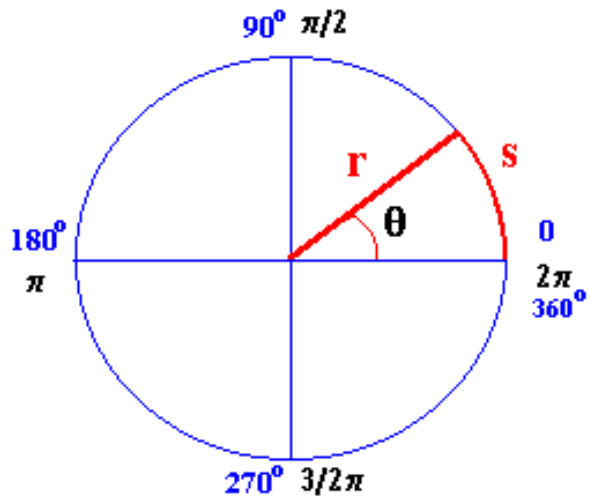
Bolilla 4: Rotación de los cuerpos rígidos. Movimiento circular

Bolilla 4: Rotación de los cuerpos rígidos. Movimiento circular

4.1 Variables Angulares

Las variables angulares sirven para representar en forma mas simple e idónea al movimiento de rotación.



La <u>posición angular</u> θ se define en radianes de la siguiente manera:

$$\theta = s/r$$

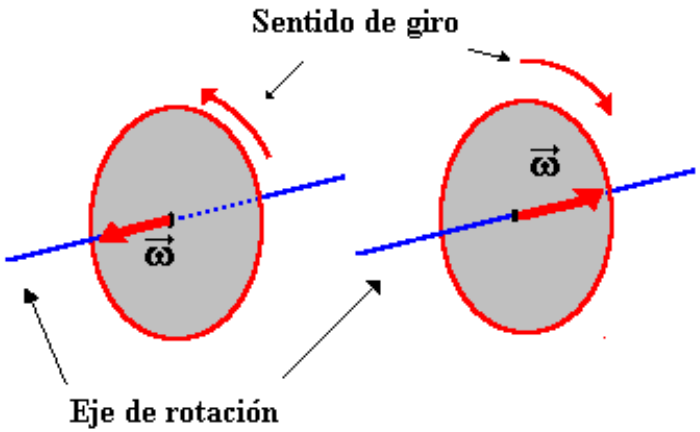
Equivalencias: **1 giro = 2π rad = 360º**

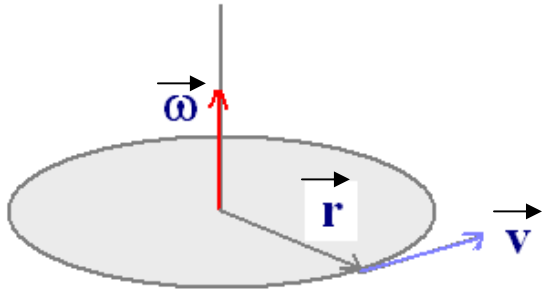
Definiciones:

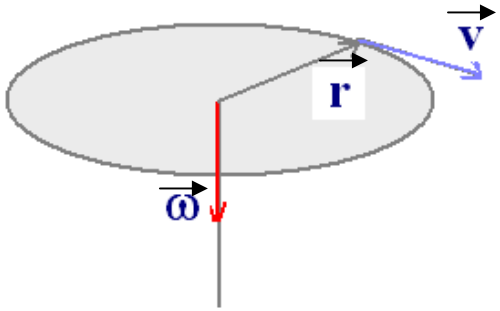
1. Velocidad angular media: $\omega_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$

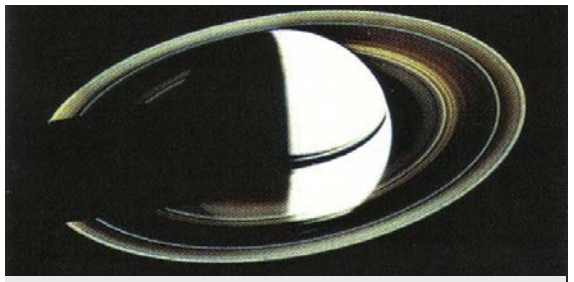
2. Velocidad angular instantánea: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

