = \frac{R_1T_1 + R_2T_2}{R_1 + R_2}.$$
7. Se formó hielo de un estanque poco profundo y se alcanzó un estado estacionario cuando el aire arriba del hielo está a −5.20°C y cuando el fondo del estanque tiene una temperatura de 3.98°C. Si la profundidad total de hielo + agua es 1.42 m, ¿de qué espesor es el hielo? (Suponga que su conductividad térmica es de 1.67 y de 0.502 W/m · K, respectivamente.
8. Dos varillas rectangulares idénticas de metal se sueldan extremo con extremo como se ilustra en la figura 23-27*a*, y por ellas fluyen 10 J de calor en 2.0 min. ¿Cuánto tardarán 30 J en fluir si las varillas se sueldan como se observa en la figura 23-27*b*?

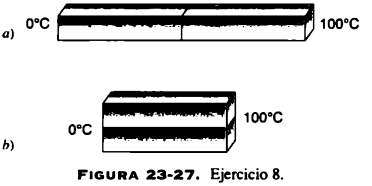


FIGURA 23-27. Ejercicio 8.

9. En la figura 23-28 se muestra una representación idealizada de la temperatura del aire en función de la distancia de una ventana de una hoja durante un tranquilo día de invierno. Las dimensiones de la ventana son 60 × 60 × 0.50 cm. *a*) ¿Con qué rapidez fluye calor por ella? (*Sugerencia*: La temperatura del vidrio es muy baja.) *b*) Calcule la diferencia de temperatura entre las superficies interna y externa.

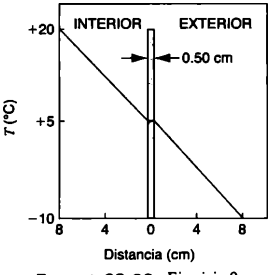


FIGURA 23-28. Ejercicio 9.

23-3 Primera ley de la termodinámica

10. Suponga que 214 J de trabajo se realizan en un sistema y que de él se extraen 293 J de calor. Según lo establecido por la primera ley de la termodinámica, ¿qué valores tienen *a*) W, *b*) Q y *c*) ΔE_{int}?

11. Cuando un sistema se lleva del estado i al f a lo largo de la trayectoria *iaf* en la figura 23-29, se encuentra que $Q = 50$ J y que $W = -20$ J. En la trayectoria *ibf*, $Q = 36$ J. *a*) ¿Cuál es el trabajo W en ella? *b*) Si $W = +13$ J en la trayectoria curva de regreso *fi*, ¿cuál es el calor Q en ella? *c*) Suponga que $E_{int,i} = 10$ J. ¿Qué valor tiene $E_{int,f}$? *d*) Si $E_{int,b} = 22$ J calcule Q en los procesos *ib* y *bf*.

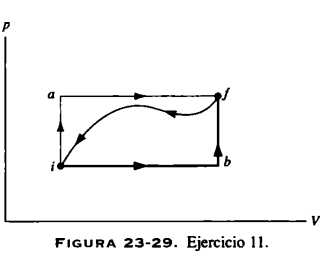


FIGURA 23-29. Ejercicio 11.

23-4 Capacidad calorífica y calor específico

12. En el Atlántico del Norte los témpanos de hielo representan un peligro para la navegación (Fig. 23-30), haciendo que el trayecto de las rutas aumenten cerca del 30% durante la temporada en que aparecen. Entre las estrategias para destruirlos figuran las siguientes: poner explosivos, usar bombas, torpedos y negro de humo. Suponga que se recurre a la fusión directa del témpano, colocando en el hielo fuentes de calor. ¿Cuánto calor se requiere para derretir 10% de un témpano de 210,000 toneladas métricas? (Una tonelada métrica = 1,000 kg.)

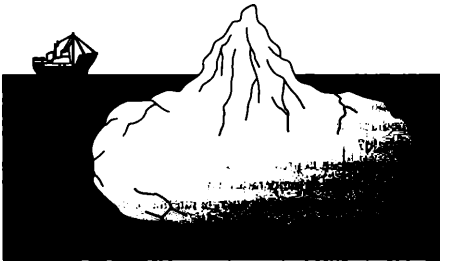


FIGURA 23-30. Ejercicio 12.

13. En una casa solar, la energía proveniente del Sol se almacena en barriles llenos de agua. Durante cinco días nublados de invierno, se necesitan 5.22 GJ para mantener a 22.0°C el interior de la casa. Suponiendo que la temperatura del agua de los barriles sea 50.0°C, ¿qué volumen se requiere?

14. Se utiliza un pequeño calentador eléctrico por inmersión para hervir 136 g de agua para preparar una taza de café instantáneo. El calentador está calibrado a 220 watts. Desprecie las pérdidas de calor y calcule el tiempo necesario para hacer que el agua llegue de 23.5°C al punto de ebullición.

15. ¿Cuánta agua permanece sin congelar después de haber extraído 50.4 kJ de calor de 258 g de agua líquida inicialmente a 0°C?

16. *a*) Calcule el posible aumento de temperatura del agua que cae de las catarátas del Niágara situadas a 49.4 m de altura. *b*) ¿Qué factores tienden a impedir este posible incremento?

17. Un tazón de cobre de 146 g contiene 223 g de agua; el tazón y el agua tienen una temperatura de 21.0°C. Se deja caer en el agua un cilindro muy caliente de cobre de 314 g. Esto la hace hervir, 4.70 g se convierten en vapor y la temperatura final del sistema entero es 100°C. *a*) ¿Cuánto calor se transfiere al agua? *b*) ¿Cuánto al tazón? *c*) ¿Cuál era la temperatura original del cilindro?

18. Calcule la cantidad mínima de calor necesaria para fundir completamente 130 g de plata, inicialmente a 16.0°C. Suponga que el calor específico no cambia con la temperatura. Consulte las tablas 23-2 y 23-3.

19. Una olla de aluminio con una masa de 0.560 kg contiene un elemento calentador de 2.40 kg. Está llena con 0.640 l de agua a 12.0°C. ¿Cuánto tardará *a*) en comenzar la ebullición, y *b*) en hervir y secarse la olla? (Suponga que su temperatura no supera los 100°C en ningún momento.)

20. ¿Qué masa de vapor a 100°C debe mezclarse con 150 g de hielo a 0°C en un contenedor térmicamente aislado para que produzca agua líquida a 50°C?

21. Un anillo de cobre de 21.6 g tiene un diámetro de 2.54000 cm a su temperatura de 0°C. Una esfera de aluminio tiene un diámetro de 2.54533 cm en su temperatura de 100°C. La esfera se pone en la parte superior del anillo (Fig. 23-31) y se deja que los dos alcancen equilibrio térmico, sin que pierdan calor en el ambiente. La esfera apenas cruza el anillo en esa temperatura. Determine su masa.

22. *a*) Dos cubos de hielo de 50 g se dejan caer en 200 g de agua dentro de un vaso. Si el agua tenía inicialmente una temperatura de 25°C y si el hielo se extrajo directamente de un congelador a −15°C, ¿cuál es la temperatura final de la bebida? *b*) Si sólo un cubo de hielo se usa en *a*), ¿cuál sería la temperatura final de la bebida? No tenga en cuenta la capacidad calorífica del vaso.

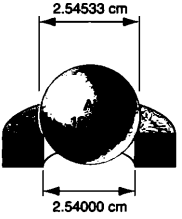


FIGURA 23-31. Ejercicio 21.

23. Una sustancia tiene una masa molar de 51.4 g/mol. Cuando 320 J de calor se agregan a una muestra de 37.1 g de este material, su temperatura asciende de 26.1 a 42.0°C. *a*) Calcule el calor específico de la sustancia. *b*) ¿Cuántos moles tiene? *c*) Calcule su calor específico molar.

23-5 Trabajo realizado en un gas ideal o por él

24. Una muestra de gas se expande de 1.0 a 5.0 m^3, y al mismo tiempo su presión se reduce de 15 a 5.0 Pa. ¿Cuánto trabajo se realiza en el gas si la presión cambia con el volumen de acuerdo con los tres procesos descritos en el diagrama pV de la figura 23-32?

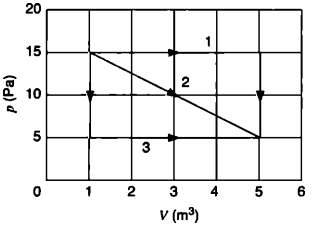


FIGURA 23-32. Ejercicio 24.

25. Suponga que una muestra de gas se expande de 2.0 a 8.0 m^3 en la trayectoria diagonal del diagrama pV que se ilustra en la figura 23-33. Después vuelve a comprimirse a 2.0 m^3 a lo largo de las trayectorias 1 o 2. Calcule el trabajo neto efectuado en el gas durante el ciclo completo en cada caso.

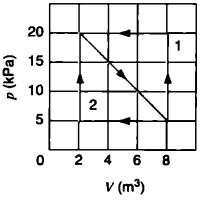


FIGURA 23-33. Ejercicio 25.

26. El aire que ocupa 0.142 m^3 a una presión manométrica de 103 kPa se expande isotérmicamente hasta alcanzar la presión manométrica cero y luego se enfría bajo presión constante hasta recobrar su volumen inicial. Calcule el trabajo efectuado en el gas.
27. Calcule el trabajo efectuado por un agente externo al comprimir 1.12 moles de oxígeno partiendo de un volumen de 22.4 l y de una presión de 1.32 atm a 15.3 l con la misma temperatura.
28. *a*) Un litro de gas con $\gamma = 1.32$ tiene una temperatura de 273 K y una presión de 1.00 atm. De pronto (adiabáticamente) lo comprimimos a la mitad de su volumen original. Encuentre la presión y la temperatura finales. *b*) Ahora lo enfriamos hasta el nivel original de 273 K a presión constante. Determine el volumen final. *c*) Encuentre el trabajo total realizado en él.
29. Un gas ocupa un volumen de 4.33 l a una presión de 1.17 atm y a una temperatura de 310 K. Lo comprimimos adiabáticamente hasta un volumen de 1.06 L. Determine *a*) la presión final, y *b*) la temperatura final, suponiendo que se trata de un gas ideal en el cual $\gamma = 1.40$. *c*) ¿Cuánto trabajo se lleva a cabo en él?
30. Un compresor recibe aire a una temperatura de 18.0°C y a una presión de 1.00 atm y lo entrega a una presión de 2.30 atm. Opera a 230 W de potencia útil. Suponga que funciona en forma adiabática. *a*) Determine la temperatura del aire comprimido. *b*) ¿Cuánto aire en litros se produce por segundo?

23-6 Energía interna de un gas ideal

31. Calcule la energía cinética rotacional total de todas las moléculas en 1 mol de aire a 25.0°C.
32. Calcule la energía interna de un mol de un gas ideal a 250°C.
33. Un gas ideal sufre una compresión adiabática de $p = 122$ kPa, $V = 10.7$ m^3, $T = -23.0$°C a $p = 1{,}450$ kPa, $V = 1.36$ m^3. *a*) Calcule el valor de γ. *b*) Determine la temperatura final. *c*) ¿Cuántos moles de gas hay? *d*) ¿Cuál es la energía cinética traslacional total por mol antes de la compresión y después de ella? *e*) Encuentre la razón de la rapidez rcm antes de la compresión a la que existe después.
34. Una partícula de rayos cósmicos con una energía de 1.34 TeV es detenida en un tubo detector que contiene 0.120 mol de gas neón. Una vez distribuida entre todos los átomos, ¿cuánto aumenta la temperatura del gas?

23-7 Calores específicos de un gas ideal

35. En un experimento, 1.35 moles de oxígeno (O_2) se calientan a presión constante comenzando en 11.0°C. ¿Cuánto calor debe agregarse al gas para duplicar su volumen?
36. En un tanque de acero 12 gramos de nitrógeno (N_2) se calientan de 25.0 a 125°C. *a*) ¿Cuántos moles de nitrógeno hay? *b*) ¿Cuánto calor se transfiere al nitrógeno?
37. Una muestra de 4.34 moles de un gas diatómico ideal experimenta un aumento de temperatura de 62.4 K en condiciones de presión constante. *a*) ¿Cuánto calor se le agregó? *b*) ¿Cuánto se incrementó su energía interna? *c*) ¿Cuánto aumentó su energía cinética traslacional interna?
38. La masa de un átomo de helio es 6.66×10^{-27} kg. Calcule el calor específico a volumen constante del gas helio (en J/kg · K) partiendo del calor específico a molar volumen constante.
39. Un recipiente contiene una mezcla de tres gases no reactivos: n_1 moles del primero con un calor específico molar a volumen constante C_1, y así sucesivamente los dos restantes. Calcule el calor específico molar a volumen constante de la mezcla; hágalo

en función del calor y de las cantidades de tres gases individuales.

23-8 Aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

40. El gas dentro de una cámara pasa por el ciclo descrito en la figura 23-34. Determine el calor neto que se agrega al gas durante el proceso CA si $Q_{AB} = 20$ J, $Q_{BC} = 0$ y $W_{BCA} = -15$ J.

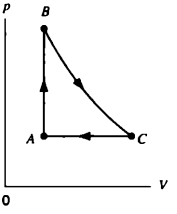


FIGURA 23-34. Ejercicio 40.

41. Una muestra de n moles de un gas ideal experimenta una expansión isotérmica. Encuentre el calor que fluye hacia el gas en función del volumen y las temperaturas inicial y final.

42. Una cantidad de gas ideal ocupa un volumen inicial V_0 a una presión p_0 y a una temperatura T_0. Expande su volumen V_1 *a*) a presión constante, *b*) a temperatura constante y *c*) adiabáticamente. Grafique los casos en un diagrama pV. ¿En cuál de los casos alcanzará Q su nivel máximo? ¿Y su nivel más bajo? ¿En cuál caso alcanzará W su nivel máximo? ¿Y su nivel más bajo? ¿En cuál caso alcanzará ΔE_{int} su nivel máximo? ¿Y su nivel más bajo?

43. *a*) Un gas monoatómico ideal inicialmente a 19.0°C es comprimido de repente a una décima parte de su volumen original. ¿Qué temperatura tendrá después de la compresión? *b*) Efectúe el mismo cálculo con un gas diatómico.

44. En la figura 23-35 suponga los siguientes valores:

$$p_i = 2.20 \times 10^5 \text{ Pa}, \; V_i = 0.0120 \text{ m}^3,$$
$$p_f = 1.60 \times 10^5 \text{ Pa}, \; V_f = 0.0270 \text{ m}^3$$

En las tres trayectorias mostradas encuentre el valor de Q, de W y $Q + W$. (*Sugerencia*: Determine P, V y T en los puntos A, B, C. Suponga un gas monoatómico ideal.)

45. Una cantidad de gas monoatómico ideal consta de n moles inicialmente a una temperatura T_1. Después la presión y el volumen se duplican lentamente, de modo que trazan una línea recta

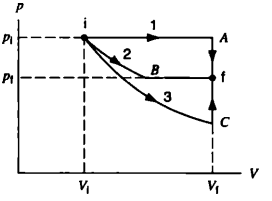


FIGURA 23-35. Ejercicio 44.

sobre el diagrama pV. A partir de n, R y T_1 determine *a*) W, *b*) ΔE_{int}, y *c*) Q. *d*) Si quisiéramos definir un calor específico equivalente en este proceso, ¿qué valor tendría?

46. El gas dentro de una cámara pasa por los procesos descritos en el diagrama pV de la figura 23-36. Calcule el calor neto que se agrega al sistema durante un ciclo completo.

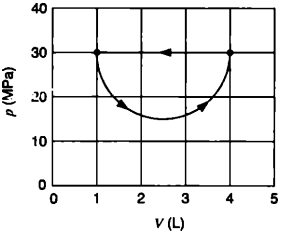


FIGURA 23-36. Ejercicio 46.

47. Supongamos que a un gas ideal le agregamos 20.9 J de calor. Entonces su volumen pasa de 63.0 a 113 cm^3, en tanto que la presión permanece constante a 1.00 atm. *a*) ¿Cuánto cambia la energía interna del gas? *b*) Si la cantidad de gas presente es 2.00×10^{-3} mol, determine el calor específico molar a presión constante. *c*) Determine el calor específico molar a volumen constante.

48. La temperatura de 3.15 moles de un gas poliatómico ideal se eleva 52.0 K en cada uno de tres procesos: a volumen constante, a presión constante y con compresión adiabática. Complete una tabla que describa en cada proceso el calor agregado, el trabajado realizado en el gas, el cambio de su energía interna y el de la energía cinética traslacional total de sus moléculas.

PROBLEMAS

1. *a*) Calcule la rapidez con que se pierde calor a través de una ventana de vidrio cuya superficie mide 1.4 m^2 y cuyo espesor es de 3.0 mm, si la temperatura externa es −20°F y si la interna es +72°F. *b*) Se instala una contraventana que tiene el mismo espesor pero un intervalo de aire de 7.5 cm entre las dos ventanas. ¿Cuál será la rapidez correspondiente de la pérdida de calor, si se supone que la conducción es el único mecanismo importante de la pérdida de calor?

2. Una varilla cilíndrica de plata con una longitud de 1.17 m y un área transversal de 4.76 cm se aísla para impedir que se pierda aire en su superficie. Se mantiene a los extremos con una diferencia de temperatura de 100°C, poniendo un extremo en una mezcla de agua-hielo y el otro en agua hirviente y en vapor. *a*) Determine la rapidez con que se transfiere calor a lo largo de la varilla. *b*) Calcule la rapidez con que el hielo se derrite en el extremo frío.

3. Suponiendo que k sea constante, demuestre que la rapidez radial de flujo del calor en una sustancia entre dos esferas concéntricas está dado por

$$H = \frac{(T_1 - T_2)4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

donde la esfera interna tiene un radio r_1 y una temperatura T_1, y la esfera externa tiene un radio r_2 y una temperatura T_2.

4. *a*) Utilice los datos del ejercicio 1 para calcular la rapidez con que el calor sale por la superficie de la Tierra. *b*) Suponga que el flujo se debe a la presencia de un núcleo caliente en ella y que el núcleo tiene un radio de 3,470 km. Suponga asimismo que la materia entre él y la superficie no contiene fuentes de calor y tiene un conductividad térmica promedio de 4.2 W/m · K. Con el resultado del problema 3 calcule la temperatura del núcleo. (Suponga que la superficie terrestre tiene una temperatura de 0°C.) La respuesta obtenida es demasiado alta en un factor aproximado de 10. ¿Por qué?

5. A temperaturas bajas (menores de 50 K, aproximadamente), la conductividad térmica de un metal es proporcional a la temperatura absoluta, esto es, $k = aT$, donde a es una constante con un valor numérico que depende del metal. Demuestre que la rapidez con que fluye calor a través de una varilla de longitud L y una superficie transversal A cuyos extremos están a las temperaturas T_1 y T_2 está dada por

$$H = \frac{aA}{2L}(T_1^2 - T_2^2).$$

(No tenga en cuenta la pérdida de calor en la superficie.)

6. Un contenedor de agua permaneció afuera en un clima frío hasta que en su superficie se formó una gruesa capa de hielo de 5.0 cm de espesor (Fig. 23-37). El aire arriba del hielo tiene una temperatura de −10°C. Calcule la rapidez con que se forma hielo (en centímetros por hora) en la superficie del fondo de la capa de hielo. Suponga que la conductividad térmica y la densidad del hielo son 1.7 W/m · K y 0.92 g/cm³. Suponga además que no fluye calor por las paredes del contenedor.

FIGURA 23-37. Problema 6.

7. Una persona prepara cierta cantidad de té helado mezclando 520 g de té caliente (esencialmente agua) con una masa igual de hielo a 0°C. ¿Cuál es la temperatura y la masa finales del resto del hielo, si el té caliente inicial tenía una temperatura de *a*) 90°C, y *b*) de 70.0°C?

8. Un *calorímetro de flujo* sirve para medir el calor específico de un líquido. Se agrega calor con una rapidez conocida al flujo del líquido mientras pasa por el calorímetro con una velocidad conocida. Después una medición de la diferencia resultante de la temperatura entre los puntos de entrada y de salida del flujo permite calcular el calor específico del líquido. Un líquido con una densidad de 0.85 g/cm³ fluye por un calorímetro con una rapidez de 8.2 cm³/s. Se agrega calor mediante un serpentín calentador y se establece una diferencia termométrica de 15°C en condiciones de estado estacionario entre los puntos de entrada y de salida.

9. El agua expuesta a la intemperie con una temperatura de 32°C se evapora porque escapan algunas de las moléculas de la superficie. El calor de vaporización es aproximadamente igual a ϵn, donde ϵ es la energía promedio de las moléculas que escapan y n es el número de moléculas por kilogramo. a) Encuentre ϵ. ¿Cuál es la razón ϵ a la energía cinética promedio de las moléculas H_2O, suponiendo que se relacione con la temperatura en la misma forma que en los gases?

10. Un termómetro con una masa de 0.055 kg y con una capacidad calorífica de 46.1 J/K indica 15.0°C. Después lo sumergimos enteramente en 0.300 kg de agua y sale con la misma temperatura final que ella. Si indica ahora 44.4°C, ¿cuál será la temperatura del agua antes de introducir el termómetro, si no tenemos en cuenta otras pérdidas de calor?

11. Con base en la figura 23-11 calcule la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 0.45 mol de carbono de 200 a 500 K. (*Sugerencia*: Aproxime la curva real en esta región por medio de un segmento de línea recta.)

12. El calor específico molar de la plata, medido a la presión atmosférica, fluctúa con la temperatura entre 50 y 100 K; esto se descubre mediante la ecuación empírica

$$C = 0.318T - 0.00109T^2 - 0.628,$$

donde C se da en J/mol · K y T en K. Calcule la cantidad de calor que se necesita para aumentar 316 g de plata de 50.0 a 90.0 K. La masa molar de la plata es 107.87 g/mol.

13. El gas en una cámara de vapor a una temperatura de 292 K muestra una expansión rápida. Suponiendo que el proceso sea adiabático, calcule la temperatura final si $\gamma = 1.40$ y si la razón de expansión volumétrica es 1.28.

14. Calcule el trabajo realizado en n moles de un gas de Van der Waals en una expansión isotérmica del volumen V_i a V_f.

15. Un tubo delgado y sellado por ambos extremos mide 1.00 m de largo. Está colocado horizontalmente; los 10.0 cm intermedios contienen mercurio y los dos extremos iguales contienen aire a presión atmosférica normal. Si ahora lo giramos y lo ponemos en una posición vertical, ¿qué cantidad de mercurio será desplazada? Suponga que el proceso es *a*) isotérmico, y *b*) adiabático. (En el aire, $\gamma = 1.40$). ¿Cuál suposición es más verosímil?

16. Se llena un cuarto de volumen V con un gas diatómico ideal (aire) a una temperatura T_1 y a una presión p_0. Se calienta el aire hasta una temperatura más elevada T_2, y la presión permanece constante en p_0 porque las paredes del cuarto no son herméticas. Demuestre que el contenido de la energía interna del aire que queda en el cuarto es el mismo en T_1 y T_2, y que la energía suministrada por el horno se destinó a calentar el aire afuera del cuarto. Si no le agregamos energía al aire, ¿por qué hemos de molestarnos en alimentar el horno? (Desprecie la energía del horno con que se elevó la temperatura de las paredes y considere sólo la energía utilizada para aumentar la del aire.)

17. La masa atómica molar del yodo es 127 g. Una onda estacionaria en un tubo lleno de gas yodo a 400 K tiene nodos separados por una distancia de 6.77 cm cuando la frecuencia es 1,000 Hz. Con estos datos determine si el gas es monoatómico o diatómico.

18. La figura 23-38*a* muestra un cilindro que contiene gas y que está cerrado por un pistón móvil. Se sumerge el cilindro en una mezcla de hielo-agua. Rápidamente se empuja el pistón hacia abajo de la posición 1 a la posición 2. Se sostiene el pistón en la posición 2 hasta que el gas vuelve a tener 0°C y luego se vuelve

a colocar lentamente en la posición 1. La figura 23-38*b* es un diagrama *pV* en el proceso. Si derretimos 122 g de hielo durante el ciclo, ¿cuánto trabajo se efectuó en el gas?

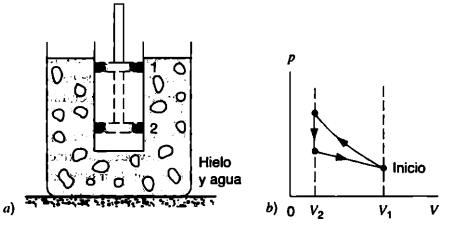


FIGURA 23-38. Problema 18.

19. Un motor lleva 1.00 mol de un gas monoatómico ideal durante el ciclo que se describe en la figura 23-39. El proceso *AB* tiene lugar a volumen constante, el proceso *BC* es adiabático y el proceso *CA* se produce a una presión constante. *a*) Compare el calor *Q*, el cambio de la energía interna E_{int}, y el trabajo *W* en los tres procesos y en el ciclo en general. *b*) Si la presión inicial en el punto *A* es 1.00 atm, encuentre la presión y el volumen en los puntos *B* y *C*. Utilice 1 atm = 1.013×10^5 Pa y R = 8.314 J/mol · K.

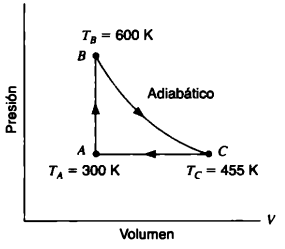


FIGURA 23-39. Problema 19.

20. Un cilindro tiene un pistón metálico bien ajustado de 2.0 kg cuya superficie transversal mide 2.0 cm^3 (Fig. 23-40). Contiene agua y vapor a temperatura constante. Se observa que el pistón cae lentamente con una rapidez de 0.30 cm/s, porque el calor sale del cilindro a través de sus paredes. A medida que esto sucede, un poco de vapor se condensa en la cámara. La densidad del vapor dentro de ella es 6.0×10^{-4} g/cm^3 y la presión atmosférica es 1.0 atm. *a*) Calcule la rapidez con que se condensa el vapor. *b*) ¿Con qué rapidez sale el calor de la cámara? *c*) ¿Con qué rapidez cambia la energía interna del vapor y del agua en el interior de la cámara?

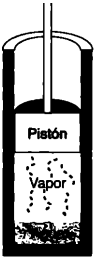


FIGURA 23-40. Problema 20.

21. En un motor de motocicleta, luego de ocurrir la combustión en la parte superior del cilindro, el pistón baja mientras la mezcla de productos gaseosos experimenta una expansión adiabática. Determine la potencia promedio que interviene en la expansión cuando el motor desarrolla 4,000 rpm, suponiendo que la presión manométrica inmediatamente después de la combustión sea 15.0 atm, que el volumen inicial sea de 50.0 cm^3 y que el volumen de la mezcla al final de la carrera sea 250 cm^3. Suponga que los gases son diatómicos y que el tiempo de la expansión sea la mitad de la del ciclo total.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. El valor teórico del calor específico de un sólido a una temperatura *T* está dado por la fórmula de Debye

$$c_V = 9\left[4\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int_0^{\Theta} \frac{x}{T^2}\frac{dx}{e^{x/T}-1} - \frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T}-1}\right],$$

donde Θ es una constante, denominada temperatura de Debye, que depende de la sustancia. *a*) Integre numéricamente la expresión anterior para obtener el calor específico del aluminio a temperatura ambiente, utilizando $\Theta_{aluminio}$ = 420 K. Compare su resultado con el valor medido. *b*) Prepare una gráfica del calor específico del aluminio para el intervalo entre *T* = 0 y *T* = 500 K.

2. El calor específico del aluminio a temperaturas bajas está dada por

$$c_v = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{420\text{ K}}\right)^3.$$

Un bloque de aluminio que pesa 1.0 kg originalmente a 20 K de temperatura se pone en un aparato (dejado en Roswell, Nuevo México por aliens) que puede extraer del aluminio 1,000 J de energía calorífica cada minuto. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda la temperatura del aluminio en llegar a 1 K? *b*) ¿Qué temperatura tiene el aluminio al cabo de 12 horas? *c*) ¿Alguna vez puede el aluminio enfriarse hasta alcanzar el cero absoluto con este aparato?

CAPÍTULO 24

ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Podemos imaginar muchos procesos que nunca ocurren aunque no violen la ley de conservación de la energía; por ejemplo, el café caliente en una jarra cede parte de su energía térmica interna y espontáneamente empieza a girar. Un vaso de agua fría podría convertirse espontáneamente en un cubo de hielo dentro de otro de agua más caliente. Aunque semejantes cosas jamás suceden, con mucha frecuencia las vemos ocurrir en dirección inversa. La segunda ley de la termodinámica, tema del presente capítulo, trata de las direcciones en que se realizan los procesos. Se dice que da una dirección preferida a la "flecha del tiempo", indicándonos que los sistemas evolucionan naturalmente con el tiempo en una dirección pero no en la otra.

Hemos visto que la ley cero de la termodinámica desemboca en el concepto de temperatura. De manera parecida, la primera ley de la termodinámica fluye en el concepto de energía interna. La segunda establece otra noción más: la de entropía, una magnitud en cuyos términos se expresa. Estudiaremos la entropía desde los puntos de vista macroscópico y microscópico.

24-1 PROCESOS EN UNA DIRECCIÓN

Las cosas tienen una propiedad que se presenta espontáneamente en el mundo circundante y que nos parece increíble. Con todo, estamos tan acostumbrados a ella que rara vez la consideramos, a saber:

Todos los procesos que se realizan espontáneamente ocurren en una dirección. Nunca siguen por sí mismos la dirección contraria.

Examine los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Si lanzamos una piedra, caerá al suelo. Una piedra que se encuentre en el suelo nunca, por sí misma, saltará hacia el aire.

Ejemplo 2: Una taza de café caliente dejada en el escritorio irá enfriándose poco a poco. Nunca se calentará sin intervención de un agente externo.

Ejemplo 3: Si ponemos una gota de tinta en un vaso de agua, sus moléculas se esparcirán uniformemente en todo el volumen de agua. Por sí mismas, nunca se reagruparán en una masa en forma de gota.

Si alguna vez vio que los procesos anteriores ocurrían en sentido inverso, seguramente habrá sospechado que lo engañaron.

Los procesos espontáneos en una dirección son *irreversibles*, es decir, seguirán su curso una vez iniciados. Más exactamente, no es posible hacerlos retroceder introduciendo un cambio pequeño en su ambiente. En lo esencial, todos estos tipos de procesos son irreversibles.

Aunque no se observan los fenómenos "en sentido equivocado" a los cuales acabamos de aludir en los ejemplos anteriores, ninguno de ellos violaría la ley de conservación de la energía. Vuelva a examinarlos:

Ejemplo 1: El suelo podría enfriarse espontáneamente un poco, cediendo a la piedra en reposo parte de su energía térmica interna como energía cinética, permitiéndole así saltar. Pero no ocurre tal cosa.

Ejemplo 2: Aquí se trata sólo de la dirección de la transferencia de la energía, no de los cambios de su cantidad. La energía podría fluir del aire circundante hacia el café y no a la inversa, pero no lo hace.

Ejemplo 3: En este caso no se transfiere energía. Lo único que se necesita es que las moléculas de tinta, las cuales se mueven por toda el agua, retornen al mismo tiempo a un sitio cercano a su ubicación original. Y eso nunca sucederá.

No es la *energía* del sistema lo que controla la dirección de los procesos irreversibles; es otra propiedad de la cual nos ocuparemos en el presente capítulo: la *entropía* (cuyo símbolo es S) del sistema. Aunque hasta ahora no hemos hablado de ella, es una propiedad del estado como lo son la temperatura, la presión, el volumen y la energía interna. La definimos en la siguiente sección, pero para ver a dónde nos dirigimos vamos a enunciar su propiedad principal, que llamamos *principio de entropía:*

> *Si ocurre un proceso irreversible en un sistema cerrado, su entropía siempre aumenta; nunca disminuye.*

La entropía se distingue de la energía en que *no* obedece una ley de conservación. Sin importar lo que acontezca dentro de un sistema cerrado, su energía permanecerá constante. En cambio, su entropía siempre se acrecentará en los procesos irreversibles.

En este capítulo trataremos de los *cambios* de entropía, esto es, estudiaremos ΔS en vez de S. Si un proceso se efectúa de manera irreversible en un sistema cerrado, el principio de entropía establece que $\Delta S > 0$. Los procesos "reversibles" descritos antes —si es que ocurren— tendrían $\Delta S < 0$ y violarían el principio.

Hay dos formas equivalentes de definir el cambio de entropía en un sistema: 1) el método macroscópico, que incluye transferencia de calor y la temperatura a la cual se da la transferencia; 2) el método microscópico, que exige contar en cuántas formas pueden disponerse los átomos o moléculas que integran el sistema. El primero lo emplearemos en la Sección 24-2 y el segundo en la Sección 24-9.

24-2 DEFINICIÓN DEL CAMBIO DE ENTROPÍA

En la presente sección definimos el cambio de entropía ΔS que ocurre cuando, mediante un proceso que calificamos de *reversible,* un sistema cerrado pasa de un estado inicial bien definido a un estado final igualmente bien definido. En este proceso introducimos un cambio pequeño en el sistema y en su ambiente; al invertirlo, el sistema y su ambiente retornarán a su condición original. Por ejemplo, cuando ponemos en contacto un bloque caliente y un bloque frío de metal, se transfiere calor del más caliente al más frío. Es un proceso irreversible; no podemos invertir ningún paso del proceso que haga que el calor fluya en dirección contraria y restablezca los dos bloques en su temperatura original. Consideremos ahora un bloque de metal en una placa caliente a una temperatura T. Si aumentamos la temperatura de la placa caliente en un pequeño paso dT, se le transferirá de ella un poco de calor dQ al bloque. Y si luego *disminuimos* en dT la temperatura de la placa caliente, se le transferirá una cantidad igual de calor dQ desde el bloque. Al bloque y a la placa caliente se les restablece a su condición original; el calor así transferido se obtiene por medio de un proceso reversible.

Un ejemplo más: consideremos el gas del cilindro que aparece en la figura 21-13. Si extraemos unos balines de plomo del contenedor en el pistón, se transferirá al gas una pequeña cantidad de calor dQ desde el depósito térmico; si reemplazamos esa cantidad de balines de plomo, la misma cantidad de calor dQ fluirá de regreso al depósito y el sistema y su ambiente recuperarán su condición original en este proceso reversible.

En un proceso auténticamente reversible no se pierde energía a causa de la turbulencia, de la fricción ni de otros efectos disipatorios. Claro que este proceso es una abstracción, pues en todos los procesos naturales se producen estos tipos de pérdidas de energía y, por tanto, son irreversibles. Por ejemplo, si se da fricción en el pistón de la figura 21-13, el sistema no volverá a su configuración original cuando repongamos los balines de plomo en el contenedor. No obstante, podemos acercarnos arbitrariamente a la reversibilidad mejorando el aparato e introduciendo otras mejoras experimentales. Más importante aún: el proceso estrictamente reversible es una abstracción simple y útil que sirve para analizar y entender procesos más complejos, del mismo modo que el concepto de gas ideal es una abstracción que ayuda a comprender el comportamiento de los gases reales.

Comenzamos la exposición sobre la entropía enunciando la definición del cambio de entropía en un proceso reversible y analizando después sus consecuencias. La definición es

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad \text{(reversible).} \qquad (24\text{-}1)$$

Aquí dQ es la energía calorífica que se transfiere al sistema (cerrado) o desde él a una temperatura T (Kelvin); la integral se evalúa partiendo del estado inicial i del sistema a su estado final f. Tanto el calor transferido como la temperatura a la cual se lleva a cabo la transferencia son igualmente importantes al definir el cambio de entropía.

Si el proceso es isotérmico y por ello la transferencia de calor se efectúa a una temperatura constante, la ecuación 24-1 se reduce a

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad \text{(reversible, isotérmico).} \qquad (24\text{-}2)$$

Como la temperatura T (Kelvin) siempre es positiva, de las ecuaciones 24-1 y 24-2 se deducirá que el cambio de entropía tiene el mismo signo algebraico que el calor Q. Es decir, si *se agrega* (reversiblemente) energía calorífica a un sistema cerrado ($Q > 0$), la entropía del sistema *crecerá* ($\Delta S > 0$) y a la inversa. La unidad que se obtiene de la ecuación definitoria de la entropía es el joule/kelvin.

La entropía como una propiedad del estado

La entropía no sería una magnitud útil si, como la presión, la energía interna y la temperatura, no fuera una verdadera propiedad del estado de equilibrio de un sistema. En seguida vamos a probar concretamente que sí es una *propiedad del estado* en el importante caso de un gas ideal.

La primera ley de la termodinámica la escribimos así en su forma diferencial

$$dQ + dW = dE_{\text{int}}.$$

Después reemplazamos dW por $-p\,dV$, y por medio de la ecuación 23-31 sustituimos dE_{int} con $nC_V\,dT$. Luego, al resolver para dQ, nos queda

$$dQ = p\,dV + nC_V\,dT.$$

Usando la ley del gas ideal, en esta ecuación reemplazamos p por nRT/V y luego dividimos entre T cada término de la ecuación resultante. Esto nos da

$$\frac{dQ}{T} = nR\frac{dV}{V} + nC_V\frac{dT}{T}.$$

A continuación integramos los términos de la ecuación anterior entre un estado inicial arbitrario i un estado final arbitrario f, y a continuación definimos el cambio de entropía por medio de la ecuación 24-1; así, obtenemos

$$\Delta S = nR\ln\frac{V_f}{V_i} + nC_V\ln\frac{T_f}{T_i}.$$

No especificamos una trayectoria al realizar la integración, de modo que el resultado anterior debe ser válido en todas las trayectorias (reversibles). Por eso el cambio de entropía entre los estados inicial y final de un gas ideal depende sólo de las propiedades del primero (T_i y V_i) y segundo (T_f y V_f). Es totalmente independiente del proceso que permite al gas ideal pasar de su estado inicial a su estado final. En conclusión, la entropía es, en efecto, una propiedad del estado, típica del estado particular de un sistema *sin que* dependa de cómo llegó a él.

PROBLEMA RESUELTO 24-1. Un vaso aislante que contiene 1.8 kg de agua se coloca en una placa caliente; éste y el agua tienen inicialmente una temperatura de 20°C. Elevamos lentamente la temperatura de la placa hasta 100°C, punto en que el agua comienza a hervir. ¿Qué cambio de entropía experimenta el agua durante el proceso?

Solución El agua y la placa caliente se hallan esencialmente en equilibrio térmico en todo momento, de modo que el proceso es reversible. Es decir, al reducir un poco la temperatura de la placa caliente en cualquier etapa del proceso, haríamos que dejara de elevarse y comenzara a disminuir. Escogemos el agua como nuestro sistema y, por tratarse de un proceso reversible, podemos servirnos de la ecuación 24-1 para calcular el cambio de entropía.

