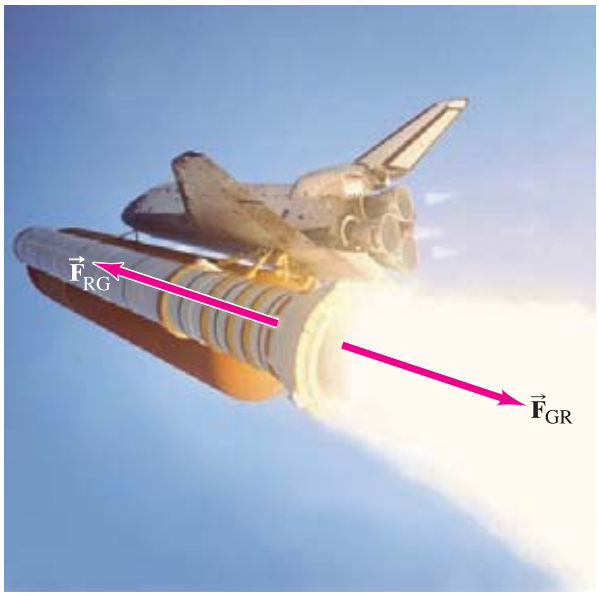
CUARTA EDICIÓN

VOLUMEN II

FÍSICA

para

CIENCIAS e INGENIERÍA



PEARSON
Prentice Hall ®

GIANCOLI

Constantes fundamentales

Cantidad	Símbolo	Valor aproximado	Mejor valor actual[†]
Rapidez de la luz en el vacío	c	$3.00 \times 10^8\ \text{m/s}$	$2.99792458 \times 10^8\ \text{m/s}$
Constante gravitacional	G	$6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$	$6.6742(10) \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
Número de Avogadro	N_A	$6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$	$6.0221415(10) \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
Constante de gas	R	$8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K} = 1.99\ \text{cal/mol}\cdot\text{K} = 0.0821\ \text{L}\cdot\text{atm/mol}\cdot\text{K}$	$8.314472(15)\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$
Constante de Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$	$1.3806505(24) \times 10^{-23}\ \text{J/K}$
Carga sobre electrón	e	$1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}$	$1.60217653(14) \times 10^{-19}\ \text{C}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4$	$5.670400(40) \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = (1/c^2\mu_0)$	$8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$	$8.854187817\ldots \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}$	$1.2566370614\ldots \times 10^{-6}\ \text{T}\cdot\text{m/A}$
Constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$	$6.6260693(11) \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$
Masa en reposo del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg} = 0.000549\ \text{u} = 0.511\ \text{MeV}/c^2$	$9.1093826(16) \times 10^{-31}\ \text{kg} = 5.4857990945(24) \times 10^{-4}\ \text{u}$
Masa en reposo del protón	m_p	$1.6726 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 1.00728\ \text{u} = 938.3\ \text{MeV}/c^2$	$1.67262171(29) \times 10^{-27}\ \text{kg} = 1.00727646688(13)\ \text{u}$
Masa en reposo del neutrón	m_n	$1.6749 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 1.008665\ \text{u} = 939.6\ \text{MeV}/c^2$	$1.67492728(29) \times 10^{-27}\ \text{kg} = 1.00866491560(55)\ \text{u}$
Unidad de masa atómica (1 u)		$1.6605 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 931.5\ \text{MeV}/c^2$	$1.66053886(28) \times 10^{-27}\ \text{kg} = 931.494043(80)\ \text{MeV}/c^2$

[†] CODATA (12/05), Peter J. Mohr y Barry N. Taylor, National Institute of Standards and Technology. Los números entre paréntesis indican incertidumbres experimentales de una desviación estándar en los dígitos finales. Los valores sin paréntesis son exactos (es decir, cantidades definidas).

Otros datos útiles

Equivalente de Joule (1 cal)	4.186 J
Cero absoluto (0 K)	−273.15°C
Aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra (promedio)	$9.80\ \text{m/s}^2\ (= g)$
Rapidez del sonido en el aire (20°C)	343 m/s
Densidad del aire (seco)	$1.29\ \text{kg/m}^3$
Tierra: Masa	$5.98 \times 10^{24}\ \text{kg}$
Radio (medio)	$6.38 \times 10^3\ \text{km}$
Tierra: Masa	$7.35 \times 10^{22}\ \text{kg}$
Radio (medio)	$1.74 \times 10^3\ \text{km}$
Sol: Masa	$1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}$
Radio (medio)	$6.96 \times 10^5\ \text{km}$
Distancia Tierra-Sol (media)	$149.6 \times 10^6\ \text{km}$
Distancia Tierra-Luna (media)	$384 \times 10^3\ \text{km}$

El alfabeto griego

Alfa	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Omicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	E	ϵ, ε	Rho	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Theta	Θ	θ	Upsilon	Y	υ
Iota	I	ι	Phi	Φ	ϕ, φ
Kappa	K	κ	Chi	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Omega	Ω	ω

Valores de algunos números

$\pi = 3.1415927$	$\sqrt{2} = 1.4142136$	$\ln 2 = 0.6931472$	$\log_{10} e = 0.4342945$
$e = 2.7182818$	$\sqrt{3} = 1.7320508$	$\ln 10 = 2.3025851$	$1\ \text{rad} = 57.2957795°$

Signos y símbolos matemáticos

$\propto$	es proporcional a	$\leq$	es menor que o igual a
$=$	es igual a	$\geq$	es mayor que o igual a
$\approx$	es aproximadamente igual a	$\sum$	suma de
$\neq$	no es igual a	$\bar{x}$	valor promedio de x
$>$	es mayor que	Δx	cambio en x
$\gg$	es mucho mayor que	$\Delta x \to 0$	Δx tiende a cero
$<$	es menor que	$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots(1)$
$\ll$	es mucho menor que		

Propiedades del agua

Densidad (4°C)	$1.000 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$
Calor de fusión (0°C)	333 kJ/kg (80 kcal/kg)
Calor de vaporización (100°C)	2260 kJ/kg (539 kcal/kg)
Calor específico (15°C)	4186 J/kg·C° (1.00 kcal/kg·C°)
Índice de refracción	1.33

Conversión de unidades (equivalentes)

Longitud

1 in. = 2.54 cm (definición)
1 cm = 0.3937 in.
1 ft = 30.48 cm
1 m = 39.37 in. = 3.281 ft
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 km = 0.6214 mi
1 milla náutica (E.U.A.) = 1.151 mi = 6076 ft = 1.852 km
1 fermi = 1 femtómetro (fm) = 10^{-15} m
1 angstrom (Å) = 10^{-10} m = 0.1 nm
1 año-luz (a-l) (ly) = 9.461×10^{15} m
1 parsec = 3.26 ly = 3.09×10^{16} m

Volumen

1 litro (L) = 1000 mL = 1000 cm^3 = 1.0×10^{-3} m^3 = 1.057 cuarto (E.U.A.) = 61.02 $in.^3$
1 gal (U.S.) = 4 cuarto (E.U.A.) = 231 $in.^3$ = 3.785 L = 0.8327 gal (inglés)
1 cuarto (E.U.A.) = 2 pintas (E.U.A.) = 946 mL
1 pinta (inglesa) = 1.20 pintas (E.U.A.) = 568 mL
1 m^3 = 35.31 ft^3

Rapidez

1 mi/h = 1.4667 ft/s = 1.6093 km/h = 0.4470 m/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 ft/s = 0.3048 m/s (exacta) = 0.6818 mi/h = 1.0973 km/h
1 m/s = 3.281 ft/s = 3.600 km/h = 2.237 mi/h
1 knot = 1.151 mi/h = 0.5144 m/s

Ángulo

1 radián (rad) = 57.30° = 57°18′
1° = 0.01745 rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Tiempo

1 día = 8.640×10^4 s
1 año = 3.156×10^7 s

Masa

1 unidad de masa atómica (u) = 1.6605×10^{-27} kg
1 kg = 0.06852 slug
[1 kg tiene un peso de 2.20 lb donde $g = 9.80\ m/s^2$.]

Fuerza

1 lb = 4.448 N
1 N = 10^5 dina = 0.2248 lb

Energía y trabajo

1 J = 10^7 ergs = 0.7376 ft·lb
1 ft·lb = 1.356 J = 1.29×10^{-3} Btu = 3.24×10^{-4} kcal
1 kcal = 4.19×10^3 J = 3.97 Btu
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.600×10^6 J = 860 kcal
1 Btu = 1.056×10^3 J

Potencia

1 W = 1 J/s = 0.7376 ft·lb/s = 3.41 Btu/h
1 hp = 550 ft·lb/s = 746 W

Presión

1 atm = 1.01325 bar = 1.01325×10^5 N/m^2
= 14.7 $lb/in.^2$ = 760 torr
1 $lb/in.^2$ = 6.895×10^3 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.450×10^{-4} $lb/in.^2$

Unidades SI derivadas y sus abreviaturas

Cantidad	Unidad	Abreviatura	En términos de Unidades base[†]
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Energía y trabajo	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$
Potencia	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$
Presión	pascal	Pa	$kg/(m \cdot s^2)$
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$
Potencial eléctrico	volt	V	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$
Capacitancia	farad	F	$A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^2)$
Campo magnético	tesla	T	$kg/(A \cdot s^2)$
Flujo magnético	weber	Wb	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^2)$
Inductancia	henry	H	$kg \cdot m^2/(s^2 \cdot A^2)$

[†]kg = kilogramo (masa), m = metro (longitud), s = segundo (tiempo), A = ampere (corriente eléctrica).

Multiplicadores métricos (SI)

Prefijo	Abreviatura	Valor
yotta	Y	10^{24}
zeta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}

CUARTA EDICIÓN

VOLUMEN II

FÍSICA

para

CIENCIAS E INGENIERÍA

con física moderna

CUARTA EDICIÓN

VOLUMEN II

FÍSICA

para

CIENCIAS E INGENIERÍA

con física moderna

DOUGLAS C. GIANCOLI

TRADUCCIÓN

Víctor Campos Olguín
Víctor Robledo Rella
Traductores especialistas en Ciencias

REVISIÓN TÉCNICA

Alberto Rubio Ponce
Gabriela del Valle Díaz Muñoz
Héctor Luna García
José Antonio Eduardo Roa Neri
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco, México

Hugo Alarcón Opazo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, campus Monterrey

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

GIANCOLI, DOUGLAS C.

Física para ciencias e ingeniería con física moderna. Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-607-442-303-7
Área: Física

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 768

Authorized adaptation of the translation from the English language editions, entitled *Physics for scientists and engineers vol. 2 (CHS 21-35) 4th ed.* by *Douglas C. Giancoli* published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2008. ISBN 9780132273596; *Physics for scientists and engineers with Modern Physics vol. 3 (CHS 36-44) 4th ed.* by *Douglas C. Giancoli* published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2008. ISBN9780132274005.
All rights reserved.

Adaptación de la traducción autorizada de las ediciones en idioma inglés, *Physics for scientists and engineers vol. 2 (CAPS. 21-35) 4ª ed.* por *Douglas C. Giancoli* publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall, Copyright © 2008. ISBN 9780132273596; *Physics for scientists and engineers with Modern Physics vol. 3 (CAPS. 36-44) 4ª ed.* por *Douglas C. Giancoli* publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall, Copyright © 2008. ISBN9780132274005.
Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés

President, ESM: Paul Corey
Sponsoring Editor: Christian Botting
Production Editor: Frank Weihenig, Prepare Inc.
Executive Managing Editor: Kathleen Schiaparelli
Art Director and Interior & Cover Designer: John Christiana
Manager, Art Production: Sean Hogan
Senior Development Editor: Karen Karlin
Copy Editor: Jocelyn Phillips
Proofreader: Marne Evans
Buyer: Alan Fischer
Art Production Editor: Connie Long
Illustrators: Audrey Simonetti and Mark Landis
Photo Researchers: Mary Teresa Giancoli and Truitt & Marshall
Senior Administrative Coordinator: Trisha Tarricone
Composition: Emilcomp/Prepare Inc.
Photo credits appear on page A-44 which constitutes a continuation of the copyright page.