$\vec{\omega}$ es un vector cuya dirección es la del eje de rotación y sentido (regla del tornillo) como el indicado en la figura:









Fotografia de los Anillos de Saturno (Voyager 1. en 1980)

3. El desplazamiento de un punto situado a una distancia **r** del eje de rotación es:

$$\mathbf{s = r\theta}$$

4. La variación de **s** respecto de **t**, es la **celeridad** o **velocidad tangencial**. Se relaciona con la velocidad angular de la siguiente manera:

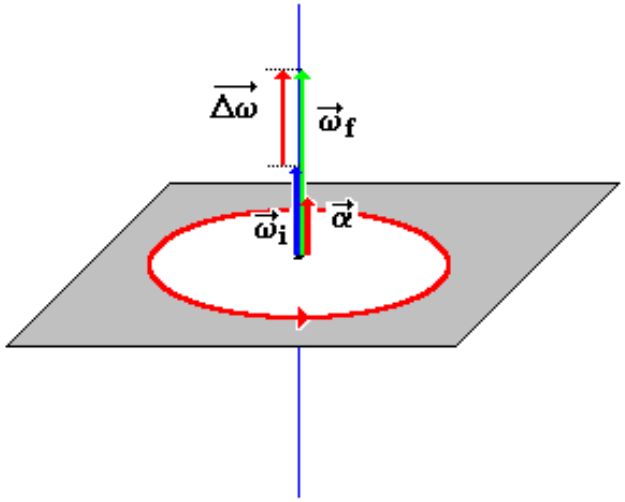
$$\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{r}\frac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{dt}} \Rightarrow \mathbf{v = r\omega}$$

5. La aceleración angular media es: $\vec{\alpha}_m = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$

6. La aceleración angular instantánea es:

$$\alpha = \frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}$$

7. La aceleración angular es un vector, cuya dirección y sentido están dados por el cambio en la velocidad angular.



8. La aceleración tangencial es la variación con respecto al tiempo de la velocidad tangencial. Es un vector tangente a la trayectoria cuyo módulo verifica la relación:

$$v = r\omega \rightarrow \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \rightarrow a = r\alpha$$

4.2 Movimiento Circular Uniforme (MCU). Movimiento Circular Uniformemente Variado (MCVU)

Un objeto tiene **MCU** cuando la velocidad angular es constante:

$$\omega = \text{constante} \rightarrow \alpha = 0$$

Un objeto tiene **MCUV** cuando la aceleración angular es constante:

$$\alpha = \text{constante}$$

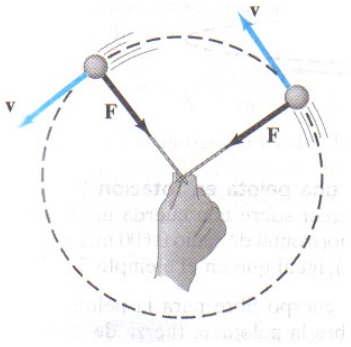
Ecuaciones del MCUV

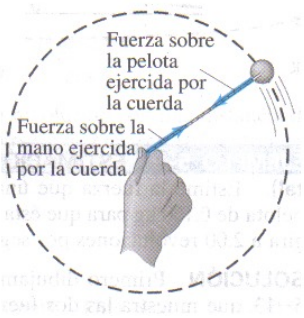
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\alpha}t$$

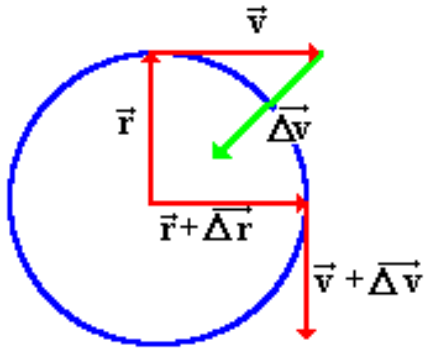
$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