La energía calorífica requerida para elevar la temperatura del agua en una cantidad dT es

$$dQ = mc\,dT$$

donde m es la masa del agua y c es su calor específico. Entonces la ecuación 24-1 se transforma en

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f}\frac{mc\,dT}{T}$$
$$= mc\int_{T_i}^{T_f}\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_f}{T_i}$$
$$= (1.8\text{ kg})(4{,}190\text{ J/kg}\cdot\text{K})\ln\frac{(273+100)\text{ K}}{(273+20)\text{ K}}$$
$$= 1{,}820\text{ J/K}.$$

Nótese que, como parte de la definición de ΔS, hay que convertir las temperaturas inicial y final de la escala Celsius a la escala Kelvin. El cambio de entropía del sistema es positivo, ya que al sistema se le transfiere calor para elevar su temperatura.

24-3 CAMBIO DE ENTROPÍA EN LOS PROCESOS IRREVERSIBLES

Podemos emplear la ecuación 24-1 para calcular el cambio de entropía en un proceso sólo si éste es reversible. Pero un proceso reversible —como un gas ideal— es una idealización. En todos los procesos que encontramos en el mundo real interviene la fricción o turbulencia, o algún otro aspecto que los hace esencialmente irreversibles. ¿Cómo se calcula entonces el cambio de entropía en un proceso irreversible?

Nos basamos en el hecho de que la entropía es una propiedad del estado. En otras palabras, cuando un sistema cerrado pasa de un estado inicial a un estado final, el cambio de entropía depende exclusivamente de las propiedades de los dos estados. No depende en absoluto del proceso que los conecta, ni siquiera de si es reversible o irreversible. Así pues, para determinar el cambio de entropía ΔS en un sistema que pasa del estado i al f mediante un proceso irreversible, se aplica el siguiente procedimiento:

1. Se encuentra el proceso reversible que conecta esos dos mismos estados. Bastará uno de ellos. Siempre conviene escoger el más sencillo.

2. Con la ecuación 24-1 se calcula ΔS para este *proceso reversible equivalente*. El resultado será válido también para el proceso irreversible original.

Vamos a analizar este procedimiento en uno de los procesos irreversibles más comunes, la caída de una piedra del ejemplo 1 en la Sección 24-1. En la figura 24-1*a* se muestra el estado inicial del sistema. Para facilitar la explicación dejamos caer la piedra en una cubeta de agua aislada térmicamente. En la figura 24-1*b* se ve el estado final. La piedra descansa ahora en la cubeta; su temperatura y la del agua aumentó de un valor inicial T_i a un valor final T_f.

Escogemos *piedra + agua* como nuestro sistema. No se le transfiere energía calorífica a través de la frontera, por lo cual $Q = 0$. La fuerza gravitacional que opera sobre la piedra realiza trabajo en el sistema, con un valor de $m_s gh$, donde m_s es la masa de la piedra. Por consiguiente, $W = +m_s gh$. De acuerdo con la primera ley de la termodinámica, tendremos entonces

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 0 + m_s gh = +m_s gh.$$

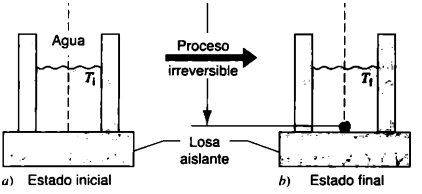


FIGURA 24-1. Proceso irreversible entre dos estados de equilibrio. Se deja caer una piedra de masa m de una altura h al agua contenida en una cubeta térmicamente aislada. La temperatura del agua (y de la piedra) aumenta de su valor inicial T_i a un valor más grande T_f.

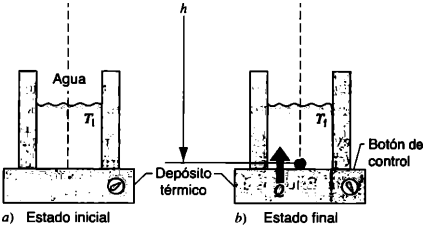


FIGURA 24-2. Proceso reversible que conecta los mismos estados inicial y final descritos en la figura 24-1. La cubeta de agua se encuentra ahora en un *depósito térmico* cuya temperatura puede ajustarse con un botón de control. Primero se baja lentamente la piedra en el extremo de una cuerda. Después se aumenta lentamente la temperatura del agua (y de la piedra) de T_i a T_f, ajustando el botón de control. Durante este proceso al agua se le transfiere energía Q desde el depósito.

Este incremento de la energía interna se manifiesta en un ligero aumento de la temperatura en el sistema agua-piedra.

Ahora, prosiguiendo el paso 1 del procedimiento, vamos a encontrar un proceso reversible equivalente que conecte los dos estados de la figura 24-1. En la figura 24-2*a*, colocamos el cubo de agua no en la losa aislante, sino en un depósito térmico cuya temperatura controlable ponemos a T_i. No dejamos que la piedra caiga libremente; la sujetamos a una cuerda y la bajamos con mucha lentitud. Una vez que esté en el agua, aumentamos la temperatura del depósito en forma gradual hasta alcanzar T_f, empleando para ello el mango de control. Los estados inicial y final de la figura 24-2 son idénticos a los de la figura 24-1.

El proceso de la figura 24-2 es verdaderamente reversible. Podríamos cambiar la dirección del proceso en cualquier etapa, con sólo hacer pequeños ajustes en el ambiente del sistema, esto es, subiendo la piedra en vez de bajarla y extrayéndole energía en vez de aumentársela.

A continuación examinamos las transferencias de energía que se dan en el proceso reversible equivalente de la figura 24-2. Ahora la fuerza neta que actúa sobre la piedra es cero; la fuerza de gravedad es balanceada por la tensión ascendente de la cuerda. Por tanto, $W = 0$. Como los estados inicial y final de la figura son los mismos que los de la figura 24-2 (y como la energía interna es una propiedad del estado), debemos tener $\Delta E_{int} = +m_s gh$ en todos los casos. Así, conforme a la primera ley de la termodinámica, se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E_{int} - W \\ &= m_s gh - 0 = +m_s gh. \end{aligned} \tag{24-3}$$

Esta cantidad de calor debe entrar en el sistema desde el depósito térmico, si queremos aumentar la temperatura del sistema de T_i a T_f. Si conocemos Q, por medio de la ecuación 24-1 podemos calcular el cambio de entropía en el proceso reversible equivalente (problema 24-2). Por ser Q negativo (*entra* calor en el sistema), el cambio de entropía también lo será. *Este mismo cambio (positivo) de entropía se realiza en el proceso irreversible de la figura 24-1.*

En los siguientes tres problemas resueltos examinaremos tres procesos irreversibles que ocurren en los sistemas cerrados; asimismo, mostraremos que, según el principio de la entropía, ésta siempre aumenta.

PROBLEMA RESUELTO 24-2. Una piedra de masa $m_s = 1.5$ kg cae desde una altura vertical $h = 2.5$ m en una cubeta que contiene una masa $m_w = 4.5$ kg de agua, como se aprecia en la figura 24-1. La temperatura inicial del agua y de la piedra es de 300 K. *a)* ¿Cuál es el aumento de la temperatura ΔT del sistema *agua + piedra*? *b)* ¿Cuál es su cambio de entropía ΔS? *c)* ¿Cuál será el cambio de entropía en el proceso inverso, esto es, para que el sistema se enfríe transfiriéndole energía a la piedra en forma cinética, lo cual le permitirá a esta última saltar 2.5 m en el aire? (Eso nunca sucederá.) El calor específico del agua es $c_w = 4{,}190$ J/kg · K y el de la piedra es $c_s = 790$ J/kg · K.

Solución *a)* La figura 24-2 muestra un proceso reversible equivalente que puede servir para calcular el cambio de entropía de la piedra que cae. En función del cambio de temperatura ΔT de la piedra

y del agua, la transferencia de calor Q en el proceso reversible equivalente de la figura 24-2*b* es

$$Q = m_w c_w \Delta T + m_s c_s \Delta T, \qquad (24\text{-}4)$$

una cantidad positiva. Hemos visto en la ecuación 24-3 que Q también está dado por

$$Q = m_s gh = (4.5\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(2.5\ \text{m}) = +110\ \text{J}.$$

Al sustituir este valor por Q en la ecuación 24-4 y al resolver para ΔT se obtiene

$$\Delta T = \frac{Q}{m_w c_w + m_s c_s}$$

$$= \frac{+110\ \text{J}}{(4.5\ \text{kg})(4{,}190\ \text{J/kg}\cdot\text{K}) + (1.5\ \text{kg})(790\ \text{J/kg}\cdot\text{K})}$$

$$= +5.5 \times 10^{-3}\ \text{K} = +5.5\ \text{mK}.$$

Por ser la temperatura una propiedad del estado, el incremento anterior de la temperatura se mantiene en el proceso reversible equivalente de la figura 24-2 y en el proceso original irreversible de la figura 24-1.

b) Vamos a calcular ahora el cambio de entropía en el proceso reversible equivalente de la figura 24-2. El cambio de temperatura (5.5 mK) es tan pequeño que podemos decir que el calor Q se transfiere del depósito al sistema a una temperatura esencialmente constante de 300 K. Así pues, podemos calcular ΔS partiendo de la ecuación 24-2. Por tanto, con base en ella

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{+110\ \text{J}}{300\ \text{K}} = +0.37\ \text{J/K}.$$

Nótese que Q del depósito se transfiere *hacia el interior* del sistema y que, por consiguiente, es positivo. En consecuencia, ΔS también lo es, y significa un *incremento* de la entropía.

Aunque hemos calculado ΔS en el proceso reversible de la figura 24-2, se aplica con la misma eficacia al proceso irreversible de la figura 24-1. Cuando una piedra cae en el suelo, crece la entropía del sistema como lo exige el principio de la entropía.

c) En el proceso inverso, *desde* el sistema de la figura 24-1*b* se transferiría energía calorífica en la cantidad $Q = -110$ J, lo cual haría que su temperatura *bajara* 5.5 mK. Una vez adquirida esta energía en forma cinética, la piedra saltaría entonces 2.5 m en el aire y restablecería así el sistema al de la figura 24-1*a*. El cálculo del cambio de entropía se efectúa igual que en *b*), salvo que, como se extrae calor del sistema, Q es ahora negativo y, en consecuencia, debe serlo también ΔS. Si ocurriera este proceso de retroceso, tendríamos $\Delta S = -0.37$ J/K, y esto viola el principio de entropía.

Quizá el lector piense: "Este proceso 'de retroceso' no sucede porque viola el proceso de entropía". Una afirmación mejor es la siguiente: "Como hemos observado que este proceso de retroceso —y muchos otros parecidos a él— nunca ocurre, los científicos tienden a correlacionar todas estas observaciones formulando el principio de entropía."

PROBLEMA RESUELTO 24-3. La figura 24-3*a* muestra un vaso de papel que contiene una masa $m = 0.57$ kg de agua caliente y otro vaso similar que contiene la misma masa de agua fría. La temperatura inicial del agua caliente es $T_{iH} = 90°C = 363$ K y la del agua fría es $T_{iC} = 10°C = 283$ K. Cuando se quita el separador aislante colocado entre los dos compartimientos como en la figura 24-3*b*, el agua caliente y fría terminan por alcanzar el equilibrio térmico a una temperatura de $T_f = 50°C = 323$ K. ¿Cuál es el cambio de entropía del sistema en este proceso irreversible? El calor específico del agua es

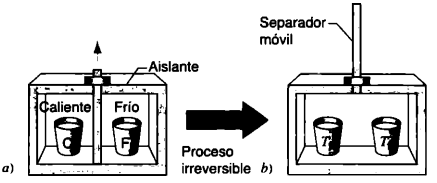


FIGURA 24-3. Problema resuelto 24-3. *a*) En el estado inicial, dos vasos de agua C y F, idénticos en todo menos en su temperatura, se encuentran dentro de una caja aislante y las separa una partición también aislante. *b*) Cuando se quita la partición, los vasos intercambian calor y llegan a un estado final, ambos con la misma temperatura T_f. El proceso es irreversible.

$c = 4{,}190$ J/kg · K; la capacidad calorífica del vaso de papel es insignificante.

Solución Como siempre, cuando tratamos de encontrar el cambio de entropía en un proceso irreversible, debemos comenzar por descubrir un proceso reversible equivalente que conecta los mismos estados inicial y final. La figura 24-4 ofrece un arreglo que puede emplearse en este proceso.

Paso 1. Una vez ajustada la temperatura del depósito térmico a $T_{iH} = 363$ K, ponemos en él un vaso de agua caliente (vaso H) y lo rodeamos con el contenedor térmicamente aislante. Entonces disminuimos lenta e irreversiblemente la temperatura del depósito a $T_f = 323$ K. En cada cambio de temperatura en una cantidad dT durante este proceso, *del* agua caliente se transfiere el calor dado por $dQ = mc\,dT$. De acuerdo con la ecuación 24-1, el cambio de entropía del agua caliente es

$$\Delta S_H = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_{iH}}^{T_f} \frac{mc\,dT}{T}$$

$$= mc \ln \frac{T_f}{T_{iH}}$$

$$= (0.57\ \text{kg})(4{,}190\ \text{J/kg}\cdot\text{K}) \ln \frac{323\ \text{K}}{363\ \text{K}} = -279\ \text{J/K}.$$

Puesto que se transfiere calor desde el agua caliente, cabe esperar que el cambio de entropía sea negativo, como efectivamente se comprueba.

Paso 2. En seguida se pone el vaso de agua fría (vaso C) en un contenedor térmicamente aislante similar, después de ajustar la

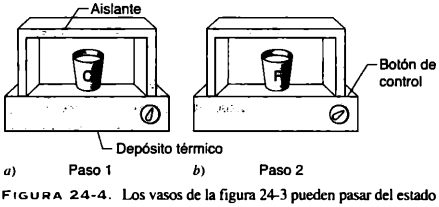


FIGURA 24-4. Los vasos de la figura 24-3 pueden pasar del estado inicial al estado final de modo reversible, si utilizamos un depósito con una temperatura controlable *a*) para extraer calor reversiblemente del vaso C, y *b*) para agregar calor reversiblemente al vaso F.

temperatura del depósito térmico a $T_{iC} = 283$ K. A continuación se aumenta lenta y reversiblemente la temperatura del depósito a T_f, la temperatura final de equilibrio del sistema. Durante este proceso, por cada incremento de la temperatura dT, *al* sistema se le transfiere una cantidad de calor $dQ = mc\,dT$. El cambio de entropía en el agua fría puede calcularse igual que antes, obteniendo el siguiente resultado:

$$\Delta S_C = (0.57\text{ kg})(4{,}190\text{ J/kg}\cdot\text{K})\ln\frac{323\text{ K}}{283\text{ K}} = +316\text{ J/K}.$$

El cambio neto de entropía en el sistema entero es

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta S_H + \Delta S_C\\ &= -279\text{ J/K} + 316\text{ J/K} = +37\text{ J/K}.\end{aligned}$$

Es también el cambio de entropía en el proceso irreversible de la figura 24-3. Una vez más vemos que la entropía de un sistema cerrado *aumenta* durante un proceso irreversible.

PROBLEMA RESUELTO 24-4. Supóngase que $n = 0.55$ mol de un gas ideal a la temperatura ambiente ($T = 293$ K) están dentro de la cámara izquierda de aislamiento térmico en el aparato de la figura 24-5. Se hace el vacío en la cámara de la derecha, y las dos cámaras de igual volumen se conectan mediante un tubo que tiene una llave. Si la abrimos, el gas fluirá precipitadamente para llenar la cámara al vacío hasta que finalmente se estabiliza en un estado de equilibrio térmico, llenando ambas cámaras. ¿Cuál es el cambio de entropía del gas en este proceso irreversible?

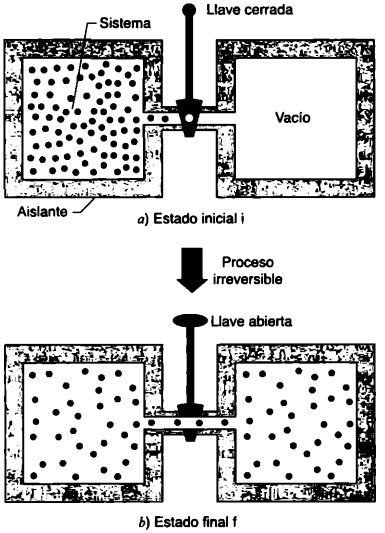


FIGURA 24-5. Problema resuelto 24-4. Expansión libre de un gas ideal. *a*) El gas está encerrado en la mitad izquierda de un contenedor aislado mediante una llave cerrada. *b*) Cuando ésta se abre, el gas se precipita al interior y llena enteramente el contenedor. Este proceso es irreversible, es decir, no ocurre en sentido contrario: el gas no se acumula espontáneamente en la mitad izquierda del contenedor.

Solución El proceso de la figura 24-5 es una *expansión libre*, proceso que se examinó en la Sección 23-8. Vimos allí que, si se trata de un gas ideal —cosa que se da por sentada—, la temperatura del estado final será igual a la del estado inicial. Está claro que la expansión libre *no* es reversible; no podemos devolverlo a su estadio anterior introduciendo un pequeño cambio en el ambiente.

Igual que en los dos problemas resueltos anteriores, para calcular el cambio de entropía hay que encontrar un proceso reversible equivalente que lleve el sistema de su estado inicial de la figura 24-5 a su estado final. En la figura 24-6 se ve cómo semejante proceso puede realizarse; es la expansión isotérmica reversible de un gas ideal.

Introducimos 0.55 moles del gas en un cilindro aislado colocado en un depósito térmico puesto a una temperatura $T = 293$ K. Arriba del pistón se ponen suficientes balines de plomo para que la presión y el volumen del gas correspondan a los del estado inicial en la figura 24-5*a*. Después los extraemos lentamente hasta que la presión y el volumen corresponden nuevamente a ese mismo estado final en la figura 24-5*b*. Este proceso lento *es* reversible: en cada paso podríamos devolver al contenedor una pequeña cantidad de balines de plomo, y una cantidad también pequeña de calor sería transferida *al* depósito *desde* el gas. Durante el proceso de expansión, una energía calorífica total Q se transfiere *del* depósito *al* gas para conservar constante la temperatura al ir expandiéndose el gas.

Podemos determinar Q basándonos en la primera ley de la termodinámica, que en forma diferencial se escribe así:

$$dQ + dW = dE_{\text{int}}.$$

La energía interna de un gas ideal depende sólo de su temperatura (Ec. 23-24) y, como no cambia ($dT = 0$), se tendrá necesariamente $dE_{\text{int}} = 0$. Al reemplazar dW por $-p\,dV$, y al sustituir nRT/V por p se tiene

$$dQ = -dW = p\,dV = nRT\frac{dV}{V}.$$

La integración entre los volúmenes inicial y final produce

$$Q = \int dQ = nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}.$$

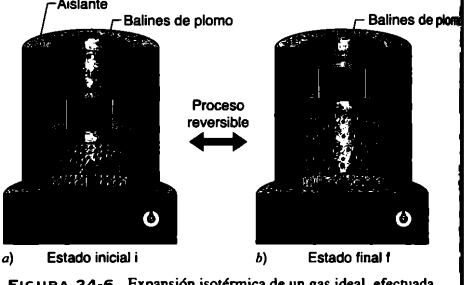


FIGURA 24-6. Expansión isotérmica de un gas ideal, efectuada de modo reversible. El gas tiene el mismo estado inicial i y el mismo estado final f que en el proceso irreversible de la figura 24-5.

Con la ecuación 24-2 se calcula el cambio de entropía en el proceso de expansión isotérmica de la figura 24-6, porque la temperatura es constante a lo largo de él. Así, teniendo presente que $V_f/V_i = 2$,

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$= (0.55 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(\ln 2) = +3.17 \text{ J/K}.$$

Éste es asimismo el cambio de entropía en el proceso irreversible de la figura 24-5. Es positivo, según cabe esperar del principio de entropía. Hemos ofrecido tres ejemplos para demostrar que la entropía aumenta durante los procesos reversibles que se realizan en los sistemas cerrados.

24-4 SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Es necesario resolver un pequeño problema antes de expresar la segunda ley en función del cambio de entropía. En el problema resuelto 24-4 vimos que, si podemos hacer que el gas de la figura 24-6 se expanda reversiblemente de *a*) a *b*) en esa figura, el cambio de entropía del gas –que escogimos como nuestro sistema– será positivo. Pero como se trata de un proceso reversible, resulta igualmente fácil lograr que pase por una compresión reversible: lo obligamos a pasar de *b*) a a) con sólo agregar lentamente balines de plomo al pistón de la figura 24-6*b* hasta que se restablezca el volumen original del gas. En este proceso inverso hay que transferir calor *desde* el gas para impedir que se eleve su temperatura. Por tanto, Q es negativo y, según la ecuación 24-2, también lo es el cambio de entropía del gas.

¿No viola esta reducción de la entropía del gas la expectativa de que ésta siempre debería incrementarse? No, porque la expectativa sólo se refiere a los procesos *irreversibles* que ocurren en sistemas *cerrados*. Primero, el procedimiento descrito en la figura 24-6 no es irreversible. Segundo, el sistema (el gas) no está cerrado, porque al depósito se le transfiere energía desde el gas en forma de calor.

Un sistema puede cerrarse agrandándolo para que abarque las partes del ambiente con las cuales interactúa. Por ejemplo, en la figura 24-6 puede escogerse como sistema el de *gas + depósito* y no el gas solo. Si después el proceso allí descrito pasa de *b*) a *a*), el calor Q se dirige del gas al depósito, esto es, de una parte del sistema más grande a otra. Los cambios de entropía del gas y del depósito pueden calcularse separadamente mediante la ecuación 24-2, que se aplica a un proceso isotérmico como el de la figura 24-6. Y así obtenemos

$$\Delta S_{gas} = -\frac{|Q|}{T} \quad \text{y} \quad \Delta S_{res} = +\frac{|Q|}{T},$$

donde $|Q|$ es el valor absoluto de la transferencia de calor, una cantidad positiva. El cambio de entropía en el sistema cerrado de *gas + depósito* es la suma de esas dos magnitudes, que es cero. Por tanto, aunque disminuye la entropía del gas, aumenta la del depósito, y lo hace en la misma cantidad.

Una vez explicado esto, podemos ampliar la afirmación hecha en la Sección 24-1 sobre los cambios de entropía para que abarque los procesos tanto reversibles como irreversibles. Esta afirmación, que llamamos *segunda ley de la termodinámica*, es la siguiente:

> *Cuando ocurren cambios dentro de un sistema cerrado, su entropía aumenta (en los procesos irreversibles) o permanece constante (en los procesos reversibles). Nunca disminuye.*

En forma de ecuación, la afirmación anterior se expresa así:

$$\Delta S \geq 0. \tag{24-5}$$

El signo "mayor que" se aplica a los procesos irreversibles y el signo "igual" a los procesos reversibles. No se han encontrado excepciones a la segunda ley.

Aunque la entropía puede disminuir en una parte de un sistema cerrado, siempre habrá un incremento igual (o mayor) de ella en otra parte del sistema; por ello la entropía de un sistema se reduce en su conjunto.

24-5 ENTROPÍA Y EL DESEMPEÑO DE LAS MÁQUINAS

Una máquina térmica, o más simplemente una *máquina*, es un artefacto que extrae energía de su ambiente en forma de calor y que realiza trabajo útil. La parte esencial de una máquina es una *sustancia de trabajo*. Así, en un motor de automóvil esa sustancia es una mezcla de gasolina-aire. Para que una máquina realice trabajo de modo sostenido, la sustancia debe operar en un *ciclo*. En otras palabras, debe pasar por una serie cerrada de procesos termodinámicos, volviendo una y otra vez a un estado seleccionado arbitrariamente. Veamos lo que las leyes de la termodinámica nos dicen respecto al funcionamiento de las máquinas.

La máquina de Carnot

Hemos visto que podemos conocer mucho sobre los gases reales analizando un gas ideal que obedezca la simple ley $pV = nRT$. Es un plan útil porque, a pesar de que no exista el gas ideal, cualquier gas real se aproxima al comportamiento ideal tanto como queramos si su densidad es lo bastante baja. De manera muy parecida optamos por estudiar las máquinas (reales) analizando el comportamiento de una máquina ideal.

La figura 24-7 ofrece un esquema de su funcionamiento. A este dispositivo lo llamaremos *máquina de Carnot*, en honor del científico e ingeniero francés N. L. Sadi Carnot, quien la propuso en 1824. Es increíble que haya podido estudiar su desempeño unos 25 años antes que se descubriera la primera ley de la termodinámica y que se estableciera el concepto de entropía.

Durante cada ciclo de la máquina en la figura 24-7, la sustancia de trabajo absorbe calor $|Q_H|$ de un depósito a temperatura constante T_H y libera calor $|Q_L|$ a un segundo

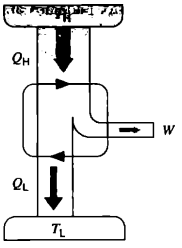


FIGURA 24-7. Elementos de la máquina de Carnot. Las dos puntas de flechas de color negro en la parte central indican la sustancia que opera en un ciclo. A la sustancia se le transfiere el calor Q_H desde el depósito de alta temperatura T_H. El calor Q_L se transfiere de la sustancia de trabajo al depósito de baja temperatura a una temperatura T_L. La máquina (en realidad la sustancia) realiza el trabajo W en algún objeto del ambiente.

depósito también a temperatura constante T_L. Suponemos que todos los procesos termodinámicos que intervienen en el funcionamiento de la máquina son *reversibles*, es decir, no hay procesos de disipación como la turbulencia y la fricción, y tampoco transferencias irreversibles de calor. Aun cuando la máquina de Carnot es un artefacto hipotético, recabamos muchos datos sobre las máquinas reales analizando su desempeño.

El ciclo de Carnot

La figura 24-8 ofrece una gráfica de presión-volumen (o pV) del ciclo que sigue la sustancia de trabajo de la máquina de Carnot en la figura 24-7. Como lo indican las flechas, el ciclo es recorrido en dirección de las manecillas del reloj. Para realizarlo físicamente, imagine que la sustancia de trabajo de la máquina de Carnot es un gas encerrado en un cilindro aislante, con un pistón móvil y pesado. Podemos colocar el cilindro en una placa aislante o en dos depósitos térmicos, uno a temperatura elevada T_H y el otro a temperatura baja T_L. La figura 24-8 muestra que, si lo ponemos en contacto con el primero, del depósito T_H se transfiere calor Q_H *a* la sustancia de trabajo, conforme el gas experimenta *expansión* isotérmica del volumen V_A al volumen V_B. Asimismo, con la sustancia en contacto con el depósito T_L de baja temperatura, *de* ella se transfiere calor Q_L a este depósito, a medida que el gas sufre *compresión* isotérmica del volumen V_C al volumen V_D.

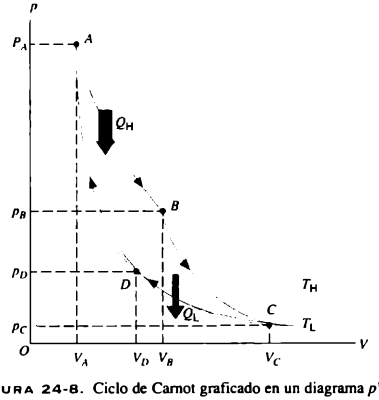


FIGURA 24-8. Ciclo de Carnot graficado en un diagrama pV para un gas ideal como la sustancia de trabajo.

Al preparar la figura 24-7 hemos supuesto que las transferencias de calor a la sustancia de trabajo o desde ella pueden realizarse *sólo* durante los procesos isotérmicos AB y CD de la figura 24-8. Por tanto, los procesos BC y DA que se describen allí y que conectan las dos isotermas, T_H y T_L, han de ser procesos adiabáticos (reversibles), es decir, procesos donde no se transfiera calor. Para garantizarlo, durante los procesos BC y DA se coloca el cilindro en una placa aislante al ir cambiando el volumen de la sustancia de trabajo.

Según lo definimos (Sección 23-5), el trabajo efectuado *en* un gas es negativo cuando este último se expande (crece su volumen). Sin embargo, cuando examinamos el desempeño de las máquinas, nos interesa más el trabajo efectuado *por* el gas en el ambiente. Al expandirse éste, hace trabajo *positivo* en el entorno; puede, por ejemplo, levantar un peso. Seguimos definiendo el trabajo termodinámico W como lo hicimos en el Capítulo 23, como el trabajo realizado *sobre* el gas, sólo que al hablar de las máquinas nos serviremos de $|W|$ para representar el que lleva a cabo *el gas* en expansión sobre el ambiente. Esta notación nos recuerda que el trabajo negativo efectuado *sobre* el gas corresponde al realizado *por* él.

Durante los procesos consecutivos AB y BC de la figura 24-8, la sustancia de trabajo se expande, y al hacerlo ejecuta trabajo positivo a medida que levanta el pesado pistón. En la figura ese trabajo se representa mediante el área bajo la curva ABC. Durante los procesos consecutivos CD y DA se comprime la sustancia funcional; ello significa que efectúa trabajo negativo en el ambiente o, en forma equivalente, que su ambiente lo lleva a cabo en ella al descender el pistón cargado. Este trabajo lo representamos con el área bajo la curva CDA. El *trabajo neto por ciclo*, que se representa con W en la figura 24-7, es la diferencia entre las dos superficies, una cantidad negativa igual a la superficie encerrada por el ciclo $ABCDA$ y la que aparece sombreada en la figura 24-8. El trabajo W se lleva a cabo en algún objeto externo, el cual tal vez se usa para levantar un peso.

También conviene graficar el ciclo de Carnot en un diagrama de temperatura-entropía (o diagrama T-S), como el de la figura 24-9. Adviértase que en él las isotermas son líneas horizontales. Verifique que los puntos A, B, C y D de la figura 24-9 corresponden a los así designados con las mismas letras en el diagrama de presión-volumen de la figura 24-8. En la figura 24-9 vemos que aumenta la entropía durante los procesos AB, la entropía de la sustancia de trabajo. De la ecuación 24-2 se deduce que el incremento es $|Q_H|/T_H$ porque se transfiere calor Q_H a la sustancia de trabajo reversiblemente y a

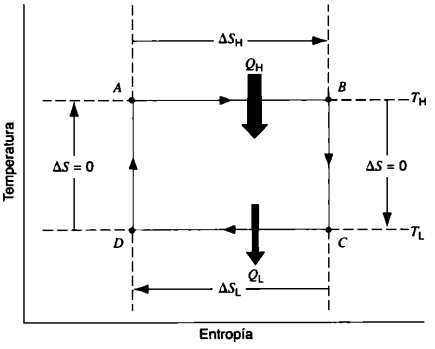


FIGURA 24-9. Ciclo de Carnot representado en una gráfica de temperatura-entropía. Los cambios de entropía tienen lugar durante los procesos *AB* y *CD*, pero no durante los procesos *BC* ni *DA*. La gráfica tendrá esta forma rectangular cualquiera que sea la naturaleza de la sustancia de trabajo.

temperatura constante T_H. Asimismo, durante el proceso *CD* de la figura 24-9 se transfiere calor Q_L (reversiblemente y a una temperatura constante T_L) de la sustancia de trabajo, y por lo mismo su entropía disminuye. Los procesos *BC* y *DA* de la figura 24-9 son adiabáticos, es decir, no hay transferencia reversible de calor de modo que, una vez más, según la ecuación 24-2, la entropía permanece constante. La figura 24-9 muestra claramente que el ciclo de Carnot consta de dos procesos isotérmicos (donde la temperatura no cambia) y de dos procesos *isentrópicos* (durante los cuales la entropía permanece constante).

Dado que la máquina opera en un ciclo, durante éste la sustancia de trabajo ha de retornar una y otra vez a un estado cualquiera seleccionado arbitrariamente. Si X representa una propiedad cualquiera del estado de la sustancia de trabajo como presión, temperatura, volumen, energía interna y entropía, debemos tener $\Delta X = 0$ en todo ciclo. En concreto, tendremos

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{y} \quad \Delta S = 0 \tag{24-6}$$

en todos los ciclos de la sustancia. Más adelante nos serviremos de las conclusiones anteriores.

Eficiencia de una máquina de Carnot

El propósito de una máquina es transformar en trabajo la mayor parte posible del calor extraído Q_H. El éxito con que lo hace la medimos por su *eficiencia térmica* ϵ, definida como el trabajo que realiza por ciclo ("lo que se obtiene") dividido entre la energía calorífica que absorbe por ciclo ("por lo que se paga"), esto es,

$$\epsilon = \frac{\text{energía que se obtiene}}{\text{energía que se paga}} = \frac{|W|}{|Q_H|}. \tag{24-7}$$

Apliquemos la primera ley de la termodinámica ($\Delta E_{int} = Q + W$) a la sustancia de trabajo mientras pasa por el ciclo de operación. Q es la transferencia *neta* de calor por ciclo, W es el trabajo *neto* y (según la ecuación 24-6) $\Delta E_{int} = 0$. Entonces esa ley de convierte en

$$|W| = |Q_H| - |Q_L|. \tag{24-8}$$

Al combinar las ecuaciones 24-7 y 24-8 queda

$$\epsilon = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|}. \tag{24-9}$$

Veamos ahora lo que las consideraciones basadas en la entropía nos dicen sobre el funcionamiento de una máquina de Carnot. En ella se producen dos transferencias reversibles de calor y, por tanto, dos cambios de entropía, uno (ΔS_H) a una temperatura T_H y el otro (ΔS_L) a T_L. Como nos recuerda la ecuación 24-6, el cambio neto de entropía por ciclo ha de ser cero, así que conforme a la figura 24-9,

$$\Delta S_H = -\Delta S_L, \tag{24-10}$$

que por ser negativo ΔS_L podemos escribir así

$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L}. \tag{24-11}$$

La cantidad a la izquierda es la magnitud del cambio de entropía en el depósito de temperatura alta y la de la derecha es la magnitud del cambio en el depósito de temperatura baja. Con base en la ecuación 24-11 vemos que, como $T_H > T_L$, hemos de tener $|Q_H| > |Q_L|$. Dicho de otra manera, se extrae más energía en forma de calor del primer depósito que la que se suministra al segundo.

Combinando las ecuaciones 24-9 y 24-11 obtenemos la eficiencia de una máquina de Carnot:

$$\epsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad \text{(Eficiencia de Carnot).} \tag{24-12}$$

Puesto que $T_L < T_H$, la máquina necesariamente tiene una eficiencia térmica menor que la unidad, es decir, menor que el 100%. Esto se comprueba en la ecuación 24-7, la cual muestra que sólo una parte de la energía calorífica extraída del depósito de alta temperatura está disponible para hacer trabajo; el resto se suministra al de baja temperatura. En la Sección 24-7 demostraremos que *ninguna máquina real puede tener una eficiencia térmica mayor que la calculada a partir de la ecuación 24-12.*

Nótese que, al obtener la ecuación 24-12, no fue necesario especificar la naturaleza de la sustancia de trabajo y tampoco tuvimos que hacerlo. Concluimos lo siguiente:

> *La ecuación 24-12 indica la eficiencia de todas las máquinas de Carnot que funcionan entre las mismas dos temperaturas fijas sin que importe la naturaleza de su sustancia de trabajo.*

En busca de una máquina "perfecta"

Los inventores tratan sin cesar de mejorar la eficiencia de las máquinas reduciendo la energía $|Q_L|$ que "se desperdicia" durante cada ciclo. Su sueño es crear la *máquina perfecta*, representada gráficamente en la figura 24-10, en la cual reducimos

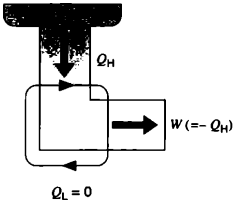


FIGURA 24-10. Elementos de una máquina perfecta, es decir, la que convierte el calor Q_H procedente de un depósito de alta temperatura en el trabajo W con una eficiencia del 100%.

Q_L a cero y convertimos Q_H totalmente en trabajo. Esta máquina en un trasatlántico, por ejemplo, podría extraer calor del mar y utilizarlo para impulsar los propulsores, sin consumo de combustible. Un automóvil equipado con ella podría extraer energía calorífica del aire ambiental y usarlo para impulsarse, una vez más sin consumo de energía. Pero todo ello no pasa de ser un hermoso sueño. Al examinar detenidamente la ecuación 24-12 vemos que podemos alcanzar una eficiencia de 100% en la máquina (es decir $\epsilon = 1$) sólo si $T_L = 0$ o $T_H \rightarrow \infty$, condiciones imposibles de cumplir. En cambio, tras décadas de experiencia práctica en la ingeniería se ha llegado a la siguiente versión alterna de la segunda ley de la termodinámica:

> *No es posible una serie de procesos cuyo único resultado sea absorber calor de un depósito térmico y la conversión completa de esta energía en calor.*

En una palabra, *no existe la máquina perfecta.*

En resumen, la eficiencia térmica dada por la ecuación 24-12 se aplica tan sólo a los motores de Carnot. Las máquinas reales, en que los procesos que forman su ciclo no son reversibles, tienen una eficiencia menor. Si un automóvil recibiera su energía de una máquina de Carnot, su eficiencia sería aproximadamente de 55% de acuerdo con ecuación 24-12; su eficiencia real está alrededor del 25%. Una planta de energía nuclear, tomada en su conjunto, es una máquina. Su depósito de alta temperatura es el núcleo del reactor y su depósito de baja temperatura es un río cercano. Se efectúa trabajo en una turbina de vapor, que activa un alternador y genera energía eléctrica. Si la planta se opera como una máquina de Carnot, su eficiencia alcanzaría 40%; su eficiencia real es de 30%, aproximadamente. Al diseñar cualquier tipo de máquina, no es posible superar el límite de la eficiencia que impone la ecuación 24-12.