CUARTA EDICIÓN VERSIÓN IMPRESA 2009
CUARTA EDICIÓN E-BOOK, 2009

D.R. © 2009 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5° piso
Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

ISBN VERSIÓN IMPRESA 978-607-442-303-7
ISBN E-BOOK 978-607-442-306-8

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 12 11 10 09

www.pearsoneducacion.net

ISBN: 978-607-442-303-7

Contenido

PREFACIO xix
A LOS ESTUDIANTES xxiii

Volumen 1

1 INTRODUCCIÓN, MEDICIONES, ESTIMACIONES 1

1–1 La naturaleza de la ciencia 2
1–2 Modelos, teorías y leyes 2
1–3 Medición e incertidumbre; cifras significativas 3
1–4 Unidades, estándares y el sistema SI 6
1–5 Conversión de unidades 8
1–6 Orden de magnitud: Estimación rápida 9
*1–7 Dimensiones y análisis dimensional 12
RESUMEN 14 PREGUNTAS 14
PROBLEMAS 14 PROBLEMAS GENERALES 16

2 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO: CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN 18

2–1 Marcos de referencia y desplazamiento 19
2–2 Velocidad promedio 20
2–3 Velocidad instantánea 22
2–4 Aceleración 24
2–5 Movimiento con aceleración constante 28
2–6 Resolución de problemas 30
2–7 Caída libre de objetos 34
*2–8 Aceleración variable; cálculo integral 39
*2–9 Análisis gráfico e integración numérica 40
RESUMEN 43 PREGUNTAS 43
PROBLEMAS 44 PROBLEMAS GENERALES 48

3 CINEMÁTICA EN DOS O EN TRES DIMENSIONES: VECTORES 51

3–1 Vectores y escalares 52
3–2 Suma de vectores: Método gráfico 52
3–3 Resta de vectores y multiplicación de un vector por un escalar 54
3–4 Suma de vectores por medio de componentes 55
3–5 Vectores unitarios 59
3–6 Cinemática vectorial 59
3–7 Movimiento de proyectiles 62
3–8 Resolución de problemas que implican el movimiento de un proyectil 64
3–9 Velocidad relativa 71
RESUMEN 74 PREGUNTAS 75
PROBLEMAS 75 PROBLEMAS GENERALES 80

4 DINÁMICA: LEYES DE NEWTON DEL MOVIMIENTO 83

4–1 Fuerza 84
4–2 Primera ley de Newton del movimiento 84
4–3 Masa 86
4–4 Segunda ley de Newton del movimiento 86
4–5 Tercera ley de Newton del movimiento 89
4–6 Fuerza de gravedad (peso) y fuerza normal 92
4–7 Resolución de problemas con las leyes de Newton: Diagramas de cuerpo libre 95
4–8 Resolución de problemas: Un enfoque general 102
RESUMEN 102 PREGUNTAS 103
PROBLEMAS 104 PROBLEMAS GENERALES 109

5 APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON: FRICCIÓN, MOVIMIENTO CIRCULAR Y ARRASTRE 112

5–1 Aplicaciones de las leyes de Newton que implican fricción 113
5–2 Movimiento circular uniforme: Cinemática 119
5–3 Dinámica del movimiento circular uniforme 122
5–4 Curvas en las carreteras: peraltadas y sin peralte 126
*5–5 Movimiento circular no uniforme 128
*5–6 Fuerzas dependientes de la velocidad: Arrastre y velocidad terminal 129
RESUMEN 130 PREGUNTAS 131
PROBLEMAS 132 PROBLEMAS GENERALES 136

6 Gravitación y síntesis de Newton 139

6–1 Ley de Newton de la gravitación universal 140
6–2 Forma vectorial de la ley de Newton de la gravitación universal 143
6–3 Gravedad cerca de la superficie de la Tierra: Aplicaciones geofísicas 143
6–4 Satélites e "ingravidez" 146
6–5 Leyes de Kepler y síntesis de Newton 149
*6–6 Campo gravitacional 154
6–7 Tipos de fuerzas en la naturaleza 155
*6–8 El principio de equivalencia, la curvatura del espacio y los agujeros negros 155
RESUMEN 157 PREGUNTAS 157
PROBLEMAS 158 PROBLEMAS GENERALES 160

7 Trabajo y energía 163

7–1 Trabajo realizado por una fuerza constante 164
7–2 Producto escalar de dos vectores 167
7–3 Trabajo efectuado por una fuerza variable 168
7–4 Energía cinética y el principio del trabajo y la energía 172
RESUMEN 176 PREGUNTAS 177
PROBLEMAS 177 PROBLEMAS GENERALES 180

8 Conservación de la energía 183

8–1 Fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas 184
8–2 Energía potencial 186
8–3 Energía mecánica y su conservación 189
8–4 Resolución de problemas usando la conservación de la energía mecánica 190
8–5 La ley de la conservación de la energía 196
8–6 Conservación de la energía con fuerzas disipativas: Resolución de problemas 197
8–7 Energía potencial gravitacional y velocidad de escape 199
8–8 Potencia 201
*8–9 Diagramas de energía potencial; equilibrio estable y equilibrio inestable 204
RESUMEN 205 PREGUNTAS 205
PROBLEMAS 207 PROBLEMAS GENERALES 211

9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones 214

9–1 Cantidad de movimiento lineal y su relación con la fuerza 215
9–2 Conservación de la cantidad de movimiento 217
9–3 Colisiones e impulso 220
9–4 Conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal en colisiones 222
9–5 Colisiones elásticas en una dimensión 222
9–6 Colisiones inelásticas 225
9–7 Colisiones en dos o en tres dimensiones 227
9–8 Centro de masa (CM) 230
9–9 Centro de masa y movimiento traslacional 234
*9–10 Sistemas de masa variable: propulsión de cohetes 236
RESUMEN 239 PREGUNTAS 239
PROBLEMAS 240 PROBLEMAS GENERALES 245

10 Movimiento rotacional 248

10–1 Cantidades angulares 249
10–2 Naturaleza vectorial de las cantidades angulares 254
10–3 Aceleración angular constante 255
10–4 Torca 256
10–5 Dinámica rotacional: Torca e inercia rotacional 258
10–6 Resolución de problemas de dinámica rotacional 260
10–7 Determinación de momentos de inercia 263
10–8 Energía cinética rotacional 265
10–9 Movimiento rotacional más traslacional: Rodamiento 267
*10–10 ¿Por qué desacelera una esfera rodante? 273
RESUMEN 274 PREGUNTAS 275
PROBLEMAS 276 PROBLEMAS GENERALES 281

11 Cantidad de movimiento angular: Rotación general 284

11–1 Cantidad de movimiento angular: objetos que giran en torno a un eje fijo 285
11–2 Producto cruz vectorial: Torca como vector 289
11–3 Cantidad de movimiento angular de una partícula 291
11–4 Cantidad de movimiento angular y torca para un sistema de partículas: movimiento general 292
11–5 Cantidad de movimiento angular y torca para un cuerpo rígido 294
11–6 Conservación de la cantidad de movimiento angular 297
*11–7 El trompo y el giroscopio 299
*11–8 Marcos de referencia en rotación: fuerzas inerciales 300
*11–9 El efecto Coriolis 301
RESUMEN 302
PREGUNTAS 303
PROBLEMAS 303
PROBLEMAS GENERALES 308

12 Equilibrio estático: Elasticidad y fractura 311

12–1 Las condiciones para el equilibrio 312
12–2 Resolución de problemas de estática 313
12–3 Estabilidad y equilibrio 317
12–4 Elasticidad: Esfuerzo y deformación unitaria 318
12–5 Fractura 322
*12–6 Armaduras y puentes 324
*12–7 Arcos y domos 327
RESUMEN 329 PREGUNTAS 329
PROBLEMAS 330 PROBLEMAS GENERALES 334

13 Fluidos 339

13–1 Fases de la materia 340
13–2 Densidad y gravedad específica 340
13–3 Presión en fluidos 341
13–4 Presión atmosférica y presión manométrica 345
13–5 Principio de Pascal 346
13–6 Medición de la presión: Manómetros y barómetros 346
13–7 Flotación y el principio de Arquímedes 348
13–8 Fluidos en movimiento; tasa de flujo y la ecuación de continuidad 352
13–9 Ecuación de Bernoulli 354
13–10 Aplicaciones del principio de Bernoulli: Torricelli, aviones, pelotas de béisbol y ataque isquémico transitorio 356
*13–11 Viscosidad 358
*13–12 Flujo en tubos: Ecuación de Poiseuille, flujo sanguíneo 358
*13–13 Tensión superficial y capilaridad 359
*13–14 Las bombas y el corazón 361
RESUMEN 361 PREGUNTAS 362
PROBLEMAS 363 PROBLEMAS GENERALES 367

14 Oscilaciones 369

14–1 Oscilaciones de un resorte 370
14–2 Movimiento armónico simple 372
14–3 Energía en el oscilador armónico simple 377
14–4 Movimiento armónico simple relacionado con movimiento circular uniforme 379
14–5 El péndulo simple 379
*14–6 El péndulo físico y el péndulo de torsión 381
14–7 Movimiento armónico amortiguado 382
14–8 Oscilaciones forzadas: resonancia 385
RESUMEN 387 PREGUNTAS 388
PROBLEMAS 388 PROBLEMAS GENERALES 392

15 Movimiento ondulatorio 395

15–1 Características del movimiento ondulatorio 396
15–2 Tipos de ondas: Transversales y longitudinales 398
15–3 Energía transportada por las ondas 402
15–4 Representación matemática de una onda viajera 404
*15–5 La ecuación de onda 406
15–6 El principio de superposición 408
15–7 Reflexión y transmisión 409
15–8 Interferencia 410
15–9 Ondas estacionarias: Resonancia 412
*15–10 Refracción 415
*15–11 Difracción 416
RESUMEN 417 PREGUNTAS 417
PROBLEMAS 418 PROBLEMAS GENERALES 422

16 Sonido 424

16–1 Características del sonido 425
16–2 Representación matemática de ondas longitudinales 426
16–3 Intensidad del sonido: decibeles 427
16–4 Fuentes del sonido: Cuerdas vibrantes y columnas de aire 431
*16–5 Calidad del sonido y ruido: Superposición 436
16–6 Interferencia de las ondas de sonido: Pulsos 437
16–7 El efecto Doppler 439
*16–8 Ondas de choque y el estampido sónico 443
*16–9 Aplicaciones: Sonar, ultrasonido y formación de imágenes en medicina 444
RESUMEN 446 PREGUNTAS 447
PROBLEMAS 448 PROBLEMAS GENERALES 451

17 Temperatura, expansión térmica, y ley del gas ideal 454

17–1 Teoría atómica de la materia 455
17–2 Temperatura y termómetros 456
17–3 Equilibrio térmico y la ley cero de la termodinámica 459
17–4 Expansión térmica 459
*17–5 Tensiones térmicas 463
17–6 Las leyes de los gases y la temperatura absoluta 463
17–7 Ley del gas ideal 465
17–8 Resolución de problemas con la ley del gas ideal 466
17–9 Ley del gas ideal en términos de moléculas: número de Avogadro 468
*17–10 Escala de temperatura del gas ideal: un estándar 469
RESUMEN 470 PREGUNTAS 471
PROBLEMAS 471 PROBLEMAS GENERALES 474

18 Teoría cinética de los gases 476

18–1 La ley del gas ideal y la interpretación molecular de la temperatura 476
18–2 Distribución de la rapidez molecular 480
18–3 Gases reales y cambios de fase 482
18–4 Presión de vapor y humedad 484
*18–5 Ecuación de estado de van der Waals 486
*18–6 Recorrido libre medio 487
*18–7 Difusión 489
RESUMEN 490 PREGUNTAS 491
PROBLEMAS 492 PROBLEMAS GENERALES 494

19 Calor y la primera ley de la termodinámica 496

19–1 El calor como transferencia de energía 497
19–2 Energía interna 498
19–3 Calor específico 499
19–4 Calorimetría: Resolución de problemas 500
19–5 Calor latente 502
19–6 La primera ley de la termodinámica 505
19–7 Aplicaciones de la primera ley de la termodinámica: Cálculo de trabajo 507
19–8 Calores específicos molares para gases y la equipartición de la energía 511
19–9 Expansión adiabática de un gas 514
19–10 Transferencia de calor: Conducción, convección, radiación 515
RESUMEN 520 PREGUNTAS 521
PROBLEMAS 522 PROBLEMAS GENERALES 526