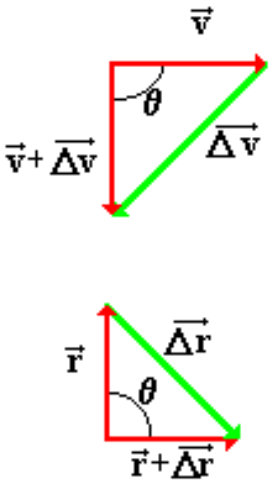
$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)$$

La velocidad tangencial ($\vec{V}t$ o $\vec{V}$) en un movimiento circular, cambia continuamente de **dirección**. Este cambio de velocidad respecto del tiempo, se denomina aceleración centrípeta o radial, $\vec{a}_r$. Este vector apunta radialmente hacia el centro de la trayectoria.







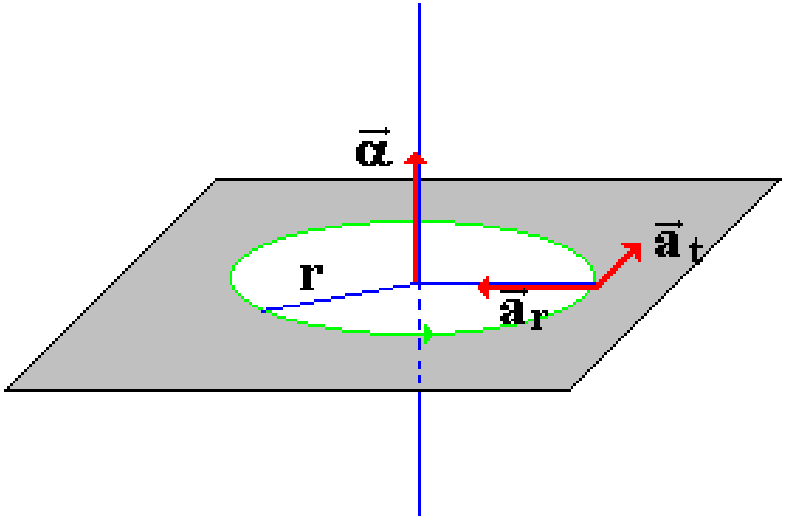


$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{1}{v}\, a_r = \frac{1}{r}\, v$$

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Aceleraciones en el Movimiento Circular



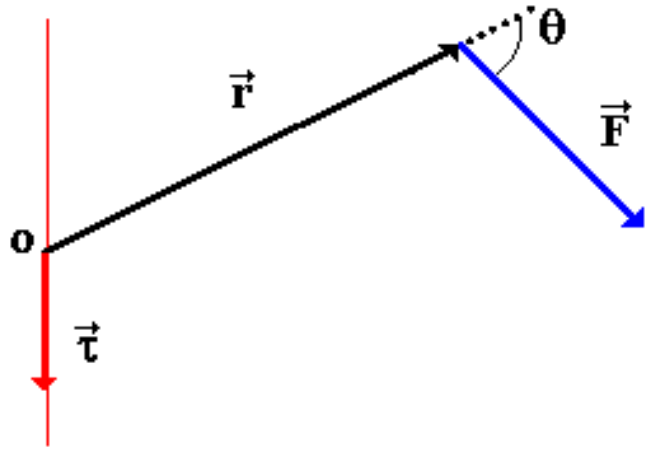
$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \quad \textbf{(angular)}$$

$$a_t = r\alpha \quad \textbf{(tangencial)}$$

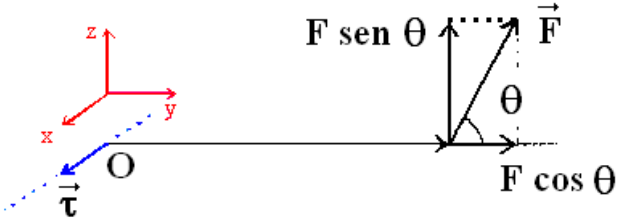
$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad \textbf{(radial)}$$