Otras máquinas reversibles

La ecuación 24-12 no se aplica a todas las máquinas reversibles, sino exclusivamente a las que tienen dos (y sólo dos) depósitos térmicos, como se aprecia en la figura 24-7. En una palabra, se aplica sólo a las máquinas de Carnot. Por ejemplo, la figura 24-11 contiene el ciclo de operación de una *máquina ideal de Stirling* (es decir, reversible). Al compararlas con el ciclo de Carnot en la figura 24-8 vemos que ambas máquinas tienen transferencias isotérmicas de calor a las temperaturas T_H y T_L. Sin embargo, en la figura 24-11 las dos isotermas del ciclo de la máquina de Stirling están conectadas no por procesos adiabáticos como la máquina de Carnot, sino por procesos con volumen constante. Para aumentar la temperatura reversiblemente de un gas con volumen constante de T_L a T_H (como en el proceso DA de la figura 24-11) se requiere transferir calor a la sustancia de trabajo desde un depósito térmico cuya temperatura pueda modificarse suavemente entre esos límites. Las transferencias reversibles de calor (y los correspondientes cambios de entropía) ocurren sólo en dos de los procesos que forman el ciclo de una máquina de Carnot, pero se realizan en los cuatro procesos que forman el ciclo de una máquina de Stirling. Los cuatro intercambios de calor deben tenerse en cuenta al obtener la eficiencia térmica de esta última máquina. Su eficiencia será menor que la de Carnot cuando opera entre dos temperaturas iguales. A diferencia de las máquinas ideales de Stirling, las reales tendrán eficiencias aún menores.

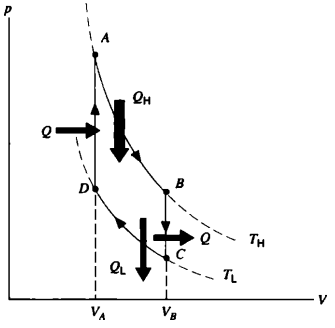


FIGURA 24-11. Diagrama pV para la sustancia de trabajo de una máquina ideal de Stirling (es decir, reversible), que para facilitar la explicación se supone que es un gas ideal. Compárela con el ciclo de la máquina de Carnot en la figura 24-8. Todo ciclo consta de dos procesos isotérmicos, pero en la máquina de Stirling están conectados por dos procesos con volumen constante (no con entropía constante), en que también se dan transferencias de calor.

PROBLEMA RESUELTO 24-5. La turbina de una planta eléctrica recibe vapor de una caldera a 520°C y lo expulsa hacia un condensador a 100°C. ¿Cuál es su eficiencia máxima posible?

Solución La eficiencia máxima es la de una máquina de Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas o, según la ecuación 24-12,

$$\epsilon_{máx} = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{(273 + 100)\ \text{K}}{(273 + 520)\ \text{K}}$$

$$= 0.53 \quad \text{o} \quad 53\%$$

Nótese que las temperaturas en la ecuación 24-12 *han* de expresarse en kelvins. A causa de la fricción, de la turbulencia y las transferencias indeseables de calor, pueden conseguirse eficiencias reales aproximadamente de 40% en una turbina de este tipo. Adviértase que la eficiencia teórica máxima depende *sólo* de las dos temperaturas en cuestión, no de las presiones ni de otros factores.

24-6 ENTROPÍA Y EL DESEMPEÑO DE LOS REFRIGERADORES

El *refrigerador* es un aparato que aprovecha el trabajo para transferir energía térmica de un depósito de baja temperatura a otro de alta temperatura, al repetir continuamente una serie establecida de procesos termodinámicos. Por ejemplo, en un refrigerador casero, un compresor eléctrico realiza trabajo para transferir energía térmica del compartimiento de alimentos (depósito de baja temperatura) al cuarto (depósito de alta temperatura).

El *acondicionador de aire* es un refrigerador. Su depósito de baja temperatura es el cuarto que debe ser enfriado y su depósito de alta temperatura es el exterior (supuestamente más caliente). Una *bomba de calor*, que también cae dentro de esta categoría, es un acondicionador de aire que puede funcionar a la inversa para calentar un cuarto. Éste constituye ahora el depósito de alta temperatura y se le transfiere calor desde el exterior (supuestamente más frío).

La figura 24-12 contiene los elementos básicos de un refrigerador. Si suponemos que los procesos de su funcionamiento son reversibles, tendrá un *refrigerador ideal*. Al comparar las figuras 24-12 y 24-7 vemos que se trata simplemente de una máquina de Carnot que funciona hacia atrás, invertidas las direcciones de las transferencias de energía tanto en forma de calor como de trabajo. Llamamos *refrigerador de Carnot* al refrigerador ideal de la figura 24-12.

Al diseñador de un refrigerador le gustaría extraer la mayor cantidad posible de calor $|Q_L|$ del depósito de baja temperatura ("lo que queremos") con el mínimo de trabajo ("por lo que se paga"). Como medida de la eficiencia de un refrigerador tomamos la razón

$$K = \frac{\text{lo que quiere}}{\text{por lo que paga}} = \frac{|Q_L|}{|W|}. \qquad (24\text{-}13)$$

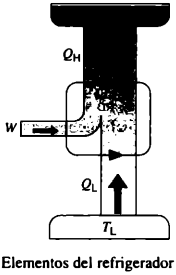


FIGURA 24-12. Elementos del refrigerador de Carnot. Las dos puntas de las flechas negras en el ciclo central indican la sustancia que opera en un ciclo, como si se tratara de una gráfica de pV. A la sustancia de trabajo se le transfiere calor Q_L desde el depósito de baja temperatura, y al de alta temperatura se le transfiere calor Q_H desde la sustancia de trabajo. Algo en el ambiente realiza trabajo W en el refrigerador (sobre la sustancia de trabajo).

Cuanto mayor sea el valor de K, denominado *coeficiente de desempeño*, más eficiente será el refrigerador.

La primera ley de la termodinámica, aplicada a la sustancia de trabajo del refrigerador, nos da

$$|W| = |Q_H| - |Q_L|$$

así que la ecuación 24-13 se convierte en

$$K = \frac{|Q_L|}{|Q_H| - |Q_L|}. \qquad (24\text{-}14)$$

En el refrigerador de Carnot se cumple la ecuación 24-11, porque éste no es más que una máquina de Carnot que funciona a la inversa. La combinamos con la ecuación 24-14 y, luego de unas cuantas operaciones algebraicas, obtendremos

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L} \quad \text{(Refrigerador de Carnot)} \qquad (24\text{-}15)$$

En un acondicionador ordinario de aire, $K \approx 2.5$, lo cual significa (Ec. 24-13) que la unidad extrae del cuarto 2.5 J de energía térmica por cada joule de energía eléctrica recibida. Como se observa en la ecuación 24-15, el valor de K se agranda a medida que las temperaturas de ambos depósitos se vuelven casi idénticas. Por ello las bombas de calor son más eficaces en climas templados que en aquellos donde la temperatura externa fluctúa entre límites amplios.

En busca del refrigerador "perfecto"

Sería magnífico poseer un refrigerador al que no tuviéramos que introducirle trabajo, es decir, que funcionara sin ser enchufado. En la figura 24-13 vemos otro "sueño del inventor", un *refrigerador perfecto* donde $W = 0$, por lo cual (Ec. 24-13) $K \to \infty$. Pero como veremos luego, violaría la segunda ley de la termodinámica.

Tomemos como nuestro sistema la sustancia de trabajo y también los dos depósitos de calor. Sólo incluyendo ambos es posible asegurarnos de que el sistema esté cerrado. Como la unidad opera en un ciclo, la entropía de la sustancia no cambia durante un ciclo. Sin embargo, la entropía de los depósitos

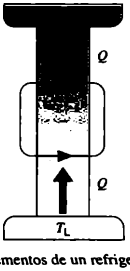


FIGURA 24-13. Elementos de un refrigerador perfecto, esto es, un refrigerador que transfiere calor de un depósito de baja temperatura a otro de alta temperatura sin entrada de trabajo.

sí se altera y el cambio neto de entropía en el sistema cerrado entero (Fig. 24-13) es

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_L} + \frac{|Q|}{T_H},$$

donde el calor Q sale del depósito de baja temperatura y, en la misma cantidad, entra en el de alta temperatura. Dado que $T_H > T_L$, el cambio neto de entropía por ciclo en un refrigerador perfecto sería negativo y esto viola la segunda ley de la termodinámica. Si queremos que el refrigerador funcione, habrá que enchufarlo.

El resultado anterior nos lleva a una tercera formulación equivalente de la segunda ley, llamada frecuentemente la versión de Clausius, en honor de Rudolph Clausius (1822-1888) quien propuso el concepto de entropía:

> *No es posible ningún proceso cuyo único resultado sea la transferencia de calor de un depósito a cierta temperatura a otro de temperatura más elevada.*

En síntesis, *no existen los refrigeradores perfectos.*

PROBLEMA RESUELTO 24-6. Un refrigerador casero, cuyo coeficiente de desempeño K es 4.7, extrae calor de un compartimiento de alimentos con una rapidez de 250 J/ciclo. *a)* ¿Cuánto trabajo por ciclo se requiere para operarlo? *b)* ¿Cuánto calor por ciclo se suministra al cuarto?

Solución *a)* La definición básica del coeficiente de desempeño, ecuación 24-13, relaciona K con el trabajo efectuado y con el calor Q_L extraído del depósito de baja temperatura. Al resolver la ecuación para W se obtiene

$$|W| = \frac{|Q_L|}{K} = \frac{250\ \text{J/ciclo}}{4.7} = 53\ \text{J/ciclo}.$$

b) La aplicación de la primera ley de la termodinámica a la sustancia de trabajo del refrigerador nos da

$$-|Q_H| + |Q_L| + |W| = \Delta E_{int}.$$

Aquí $\Delta E_{int} = 0$ porque la sustancia opera en un ciclo. La solución de la ecuación anterior $|Q_H|$ y la inserción de los datos conocidos producen

$$\begin{aligned}|Q_H| &= |W| + |Q_L| \\ &= 53\ \text{J/ciclo} + 250\ \text{J/ciclo} = 303\ \text{J/ciclo}.\end{aligned}$$

Vemos que el refrigerador es un calentador eficiente del cuarto. Pagando 53 J de energía (para activar el compresor) se consiguen 303 J de energía calorífica suministrada al cuarto. Si los calentamos con un aparato eléctrico, obtendríamos apenas 53 J de energía calorífica por cada 53 J de trabajo pagado.

PROBLEMA RESUELTO 24-7. Una bomba de calor es un aparato que, al operar como un refrigerador, puede calentar una casa transfiriendo energía calorífica del exterior de la casa a su interior; el proceso lo activa el trabajo hecho en el aparato. La temperatura externa es −10°C y la interna debe ser mantenida a 22°C. Para mantener la temperatura recuperando las pérdidas normales de calor es preciso introducir calor en el interior con una rapidez de 16 kW. ¿Con qué rapidez mínima debe suministrarse energía a la bomba?

Solución El depósito de temperatura baja es todo el exterior a una temperatura de $T_L = (273 - 10) = 263$ K, y el de temperatura baja es el interior de la casa a $T_H = (273 + 22) = 295$ K. El coeficiente de desempeño máximo de la bomba está dado por la ecuación 24-15, es decir

$$K = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{263\ \text{K}}{295\ \text{K} - 263\ \text{K}} = 8.22.$$

La aplicación de la primera ley de la termodinámica a la ecuación 24-13 nos da

$$K = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{|Q_H| - |W|}{|W|}.$$

Al resolver para $|W|$ y dividir entre Δt —la duración de un ciclo—, el resultado expresado en función de la potencia es

$$|W/\Delta t| = \frac{|Q_H/\Delta t|}{K + 1} = \frac{16\ \text{kW}}{8.22 + 1} = 1.7\ \text{kW}.$$

En esto radica la "magia" de la bomba de calor. Se usa la bomba como refrigerador para calentar la casa al enfriar el ambiente externo; de ese modo se suministran 16 kW a su interior en forma de calor, pero apenas hay que pagar los 1.7 kW necesarios para hacer funcionar la bomba.

Los 1.7 kW constituyen un mínimo teórico, porque se basan en la suposición de que la bomba es un refrigerador de Carnot. En la práctica se requerirá mayor potencia de entrada pero aún así se logra un gran ahorro en comparación —digamos— con la calefacción por medio de calentadores eléctricos.

24-7 EFICIENCIA DE LAS MÁQUINAS REALES

En esta sección queremos demostrar que ninguna máquina real posee una eficiencia mayor que la de una máquina de Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas. En otras palabras, ninguna máquina real puede tener una eficiencia mayor que la dada por la ecuación 24-12.

Supongamos que un inventor construyó una máquina, la máquina X, cuya eficiencia ϵ_X —según se afirma— supera ϵ_C, la eficiencia de la máquina de Carnot. Es decir,

$$\epsilon_X > \epsilon_C \quad \text{(una afirmación)}. \tag{24-16}$$

Acoplemos la máquina X a un refrigerador de Carnot, como en la figura 24-14*a*. Ajustamos las carreras de él de manera que el trabajo que requiere por ciclo sea idéntico al que genera la máquina X. Así pues, no se realiza trabajo (externo) en la combinación *máquina + refrigerador*, ni ella lo realiza en la figura 24-14*a*, que tomamos como nuestro sistema.

Si la ecuación 24-16 es verdad entonces, según la definición de eficiencia (Ec. 24-7), debemos tener

$$\frac{|W|}{|Q_{HX}|} > \frac{|W|}{|Q_{HC}|}.$$

Aquí Q_{HX} es el calor extraído del depósito de alta temperatura por la máquina X y Q_{HC} es la misma cantidad para el refrigerador de Carnot cuando opera como máquina. Esta desigualdad requiere que

$$|Q_{HC}| > |Q_{HX}|. \tag{24-17}$$

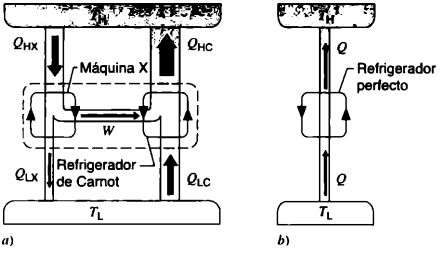


FIGURA 24-14. *a*) La máquina X hace funcionar un refrigerador de Carnot. Si fuera más eficiente que una máquina de Carnot, la combinación sería equivalente al refrigerador perfecto que aparece en *b*).

Apliquemos ahora la primera ley de la termodinámica primero a las sustancias de trabajo del refrigerador de Carnot y luego a las de la máquina X. Como hemos decidido que el trabajo hecho por ella sea igual al que se realiza en el refrigerador de Carnot, tendremos

$$|W| = |Q_{HC}| - |Q_{LC}| = |Q_{HX}| - |Q_{LX}|,$$

que podemos escribir así:

$$|Q_{HC}| - |Q_{HX}| = |Q_{LC}| - |Q_{LX}| = Q. \quad (24\text{-}18)$$

Debido a la ecuación 24-17, la cantidad Q en la ecuación 24-18 debe ser positiva.

La comparación de la ecuación 24-18 con la figura 24-14 indica lo siguiente: el efecto neto de la máquina X y del refrigerador de Carnot, al funcionar juntos, consiste en transferir energía calorífica Q del depósito de temperatura baja al de temperatura alta sin que se requiera trabajo (Fig. 24-14*b*). Así, la combinación opera como el refrigerador perfecto de la figura 24-13, cuya existencia viola la segunda ley de la termodinámica.

Algo debe andar mal. Concluimos que la afirmación hecha en la ecuación 24-16 no puede ser correcta y que

Ninguna máquina real puede tener una eficiencia mayor que la de la máquina de Carnot cuando funciona entre las mismas dos temperaturas iguales.

A lo sumo, su eficiencia será igual a la de la máquina de Carnot, que se da en la ecuación 24-12. En tal caso, la máquina *X es también* una máquina de Carnot. Puesto que las máquinas reales son irreversibles, su eficiencia siempre será menor al límite fijado en la ecuación 24-12.

PROBLEMA RESUELTO 24-8. El inventor de la máquina X sostiene que tiene una salida de trabajo $W = 120$ J por ciclo y que opera entre los puntos de ebullición y de congelación del agua, con una eficiencia de $\epsilon_X = 75\%$. *a*) ¿Qué relación hay entre esta eficiencia y la de una máquina de Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas? *b*) Si en verdad existiera la máquina X, ¿cuánta energía calorífica Q_H extraería del depósito de alta temperatura por ciclo? *c*) Si en verdad existiera, ¿cuánta energía calorífica Q_L suministraría al depósito de baja temperatura por ciclo? *d*) Suponiendo una vez que existiera, ¿cuál sería el cambio de entropía por ciclo de la máquina entera, incluyendo la sustancia de trabajo y ambos depósitos?

Solución *a*) A partir de la ecuación 24-12, que se aplica sólo a la máquina de Carnot, tenemos

$$\epsilon_C = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$
$$= 1 - \frac{(273 + 0)\text{ K}}{(273 + 100)\text{ K}} = 0.268 \approx 27\%.$$

Como hemos demostrado en esta sección, ninguna máquina real puede tener una eficiencia mayor que la de una máquina de Carnot que opera entre dos temperaturas iguales. Sin importar lo que diga el inventor, la máquina X ha de tener una eficiencia menor de 27%. Algo anda mal.

b) De acuerdo con la ecuación 24-7 tenemos

$$|Q_H| = \frac{|W|}{\epsilon_X} = \frac{120\text{ J}}{0.75} = 160\text{ J}.$$

c) Al aplicar la primera ley de la termodinámica a la sustancia de trabajo de la máquina X se obtiene

$$|W| = |Q_H| - |Q_L|.$$

(Como la sustancia de trabajo opera en un ciclo, $\Delta E_{int} = 0$). Al resolver la ecuación anterior para Q_L y al sustituir los datos numéricos, se obtiene

$$|Q_L| = |Q_H| - |W| = 160\text{ J} - 120\text{ J} = 40\text{ J}.$$

d) El sistema que escogimos es cerrado y por ello puede aplicarse la segunda ley de la termodinámica en la forma de la ecuación 24-5. Teniendo presente esto, y como la máquina opera en un ciclo, el cambio de entropía por ciclo de su sustancia de trabajo es cero, por lo que tendremos

$$\Delta S_X = \Delta S_H + \Delta S_L + \Delta S_{WS}$$
$$= -\frac{|Q_H|}{T_H} + \frac{|Q_L|}{T_L} + 0$$
$$= -\frac{160\text{ J}}{(273 + 100)\text{ K}} + \frac{40\text{ J}}{(273 + 0)\text{ K}} + 0$$
$$= -0.429\text{ J/K} + 0.147\text{ J/K} + 0 = -0.28\text{ J/K}.$$

Los términos de la derecha son, respectivamente, el cambio de entropía del depósito de alta temperatura (cantidad negativa), el del depósito de baja temperatura (cantidad positiva) y el de la sustancia de trabajo.

Nótese que, según lo previsto, la entropía de la máquina X *disminuye* estacionariamente ($\Delta S_X < 0$), a medida que avanza el ciclo. Esto viola claramente la segunda ley, según la cual la entropía de un sistema cerrado nunca se reduce. Algo anda mal una vez más.

24-8 LA SEGUNDA LEY REVISADA

Hasta ahora hemos explicado tres formulaciones de la segunda ley de la termodinámica como se aplica a los sistemas cerrados, a saber:

1. La entropía de esta clase de sistemas nunca disminuye. En otras palabras, como se muestra en la ecuación 24-5, $\Delta S \geq 0$.

2. No es posible transformar la energía calorífica en trabajo con una eficiencia de 100%. Es decir que no existen las máquinas perfectas.

3. No puede transferirse energía calorífica de un depósito de baja temperatura a otro de alta temperatura sin realizar trabajo. Dicho de otra manera, no existen los refrigeradores perfectos.

A primera vista los enunciados anteriores parecen muy distintos, pero son totalmente equivalentes. Si aceptamos uno de ellos, habrá que aceptar también los dos restantes. Si uno de los tres es falso, los otros dos también lo serán.

En la Sección 24-5 demostramos que el enunciado 2 se deduce del 1 y en la Sección 24-6 comprobamos que el enunciado 3 también se deduce de él. En la presente sección vamos a probar que los enunciados 2 y 3 son completamente equivalentes.

Reflexione sobre lo que sucedería si el enunciado 2 fuera falso y si se pudiera construir una máquina perfecta que convirtiera el calor Q_H enteramente en el trabajo W. Utilicemos esta salida de trabajo para activar un refrigerador de Carnot, como el de la figura 24-15*a*. El refrigerador transfiere calor $|Q_{HC}| = |Q_{LC}| + |W|$ al depósito de temperatura alta.

Consideremos como un solo artefacto la combinación de la máquina perfecta y del refrigerador de Carnot, como lo indican las líneas punteadas de la frontera en la figura 24-15*a*. El trabajo W es una característica interna del artefacto y no representa un intercambio de energía entre él y su ambiente. El efecto global de la combinación de las máquinas consiste en extraer calor $|Q_{LC}|$ del depósito de baja temperatura y en suministrarle al de alta temperatura una cantidad neta igual a $|Q_{HC}| - |Q_H|$. Sin embargo, $|Q_H| = |W|$, y por ello, al aplicar la primera ley de la termodinámica al refrigerador de Carnot, se obtiene

$$|Q_{HC}| - |Q_H| = |Q_{HC}| - |W| = |Q_{LC}|.$$

Por tanto, como se aprecia en la figura 24-15*b*, la máquina combinada opera como un refrigerador perfecto: extrae calor $|Q_{LC}|$ del depósito de baja temperatura y lo transfiere al de alta temperatura, sin que se realice trabajo externo.

En conclusión, si podemos construir una máquina perfecta, también podemos fabricar un refrigerador perfecto. Aplicando un argumento similar se demuestra que, si es posible hacer un refrigerador perfecto, también lo será construir una máquina perfecta. De ahí que una violación a la formulación 2 de la segunda ley implique una violación a la formulación 3 y a la inversa. Las dos formulaciones son lógicamente equivalentes.

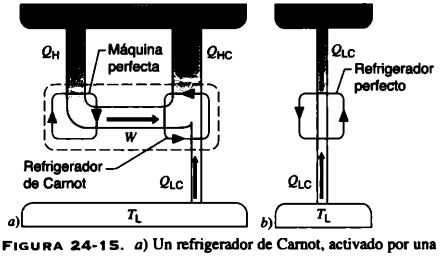


FIGURA 24-15. *a*) Un refrigerador de Carnot, activado por una máquina perfecta equivale a *b*) un refrigerador perfecto.

24-9 UNA PERSPECTIVA ESTADÍSTICA DE LA ENTROPÍA

Al hablar de la entropía, nada hemos dicho hasta ahora sobre el hecho de que la materia está formada por átomos. En la presente sección nos concentramos en él y veremos que podemos aproximar el concepto de entropía desde ese punto de vista. Comenzaremos con el simple problema de contar las formas en que puede dividirse un número pequeño de átomos (para generalizar los llamaremos moléculas) entre las dos mitades de una caja. Es un problema en el área de la *mecánica estadística*.

Imagine que distribuimos —en forma manual— ocho moléculas entre las dos mitades de una caja. Dado que las moléculas son indistinguibles, podemos escoger una y meterla dentro de la caja en ocho formas diferentes. Tendremos entonces siete opciones con la segunda molécula, seis con la tercera, y así sucesivamente. El número total de las formas en que podemos meter ocho moléculas es el producto de estas opciones independientes, es decir,

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40{,}320.$$

Lo anterior se abrevia matemáticamente así:

$$8! = 40{,}320,$$

donde 8! se lee "ocho factorial". Con calculadora puede obtener probablemente los factoriales. Por definición, $0! = 1$, dato que nos servirá más adelante.

Pero no todas las 40,320 formas son independientes. Hemos exagerado al contar, y esa cifra resulta demasiado grande. Examine, por ejemplo, la *configuración* de la figura 24-16*a*, donde hay casualmente cinco moléculas en una mitad de la caja y tres en la otra. Como son idénticas, con sólo observar las cinco no es

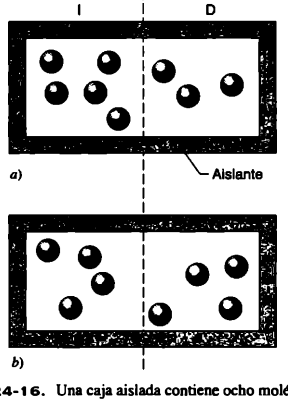


FIGURA 24-16. Una caja aislada contiene ocho moléculas de gas. Cada una tiene la misma probabilidad de estar en la mitad izquierda (I) de la caja que en la derecha (D). El arreglo en *a*) corresponde a la configuración IV de la tabla 24-1, y el arreglo en *b*) a la configuración V.

posible deducir el orden en que las ponemos allí. De hecho, podemos colocarlas en $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ formas diferentes, todas las cuales dan origen a la misma configuración. De modo parecido, podemos poner las tres moléculas en la otra mitad de la caja en $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ formas diferentes.

Para calcular el número de formas verdaderamente distintas de llegar a la configuración de la figura 24-16*a*, hay que dividir 40 320 entre 120 y también entre 6, lo cual nos da 56. Llamamos *microestado* de la configuración a esas 56 formas y *multiplicidad* w de esa configuración al número de microestados que la originan. Así pues, la configuración de la figura 24-16*a* tiene una multiplicad de 56, lo cual significa que contiene 56 microestados.

Al ampliar nuestra consideración de ocho a N moléculas, la multiplicidad de la configuración donde N_1 moléculas se encuentran en una mitad de la caja y N_2 en la otra está dada por

$$w = \frac{N!}{N_1!\,N_2!}. \qquad (24\text{-}19)$$

Podemos servirnos de esta relación general para verificar que, en ocho moléculas ($N = 8$), la multiplicidad de la configuración de la figura 24-16*a* ($N_1 = 5, N_2 = 3$) es efectivamente 56.

En la tabla 24-1 vemos que con ocho moléculas hay nueve configuraciones, a las cuales pueden asignárseles números romanos. También se muestran las multiplicidades, calculadas a partir de la ecuación 24-19. Se observa que la figura 24-16*a* contiene la configuración IV y la figura 24-16*b* la configuración V. El número total de microestados del sistema de ocho moléculas es 256 ($= 2^8$).

La suposición básica del enfoque estadístico de la termodinámica acaso resulte sorprendente:

Todos los microestados de un sistema son igualmente probables.

Así pues, mientras las ocho moléculas del sistema de la figura 24-16 se desplazan en forma aleatoria, el sistema pasará en promedio el mismo tiempo en cada uno de los 256 microestados que se enlistan en la tabla 24-1. Adviértase que *ninguna* de las *configuraciones tiene* la misma probabilidad. De hecho, el sistema pasará un tiempo 70 veces mayor en la configuración V que en la configuración I, porque aquélla contiene 70 veces más microestados. Sin duda la configuración V es la más favorecida, con la máxima probabilidad de ocurrencia. Esto empieza a parecernos conocido, pues nos recuerda que en el equilibrio térmico tenderemos a encontrar las moléculas de un gas distribuidas uniformemente en el volumen de su contenedor.

Las ocho moléculas en la caja ($N = 8$) no son muchas para basar en ellas una conclusión sobre el mundo real. Aumentemos N a 50 (todavía pocas) y comparemos de nuevo el tiempo en que las 25 moléculas permanecen en las mitades de la caja con el que permanecen en una de las dos mitades. La razón no es 70 a 1 (como en $N = 8$ en la tabla 24-1), sino aproximadamente 1.2×10^{14} a 1. Si pudiéramos contar los microestados de la configuración $N_1 = N_2 = 25$ con una rapidez de uno por segundo, tardaríamos unos cuatro millones de años en terminar. Imagine cuántos microestados hay en el caso mucho más razonable de $N \approx 10^{22}$ que es la cantidad aproximada de moléculas de aire en el globo de un niño. La probabilidad es entonces abrumadora en una distribución uniforme de las moléculas entre las dos mitades de la caja.

En valores grandes de N, casi todos los microestados corresponden a una división esencialmente igual de las moléculas entre las dos mitades de la caja, como se indica en la figura 24-17. Aun cuando la temperatura y la presión medidas del gas permanecen constantes, en el nivel molecular el gas se difunde indefinidamente y sus moléculas "visitan" todos los microestados posibles con la misma probabilidad. Pero tan pocos se encuentran fuera del estrecho pico central de la figura 24-17 que podemos suponer que las moléculas del gas siempre se dividen uniformemente entre las dos mitades de la caja. Cabe la posibilidad de que todas se encuentren en una mitad de la caja, pero que para muchas de ellas esa mitad sea pequeña y evanescente.

TABLA 24-1 Ocho moléculas en una caja

Configuración	N_1	N_2	*Multiplicidad*[a] w	*Entropía* (10^{-23} J/K)[b]
I	8	0	1	0
II	7	1	8	2.87
III	6	2	28	4.60
IV	5	3	56	5.56
V	4	4	70	5.86
VI	3	5	56	5.56
VII	2	6	28	4.60
VIII	1	7	8	2.87
IX	0	8	1	0
Número total de microestados			256	

[a] Calculada según la ecuación 24-19 [b] Calculada según la ecuación 24-20

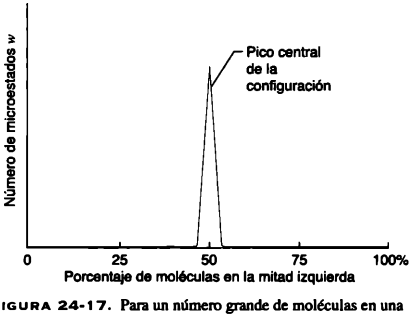


FIGURA 24-17. Para un número grande de moléculas en una caja, gráfica del número de microestados, que requieren que diferentes porcentajes de ellas estén en la mitad izquierda de la caja. Casi todos los microestados corresponden a una participación aproximadamente igual de las moléculas entre las dos mitades de la caja; forman el *pico central de la configuración* en la gráfica. Con $N \approx 10^{22}$, el pico sería demasiado estrecho para trazarlo en la gráfica.

Vemos que los sistemas tienden espontáneamente a alcanzar las configuraciones con el máximo valor de w, esto es, a las que ofrecen la mayor probabilidad de ocurrencia. Vemos, asimismo, que tienden a las configuraciones con la más grande entropía. Debe existir una relación entre ésta y la probabilidad. Tales relaciones han de tener presentes dos hechos:

1. La probabilidad de ocurrencia de dos subsistemas es el *producto* de sus probabilidades individuales.

2. La entropía de un sistema formado por dos subsistemas es la *suma* de sus entropías individuales.

En otras palabras, las probabilidades (como las que se dan al lanzar una moneda) son multiplicativas y las entropías (como en las energías o volúmenes) son aditivas.

Lo anterior indica que la relación entre entropía y probabilidad debe incluir un logaritmo, por ser la forma más simple (y de hecho la única) en que cantidades se multiplican, se relacionan con cantidades que se suman. Por consiguiente,

$$\ln (a \times b) = \ln a + \ln b.$$

El físico austriaco Ludwig Boltzmann descubrió en 1877 la relación existente entre entropía y probabilidad, al proponer la relación logarítmica, denominada actualmente *ecuación de entropía de Boltzmann*,

$$S = k \ln w, \tag{24-20}$$

donde $k(= 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K})$ es la constante de Boltzmann que se mencionó en la Sección 21-5 y w es la multiplicidad asociada a las configuraciones cuya entropía S queremos calcular. Usamos la ecuación 24-20 para calcular la entropía de las nueve configuraciones de la tabla 24-1.

Al emplear la ecuación 24-19 para calcular w puede surgir el problema de que la calculadora presente una señal de desbordamiento, si se intenta obtener el factorial de un número mucho mayor que unas cuantas centenas, cantidad todavía muy pequeña por lo que respecta a los sistemas macroscópicos. Por fortuna, se trata de una excelente aproximación (denominada *aproximación de Stirling*) no de $N!$, sino $\ln N!$ Como se observa en las ecuaciones 24-19 y 24-20, $\ln N!$ es lo único que necesitamos para calcular la entropía. La aproximación de Stirling es

$$\ln N! \approx N \ln N - N. \tag{24-21}$$

(A propósito, el Stirling de la aproximación y el de la máquina que se describe en la figura 24-11 no son la misma persona.)

Entropía y desorden

La ecuación de entropía de Boltzmann (Ec. 24-20) sirve para calcular la entropía de sistemas termodinámicos mucho más complejos que el sencillo que hemos examinado: la distribución de moléculas entre las dos mitades de una caja. Vamos a aplicarlo de modo cualitativo —por ejemplo, a la observación de que una taza de café agitado que se arremolina, finalmente dejará de hacerlo y se detendrá. Vamos a concentrarnos no en la posición de las moléculas (como lo hicimos en el problema de las moléculas dentro de una caja), sino en su velocidad.

El estado final de reposo, en el cual la velocidad de las moléculas sigue una dirección aleatoria, contiene muchos más microestados que el inicial, en el cual la velocidad de la mayor parte de ellas apuntan en dirección del remolino o cerca de él. Dicho de otra manera, hay muchas más formas de asignar la velocidad a las moléculas para producir una taza de café en reposo que para producir una taza de café revuelto. Es decir,

$$w_{\text{en reposo}} > w_{\text{en agitación}}.$$

De la ecuación 24-20 se deduce que

$$S_{\text{en reposo}} > S_{\text{en agitación}}.$$

Conforme a la segunda ley de la termodinámica, el café cambiará espontáneamente en la dirección que acrecienta su entropía si no sufre intervención alguna. Nunca seguirá la dirección contraria, es decir que el comportamiento "natural" es pasar de la perturbación al reposo. Un taza de café en reposo nunca comenzará a agitarse por sí misma.

A menudo asociamos la entropía al *desorden* y la segunda ley de la termodinámica se enuncia en ocasiones como una afirmación de que el desorden siempre aumenta en un sistema cerrado. Esto parece bastante claro tratándose de la taza de café revuelto. El estado final, con los movimientos de sus moléculas dirigidos en forma aleatoria, presenta un desorden mucho mayor que el estado inicial con movimientos dirigidos de cantidades mucho más grandes de moléculas. Sin embargo, por lo regular la asociación de la entropía con el desorden exige una definición rigurosa de este último que refleje el proceso en cuestión. En respuesta al orden evidente en gran parte de nuestra experiencia —la de la vida, por ejemplo—, el físico y escritor científico Timothy Ferris escribió lo siguiente, llevando quizá el concepto a los extremos:

> "La entropía puede disminuir localmente aun cuando se incremente en el nivel cósmico. Podríamos incluso decir que la emoción generada por la vida, el arte, la ciencia y el espectáculo de una bulliciosa ciudad con sus bibliotecas y teatros provoca la emoción de ver derrotada la entropía, al menos en un lugar y durante un tiempo."

PROBLEMA RESUELTO 24-9. *a*) ¿En cuántas formas independientes pueden 200 moléculas dividirse uniformemente entre las dos mitades de una caja? *b*) ¿Cuántos microestados hay que correspondan a 150 moléculas en una mitad y a 50 en la otra?

Solución *a*) En este problema tenemos $N = 200$ y $N_1 = N_2 = 100$. De acuerdo con la ecuación 24-19,

$$w = \frac{N!}{N_1!\,N_2!} = \frac{200!}{100!\,100!} = \frac{2.22 \times 10^{373}}{(3.72 \times 10^{156})(3.72 \times 10^{156})} = 1.60 \times 10^{60}.$$

Nótese cuán grande son los factoriales. Pueden obtenerse con una calculadora manual usando la aproximación de Stirling (Ec. 24-21).

b) En este caso, $N = 200$, $N_1 = 150$ y $N_2 = 50$. Utilizando una vez más la ecuación 24-19 tenemos

$$w = \frac{N!}{N_1!\,N_2!}$$
$$= \frac{200!}{(150!)\,(50!)} = \frac{2.22 \times 10^{373}}{(1.86 \times 10^{261})(1.71 \times 10^{63})}$$
$$= 6.97 \times 10^{48}.$$

Al dividir las dos multiplicidades, nos damos cuenta de que la división 100/100 es unos 200 mil millones de veces más probable que la división 150/50. Al aumentar N, la división $N_1 = N_2$ llega a predominar como se observa en la figura 24-17.

OPCIÓN MÚLTIPLE

24-1 Procesos en una dirección

24-2 Definición del cambio de entropía

1. ¿En cuáles de los siguientes procesos el cambio de entropía es cero?
   A) Isobáricos. B) Isotérmicos.
   C) Adiabáticos. D) Volumen constante.
   E) Ninguno de los anteriores, puesto que $\Delta S > 0$ en todos los procesos.
2. Un mol de un gas ideal se encuentra originalmente a p_0, V_0 y T_0. Se calienta el gas a volumen constante hasta $2T_0$, luego se deja que se expanda a temperatura constante hasta $2V_0$, y finalmente se deja que se enfríe a presión constante hasta una temperatura T_0. El cambio neto de entropía del gas será
   A) $\Delta S = (5R/2)\ln 2$. B) $\Delta S = 5R/2$.
   C) $\Delta S = R \ln 2$. D) $\Delta S = 3R/2$.
   E) $\Delta S = 0$.

24-3 Cambio de entropía en los procesos irreversibles

3. Un bloque de aluminio inicialmente a 80°C se introduce en un contenedor aislado de agua originalmente a 25°C. Poco después el sistema alcanza la temperatura de equilibrio de 31°C.
   a) Durante el proceso
   A) $\Delta S_{\text{aluminio}} > 0$.
   B) $\Delta S_{\text{aluminio}} = 0$.
   C) $\Delta S_{\text{aluminio}} < 0$.
   b) Durante el proceso
   A) $\Delta S_{\text{agua}} > 0$.
   B) $\Delta S_{\text{agua}} = 0$.
   C) $\Delta S_{\text{agua}} < 0$.
   c) Durante el proceso
   A) $|\Delta S_{\text{agua}}| > |\Delta S_{\text{aluminio}}|$.
   B) $|\Delta S_{\text{agua}}| = |\Delta S_{\text{aluminio}}|$.
   C) $|\Delta S_{\text{agua}}| < |\Delta S_{\text{aluminio}}|$.

24-4 Segunda ley de la termodinámica

4. ¿Cuál de los siguientes enunciados es una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica?
   A) El calor fluye sólo de la temperatura alta a la baja.
   B) Los objetos en contacto tienden a tener la misma temperatura.
   C) Cualquier sistema que produzca orden a partir del desorden recibe necesariamente una acción externa.

24-5 Entropía y el desempeño de las máquinas

5. Por cada 2 J de salida de trabajo una máquina de Carnot suministra 3 J de calor a un depósito de baja temperatura.
   a) ¿Qué eficiencia tiene esta máquina de Carnot?
   A) 1/3 B) 2/5 C) 3/5 D) 2/3
   b) En esta máquina $T_L = 27°C$. ¿Qué puede concluirse respecto a T_H?
   A) $T_H = 627°C$. B) $T_H = 227°C$.
   C) $T_H > 627°C$. C) $T_H < 227°C$.
   E) $227°C < T_H < 627°C$.