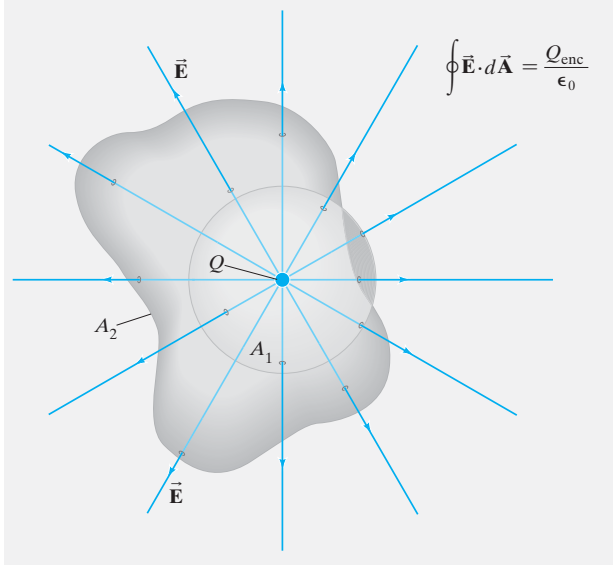
20 Segunda ley de la termodinámica 528

20–1 La segunda ley de la termodinámica: Introducción 529
20–2 Máquinas térmicas 530
20–3 Procesos reversibles e irreversibles; la máquina de Carnot 533
20–4 Refrigeradores, acondicionadores de aire y bombas térmicas 536
20–5 Entropía 539
20–6 Entropía y la segunda ley de la termodinámica 541
20–7 Del orden al desorden 544
20–8 Indisponibilidad de energía: Muerte térmica 545
*20–9 Interpretación estadística de la entropía y la segunda ley 546
*20–10 Temperatura termodinámica: Tercera ley de la termodinámica 548
*20–11 Contaminación térmica, calentamiento global y recursos energéticos 549
RESUMEN 551 PREGUNTAS 552
PROBLEMAS 552 PROBLEMAS GENERALES 556

Contenido del volumen 2

21 Carga eléctrica y campo eléctrico 559

21–1 Electrostática; carga eléctrica y su conservación 560
21–2 Carga eléctrica en el átomo 561
21–3 Aislantes y conductores 561
21–4 Carga eléctrica inducida; el electroscopio 562
21–5 La ley de Coulomb 563
21–6 El campo eléctrico 568
21–7 Cálculo del campo eléctrico para distribuciones continuas de carga 572
21–8 Líneas de campo 575
21–9 Campos eléctricos y conductores 577
21–10 Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico 578
21–11 Dipolos eléctricos 579
*21–12 Fuerzas eléctricas en biología molecular; ADN 581
*21–13 Las máquinas copiadoras y las computadoras electrónicas usan la electrostática 582
RESUMEN 584 PREGUNTAS 584
PROBLEMAS 585 PROBLEMAS GENERALES 589



22 Ley de Gauss 591

22–1 Flujo eléctrico 592
22–2 Ley de Gauss 593
22–3 Aplicaciones de la ley de Gauss 595
*22–4 Base experimental de las leyes de Gauss y de Coulomb 600
RESUMEN 601 PREGUNTAS 601
PROBLEMAS 601 PROBLEMAS GENERALES 605

23 Potencial eléctrico 607

23–1 Energía potencial eléctrica y diferencia de potencial 607
23–2 Relación entre potencial eléctrico y campo eléctrico 610
23–3 Potencial eléctrico debido a cargas puntuales 612
23–4 Potencial debido a cualquier distribución de carga 614
23–5 Superficies equipotenciales 616
23–6 Potencial de un dipolo eléctrico 617
23–7 Determinación de $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de V 617
23–8 Energía potencial electrostática; el electrón volt 619
*23–9 Tubo de rayos catódicos: Monitores de TV y de computadora, osciloscopios 620
RESUMEN 622 PREGUNTAS 622
PROBLEMAS 623 PROBLEMAS GENERALES 626

24 Capacitancia, dieléctricos y almacenamiento de energía eléctrica 628

24–1 Capacitores 628
24–2 Cálculo de la capacitancia 630
24–3 Capacitores en serie y en paralelo 633
24–4 Almacenamiento de energía eléctrica 636
24–5 Dieléctricos 638
*24–6 Descripción molecular de los dieléctricos 640
RESUMEN 643 PREGUNTAS 643
PROBLEMAS 644 PROBLEMAS GENERALES 648

25 Corrientes eléctricas y resistencia 651

25–1 La batería eléctrica 652
25–2 Corriente eléctrica 654
25–3 Ley de Ohm: Resistencia y resistores 655
25–4 Resistividad 658
25–5 Potencia eléctrica 660
25–6 Potencia en circuitos domésticos 662
25–7 Corriente alterna 664
25–8 Visión microscópica de la corriente eléctrica: Densidad de corriente y velocidad de deriva 666
*25–9 Superconductividad 668
*25–10 Conducción eléctrica en el sistema nervioso 669
RESUMEN 671 PREGUNTAS 671
PROBLEMAS 672 PROBLEMAS GENERALES 675

26 Circuitos de CD 677

26–1 FEM y voltaje terminal 678
26–2 Resistores en serie y en paralelo 679
26–3 Reglas de Kirchhoff 683
26–4 FEM en serie y en paralelo; cómo cargar una batería 686
26–5 Circuitos que contienen resistores y capacitores (circuitos RC) 687
26–6 Riesgos eléctricos 692
*26–7 Amperímetros y voltímetros 695
RESUMEN 698 PREGUNTAS 698
PROBLEMAS 699 PROBLEMAS GENERALES 704

27 Magnetismo 707

27–1 Imanes y campos magnéticos 707
27–2 Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos 710
27–3 Fuerza sobre una corriente eléctrica en un campo magnético; definición de $\vec{\mathbf{B}}$ 710
27–4 Fuerza sobre una carga eléctrica que se desplaza en un campo magnético 714
27–5 Torca sobre una espira de corriente; momento dipolar magnético 718
*27–6 Aplicaciones: Motores, altavoces y galvanómetros 720
27–7 Descubrimiento y propiedades del electrón 721
27–8 El efecto Hall 723
*27–9 Espectrómetro de masas 724
RESUMEN 725 PREGUNTAS 726
PROBLEMAS 727 PROBLEMAS GENERALES 730

28 Fuentes de campo magnético 733

28–1 Campo magnético debido a un alambre recto 734
28–2 Fuerza entre dos alambres paralelos 735
28–3 Definiciones de ampere y coulomb 736
28–4 Ley de Ampère 737
28–5 Campo magnético de un solenoide y un toroide 741
28–6 Ley de Biot-Savart 743
28–7 Materiales magnéticos: Ferromagnetismo 746
*28–8 Electroimanes y solenoides: Aplicaciones 747
*28–9 Campos magnéticos en materiales magnéticos; histéresis 748
*28–10 Paramagnetismo y diamagnetismo 749
RESUMEN 750 PREGUNTAS 751
PROBLEMAS 751 PROBLEMAS GENERALES 755

29 Inducción electromagnética y ley de Faraday 758

29–1 Fem inducida 759
29–2 Ley de inducción de Faraday; ley de Lenz 760
29–3 Fem inducida en un conductor en movimiento 765
29–4 Generadores eléctricos 766
*29–5 Fuerza contraelectromotriz y contra torca; corrientes parásitas 768
29–6 Transformadores y transmisión de potencia 770
29–7 Un flujo magnético variable produce un campo eléctrico 773
*29–8 Aplicaciones de la inducción: Sistemas de sonido, memoria de computadoras, sismógrafos, GFCI 775
RESUMEN 777 PREGUNTAS 777
PROBLEMAS 778 PROBLEMAS GENERALES 782

30 Inductancia, oscilaciones electromagnéticas y circuitos de CA 785

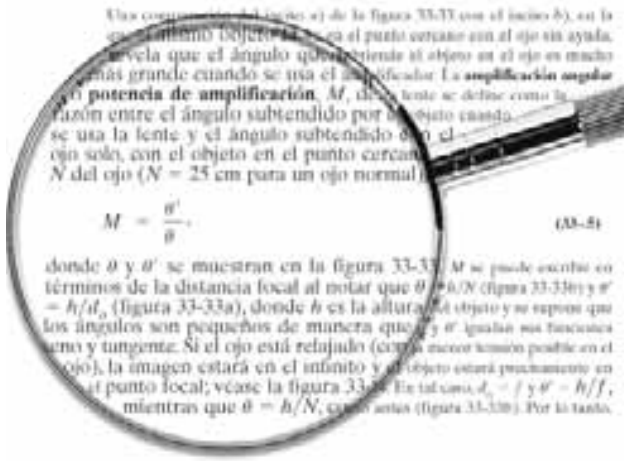
30–1 Inductancia mutua 786
30–2 Autoinductancia 788
30–3 Energía almacenada en un campo magnético 790
30–4 Circuitos *LR* 790
30–5 Circuitos *LC* y oscilaciones electromagnéticas 793
30–6 Oscilaciones *LC* con resistencia (circuito *LRC*) 795
30–7 Circuitos de ca con fuente de ca 796
30–8 Circuitos de ca *LRC* en serie 799
30–9 Resonancia en circuitos de ca 802
*30–10 Adaptación de impedancia 802
*30–11 CA trifásica 803
RESUMEN 804 PREGUNTAS 804
PROBLEMAS 805 PROBLEMAS GENERALES 809

31 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas 812

31–1 Los campos eléctricos variables producen campos magnéticos; ley de Ampère y corriente de desplazamiento 813
31–2 Ley de Gauss para magnetismo 816
31–3 Ecuaciones de Maxwell 817
31–4 Producción de ondas electromagnéticas 817
31–5 Ondas electromagnéticas y su rapidez, deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell 819
31–6 La luz como onda electromagnética y el espectro electromagnético 823
31–7 Medición de la rapidez de la luz 825
31–8 Energía en ondas EM; el vector de Poynting 826
31–9 Presión de radiación 828
31–10 Radio y televisión: comunicación inalámbrica 829
RESUMEN 832 PREGUNTAS 832
PROBLEMAS 833 PROBLEMAS GENERALES 835

32 Luz: Reflexión y refracción 837

32–1 El modelo de rayos de luz 838
32–2 Reflexión; formación de imágenes mediante espejos planos 838
32–3 Formación de imágenes mediante espejos esféricos 842
32–4 Índice de refracción 850
32–5 Refracción: Ley de Snell 850
32–6 Espectro visible y dispersión 852
32–7 Reflexión total interna; fibras ópticas 854
*32–8 Refracción en una superficie esférica 856
RESUMEN 858 PREGUNTAS 859
PROBLEMAS 860 PROBLEMAS GENERALES 864



33 Lentes e instrumentos ópticos 866

33–1 Lentes delgadas; trazado de rayos 867
33–2 Ecuación de lentes delgadas; amplificación 870
33–3 Combinaciones de lentes 874
*33–4 Ecuación del fabricante de lentes 876
33–5 Cámaras: De película y digitales 878
33–6 El ojo humano; lentes correctivas 882
33–7 Lente de aumento 885
33–8 Telescopios 887
*33–9 Microscopio compuesto 890
*33–10 Aberraciones de lentes y espejos 891
RESUMEN 892 PREGUNTAS 893
PROBLEMAS 894 PROBLEMAS GENERALES 897

34 La naturaleza ondulatoria de la luz; interferencia 900

34–1 Ondas frente a partículas; el principio de Huygens y la difracción 901
34–2 El principio de Huygens y la ley de refracción 902
34–3 Interferencia; experimento de Young de la doble rendija 903
*34–4 Intensidad en el patrón de interferencia de doble rendija 906
34–5 Interferencia en películas delgadas 909
*34–6 Interferómetro de Michelson 914
*34–7 Intensidad luminosa 915
RESUMEN 915 PREGUNTAS 916
PROBLEMAS 916 PROBLEMAS GENERALES 918

35 Difracción y polarización 921

35–1 Difracción mediante una sola rendija o disco 922
*35–2 Intensidad en el patrón de difracción de una sola rendija 924
*35–3 Difracción en el experimento de doble rendija 927
35–4 Límites de resolución; aberturas circulares 929
35–5 Resolución de telescopios y microscopios; el límite λ 931
*35–6 Resolución del ojo humano y amplificación útil 932
35–7 Rejilla de difracción 933
35–8 El espectrómetro y espectroscopia 935
*35–9 Anchos de pico y poder de resolución para una rejilla de difracción 937
35–10 Rayos X y difracción de rayos X 938
35–11 Polarización 940
*35–12 Pantallas de cristal líquido (LCD) 943
*35–13 Dispersión de la luz por la atmósfera 945
RESUMEN 945 PREGUNTAS 946
PROBLEMAS 946 PROBLEMAS GENERALES 949