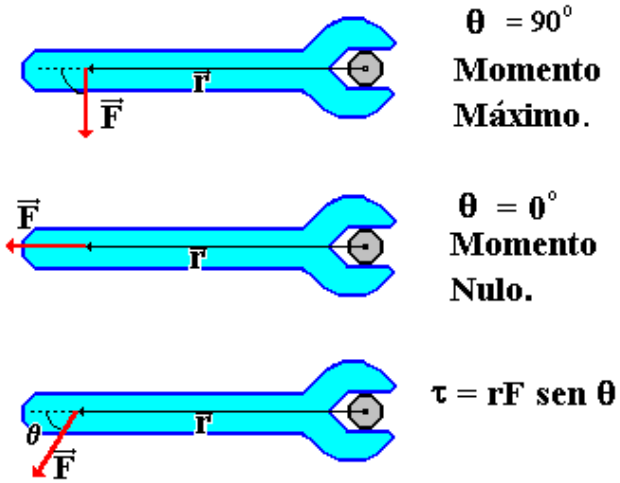
4.3 Momentos

El momento $\vec{\tau}$ ejercido por una fuerza $\vec{F}$ alrededor de un punto **O** se define como el **producto vectorial** del vector $\vec{r}$, (cuyo origen se encuentra en **O** y finaliza en el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$), y la fuerza $\vec{F}$.



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



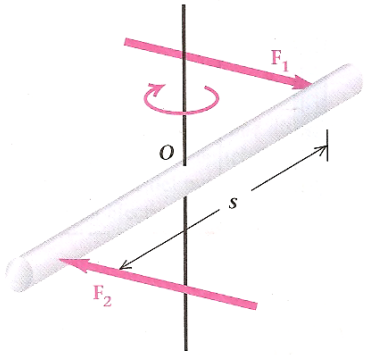


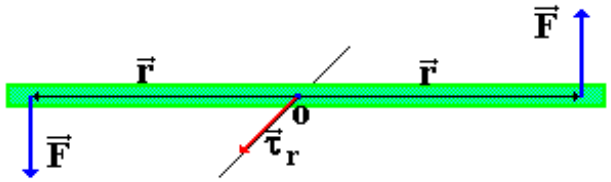
Por su definicion, el módulo del momento es:

$$\tau = r\,F\,\text{sen}\,\theta$$

El momento es máximo cuando θ es un ángulo recto. Es nulo cuando θ es igual a 0º o 180º.

Nota: <u>PARES</u>. Dos fuerzas iguales pero opuestas y cuyas líneas de acción sean diferentes constituyen un par.



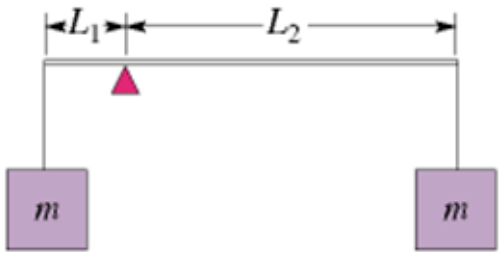


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau}_r = 2\,\vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau_r = 2\,rF$$

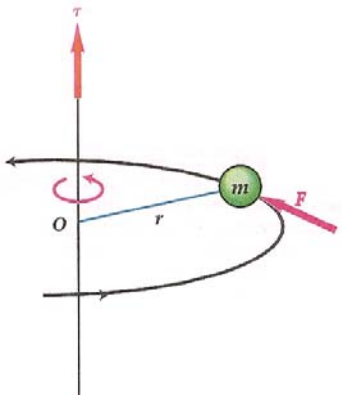
4.4 Leyes de Newton del Movimiento de Rotación

<u>Primera Ley</u> (Segunda Condición de Equilibrio):



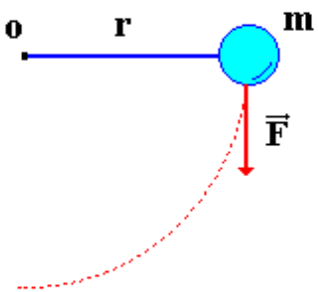
Si la sumatoria de los momentos actuantes sobre un cuerpo en cero, el cuerpo se encuentra en reposo o gira con Movimiento Circular Uniforme.