24-6 Entropía y el desempeño de los refrigeradores

6. Considere una bomba de calor ideal y un calentador eléctrico perfecto. El calentador convierte 100% de la energía eléctrica en energía calorífica; la bomba convierte 100% de la energía eléctrica en trabajo, que luego hace funcionar el refrigerador de Carnot. ¿Cuál es la forma más "eficiente" de calentar una casa? (No tenga en cuenta el mantenimiento de los gastos iniciales.)
   A) El calentador eléctrico siempre es más eficiente.
   B) La bomba de calor siempre es más eficiente.
   C) La bomba de calor es más eficiente si la temperatura externa no es demasiado calurosa.
   D) La bomba de calor es más eficiente si la temperatura exerna no es demasiado fría.

24-7 Eficiencia de las máquinas reales

7. Una máquina real tiene una eficiencia de 33%. Su salida de trabajo es 24 J por ciclo.
   a) ¿Cuánta energía se extrae del depósito de alta temperatura por ciclo?
   A) 8 J B) 16 J C) 48 J D) 72 J
   E) La pregunta puede contestarse sólo si se trata de una máquina de Carnot.
   b) ¿Cuánta energía se suministra al depósito de baja temperatura por ciclo?
   A) 8 J B) 16 J C) 48 J D) 72 J
   E) La pregunta puede contestarse sólo si se trata de una máquina de Carnot.
   c) En esta máquina $T_L = 27°C$. ¿Qué puede concluirse respecto a T_H?
   A) $T_H = 450°C$. B) $T_H = 177°C$.
   C) $T_H > 177°C$. D) $T_H < 177°C$.
   E) $177°C < T_H < 450°C$.
8. Una máquina real opera con una eficiencia del 75% de una máquina de Carnot que funcione entre las dos mismas temperaturas. Tiene una salida de potencia de 100 W y suministra calor a un depósito de baja temperatura a 27°C, con una rapidez de 300 J/s. ¿Qué temperatura tiene el depósito de alta temperatura?
   A) 27°C B) 77°C C) 127°C D) 177°C

24-8 La segunda ley revisada

9. Una persona sostiene que inventó cuatro máquinas que operan entre depósitos de calor a 400 y 300 K. A continuación se

incluyen los datos relativos a cada una por ciclo de operación son:

	$Q_{Entrada}$	Q_{Salida}	$\lvert W \rvert$
Máquina 1	200 J	−175 J	40 J
Máquina 2	500 J	−200 J	400 J
Máquina 3	600 J	−200 J	400 J
Máquina 4	100 J	−90 J	10 J

a) ¿Cuál de estas máquinas viola la primera ley de la termodinámica? (Puede haber más de una respuesta correcta.)
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

b) ¿Cuál de estas máquinas violan la segunda ley de la termodinámica? (Puede haber más de una respuesta correcta.)
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

24-9 Una perspectiva estadística de la entropía

10. Debemos dividir diez partículas idénticas en dos contenedores.
a) ¿Cuántos microestados pertenecen a la configuración de tres partículas en un contenedor y a siete en el otro?
A) 120 B) 30,240
C) 3,628,800 D) 6.3×10^9

b) ¿Cuántas configuraciones distintas son posibles?
A) 1 B) 11
C) 120 D) 1,024
D) 3,628,800

c) ¿Cuál es el total de microestados en el sistema de diez partículas?
A) 1 B) 11
C) 120 D) 1,024
E) 3,628,800

d) ¿Cuál configuración tiene el mayor número de microestados?
A) 0,10 B) 3,7 C) 4,6 D) 5,5

11. Seis moléculas idénticas se encuentran en una caja y dos en otra. Se reúnen las dos cajas y se mezclan las moléculas, de manera que haya cuatro en cada caja. ¿Qué cambio de entropía se realiza cuando esto ocurre?
A) $k/2$ B) $k \ln (5/2)$
C) $k \ln (4/3)$ D) $k \ln 20$

PREGUNTAS

1. ¿Es reversible alguno de los siguientes fenómenos: *a)* romper una botella vacía de refresco; *b)* mezclar un coctel; *c)* darle cuerda a un reloj; *d)* derretir un cubo de hielo en un vaso de té helado; *e)* quemar un trozo de madera; *f)* pinchar una llanta de automóvil; *g)* calentar con electricidad un bloque de metal aislado; *h)* expandir isotérmicamente un gas no ideal contra un pistón; *i)* terminar la "Sinfonía inconclusa"; *j)* escribir este libro?
2. Dé algunos ejemplos de procesos irreversibles de la naturaleza.
3. ¿Hay procesos naturales que sean reversibles?
4. Dé una explicación cualitativa de cómo las fuerzas de fricción entre superficies en movimiento generan energía interna. ¿Por qué no ocurre el proceso inverso (la energía interna que produzca movimiento relativo en las superficies)?
5. ¿Es el ser humano una máquina de calor? Explique su respuesta.
6. ¿Acaso no podríamos definir la eficiencia de una máquina como $\epsilon = \lvert W \rvert / \lvert Q_{Salida} \rvert$ más que como $\epsilon = \lvert W \rvert / \lvert Q_{Entrada} \rvert$? ¿Por qué no lo hacemos?
7. La eficiencia de las plantas de energía nuclear es menor que la de las plantas de combustible fósil. ¿Por qué?
8. ¿Puede una cantidad determinada de energía mecánica convertirse completamente en energía calorífica? Si contesta afirmativamente, dé un ejemplo.
9. Un inventor dice que una casa podría calentarse de la siguiente manera: un sistema parecido al refrigerador extrae calor de la Tierra y rechaza el de la casa. El inventor afirma que el calor suministrado a la casa puede ser mayor que el trabajo realizado por la máquina del sistema. ¿Qué puede comentar al respecto?
10. Comente el enunciado "Una máquina de calor convierte el movimiento mecánico desordenado en movimiento mecánico organizado."
11. ¿Es un concepto posible la máquina de calor que opera entre el agua superficial caliente de un mar tropical y el agua más fría situada debajo de la superficie? ¿Es una idea práctica? (Consúltese "Solar Sea Power" de Clarence Zener, *Physics Today*, enero de 1973, p. 48.)
12. ¿Podemos calcular el trabajo efectuado durante un proceso irreversible en función de la superficie en un diagrama pV? ¿Se lleva a cabo trabajo?
13. Si la máquina de Carnot no depende de la sustancia de trabajo, tal vez las máquinas reales también deberían serlo hasta cierto punto. ¿Por qué entonces, en las máquinas reales, a toda costa queremos encontrar combustibles como carbón, gasolina o materiales fisionables? ¿Por qué no utilizamos la piedra como combustible?
14. ¿En qué condiciones una máquina ideal de calor alcanzaría una eficiencia de 100%?
15. ¿Qué factores disminuyen la eficiencia de una máquina de calor de su valor ideal?
16. Quiere usted mejorar al máximo la eficiencia de una máquina de Carnot. Puede hacerlo aumentando T_H hasta cierto nivel, conservando constante T_L o reduciendo T_L en la misma cantidad y conservando constante T_H. ¿Cuál de estas opciones escogerá?
17. Explique por qué podemos calentar un cuarto dejando abierta la puerta del horno, pero no podemos enfriarla dejando abierta la puerta de un refrigerador.
18. ¿Por qué el combustible del automóvil rinde menos en invierno que en verano?
19. De cuando en cuando los inventores afirman haber perfeccionado un aparato que realiza trabajo útil, sin consumir gasolina (o que consume muy poco). ¿Cuál de las siguientes opciones le parece más verosímil en tales casos: *a)* los inventores tienen razón, *b)* se equivocan en sus mediciones o *c)* son charlatanes? En su opinión, ¿la afirmación debería ser examinada más a fondo por un grupo de especialistas e ingenieros? ¿Se justifican ese esfuerzo y tiempo?
20. Hemos visto que las máquinas reales siempre suministran cantidades importantes de calor a los depósitos de baja temperatura. Parece vergonzoso desperdiciar tanta energía. ¿Por qué no se aprovecha para echar a andar una segunda máquina y que el depósito de baja temperatura de la primera sirva de depósito de alta temperatura a la segunda?
21. Dé ejemplos en que disminuya la entropía de un sistema y explique por qué no se viola la segunda ley de la termodinámica.
22. ¿Violan los seres vivos la segunda ley de la termodinámica? Por ejemplo, cuando un pollo rompe el cascarón, se vuelve cada vez más ordenado y organizado. Sin embargo, para que la entropía

se incrementa requiere desorden y deterioro. ¿Se reduce la entropía de un pollo cuando éste crece?

23. A dos contenedores de gases a distinta temperatura se les aísla del ambiente y se les separa mediante una partición que permite intercambiar calor. ¿Qué deberá suceder para que disminuya la entropía? ¿Aumente? ¿Qué es lo más probable que ocurra?
24. ¿Cambia la entropía en los movimientos meramente mecánicos?
25. Demuestre que la entropía total se incrementa cuando el trabajo se convierte en calor por la fricción entre dos superficies deslizantes. Describa el aumento del desorden.
26. Del Sol fluye energía calorífica hacia la Tierra. Demuestre que la entropía del sistema Tierra-Sol crece durante este proceso.
27. ¿Es verdad que cada día hay menos energía calorífica en el universo? De ser así, ¿por qué?
28. Considere una caja que contiene un número muy pequeño de moléculas, digamos cinco. A veces ocurre por casualidad que todas ellas se hallan en la mitad izquierda de la caja y que la mitad derecha está completamente vacía. Es simplemente lo contrario de la expansión libre, proceso que, según hemos dicho, es *irreversible*. ¿Cómo explica usted esto?
29. Una banda de hule está más caliente que su ambiente, inmediatamente después de ser estirada con gran rapidez; se enfría mucho cuando se deja que se contraiga de repente. Asimismo, una banda de hule que sostenga una carga se contrae al ser calentada. Explique estas observaciones con base en el hecho de que las moléculas de hule se componen de largas cadenas entrelazadas y entrecruzadas de átomos en una orientación más o menos aleatoria.
30. ¿Qué cambio de entropía se realiza —si es que se realiza alguno— cuando un paquete de 52 tarjetas se baraja para darle un arreglo determinado? ¿Es adecuado en este caso el concepto de entropía? Si su respuesta es afirmativa, explique cómo podría lograrse un enfriamiento útil realizando este proceso en forma adiabática.
31. Explique el siguiente comentario de Panofsky y Phillips: "Desde el punto de vista de la física formal sólo hay un concepto asimétrico en el tiempo, la entropía. Pero esto hace razonable suponer que la segunda ley de la termodinámica puede servir para evaluar el sentido del tiempo independientemente de cualquier marco de referencia, es decir, tomaremos como dirección positiva la del desorden estadísticamente creciente o la del aumento de la entropía". (Véase al respecto "The Arrow of Time" de David Layzer, *Scientific American*, diciembre de 1975, p. 56.)
32. Explique la afirmación: "Los rayos cósmicos *disminuyen* continuamente la entropía de la Tierra donde caen". ¿Por qué no contradice la segunda ley de la termodinámica?
33. Cuando juntamos, por ejemplo, los naipes en un mazo o los ladrillos para construir una casa, aumentamos el orden en el mundo físico. ¿Viola esto la segunda ley de la termodinámica? Explique su respuesta.
34. ¿Podemos utilizar en todo el universo la termodinámica terrestre, que se aplica a cuerpos acotados y aislados? De ser así, ¿está acotado el universo y de qué se encuentra aislado?
35. La temperatura y la presión son ejemplos de propiedades *intensivas* de un sistema; su valor de una muestra del sistema es independiente del tamaño de la muestra. Pero la entropía, como la energía interna, es una propiedad *extensiva*: su valor en cualquier muestra de un sistema es proporcional al tamaño de ésta. Explique.
36. La primera y segunda leyes de la termodinámica pueden parafrasearse, respectivamente, como sigue: 1. No podemos ganar. 2. Ni siquiera podemos empatar. Explique en qué sentido son válidas estas afirmaciones.

EJERCICIOS

24-1 Procesos en una dirección

24-2 Definición del cambio de entropía

1. Un gas ideal experimenta una expansión isotérmica reversible a 132°C. La entropía del gas aumenta 46.2 J/K. ¿Cuánto calor se absorbe?
2. En la figura 24-18 suponga que el cambio de entropía del sistema al pasar del estado *a* al estado *b* en la trayectoria 1 es +0.60 J/K. ¿Cuál es su cambio de entropía al pasar *a*) del estado *a* al estado *b* en la trayectoria 2, y *b*) del estado *b* al estado *a* en la trayectoria 2?

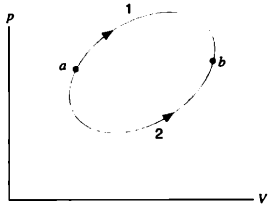


FIGURA 24-18. Ejercicio 2.

3. En el ciclo de Carnot que aparece en la figura 24-19 calcule *a*) el calor que entra, y *b*) el trabajo realizado en el sistema.

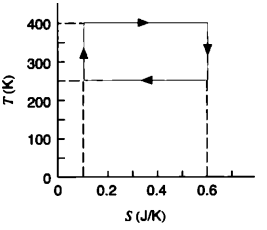


FIGURA 24-19. Ejercicio 3.

4. Se hace que cuatro moles de un gas ideal se expandan de un volumen V_1 a un volumen $V_2 = 3.45V_1$. *a*) Si la expansión es isotérmica a la temperatura $T = 410$ K, determine el trabajo efectuado en el gas. *b*) Calcule el cambio de entropía si es que se produce. *c*) Si la expansión es reversiblemente adiabática en vez de isotérmica, ¿cuál será el cambio de entropía?

5. Calcule *a*) el calor absorbido, y *b*) el cambio de entropía de un bloque de cobre de 1.22 kg, cuya temperatura elevamos reversiblemente de 25.0 a 105°C.
6. Puede transferirse calor del agua a 0°C y a la presión atmosférica sin que se congele, cuando se la perturba poco. Suponga que se enfría el agua a −5.0°C antes que empiece a formarse hielo. Encuentre el cambio de entropía que se produce durante el congelamiento repentino de 1.0 g de agua que tiene lugar entonces.

24-3 Cambio de entropía en los procesos irreversibles

7. Un gas ideal sufre expansión isotérmica a 77°C y su volumen crece de 1.3 a 3.4 L. Su cambio de entropía es 24 J/K. ¿Cuántos moles del gas hay?
8. Suponga que la misma cantidad de energía calorífica —digamos, 260 J— es transferida por conducción de un depósito de calor con una temperatura de 400 K a otro cuya temperatura es *a*) 100 K, *b*) 200 K, *c*) 300 K y *d*) 360 K. Calcule los cambios de entropía y explique la tendencia.
9. Una varilla de bronce tiene contacto térmico con un depósito de calor a 130°C por un extremo y con un depósito a 24.0°C por el otro. *a*) Determine el cambio total de entropía proveniente del proceso de conducción de 1,200 J de calor a través de la varilla. *b*) ¿Cambia en el proceso la entropía de la varilla?

24-4 Segunda ley de la termodinámica

10. Un bloque de cobre de 50.0 g, cuya temperatura es 400 K, se introduce en una caja aislante, con un bloque de plomo de 100 g que tiene una temperatura de 200 K. *a*) ¿Cuál es la temperatura de equilibrio en este sistema de dos bloques. *b*) ¿Qué cambio se opera en la energía interna del sistema al pasar de la condición inicial a la de equilibrio? *c*) ¿Cuál es su cambio de entropía? (Consúltese la tabla 23-2.)
11. En un proceso reversible, una mezcla de 1.78 kg de agua y 262 g de hielo a 0°C, en un proceso reversible, es puesta en un estado final de equilibrio donde, por masa, la razón agua/hielo es 1:1 a 0°C. *a*) Calcule el cambio de entropía del sistema durante este proceso. *b*) Después se devuelve el sistema al primer estado de equilibrio, pero en forma irreversible (usando un quemador Bunsen, por ejemplo). Calcule su cambio de entropía durante este proceso. *c*) Demuestre que su respuesta es compatible con la segunda ley de la termodinámica.
12. En un experimento de calor específico, 196 g de aluminio a 107°C se mezclan con 52.3 g de agua a 18.6°C. *a*) Calcule la temperatura de equilibrio. Determine el cambio de entropía de *b*) el aluminio y *c*) del agua. *d*) Calcule el cambio de entropía del sistema. (*Sugerencia*: Véase el problema resuelto 24-3.)

24-5 Entropía y el desempeño de las máquinas

13. Una máquina de calor absorbe 52.4 kJ de calor y libera 36.2 kJ de calor en cada ciclo. Calcule *a*) la eficiencia y *b*) el trabajo que efectúa por ciclo.
14. El motor de un automóvil genera 8.18 kJ de trabajo por ciclo. *a*) Antes de afinarlo, su eficiencia es de 25.0%. Calcule por ciclo el calor absorbido en la combustión de la gasolina y el que expulsa a la atmósfera. *b*) Después de una afinación, la eficiencia es de 31.0%. ¿Cuáles son los nuevos valores calculados en *a*)?
15. Calcule la eficiencia de una planta eléctrica de combustibles fósiles que consume 382 toneladas métricas de carbón por hora para producir trabajo útil con una rapidez de 755 MW. El calor de la combustión del carbón es 28.0 MJ/kg.
16. En comparación con la máquina B, la máquina A produce por ciclo cinco veces más trabajo, pero recibe el triple de calor y expulsa el doble de éste. Determine la eficiencia de las dos máquinas.
17. En un ciclo de Carnot, la expansión isotérmica de un gas ideal tiene lugar a 412 K y la compresión isotérmica a 297 K. Durante la expansión, 2,090 J de energía calorífica se transfieren a él. Determine *a*) el trabajo realizado por el gas durante la expansión, *b*) el calor rechazado del gas durante la compresión isotérmica y *c*) el trabajo efectuado en el gas durante la compresión.
18. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia de 22%. Opera entre depósitos de calor cuya temperatura difiere en 75C°. Encuentre la temperatura de los depósitos.
19. En el ciclo de Carnot descrito en la figura 24-8, demuestre que el trabajo realizado por el gas durante el proceso *BC* tiene el mismo valor absoluto que el que se hace en el gas durante el proceso *DA*.
20. *a*) En una máquina de calor de dos etapas de Carnot, durante la primera de ellas se absorbe cierta cantidad de calor $|Q_1|$ a una temperatura T_1, se realiza trabajo $|W_1|$ y se expulsa cierta cantidad de calor $|Q_2|$ a una temperatura menor T_2. La segunda etapa absorbe el calor expulsado en la primera, realiza trabajo $|W_2|$ y expele una cantidad de calor $|Q_3|$ a una temperatura más baja T_3. Demuestre que la eficiencia de la combinación es $(T_1 - T_3)/T_1$. *b*) Una turbina que combina mercurio y vapor recibe el mercurio saturado de una caldera a 469°C y lo expulsa para calentar una caldera de vapor a 238°C. La turbina recibe vapor a esta temperatura y lo expulsa a un condensador a 37.8°C. Calcule la eficiencia máxima de la combinación.
21. En una locomotora, el vapor a la presión de la caldera de 16.0 atm entra en los cilindros, se expande adiabáticamente alcanzando 5.60 veces su volumen original y luego escapa a la atmósfera. Calcule *a*) la presión del vapor después de la expansión, y *b*) la máxima eficiencia posible de la máquina.
22. Un mol de un gas monoatómico ideal se utiliza como sustancia de trabajo de una máquina que opera en el ciclo de la figura 24-20. Calcule *a*) el trabajo que efectúa por ciclo, *b*) el calor agregado por ciclo durante la carrera de expansión *abc*, y *c*) la eficiencia de la máquina. *d*) ¿Cuál es la eficiencia de Carnot en una máquina que funciona entre la temperatura más alta y la más baja del ciclo? ¿Es mayor o menor que la eficiencia calculada en *c*)? Suponga que $p_1 = 2p_0$, $V_1 = 2V_0$, $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa y $V_0 = 0.0225\ m^3$.

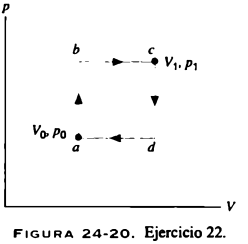


FIGURA 24-20. Ejercicio 22.

24-6 Entropía y el desempeño de los refrigeradores

23. Para hacer un poco de hielo, un congelador extrae 185 kJ de calor a −12.0°C. Su coeficiente de desempeño es de 5.70. La temperatura ambiente es de 26.0°C. *a*) ¿Cuánto calor se suministra al cuarto? *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para hacer funcionar el refrigerador?
24. Un refrigerador realiza 153 J de trabajo para transferir 568 J de calor de su compartimiento frío. *a*) Calcule su coeficiente de desempeño. *b*) ¿Cuánto calor se expulsa a la cocina?
25. ¿Cuánto trabajo es preciso realizar para extraer 10.0 J de calor *a*) de un depósito a 7°C y transferirlo a otro a 27°C mediante un refrigerador usando un ciclo de Carnot; *b*) de un depósito a −73°C a otro a 27°C; *c*) de un depósito a −173°C a otro a 27°C; y *d*) de un depósito a −223°C a otro a 27°C?
26. Un aparato que licua helio se encuentra en un laboratorio a una temperatura de 296 K. El helio que está en él tiene una temperatura de 4.0 K. Si de él se transfieren 150 mJ de calor, calcule la cantidad mínima de calor que se transfiere desde el cuarto.
27. Un acondicionador extrae aire de un cuarto a 70°C y lo transfiere al exterior, donde se registra una temperatura de 95°F. Por cada joule de energía eléctrica necesario para hacer funcionar el refrigerador, ¿cuántos joules de calor se transfieren desde el cuarto?
28. Un inventor dice haber creado una bomba de calor que lo extrae de un lago a 3.0°C y que lo suministra con una rapidez de 20 kW a un edificio a 35°C, utilizando apenas 1.9 kW de energía eléctrica. ¿Cómo juzgaría su afirmación?
29. *a*) Una máquina de Carnot opera entre un depósito caliente a 322 K y un depósito frío a 258 K. Si absorbe 568 J de calor por ciclo en el primero, ¿cuánto trabajo por ciclo produce? *b*) Si la misma máquina, funcionando en sentido contrario, opera como un refrigerador entre los dos depósitos, ¿cuánto trabajo por ciclo se requiere para transferir 1230 J de calor desde el depósito frío?
30. Se usa una bomba de calor para calentar un edificio. La temperatura exterior es −5.0°C y debe mantenerse la interior a 22°C. El coeficiente de desempeño es 3.8 y la bomba proporciona 7.6 MJ de calor al edificio cada hora. ¿Con qué rapidez debe hacerse trabajo para hacer funcionar la bomba?
31. En un refrigerador los serpentines de baja temperatura tienen una de −13°C y la temperatura del gas comprimido es de 25°C. Calcule el coeficiente de desempeño de un refrigerador de Carnot que opera entre esas temperaturas.
32. El motor de un refrigerador tiene una salida de potencia de 210 W. El compartimiento de congelación se encuentra a −3.0°C y el aire exterior tiene una temperatura de 26°C. Suponiendo que la eficiencia es 85% de la ideal, calcule el calor que puede extraerse del compartimiento en 15 minutos.
33. Una máquina de Carnot opera entre las temperaturas T_1 y T_2. Hace funcionar un refrigerador de Carnot que opera entre dos temperaturas distintas T_3 y T_4 (Fig. 24-21). Encuentre la razón $|Q_3|/|Q_1|$ a partir de las cuatro temperaturas.

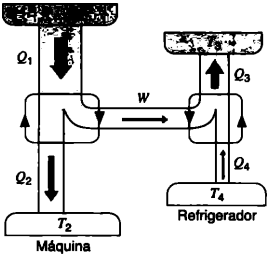


FIGURA 24-21. Ejercicio 33.

24-7 Eficiencia de las máquinas reales

24-8 La segunda ley revisada

24-9 Una perspectiva estadística de la entropía

34. *a*) Demuestre la aproximación de Stirling (Ec. 24-21) sustituyendo una integral por la suma en la expresión

$$\ln N! = \sum_{x=1}^{N} \ln x \approx \int_1^N \ln x\, dx.$$

b) ¿En qué valores de N es el error de la aproximación de Stirling menor que 1%, que 0.1% y que 1×10^{-6}?

35. Considere un contenedor que está dividido en dos secciones. *a*) Inicialmente N moléculas de un gas se hallan en una sección y el otro lado está vacío. Calcule la multiplicidad de este estado inicial. *b*) Una vez practicado un hoyo en la partición, el gas llena todo el contendor uniformemente, con $N/2$ moléculas a ambos lados de ella. Calcule la multiplicidad del estado final. *c*) Demuestre que el cambio de entropía es $\Delta S = kN \ln 2$. *d*) Compare este resultado con el del problema resuelto 24-4 en relación con el cambio de entropía en una expansión libre y explique las semejanzas de los dos resultados.

PROBLEMAS

1. A temperaturas muy bajas, el calor específico molar de muchos sólidos es (aproximadamente) proporcional a T^3, es decir $C_V = AT^3$ donde A depende de la sustancia en cuestión. En el aluminio, $A = 3.15 \times 10^{-5}$ J/mol · K^4. Determine el cambio de entropía de 4.8 mol de aluminio cuando se aumenta su temperatura de 5.0 a 10 K.
2. Calentamos un objeto de capacidad calorífica constante C de una temperatura inicial T_i a una temperatura final T_f, poniéndolo en contacto con un depósito a T_f. *a*) Describa el proceso en una gráfica de C/T en función de T y demuestre que el cambio total de entropía ΔS (objeto más depósito) es positivo, y *b*) explique cómo los depósitos de una temperatura intermedia permiten llevar a cabo el proceso de modo que ΔS es tan pequeño como se desee.
3. Se hace que un mol de un gas monoatómico ideal recorra el ciclo que aparece en la figura 24-22. *a*) ¿Cuánto trabajo se reali-

za en el gas al expandirlo de a a c en la trayectoria abc? b) ¿Qué cambio de la energía interna se produce al pasar de b a c? c) ¿Qué cambio de energía interna y de entropía se da al recorrer un ciclo completo? Exprese todas las respuestas en función de la presión p_0 y del volumen V_0 en el punto a del diagrama.

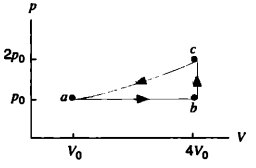


FIGURA 24-22. Problema 3.

4. Se hace que un mol de un gas diatómico ideal recorra el ciclo descrito en el diagrama pV de la figura 24-23, donde $V_2 = 3V_1$. En función de p_1, V_1, T_1 y de R determine: a) p_2, p_3 y T_3; y b) W, Q, ΔE_{int} y ΔS en los tres procesos.

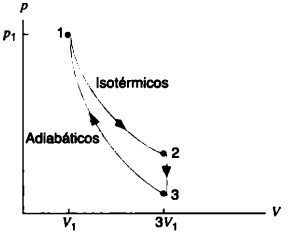


FIGURA 24-23. Problema 4.

5. Un mol de un gas monoatómico ideal se lleva de su estado inicial con presión p_0 y con volumen V_0 a un estado final de presión $2p_0$ y de volumen $2V_0$ por medio de dos proceso. I. Se expande isotérmicamente hasta que su volumen se duplica y luego se incrementa su presión a un volumen constante hasta el estado final. II. Se comprime isotérmicamente hasta que su volumen se duplique y luego se eleva su presión a volumen constante hasta alcanzar el estado final. Muestre la trayectoria de los procesos en el diagrama pV. En cada uno calcule en función de p_0 y V_0: a) el calor absorbido por el gas en cada parte del proceso; b) el trabajo realizado en el gas en cada parte del proceso; c) el cambio de energía interna del gas, $E_{int,f} - E_{int,i}$; y d) el cambio de entropía del gas, $S_f - S_i$.
6. Un cubo de hielo de 12.6 g a $-10.0°C$ se pone en un lago cuya temperatura es $+15.0°C$. Calcule el cambio de entropía del sistema cuando el cubo logra el equilibrio térmico con el lago. (*Sugerencia*: ¿Afectará el cubo de hielo a la temperatura del lago?)
7. Un sistema consta de dos objetos a los cuales se les permite entrar en contacto térmico. El objeto 1 tiene una masa m_1, una capacidad de calor específico c_1 y su temperatura inicial es $T_{1,i}$. El objeto 2 tiene una masa m_2, un calor específico c_2 y una temperatura inicial $T_{2,i} < T_{1,i}$. Al irse enfriando lentamente el objeto 1, el objeto 2 se calienta poco a poco. a) Escriba una expresión de la temperatura del objeto 2, T_2, en función de la temperatura del objeto 1, T_1. b) Determine el cambio de entropía del sistema ΔS en función de T_1. c) Demuestre que ΔS es un máximo cuando ambos objetos tienen la misma temperatura.
8. Se hace que dos moles de un gas monoatómico ideal recorran el ciclo de la figura 24-24. El proceso bc es una expansión adiabática reversible. Asimismo, $p_b = 10.4$ atm, $V_b = 1.22\ m^3$ y $V_c = 9.13\ m^3$. Calcule a) el calor agregado al gas, b) el calor que sale de él, c) el trabajo neto efectuado por el gas y d) la eficiencia del ciclo.
9. Un mol de un gas monoatómico ideal inicialmente con un volumen de 10 L y una temperatura de 300 K se calienta a volumen

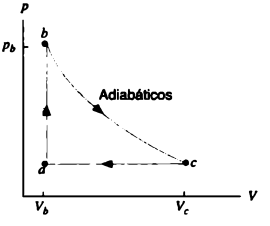


FIGURA 24-24. Problema 8.

constante hasta que alcanza una temperatura de 600 K, se le permite expandirse isotérmicamente a su presión inicial y por último se comprime isobáricamente (es decir, a presión constante) hasta recobrar su volumen, su presión y su temperatura originales. a) Calcule la entrada de calor en el sistema durante un ciclo. b) ¿Cuánto trabajo neto realiza el gas durante un ciclo? c) ¿Qué eficiencia tiene este ciclo?
10. Un motor de combustión interna de gasolina puede aproximarse mediante el ciclo descrito en la figura 24-25. Suponga un gas diatómico ideal y utilice una razón de compresión de 4:1 ($V_d = 4V_a$). Suponga además que $p_b = 3p_a$. a) Determine la presión y la temperatura de los puntos del vértice en el diagrama pV en función de p_a y T_a. b) Calcule la eficiencia del ciclo.

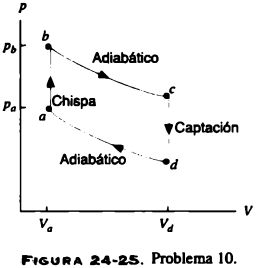


FIGURA 24-25. Problema 10.

11. a) Grafique exactamente un ciclo de Carnot en el diagrama pV con 1.0 mol de un gas ideal. Suponga que el punto A (Fig. 24-8) corresponde a $p = 1.00$ atm, $T = 300$ K; suponga que el punto B corresponde a 0.500 atm, $T = 300$ K y que el depósito de temperatura baja está a 100 K. Sea $\gamma = 1.67$. b) Calcule gráficamente el trabajo efectuado en este ciclo. c) Calcule en forma analítica el trabajo.

APÉNDICE A

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)*

Unidades básicas del SI

Cantidad	*Nombre*	*Símbolo*	*Definición*
Longitud	Metro	m	"... la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en 1/299,792, 458 de segundo." (1983)
Masa	kilogramo	kg	"... la masa del prototipo internacional del kilogramo." (1901)
Tiempo	segundo	s	"... la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondientes a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133." (1967)
Corriente eléctrica	ampere	A	"... la corriente constante que, si se la mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita, con una sección transversal despreciable y colocados 1 metro aparte en el vacío, producirá entre ellos una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud." (1948)
Temperatura termodinámica	kelvin	K	"... la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua." (1967)
Cantidad de sustancia	mol	mol	"... la cantidad de sustancia de un sistema que contiene un número de entidades elementales equivalentes a los átomos presentes en 0.012 kilogramos de carbono 12." (1971)
Intensidad luminosa	candela	cd	"... la intensidad luminosa, en determinada dirección, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 watt por esteradián." (1979)

* Adaptado de "Guide for the Use of the International System of Units (SI)", National Bureau of Standards Special Publication 811, edición de 1995. Las definiciones fueron adoptadas por la Conferencia General de Pesos y Medidas, un organismo internacional, a partir de los datos citados. En este libro no se emplea la candela.

Algunas unidades derivadas del SI

Cantidad	*Nombre de la unidad*	*Símbolo*	*Equivalente*
Superficie	metro cuadrado	m^2	
Volumen	metro cúbico	m^3	
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
Densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s	
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2	
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Presión	pascal	Pa	N/m^2
Trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	J/s
Cantidad de carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$
Diferencia de potencial, fuerza electromotriz	volt	V	$N \cdot m/C$
Campo eléctrico	volt por metro	V/m	N/C
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
Capacitancia	farad	F	$A \cdot s/V$
Flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
Inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
Campo magnético	tesla	T	Wb/m^2, $N/A \cdot m$
Entropía	joule por kelvin	J/K	
Calor específico	joule por kilogramo kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
Conductividad térmica	watt por metro kelvin	$W/(m \cdot K)$	
Intensidad radiante	watt por esteradián	W/sr	

Unidades suplementarias del SI

Cantidad	*Nombre de la unidad*	*Símbolo*
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	esteradián	sr

APÉNDICE R

CONSTANTES FÍSICAS Y FUNDAMENTALES*

Constante	Símbolo	Valor para cálculos	Valor óptimo (1998) Valor[a]	Incerteza[b]
Velocidad de la luz en el vacío	c	3.00×108 m/s	2.99792458	exact
Carga elemental	e	1.60×10^{-19} C	1.602176462	0.039
Constante eléctrica (permitividad)	ϵ_0	8.85×10^{-12} F/m	8.85418781762	exact
Constante magnética (permeabilidad)	μ_0	1.26×10^{-6} H/m	1.25663706143	exact
Masa de electrón	m_e	9.11×10^{-3} kg	9.10938188	0.079
Masa de electrón[c]	m_e	5.49×10^{-4} u	5.485799110	0.0021
Masa de protón	m_p	1.67×10^{-27} kg	1.67262158	0.079
Masa de protón[c]	m_p	1.0073 u	1.00727646688	0.00013
Masa de neutrón	m_n	1.67×10^{-27} kg	1.67492716	0.079
Masa de neutrón[c]	m_n	1.0087 u	1.00866491578	0.00054
Razón de carga a masa del electrón	e/m_e	1.76×10^{11} C/kg	1.758820174	0.040
Razón de masa de protón a electrón	m_p/m_e	1840	1836.1526675	0.0021
Constante de Planck	h	6.63×10234 J · s	6.62606876	0.078
Longitud de onda Compton del electrón	λ_e	2.43×10^{-12} m	2.426310215	0.0073
Constante molar de gas	R	8.31 J/mol · K	8.314472	1.7
Constante de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}	6.02214199	0.079
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J/K	1.3806503	1.7
Volumen molar de gas ideal a TPS[d]	Vm	2.24×10^{-2} m^3/mol	2.2413996	1.7
Constante de Faraday	F	9.65×10^4 C/mol	9.64853415	0.040
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.67×10^{-8} W/m^2 · K^4	5.670400	7.0
Constante de Rydberg	R_∞	1.10×10^7 m^{-1}	1.0973731568549	0.0000076
Constante gravitacional	G	6.67×10^{-11} m^3/s^2 · kg	6.673	1500
Radio de Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m	5.291772083	0.0037
Momento magnético del electrón	μ_e	9.28×10^{-24} J/T	9.28476362	0.040
Momento magnético del protón	μ_p	1.41×10^{-26} J/T	1.410606633	0.041
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T	9.27400899	0.040
Magnetón nuclear	μ_N	5.05×10^{-27} J/T	5.05078317	0.040
Constante de estructura fina	α	1/137	1/137.03599976	0.0037
Cuanto de flujo magnético	Φ_0	2.07×10^{-15} Wb	2.067833636	0.039
Constante de Von Klitzing	R_k	25800 Ω	25812.807572	0.0037

[a] Misma unidad y potencia de 10 que el valor para cálculos.
[b] Partes por millón
[c] Masa dada en unidades de masa atómica unitaria, donde 1 u = $1.66053873 \times 10^{-27}$ kg
[d] TPS: temperatura y presión estándar = 0°C y 1.0 bar.

* *Fuente:* Peter J. Mohr y Barry N. Taylor, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 28, núm. 6 (1999) y *Reviews of Modern Physics*, vol. 72, núm. 2 (2000). Véase también http:// physics.nist.gov/constants.

APÉNDICE C

DATOS ASTRONÓMICOS

El Sol, la Tierra y la Luna

Propiedad	*Sol*[a]	*Tierra*	*Luna*
Masa (kg)	1.99×10^{30}	5.98×10^{24}	7.36×1022
Radio medio (m)	6.96×10^{8}	6.37×10^{6}	1.74×10^{6}
Densidad media	1410	5520	3340
Gravedad superficial	274	9.81	1.67
Velocidad de escape	618	11.2	2.38
Periodo de rotación[c] (d)	26 – 37[b]	0.997	27.3
Radio orbital medio (km)	2.6×10^{17}[d]	1.50×10^{8}[e]	3.82×10^{5}[f]
Periodo orbital	2.4×10^{8} y[d]	1.00 y[e]	27.3 d[f]

[a] El Sol irradia energía con una rapidez de 3.90×10^{26} W; justo fuera de la atmósfera terrestre se recibe energía solar, suponiendo una incidencia normal con una rapidez de 1,380 W/m^2.
[b] El Sol —una bola de gas— no gira como un cuerpo rígido. Su periodo rotacional fluctúa entre 26 d en el ecuador a 37 d en los polos.
[c] Medido respecto a las estrellas lejanas.
[d] Alrededor del centro galáctico.
[e] Alrededor del Sol.
[f] Alrededor de la Tierra.

Algunas propiedades de los planetas

	Mercurio	*Venus*	*Tierra*	*Marte*	*Júpiter*	*Saturno*	*Urano*	*Neptuno*	*Plutón*
Distancia media del Sol	57.9	108	150	228	778	1,430	2,870	4,500	5,9000
Periodo de traslación (a)	0.241	0.615	1.00	1.88	11.9	29.5	84.0	165	248
Periodo de rotación[a] (d)	58.7	243[b]	0.997	1.03	0.409	0.426	0.451[b]	0.658	6.39
Rapidez orbital (km/s)	47.9	35.0	29.8	24.1	13.1	9.64	6.81	5.43	4.74
Inclinación del eje a la órbita	<28°	≈3°	23.4°	25.0°	3.08°	26.7°	97.9°	29.6°	57.5°
Inclinación de la órbita a la órbita terrestre	7.00°	3.39°	—	1.85°	1.30°	2.49°	0.77°	1.77°	17.2°
Excentricidad de la órbita	0.206	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.0556	0.0472	0.0086	0.250
Diámetro ecuatorial (km)	4,880	12,100	12,800	6,790	143,000	120,000	51,800	49,500	2,300
Masa (Tierra = 1)	0.0558	0.815	1.000	0.107	318	95.1	14.5	17.2	0.002
Densidad promedio	5.60	5.20	5.20	5.52	3.95	1.31	0.704	1.21	1.67	2.03
Gravedad superficial[c]	3.78	8.60	9.78	3.72	22.9	9.05	7.77	11.0	0.03
Rapidez de escape (km/s)	4.3	10.3	11.2	5.0	59.0	35.6	21.2	23.6	1.3
Satélites conocidos	0	0	1	2	16 + anillos	19 + anillos	15 + anillos	8 + anillos	1

[a] Medido respecto a las estrellas lejanas
[b] El sentido de rotación es contrario al del movimiento orbital.
[c] Medida en el ecuador del planeta.