36 La teoría especial de la relatividad 951

36–1 Relatividad galileana-newtoniana 952
*36–2 El experimento de Michelson y Morley 954
36–3 Postulados de la teoría especial de la relatividad 957
36–4 Simultaneidad 958
36–5 Dilatación del tiempo y la paradoja de los gemelos 960
36–6 Contracción de la longitud 964
36–7 Espacio-tiempo tetradimensional 967
36–8 Transformaciones galileanas y de Lorentz 968
36–9 Cantidad de movimiento relativista 971
36–10 La rapidez última 974
36–11 $E = mc^2$; masa y energía 974
*36–12 Corrimiento Doppler para la luz 978
36–13 El impacto de la relatividad especial 980
RESUMEN 981 PREGUNTAS 981
PROBLEMAS 982 PROBLEMAS GENERALES 985

37 Teoría cuántica temprana y modelos atómicos 987

37–1 Hipótesis cuántica de Planck; radiación de cuerpo negro 987
37–2 La teoría fotónica de la luz y el efecto fotoeléctrico 989
37–3 Energía, masa y cantidad de movimiento de un fotón 993
37–4 Efecto Compton 994
37–5 Interacciones de fotones; producción de pares 996
37–6 Dualidad onda-partícula; el principio de complementariedad 997
37–7 Naturaleza ondulatoria de la materia 997
*37–8 Microscopios electrónicos 1000
37–9 Primeros modelos atómicos 1000
37–10 La clave para la estructura del átomo: Los espectros atómicos 1001
37–11 El modelo de Bohr 1003
37-12 Aplicación de la hipótesis de De Broglie a los átomos 1009
RESUMEN 1010 PREGUNTAS 1011
PROBLEMAS 1012 PROBLEMAS GENERALES 1014

38 Mecánica cuántica 1017

38–1 Una nueva teoría: La mecánica cuántica 1018
38–2 La función de onda y su interpretación; el experimento de doble rendija 1018
38–3 El principio de incertidumbre de Heisenberg 1020
38–4 Implicaciones filosóficas; probabilidad frente a determinismo 1024
38–5 La ecuación de Schrödinger en una dimensión: Una forma independiente del tiempo 1025
*38–6 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo 1027
38–7 Partículas libres; ondas planas y paquetes de ondas 1028
38–8 Partícula en un pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita (una caja rígida) 1030
38–9 Pozo de potencial finito 1035
38–10 Tunelamiento a través de una barrera 1036
RESUMEN 1039 PREGUNTAS 1039
PROBLEMAS 1040 PROBLEMAS GENERALES 1042

39 Mecánica cuántica de los átomos 1044

39–1 Visión mecánico-cuántica de los átomos 1045
39–2 El átomo de hidrógeno: La ecuación de Schrödinger y los números cuánticos 1045
39–3 Funciones de onda del átomo de hidrógeno 1049
39–4 Átomos complejos; el principio de exclusión 1052
39–5 Tabla periódica de los elementos 1053
39–6 Espectros de rayos X y el número atómico 1054
*39–7 Momento dipolar magnético; cantidad de movimiento angular total 1057
39–8 Fluorescencia y fosforescencia 1060
39–9 Láseres 1061
*39–10 Holografía 1064
RESUMEN 1066 PREGUNTAS 1066
PROBLEMAS 1067 PROBLEMAS GENERALES 1069

40 Moléculas y sólidos 1071

40–1 Enlaces de moléculas 1071
40–2 Diagramas de energía potencial para moléculas 1074
40–3 Enlaces débiles (de van der Waals) 1077
40–4 Espectros moleculares 1080
40–5 Enlaces en sólidos 1085
40–6 Teoría de los electrones libres en los metales; energía de Fermi 1086
40–7 Teoría de bandas en sólidos 1090
40–8 Semiconductores y dopado 1093
40–9 Diodos semiconductores 1094
40–10 Transistores y circuitos integrados (chips) 1097
RESUMEN 1098 PREGUNTAS 1099
PROBLEMAS 1099 PROBLEMAS GENERALES 1102

41 Física nuclear y radiactividad 1104

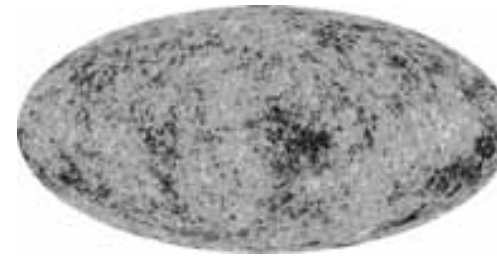
41–1 Estructura y propiedades del núcleo 1105
41–2 Energía de enlace y fuerzas nucleares 1108
41–3 Radiactividad 1110
41–4 Decaimiento alfa 1111
41–5 Decaimiento beta 1114
41–6 Decaimiento gamma 1116
41–7 Conservación del número de nucleones y otras leyes de conservación 1117
41–8 Vida media y tasa de decaimiento 1117
41–9 Series de decaimiento 1121
41–10 Fechamiento radiactivo 1122
41–11 Detección de radiación 1124
RESUMEN 1126 PREGUNTAS 1126
PROBLEMAS 1127 PROBLEMAS GENERALES 1129

42 Energía nuclear; efectos y usos de la radiación 1131

42–1 Reacciones nucleares y la transmutación de los elementos 1132
42–2 Sección eficaz 1135
42–3 Fisión nuclear; reactores nucleares 1136
42–4 Fusión nuclear 1141
42–5 Paso de la radiación a través de la materia; daño por radiación 1146
42–6 Medición de la radiación: Dosimetría 1147
*42–7 Terapia con radiación 1150
*42–8 Trazadores en investigación y medicina 1151
*42–9 Formación de imágenes mediante tomografía: Exploración TAC y tomografía por emisión 1153
*42–10 Resonancia magnética nuclear (RMN); formación de imágenes mediante resonancia magnética (IRM) 1156
RESUMEN 1159 PREGUNTAS 1159
PROBLEMAS 1160 PROBLEMAS GENERALES 1162

43 Partículas elementales 1164

43–1 Partículas de alta energía y aceleradores 1165
43–2 Comienzos de la física de partículas elementales: Intercambio de partículas 1171
43–3 Partículas y antipartículas 1174
43–4 Interacciones de partículas y leyes de conservación 1175
43–5 Neutrinos: Resultados recientes 1177
43–6 Clasificación de las partículas 1178
43–7 Estabilidad de las partículas y resonancias 1180
43–8 ¿Partículas extrañas? ¿Encanto? Hacia un nuevo modelo 1181
43–9 Quarks 1182
43–10 El "modelo estándar": Cromodinámica cuántica (QCD) y la teoría electrodébil 1184
43–11 Teorías de la gran unificación 1187
43-12 Cuerdas y supersimetría 1189
RESUMEN 1189 PREGUNTAS 1190
PROBLEMAS 1190 PROBLEMAS GENERALES 1191



44 Astrofísica y cosmología 1193

44–1 Estrellas y galaxias 1194
44–2 Evolución estelar: Nucleosíntesis, y nacimiento y muerte de las estrellas 1197
44–3 Mediciones de distancia 1203
44–4 Relatividad general: Gravedad y curvatura del espacio 1205
44–5 El Universo en expansión: Corrimiento al rojo y ley de Hubble 1209
44–6 La Gran Explosión (Big Bang) y la radiación cósmica de fondo 1213
44–7 El modelo cosmológico estándar: Historia temprana del Universo 1216
44-8 Inflación: Explicación de la naturaleza plana, la uniformidad y la estructura 1219
44-9 Materia oscura y energía oscura 1221
44-10 Estructura a gran escala del Universo 1224
44-11 Finalmente . . . 1224
RESUMEN 1225 PREGUNTAS 1226
PROBLEMAS 1226 PROBLEMAS GENERALES 1227

APÉNDICES

A FÓRMULAS MATEMÁTICAS A–1
B DERIVADAS E INTEGRALES A–6
C MÁS ACERCA DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL A–8
D FUERZA GRAVITACIONAL DEBIDA A UNA DISTRIBUCIÓN ESFÉRICA DE MASA A–9
E FORMA DIFERENCIAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL A–12
F ISÓTOPOS SELECCIONADOS A–14

RESPUESTAS A PROBLEMAS CON NÚMERO IMPAR A–18
ÍNDICE A–33
CRÉDITOS DE FOTOGRAFÍA A–55

APLICACIONES (SELECCIONADAS)

Capítulo 1
Los picos de 8000 m 8
Estimación del volumen de un lago 10
Altura por triangulación 11
Radio de la Tierra 11
Número de latido en el curso de una vida 12
Contaminación por partículas (Pr30) 15
Posición global de los satélites (Pr38) 16
Capacidad pulmonar (Pr65) 17

Capítulo 2
Diseño de la pista de un aeropuerto 29
Bolsas de aire de un automóvil 31
Distancias de frenado 32
Corrección de errores en CD (Pr10) 44
Tiempo de reproducción en CD (Pr13) 45
Golf cuesta arriba y cuesta abajo (Pr79) 48
Tránsito rápido (Pr83) 49

Capítulo 3
Patada de fútbol americano 66, 69
Deportes de pelota (Problemas) 77, 81, 82
Deportes extremos (Pr41) 77

Capítulo 4
Aceleración de un cohete 90
¿Qué fuerza acelera a un carro? 90
Como caminamos 90
Elevador y contrapesos 99
Ventaja mecánica de una polea 100
Sostén contra osos (Q24) 104
Elevadores de alta velocidad (Pr19) 105
Alpinismo (Pr31, 82, 83) 106, 110
Diseño de una ciudad, automóviles sobre pendientes (Pr71) 109
Ciclistas (Pr72, 73) 109
Asteroide del "Juicio final" (Pr84) 110

Capítulo 5
¿Jalar o empujar un trineo? 116
Centrifugación 122
No derrapar en una curva 126–7
Caminos peraltados 127
Gravedad simulada (Q18, Pr48) 131, 134
"Juego del Rotor" (Pr82) 136

Capítulo 6
Exploración de petróleo y minerales 144, 420
Satélites artificiales terrestres 146
Satélites geosincrónicos 147
Ingravidez 148
Caída libre en atletismo 149
Descubrimiento de planetas, planetas extrasolares 152
Hoyos negros 156
Asteroides (Pr44, 78) 159, 162
Sistema de Posicionamiento Global Navstar GPS (Pr58) 160
Hoyo negro en el centro de la Galaxia (Pr61, 64) 160, 161
Mareas (Pr75) 162

Capítulo 7
Distancia de frenado de un automóvil 174
Palanca (Pr6) 177
Hombre Araña (Pr54) 179
Ciclismo en Colinas, engranes (Pr85) 181
Seguridad de niños en un automóvil (Pr87) 181
Cuerda de un escalador de rocas (Pr90) 182

Capítulo 8
Descenso en skies cuesta abajo 183
"Montaña Rusa" 191, 198
Salto con garrocha 192–3
Pistola de dardos de juguete 193
Velocidad de escape de la Tierra y de la Luna 201
Potencia para subir una escalera 202
Requerimiento de potencia de un automóvil 202–3
"Caminadora" cardiaca (Pr104) 213

Capítulo 9
Servicio de tennis 216
Propulsión de cohetes 219, 236–8
Retroceso de un rifle 220
Golpe de karate 221
Billar/Boliche (Bolos) 223, 228
Colisiones nucleares 225, 228
Péndulo balístico 226
Banda transportadora 237
Tirón gravitacional (Pr105) 246
Respuesta a un automóvil a un impacto (Pr109) 247
Asteroides, planetas (Pr110, 112, 113) 247

Capítulo 10
Disco duro y velocidad de bits 253
Llave de acero para llanta 256
Volante de energía 266, 281
Yo-Yo 271
Fuerzas de frenado de automóviles 272-3
Calibración de odómetro de bicicletas Pr1) 275
Caminante en la cuerda floja (Pr11) 275
Músculo tríceps y tirar Pr38, 39) 278
Velocidad de un CD (Pr84) 281
Engranajes de bicicletas (Pr89) 281

Capítulo 11
Patinadores en rotación, buzos 284, 286, 309
Colapso de una estrella de neutrones 287
Balanceo de las ruedas de un automóvil 296
Trompo y giroscopio 299-300
Efecto Coriolis 301-2
Huracanes 302
Volcadura posible de un SUV (Pr67) 308
Salto con giro triple (Pr79) 309
Punto óptimo de un bate (Pr82) 310