Momento de inercia: 'resistencia' de un cuerpo a girar, depende de su masa y de cómo ésta está distribuida



<u>Segunda Ley:</u>

El momento total aplicado a un cuerpo es igual al momento de inercia del cuerpo multiplicado por su aceleración angular.

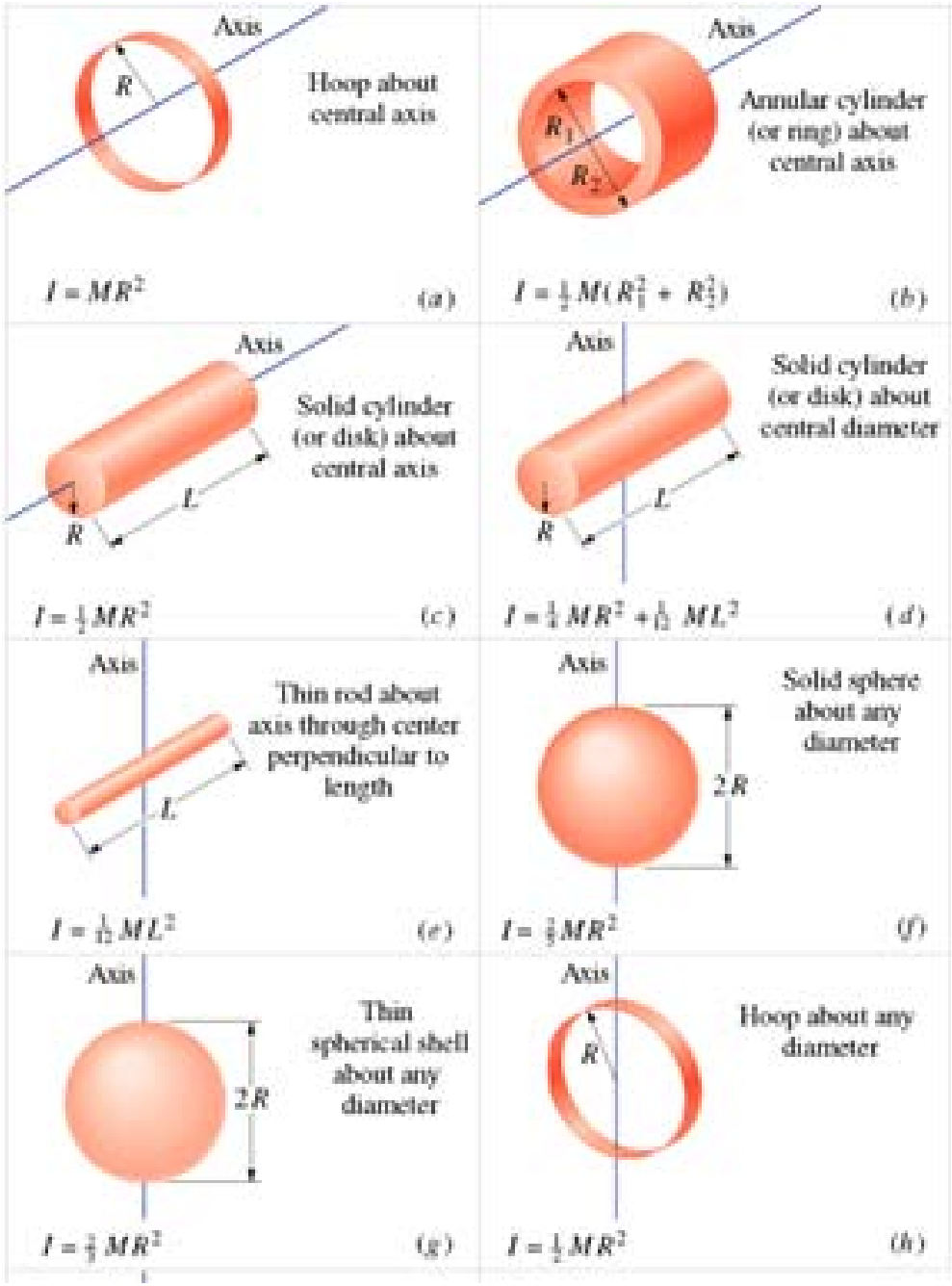


$$\tau = rF = r\,ma$$
$$= r\,m\,(\alpha r)$$
$$= mr^2\ \alpha$$

$$I = mr^2$$

$$\vec{\tau} = I\,\vec{\alpha}$$

Momentos de Inercia de cuerpos uniformes



4.5 Equilibrio de los Cuerpos Rígidos

Primera condición de equilibrio: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (Traslación)

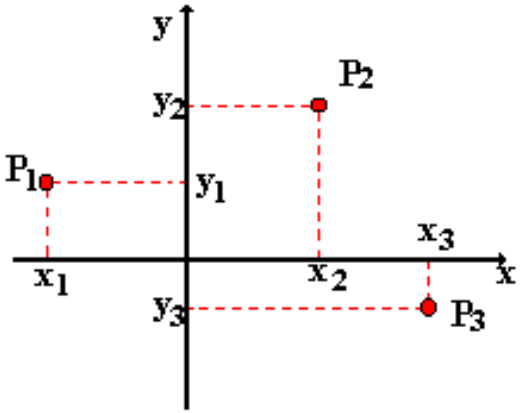