APÉNDICE D

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico, Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm3) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Actinio	Ac	89	(227)	10.1 (calc.)	1051	3200	0.120
Aluminio	Al	13	26.9815	2.699	660	2519	0.897
Americio	Am	95	(243)	13.7	1176	2011	—
Antimonio	Sb	51	121.76	6.696	630.6	1587	0.207
Argón	Ar	18	39.948	1.6626×10^{-3}	−189.3	−185.9	0.520
Arsénico	As	33	74.9216	5.72	817 (28 at.)	614 (subl.)	0.329
Astatino	At	85	(210)	—	302	337	—
Azufre	S	16	32.066	2.07	115.2	444.6	0.710
Bario	Ba	56	137.33	3.5	727	1597	0.204
Berkelio	Bk	97	(247)	14 (est.)	1050	—	—
Berilio	Be	4	9.0122	1.848	1287	2471	1.83
Bismuto	Bi	83	208.980	9.75	271.4	1564	0.122
Boro	Bh	107	(264)	—	—	—	—
Boron	B	5	10.81	2.34	2075	4000	1.03
Bromo	Br	35	79.904	3.12 (liquid)	−7.2	58.8	0.226
Cadmio	Cd	48	112.41	8.65	321.1	767	0.232
Calcio	Ca	20	40.08	1.55	842	1484	0.647
Californio	Cf	98	(251)	—	900 (est.)	—	—
Carbono	C	6	12.011	2.25	3550	—	0.709
Cerio	Ce	58	140.12	6.770	798	3424	0.192
Cesio	Cs	55	132.905	1.873	28.44	671	0242
Cloro	Cl	17	35.453	3.214×10^{-3} (0°C)	−101.5	−34.0	0.479
Criptón	Kr	36	83.80	3.488×10^{-3}	−157.4	−153.2	0.248
Cromo	Cr	24	51.996	7.19	1907	2671	0.449
Cobalto	Co	27	58.9332	8.85	1495	2927	0.421
Cobre	Cu	29	63.54	8.96	1084.6	2562	0.385
Curio	Cm	96	(247)	13.5 (calc.)	1345	—	—
Dubnio	Db	105	(262)	—	—	—	—
Disprosio	Dy	66	162.50	8.55	1412	2567	0.170
Einsteinio	Es	99	(252)	—	860 (est.)	—	—
Erbio	Er	68	167.26	9.07	1529	2868	0.168
Escandio	Sc	21	44.956	2.99	1541	2836	0.568
Estaño	Sn	50	118.71	7.31	231.93	2602	0.228
Estroncio	Sr	38	87.62	2.54	777	1382	0.301
Europio	Eu	63	151.96	5.244	822	1529	0.182
Fermio	Fm	100	(257)	—	1527	—	—

(*Continúa*)

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico, Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm3) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Flúor	F	9	18.9984	1.696×10^{-3} (0°C)	−219.6	−188.1	0.824
Fósforo	P	15	30.9738	1.82	44.15	280.5	0.769
Francio	Fr	87	(223)	—	27	677	—
Gadolinio	Gd	64	157.25	7.90	1313	3273	0.236
Galio	Ga	31	69.72	5.904	29.76	2204	0.371
Germanio	Ge	32	72.61	5.323	038.3	2833	0.320
Hafnio	Hf	72	178.49	13.31	2233	4603	0.144
Helio	He	2	4.0026	0.1664×10^{-3}	−272.2	−268.9	5.19
Hierro	Fe	26	55.845	7.87	1538	2861	0.449
Holmio	Ho	67	164.930	8.79	1474	2700	0.165
Hidrógeno	H	1	1.00797	0.08375×10^{-3}	−259.34	−252.87	14.3
Hassio	Hs	108	(269)	—	—	—	—
Indio	In	49	114.82	7.31	156.6	2072	0.233
Iridio	Ir	77	192.2	22.4	2446	4428	0.131
Iterbio	Yb	70	173.04	6.966	819	1196	0.155
Itrio	Y	39	88.469	4.469	1522	3345	0.298
Lantano	La	57	138.91	6.145	918	3464	0.195
Laurencio	Lr	103	(260)	—	—	—	—
Litio	Li	3	6.941	0.534	180.5	1342	3.58
Lutecio	Lu	71	174.97	9.84	1663	3402	0.154
MagnesioMg	12	24.305	1.74	650	1090	1.02	
Manganeso	Mn	25	54.9380	7.43	1244	2061	0.79
Meitnerio	Mt	109	(268)	—	—	—	—
Mendelevio	Md	101	(258)	—	827	—	—
Mercurio	Hg	80	200.59	13.55	238.83	356.7	0.140
Molibdeno	Mo	42	95.64	10.22	2623	4639	0.251
Neodimio	Nd	60	144.24	7.00	1021	3074	0.190
Neón	Ne	10	20.180	0.8387×10^{-3}	−248.6	−246.0	1.03
Neptunio	Np	93	(237)	20.25	644	3902	1.26
Níquel	Ni	28	58.69	8.902	1455	2913	0.444
Niobio	Nb	41	92.906	8.57	2477	4744	0.265
Nitrógeno	N	7	14.0067	1.1649×10^{-3}	−210.0	−195.8	1.04
Nobelio	No	102	(259)	—	—	—	—
Oro	Au	79	196.967	19.3	1064.18	2856	0.129
Osmio	Os	76	190.2	22.57	3033	5012	0.130
Oxígeno	O	8	15.9994	1.3318×10^{-3}	−218.8	−183.0	0.918
Paladio	Pd	46	106.4	12.02	1555	2693	0.246
Plata	Ag	47	107.68	10.49	961.8	2162	0.235
Platino	Pt	78	195.08	21.45	1768	3825	0.133
Plomo	Pb	82	207.19	11.35	327.5	1749	0.129
Plutonio	Pu	94	(244)	19.84	640	3228	0.130
Polonio	Po	84	(209)	9.32	254	962	—
Potasio	K	19	39.098	0.86	63.28	759	0.757
Praseodimio	Pr	59	140.907	931	3520	0.193	
Prometeo	Pm	61	(145)	7.264	1042	3000 (est.)	—
Protactinio	Pa	91	(231)	15.4 (calc.)	1572	—	—
Radio	Ra	88	(226)	5.0	700	1140	—
Radón	Rn	86	(222)	9.96 × 1023 (0°C)	271	261.7	0.094
Renio	Re	75	186.2	21.02	3186	5596	0.137
Rodio	Rh	45	102.905	12.41	1964	3695	0.243
Rubidio	Rb	37	85.47	1.53	39.31	688	0.363
Rutenio	Ru	44	101.07	12.41	2334	4150	0.238
Rutherfordio	Rf	104	(261)	—	—	—	—
Samario	Sm	62	150.35	7.52	1074	1794	0.197
Seaborgio	Sg	106	(266)	—	—	—	—

(*Continúa*)

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico, Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm3) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Selenio	Se	34	78.96	4.79	221	685	0.321
Silicio	Si	14	28.086	2.33	1414	3265	0.705
Sodio	Na	11	22.9898	0.971	97.72	883	1.23
Talio	Tl	81	204.38	11.85	304	1473	0.129
Tántalo	Ta	73	180.948	16.6	3017	5458	0.140
Tecnecio	Tc	43	(98)	11.5 (calc.)	2157	4265	—
Telurio	Te	52	127.60	6.24	449.5	988	0.202
Terbio	Tb	65	158.924	8.23	1356	3230	0.182
Titanio	Ti	22	4788	4.54	1668	3287	0.523
Torio	Th	90	(232)	11.72	1750	4788	0.113
Tulio	Tn	69	168.934	9.32	1545	1950	0.160
Tungsteno	W	74	183.85	19.3	3422	5555	0.132
Ununilio*	Uun	110	(271)	—	—	—	—
Unununio*	Uuu	111	(272)	—	—	—	—
Unumbio*	Uub	112	(277)	—	—	—	—
Ununcuadio*	Uuq	114	(285)	—	—	—	—
Ununhexio*	Uuh	116	(289)	—	—	—	—
Ununnoccio*	Uuo	118	(293)	—	—	—	—
Uranio	U	92	(238)	18.95	135	4131	0.116
Vanadio	V	23	50.942	6.11	1910	3407	0.489
Yodo	I	53	126.9044	4.93	113.7	184.4	0.145
Xenón	Xe	54	131.30	5.495×10^{-3}	−111.75	−108.0	0.158
Zinc	Zn	30	65.39	7.133	419.53	907	0.388
Zirconio	Zr	40	91.22	6.506	1855	4409	0.278

Los valores de las masas molares corresponden a un mol de *átomos* del elemento. En los gases diatómicos (H_2, O_2, N_2, etc.), la masa de un mol de *moléculas* es el doble del valor tabulado.

Los valores entre paréntesis en la columna de masas molares son el número de masa de isótopos de mayor vida de los elementos radiactivos.

Todas las propiedades físicas corresponden a una presión de una atmósfera, salvo que se indique otra cosa.

Con excepción de la masa molar, los datos referentes a los gases son válidos sólo cuando se encuentran en su estado molecular habitual, como H_2, He, O_2, Ne, etc. El calor específico de los gases es el valor a presión constante.

* Nombres temporales de estos elementos.

Fuente: Handbook of Chemistry and Physics, 79a. edición (CRC Press, 1998). Consúltese también http://www.webelements.com.

APÉNDICE *E*

TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS

METALES ALCALINOS (incluido el hidrógeno)

GASES NOBLES

1																	2 He
2	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	20 Ca		21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	38 Sr		39 Y	40 Zr	41 Nd	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	56 Ba	57-70	71 Lu	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	88 Ra	88-102	103 Lr	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Uun*	111 Uuu*	112 Uub*	113	114 Uuq*	115	116 Uuh*	117	118 Uuo*

Serie de lantánidos	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb
Serie de actínidos	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No

*Se ha dado a conocer el descubrimiento de estos elementos, pero todavía no se adoptan los nombres respectivos. Los símbolos representan los nombres temporales asignados a los elementos. Consúltese en http://www.webelements.com la información más reciente sobre su descubrimiento y propiedades.

APÉNDICE E

PARTÍCULAS ELEMENTALES

1. LAS PARTÍCULAS FUNDAMENTALES

Leptones

Partícula	*Símbolo*	*Antipartícula*	*Carga (e)*	*Spín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Productos típicos de decaimiento*
Electrón	e^-	e^+	−1	1/2	0.511	∞	
Electrón neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	1/2	<0.000015	∞	
Muon	μ^-	μ^+	−1	1/2	105.7	2.2×10^{-6}	$e- + \bar{\nu}_e + \nu\mu$
Muon neutrino	$\nu\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0	1/2	<0.19	∞	
Tau	τ^-	τ^+	−1	1/2	1777	2.9×10^{-13}	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu\tau$
Tau neutrino	$\nu\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0	1/2	<18	∞	

Quarks

Sabor	*Símbolo*	*Antipartícula*	*Carga (e)*	*Spín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Otras propiedades*
Arriba	u	$\bar{u}$	+2/3	1/2	3	$C = S = T = B = 0$
Abajo	d	$\bar{d}$	−1/3	1/2	6	$C = S = T = B = 0$
Encanto	c	$\bar{c}$	+2/3	1/2	1,300	Encanto $(C) = +1$
Extraño	s	$\bar{s}$	−1/3	1/2	120	Extrañeza $(S) = -1$
Cima	t	$\bar{t}$	+2/3	1/2	174,000	Lo alto $(T) = +1$
Inferior	b	$\bar{b}$	−1/3	1/2	4,300	Lo bajo $(B) = -1$

Partículas de campo

Partícula	*Símbolo*	*Interacción*	*Carga (e)*	*Spín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo* (GeV)
Gravitón[b]		Gravedad	0	2	0
Bosón débil	W^+, W^-	Débil	±1	1	80.4
Bosón débil	Z0	Débil	0	1	91.2
Fotón	l	Electromagnética	0	1	0
Gluon	g	Fuerte (color)	0	1	0

2. ALGUNAS PARTÍCULAS COMPUESTAS

1. Bariones

Partícula	*Símbolo*	*Contenido de quark*	*Anti-partícula*	*Carga (e)*	*Spín (h/2π)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media (s)*	*Decaimiento típico*
Protón	p	uud	$\bar{p}$	+1	1/2	938	$>10^{33}$	$\pi^0 + e^+$ (?)
Neutrón	n	udd	$\bar{n}$	0	1/2	940	887	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
Lambda	L0	uds	Λ^0	0	1/2	1,116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
Omega	Ω^-	sss	Ω^-	−1	3/2	1,672	8.2×10^{-11}	$V^0 + K^-$
Delta	Δ^{++}	uuu	Δ^{++}	+2	3/2	1,232	5.7×10^{-24}	$p + \pi^+$
Lambda encantada	Λ_c^+	udc	Λ_c^+	+1	1/2	2,285	1.9×10^{-13}	$\Lambda^0 + \pi^+$

Mesones

Partícula	*Símbolo*	*Contenido de quark*	*Anti-partícula*	*Carga (e)*	*Spín (h/2π)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media (s)*	*Decaimiento típico*
Pion	π^+	$u\bar{d}$	π^-	+1	0	140	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Pion	π^0	$u\bar{u} + d\bar{d}$	π^0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
Kaón	K^+	$u\bar{s}$	K^-	+1	0	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Kaón	K^0	$d\bar{s}$	$\bar{K}^0$	0	0	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
Rho	ρ^+	$u\bar{d}$	ρ^-	+1	1	770	4.4×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^-$
Mesón D	D^+	$c\bar{d}$	D^-	+1	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
Psi	ψ	$c\bar{c}$	ψ	0	1	3097	7.6×10^{-21}	$e^+ + e^-$
Mesón B	B^+	$u\bar{b}$	B^-	+1	0	5279	1.6×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Ípsilon	Υ	$b\bar{b}$	Υ	0	1	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

[a] Las energías en reposo mencionadas para los quarks no son las relacionadas con los quarks libres; como todavía no se observan quarks libres, hasta la fecha no ha sido posible medir su energía en reposo durante el estado libre. Los valores tabulados son energías efectivas en reposo correspondientes a los quarks confinados en partículas compuestas.

[b] Se piensa que existen las partículas, pero todavía no se comprueba su existencia.

Fuente: "Review of Particle Properties", *European Physical Journal C*, vol. 15 (2000). Véase también http://pdg.lbl.gov/.

APÉNDICE G

FACTORES DE CONVERSIÓN

Los factores de conversión pueden leerse directamente en las tablas. Por ejemplo, 1 grado = 2.778×10^{-3} revoluciones, así que $16.7^{\circ} = 16.7 \times 2.778 \times 10^{-3}$ rev. Las unidades del SI están en mayúsculas.

Adaptado en parte de G. Shortley y D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, 1971.

Ángulo plano

	°	′	″	RADIÁN	revolución
1 grado =	1	60	3600	1.745×10^{-2}	2.778×10^{-3}
1 minuto =	1.667×10^{-2}	1	60	2.909×10^{-4}	4.630×10^{-5}
1 segundo =	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	$4{,}848 \times 10^{-6}$	7.716×10^{-7}
1 RADIÁN =	57.30	3438	2.063×10^{5}	1	0.1592
1 revolución	360	2.16×10^{4}	1.296×10^{6}	6.283	1

Ángulo sólido

1 esfera = 4π esteradianes = 12.57 esteradianes

Longitud

	cm	METRO	km	pulgada	pie	milla
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0.337	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 kilómetro =	10^{5}	1000	1	3.937×10^{4}	3281	0.6214
1 pulgada =	2.540	2.540×10^{-2}	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie =	30.48	0.3048	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla =	1.609×10^{5}	1609	1.609	6.336×10^{4}	5280	1

1 angstrom = 10^{-10} m
1 milla náutica = 1852 m
= 1.151 millas = 6,076 pies
1 fermi = 10^{-15} m

1 año-luz = 9.460×10^{12} km
1 parsec = 3.084×10^{13} km
1 fathom = 6 pies
1 radio de Bohr = 5.292×10^{-11} m

1 yarda = 3 pies
1 rod = 16.5 pies
1 milla = 10^{-3} pulgadas
1 nm = 10^{-9} m

Área

	METRO^2	cm^2	pie^2	pulgada^2
1 METRO CUADRADO =	1	104	10.76	1,550
1 centímetro cuadrado =	10^{-4}	1	1.076×10^{-3}	0.1550
1 pie cuadrado =	9.290×10^{-2}	929.0	1	144
1 pulgada cuadrada =	6.452×10^{-4}	6.452	6.944×10^{-3}	1

1 milla cuadrada = 2.788×10^7 pies^2 = 640 acres
1 barn = 10^{-28} m^2
1 acre = 43,560 pies^2
1 hectárea 10^4 m^2 = 2.471 acres

Volumen

	METRO^3	cm^3	L	pie^3	pulgada^3
1 metro cúbico =	1	10^6	1,000	35.31	6.102×10^4
1 centímetro cúbico	10^{-6}	1	1.000×10^{-3}	3.531×10^{-5}	6.102×10^{-2}
1 litro =	1.000×10^{-3}	1,000	1	3.531×10^{-2}	61.02
1 pie cúbico =	2.832×10^{-2}	2.832×10^4	28.32	1	1,728
1 pulgada cúbica =	1.639×10^{-5}	16.39	1.639×10^{-2}	5.787×10^{-4}	1

1 galón fluido USA = 4 cuartos de galón fluidos USA = 8 pintas fluidas USA = 128 onzas fluidas USA = 231 pulgadas^3
1 galón imperial inglés = 277.4 pulgadas^3 = 1.201 galones fluidos USA

Masa

	g	KILOGRAMO	slug	u	oz	lb	ton
1 gramo =	1	0.001	6.852×10^{-5}	6.022×10^{-23}	3.527×10^{-2}	2.205×10^{-3}	1.102×10^{-6}
1 KILOGRAMO =	1,000	1	6.852×10^{-2}	6.022×10^{-26}	35.27	2.205	1.102×10^{-3}
1 slug =	1.459×10^4	14.59	1	8.786×10^{-27}	514.8	32.17	1.609×10^{-2}
1 u =	1.661×10^{-24}	1.661×10^{-27}	1.138×10^{-28}	1	5.857×10^{-26}	3.662×10^{-27}	1.830×10^{-30}
[redacted]				[redacted]	[redacted]	6.250×10^{-2}	3.125×10^{-5}
[redacted]				[redacted]	[redacted]	1	0.0005
[redacted]				[redacted]	3.2×10^4	2,000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg
Las cantidades sombreadas en color no son unidades de masa, aunque a menudo se utilicen como tales. Por ejemplo, cuando escribimos kg "=" 2.205 lb, esto significa que un kilogramo es una *masa* que *pesa* 2.205 libras en condiciones normales de gravedad (g = 9.80665 m/s^2).

Densidad

	slug/pie^3	KILOGRAMO/METRO^3	g/cm^3	lb/pie^3	lb/pulgada^3
1 slug por pie^3	1	515.4	0.5154	32.17	1.862×10^{-2}
1 KILOGRAMO por METRO^3 =	1.940×10^{-3}	1	0.001	6.243×10^{-2}	3.613×10^{-5}
1 gramo por cm^3 =	1.940	1,000	1	62.43	3.613×10^{-2}
[redacted]	[redacted]	16.02	1.602×10^{-2}	1	5.787×10^{-4}
[redacted]	[redacted]	2.768×10^4	27.68	1,728	1

Las cantidades en las áreas sombreadas en color son densidades de peso, y como tales se distinguen de la de masa desde el punto de vista dimensional. Véase la nota a la tabla de masa.

Tiempo

	y	d	h	min	SEGUNDO
1 año =1	365.25	8.76×10^3	5.259×10^5	3.156×10^7	
1 día =	2.738×10^{-3}	1	24	1440	8.640×10^4
1 hora =	1.141×10^{-4}	4.167×10^{-2}	1	60	3,600
1 minuto =	1.901 × 1026	6.944 × 1024	1.667 × 1,022	1	60
1 SEGUNDO =	3.169×10^{-8}	1.157×10^{-5}	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1

Velocidad

	pie/s	km/h	METRO/SEGUNDO	min/h	cm/s
1 pie por segundo =	1	1.097	0.3048	0.6818	30.48
1 kilómetro por hora =	0.9113	1	0.2778	0.6214	27.78
1 METRO por SEGUNDO =	3.281	3.6	1	2.237	100
1 milla por hora =	1.467	1.609	0.4470	1	44.70
1 centímetro por segundo =	3.281×10^{-2}	3.6×10^{-2}	0.01	2.237×10^{-2}	1

1 nudo = 1 milla náutica/h = 1.688 pies/s 1 min/min = 88.00 pies/s = 60.00 min/h.

Fuerza

	dina	NEWTON	lb	pdll	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	2.248×10^{-6}	7.233×10^{-5}	[illegible]	[illegible]
1 NEWTON =	10^5	1	0.2248	7.233	102.0	[illegible]
1 libra =	4.448×10^5	4.448	1	32.17	453.6	[illegible]
1 poundal =	1.383×10^4	0.1383	3.108×10^{-2}	1	[illegible]	[illegible]

Las cantidades en las áreas sombreadas en color no son unidades de fuerza, aunque a menudo se emplean como tales. Por ejemplo, si escribimos un gramo-fuerza " = " 980.7 dinas, queremos decir que un gramo-masa experimenta una fuerza de 980.7 dinas en condiciones normales de gravedad (g = 9.80665 m/s^2).

Energía, trabajo, calor

	Btu	erg	ft lb	hp h	JOULE	cal	kW h	eV	MeV	kg	u
1 Unidad térmica inglesa =	1	1.055 $\times 10^{10}$	777.9	3.929 $\times 10^{-4}$	1055	252.0	2.930 $\times 10^{-4}$	6.585 $\times 10^{21}$	6.585 $\times 10^{15}$	[illegible] $\times 10^{-14}$	[illegible] $\times 10^{12}$
1 erg	9.481 $\times 10^{-11}$	1	7.376 $\times 10^{-8}$	3.725 $\times 10^{-14}$	10^{-7}	2.389 $\times 10^{-8}$	2.778 $\times 10^{-14}$	6.242 $\times 10^{11}$	6.242 $\times 10^{5}$	1.113 $\times 10^{-24}$	670.2
1 pie-libra =	1.285 $\times 10^{-3}$	1.356 $\times 10^{7}$	1	5.051 $\times 10^{-7}$	1.356	0.3228	3.766 $\times 10^{-7}$	8.464 $\times 10^{18}$	8.464 $\times 10^{12}$	1.505 $\times 10^{-17}$	9.057 $\times 10^{8}$
1 caballo de fuerza-hora =	2545	2.685 $\times 10^{13}$	1.980 $\times 10^{6}$	1	2.685 $\times 10^{6}$	6.413 $\times 10^{5}$	0.7457	1.676 $\times 10^{25}$	1.676 $\times 10^{19}$	2.988 $\times 10^{-11}$	1.799 $\times 10^{16}$
1 JOULE =	9.481 $\times 10^{-4}$	10^{7}	0.7376	3.725 $\times 10^{-7}$	1	0.2389	2.778 $\times 10^{-7}$	6.242 $\times 10^{18}$	6.242 $\times 10^{12}$	1.113 $\times 10^{-17}$	6.702 $\times 10^{9}$
1 caloría =	3.969 $\times 10^{-3}$	4.186 $\times 10^{7}$	3.088	1.560 $\times 10^{-6}$	4.186	1	1.163 $\times 10^{-6}$	2.613 $\times 10^{19}$	2.613 $\times 10^{13}$	4.660 $\times 10^{-17}$	2.806 $\times 10^{10}$
1 kilowatt-hora =	3413	3.6 $\times 10^{13}$	2.655 $\times 10^{6}$	1.341	3.6 $\times 10^{6}$	8.600 $\times 10^{5}$	1	2.247 $\times 10^{25}$	2.247 $\times 10^{19}$	4.007 $\times 10^{-11}$	2.413 $\times 10^{16}$
1 electrón-volt =	1.519 $\times 10^{-22}$	1.602 $\times 10^{-12}$	1.182 $\times 10^{-19}$	5.9687 $\times 10^{-26}$	1.602 $\times 10^{-19}$	3.827 $\times 10^{-20}$	4.450 $\times 10^{-26}$	1	10^{-6}	1.783 $\times 10^{-36}$	1.074 $\times 10^{-9}$
1 millón de electrón-volts =	1.519 $\times 10^{-16}$	1.602 $\times 10^{-6}$	1.182 $\times 10^{-13}$	5.967 $\times 10^{-20}$	1.602 $\times 10^{-13}$	3.827 $\times 10^{-14}$	4.450 $\times 10^{-20}$	10^{6}	1	1.783 $\times 10^{-30}$	1.074 $\times 10^{-3}$
1 kilogramo =	8.521 $\times 10^{13}$	8.987 $\times 10^{23}$	6.629 $\times 10^{16}$	3.348 $\times 10^{10}$	[illegible]	2.146 $\times 10^{23}$	2.497 $\times 10^{10}$	5.610 $\times 10^{35}$	5.610 $\times 10^{29}$	1	6.022 $\times 10^{26}$
1 unidad de masa atómica unificada =	1.415 $\times 10^{-13}$	1.492 $\times 10^{-3}$	1.101 $\times 10^{-10}$	5.559 $\times 10^{-17}$	[illegible] $\times 10^{-10}$	3.564 $\times 10^{-11}$	4.146 $\times 10^{-17}$	9.32 $\times 10^{8}$	932.0	1.661 $\times 10^{-27}$	1

Las cantidades en las áreas sombreadas en color no son estrictamente unidades de energía, pero se incluyen para facilitarle la consulta al lector. Provienen de la fórmula de equivalencia relativista de masa-energía $E = mc^2$ y representan el equivalente energético de una masa de un kilogramo o de una unidad de masa atómica unificada (u).

Presión

	atm	dina/cm^2	pulgada de agua	cm Hg	PASCAL	lb/pulgada2	lb/pie^2
1 atmósfera =	1	1.013 × 106	406.8	76	1.013 × 105	14.70	2116
1 dina por cm^2 =	9.869 × 10^{-7}	1	4.015 × 10^{-4}	7.501 × 10^{-5}	0.1	1.405 × 10^{-5}	2.089 × 10^{23}
1 pulgada de agua a 4°C =	2.458 × 10^{-3}	2,491	1	0.1868	249.1	3.613 × 10^{-2}	5.202
1 centímetro de mercurio[a] a 0°C	1.316 × 10^{-2}	1.333 × 10^{4}	5.353	1	1,333	0.1934	27.85
1 PASCAL =	9.869 × 10^{-6}	10	4.015 × 10^{-3}	7.501 × 10^{-4}	1	1.450 × 10^{-4}	2.089 × 10^{-2}
1 libra por pulgada^2	6.805 × 10^{-2}	6.895 × 10^{4}	27.68	5.171	6.895 × 10^{3}	1	144
1 libra por pie^2	4.725 × 10^{-4}	478.8	0.19^{-2}	3.591 × 10^{-2}	47.88	6.944 × 10^{-3}	1

[a] Donde la aceleración de la gravedad tiene el valor estándar de 9.80665 m/s^2.
1 bar = 10^6 dina/cm^2 = 0.1 MPa 1 milibar = 10^3 dina/cm^2 = 10^2 Pa 1 torr = 1 milímetro de mercurio

Potencia

	Btu/h	pie · lb/s	hp	cal/s	kW	WATT
1 unidad térmica británica por hora =	1	0.2161	3.929×10^{-4}	6.998×10^{-2}	2.930×10^{-4}	0.2930
1 pie-libre por segundo =	4.628	1	1.818×10^{-3}	0.3239	1.356×10^{-3}	1.356
1 caballo de fuerza =	2,545	550	1	178.1	0.7457	745.7
1 caloría por segundo =	14.29	3.088	5.615×10^{-3}	1	4.186×10^{-3}	4.186
1 kilowatt =	3,413	737.6	1.341	238.9	1	1,000
1 WATT =	3.413	0.7376	1.341×10^{-3}	0.2389	0.001	1

Flujo magnético

	maxwell	WEBER
1 maxwell	1	10^{-8}
1 WEBER	10^{8}	1

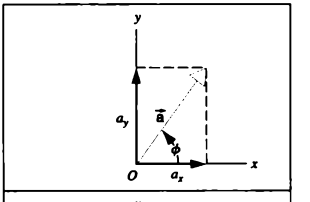
Campo magnético

	gauss	TESLA	miligauss
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
miligauss =	0.001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/meter^2

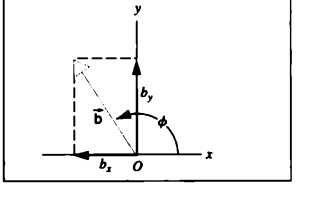
VECTORES

H-1 COMPONENTES DE LOS VECTORES



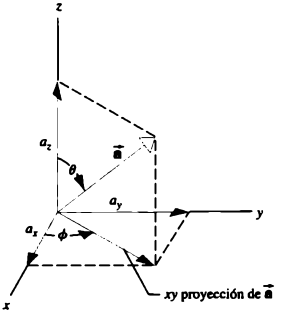
$a_x = a\cos\phi \qquad a_y = a\,\text{sen}\,\phi$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan\phi = a_y/a_x$



$b_x = b\cos\phi\ (<0)$

$b_y = b\,\text{sen}\,\phi\ (>0)$



$a_x = a\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$

$a_y = a\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$

$a_z = a\cos\theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

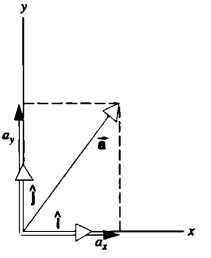
$\tan\phi = a_y/a_x$

$\cos\theta = a_z/a$

H-2 VECTORES UNITARIOS

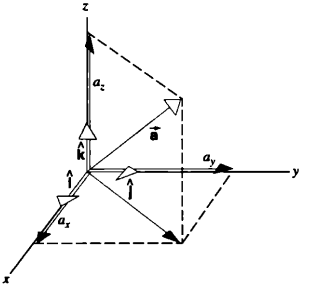
Cartesiano bidimensional

$\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$



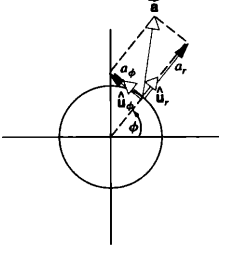
Cartesiano tridimensional

$\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$



Polar bidimensional

$\vec{\mathbf{a}} = a_r\hat{\mathbf{u}}_r + a_\phi\hat{\mathbf{u}}_\phi$

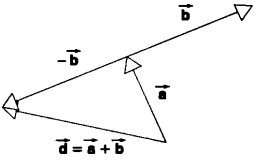


H-3 ADICIÓN DE VECTORES

$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$d_x = a_x - b_x \qquad d_y = a_y - b_y$$



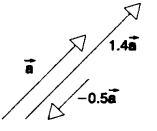
H-4 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\vec{b} = c\vec{a}$$

$$b_x = ca_x \qquad b_y = ca_y$$

$$b = |c|\,a$$



Producto cruz (o producto escalar) de dos vectores.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi = a(b\cos\phi) = b(a\cos\phi)$$

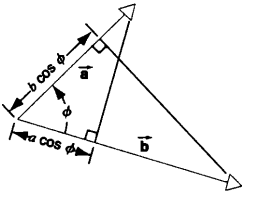
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

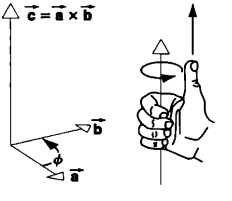
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$



Producto cruz (o producto vectorial) de dos vectores:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\,\mathrm{sen}\,\phi$$



La dirección de $\vec{c}$ es perpendicular al plano de $\vec{a}$ y a $\vec{b}$ determinada por la regla de la mano derecha.

$$\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s = \text{un escalar}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

APÉNDICE I

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Geometría

Círculo de radio r: circunferencia $= 2\pi r$, área $= \pi r^2$. Esfera del radio r: área $= 4\pi r^2$; volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Cilindro circular recto de radio r y de altura h: área $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; volumen $= \pi r^2 h$. Triángulo de base a y de altura h: *área* $= \frac{1}{2}\, ah$.

Fórmula cuadrática

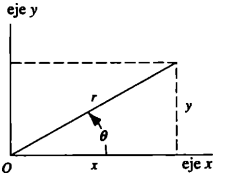
si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Funciones trigonométricas del ángulo θ

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

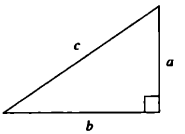
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$



Teorema de Pitágoras

$a^2 + b^2 = c^2$



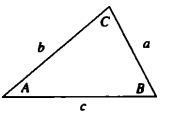
Triángulos

Ángulos A, B, C
Lados opuestos a, b, c

$A + B + C = 180°$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



Signos y símbolos matemáticos

$=$ igual
$\approx$ aproximadamente igual
$\neq$ no en igual a
$\equiv$ idéntico a, definido como
$>$ mayor que ($>>$ es mucho mayor que)
$<$ menor que ($<<$ es mucho menor que)
$\geq$ mayor o igual que (o no menor que)
$\leq$ menor o igual que (o no mayor que)
$\pm$ más o menos
$\propto$ es proporcional a
Σ la suma de
$\bar{x}$ valor promedio de x (también x_{pro})

Identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$
$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

Expansión binomial

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \cdots (x^2 < 1)$$

Expansión exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Expansión logarítmica

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \quad (|x| < 1)$$

Expansión trigonométrica (θ en radianes)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

Derivadas e integrales

En las fórmulas siguientes, las letras u y v representan cualquier función de x; a y m son constantes. A las integrales indefinidas debe agregarse una constante arbitraria de integración. En el *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) se incluye una tabulación más completa.

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$
2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

1. $\displaystyle\int dx = x$
2. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\displaystyle\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$
7. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln\cos x$
11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
12. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
13. $\displaystyle\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
14. $\displaystyle\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$
15. $\displaystyle\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
16. $\displaystyle\int x^ne^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

PREMIOS NOBEL DE FÍSICA*

1901	Wilhelm Konrad Röntgen	1845-1923	por el descubrimiento de los rayos X
1902	Hendrik Antoon Lorentz	1853-1928 1865-1943	por su investigación de Pieter Zeeman la influencia del magnetismo en los fenómenos de la radiación
1903	Antoine Henri Becquerel	1852-1908	por el descubrimiento de la radiactividad espontánea
	Pierre Curie Marie Sklowdowska-Curie	1859-1906 1867-1934	por sus investigaciones investigaciones conjuntas sobre los fenómenos de la radiación descubiertos por el profesor Henri Becquerel
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842-1919	por sus investigaciones de las densidades de los gases más importantes y por su descubrimiento del argón
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1862-1947	por su trabajo sobre los rayos catódicos
1906	Joseph John Thomson	1856-1940	por sus investigaciones teóricas y experimentales sobre la conducción de electricidad por los gases
1907	Albert Abraham Michelson	1852-1931	por sus instrumentos de precisión óptica y por las investigaciones meteorológicas efectuadas con su ayuda
1908	Gabriel Lippmann	1845-1921	por su método para reproducir fotográficamente los colores basándose en los fenómenos de interferencia
1909	Guglielmo Marconi Carl Ferdinand Braun	1874-1937 1850-1918	por su contribución a la invención de la telegrafía inalámbrica
1910	Johanees Diderik van der Waals	1837-1923	por su trabajo en la ecuación de estado de los gases y de los líquidos
1911	Wilhelm Wien	1864-1928	por sus descubrimientos referentes a las leyes que rigen la radiación del calor
1912	Nils Gustaf Dalén	1869-1937	por su invención de los reguladores automáticos para usarlos con acumuladores de gas para iluminar los faros y las boyas
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853-1926	por sus investigaciones de las propiedades de la materia a bajas temperaturas, que *entre otras cosas* condujeron a la producción del helio líquido
1914	Max von Laue	1879-1960	por su descubrimiento de la difracción de los rayos Röntgen por cristales
1915	William Henry Bragg William Lawrence Bragg	1862-1942 1890-1971	por sus trabajos en el análisis de la estructura cristalina mediante los rayos X
1917	Charles Glover Barkla	1877-1944	por su descubrimiento de los rayos X característicos de los elementos
1918	Max Planck	1858-1947	por su descubrimiento de los cuantos de energía
1919	Johannes Stark	1874-1957	por su descubrimiento del efecto Doppler en la radiación de átomos en movimiento la división de las líneas espectrales en los campos eléctricos
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861-1938	por los servicios que prestó a las mediciones de precisión en física por su descubrimiento de anomalías en las aleaciones de níquel y acero
1921	Albert Einstein	1879-1955	por sus trabajos en la física teórica y, especialmente, por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico
1922	Niels Bohr	1885-1962	por su investigación de la estructura del átomo y de la radiación que emana de ellos
1923	Robert Andrews Millikan	1868-1953	por su trabajo en la carga elemental de la electricidad y en el efecto fotoeléctrico

* Vea *Nobel Lectures, Physics*, 1901-1970. Elsevier Publishing Company, para biografías de los galardonados y para sus ponencias al recibir el premio. Para mayor información, vea http://www.nobel.selphysics/laureates/index.html.