Capítulo 12
Colapso trágico 311, 323
Ventaja mecánica de una palanca 313
Viga voladiza (Cantilever) 315
Fuerza del músculo bíceps 315
Equilibrio humano con cargas 318
Armaduras y puentes 324-6, 335
Arquitectura: arcos y cúpulas 327-8
Fuerzas de vértebras (Pr87) 337

Capítulo 13
Elevando agua 345, 348
Ascensor hidráulico, frenos 346
Manómetros 346-7
Hidrómetro 351
Ascenso con un globo de helio 352, 368
Flujo sanguíneo 353, 357, 361
Alas de una aeronave, sustentación 356
Velero contra el viento 357
Curva de béisbol 357
Sangre al cerebro, TIA 357
Flujo sanguíneo y las enfermedades del corazón 359
Tensión superficial, capilaridad 359-60
Caminando sobre el agua 360
Bombas y el corazón 361
Número de Reynolds (Pr69) 366

Capítulo 14
Amortiguadores de choques en automóviles 383
Resonancia dañina 386

Capítulo 15
Ecolocalización por parte de los animales 400
Ondas sísmicas 401, 403, 416

Capítulo 16
Distancias a partir de los rayos y los truenos 425
Cámara auto foco 426
Amplia rango de audición humana 427-8, 431
Respuesta de un altavoz 428
Instrumentos de cuerda 432-3
Instrumentos de viento 433-6
Afinación con pulsos 439
Medidor Doppler del flujo sanguíneo 442, 453
Sonar: estampido sónico 444
Imágenes médicas ultrasónicas 445-6
Sensor de movimiento (Pr5) 448

Capítulo 17
Globo aerostático 454
Juntas de dilatación, carreteras 456, 460, 463
Derrame del tanque de gasolina 462
La vida bajo el hielo 462
Presión de neumáticos en frío y en calor 468
Moléculas en un soplo 469
Termostato (Pr10) 471
Buceo/*snorkeling* (Pr38, 47, 82, 85) 473, 475

Capítulo 18
Reacciones químicas, dependencia con la temperatura 481
Superfluidez 483
La evaporación enfría 484, 505
Humedad, clima 485-6
Cromatografía 490
Olla a presión (Pr35) 493

Capítulo 19
Quemando las calorías extra 498
Pisos fríos 516
Pérdida de calor a través de las ventanas 516
Cómo aísla la ropa 516-7
R-valores en el aislamiento térmico 517
Calentamiento de una casa por convección 517
Pérdida de calor por radiación en humanos 518
Sala confortable y metabolismo 519
Radiación solar 519
Termografía médica 519
Astronomía - tamaño de una estrella 520
botella térmica (P30) 521
El clima, parcelas de aire, zona de cambio adiabático (Pr56) 525

Capítulo 20
Máquina de vapor 530
Motor de combustión interna 531, 535-6
Eficiencia de un automóvil 532
Refrigeradores, acondicionadores de aire 537-8
Bomba de calor 538
Evolución biológica, el desarrollo 545
Contaminación térmica, calentamiento global 549-51
Recursos energéticos 550
Motor diesel (Pr7) 553

Capítulo 21
Electrostática 560, 589 (Pr78)
Fotocopiadoras 569, 582-3
Escudo eléctrico, seguridad 577
Estructura del ADN y duplicación 581-2
Células: fuerzas eléctrica y teoría cinética 581-2, 617

Capítulo 23
Voltaje de ruptura 612
Pararrayos, descarga de corona 612
CRT, osciloscopios, Monitores de TV 620-1, 723
Fotoceldas (Pr75) 626
Contador Geiger(Pr83) 627
Van de Graaff (Pr84) 607, 627

Capítulo 24
Uso de capacitares 628, 631
Capacitancia muy alta 631
Teclas de computadora 631
Cámara de flash 636
Desfibrilador de corazón 638
DRAM (Pr10, 57) 644, 647
Limpiador de aire electrostático (Pr20) 645
Circuitos CMOS (Pr53) 647

Capítulo 25
Bombilla eléctrica 651, 653, 660
Construcción de una batería 653
Alambres de altavoz 659
Termómetro de resistencia 660
Elemento de calentamiento, bombilla de filamento 660
Relámpagos 662
Circuitos doméstico, cortocircuito 662-3
Fusibles, interruptores de circuito 662-3, 747, 776
Peligro en extensiones eléctricas 663
Sistema nervioso, conducción 669-70

Capítulo 26
Carga de la batería de un automóvil, encendido 687
Aplicaciones de circuitos *RC*, luces intermitentes, limpiadores 691
Marcapasos cardiaco 692, 787
Riesgos eléctricos 692-4
Conexiones a tierra 693-4
Fibrilación ventricular 692
Medidores, analógico y digital 695-7
Potenciómetros y puentes (Pr85, 71) 704, 705

Capítulo 27
Brújula y declinación magnética 709
Auroras Boreales 717
Motores, altavoces, galvanómetros 720-1
Espectrómetro de masas 724-5
Bombeo electromagnético (Pr14) 726
Ciclotrón (Pr66) 731
Conducción de haces (Pr67) 731

Capítulo 28
Cable coaxial 740, 789
Interruptores de circuito magnético: arrancadores de automóviles, timbre 747
Relevador (Pr16) 751
Trampa atómica (Pr73) 757

Capítulo 29
Estufa de inducción 762
Medidor EM de flujo sanguíneo 765
Generadores de una central eléctrica 766-7
Alternadores de automóviles 768
Sobrecarga del motor 769
Detector de metales de un aeropuerto 770
Amortiguamiento de corrientes parásitas 770
Transformadores y usos, potencia 770-3
Encendido de automóviles 772
Micrófono 775
Lectura/escritura en disco y cinta 775
Codificación digital 775
Lectores de tarjetas de crédito 776
Interruptor de circuito de falla a tierra (GFCI) 776
Betatrón (Pr55) 782
Bobina de exploración (Pr68) 783

Capítulo 30
Bujías 785
Protector de sobrecargas 792
Osciladores LC, resonancia 794-802
Capacitores como filtros 799
Altavoz con selector de frecuencias 799
Igualación de impedancias 802-3
CA trifásica 803
Valor Q (Pr86, 87) 810

Capítulo 31
Antenas 824, 831
Retraso en llamadas telefónicas 825
Vela solar 829
Pinzas ópticas 829
Transmisión inalámbrica: AM/FM, TV, sintonización, teléfonos celulares, control remoto 829-32

Capítulo 32
Altura de un espejo 840-1
Espejos esféricos y retrovisores 842, 849
Ilusiones ópticas 851, 903
Profundidad aparente en el agua 852
Arcoíris 853
Colores bajo el agua 854
Prismas de binoculares 855
Fibra óptica en telecomunicaciones 855-6, 865
Endoscopios médicos 856
Señales en carreteras (Pr86) 865

Capítulo 33
Dónde se puede *ver* la imagen producida por una lente 869
Cámaras, digitales y de película 878
Ajustes de cámara 879-80
Pixeles de resolución 881
Ojo humano 882-5, 892
Lentes correctivas 883-5
Lentes de contacto 885
Resolución bajo el agua 885
Telescopios 887-9, 931, 933
Microscopios 890-1, 931, 933

Capítulo 34
Burbujas, colores reflejados 900, 912-13
Espejismos 903
Colores en películas de jabón delgadas, detalles 912-13
Recubrimiento de lentes 913-14
Recubrimiento múltiple (Pr52) 919

Capítulo 35
Resolución de lentes y espejos 929-30
Telecopio Espacial Hubble 930
Resolución del ojo, amplificación útil 930, 932-3
Radiotelescopios 931
Resolución de un telescopio, la regla λ 931
Espectroscopia 935-6
Difracción de rayos X en biología 939
Gafas de sol polarizadas 942
LCD–pantallas de cristal líquido 943-4
Color del cielo 945

Capítulo 36
Viaje espacial 963
Sistema de posicionamiento global (GPS) 964

Capítulo 37
Fotoceldas 990
Fotodiodos 992
Fotosíntesis 993
Microscopios electrónicos 987

Capítulo 38
Diodo túnel 1038
Microscopio electrónico de barrido y tunelamiento 1038

Capítulo 39
Análisis de fluorescencia 1060
Lámparas fluorescentes 1060
Cirugía láser 1064
Operación de DVD y CD con láser 1063, 1064
Códigos de barras 1063
Holografía 1064

Capítulo 40
Energía de las células–ATP, energía de activación 1076
Enlaces débiles en las células, ADN 1077, 1078
Síntesis de proteínas 1079
Diodos semiconductores, transistores 1094
Circuitos rectificadores 1096
Pantallas LED, fotodiodos 1096
Circuitos integrados 1097

Capítulo 41
Detectores de humo 1114
Fechamiento con carbono-14 1122
Datación arqueológica y geológica 1123
Rocas más antiguas de la Tierra y vida primitiva 1123, 1124

Capítulo 42
Reactores nucleares y plantas de energía 1132
Proyecto Manhattan 1141
Contaminación por gas radón 1150
Fusión estelar 1142
Daños biológicos por radiación 1146, 1147
Dosimetría de la radiación 1147
Trazadores en medicina y biología 1151
Exploración TAC 1153
Reconstrucción de imágenes de tomografía 1153, 1154
Imágenes en medicina: TEP y SPECT 1156
Imágenes (IRM) 1156

Capítulo 44
Evolución estelar 1200
Supernovas 1201
Distancias estelares 1203, 1204
Agujeros negros 1202, 1203
Evolución del Universo 1209

Prefacio

Desde el principio me sentí motivado para escribir un libro de texto diferente de los demás, los cuales, en general, presentan la física como una secuencia de hechos, como un catálogo de artículos: "Aquí están los hechos y es mejor que los aprendan". En vez de utilizar este enfoque en el que los temas empiezan de manera formal y dogmática, traté de iniciar cada tema con observaciones y experiencias concretas que los estudiantes puedan relacionar: primero describo situaciones específicas para después referirme a las grandes generalizaciones y los aspectos formales de un tema. La intención fue mostrar *por qué* creemos lo que creemos. Este enfoque refleja cómo se practica la ciencia en realidad.

¿Por qué una cuarta edición?

Dos tendencias recientes en los libros de texto son perturbadoras: **1.** sus ciclos de revisión se han acortado, pues se revisan cada 3 o 4 años; **2.** los libros han aumentado su volumen, algunos rebasan las 1500 páginas. No veo cómo alguna de estas tendencias sea benéfica para los estudiantes. Mi respuesta ante ello: **1.** Han pasado 8 años desde la edición anterior de este texto. **2.** El presente libro utiliza la investigación educativa en física; evita el detalle que un profesor tal vez quiera expresar en clase, pero que en un libro resultaría innecesario para el lector. Este libro todavía sigue siendo uno de los más breves de física.

Esta nueva edición presenta algunas nuevas herramientas pedagógicas importantes. Contiene nueva física (como cosmología) y muchas aplicaciones atractivas novedosas (que se mencionan en la página anterior). Las páginas y los cambios de página se diseñaron cuidadosamente para hacer la física más fácil de aprender: no hay que dar vuelta a una página a la mitad de una deducción o un ejemplo. Se realizaron grandes esfuerzos para hacer el libro atractivo, de manera que los estudiantes *disfruten leerlo*.

A continuación se mencionan algunas de las nuevas características.

Qué hay de nuevo

Preguntas de inicio de capítulo: Cada capítulo comienza con una pregunta de opción múltiple, cuyas respuestas incluyen interpretaciones erróneas comunes. Se pide a los estudiantes responder la pregunta antes de comenzar el capítulo, para interesarlos en el material y eliminar algunas nociones preconcebidas. Las preguntas reaparecen más adelante en el capítulo, por lo general como ejercicios, una vez que se explicó el tema. Las preguntas de inicio de capítulo también muestran a los estudiantes el poder y la utilidad de la física.

Párrafo de PLANTEAMIENTO en ejemplos numéricos resueltos: Un breve párrafo introductorio antes de la solución bosqueja un enfoque y los pasos que se pueden seguir. Las NOTAS breves después de la solución tienen la función de comentar esta última, sugerir un enfoque alternativo o mencionar alguna aplicación.

Ejemplos paso a paso: Después de muchas estrategias para resolución de problemas, el ejemplo que aparece a continuación se realiza siguiendo uno a uno los pasos recién descritos.