Segunda condición de equilibrio: $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$ (Rotación)

4.6 Centro de Gravedad

Centro de gravedad: es el punto donde puede suponerse aplicado el peso de un objeto.

El peso de un objeto produce un momento nulo respecto de su centro de gravedad.

Cálculo del centro de gravedad para un conjunto de masas puntuales

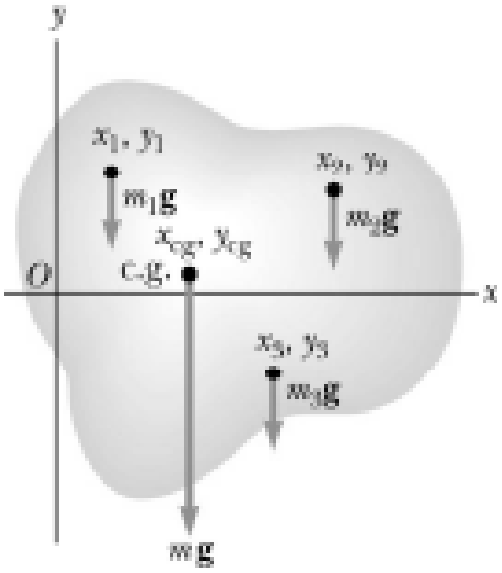


$$x_{cg} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

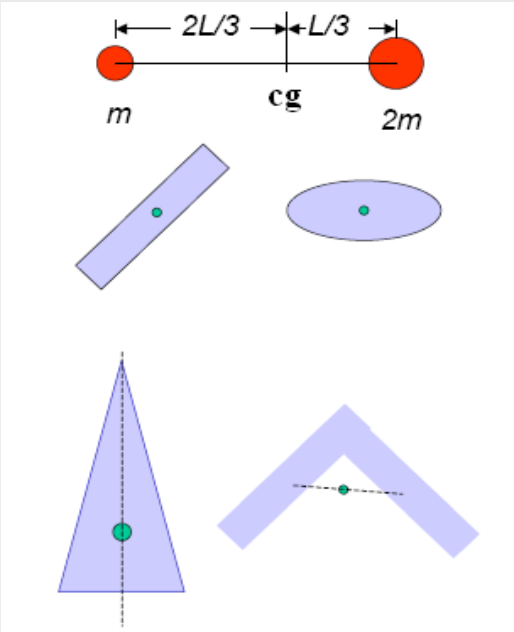
$$y_{cg} = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Centro de gravedad de cuerpos homogéneos