1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1886-1978	por sus descubrimientos e investigaciones en el campo de la espectroscopía por rayos X
1925	James Franck	1882-1964	por su descubrimiento de las leyes que rigen el impacto de un electrón en el átomo
	Gustav Hertz	1887-1975	
1926	Jean Baptiste Perrin	1870-1942	por su trabajo sobre la estructura discontinua de la materia y, especialmente, por su descubrimiento del equilibrio de sedimentación
1927	Arthur Holly Compton	1892-1962	por su descubrimiento del efecto que lleva su nombre por su método
	Charles Thomson Rees Wilson	1869-1959	de hacer visibles por condensación de vapor las trayectorias de las partículas con carga eléctrica
1928	Owen Williams Richardson	1879-1959	por su trabajo sobre los fenómenos termoiónicos y, especialmente, por la ley que lleva su nombre
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892-1987	por su descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de los electrones
1930	Sir Chandrasekhara Venkata Raman	1888-1970	por su trabajo sobre la dispersión de la luz y por el descubrimiento del efecto que lleva su nombre
1932	Werner Heisenberg	1901-1976	por su creación de la mecánica cuántica, cuya aplicación condujo, entre otras cosas, al descubrimiento de las formas alotrópicas del hidrógeno
1933	Erwin Schrödinger	1887-1961	por su descubrimiento de nuevas formas productivas de la teoría atómica
	Paul Adrien Maurice Dirac	1902-1984	
1935	James Chadwick	1891-1974	por su descubrimiento del neutrón
1936	Victor Franz Hess	1883-1964	por su descubrimiento de la radiación cósmica
	Carl David Anderson	1905-1991	por su descubrimiento del positrón
1937	Clinton Joseph Davisson	1881-1958	por su descubrimiento experimental de la difracción de electrones por cristales
	George Paget Thomson	1892-1975	
1938	Enrico Fermi	1901-1954	por su demostración de la existencia de nuevos elementos radiactivos producidos por la irradiación de neutrones y por el descubrimiento conexo de las reacciones nucleares producidas por neutrones lentos
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901-1958	por la invención y el desarrollo del ciclotrón y por los resultados obtenidos con él, sobre todo con los elementos radiactivos artificiales
1943	Otto Stern	1888-1969	por su contribución al desarrollo del método de rayos moleculares y por su descubrimiento del momento magnético del protón
1944	Isidor Isaac Rabi	1898-1988	por su método de resonancia para registrar las propiedades magnéticas de los núcleos atómicos
1945	Wolfgang Pauli	1900-1958	por el descubrimiento del principio de exclusión (principio de Pauli)
1946	Percy Williams Bridgman	1882-1961	por la invención del aparato para producir presiones extremadamente altas y por descubrimientos que con ellas hizo en el área de la física a alta presión
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892-1965	por sus investigaciones de la física de la atmósfera superior, sobre todo por el descubrimiento de la capa Appleton
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897-1974	por la creación del método de la cámara de niebla de Wilson y por los descubrimientos hechos con ella en la física nuclear y en la radiación cósmica
1949	Hideki Yukawa	1907-1981	por su predicción de la existencia de los mesones, basándose en el trabajo teórico relativo a las fuerzas nucleares
1950	Cecil Frank Powell	1903-1969	por el desarrollo del método fotográfico para estudiar los procesos nucleares y por sus descubrimientos concernientes a los mesones logrados con él
1951	Sir John Douglas Cockcroft	1897-1967	por su innovador trabajo sobre la transmutación de los núcleos atómicos por partículas aceleradas artificialmente
	Ernest Thomas Sinton Walton	1903-1995	
1952	Felix Bloch	1905-1983	por su invención de nuevas técnicas en los métodos de precisión magnética nuclear y por los descubrimientos conexos
	Edward Mills Purcell	1912-1997	
1953	Frits Zernike	1888-1966	por la demostración del método de contraste de fases, especialmente por su invención de la microscopía por contraste de fases
1954	Max Born	1882-1970	por su investigación fundamental en la mecánica cuántica, sobre todo por su interpretación estadística de la función ondatoria
	Walter Bothe	1981-1957	por el método de coincidencias y por los descubrimientos hechos con él
1955	Willis Eugene Lamb	1913-	por sus descubrimientos referentes a la estructura fina del espectro
	Polykarp Kusch	1911-1993	de hidrógeno por su determinación de la precisión del momento magnético del electrón
1956	William Shockley	1901-1989	por su investigación sobre los semiconductores y por su descubrimiento del efecto de transistor
	John Bardeen	1908-1991	
	Walter Houser Brattain	1902-1987	

1957	Chen Ning Yang	1922-	por su penetrante investigación sobre las leyes de paridad, que
	Tsung Dao Lee	1926-	condujeron a descubrimientos importantes relacionados con las partículas elementales
1958	Pavel Aleksejecič Čerenkov	1904-1990	por el descubrimiento y la interpretación del efecto Čerenkov
	Il'ja Michajlovič Frank	1908-1990	
	Igor Yevgenyevich Tamm	1895-1971	
1959	Emilio Gino Segrè	1905-1989	por su descubrimiento del antiprotón
	Owen Chamberlain	1920-	
1960	Donald Arthur Glaser	1926-	por la invención de la cámara de burbujas
1961	Robert Hofstadter	1915-1990	por sus trabajos innovadores sobre la dispersión de electrones en los núcleos atómicos y por los descubrimientos del efecto que lleva su nombre.
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929-	por sus investigaciones referentes a la absorción de resonancia de los rayos gamma y por su descubrimiento conexo del efecto que lleva su nombre.
1962	Lev Davidovič Landau	1908-1968	por sus teorías innovadoras sobre la materia condensada, especialmente el helio líquido
1963	Eugene P. Wigner	1902-1995	por su contribución a la teoría del núcleo atómico y de las partículas elementales, especialmente con el descubrimiento y la aplicación de los principios fundamentales de la simetría
	Maria Goeppert Mayer	1906-1972	por sus descubrimientos acerca de la estructura nuclear de capas
	J. Hans D. Jensen	1907-1973	
1964	Charles H. Townes	1915-	por el importante trabajo en el campo de la electrónica cuántica, que
	Nikolai G. Basov	1922-	llevó a construir osciladores y amplificadores basados en el
	Alexander M. Prochorov	1916-	principio de máser-láser
1965	Sin-itiro Tomonaga	1906-1979	por su importante trabajo en la electrodinámica cuántica, con
	Julian Schwinger	1918-1994	trascendentales consecuencias en la física de las partículas elementales
	Richard P. Feynman	1918-1988	
1966	Alfred Kastler	1902-1984	por su descubrimiento y desarrollo de métodos ópticos para estudiar la resonancia hertziana en los átomos.
1967	Hans Albrecht Bethe	1906-	por sus contribuciones a la teoría de las reacciones nucleares, en especial sus descubrimientos concernientes a la producción de energía en las estrellas
1968	Luis W. Alvarez	1911-1988	por su trascendental contribución a la física de las partículas elementales, en particular el descubrimiento de muchos estados de resonancia, que fueron posibles gracias a que inventó la técnica de usar la cámara de burbujas de hidrógeno y el análisis de datos
1969	Murray Gell-Mann	1929-	por su contribución y sus descubrimientos referentes a la clasificación de las partículas elementales y de sus interacciones
1970	Hannes Alfvén	1908-1995	por su trabajo y descubrimientos tan importantes en la magneto-hidrodinámica, con fecundas aplicaciones en varias partes de la física del plasma
	Louis Néel	1904-	por sus innovadores trabajos y descubrimientos concernientes al antiferromagnetismo y al ferromagnetismo, que condujeron a importantes aplicaciones en la física del estado sólido
1971	Dennis Gabor	1900-1979	por su descubrimiento de los principios de la holografía
1972	John Bardeen	1908-1991	por su formulación de la teoría de la superconductividad
	Leon N. Cooper	1930-	
	J. Robert Schrieffer	1931-	
1973	Leo Esaki	1925-	por su descubrimiento de túneles en los semiconductores
	Ivan Giaver	1929-	por su descubrimiento de túneles en los superconductores
	Brian D. Josephson	1940-	por su predicción teórica de las propiedades de una supercorriente a través de una barrera de túneles
1974	Anthony Hewish	1924-	por el descubrimiento de los pulsares
	Sir Martin Ryle	1918-1984	por su innovador trabajo en radioastronomía
1975	Aage Bohr	1922-	por el descubrimiento de la conexión entre el movimiento colectivo
	Ben Mottelson	1926-	y el movimiento de las partículas, así como la formulación de la teoría
	James Rainwater	1917-1986	de la estructura del núcleo atómico basada en esta conexión
1976	Burton Richter	1931-	por su descubrimiento (independiente) de una importante partícula fundamental
	Samuel Chao Chung Ting	1936	

1977	Philip Warren Anderson	1923	por sus importantes investigaciones teóricas sobre la estructura
	Nevill Francis Mott	1905-1996	electrónica de los sistemas magnéticos y desordenados
	John Hasbrouch Van Vleck	1899-1980	
1978	Peter L. Kapitza	1894-1984	por sus invenciones y descubrimientos básicos en la física de bajas temperaturas
	Arno A. Penzias	1926-	por su descubrimiento de la radiación de fondo de las microondas cósmicas
	Robert Woodrow Wilson	1936-	
1979	Sheldon Lee Glashow	1932-	por su modelo unificado de la acción de fuerzas electromagnéticas y
	Abdus Salam	1926-1996	débiles y por su predicción de la existencia de corrientes neutrales
	Steven Weinberg	1933-	
1980	James W. Cronin	1931-	por el descubrimiento de las violaciones de los principios básicos de
	Val L. Fitch	1923-	la simetría en los decaimientos de los mesones neutrales K
1981	Nicolaas Bloembergen	1920-	por su contribución a la invención de la espectroscopía láser
	Arthur Leonard Schawlow	1921-1999	
	Kai M. Siegbahn	1918-1999	por su contribución de espectroscopía de electrones de alta resolución
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936	por su método de analizar los fenómenos críticos propios de los cambios de la materia bajo la influencia de la presión y de la temperatura por sus
1983	Subrehmanyan Chandrasekhar	1910-1995	estudios teóricos sobre la estructura y la evolución de las estrellas
	William A. Fowler	1911-1995	por sus estudios sobre la formación de los elementos químicos en el universo
1984	Carlo Rubbia	1934-	por sus decisivas contribuciones al gran proyecto que culminó
	Simon van der Meer	1925-	en el descubrimiento de las partículas de campo W y Z, comunicadoras de la interacción débil
1985	Klaus von Klitzing	1943-	por su descubrimiento de la resistencia cuantizada de Hall
1986	Ernst Ruska	1906-1988	por su invención del microscopio electrónico
	Gerd Binning	1947-	por su invención del microscopio
	Heinrich Rohrer	1933-	electrónico por barrido-túneles
1987	Karl Alex Müller	1927-	por su descubrimiento de una nueva clase de superconductores
	J. Georg Bednorz	1950-	
1988	Leon M. Lederman	1922-	por sus experimentos con haces de neutrino y por el descubrimiento
	Melvin Schwartz	1932-	del neutrino muon
	Jack Steinberger	1921-	
1989	Hans G. Dehmelt	1922-	por su invención de la técnica para atrapar átomos individuales
	Wolfgang Paul	1913-1993	
	Norman F. Ramsey	1915-	por sus descubrimientos en espectroscopía de resonancia atómica, que dieron origen a los máseres de hidrógeno y a los relojes atómicos
1990	Richard E. Taylor	1929-	por sus experimentos sobre la dispersión de electrones desde el
	Jerome I. Friedman	1930-	núcleo, que revelaron la presencia de quarks dentro de los nucleones
	Henry W. Kendall	1926-1999	
1991	Pierre-Gilles de Gennes	1932-	por sus descubrimientos sobre el ordenamiento de las moléculas en sustancias como los cristales líquidos, los superconductores y los polímeros
1992	George Charpak	1924-	por su invención de los detectores electrónicos rápidos para partículas de gran energía
1993	Joseph H. Taylor	1941-	por su descubrimiento e interpretación del primer pulsar binario
	Russell A. Hulse	1950-	
1994	Bertram N. Brockhouse	1918-	por el desarrollo de las técnicas de dispersión de los neutrones
	Clifford G. Shull	1915-	
1995	Martin L. Perl	1927-	por su descubrimiento del leptón tau
	Frederick Reines	1918-1998	por la detección del neutrino
1996	David M. Lee	1931-	por su descubrimiento de la superfluidez en ^{3}He
	Douglas M. Osheroff	1945-	
	Robert C. Richardson	1937-	
1997	Steven Chu	1948-	por la invención de los métodos para enfriar y atrapar los
	Claude Cohen-Tannoudji	1933-	átomos con luz láser
	William D. Phillips	1948-	
1998	Robert B. Laughlin	1950-	por su descubrimientos de una nueva forma del fluido cuántico
	Horst L. Stormer	1949-	con excitaciones cargadas fraccionalmente
	Daniel C. Tsui	1939-	
1999	Gerardus 't Hooft	1946-	por explicar la estructura cuántica de las interacciones electrodébiles
	Martinus J. G.	1931-	en física
2000	Zhores I. Alferov	1930-	por inventar las heteroestructuras que se usan en alta velocidad y en
	Herbert Kroemer	1928-	optoelectrónica
	Jack S. Kilby	1923-	por su parte en la invención de los circuitos integrados

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS IMPARES

CAPÍTULO 1

Ejercicios

3. 52.6 min; 5.2%. **5.** -0.44%. **7.** 3.33 ft. **9.** 55 s.
11. 2.2 d. **13.** *a*) 100 m; 8.56 m; 28.1 ft.
b) 1 mi es más larga por 109 m o que 358 ft. **15.** 1.88×10^{22} cm^3.
17. *a*) 4.00×10^4 km. *b*) 5.10×10^8 km^2.
c) 1.08×10^{12} km^3. **19.** 2.86×10^{-3} ly/siglo
21. *a*) 4.85×10^{-6} pc; 1.58×10^{-5} ly
b) 9.48×10^{12} km; 3.08×10^{13} km.
23. 5.98×10^{26}. **25.** Nueva York **27.** 840 km.
29. 605.780211 nm. **31.** m/s.
33. $(ch/G)^{1/2} = 5.46 \times 10^{-8}$ kg.

Problemas

1. 7 h 44 min 50 s, p.m. **3.** *a*) 31 m. *b*) 22 m.
c) Lago Ontario. **5.** 1 lb aproximadamente. **7.** 0.260 kg.
9. *a*) 282 pm. *b*) 416 pm.

CAPÍTULO 2

Ejercicios

1. *a*) Paralelo. *b*) Antiparalelo. *c*) Perpendicular.
3. *a*) 4.5, 52° EN. *b*) 8.4, 25° SE. **5.** 4.76 km.
7. *a*) $2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$. *b*) 5.4, a 68° con el eje $1x$.
9. *a*) 5.0, 323°. *b*) 10.0, 53.1°. *c*) 11.2, 26.6°.
d) 11.2, 79.7°. *e*) 11.2, 260°.
11. *a*) 370 m, 57° NE. *b*) 370 m, 420 m.
13. *a*) 16.0 cm, 45.0° en sentido de las manecillas del reloj
verticalmente hacia abajo *b*) 22.6 cm, verticalmente
hacia arriba *c*) Cero.
15. 33,900 ft, 0,288° debajo de la horizontal
17. *a*) $(6\text{ m})\hat{\imath} - (106\text{ m})\hat{\jmath}$. *b*) $(19\text{ m/s})\hat{\imath} - (224\text{ m/s})\hat{\jmath}$.
c) $(24\text{ m/s}^2)\hat{\imath} - (336\text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$. **19.** *a*) $-(18\text{ m/s}^2)\hat{\imath}$. *b*) 0.75 s.
c) Nunca. *d*) 2.2 s. **21.** *a*) 11.5 h. *b*) 5.5 h.
c) Atlántico del Norte. **23.** 31 km. **25.** 2 cm/y.
27. 1 h 13 min. **29.** 48 km/h. **31.** 100 m. **33.** -20 m/s^2.
35. *a*) *OA*: +,0; *AB*: +,−; *BC*: 0,0; *CD*: −,+. *b*) No.
39. *a*) m/s^2; m/s^3. *b*) 2 s. *c*) 24 m. *d*) −16 m.
e) 3.0, 0.0, −9.0, −24 m. *f*) 0.0, −6.0, −12, −18 m/s^2.
g) −10 m/s. **41.** *a*) 3.1×10^6 s. *b*) 4.7×10^{13} m.
43. 10.4 cm. **45.** $21g$. **47.** *a*) 5.00 s. *b*) 61.5 m.
49. *a*) 34.7 ft. *b*) 41.6 s. **51.** 183 m/s. **53.** *a*) 29.4 m.
b) 2.45 s. **55.** *a*) 3.19 s. *b*) 1.32 s.
57. *a*) 27.4 m/s. *b*) 5.33 m/s. *c*) 1.45 m. **59.** 1.52 s.
61. 0.39 m.

Problemas

1. *a*) 28 m. *b*) 13 m. **3.** *a*) $(10\text{ ft})\hat{\imath} + (12\text{ ft})\hat{\jmath} + (14\text{ ft})\hat{k}$.
b) 21 ft. *c*) Igual o mayor que, no menor que. *d*) 26 ft.
5. *a*) 45.0 mi/h. *b*) 42.8 mi/h. *c*) 43.9 mi/h.
7. *a*) Un número infinito. *b*) 87 km. **9.** *a*) 28.5 cm/s.
b) 18.0 cm/s. *c*) 40.5 cm/s. *d*) 28.1 cm/s. *e*) 30.3 cm/s.
11. *a*) 14 m/s; 18 m/s^2. *b*) 6 m/s, 12 m/s^2; 24 m/s, 24 m/s^2.
13. No, su rapidez era ≤ 24 mi/h. **15.** *a*) 0.75 s. *b*) 50 m.
17. *a*) 3.40 s. *b*) 16.2 m. **19.** 1.23, 4.90, 11.0, 19.6, 30.6 cm.
21. *a*) 110 km. *b*) 330 s. **23.** *a*) 8.85 m/s. *b*) 0.999 m.
25. $96g$. **27.** 0.3 s. **29.** 20.4 m.
31. Aproximadamente $3.6h^{1/2}$, con h en metros.

CAPÍTULO 3

Ejercicios

1. 6.3 y. **3.** 1.0×10^{-15} N. **5.** 0.080 m/s^2. **7.** 1.9 mm.
9. *a*) 4.55 m/s^2. *b*) 2.59 m/s^2. **11.** *a*) 9.9 N. *b*) 2.1 m/s^2.
13. *a*) 646 kg, 6,320 N. *b*) 412 kg, 4,040 N.
15. *a*) 12.2 N; 2.65 kg. *b*) Cero: 2.65 kg. **17.** 1,600 lb.
19. 1.19×10^6 N. **21.** *a*) 5,400 N. *b*) 5.5 s. *c*) 15 m.
d) 2.7 s. **23.** *a*) 210 m/s^2. *b*) 1.8×10^4 N.
25. Bájela con una aceleración mayor que 1.3 m/s^2.
27. 33 m/s. **29.** *a*) 5.0×10^5 N. *b*) 1.4×10^6 N.
31. *a*) 2.2×10^5 N. *b*) 5.0×10^4 N.

Problemas

1. *a*) 0.28 μm. *b*) 37 μm. **3.** *a*) 1.8 m/s^2. *b*) 3.8 m/s^2.
c) 4.0 m. **5.** *a*) 3260 N. *b*) 2720 kg. *c*) 1.20 m/s^2.
7. *a*) 0.97 m/s^2. *b*) 1.2 N. *c*) 3.5 N.
9. *a*) 1.23 N, 2.46 N, 3.69 N, 4.92 N. *b*) 6.15 N. *c*) 0.250 N.
11. *a*) $P/(m + M)$. *b*) $PM/(m + M)$.

CAPÍTULO 4

Ejercicios

1. *a*) 2.4 ns. *b*) 2.7 mm. *c*) 9,600 km/s, 2,300 km/s.
3. *a*) $(2Bt)\hat{\jmath} + C\hat{k} = (8.0\text{ m/s}^2)t\hat{\jmath} + (1.0\text{ m/s})\hat{k}$.
b) $2B\hat{\jmath} = (8.0\text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$. *c*) Una parábola
5. $(0.83\text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (0.71\text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$. **7.** *a*) 2.2 m/s^2.
b) 120 N. *c*) 21 m/s^2. **9.** 11 m.
11. 6,800 N a 21° desde la línea de movimiento. **13.** *a*) 0.514 s.
b) 9.94 ft/s. **15.** *a*) 0.18 m. *b*) 1.9 m. **19.** *a*) 11 m.
b) 23 m. *c*) 17 m/s, 63° por debajo de la horizontal.
21. 1 cm más largo. **23.** 78 ft/s, 65°. **25.** *a*) 0.20 m. *b*) No.
27. 115 ft/s. **29.** 1.47 N. **31.** $(m/b)\ln 2$. **33.** *a*) 257 kN.
b) 1.06°. **35.** *a*) 19 m/s. *b*) 35 rev/min. **37.** *a*) 130 km/s.

b) 790 km/s². **39.** 36 s; no.
41. El viento sopla al este con una velocidad de 55 mi/h.
43. *a*) 0.71 s. *b*) 2.3 ft. **45.** *a*) 46.8° E of N. *b*) 6 min 35 s.

Problemas

1. 60°. **3.** *a*) 8.44 km. *b*) 59.0 km. **5.** *a*) 1.16 s. *b*) 13.0 m. *c*) 18.8 m/s; 5.56 m/s. *d*) No. **7.** *a*) 99 ft. *b*) 90 ft/s. *c*) 180 ft. **9.** 31° a 63° por arriba de la horizontal. **13.** 1.30 m/s. **15.** *a*) g. *b*) $(mg/b)^{1/2}$. *c*) $0.75g$. **17.** *a*) $ge^{-bt/m}$;g;0. *b*) $(mg/b)[t + (m/b)(e^{-bt/m} - 1)]$. **19.** *a*) 15 km. *b*) 77 km/h. **21.** 220 m/s². **23.** *b*) Máximo: $v_x = 2\omega R$, $v_y = 0$; $a_x = 0$, $a_y = -\omega^2 R$. Mínimo: $v_x = v_y = 0$; $a_x = 0$, $a_y = \omega^2 R$. **25.** (2.976 to 2.991) × 10^8 m/s. **27.** 98.1 km/h, 15.1°.

CAPÍTULO 5

Ejercicios

1. *a*) 0.0018 N. *b*) 0.0033 N. **3.** *a*) 7.3 kg. *b*) 89 N. **5.** *a*) 6.8 m/s. *b*) Trepe la cuerda. **7.** 18 kN. **9.** 2°. **11.** 9.3 m/s². **13.** 900 N. **15.** *a*) 9.1 kN. *b*) 9.0 kN. **17.** *b*) 219 N. *c*) 81 N. **19.** 0.040; 0.026. **21.** 0.487. **23.** *a*) 3.2 m/s², hacia abajo del plano. *b*) 2.9 m. *c*) Permanezca allí. **25.** *a*) 70 lb. *b*) 4.6 ft/s². **27.** 155 N. **29.** *a*) Cero. *b*) 13.4 ft/s², hacia abajo del plano. *c*) 4.27 ft/s², hacia arriba del plano. **31.** *a*) 7.6 m/s². *b*) 0.87 m/s². **33.** *a*) 730 lb (3,200 N). *b*) 0.3. **35.** *a*) 0.67 m/s. *b*) 1.8 m/s². *c*) 0.53 N. **37.** *a*) 2.2 × 10^6 m/s. *b*) 9.1 × 10^{22} m/s². *c*) 8.3 × 10^{-8} N. **39.** $(Mgr/m)^{1/2}$. **41.** *a*) 0.23. *b*) 128 km/h. **43.** 0.162; 0.295. **45.** *a*) 9.5 m/s. *b*) 20 m. **47.** *a*) 0.0337 N. *b*) 9.77 N.

Problemas

1. *b*) − 1.73 m/s²; 23.4 N. *c*) $m_2 < 2.60$ kg; $m_2 > 2.60$ kg; $m_2 = 2.60$ kg. **5.** *a*) 11.1 N. *b*) 47.3 N. *c*) 40.1 N. **7.** *a*) $\mu_k mg(\text{sen}\,\theta - \mu_k \cos\theta)$. *b*) $\tan^{-1}\mu_s$. **9.** 490 N. **13.** *a*) 0.46. *b*) 0.92. **15.** *a*) 30 cm/s. *b*) 1.7 m/s², radialmente hacia adentro *c*) 2.9 mN. *d*) 0.40. **17.** *a*) 8.74 N. *b*) 37.9 N. *c*) 6.45 m/s. **19.** *b*) 45°; 1.72 mrad. *c*) Cero; cero.

CAPÍTULO 6

Ejercicios

1. *a*) 52.0 km/h. *b*) 178 km/h. **3.** 205 kg · m/s; perpendicularmente a la placa. **5.** *a*) $2mv/\Delta t$. *b*) 560 N. **7.** 3.29 kN. **9.** 930 N. **11.** 8.8 m/s. **13.** 1.95 × 10^5 kg · m/s en cualquier dirección del empuje. **15.** 2.0 s. **17.** Aumenta por 4.54 m/s. **19.** 3,960 km/h. **21.** 5.6 m/s a la izquierda. **23.** 1.77 m/s. **25.** $(4.0\ \text{m/s})\hat{\mathbf{i}} + (5.0\ \text{m/s})\hat{\mathbf{j}}$. **27.** 3.43 m/s, desviado 17.3° a la izquierda. **29.** 100 g. **31.** 1.2 kg. **33.** 120°. **35.** 2.44 m/s, a la izquierda.

Problemas

1. $2\mu u$. **3.** *a*) 2.20 N · s. *b*) 212 N. **5.** *a*) 0.480 g. *b*) 7.2 kN. **7.** $mgR[(2h/g)^{1/2} + t]$; 41.0 N. **9.** *a*) 130 tons. *b*) 0.88 in. *c*) **11.** 37.1 mi/h, 63.6° S of W. **13.** 28.0°. *b*) 7.44 m/s. **15.** *a*) 74.4 m/s. *b*) 81.5 m/s; 84.1 m/s. **17.** v_2 y v_3 estarán a 30.0° con v_0 y tendrán una magnitud de 6.93 m/s; v_1 es opuesta a v_0 y tiene una magnitud de 2.00 m/s. **19.** *a*) 746 m/s. *b*) 963 m/s. **21.** *a*) A: 4.57 m/s; B: 3.94 m/s. *b*) 7.53 m/s.

CAPÍTULO 7

Ejercicios

1. 4,640 km (1,730 km debajo de la superficie terrestre). **3.** 75.2 km/h. **5.** *a*) El centro de masa no se mueve. *b*) 1.23 m. **7.** 14.5 ft. **9.** 33.4 m. **11.** 6.75 × 10^{-12} m a partir del átomo de nitrógeno en el eje de simetría. **13.** $L/5$ a partir de la varilla pesada en el eje de simetría. **15.** $x_{cm} = y_{cm} = 20$ cm; $z_{cm} = 16$ cm. **17.** 27. **19.** *a*) 3.2 m/s. *b*) 3.2 m/s. **21.** *a*) 2.72. *b*) 7.39. **23.** 1.33 km/s. **25.** 1.29 m/s.

Problemas

1. *a*) Down; $mv/(m + M)$. *b*) El globo vuelve a ser estacionario. **3.** $g(1 - 2x/L)$. **5.** $(HM/m)[(1 + m/M)^{1/2} - 1]$. **7.** *a*) 540 m/s. *b*) 40.4°. **9.** 60 N. **11.** Barcaza rápida: 49.5 N más; barcaza lenta: sin cambio.

CAPÍTULO 8

Ejercicios

1. $n(n + 1)/2$. **3.** *a*) $a + 3bt^2 - 4ct^3$. *b*) $6t(b - 2ct)$. **5.** *a*) $\omega_0 + at^4 - bt^3$. *b*) $\omega_0 t + at^5/5 - bt^4/4$. **7.** 14. **9.** *a*) 4.8 m/s. *b*) No. **11.** $1/T_S = 1/T_P - 1/T_E$. **13.** *a*) 8,140 rev/min². *b*) 425 rev. **15.** *a*) − 1.28 rad/s². *b*) 248 rad. *c*) 29.5 rev. **17.** *a*) 2.0 rev/s. *b*) 3.8 s. **19.** *a*) 369 s. *b*) − 3.90 × 10^{-3} rad/s². *c*) 108 s. **21.** 0.132 rad/s. **23.** *a*) 2.48 × 10^{-3} rad/s. *b*) 19.7 m/s². *c*) Cero. **25.** *a*) 7.27 × 10^{-5} rad/s. *b*) 355 m/s. *c*) 7.27 × 10^{-5} rad/s; 463 m/s. **27.** *a*) 310 m/s. *b*) 340 m/s. **29.** *a*) $r\alpha^2 t^2$. *b*) $r\alpha$. *c*) 44.1°. **31.** Yes; + 0.16. **33.** *a*) $(-26.2\ \text{m/s})\hat{\mathbf{i}}$. *b*) $(4.87\ \text{m/s}^2)\hat{\mathbf{i}} - (375\ \text{m/s}^2)\hat{\mathbf{j}}$. *c*) 1.83 m.

Problemas

1. *a*) 4.0 rad/s; 28 rad/s. *b*) 12 rad/s². *c*) 6.0 rad/s²; 18 rad/s². **3.** *b*) 23 h 56 min. **5.** *a*) 0.92 rev. *b*) 6.0 rad/s. **7.** *a*) 1.99 × 10^{-7} rad/s. *b*) 29.9 km/s. *c*) 5.94 mm/s². **9.** *a*) 3800 rad/s. *b*) 190 m/s. **11.** *a*) 22.4 rad/s. *b*) 5.38 km. *c*) 1.15 h. **13.** *a*) $\omega b/\cos^2\omega t$ en cualquier dirección en el plano perpendicular $\vec{\omega}$. *b*) $\pi/2\omega$.

CAPÍTULO 9

Ejercicios

1. *a*) 15 N · m. *b*) 10 N · m. *c*) 15 N · m. **5.** 27 unidades + dirección 1 z. **7.** $a^2 b \text{ sen}\,\phi$, $\pi/2 - \phi$. **9.** $(-4.8\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{\mathbf{i}} + (-0.85\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{\mathbf{j}} + (3.4\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{\mathbf{k}}$. **11.** *a*) 0.14 kg · m². *b*) 91 rad/s². **13.** *a*) 2.6 × 10^{-2} kg · m². *b*) Sin cambio **15.** *a*) 482 kN. *b*) 11.2 kN · m. **17.** $M(a^2 + b^2)/3$. **19.** $5mL^2 + (8/3)mL^2$. **23.** *a*) 2.5 m. *b*) 7.3°. **25.** 10.4 m. **27.** 340 lb; 420 lb. **29.** $W[h(2r - h)]^{1/2}/(r - h)$. **31.** *a*) 47.0 lb. *b*) 21.3 lb; 10.9 lb. **33.** 7.63 rad/s², fuera de página. **35.** *a*) 28.2 rad/s². *b*) 338 N · m. **37.** 690 rad/s. **39.** 1.73 × 10^5 g · cm². **41.** *a*) 56.5 rad/s. *b*) − 8.88 rad/s². *c*) 69.2 m. **43.** *a*) 1.13 s. *b*) 13.6 m.

Problemas

1. *a*) Se desliza; 31°. *b*) Se inclina; 34°. **3.** *a*) $W(1 + r^2/L^2)^{1/2}$. *b*) Wr/L. **5.** *a*) 269 N. *b*) 874 N, 10.7° arriba de la escalera. **7.** $F_1 = W \operatorname{sen} \theta_2/\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$; $F_2 = W \operatorname{sen} \theta_1/\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$; normal a los planos. **9.** *a*) $L/2$, $L/4$, $L/6$. *c*) $N = n$. **15.** *a*) $dm/M = 2r\,dr/R^2$. *b*) $dI = 2Mr^3\,dr/R^2$. *c*) $\frac{1}{2}MR^2$. **17.** 1.73 m/s²; 6.92 m/s². **19.** *a*) $(2/3)\mu MgR$. *b*) $(3/4)\omega_0 R/4\mu g$. **21.** *a*) 10.7°. *b*) 0.186*g*. **25.** *a*) La esfera. *b*) No.

CAPÍTULO 10

Ejercicios

1. 0.62 kg·m²/s. **5.** 2.49×10^{11} kg·m²/s. **9.** *a*) 0.521 kg·m²/s. *b*) 4,080 rev/min. **13.** $v_f = 2.90$ m/s en dirección del impulso $\omega_f = 10.7$ rad/s alrededor del centro de masa **15.** $R_1R_2I_1\omega_0/(R_1^2I_2 + R_2^2I_1)$. **17.** 3.0 min. **19.** 354 rev. **21.** 171 rev/min. **23.** *a*) 9.66 rad/s, en dirección de las manecillas del reloj visto desde arriba. *b*) El movimiento final es el mismo que en *a*). **25.** 0.739 rad/s. **27.** 1.90 min.

Problemas

1. *a*) 14.1 kg·m²/s, fuera de la página. *b*) 1.76 N·m, fuera de la página. **7.** *a*) 1.18 s. *b*) 8.6 m. *c*) 5.18 rev. *d*) 6.07 m/s. **9.** 0.4 s. más largo. **11.** *a*) $(I\omega - mRv)/(I + mR^2)$. *b*) $\frac{1}{2}m(v + R\omega)^2/(1 + mR^2/I)$.

CAPÍTULO 11

Ejercicios

1. *a*) 580 J. *b*) 0. *c*) 0. **3.** *a*) 430 J. *b*) −400 J. *c*) 0. **5.** *a*) 2,160 J. *b*) −1,430 J. **7.** 22.2°. **9.** −19. **11.** 720 W. **13.** 24 W. **15.** 25 hp. **17.** *a*) 0.77 mi. *b*) 71 kW. **19.** 2.66 hp. **21.** 800 J. **23.** *a*) 23 mm. *b*) 45 N. **27.** 1,200 km/s. **29.** *a*) 2.88×10^7 m/s. *b*) 1.32 MeV. **31.** *a*) 493 J. *b*) 168 W. **33.** *a*) 2.5×10^5 ft·lb (340 kJ). *b*) 14 hp (10 kW). *c*) 28 hp (20 kW). **35.** 6.75×10^{12} rad/s. **37.** 1.36 kW. **39.** *a*) 2.57×10^{29} J. *b*) 1.32 Gy. **41.** 12.9 tons.

Problemas

1. 2.1×10^{-10} N. **3.** *a*) 215 lb. *b*) 10,100 ft·lb. *c*) 48.0 ft. *d*) 10,300 ft·lb. **5.** *a*) 2.45×10^5 ft·lb. *b*) 0.619 hp. **9.** *a*) 10.0 kW. *b*) 2.97 kW. **11.** $3F_0x_0/2$. **13.** $15W_0$. **17.** Hombre: 2.41 m/s; niño: 4.82 m/s. **19.** *a*) 9.0×10^4 megatones de TNT. *b*) 45 km. **23.** 0.0217. **25.** 0.792. **27.** $K_a = 97.5$ J; $K_b = 941$ J. **31.** *a*) $mv_1/(m + M)$. *b*) $M/(m + M)$. **33.** 700 J ganados. **35.** *a*) $m_1v_0^2/2$. *b*) $m_1^2v_1^2/2(m_1 + m_2)$. *c*) $m_2/(m_1 + m_2)$. *d*) $m_1m_2v_1^2/2(m_1 + m_2)$; cero; uno; sí

CAPÍTULO 12

Ejercicios

1. *a*) $U(x) = -Gm_1m_2/x$. *b*) $Gm_1m_2d/x_1(x_1 + d)$. **3.** $U(x) = -(\alpha/2\beta)e^{-\beta x^2}$ con $U(\infty) = 0$. **5.** 110 MN/m. **7.** 2.15 m/s. **9.** *a*) v_0. *b*) $(v_0^2 + gh)^{1/2}$. *c*) $(v_0^2 + 2gh)^{1/2}$. **11.** *a*) 7.63 N/cm. *b*) 57.4 J. *c*) 73.8 cm. **13.** *a*) $K = \frac{1}{2}mg^2t^2$; $U = mg(h - \frac{1}{2}gt^2)$. *b*) $K = mg(h - y)$; $U = mgy$. **15.** 4.24 m. **19.** 1.25 cm. **21.** $d[m_1/(m_1 + m_2)]^2$. **23.** $[2hmg/(m + I/r^2 + 2M/3)]^{1/2}$. **25.** *a*) 3.43 m. *b*) 2.65 s. *c*) 23.1. **27.** $v_0(5/7)^{1/2}$. **29.** *a*) 4.7 N. *b*) $x = 1.2$ m to $x = 14$ m. *c*) 3.7 m/s. **31.** *a*) $F_x = -kx$; $F_y = -ky$; $\vec{F}$ apunta hacia el origen. *b*) $F_r = -kr$; $F_\theta = 0$.

Problemas

1. *a*) $kl(z + l) - kl(z - l)$. **3.** *a*) 105 cm. *b*) 322 cm/s. **5.** *a*) $8.06mg$, a 82.9° a la izquierda de la vertical. *b*) $5R/2$. **7.** *a*) 26.9 J. *b*) 19.7 m/s. **13.** $(9g/4L)^{1/2}$. **15.** $(2gr \sec \theta_0)^{1/2}$.

CAPÍTULO 13

Ejercicios

1. 740 m. **3.** 0.41 m/s. **5.** *a*) 3.86 m/s. *b*) 0.143 J. **7.** *a*) 2.56×10^{12} J. *b*) 3.82×10^8 J. **9.** 54%. **11.** 4.19 m. **13.** 6.55 m/s. **15.** 1.34 m/s; 0.981 m/s. **17.** *a*) 862 N. *b*) 2.42 m/s. **19.** *a*) 22.4 kN. *b*) 12.5 kJ. **21.** $[2E(M + m)/Mm]^{1/2}$.

Problemas

3. *a*) 3.02 m/s. *b*) 1.60 km/s. **5.** *a*) $\frac{1}{2}ke^2(1/r_2 - 1/r_1)$. *b*) $-ke^2(1/r_2 - 1/r_1)$. *c*) $-\frac{1}{2}ke^2(1/r_2 - 1/r_1)$. **7.** *a*) 0.298 J. *b*) 0.008 J.

CAPÍTULO 14

Ejercicios

1. 2.16. **3.** 2.9×10^{-11} N. **5.** 1.6×10^{-2} lb. **7.** *a*) 1.33×10^{12} m/s². *b*) 1.79×10^6 m/s. **9.** *a*) 0.05%. *b*) 7×10^{-4} s. **13.** 2.2×10^5 m/s. **17.** 1.55×10^7 m. **19.** *a*) 3.34×10^7 m/s. *b*) 5.49×10^7 m/s. **21.** $(Gm/d)^{1/2}$. **23.** 6.5×10^{23} kg. **25.** 0.354 meses lunares. **27.** *a*) 1.68 km/s. *b*) 108 min. **29.** 58.3 km/s. **33.** *a*) $2\pi d^{3/2}/[G(4M + m)]^{1/2}$. *b*) 2. *c*) 2. **35.** *a*) Yes. *b*) Yes **37.** Sur, 35.4° sobre el horizonte. **39.** *a*) 5389 s. *b*) 4.3 J/s.