Los ***ejercicios*** dentro del texto, después de un ejemplo o una deducción, dan a los estudiantes la oportunidad de constatar si comprendieron lo suficiente como para responder una pregunta o hacer un cálculo sencillo. Muchos ejercicios son de opción múltiple.

Mayor claridad: Ningún tema o párrafo en el libro se pasó por alto en la búsqueda de mejorar la claridad y la concisión de la presentación. Se eliminaron frases y oraciones que pudieran velar el argumento principal: se intentó apegarse a lo esencial primero y hacer precisiones después.

Notación vectorial, flechas: Los símbolos para cantidades vectoriales en el texto y las figuras tienen una pequeña flecha encima, así que son similares a la forma que se utilizan cuando se escriben a mano. $\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{B}}$

Revolución cosmológica: Gracias a la generosa ayuda de grandes expertos en el campo, los lectores tienen información reciente.

Distribución de la página: Más que en la edición anterior, se prestó gran atención al formato de cada página. Los ejemplos y todas las deducciones y argumentos importantes aparecen en páginas que se encuentran una al lado de la otra. Los estudiantes no tienen que ir hacia atrás y adelante para consultar los antecedentes o la continuación de un asunto. A todo lo largo del texto, los lectores ven en dos páginas, una al lado de la otra, un importante pasaje de física.

Nuevas aplicaciones: LCD, cámaras digitales y sensores electrónicos (CCD, CMOS), riesgos eléctricos, GFCI, fotocopiadoras, impresoras de tinta e impresoras láser, detectores de metales, visión submarina, bolas curvas, alas de avión, ADN, la forma como en realidad *se ven* las imágenes son sólo algunas de las nuevas aplicaciones que se presentan. (Dé vuelta hacia atrás a la hoja para ver una lista más completa).

Ejemplos modificados: Se explican más pasos matemáticos y se incluyen muchos ejemplos nuevos. Aproximadamente el 10% son ejemplos de estimación.

Este libro es más breve que otros libros completos del mismo nivel. Las explicaciones más breves son más fáciles de comprender y es más probable que se lean.

Contenido y cambios organizativos

- **Movimiento rotacional**: Los capítulos 10 y 11 se reorganizaron. Ahora toda la cantidad de movimiento angular se explica en el capítulo 11.
- La **primera ley de la termodinámica**, en el capítulo 19, se reescribió y se amplió. La forma completa está dada como $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = Q - W$, donde la energía interna es E_{int} y U es la energía potencial; la forma $Q - W$ se conserva, de manera que $dW = P\,dV$.
- La cinemática y la dinámica del movimiento circular ahora se estudian juntas en el capítulo 5.
- El trabajo y la energía, capítulos 7 y 8, se revisaron cuidadosamente.
- El trabajo realizado por fricción se analiza ahora en el marco de la conservación de energía (términos energéticos debidos a fricción).
- Los capítulos acerca de inductancia y circuitos de CA se combinaron en uno solo, el capítulo 30.
- El análisis gráfico y la integración numérica constituyen una nueva sección 2-9 opcional. Los problemas que requieren el uso de una computadora o una calculadora graficadora se encuentran al final de la mayoría de los capítulos.
- La longitud de un objeto es una ℓ de tipo manuscrito en vez de la l normal, que podría confundirse con 1 o I (momento de inercia, corriente), como en $F = I\ell B$. La L mayúscula se reserva para cantidad de movimiento angular, calor latente, inductancia y dimensiones de longitud [L].
- La ley de Newton de la gravitación permanece en el capítulo 6. ¿Por qué? Porque la ley $1/r^2$ es muy importante como para relegarla a un capítulo posterior que tal vez no pueda cubrirse en el semestre; más aún, es una de las fuerzas básicas de la naturaleza. En el capítulo 8 se puede tratar la energía potencial gravitacional real y tener un ejemplo fino del uso de $U = -\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$.
- Los nuevos apéndices incluyen la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell y más acerca de análisis dimensional.
- Las estrategias para resolución de problemas se encuentran en las páginas 571, 685, 716, 740, 763, 849, 871 y 913 del segundo volumen.

Organización

Algunos profesores encontrarán que este libro contiene más material del que pueden cubrir en un curso. El texto ofrece gran flexibilidad. Las secciones marcadas con asterisco (*) se consideran opcionales. Éstas contienen material de física ligeramente más avanzada, o material que, por lo general, no se cubre en los cursos y/o en aplicaciones específicas; no incluyen material necesario en capítulos siguientes (excepto tal vez en secciones opcionales posteriores). Para un breve curso, todo el material opcional se podría omitir, así como grandes partes de los capítulos 1, 13, 16, 26, 30 y 35, partes seleccionadas de los capítulos 9, 12, 19, 20, 33 y los capítulos de física moderna. Los temas no cubiertos en clase constituyen un valioso recurso para el posterior estudio de los alumnos. De hecho, este texto podría funcionar como una referencia útil durante varios años, en virtud de su amplio rango de cobertura.

Agradecimientos

Muchos profesores de física dieron información o retroalimentación directa acerca de cada aspecto de este libro. Se mencionan a continuación, y con cada uno tengo una deuda de gratitud.

Mario Affatigato, Coe College
Lorraine Allen, United States Coast Guard Academy
Zaven Altounian, McGill University
Bruce Barnett, Johns Hopkins University
Michael Barnett, Lawrence Berkeley Lab
Anand Batra, Howard University
Cornelius Bennhold, George Washington University
Bruce Birkett, University of California Berkeley
Dr. Robert Boivin, Auburn University
Subir Bose, University of Central Florida
David Branning, Trinity College
Meade Brooks, Collin County Community College
Bruce Bunker, University of Notre Dame
Grant Bunker, Illinois Institute of Technology
Wayne Carr, Stevens Institute of Technology
Charles Chiu, University of Texas Austin
Robert Coakley, University of Southern Maine
David Curott, University of North Alabama
Biman Das, SUNY Potsdam
Bob Davis, Taylor University
Kaushik De, University of Texas Arlington
Michael Dennin, University of California Irvine
Kathy Dimiduk, University of New Mexico
John DiNardo, Drexel University
Scott Dudley, United States Air Force Academy
John Essick, Reed College
Cassandra Fesen, Dartmouth College
Alex Filippenko, University of California Berkeley
Richard Firestone, Lawrence Berkeley Lab
Mike Fortner, Northern Illinois University
Tom Furtak, Colorado School of Mines
Edward Gibson, California State University Sacramento
John Hardy, Texas A&M
J. Erik Hendrickson, University of Wisconsin Eau Claire
Laurent Hodges, Iowa State University
David Hogg, New York University
Mark Hollabaugh, Normandale Community College
Andy Hollerman, University of Louisiana at Lafayette
Bob Jacobsen, University of California Berkeley
Teruki Kamon, Texas A&M
Daryao Khatri, University of the District of Columbia
Jay Kunze, Idaho State University
Jim LaBelle, Dartmouth College
M.A.K. Lodhi, Texas Tech
Bruce Mason, University of Oklahoma
Dan Mazilu, Virginia Tech
Linda McDonald, North Park College
Bill McNairy, Duke University
Raj Mohanty, Boston University
Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica Florence
Lisa K. Morris, Washington State University
Blaine Norum, University of Virginia
Alexandria Oakes, Eastern Michigan University
Michael Ottinger, Missouri Western State University
Lyman Page, Princeton and WMAP
Bruce Partridge, Haverford College
R. Daryl Pedigo, University of Washington
Robert Pelcovitz, Brown University
Vahe Peroomian, UCLA
James Rabchuk, Western Illinois University
Michele Rallis, Ohio State University
Paul Richards, University of California Berkeley
Peter Riley, University of Texas Austin
Larry Rowan, University of North Carolina Chapel Hill
Cindy Schwarz, Vassar College
Peter Sheldon, Randolph-Macon Woman's College
Natalia A. Sidorovskaia, University of Louisiana at Lafayette
George Smoot, University of California Berkeley
Mark Sprague, East Carolina University
Michael Strauss, University of Oklahoma
Laszlo Takac, University of Maryland Baltimore Co.
Franklin D. Trumpy, Des Moines Area Community College
Ray Turner, Clemson University
Som Tyagi, Drexel University
John Vasut, Baylor University
Robert Webb, Texas A&M
Robert Weidman, Michigan Technological University
Edward A. Whittaker, Stevens Institute of Technology
John Wolbeck, Orange County Community College
Stanley George Wojcicki, Stanford University
Edward Wright, UCLA
Todd Young, Wayne State College
William Younger, College of the Albemarle
Hsiao-Ling Zhou, Georgia State University

Debo agradecer especialmente el profesor Bob Davis por su valiosa información y, en especial, por trabajar todos los problemas y elaborar el Manual de soluciones para todos los problemas, así como por dar las respuestas a los problemas con número impar al final de este libro. Muchas gracias también a J. Erik Hendrickson, quien colaboró con Bob Davis en las soluciones, y al equipo que ambos dirigieron (profesores Anand Batra, Meade Brooks, David Currott, Blaine Norum, Michael Ottinger, Larry Rowan, Ray Turner, John Vasut y William Younger). Estoy agradecido también con los profesores John Essick, Bruce Barnett, Robert Coakley, Biman Das, Michael Dennin, Kathy Dimiduk, John DiNardo, Scott Dudley, David Hogg, Cindy Schwarz, Ray Turner y Som Tyagi, quienes inspiraron muchos de los ejemplos, preguntas, problemas y aclaraciones significativos.

Cruciales para desenraizar errores, así como para brindar excelentes sugerencias, fueron los profesores Kathy Dimiduk, Ray Turner y Lorraine Allen. Muchas gracias a ellos y al profesor Giuseppe Molesini por sus sugerencias y sus excepcionales fotografías para el tema de óptica.

Para los capítulos 43 y 44, acerca de física de partículas y de cosmología y astrofísica, fui afortunado al recibir generosa información de algunos de los grandes expertos en el campo, con quienes tengo una deuda de gratitud: George Smoot, Paul Richards, Alex Filippenko, James Siegrist y William Holzapfel (UC Berkeley), Lyman Page (Princeton y WMAP), Edward Wright (UCLA y WMAP) y Michael Strauss (Universidad de Oklahoma).

Quiero agradecer especialmente a los profesores Howard Shugart, Chair Frances Hellman y a muchos otros en el Departamento de Física en la Universidad de California, Berkeley, por su enriquecedoras discusiones y por su hospitalidad. Gracias también al profesor Tito Arecchi y a otros más en el Istituto Nazionale di Ottica, en Florencia, Italia.

Finalmente, estoy agradecido con muchas personas en Prentice Hall, con quienes trabajé en este proyecto, en especial con Paul Corey, Karen Karlin, Christian Botting, John Christiana y Sean Hogan.

La responsabilidad final de todos los errores es mía. Doy la bienvenida a comentarios, correcciones y sugerencias tan pronto como sea posible para beneficiar a los estudiantes con la siguiente reimpresión.

D.C.G.

correo electrónico: Paul.Corey@Pearson.com

Dirección postal: Paul Corey
One Lake Street
Upper Saddle River, NJ 07458

Acerca del autor

Douglas C. Giancoli obtuvo su licenciatura en física (summa cum laude) en la Universidad de California, Berkeley, su maestría en física en el Massachusetts Institute of Technology (MIT) y su doctorado en física de partículas elementales en la Universidad de California, Berkeley. Luego pasó dos años en una estancia posdoctoral en el laboratorio de virus de la UC Berkeley, donde desarrolló estudios en biología molecular y biofísica. Sus profesores incluyen a los ganadores del premio Nobel Emilio Segrè y Donald Glaser.

Ha impartido una amplia variedad de cursos tradicionales de licenciatura, así como algunos innovadores, y ha continuado actualizando sus libros meticulosamente, en busca de formas para facilitar una mayor comprensión de la física a los estudiantes.

El pasatiempo favorito de Doug es la actividad al aire libre, especialmente el montañismo (aquí aparece en una de las cimas de los Dolomitas, Italia). Dice que escalar montañas es como aprender física: es una actividad que requiere esfuerzo, pero las recompensas son grandes.