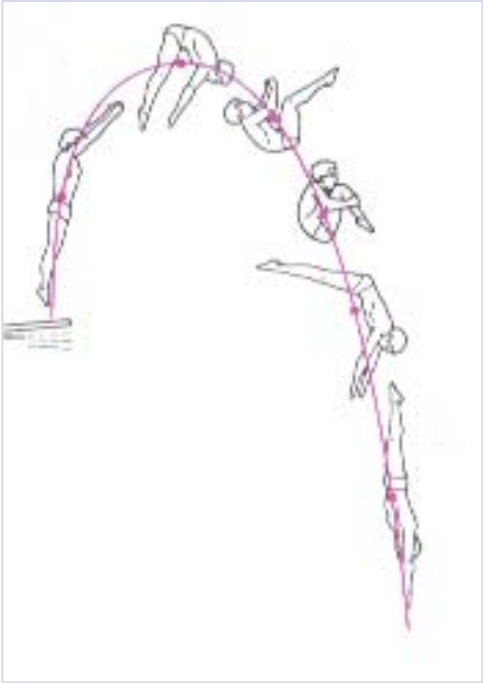
Se generalizan las ecuaciones anteriores subdividiendo al cuerpo en masas pequeñas (diferenciales de masa) y sumando (integrando) cada una de las contribuciones según la defición.



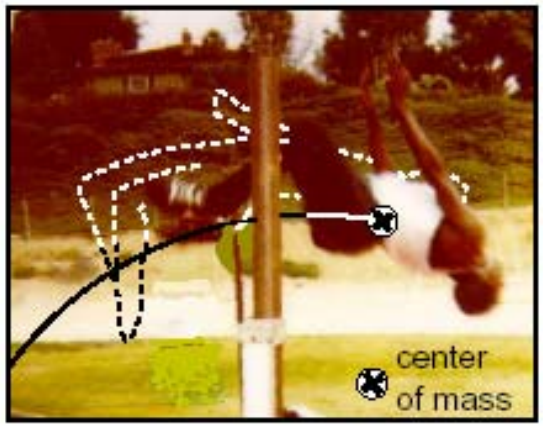
Algunas propiedades del centro de gravedad (cg)



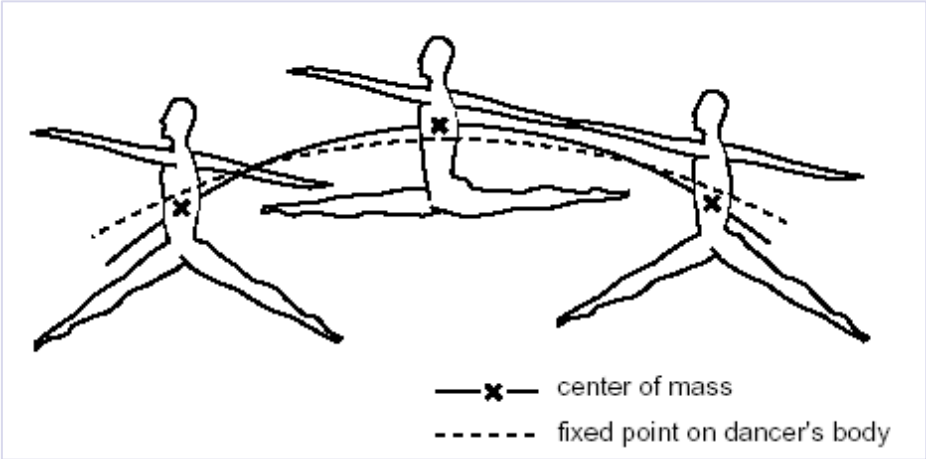
El **cg** no coincide necesariamente con un punto que pertenezca al cuerpo