Problemas

7. *a*) 2.63×10^6 m. *b*) 5.3×10^9 J. **9.** *b*) 250 m, 50 m. *c*) 293 m, 7 m. **11.** $(GMm/d^2)[1 - 1/8(1 - R/2d)^2]$. **13.** *a*) 9.83 m/s². *b*) 9.84 m/s². *c*) 9.79 m/s². **15.** *b*) 200 MN/m². *c*) 180 km. **19.** 98.4 pJ. **21.** *a*) 1.02 y. *b*) 87.6 km/s. **23.** *a*) $3.32Gm^2/R^2$ *b*) $2\pi(R^3/3.32Gm)^{1/2}$. **25.** *a*) $-GMm/r$. *b*) $-2GMm/r$. *c*) Cae verticalmente. **29.** *a*) 7.54 km/s. *b*) 97.3 min. *c*) 405 km; 7.68 km/s; 92.3 min. *d*) 3.18 mN. **31.** $(GM/L)^{1/2}$.

CAPÍTULO 15

Ejercicios

1. 429 kPa. **3.** 27.5 kN. **5.** 6.0 lb/in.². **7.** 19.0 kPa. **9.** 55.2 kPa. **11.** 0.412 cm. **13.** *a*) 8.52 km. *b*) 17.0 km. **19.** *a*) 35.6 kN. *b*) $\Delta V = -0.0851$ m³. **21.** 1,070 g. **23.** 2.0×10^{-4}. **25.** *a*) 38.4 kN. *b*) 40.5 kN. *c*) 2.35 kN. *d*) 2.08 kN. **27.** 4.74 MN. **29.** Cuatro. **31.** 0.031. **33.** 78 m. **35.** 54.3 mN.

Problemas

1. *b*) 26.6 kN (= 6,000 lb). **3.** *a*) $\rho gWD^2/2$. *b*) $\rho gWD^3/6$. *c*) $D/3$, arriba desde la base. **5.** 43.5 km. **7.** *b*) a. **9.** *b*) $p = \rho gh$. **13.** 56.1 cm. **15.** 0.190. **17.** 2.79 g/cm³. **21.** 3.71 mm.

CAPÍTULO 16

Ejercicios

1. 1 h 49 min. **3.** 3.9 m. **5.** 1.1 m/s. **7.** *a*) 241 lb/in.^{2}. *b*) 0.326 ft^2. **9.** *a*) 0.81 mm^2. *b*) 440 L/d. **11.** *a*) 560 Pa. *b*) 52 kN. **13.** 30.4 L/s. **15.** 63 m/s. **19.** *a*) 87.5 N. *b*) 172 m^3. **21.** $\frac{1}{2}\rho v^2 A$. **25.** 71.6 L/s.

Problemas

1. 3.4 m/s. **3.** *b*) $H - h$. *c*) $\frac{1}{2}H$; H. **5.** *c*) $\frac{1}{2}\rho(v_1 - v_2)^2$. **7.** 410 m/s; $v_{sonido} = 340$ m/s. **9.** *a*) $v_1 = 4.46$ m/s; $v_2 = 21.2$ m/s. *b*) 9.47×10^{-3} m^3/s.

CAPÍTULO 17

Ejercicios

1. 0.289 s. **3.** >455 Hz. **5.** *a*) 1.00 mm. *b*) 75.4 cm/s. *c*) 568 m/s^2. **7.** *a*) 3.27 m. *b*) 4.33 m/s. *c*) -230 m/s^2. *d*) 1.33 Hz. *e*) 0.750 s. **9.** 7.73 m/s. **11.** 2.08 h. **13.** *a*) 5.27 Hz. *b*) 415 g. *c*) 42.5 cm. **15.** *a*) 1.07 Hz. *b*) 4.73 cm. **17.** *b*) 3.21 s. **19.** *a*) 6.97 MN/m. *b*) 48,500. **21.** *a*) 3.04 ms. *b*) 3.84 m/s. *c*) 90.7 J. **23.** *a*) 0.319 m. *b*) 34.4°. **25.** 0.249 m. **27.** *a*) 33°. *b*) 9×10^{-4}. **29.** 9.78 m/s^2. **31.** 8.35 s. **33.** *a*) 0.436 Hz. *b*) 1.31 m. **35.** 12.1 s. **37.** $1.22f_0$. **41.** *a*) Línea recta, $y = \pm x$. *b*) Elipse $y^2 - \sqrt{3}\,xy + x^2 = A^2/4$. *c*) Círculo: $x^2 + y^2 = A^2$. **43.** 5.22×10^{11} N/m. **51.** 1.9 in. **53.** 0.362 s.

Problemas

1. 708 N/m. **3.** 0.119 m. **7.** *a*) 7.20 N/cm. *b*) 4.43 kg. **11.** $mv[k(m + M)]^{-1/2}$. **13.** *a*) 5.60 J. *b*) 2.80 J. **15.** 0.906 s. **17.** *a*) $2\pi[(L^2 + 12d^2)/12gd]^{1/2}$. **19.** *b*) R. **21.** *a*) 2.00 s. *b*) 18.5 N·m/rad. **23.** *b*) $(GM/R^3)^{1/2}/2\pi$. *c*) 10^{-16} Hz. **25.** *a*) $k = 490$ N/cm; $b = 1{,}100$ kg/s.

CAPÍTULO 18

Ejercicios

1. *a*) 7.43 kHz. *b*) 135 μs. **3.** *a*) 0.712 s. *b*) 1.40 Hz. *c*) 1.93 m/s. **7.** *a*) 6.0 cm. *b*) 1.0 m. *c*) 2.0 Hz. *d*) 2.0 m/s. *e*) dirección $-x$. *f*) 0.75 m/s. **9.** 135 N. **11.** *a*) 5.0 cm. *b*) 40 cm. *c*) 12 m/s. *d*) 33 ms. *e*) 9.4 m/s. *f*) $y = (5.0\text{ cm})\,\text{sen}\,[(15.7\text{ rad/m})x + (190\text{ rad/s})t + 0.93\text{ rad}]$. **13.** 7.54 m del extremo donde se originó el pulso anterior. **15.** 198 Hz. **17.** 4.0 kW. **19.** 68.8°; 1.20 rad. **25.** *a*) 81.4 m/s. *b*) 16.7 m. *c*) 4.87 Hz. **27.** *a*) -3.9 cm. *b*) $y = (0.15\text{ m})\,\text{sen}\,[(0.79\text{ rad/m})x + (13\text{ rad/s})t]$. *c*) -14 cm. **29.** *a*) 1.25 m. *b*) $y = (3.80\text{ mm})\,\text{sen}\,(10.1\text{ rad/m})x\cos(3910\text{ rad/s})t$. **31.** 7.47 Hz; 14.9 Hz; 22.4 Hz. **33.** 480 cm; 160 cm; 96 cm.

Problemas

1. *a*) 10.9 cm. *b*) 199°. **3.** *b*) 304 m/s. **7.** $[k\,\Delta L(L + \Delta L)/m]^{1/2}$. **11.** 8.5%. **15.** 1.18 m/s. **21.** 36.8 N.

CAPÍTULO 19

Ejercicios

1. *a*) 600 cm/s. *b*) $(0.30\text{ cm})\,\text{sen}\,[(0.26\text{ rad/cm})x + (160\text{ rad/s})t]$. **3.** *a*) 76.2 μm. *b*) 333 μm. **5.** *a*) 57 nm. *b*) 35. **7.** 170 m. **9.** 1,800 km. **11.** 4.47 W. **13.** 0.0271 J. **17.** 51.9 nJ/m^3. **19.** 190 dB. **21.** 63 dB. **23.** 18.4 cm. **25.** 64.4 Hz, 129 Hz. **27.** *a*) $L(1 - 1/r)$. *b*) 13.3, 16.0, 20.0, 26.7 cm. **29.** 11.9 m. **31.** 188 Hz. **33.** *a*) 405 m/s. *b*) 611 N. **35.** 5.0 cm de un extremo. **37.** 387 Hz. **39.** 505, 507, 508 Hz or 501, 503, 508 Hz. **41.** 17.4 kHz. **43.** *a*) 522 Hz. *b*) 554 Hz. **45.** 570 m/s. **47.** 160 Hz. **49.** *a*) 464 Hz. *b*) 490 Hz. **51.** 41.2 kHz.

Problemas

1. *a*) $L(V - v)/Vv$. *b*) 43.5 m. **3.** *a*) 44.2 μW/m^2. *b*) 164 nm. *c*) 0.894 Pa. **5.** *a*) $\propto r^{-1}$. *b*) $\propto r^{-1/2}$. **7.** *a*) 66.8 μW/m^2. *b*) 5.02 nW. *c*) 7.53 μJ. **9.** 346 m. **13.** 45.4 N. **15.** 2.65×10^8 m/s. **17.** 7.16 km. **19.** *a*) 1,050 Hz. *b*) 1,070 Hz. **21.** *a*) 2,000 Hz. *b*) 2,000 Hz.

CAPÍTULO 20

Ejercicios

1. *a*) 710 ps. *b*) 2.5×10^{-18} m. **3.** 1.30 m. **5.** 0.445 ps. **7.** *a*) 87.4 m. *b*) 394 ns. **9.** *a*) 15.8 km/s. *b*) 6.95×10^{-10}. **11.** 0.75. **13.** *a*) $x' = 3.78 \times 10^7$ m; $t' = 2.26$ s. *b*) 6.54×10^8 m; 3.14 s. **15.** *a*) $v_x' = -u$; $v_y' = c(1 - u^2/c^2)^{1/2}$. **17.** *a*) $0.347c$. *b*) $0.619c$. **19.** *a*) $0.933c$; 31.0° E of S. *b*) $0.933c$; 59.0° W of N. **21.** 6.29 cm. **23.** 1.23 μs. **25.** *a*) 26.3 y. *b*) 52.3 y. *c*) 4.06 y. **29.** *a*) 0.999 165. *b*) 0.0133. **31.** *a*) 0.9988; 20.6. *b*) 0.145; 1.01. *c*) 0.073; 1.0027. **33.** 21.2 smu/y. **35.** *b*) $v/c < 0.115$. **37.** $\sqrt{8}\,mc$. **41.** *a*) 996 eV. *b*) 1.05 MeV. **43.** $0.796c$.

Problemas

1. *a*) 2.60×10^8. *b*) Two. **3.** *a*) 25.8 μs. *b*) El centelleo rojo (efecto Doppler cambiado). **7.** Siete. **9.** 2.43 μs. **11.** *a*) 4.00 μs. *b*) 2.50 μs. **13.** *b*) $K = p^2/2m$. *c*) $206m_e$. **15.** *a*) $c[(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]^{1/2}$. *b*) $m[2(\gamma + 1)]^{1/2}$. **17.** *b*) 202 GeV. *c*) 49.1 GeV. **19.** $1 + (2\gamma_i + 1)^{1/2}$ donde $\gamma_i = (1 - v_i^2/c^2)^{-1/2}$.

CAPÍTULO 21

Ejercicios

1. *a*) $T_S = (9/5)T_C + 491.69$. *b*) 671.69°S; 491.69°S. **3.** *a*) $T_Q = T_C + 273.15$. *b*) 373.15°Q; 273.15°Q. *c*) Escala Kelvin. **5.** No; 310 K = 98.6°F. **7.** 291.1 K. **9.** 31.2. **11.** 0.073 cm Hg; nitrógeno. **13.** 0.038 in. **15.** 6.2 mm. **17.** *a*) 13.9 cm^2. *b*) 115 cm^3. **19.** *a*) 1.6×10^{-4}/C°. *b*) Cero. **21.** 2.3×10^{-5}/C°. **27.** 360°C. **29.** 909 g. **31.** *a*) Cero. *b*) -0.36%. *c*) -0.36%. **33.** $+0.68$ s/h. **35.** 0.17 mm. **37.** *a*) 22.5 L. **39.** *a*) 113 mol. *b*) 900 L. **41.** 26.9 lb/in.^{2}. **43.** 104 cm^3.

Problemas

7. *b*) Acero; 71 cm; latón; 41 cm. **9.** 998.4 kg/m^3. **11.** 66.4°C. **13.** 0.27 mm. **15.** *a*) 2.25 ft. *b*) 3.99 ft. **17.** 1.74 atm. **21.** 152 kPa.

CAPÍTULO 22

Ejercicios

1. *a*) 0.0130 mol. *b*) 7.23×10^{21}. **3.** *a*) 39.9 L. *b*) 74.4 g. **5.** 4.34×10^{-5}. **7.** *a*) 531 m/s. *b*) 0.472 mol/m^3. *c*) 28 g/mol; N_2. **9.** *a*) 2.69×10^{25}. *b*) 0.171 nm. **11.** 3.86 GHz. **13.** -12°C. **15.** *a*) 420 m/s; 458 m/s; sí.

17. 180 m/s. **21.** 1.5 cm/s. **23.** *a*) 10,000 K; 160,000 K. *b*) 440 K; 7000 K. **25.** 13.9 rev/s. **29.** 3.09×10^{-3}. **31.** 3.8×10^{-5} m³/mol.

Problemas

1. 0.76. **3.** 1/5. **5.** *a*) 1.67. *b*) 49.5×10^{-6} cm. *c*) 7.87×10^{-6} cm. **7.** 4.71. **9.** *a*) $3N/v_0^3$. *b*) $0.750v_0$. *c*) $0.775v_0$. **13.** *a*) $(N_a + N_b)kT/V$. *b*) $\frac{1}{2}$. **15.** 89.0°C. **17.** *a*) $V/n = [a \pm (a^2 - 4abRT)^{1/2}]/2RT$. *c*) 131 K.

CAPÍTULO 23

Ejercicios

1. 720°C. **3.** *a*) 546 C°/m. *b*) 394 kW. *c*) 63.9°C. **5.** *b*. **7.** 1.15 m. **9.** *a*) 1.8 W. *b*) 0.025 C°. **11.** *a*) − 6.0 J. *b*) − 43 J. *c*) 40 J. *d*) 18 J; 18 J. **13.** 44.5 m³. **15.** 107 g. **17.** *a*) 75.4 kJ. *b*) 4.46 kJ. *c*) 757°C. **19.** *a*) 117 s. *b*) 718 s. **21.** 4.81 g. **23.** *a*) 542 J/kg · K. *b*) 0.722 mol. *c*) 27.9 J/mol · K. **25.** $W_1 = 45$ kJ; $W_2 = -45$ kJ. **27.** 1.14 kJ. **29.** *a*) 8.39 atm. *b*) 544 K. *c*) 966 J. **31.** 2,480 J. **33.** *a*) 1.20. *b*) 105°C. *c*) 628 mol. *d*) 1.96 MJ; 2.96 MJ. *e*) 0.813. **35.** 11.3 kJ. **37.** *a*) 7,880 J. *b*) 5,630 J. *c*) 3,380 J. **39.** $(n_1C_1 + n_2C_2 + n_3C_3)/(n_1 + n_2 + n_3)$. **41.** $nRT \ln V_f/V_i$. **43.** *a*) 1,090°C. *b*) 460°C. **45.** *a*) $-1.5nRT_1$. *b*) $4.5nRT_1$. *c*) $6nRT_1$. *d*) $2R$. **47.** *a*) 15.9 J. *b*) 34.4 J/mol · K. *c*) 26.1 J/mol · K.

Problemas

1. *a*) 24 kW. *b*) 24 W. **7.** *a*) 5.26°C; no queda hielo. *b*) 0°C; 62.0 g de hielo **9.** *a*) 6.75×10^{-20} J. *b*) 10.7. **11.** 1.2 kJ. **13.** 265 K. **15.** *a*) 2.95 cm. *b*) 2.11 cm. **17.** Diatómico. **19.** *a*) *AB*: 3,740 J, 3,740 J, 0 J; *BC*: 0 J, − 1,810 J, − 1,810 J; *CA*: − 3,220 J, − 1,930 J, 1,290 J; Ciclo: 520 J, 0 J, − 520 J. *b*) $p_B = 2.00$ atm; $V_B = 0.0246$ m³; $p_C = 1.00$ atm; $V_C = 0.0373$ m³. **21.** 12.0 kW.

CAPÍTULO 24

Ejercicios

1. 18.7 kJ. **3.** *a*) 200 J. *b*) − 75 J. **5.** *a*) 37.7 kJ. *b*) 112 J/K. **7.** 3.0 mol. **9.** *a*) 1.06 J/K. *b*) No. **11.** *a*) − 926 J/K. *b*) 926 J/K. **13.** *a*) 30.9%. *b*) 16.2 kJ. **15.** 25.4%. **17.** *a*) 2090 J. *b*) 1510 J. *c*) 1510 J. **21.** *a*) 1.62 atm. *b*) 43.7%. **23.** *a*) 217 kJ. *b*) 32.5 kJ. **25.** *a*) 0.714 J. *b*) 5.00 J. *c*) 20.0 J. *d*) 50.0 J. **27.** 21 J. **29.** *a*) 113 J. *b*) 305 J. **31.** 6.8. **33.** $(1 - T_2/T_1)/(1 - T_4/T_3)$. **35.** *a*) 1 *b*) $N!/[(N/2)!]^2$

Problemas

1. 44 mJ/K. **3.** *a*) $-3p_0V_0$. *b*) $6p_0V_0$; $(3R/2) \ln 2$. *c*) Ambos son cero. **5.** Trayectoria I: $Q_T = p_0V_0 \ln 2$, $Q_V = (9/2)p_0V_0$; Trayectoria II: $Q_T = -p_0V_0 \ln 2$, $Q_p = (15/2)p_0V_0$ *b*) Trayectoria I: $W_T = -p_0V_0 \ln 2$, $W_V = 0$; Trayectoria II: $W_T = p_0V_0 \ln 2$, $W_p = 3p_0V_0$. *c*) $(9/2)p_0V_0$ en cada proceso. *d*) $4R \ln 2$ en cada proceso. **7.** *a*) $T_2 = (m_1c_1T_{1i} + m_2c_2T_{2i} - m_1c_1T_1)/m_2c_2$. *b*) $S = m_1c_1 \ln T_1/T_{1i} + m_2c_2 \ln [(m_1c_1T_{1i}/m_2c_2 + T_{2i} - m_1c_1T_1/m_2c_2)/T_{2i}]$. **9.** *a*) 7,200 J. *b*) 960 J. *c*) 13%. **11.** *c*) 1.15 kJ.

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

Capítulo 1
Página 3: cortesía del National Institute of Standards and Technology, Boulder Laboratories, U.S. Department of Commerce. Página 6: Cortesía del National Institute of Standards and Measures. Página 12: © Stepehn Pitkin.

Capítulo 2
Página 30: cortesía de T.M. Niebauer, Micro-g Solutions. Página 32: cortesía de la NASA. Página 33: cortesía de Baltimore Office of Promotion and Tourism. Página 36: cortesía de Marriott Marquis. NYC. Página 39 (izquierda): E.H. Wallop/The Stock Market. Página 39 (derecha): ©Photo por John Tlumacky, The Boston Globe. Reimpreso con autorización.

Capítulo 3
Página 46: cortesía de Vernier Software & Technology. Página 53: cortesía de la NASA. Página 54: Robert Markowitz/foto Fantasies. Página 59 (parte superior): cortesía de la NASA. Página 59 (parte inferior): cortesía de National Archive. Página 60: cortesía de Hale Observatories. Página 61: Jerry Schad/Photo Researchers. Página 62 (izquierda): cortesía del Department of Defense. Página 62 (derecha): fotografía de Eugenio P. Redmond. Cortesía de USA ADIA. Página 63 (centro): cortesía de Boeing Corporation. Página 63 (parte inferior): cortesía de la NASA.

Capítulo 4
Página 69: cortesía de Education Development Center.

Capítulo 5
Página 97: De *Friction and Lubrication of Solids* de F.P.Browden y D. Tabor, Clarendon Press, 1950. Página 105: ©PhotoDisc, Inc. Página 110: ©Shilo Sports/FPG International. Página 112: PhotoDisc.

Capítulo 6
Página 119: ©Estate of Harold E. Edgerton, Palm Press. Reimpreso con autorización. Página 120 (parte superior izquierda): cortesía de Education Development Center. Página 120 (parte superior derecha): cortesía de CERN. Página 120 (parte inferior): cortesía de la NASA. Página 121: H.P: Merten/The Stock Market. Página 132: ©Charles Gupton/The Stock Market. Página 134: George Gerster/Comstock, Inc. Página 135: Superman es una marca registrada de DC Comics © 2001. Todos los derechos reservados. Usado con autorización. Página 137: cortesía de Arbor Scientific.

Capítulo 7
Página 140: fotografía de Manfred Bucher y Randy Dotta-Dovidio. Página 154: ©Lois Greenfield. Página 155: ©United Feature Syndicate.

Capítulo 8
Página 159: K. Bendo. Página 166: reimpreso con autorización de The Courier-Journal y The Louisville Times. Páginas 170 y 173: cortesía de la NASA.

Capítulo 9
Página 193: cortesía de Education Development Center. Página 194: cortesía de Alice Halliday. Página 202: Corbis-Bettmann. Página 203: cortesía de Lawrence Livermore Laboratory.

Capítulo 10
Página 218: NASA/Photo Researchers.

Capítulo 11
Página 232: William Sallaz/Duomo/Corbis. Página 250: ©UPI/Corbis-Bettman.

Capítulo 12
Página 263: Joseph Nettis/Photo Researchers. Página 273: Richard Martin/Allsport.

Capítulo 13
Página 296: cortesía de la NASA.

Capítulo 14
Página 313: cortesía de la NASA. Página 316 (parte superior): cortesía de Lick Observatory. Página 316 (parte inferior): cortesía de Mt.Wilson & Palomar Observatories.

Capítulo 15
Página 341: Mark Antman/Image Works. Página 342: cortesía de la NASA. Página 347: cortesía de Goodyear Tire & Co.

Capítulo 16
Página 352: Andy Sacks/Stone. Página 360 (izquierda): fotografía de A.D. Moore, Universidad de Michigan. De W.E. Rogers, *Introduction to Electric Fields*, McGraw-Hill, 1954. Página 362 (parte superior): Richard Megna/Fundamental Photographs. Página 362 (parte inferior): cortesía de Imperial College, Londres. Página 364: cortesía del profesor Harry Swinney. Universidad de Texas (Austin).

Capítulo 17
Página 388: AP/Wide World Photos. Página 396: cortesía de la NASA.

Capítulo 18
Página 402: G. White/Photo Researchers. Página 413: cortesía de Clifford Swartz. Página 418: cortesía de Education Development Center.

Capítulo 19
Página 438: cortesía de Thomas D. Rossing, Norther Illinois University. Página 442: cortesía de U.S. Army Ballistic Research Laboratory. Página 443: cortesía de Bose Corporation. Página 446: fotografía de C.F. Quate, cortesía de John S. Foster. Stanford University.

Capítulo 21
Página 484: cortesía de AP/Wide World Photos. Página 494: Neil Rabinowitz/Corbis Images.

Capítulo 22
Página 515: European Space Agency/Photo Researchers.

Capítulo 23
Página 519: cortesía de Alice Halliday.

ÍNDICE

A

Aceleración, 19, 21
angular, 161. *Véase también* Aceleración angular
caída libre, 28-30
centrípeta, 74-75
constante. *Véase también* Aceleración constante
instantánea, 19
promedio, 19
radial, 75, 165-168
tangencial, 165-168
vectores que representan, 19-20
y desaceleración, 21-22, 24
y masa, 46-47
Aceleración angular, 161
constante, en movimiento rotacional, 164-165
instantánea, 161
promedio, 161
variables lineales y, 165-168
vectores que representan la, 167
Aceleración angular instantánea, 161
Aceleración centrípeta, 74-75, 165-166
vectores que representan la, 167
Aceleración constante, 26-28
angular, en movimiento rotacional, 164-165
de cuerpos en caída libre, 28-30
en tres dimensiones, 65-66
Aceleración en caída libre, 28-30
medición de la, 30-31
Aceleración instantánea, 19
Aceleración radial, 75, 165-168
vectores que representan la, 167
Aceleración tangencial, 165-168
vectores que representan la, 167
Acción a distancia, 315-319
Acción de lente gravitacional, 319
Acondicionador de aire, 555
Acústica, 427
Adhesión superficial, 96-97
Afelio, 312
Agua, punto triple de, 481
Alcance, de proyectil, 69
alcance horizontal, de un proyectil, 69
ampere (unidad), A1
Amortiguamiento crítico, 387
Amplitud, 373, 377, 404
efecto amortiguador de la fricción en la, 385-387
Análisis de Fourier, 412
Análisis dimensional, 7-8, 407
Análisis mecánico, de velocidad de onda, 407-408
Aniquilación de electrones-positrones, 452
Antínodos, 414
presión, de ondas sonoras, 434
Antiprotón, 470
año-luz (unidad), 11 (ejercicio 21)
Apogeo, 312
Aproximación de Stirling, 560
Áreas, ley de, 312
Armónicos, de sistemas vibratorios, 436
Átomos, 497-499
movimiento aleatorio de los, 497-499
Avogadro, Amadeo, 488

B

Balanza de Cavendish, 303, 381
Barómetro de mercurio, 340-341
Bernoulli, Daniel, 354
teoría de presión de los gases de, 499
Blanco en caída, disparo a, 70-71
Boltzmann, constante de, 488
Boltzmann, ecuación de entropía de,560
cálculos por medio de la, 560-561
Boltzmann, factor de, 506
Boltzmann, Ludwig, 560
Bomba de calor, 555
Boyle, Robert, 488
Brazo de palanca, fuerza del, 177
Brown, Robert, 497

C

caballo de fuerza (unidad), 234
Cálculo, A21
Callisto, movimiento orbital de, 384
Calor, 517
asociado al proceso termodinámico, 518
como energía en tránsito, 517-518
conducción del, 518-520
convección del, 521
definición del, 290
equivalente mecánico del, 292
expresión unitaria del, 517
factores de conversión para unidades de, A15
ideas erróneas sobre el, 517-518
latente, 525
radiación del, 521
temperatura y, 290-292
trabajo y, 290
transferencia de, 518-521
y primera ley de la termodinámica, 291-292, 521-523
Calor de fusión, 525
Calor de vaporización, 525
calor(es) específico(s), 523-525
razón de, 431, 528, 532
Calor(es) de transformación, 525
Calor latente, 525
caloría (unidad), 292
Calorímetro de flujo, 543 (problema 8)
Campo eléctrico, 315
Campo escalar, 315-316
Campo estático, 316
Campo gravitacional, 315-316
diagramas de línea de, 316
Campo vectorial, 315-316
Campos de flujo, 359-360
candela (unidad), A1
Capacidad calorífica molar, 523-525
de gases ideales, 531-533
de sólidos, 525, 531
Capacidad(es) calorífica(s) molar(es), 525
a presión constante, 532
cociente de, 532
de gases ideales, 531-533
de sólidos, teorema de equipartición de la energía aplicada a las, 531
Carnot, N. L. Sadi, 551
Cavendish, Henry, 303
Celda de punto triple, NIST, 481
Centro de flotabilidad, 339
Centro de gravedad, 186
centro de masa y, 186-187
Centro de masa, 139
de objetos complejos, 139-140
de objetos sólidos, 145-147
de sistema de dos partículas, 140-142
de sistema de muchas partículas, 142-145
localización del, 141-142
y centro de gravedad, 186-187
y movimiento traslacional, 143
y velocidad constante, 143
Centro de oscilación, 383
Centro de percusión, 383
Cero absoluto, 481
Chamberlain, Owen, 470
Charles, J. A. C., 488
Ciclo de Carnot, 552-553
Ciclo, de máquinas, 551
trabajo neto por, 553
Cifras significativas, 7
Cinemática, 13
angular, 162-164
bidimensional y tridimensional, 65-77. *Véase también* movimiento
definición de la, 14
ecuaciones del, 23-24
rotacional, 159-168. *Véase también* Movimiento rotacional,
unidimensional, 20-31. *véase también* Movimiento unidimensional
Vectores en 13-20. *Vea también Vectores*
Clausius, Rudolph, 556
Coeficiente de desempeño, 555
Coeficiente de expansión lineal, 485
Coeficiente de expansión de volumen, 486
Coeficiente de fricción, 95-97
cinético, 97
estático, 96-97
Coeficiente de viscosidad, 361
Colisiones, 119-121
completamente inelásticas, 129, 246
conservación del ímpetu en las, 124-126

de dos cuerpos, 126-128, 389-390
en el marco de referencia del centro de masa, 128-130
energía cinética en, 244-247
elásticas, 129-130, 245
explosivas, 246
ímpetu lineal en, 121
impulso e ímpetu en las, 121-124
inelásticas, 129, 245
unidimensionales, 128-130
Cometa de Halley, 313
Compresibilidad, de fluidos, 352, 355
Compresión isotérmica, 552
Compresiones, 428
Concepto de campo, 315
Condiciones iniciales, 27
Conductividad térmica, 518-520
Conferencia General de Pesos y Medidas (CGPM), 1-2
Configuración(es)
microestados de las, 559
multiplicidad de las, 559
Cono de Mach, 443
Conservación de energía mecánica, 261-263
aplicación de la, 263-264
en sistemas tridimensionales, 268-270
en sistemas unidimensionales, 266-268
fuerzas externas y, 279-280
Conservación del ímpetu angular, 215-216
clavadista de trampolín, 216
estabilidad de objetos girando, 217-218
estrellas en colapso y, 218-219
patinador en giro, 216
rueda giratoria de bicicleta y, 217
Conservación del ímpetu lineal, 124-126
ecuación de la, 124
Conservación de la energía
en dinámica de fluidos, 354-356
en reacciones y decaimientos, 288-290
en sistema de partículas, 284-285
ley de la, 284-285
y teoría especial de la relatividad, 469-470
y transferencia de calor, 290-292
Constante de Avogadro, 6
en termodinámica de gas ideal, 488
Constante de fase, 405-406
Constante de gas molar, 488
Constante de la fuerza, 236
Constante de tiempo de amortiguamiento,
Constante de torsión, 380-381
Constante gravitacional, 300, 302-303
Constantes físicas fundamentales, A3
Contracción de longitud, 456
Convección, 521
Coordenadas de espacio-tiempo, 459-460
Copérnico, Nicolás, teoría de gravitación de, 299
Corriente eléctrica, unidad base del Sistema Internacionales de Unidades de, A1
Coulomb, Charles A, leyes de fricción de, 96
Cuerpos en caída, 22, 28-30
Curva con pendiente, 101-102

D

Datos astronómicos
de planetas, A5
del Sol, de la Tierra y de la Luna, A4
decibel (unidad), 432
Densidad, 333
factores de conversión para las unidades de, A13
Densidad de masa, 407
Densidad de peso, 334
Densidad del aire, y ondas sonoras, 428-430
Derivadas, e integrales, A21
Desaceleración, 21-22, 24
Desorden, entropía y, 560-561
Desplazamiento angular, 161
frente a desplazamiento lineal, 165-166
Desplazamiento lineal frente a desplazamiento angular, 165-166
Desintegración nuclear, conservación de la energía en 289-290
Deuterón, 289-290
Diagrama de cuerpo libre, 48-49
Día solar, 173 (problema 3)
Diatérmico, 480
Diferencia de fase, 413, 433
dina (unidad), 48
Dilatación en el tiempo, 451, 455, 464-466
Dinámica, 13
Dinámica de fluidos, 351-352
aplicaciones de, 357
aplicaciones de la, 356-358
campos de flujo en la, 359-360
capa de frontera en la, 357
ecuación de Bernoulli en la, 354-356
empuje de cohetes en la, 358
estabilidad de flujo en la, 352
flujo caótico en la, 363-364
flujo compresible en la, 355
flujo laminar en la, 361
flujo rotacional uniforme en la, 359
flujo turbulento en la, 362-363
flujo viscoso en la, 352, 355, 360-362
ley de Poiseuille en la, 362
líneas aerodinámicas de flujo en la, 352-354
medición de flujo en la, 356-357
transporte dinámico en, 357-358
presión dinámica en, 355
y conservación de la energía, 354-356
y ecuación de continuidad, 352-354
y ley de conservación de la masa, 353
presión estática en, 355
rotación de flujo en, 352
Dinámica caótica, 106-107
Dinámica rotacional, 175. *Véanse también* Inercia rotacional; Movimiento rotacional
Dispositivo de sifón, 369 (problema 4)
Distribución de velocidades, consecuencias de la, 504
de moléculas de gas, de Maxwell, 503
verificación experimental de, 504-506
Dulong, P. L., 525
Doppler, Christian Johann, 440

E

Ecos de radar, retraso de los, 319
Ecuación de Bernoulli, 354-356
aplicaciones de la, 356-358
Ecuación CEM. *Véase* Ecuación de energía del centro de masa
Ecuación COE. *Véase* Ecuación de la conservación de la energía
Ecuación de continuidad, 353
aplicaciones de, 356-358
Ecuación de conservación de la energía, 286-288
Ecuación de energía del centro de masa, 286-288
Ecuaciones de estado, para gases reales, 507-509
Ecuación de onda, 408-409
forma general de la, 409
Ecuaciones de transformación, de Galileo, 458
de Lorentz, 457-459
Efecto Doppler
en ondas luminosas, 462-463
en ondas sonoras, 440-443
transversales, 463
Efecto Doppler transversal, 463
Eficiencia de Carnot, 553
Eficiencia térmica, 553
de máquinas reales, 556-557
Einstein, Albert
análisis del movimiento browniano, 497
principio de equivalencia, 318
teoría general de la relatividad, 106, 316, 318-319
teoría especial de la relatividad, 106, 451, 452-453
variación de las capacidades caloríficas molares de los sólidos, 526
Eje de rotación, 159-160
Eje semimayor, 311
electrón-volt (unidad), 232
Elementos
propiedades de, A6-A8
tabla periódica de los, A9
Empuje, de cohetes, 150, 358
Energía
calorífica, 290-292
centro de masa, 285-288
cinética, trabajo y, 229-255
Véase también Conservación de la energía
de enlace, 311
factores de conversión para unidades de, A15
masa y, en la relatividad especial, 468-469
mecánica
cinética y trabajo, 229-255
conservación de la, 281-270
del movimiento de planetas y satélites, 313-315
en el sistema de partículas, 281-282
conservación de la, 284-285.
en movimiento armónico simple, 378-380
en movimiento ondulatorio, 409-411
expresiones relativistas de la, 467-470
fuerzas externas y, 279-280
problemas de, no resueltos por la mecánica clásica, 452
potencial, 257-278
Energía cinética
de movimiento ondulatorio, 410
en colisiones, 244-247
en movimiento armónico simple, 379-380
método para determinar el (tiempo de vuelo), 241
rotacional, 243-244
teorema de trabajo-energía y, 239-243
trabajo y, 229-233
umbral, 470
unidades de, 239-240
Energía de disociación, 268
Energía de enlace, 311
Energía del centro de masa, 285-288
Energía interna
de gas ideal, 529-531
de un sistema de partículas, 281-282
y calor, 290-292
Energía mecánica, 261
conservación de la, 261-263
en sistemas tridimensionales, 268-270
en sistemas unidimensionales, 266-268

en el movimiento armónico simple, 379-380
fuerzas externas y, 279-280
Energía potencial, 259
cálculo de la, 260-261
de movimiento ondulatorio, 410
de un sistema de muchas partículas, 310-311
en el movimiento armónico simple, 379-380
gravitacional, 307-311
tensión superficial y, 342
trabajo y, 260
Entropía, 546
cambio de, 546-547
como propiedad del estado, 547
concepción estadística de la, 558-561
desempeño del refrigerador y, 555-556
desorden y, 560-561
desempeño de máquina y, 551-554
eficiencia térmica y, 556-557
gas ideal y, 547
procesos irreversibles y, 547-551
procesos reversibles y, 546, 551
probabilidad y, 560-561
segunda ley de la termodinámica y, 551
segunda ley de la termodinámica y, en sistemas cerrados, 557-558
Eötvös, estudios de, sobre masa inercial y masa gravitacional, 317-318
Equilibrio,
en estática de fluidos, 331-334
estable, 267
inestable, 267
neutral, 267
rotacional, 187-191
térmico, 479-480
Equilibrio estable, 267
Equilibrio inestable, 267
Equilibrio neutro, 167
Equilibrio térmico, 479-480
calor y, 517
temperatura y, 480
Equipartición de la energía, teorema de la energía, 530-531
Equivalencia, principio de, 318
erg (unidad), 232
Equivalente mecánico, del calor, 292
Escala Internacional de Temperatura, 484
Escala de temperatura absoluta, 481
Escala de temperatura Celsius, 481
conversión entre escala Fahrenheit y, 481-482
Escala de temperatura Fahrenheit, 481
conversión entre escala Celsius y, 481-482
Escala de temperatura Kelvin, 481
Escala(s) de temperatura, 480
Celsius, 481
conversión entre escala de Celsius y de Fahrenheit, 481-482
de gas ideal, 483
Fahrenheit, 481
internacional, 484
Kelvin, 481
Escalares, 14
Espinor (Rotador), 170 (pregunta 9)
Estabilidad de los objetos en rotación, 217-218
Estabilidad direccional, 217
Estabilidad orientacional, 217
Estampido sónico, 443
Estándares, 1-2
de longitud, 4-5
de masa, 5-7
de tiempo, 3-4
Estándares de tiempo, 3-4
Estática de fluidos, 331-332
densidad en la, 333
densidad de peso en la, 334
equilibrio en la, 331-334
fuerza de flotación en la, 338-340
gravedad específica en la, 336
palanca hidráulica en la, 337-338
medición de la, 340-341
presión absoluta en la, 340
presión en la, 332-333, 336-337
principio de Arquímedes de la fuerza de flotación en la, 338
principio de Pascal en la, 336-337
rapidez del sonido y, 431
tensión superficial en la, 341-343
Estrella de Neutrones, 218, 305
Estrella "enana blanca", 218
Estrellas, colapso de, 218-219
Estrellas en colapso, 218-219
Euler, Leonhard, 351
Excentricidad, 311
Expansión binomial, A20
Expansión isotérmica, 552
Expansión exponencial, A20
Expansión libre
y cambios de entropía, 550-551
y primera ley de la termodinámica, 535-536
Expansión lineal, 485
Expansión logarítmica, A21
Expansión térmica, 484-486
base microscópica de la, 487
Expansión trigonométrica, A21
Expansión virial, 507
Experimento de Joule, 292