Complementos en línea (lista parcial)

MasteringPhysics™ (www.masteringphysics.com) es un elaborado sistema de tutoría y tareas en línea desarrollado especialmente para cursos que usan física basada en cálculo. Originalmente desarrollado por David Pritchard y sus colaboradores en el MIT, MasteringPhysics ofrece a los **estudiantes** tutoría individualizada en línea al corregir sus respuestas equivocadas y dar sugerencias para resolver problemas de múltiples pasos cuando se les presentan dificultades. Les da valoración inmediata y actualizada de sus avances, y les indica dónde necesitan practicar más. MasteringPhysics ofrece a los **profesores** una forma rápida y efectiva de asignar tareas en línea que comprenden una amplia variedad de tipos de problemas. Los poderosos diagnósticos posteriores a la asignación permiten a los profesores valorar el progreso tanto de su clase en conjunto como de los estudiantes a nivel individual, al tiempo que les ayudan a identificar rápidamente áreas de dificultad.

WebAssign (www.webassign.com)

CAPA y LON-CAPA (www.lon-capa.org/)

Complementos para el estudiante (lista parcial)

Guía de estudio para el estudiante y Manual de soluciones seleccionadas (Volumen I: 0-13-227324-1, Volúmenes II y III: 0-13-227325-X) por Frank Wolfs

Student Pocket Companion (0-13-227326-8) por Biman Das

Tutoriales de introducción a la física (0-13-097069-7) por Lillian C. McDermott, Peter S. Schaffer y el Grupo de Educación en Física de la Universidad de Washington

Physlet® Physics (0-13-101969-4) por Wolfgang Christian y Mario Belloni

Ejercicios de clasificación en física, edición estudiantil (0-13- 144851-X) por Thomas L. O'Kuma, David P. Maloney y Curtis J. Hieggelke

E&M TIPERs: Tareas de electricidad y magnetismo inspiradas por Physics Education Research (0-13-185499-2) por Curtis J. Hieggelke, David P. Maloney, Stephen E. Kanim y Thomas L. O'Kuma

Matemáticas para física con cálculo (0-13-191336-0) por Biman Das

A los estudiantes

CÓMO ESTUDIAR

1. Lea el capítulo. Aprenda el vocabulario y la notación. Intente responder las preguntas y los ejercicios como se presenten.
2. Asista a todas las clases. Escuche. Tome notas, especialmente acerca de aspectos que no recuerde haber visto en el libro. Pregunte (todos quieren hacerlo, pero quizás usted tenga el valor para ello). Aprovechará mejor la clase si antes lee el capítulo.
3. Lea el capítulo de nuevo, ponga atención a los detalles. Siga las deducciones y resuelva los ejemplos. Asimile su lógica. Responda los ejercicios y tantas preguntas del final del capítulo como sea posible.
4. Resuelva de 10 a 20 (o más) problemas de final del capítulo, en especial los asignados. Al resolver problemas descubrirá qué aprendió y qué no aprendió. Discútalos con otros estudiantes. La resolución de problemas es una de las mayores herramientas de aprendizaje. No se limite a buscar una fórmula, no funcionará.

NOTAS ACERCA DEL FORMATO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Las secciones marcadas con asterisco (*) se consideran **opcionales**. Se pueden omitir sin interrumpir el flujo principal de los temas. Ningún material posterior depende de ellas, excepto quizá las posteriores secciones con asterisco. Sin embargo, resulta entretenido leerlas.
2. Se usan las **convenciones** acostumbradas: los símbolos para cantidades (como m para masa) van en cursivas, mientras que las unidades (como m para metro) no aparecen en cursivas. Los símbolos para vectores se muestran en negritas con una pequeña flecha sobre ellos: $\vec{\mathbf{F}}$.
3. Algunas ecuaciones son válidas en todas las situaciones. Donde sea práctico, las **limitaciones** de las ecuaciones importantes se indican entre corchetes junto a la ecuación. Las ecuaciones que representan las grandes leyes de la física se muestran con un fondo sombreado, así como algunas otras ecuaciones indispensables.
4. Al final de cada capítulo hay un conjunto de **Problemas** que se clasifican como nivel I, II o III, de acuerdo con la dificultad estimada. Los problemas del nivel I son los más sencillos, los del nivel II son problemas estándar, y los del nivel III son "problemas de desafío". Estos problemas clasificados se ordenan por sección, pero los problemas para una sección dada pueden depender también del material anterior. Después aparece un grupo de problemas generales, que no se ordenan por sección ni están clasificados por dificultad. Los problemas que se relacionan con las secciones opcionales tienen asterisco (*). La mayoría de los capítulos tienen 1 o 2 problemas numéricos/por computadora al final, los cuales requieren utilizar una computadora o una calculadora graficadora. Las respuestas a los problemas impares se presentan al final del libro.
5. Ser capaz de resolver **problemas** es una parte crucial del aprendizaje de física y constituye un poderoso medio para comprender los conceptos y principios. Este libro contiene muchos auxiliares para la resolución de problemas: *a*) **ejemplos** trabajados y sus soluciones en el texto, que se deben estudiar como parte integral del tema; *b*) algunos de los ejemplos trabajados son **ejemplos de estimación**, que muestran cómo se pueden obtener resultados aproximados incluso si los datos son escasos (véase la sección 1-6); *c*) a lo largo de todo el texto se colocaron **Estrategias para resolución de problemas** especiales con la finalidad de sugerir un método paso a paso para resolver problemas acerca de un tema particular, pero recuerde que lo básico permanece igual; la mayoría de estas "estrategias" van seguidas de un ejemplo que se resuelve al seguir de manera explícita los pasos sugeridos; *d*) secciones especiales de resolución de problemas; *e*) notas marginales de "resolución de problemas" que se refieren a sugerencias dentro del texto para resolver problemas; *f*) **Ejercicios** dentro del texto que usted debe trabajar inmediatamente para luego comparar sus respuestas con las que aparecen al pie de la última página de ese capítulo; *g*) los problemas mismos al final de cada capítulo (punto 4 anterior).
6. Los **ejemplos conceptuales** plantean una pregunta que tiene la intención de hacer pensar al lector y conducirlo a una respuesta. Tómese un poco de tiempo para encontrar su respuesta antes de leer la respuesta dada.
7. El repaso **matemático** y algunos temas adicionales se encuentran en los apéndices. Los datos útiles, los factores de conversión y las fórmulas matemáticas se encuentran en la primera y última páginas del libro, así como en los forros.

Este peine adquirió una carga eléctrica estática, ya sea al pasarlo por el cabello o al frotarlo con tela o una toalla de papel. La carga eléctrica del peine induce una polarización (separación de cargas) en pedacitos de papel, de tal manera que los atrae.

Nuestra introducción a la electricidad en este capítulo incluye conductores y aislantes, así como la ley de Coulomb, que relaciona la fuerza entre dos cargas puntuales como función de la distancia de separación entre ellas. También se presenta el importante concepto de campo eléctrico.

CAPÍTULO 21

Carga eléctrica y campo eléctrico

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO ¡Adivine ahora!
Dos esferas pequeñas idénticas tienen la misma carga eléctrica. Si la carga eléctrica en cada una de ellas se duplica y la separación entre ellas también se duplica, la fuerza que cada una ejerce sobre la otra será

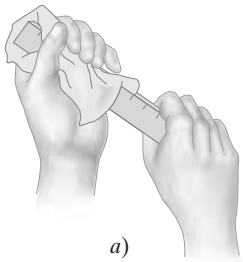
a) la mitad.
b) el doble.
c) cuatro veces mayor.
d) cuatro veces menor.
e) la misma.

La palabra "electricidad" quizás evoque la imagen de tecnología moderna compleja: luces, motores, electrónica y computadoras. Pero en realidad, la fuerza eléctrica desempeña un papel aun más profundo en nuestras vidas. De acuerdo con la teoría atómica, las fuerzas eléctricas entre átomos y moléculas son las responsables de mantenerlos unidos para formar líquidos y sólidos, además de que las fuerzas eléctricas también están implicadas en los procesos metabólicos que ocurren en el interior de nuestros cuerpos. Muchas de las fuerzas que hemos estudiado hasta este momento, tales como la fuerza elástica, la fuerza normal, la fricción y otras de contacto (para empujar o tirar), se consideran el resultado de fuerzas eléctricas que actúan a nivel atómico. La gravedad, por otro lado, se considera una fuerza aparte.†

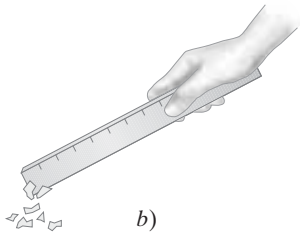
†Como se mencionó en la sección 6-7, los físicos en el siglo XX han reconocido cuatro fuerzas fundamentales diferentes en la naturaleza: 1. la fuerza gravitacional, 2. la fuerza electromagnética (veremos más adelante que las fuerzas eléctrica y magnética están íntimamente relacionadas), 3. la fuerza nuclear fuerte y 4. la fuerza nuclear débil. Las dos últimas fuerzas operan a nivel del núcleo dentro del átomo. Teorías recientes han combinado la fuerza electromagnética con la fuerza nuclear débil, así que ahora se considera que tienen un origen común, conocido como la fuerza electrodébil. Estudiaremos tales fuerzas en capítulos posteriores.

CONTENIDO

21–1 Electrostática; carga eléctrica y su conservación
21–2 Carga eléctrica en el átomo
21–3 Aislantes y conductores
21–4 Carga eléctrica inducida; el electroscopio
21–5 Ley de Coulomb
21–6 El campo eléctrico
21–7 Cálculo del campo eléctrico producido para distribuciones continuas de carga
21–8 Líneas de campo
21–9 Campos eléctricos y conductores
21–10 Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico
21–11 Dipolos eléctricos
*21–12 Fuerzas eléctricas en biología molecular; ADN
*21–13 Las máquinas copiadoras y las computadoras electrónicas usan la electrostática



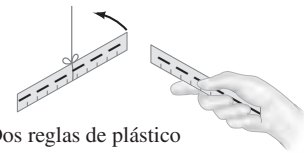
a)



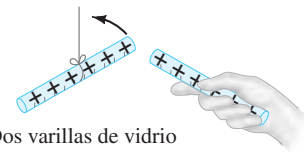
b)

FIGURA 21–1 *a*) Frote una regla de plástico y *b*) acérquela a algunos pedacitos de papel.

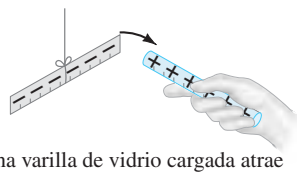
FIGURA 21–2 Cargas iguales se repelen; cargas distintas se atraen. (Observe el código de color: representaremos con color gris los objetos con carga eléctrica negativa y con color naranja los objetos con carga positiva, cuando queramos poner énfasis en lo anterior. Usamos estos colores en especial para cargas puntuales, aunque no siempre para objetos reales).



a) Dos reglas de plástico cargadas se repelen



b) Dos varillas de vidrio cargadas se repelen



c) Una varilla de vidrio cargada atrae a una regla de plástico cargada

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA ELÉCTRICA

Los primeros estudios sobre la electricidad datan de tiempos remotos; sin embargo, la electricidad se ha estudiado en detalle sólo durante los últimos dos siglos. Analizaremos el desarrollo de las ideas sobre la electricidad, incluyendo aparatos prácticos, así como su relación con el magnetismo, en los siguientes 11 capítulos.

21–1 Electrostática; carga eléctrica y su conservación

La palabra *electricidad* proviene de la palabra griega *elektron*, que significa "ámbar". El ámbar es una resina de árbol petrificada; los antiguos sabían que si frotaban un pedazo de ámbar con una tela, el ámbar atraería hojas pequeñas o polvo. Una pieza de goma o de caucho rígida, una varilla de vidrio o una regla de plástico frotada contra una tela también presentan este "efecto ámbar", o **electrostática**, como lo llamamos hoy. En efecto, usted puede levantar pequeños pedacitos de papel con un peine de plástico o una regla que se ha frotado vigorosamente con una toalla de papel. Véase la fotografía en la página anterior y la figura 21-1. Quizás usted ha experimentado efectos electrostáticos cuando peina su cabello o cuando toma una camisa o una blusa sintética de una secadora de ropa. Es probable que haya sentido una descarga al tocar la perilla de metal de una puerta, después de deslizarse sobre el asiento de un auto o al caminar sobre una alfombra de nylon. En cualquier caso, un objeto queda "cargado" como resultado de haberlo frotado, por lo que se dice que posee una **carga eléctrica** neta.