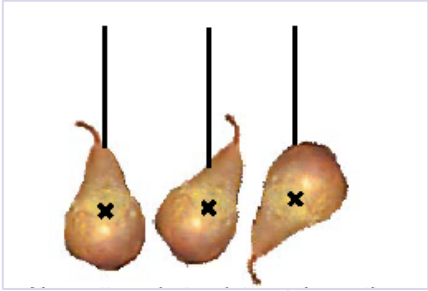


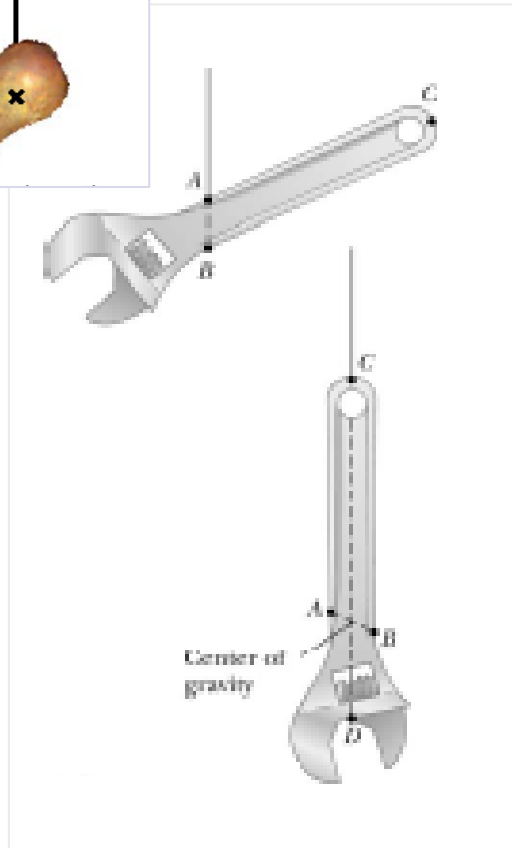
Trayectoria del **cg** (mov. de proyectiles)



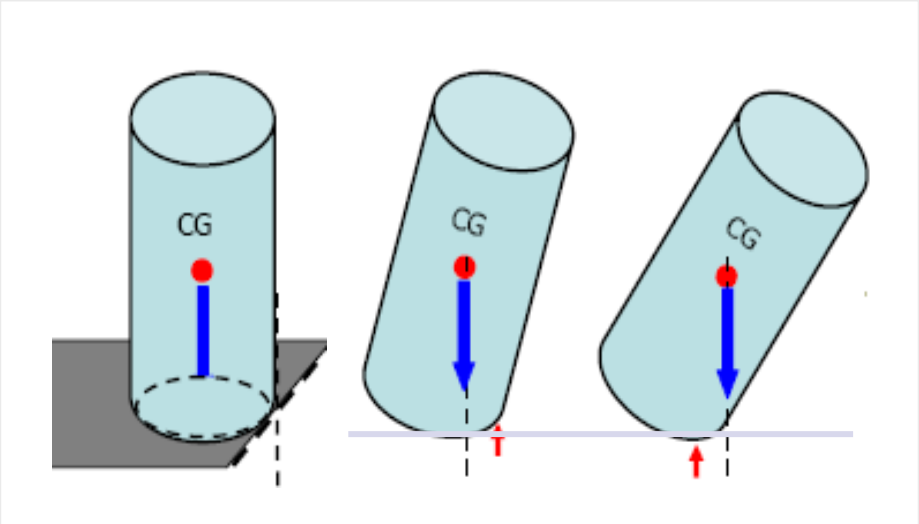
Propiedades del centro de gravedad







Posición del **cg**: suspender al cuerpo de puntos distintos



Equilibrio y centro de gravedad

Cuadro resumen: Comparación entre los movimientos de traslación y de rotación.

MAGNITUD	TRASLACIÓN	ROTACIÓN	RELACIÓN
Posición	$\vec{x}, \quad s$	θ	$s = r\theta$
Velocidad	$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$	$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$v = \omega r$
Aceleración	$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$	$a = \alpha r$
Aceleración Radial	---------	$a_r = \frac{v^2}{r}$	$a_r = \omega^2 r$
MUV	$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$ $\vec{x} = \vec{x}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$	$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\alpha}t$ $\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$	--------
Fuerza-Momento	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Masa-Momento de Inercia	m	I	$I = \sum m_i r_i^2$
Equilibrio	$\sum \vec{F} = 0$	$\sum \vec{\tau} = 0$	-----