F

Factor de Lorentz, 458
Factores de conversión, de las unidades, A12-A16
Faraday, Michael, concepto de campo de, 316
Fase, de ondas, 403, 405-406
reflexión y cambio de, 416
Flotabilidad, empuje de un fluido, 338-340
centro de, 339
Flujo dipolar lineal, 360
Flujo caótico, 363-364
Flujo de fluido, 351-352
Flujo de masa, 353
Flujo de volumen, 353
Flujo laminar, 361
Flujo rotacional uniforme, 359
Forma galileana, ley de transformación de las velocidades, 76
Fórmula cuadrática, A20
Fórmulas matemáticas, A20-A21
Fotosfera, 521
Fourier, J., 412
Frecuencia
de ondas, 404
de oscilaciones, 374, 377
fundamental, 436
Frecuencia angular
de movimiento armónico simple, 377
de ondas, 404
Frecuencia natural, de oscilaciones, 387
Frecuencia angular resonante, 388
Frentes de onda, 402-403
Fricción
base microscópica de la, 96-97
cinética, 96
coeficiente de, 96-97
de deslizamiento, 96-97
de rodamiento, 97
estática, 96-97
fuerzas de, 95-100, 258
trabajo realizado por, 282-284
Fricción cinética, coeficiente de, 96
Fricción de deslizamiento, 96-97
Fricción de rodamiento, 97
Fricción estática, coeficiente de la, 96-97
Fuerza centrífuga, 104
Fuerza centrípeta, 74-75, 104
Fuerza de resorte, 236, 257
en dos dimensiones, 238-239
trabajo efectuado por la, 236-238, 260
Fuerza intensa, 89
Fuerza de Coriolis, 104-105
Fuerza de corte, 331
Fuerza de marea, 326 (problema 5)
Fuerza de restauración, 236, 373
en desplazamientos pequeños, 382
lineal, 376
Fuerza eléctrica débil, 89
Fuerza electromagnética, 89
Fuerza impulsiva, 119, 122
e ímpetu en colisiones, 121-124
Fuerza neta, 43, 47-48
impulso de, 122
Fuerza normal, 92-93
Fuerza nuclear débil, 89
Fuerza resultante, 47
Fuerza(s), 42
centrífuga, 104
centrípeta, 74-75, 104
conservativa, 257-259
de Coriolis, 104-105
de fricción, 95-100
de flotación, 338-340
de resistencia, 71-73
electromagnética, 89
externas, 140
factores de conversión para unidades de la, A14
gravitacional, 89
impulsiva, 119
intermolecular, 509-510
internas, 140
masa, aceleración y, 46-47
medición de, 45-46
neta, 43, 47-48
normal, 92-93
y segunda ley de Newton, 47-49
y primera ley de Newton, 44-46
y tercera ley de Newton, 50-52
principio de superposición de las, 302
dependiente del tiempo, 102-103
de resorte, 236
en el trabajo, 229-247
en movimiento circular uniforme, 100-102
fuertes, 89
nucleares débiles, 89
restauradora, 236, 373
tensión, 90-92
Fuerza(s) de resistencia al avance, 71-73
aerodinámica, 73
viscosa, 72
Fuerzas conservativas, 257
definición de las, 259
ejemplos de las, 257-258
identificación de las, 258-259
Fuerzas de tensión, 90-92
Fuerzas externas, 140
Fuerzas intermoleculares, 509-510
Fuerzas internas, 140
Funciones de estado, 518
Funciones trigonométricas, de ángulo, A20
Fusión, calor de, 525

G

Galaxias
en colisión, 120
materia oscura de las, 316-317
acción de lentes gravitacional de la luz proveniente de las, 319
Galaxias espirales, 316-317
Galilei, Galileo, 41
aceleración en caída libre, 30
gráficas de las lunas de Júpiter de, 384
Gas ideal, 487. *Véanse también* Gas(es);

capacidad calorífica del, 531-533
cambios de entropía en, 547
colisiones entre moléculas del, 498
ecuación de estado del 488
energía interna del, 529-531
fuerzas que actúan sobre moléculas del, 498
Moléculas de gas
movimiento aleatorio de moléculas del, 498
número de moléculas del, 498
presión del, 499-501
propiedades del, 498-499
teoría cinética del, 497
termodinámica del, 487-489, 531, 532
trabajo ejecutado sobre el, 526-529
volumen de moléculas *frente a* volumen del, 498
Gas(es). *Véanse también* Dinámica de fluidos; distribución de energía de Maxwell-Boltzmann, 506-507
ecuación de estado de los, ideales, 488
ecuación de estado de los, reales, 507-509
Estática de fluidos
ideal, 487-489. *Véase también* Gas Ideal
ley de Avogadro, 488
ley de Boyle, 488
ley de Charles, 488
ley de Gay-Lussac, 488
propiedades moleculares de los. *Véase también* Moléculas de gases reales, ecuación de estado para los, 507-509
Gay-Lussac, Joseph Louis, 488
Geometría, fórmulas de la, A20
Giro, radio de, 201 (ejercicio 20)
Giroscopio, ímpetu angular del, 219-220
Gradiente de temperatura, 519
Grados de libertad, 530
Gravedad, 299
aceleración debida a la, 28-30
centro de, 186
cerca de la superficie terrestre, 304-305
y movimiento de planetas y satélites, 311-315
fuerza de, 89, 257-258, 300-302
teorema de capas y, 305-307
trabajo realizado por la, 260
vectores que representan la, 301-302
energía potencial de la, 307-308
cálculo de la, 308-309
rapidez de escape y, 309-310
sistemas de muchos partículas y, 310-311
ley universal de la, 300-302
leyes de
de Newton, 300-302
fuerza, 300-302
origen de las, 299-300
teorema de capas y fuerzas de, 305-307
torca debido a la, 185-187
vector fuerza que representa la y,301-302
y constante gravitacional, 300, 302-303
Gravedad específica, 336
Gravímetros, de cuerpo en caída, 30
Gravitación, 299

H

Hertz, Heinrich, 374
hertz (unidad), 374
Huygens, Christian, 4, 382

I

Identidades trigonométricas, de ángulo, A20
Ímpetu, 119
angular, 207-209
conservación del, 215-219
de sistemas de partículas, 209-211
de un sistema de partículas, 147
e impulso en colisiones, 121-124
lineal, 121
conservación del, 124-126
en colisiones de dos cuerpos, 126-128
en el marco de referencia del centro de masa, 128-130
marco de referencia del, 121
relativista, 465-467
y segunda ley de Newton, 121
Ímpetu angular, 207-209
conservación del, 215-216
ejemplos de, 216-220
de cuerpos simétricos y asimétricos, 214-215
de un sistema de partículas, 209-211
de una partícula, 207-209
y velocidad angular, 211-213
Ímpetu lineal, 121
conservación del, 124-126
de un sistema de partículas, 147-149
en colisiones de dos cuerpos, 126-128
en el marco de referencia del centro de masa, 128-130
de sistemas de partículas, 147-149
y segunda ley de Newton, 121
Inercia, 43
momento de, 175-176
Inercia rotacional, 175-176
de cuerpos sólidos, 183-185
de partículas, 179
del péndulo físico, 382-383
teorema de los ejes paralelos de la,181-183
y la segunda ley de Newton, 179-181
Ingravidez, 53-54
Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (INET), 1
Instrumentos de cuerda, 436-437
Instrumentos de Reed, 438
Instrumentos de viento, 437-438
Instrumentos musicales, como sistemas vibratorios, 436-439
Integrales de línea, 238
Integrales y derivadas, A21
Intensidad, de ondas, 411
Intensidad del campo gravitacional, 315
Intensidad luminosa, unidad base del Sistema internacional para, A1
Interferencia, 412-414
constructiva, 413
destructiva, 413
principio de superposición en la, 413-414
ondas sonoras e, 433-434
en el espacio, 439
en el tiempo, 439
Interferómetro acústico, 449 (problema 6)
Isoterma, 528

J

joule (unidad), 232
Júpiter, movimiento de las lunas de, 384

K

kelvin (unidad), 481, A1
Kepler, Johannes, 299-300
kilocaloría (unidad), 292
kilogramo (unidad), 5-6, A1
kilowatt-hora (unidad), 234
Kusch, P., 504

L

Laboratorio de física CERN, 120, 453
Leonardo da Vinci, leyes de fricción de, 96
Ley cero de la termodinámica, 480
Ley de áreas, de Kepler, 312
Ley de Avogadro, 159-160
Ley de Boyle, 488
Ley de conservación de la energía, 284-285
y ecuación de Bernoulli, 355
Ley de conservación de la masa
y ecuaciones de continuidad, 353
en dinámica de fluidos, 353
Ley de conservación del ímpetu angular, 215-216
Ley de conservación del ímpetu lineal, 124-126
y simetría espacial de la naturaleza, 125
Ley de Charles, 488
Ley de Dalton, 514 (problema 2)
Ley de Gay-Lussac, 488
Ley de Hooke, 236
Ley de gravitación universal, 300-302
Ley de Poiseuille, 362
Ley de Torricelli, 367 (ejercicio 14)
Ley de transformación de velocidades, 76
Ley del gas ideal, 488
Ley de la conservación de la energía mecánica, 261-253
Ley de la inercia, 43
Ley de las órbitas, de Kepler, 311-312
Ley de los periodos de Kepler, 312
Ley invariable, de la física, 241
Ley(es) de la termodinámica
primera, 291-292, 517-536. *Véase también* Primera ley de la termodinámica
segunda, 551-561. *Véase también* Segunda ley de la termodinámica
cero, 480
Leyes de fuerzas de cuadrados inversos, 301
Leyes de Kepler, del movimiento planetario, 311-312
Leyes de la fuerza, 42
cuadrado inverso, 301
Leyes de Newton. *Véase* Newton, leyes de libra (unidad), 48
Límite de Roche, 329 (problema 33)
Línea de acción, de la fuerza, 177
Líneas de corriente
campo de flujo de, 359
flujo de fluido de, 352-354
Longitud
apropiada, 456
en reposo, 456
estándares de, 4-5
factores de conversión para las unidades de, A12-A13
problemas de, no resueltos por la mecánica clásica, 452
relatividad de la, 455-456, 464-465
unidad base del Sistema Internacional para, A1
Longitud apropiada, 456
Longitud de onda, 404
cambio de, en distintos medios, 407-408, 416
Longitud en reposo, 456
Lorentz, H. A., 458
Luna, datos astronómicos sobre la, de la Tierra, A4
Luz
curvamiento de la, 319
problemas de la, no resueltos por la mecánica clásica, 452-453
velocidad de la, 5, 453

M

Magnitudes físicas, 1-2
Manómetro, de tubo abierto, 340-341
Máquina de Atwood, 93-94
Máquina de Carnot, 551-552
  ciclo de la, 552-553
  eficiencia de, 553
Máquina de Stirling, 554
Máquina(s), 551
  ciclos de, 551
  de Carnot, 551-553
  de Stirling, 554
  eficiencias de, reales, 556-557
  entropía y desempeño de las, 551-554
  perfecta, 553-554
  real, 556-557
  reversible, 552-554
  sustancias de trabajo de las, 551
Máquinas reversibles, 552-554
Marco de referencia cm. *Véase* Marco de referencia del centro de masa
Marco de referencia del centro de masa, 128
  colisiones en el, 128-130
Marco de referencia del laboratorio, 128
Marco(s) de referencia, 43
  centro de gravedad, colisiones en el, 128-130
  de laboratorio, 128
  inercial, 43
    y movimiento relativo, 44
  no inercial, 103-105
Marcos de referencia inerciales, 43
  y movimiento relativo, 44
Marcos no inerciales, 103-105
Masa, 46
  centro de, 139-140. *Véase también* Centro de masa
  como cantidad escalar, 47
  en reposo, y, relativista, 468
  estándares de, 5-7
  factores de conversión para unidades de, A13
  reducida, 389
  unidad base del Sistema Internacional para la, A1
  y aceleración, 46-47
  y energía, en relatividad especial, 468-469
  y peso, 52-54
  y segunda ley de Newton, 47-49
Masa en reposo, 468
Masa gravitacional, 317-318
Masa inercial, 317-318
Masa relativista, 468
Masa reducida, 389
Materia
  cambios de fase de la, 525
  naturaleza atómica de la, 497-499
Materia obscura, 316-317
Maxwell-Boltzmann, distribución de energía de, 506-507
Maxwell, James Clerk, 503
  y teorema de equipartición de la energía, 530
Mecánica
  clásica, 41-56. *Véase también* Mecánica clásica
  cuántica, 106
  estadística, 558
  newtoniana. *Véase* Newton, leyes de,
Mecánica clásica, 41-42
  fuerzas en la, 44-46
  masa en la, 46-47
  peso y masa en la, 52-54
  primera ley de Newton en la,
  problema central de la, 41
    42-47
  problemas no resueltos por la, 451-453
  segunda ley de Newton en la, 47-49
  tercera ley de Newton en la, 50-52
Mecánica cuántica, 106
Mecánica estadística, 558
Medición, 1-8
  análisis dimensional en el, 7-8
  estándares de longitud en, 4-5
  estándares de masa en, 5-7
  estándares de tiempo, en 3-4
  precisión y cifras significativas en, 7
  Sistema Internacional de Unidades (SI), 2-3
Medidor de Venturi, 356
Medios dispersivos, 407-408
  forma de onda en, 408
  y rapidez de grupo de ondas, 408
Mercurio, perihelio de, 319
Método de Kundt, para la rapidez del sonido en gases, 449 (problema 11)
Método de tiempo de vuelo, 241
metro (unidad), A1
Microestado, 559
Miller, R. C., 504
Misión de Cassini, ayuda de la gravedad a la, 120
Modulación de amplitud, 439
Módulo volumétrico isotérmico, 429
Módulo volumétrico ("bulk"), 333
  isotérmico, 429
  y rapidez del sonido en fluidos, 431
Moléculas
  distribución de, 503-506
  grados de libertad de las, 530
  fuerzas entre, 509-510
  velocidad de gas de, 500
Moléculas de gases
  distribución de energía en las, 506-507
  distribución de velocidades de Maxwell para las, 503-506
  energía cinética traslacional
    promedio de las, 504
  fuerzas entre las, 509-510
  ley del gas ideal y. *Véanse* Gas ideal; Ley del gas ideal
  movimiento browniano de las, 497-499
  presión ejercida por las, 499-501
  teoría cinética de las, 497
  trayectoria libre media de las, 501-503
  velocidad(es) de, 500
    distribución de, 503-506
    más probable, 504
    promedio, 504
    raíz cuadrada media, 500, 504
mol (unidad), 6, A1
Momento adecuado, 455
Momento de inercia, 175-176
Movimiento
  vector aceleración en el, 17-20
  angular, 159-168. *Véase también* Movimiento rotacional
  variables angulares y lineales del, 165-168
  y centro de masa, 143. *Véase también* Centro de masa
  de objetos complejos, 139-140
  aceleración constante en el, 26-28
  de cuerpos en caída libre, 28-31
  variables lineales y angulares del, 165-168
  no periódico, 364
  unidimensional, 13, 20-26
    ecuaciones del, 23-24, 27-28
    proceso limitante del, 24-26
  oscilatorio, 373-390
  planetario, 311-315
  vectores de posición en el, 17-20
  de proyectil, 68-71
  relativo, 76-77
    y primera ley de Newton, 44
  rotacional, 159-168. *Véase también* Movimiento rotacional cinemática del, 159-168
  resumen en dinámica del traslacional y, 221
  armónico simple, 375-376. *Véase también* Movimiento armónico simple
    tridimensional, 65
  con aceleración constante, 65-66
  leyes de Newton y, 66-68
  traslacional
    cinemática del, 13-20. *Véase también* Vectores
  unidimensional, 20-31
  bidimensional y tridimensional, 65-77 .
  resumen dinámica del movimiento rotacional y, 221
  puntos de retorno de, 267
  circular uniforme, 73-76
  cinemática vectorial del, 13-20
    propiedades vectoriales del, 14-17
    vectores velocidad de, 17-20
  ondulatorio, 401-419. *Véanse también* Onda(s); Movimiento ondulatorio
Movimiento angular armónico simple, 381
Movimiento armónico
  amortiguado, 385-387
Movimiento armónico
  amortiguado, 385-387
  simple, 377-385
Movimiento armónico simple
  amplitud del, 377
  angular, 381
  aplicaciones del, 380-384
  desplazamiento del, velocidad y aceleración en el, 378
  energía en el, 378-380
  ecuación del, 376-377
  frecuencia angular del, 377
  frecuencia del, 377
  periodo del, 377
  y movimiento circular uniforme, 384-385
Movimiento browniano, 497-498
  análisis del, de Einstein, 497, 498
  medición del, 498
  modelo de camino al azar de, 498
Movimiento circular uniforme, 73-76
  y leyes de Newton, 100-102
  y movimiento armónico simple, 384-385
Movimiento ondulatorio, 403-406
  análisis de Fourier del, 412
  energía del, 409-411
  intensidad del, 411
  potencia del, 410-411
Movimiento de proyectiles, 68-71
  alcance del, 69
  alcance horizontal del, 69
  fuerzas de resistencia y, 71-73
  con resistencia del aire, 73
Movimiento no periódico, 364
Movimiento relativo, 76-77
  y marcos de referencia inerciales, 44
Movimiento rotacional, 159-160
  aceleración angular en el constante, 164-165
  cantidades vectoriales en el, 162-164, 167
  combinación de, 193-196, 264-266
  condiciones de equilibrio en el, 187-191
  condiciones de no equilibrio en el, 191-193
  conservación de energía en el, 264-266
  debido a la gravedad, 185-187
  inercia rotacional en el, 178-179
  leyes de Newton aplicadas al, 179-181, 187-193

lineales y angulares, 165-168
regla de la mano derecha de la, 163-164
relación vectorial de las, 168
repaso del, 220-221
segunda ley de Newton y el, 179-181
tangencial y, 165-168
torca y, 175-177. *Véase también* Torca(s)
variables angulares y lineales del, 165-167
variables del, 160-162
vectores que representan, 177-178
y movimiento traslacional, 164, 221
Movimiento traslacional. *Véase*
bidimensional y tridimensional, 65-67
cinemática de, 13-20. *Véase también* Vectores
combinado, 193-196
de sistema de partículas, 143
también Movimiento
unidimensional, 20-31
y centro de masa, 143
y movimiento rotacional, 164
Multiplicidad, de configuración, 559

N

Newton, Isaac, 41
desarrollo de las leyes de gravitación, 300
estudios de, sobre la masa inercial y la gravitacional, 317
Newton, leyes de. *Véanse también*
Primera ley de Newton;
Segunda ley de Newton;
Tercera ley de Newton
del enfriamiento, 493 (problema 1)
en fuerzas de fricción, 95-100
limitaciones de las, 105-107
en marcos no inerciales y seudofuerzas, 103-105
de gravitación universal, 300-302
en dinámica rotacional, 187-193
en fuerzas dependientes del tiempo, 102-103
en fuerzas de tensión, 90-95
en tres dimensiones, 66-68
en movimiento circular uniforme, 100-102
newton (unidad), 48
NIST (National Institute of Standards and Technology), 1
Nivel de sonido, 432
Nodos, 414
de presión, 434
Número de Loschmidt, 492 (ejercicio 37)
Número de Mach, 443
Número de onda, 404
Número de Reynolds, 363
Nutación, 220

O

Objetos en rotación
ímpetu angular y estabilidad de los, 217-218
conservación del ímpetu angular en los, 216-220
Objetos que rebotan, 22-23
Onda de choque, 442
Onda de pulso, reflexión de la, 415-416
Onda(s)
amplitud de, 404
armónica, 402
constante de fase de, 405-406
diferencia de fase de, 413
esféricas, 403, 411
estacionarias, 414-416
fase de, 403, 405-406
frecuencia de, 404
interferencia de, 412-414
longitudinal, 402
longitudinales estacionarias, 434-436
mecánica, 401
planas, 402-403
periodo de, 404
pulso de, 402. *Véase también* Pulso de onda
rapidez de fase de, 406-408
reflexión de, 415-416
senoidales, 404-405. *Véase también* Ondas senoidales
sonido de, 427-450, *Véase también* Ondas sonoras
superposición de, 411-412
tipos de, 402-403
transversales, 402, 405
tren periódico de, 402
velocidad de, 406-408
velocidad de fase de, 404
velocidad de grupo, 408
viajeras, 403-406
Ondas armónicas, 402
Ondas de presión, 430. *Véase también* Ondas sonoras longitudinales estacionarias, 434-436
Ondas esféricas, 403, 411
Ondas estacionarias, 414-416
amplitud de las, 414-415
antínodos de las, 414
energía de las, 415
nodos de las, 414
resonancia y, 416-417
y reflexión de frontera, 415-416
Ondas longitudinales, 402
Ondas longitudinales estacionarias, 434-436
Ondas planas, 402-403
Ondas senoidales, 404-405
constante de fase de las, 405
fase de las, 405-406
movimiento de las, 404-405
velocidad transversal de partículas en las, 405
Ondas sonoras, 427
como ondas de desplazamiento, 429-430
como ondas de presión, 430
densidad del aire y, 428-430
efecto Doppler de las, 440-443
intensidad de las, 432-433
interferencia de las, 433-434
longitudinales estacionarias, 434-436
potencia de las, 432-433
propiedades de las, 427-428
pulsos de las, 440
sistemas vibrantes y, 436-439
velocidad de las, 430-432
en varios materiales, 431
en fluidos, 431
viajeras, 427-430
Ondas transversales, 402, 405
reflexión de, 416
velocidad de partículas en, 405
Ondas viajeras, 403-406
Órbita geosincrónica de Clarke, 313
Oscilaciones, 373
amplitud de las, 373
armónicas, 375-376
armónicas amortiguadas, armónicas simples, 375-385
de dos cuerpos, 389-390
de sistemas concentrados, 417 385-387
forzadas, 387-389
frecuencia de las, 374
frecuencia natural de las, 387
periodo de las, 373
puntos de retorno de las, 374
tiempo de vida medio de las, 386
Oscilaciones forzadas, 387-389
Oscilador
armónico simple, 375-376. *Véase también* Movimiento armónico simple
cuártico, 399
frecuencia natural del, 387
fuerza de fricción y efecto en, el 385-387
Oscilador armónico simple, 375-376
ecuación de movimiento del, 376
movimiento del, 376-378
Oscilador cuántico, 399
Oscilador de torsión, 380-381

P

Palanca hidráulica, principio de Pascal y, 337-338
Paradoja de los gemelos, 455, 463-464
Paradoja hidrostática, 344 (pregunta 7)
parsec (unidad), 11 (ejercicio 21)
Parámetro de rapidez β, 458
Partícula alfa, 289
colisión de, 119-120
Partícula(s)
compuestas, A11
elementales, A10-A11
fluido de, 351
fundamentales, A10
mecánica clásica de, 41-42
movimiento de, 14. *Véase también* Movimiento
sistemas de, 139-152. *Véase también* Sistema(s)
Partículas compuestas, A11
Partículas de fluido, 351
Partículas elementales, A10-A11
Partículas fundamentales, A10
Pascal, Blas, 336, 340
pascal (unidad), 332
Péndulo
balístico, 246
cónico, dinámica del, 100
de torsión, 381
físico, 382-384
simple, 381-382
Péndulo balístico, 246
Péndulo cónico, dinámica del, 100
Péndulo de torsión, 381
Péndulo físico, 382-384
centro de oscilación del, 383
Perigeo, 312
Perihelio, 312
de Mercurio, 319
Periodo
de movimiento ondulatorio, 404
de oscilación, 373, 377
Periodos, ley de, 312
Perrin, Jean Baptiste, 498
Peso, 52-53
masa y, diferencia entre, 53
Petit, A. T., 525
pie-libra (unidad), 232
Pion, 451
Planetas
datos astronómicos sobre los, A5
consideraciones de energía en el 313-315
movimiento de los, 311-313
Poiseuille, Jean-Louis-Marie, 361
poise (unidad), 361
Positrón, 452
Potencia, 234
factores de conversión para unidades de, A16
instantánea, 234
promedio, 234
unidades de, 234
y trabajo, 234-235
Precesión, 219
de equinoccios, 220

del perihelio de Mercurio, 3198
Precisión, 7
Prefijos del Sistema Internacional de Unidades, 2
Premio Nobel de física, galardonados de 1901-2000, A22-a25
Presión
de fluidos, 332-34
de gases, 499-501
factores de conversión para unidades de, A15
medición de la, 340-341
y densidad, 333
variaciones de la, en la atmósfera terrestre, 335-336
Presión absoluta de fluidos, 340
Presión atmosférica, 335-336
presión manométrica y, 340
Presión del aire, y ondas sonoras. *Véase* Ondas sonoras
Presión dinámica, de fluidos, 355
Presión estática de fluidos, 355
Presión manométrica, 340
y presión atmosférica, 340
Primera ley de Newton, 42-43
en marcos de referencia, 43
fuerzas y la, 44-46
marcos de referencia inerciales, movimiento relativo y, 44
Primera ley de la termodinámica, 291-292, 517-536
aplicaciones de, 533-536
en procesos adiabáticos, 533-534
de gases ideales, 531-533
de sólidos, 525-526
en procesos cíclicos, 534-535
en procesos isotérmicos, 534
en procesos de volumen constante, 534
en expansión libre, 535-536
formulación de la, 522
y calores específicos, 521-523
y calores de transformación, 525
y capacidades caloríficas, 521-523
y energía interna de gas ideal, 529-531
y trabajo realizado por gas ideal, 526-529
Principia, 41
Principio de Arquímedes, 338-339
Principio de constancia de la velocidad de la luz, 453
Principio de equivalencia, 318
Principio de Pascal, 336-337
y palanca hidráulica, 337-338
Principio de relatividad, 453
Principio de superposición, 302, 411-412, 433-434
Proceso termodinámico, 522
Procesos adiabáticos, 429
primera ley de la termodinámica en los, 533-534
trabajo efectuado en, 528-529
Procesos cíclicos, 534-535
Procesos con volumen constante, 534
Procesos de desintegración, nucleares, conservación de energía en los, 289-290
Procesos en una dirección, 545-546
Procesos irreversibles, 545-546
cambio de entropía en, 547-551
segunda ley de la termodinámica en los, 551
Procesos isentrópicos, 553
Procesos isotérmicos, 528
primera ley de la termodinámica en los, 534
Procesos reversibles, 546
cambio de entropía en los, 551
Producto cruz, multiplicación de vectores y, 167, 169, A19
Producto cruz vectorial, 168, 177, A19
Producto punto, multiplicación de energía cinética como, 239-240
orden de vectores en el, 239
trabajo como, 233-234
vectores, 233, A19
Ptolomeo, Claudio, 299
Pulsar, 173 (problema 4), 218
Pulso de onda, 402
dispersión del, 408
movimiento del, 403-404
Pulsos, de ondas sonoras, 439-440
Pulsos por segundo, número de, 440
Punto triple, de agua, 481
Puntos de retorno
de movimiento, 267
de oscilaciones, 374

R

Radiación de Cerenkov, 442
Radiación, del calor, 521
Radiación, presión de la, 218
radian (unidad), 161
Radio de giro, 201 (ejercicio 20)
Rapidez angular, 161
Rapidez de escape, 310
Rapidez de flujo de volumen, 353
Rapidez de onda, 405, 406
análisis dimensional de la, 407
análisis mecánico de, 407-408
y medios cambiantes, 407-408
y propiedades del medio, 407
Rapidez raíz cuadrática media, de moléculas de gases, 500, 504
Rarefacción, 428
Razón de calores específicos, 528, 532
Razón de capacidades calóricas molares, 532
Razón de ondas estacionarias, 425, (problema 17)
Reacción endoérgica, 289
Reacción exoérgica, 289
Reacciones, conservación de energía en las, 288-289
Refrigerador, 555
de Carnot, 555
desempeño del, y entropía, 555-556
ideal, 555
perfecto, 555-556
Refrigerador de Carnot, 555
Regla de la mano derecha
en dinámica rotacional, 163-164, 177-178
en el producto cruz vectorial, 168
Relatividad
teoría general de la, 106. *Véase también* Teoría general de la relatividad
principio de la, 453
teoría especial de la, 106. *véase también* Teoría especial de la relatividad
Relatividad de la simultaneidad, 462
Relatividad especial. *Véase* Teoría especial de la relatividad
Reloj con fuente de cesio, 3-4
Reloj de péndulo, 4, 382
Resistencia aerodinámica, 73
Resistencia térmica, 519
Resistencia viscosa, 72
Resonancia, 388-389
de ondas estacionarias, 416-417
en una cuerda tensa, 417-419
Rodamiento, sin deslizamiento, 194, 265-266
Rotación
de flujo, 352
eje de, 159-160
Rotor, dinámica del, 100-101

S

Satélites, movimiento de los, 311-313
consideraciones energéticas en los, 313-315
Segré, Emilio, 470
Segunda ley de Newton, 47-48, 67, 148
ímpetu lineal, 121
formas rotacionales del, 179-181
unidades usadas en la, 48
Segunda ley de la termodinámica, 551
desorden y, 560-561
cambio de entropía y, 551-561
método estadístico de la, 558-560
tres formulaciones de, en sistemas cerrados, 557-558
versión de Clausius de la, 556
Segundo de salto, 9 (pregunta 14)
segundo (unidad), 3, A1
Seudofuerzas, 103-105
shake (unidad), 10 (ejercicio 6)
Signos y símbolos matemáticos, A20
Simetría
cilíndrica, 145
esférica, 145
espacial, 125,145
temporal, 125
Simetría cilíndrica, 145
Simetría esférica, 145
Simetría espacial, 125, 145
Simetría temporal, 125
Simultaneidad, relatividad de la, 462
Sistema de masa variable, 149-152
Sistema de muchas partículas, 142-145
Sistema de Posicionamiento Global, 319
Sistema Internacional de Unidades (SI),2-3, A1-A2. *Véase también* Unidades del Sistema Internacional
Sistema(s)
cambios de entropía en, cerrados, 546-561. *Véase también* Entropía
energía potencial

gravitacional de, 310-311
compactado, 417
conservación del momento en, 124-126
conservación de la energía en los, 261, 266-268, 284-285
de partículas, 140, 141-1452
de dos partículas, 140-142
energía interna de los, 281-282
energía mecánica de los, 261
energía potencial de los, 310-311
ímpetu angular de, 209-211
ímpetu de, lineales, 147-149
movimiento traslacional de los, 143
masa variable, 149-152
oscilantes, 373-375
trabajo y fuerzas externas sobre los, 279-280
transferencia de energía en los, 521-523
Sistemas conservativos
tridimensionales, 268-270
unidimensionales, 266-268
Sistemas de dos partículas, 140-142
Sistemas oscilantes, 373-375
Sistemas vibrantes
armónico de, 436
de cuerda, 436-437
de membrana, 438-439
de placa, 438-439
de varilla, 438-439
en columna de aire, 437-438
frecuencia fundamental de los, 436
sobretonos de, 436
slug (unidad), 48
y ondas sonoras, 436-439
Sobrepresión, 332
Sobretonos, 436
Sol, de la Tierra
curvatura de la luz estelar por, 319
datos astronómicos del, A4
Soldadura en frío, 96
Sólidos
capacidades caloríficas de los, 525-526, 531
centro de masa de los, 145-147
inercia rotacional de los, 183-185
isotrópicos, 486
Sólidos isotrópicos, 486
Sonda de fuerza, 45-46
Superconductor, 526
Superposición, principio de la, 302, 411-412, 433-434
Sustancias de trabajo, 551
Stanford Linear Collider, 468

T

Tabla periódica, A9
Temperatura
cero absoluto, 481
medición de la, 482-482
unidad base del Sistema internacional, A1
y calor, 290-291
y equilibrio térmico, 480
y expansión térmica, 484-487
Temperatura de Debye, 544 (problema de computación 1)
Temperatura de resistencia de platino, 482
Temperatura del gas ideal, escala de la, 483
Tensión superficial, de fluidos, 341-343
Teorema de impulso-ímpetu, 122
y teorema de trabajo-energía, 240
Teorema de los ejes paralelos, 181-183
Teorema de Pitágoras, A20
Teorema de trabajo-energía, definición de, 240
en marcos de referencia, 241-242
forma rotacional del, 244
limitación del, 240-241
prueba del, 240-241
y energía cinética, 239-240
y teorema de impulso-ímpetu, 240
Teoremas de capas o cascarones, y fuerzas de Gravitación, 305-307
Teoría cinética de gases, 497
Teoría del Todo, 471
Teoría de la gravitación, avances de la materia oscura, 316-317
en la, 316
masa gravitacional y, 317-318
masa inercial y, 317-318
principio de equivalencia, 318
y teoría general de la relatividad, 318-319
Teoría especial de la relatividad, 106
consecuencias de la, 453-457
coordinadas espaciales y temporales del evento en, 459-460
energía y, 467-470
ímpetu y, 465-467
introducción a la, por Albert Einstein, 451, 452-453
masa, energía y, 468-470
postulados de la, 453-545
pruebas de, 452-453
Transformación de Lorentz y, 457-459, 462-465
transformación de velocidades en, 460-461
Teoría general de la relatividad, 106, 316, 318-319
efectos de la, 464
pruebas experimentales de la, 319
Teorías de la gran unificación, 89, 471
Tercera ley de Newton, 50-52
verificación de la, 52
Termodinámica, ley(es) de
primera, 291-292, 517-536. *Véanse también* (Primera ley de la termodinámica)
segunda, 454-561. *Véanse también* Entropía; Segunda ley de la termodinámica cero, 480
Termómetro, 480
banda bi-metálica, 485
de gas a volumen constante, 482-482
resistencia del, 491 (ejercicio 7)
Termómetro de gas a volumen constante, 482-484
Termómetro de resistencia, 491 (ejercicio 7)
Termopar, 482
Tiempo
apropiado, 455
la mecánica clásica, 451
problemas de, no resueltos por relatividad del, 454-455, 462-464
unidad base del Sistema Internacional, A1
Tiempo de amortiguamiento, constante de, 386
tiempo de reverberación, 449 (problema 8)
Tiempo de vida promedio, de oscilación, 386
Tierra
datos astronómicos sobre la, A4, A5
gravedad cercana a la superficie de la, 304-305
Tono (altura), del sonido, 440
torca de restablecimiento, 380-381
Torca(s), 175-177
análisis de equilibrio de, 188-191
brazo de palanca de, 177
como vector, 177-178
condiciones de equilibrio de, 187-191
condiciones de no equilibrio para, 191-193
debida a la gravedad, 185-187
definición de, 176
externo neto, 180
línea de acción de, 177
restauradora de, 380-381
y forma rotacional de la segunda ley de Newton, 179-181
torr (unidad), 340-341
Torricelli, Evangelista, 340
Trabajo
adiabático, 528-529
asociado al proceso termodinámico, 518
como producto punto, 233-234
concepto de, 229-230
definición del, 230, 240
efectuado por o en gas ideal, 526-529
efectuado por máquina de Carnot, 552-553
efectuado por fricción, 282-284
efectuado por fuerza de resorte, 236-238
en dos dimensiones, 238-239
en movimiento rotacional, 243-244
en sistemas unidimensionales, 266-268
externo, 280
fuerza variable y, 235-238
interno, 280
unidades de, 232
y calor, 290
y conservación de la energía mecánica, 261-263
y conservación de la energía, 284-285
y constante, fuerza 230-233
y energía cinética, 229-233
y fuerzas externas sobre un sistema, 279-280
y primera ley de la termodinámica, 521-523
y potencia, 234-235
Trabajo externo, 280
Trabajo interno, 280
Transformación, calores de, 525
Transformación de Lorentz, 457-459
consecuencias de la, 461-465
de velocidades, 460-461
ecuaciones de la, 458
inversa, 459
Transformación de velocidades 460-461
ecuaciones de Lorentz para, 457-459
ley de Galileo de la, 76, 458
Transformación galileana, ecuación de la, 458
Transporte dinámico, 357-358
Trayectoria de proyectil, 69
Trayectoria libre media, de moléculas de gas, 501-503
Tubo de flujo, 352
Tubo de llama de Rubens, 435
tubo de Pitot, 356-357
Turbulencia
en flujo de fluido, 351-352, 362-363
teoría del caos y, 364

U

unidad astronómica, 11 (ejercicio 21)
Unidad de masa atómica, 6
Unidad térmica inglesa, 292
Unidades, 1, 2. *Véase también* Unidades
del Sistema Internacional
Unidades base, Sistema Internacional de Unidades,

A1-A2
Unidades del Sistema Internacional, 2-3
base, A1
complementarias, A2
derivadas, A2
de tiempo, 3-4
factores de conversión del, A12-A16
longitud, 4-5
masa, 5-7
U.S. Naval Observatory, 4

V

Valor de Dulong-Petit, 525
Valor R, 519
van der Walls, ecuación de estado de, 507-509
van der Walls, Joahnnes Diderik, 507-509
Vaporización calor de, 525
Vectores
aceleración radial, 167
adición de, 15, A18-A19
componentes de, 14-15, A17
de aceleración, 19-20
desplazamiento de, 18
de posición, 17-18
en dos o tres dimensiones, 66-71
en movimiento rotacional, 162-164, 167, 168
en una dimensión, 13-17
igualdad de los, 15
magnitud de los, 14
multiplicación de, A19
multiplicación escalar de, 15-17, A19
multiplicación de producto cruz de, 168, 177, A19
producto punto, multiplicación de, 233-234, 239-240, A19
propiedades de los,14
unitarios, 15, 167, 301, A18
velocidad, 18-19
Vectores de desplazamiento, 18
Vectores de posición, 17-18
Vectores unitarios, 15, 167, 301, A18
Vectores velocidad, 18-19
Velero solar, 61 (ejercicio 8)
Velocidad, 9
angular, 161
factor de conversión para unidades del, A14
de la luz, 5
de ondas, 405
principio de constancia de la, 453
problemas de, no resueltos por la mecánica clásica, 452
promedio, 19
terminal, 71-73
Velocidad angular, 161
e ímpetu angular, 211-213
instantánea, 161
promedio, 161
vectores que representan la, 163-164, 167
y variables lineales, 165-168
Velocidad angular instantánea, 161
Velocidad constante, 20-21
y centro de masa, 143
Velocidad de fase, 404
Velocidad de grupo, de ondas, 408
Velocidad instantánea, 18
Velocidad tangencial, de las estrellas, 317
Velocidad tangencial, 165-166
vectores que representan la, 167
Velocidad terminal,71-73
Velocidad transversal de partícula, 405
Velocidad(es)
angular, 161
angular y tangencial, 165-168
constante, 20-21
instantánea, 18
promedio, 18
suma relativista de, 456-457
tangencial, 165-166
transformación de la, 76, 457-459, 460-461
Versión de Clausius, de la segunda
ley de la termodinámica, 556
Viscosidad, de fluido, 352, 355, 360-362
Volumen, factores de conversión para unidades de, A13
von Guericke, Otto, 347
(problema 1)
vórtice, 359

W

Watt, James, 234
watt (unidad), 234