¿Son todas las cargas eléctricas iguales o hay más de un tipo de carga? De hecho, hay *dos* tipos de cargas eléctricas, como lo demuestra el siguiente experimento sencillo. Una regla de plástico suspendida de un hilo se frota vigorosamente con una tela para cargarla. Cuando se le acerca una segunda regla de plástico, que ha sido cargada de la misma manera, se encuentra que las reglas se *repelen* entre sí. Lo anterior se ilustra en la figura 21-2a. De la misma forma, si una varilla de vidrio frotada se acerca a una segunda varilla de vidrio cargada, de nuevo se observará que actúa una fuerza de repulsión (figura 21-2b). Sin embargo, si se acerca la varilla de vidrio cargada a la regla de plástico cargada, se encuentra que se *atraen* una a la otra (figura 21-2c). La carga en la varilla de vidrio debe entonces ser diferente de la carga en la regla de plástico. De hecho, se encuentra experimentalmente que todos los objetos cargados caen en una de dos categorías: o son atraídos por el plástico y repelidos por el vidrio, o son repelidos por el plástico y atraídos por el vidrio. Así que parece que hay dos (y sólo dos) tipos de carga eléctrica. Cada tipo de carga repele al mismo tipo de carga, pero atrae al tipo opuesto. Esto es, **cargas iguales se repelen, pero cargas opuestas se atraen**.

El estadista, filósofo y científico estadounidense Benjamin Franklin (1706-1790) utilizó los términos *positivo* y *negativo* para designar los dos tipos de carga eléctrica. La elección de qué nombre se asignó a qué tipo de carga fue arbitraria. Franklin eligió asignar la carga positiva a la varilla de vidrio frotada, así que la carga en la regla de plástico frotada (o ámbar) se llama carga negativa. En la actualidad aún usamos esa convención.

Franklin argumentó que, siempre que se produce una cierta cantidad de carga en un objeto, se produce una cantidad igual del tipo opuesto de carga en otro objeto. Las cargas positiva y negativa se tratan *algebraicamente*, así que, durante cualquier proceso, la carga neta en la cantidad de carga producida es igual a cero. Por ejemplo, cuando se frota una regla de plástico con una toalla de papel, el plástico adquiere una carga negativa y la toalla una cantidad equivalente de carga positiva. Las cargas están separadas; sin embargo, la suma de las dos es cero.

El anterior es un ejemplo de una ley que ahora está bien establecida: la **ley de conservación de la carga eléctrica**, que establece que

la cantidad neta de carga eléctrica producida en cualquier proceso es cero

o, dicho de otra manera,

no se puede crear o destruir una carga eléctrica neta.

Si un objeto (o una región del espacio) adquiere una carga positiva, entonces una cantidad igual de carga eléctrica negativa se hallará en regiones u objetos cercanos. Nunca se han encontrado violaciones a esta ley de conservación, que está tan firmemente establecida como las leyes de conservación de energía y de conservación de la cantidad de movimiento.

21–2 Carga eléctrica en el átomo

En el siglo pasado quedó claro que un entendimiento cabal de la electricidad se origina dentro del átomo mismo. En capítulos posteriores discutiremos con mayor detalle la estructura atómica y las ideas que condujeron a nuestra visión actual del átomo. Sin embargo, el hecho de explicar brevemente este asunto ahora ayudará a nuestra comprensión de la electricidad.

Un modelo simplificado del átomo lo representa compuesto por un núcleo cargado positivamente, pequeño pero pesado, rodeado por uno o más electrones con carga negativa (figura 21-3). El núcleo contiene protones, los cuales están cargados positivamente, y neutrones, que no poseen carga eléctrica neta. Todos los protones y los electrones tienen exactamente la misma magnitud de carga eléctrica, aunque con signos opuestos. De aquí que los átomos neutros, sin una carga neta, contienen igual número de protones que de electrones. En ocasiones, un átomo puede perder uno o más de sus electrones o ganar electrones adicionales; en tal caso, su carga es neta positiva o negativa, respectivamente, y entonces se le conoce como **ion**.

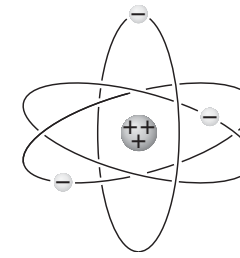


FIGURA 21–3 Modelo simple del átomo.

En materiales sólidos, el núcleo tiende a permanecer cerca de posiciones fijas, mientras que algunos de los electrones pueden moverse bastante libremente. Cuando un objeto es *neutro*, contiene cantidades iguales de carga eléctrica positiva y negativa. El hecho de cargar un objeto sólido por frotamiento puede explicarse mediante la transferencia de electrones de un objeto a otro. Cuando una regla de plástico queda cargada negativamente después de frotarla con una toalla de papel, la transferencia de electrones de la toalla al plástico deja la toalla con una carga positiva igual en magnitud a la carga negativa que adquirió el plástico. En los líquidos o los gases, los núcleos o los iones pueden moverse al igual que los electrones.

Normalmente, cuando se cargan objetos por frotamiento, mantienen su carga sólo por un tiempo limitado y tarde o temprano regresan a su estado neutro. ¿A dónde se va la carga? Por lo general, la carga "se fuga" hacia moléculas de agua en el aire. Lo anterior ocurre porque la molécula del agua es una molécula **polar** —esto es, a pesar de que es una molécula neutra, su carga no se distribuye de manera uniforme (figura 21-4). Así que los electrones extra sobre una regla de plástico cargada, por ejemplo, "se fugan" hacia el aire porque son atraídos por el extremo positivo de las moléculas de agua. Por otro lado, el objeto con carga positiva puede neutralizarse mediante la transferencia de electrones débilmente sujetos desde moléculas de agua en el aire. En días secos, se nota mucho más la electrostática, puesto que el aire contiene menos moléculas de agua que permiten la neutralización de cargas. En cambio, en días húmedos o lluviosos es difícil conseguir que un objeto mantenga una carga neta por mucho tiempo.

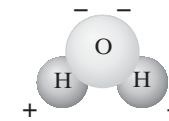
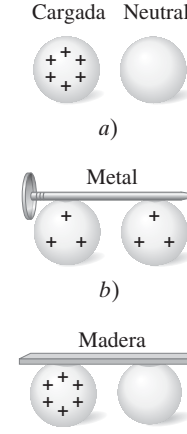


FIGURA 21–4 Diagrama de la molécula de agua. Como tiene cargas opuestas en los extremos, se le llama molécula "polar".

21–3 Aislantes y conductores

Suponga que tenemos dos esferas de metal, una muy cargada y la otra eléctricamente neutra (figura 21-5a). Si colocamos un objeto de metal, como un clavo, de manera que toque ambas esferas (figura 21-5b), la esfera que estaba sin carga se cargará de forma rápida. Si, en cambio, hubiéramos conectado las dos esferas con una varilla de madera o una pieza de caucho (figura 21-5c), la esfera sin carga no se habría cargado de manera apreciable. Los materiales como el clavo de hierro se llaman **conductores** de la electricidad, mientras que la madera o el caucho son **no conductores** o **aislantes**.

FIGURA 21–5 *a*) Una esfera de metal cargada y una esfera de metal neutra. *b*) Las dos esferas conectadas por un conductor (un clavo de metal), que conduce carga de una esfera a la otra. *c*) Las dos esferas originales conectadas mediante un aislante (madera). Prácticamente no se conduce ninguna carga.



En general, los metales son buenos conductores, en tanto la mayoría de los materiales son aislantes (aun los materiales aislantes conducen electricidad muy ligeramente). Casi todos los materiales naturales caen en una u otra de estas dos categorías tan distintas. Sin embargo, algunos materiales (como el silicio o el germanio) caen en una categoría intermedia conocida como **semiconductores**.

Desde el punto de vista atómico, los electrones en un material aislante están ligados al núcleo de manera muy fuerte. Por otro lado, en un buen conductor, algunos de los electrones están ligados muy débilmente y pueden moverse en forma más o menos libre dentro del material (aunque no pueden *abandonar* el objeto fácilmente), por lo que se les conoce como *electrones libres* o *electrones de conducción*. Cuando un cuerpo cargado de forma positiva se acerca o toca un material conductor, los electrones libres del conductor son atraídos por este objeto cargado positivamente y se mueven muy rápido hacia él. Por otro lado, cuando un objeto cargado negativamente se acerca a un material conductor, los electrones libres se mueven de manera rápida alejándose del objeto cargado. En un semiconductor hay muchos menos electrones libres, mientras que en un aislante casi no hay electrones libres.

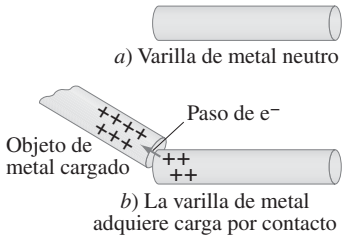


FIGURA 21–6 Una varilla de metal neutra en *a*) adquirirá una carga positiva, si se pone en contacto *b*) con un objeto de metal cargado positivamente. (Los electrones se mueven como indica la flecha.) A lo anterior se le llama carga por conducción.

21–4 Carga eléctrica inducida; el electroscopio

Suponga que un objeto de metal cargado positivamente se acerca a un objeto de metal sin carga. Si ambos objetos se tocan, los electrones libres en el objeto neutro son atraídos por el objeto positivo y algunos pasarán hacia él (figura 21-6). Puesto que el segundo objeto, que era originalmente neutro, ahora carece de algunos de sus electrones negativos, tendrá una carga neta positiva. Este proceso se conoce como "carga por inducción" o "por contacto", y los dos objetos terminan con cargas del mismo signo.

Ahora suponga que un objeto cargado positivamente se acerca a una varilla de metal neutra, pero no la toca. Aunque los electrones libres de la varilla de metal no abandonan la varilla, se mueven dentro del metal hacia la carga externa positiva, dejando una carga positiva en el extremo opuesto de la varilla (figura 21-7). Se dice que se *indujo* una carga en los dos extremos de la varilla de metal. No se ha creado ninguna carga neta dentro de la varilla, las cargas sólo se han *separado.* La carga neta en la varilla de metal sigue siendo cero. Sin embargo, si el metal se separa en dos partes tendríamos dos objetos cargados: uno positivamente y el otro negativamente.

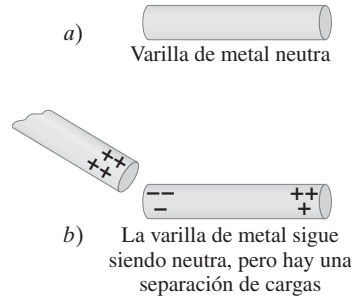


FIGURA 21–7 Carga por inducción.

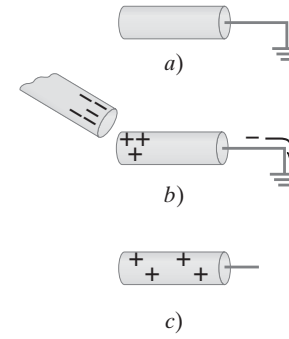


FIGURA 21–8 Carga inducida en un objeto conectado a tierra.

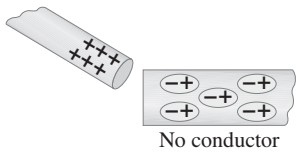
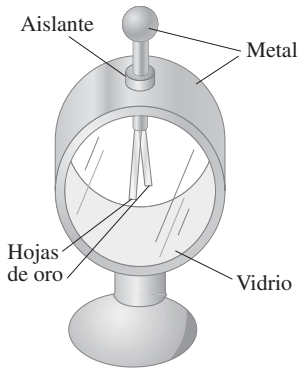


FIGURA 21–9 Un objeto cargado que se acerca a un material aislante produce una separación de cargas dentro de las moléculas del aislante.

FIGURA 21–10 Electroscopio.



Otra manera de inducir una carga neta en un objeto de metal consiste en conectarlo con un alambre conductor hacia tierra (o un tubo conductor que haga tierra), como se muestra en la figura 21-8a (el símbolo ⏚ significa conectado a "tierra"). Se dice entonces que el objeto está conectado a tierra. La Tierra, como es tan grande y es conductora, fácilmente acepta o cede electrones; así que actúa como un reservorio de carga. Si un objeto cargado —negativamente esta vez— se acerca al objeto metálico, los electrones libres en el metal serán repelidos y muchos de ellos se moverán por el alambre hasta la tierra (figura 21-8b). Lo anterior deja al metal cargado positivamente. Si ahora se corta el alambre, el objeto de metal tendrá una carga positiva inducida en él (figura 21-8c). Si el alambre se corta después de que se aleja el objeto cargado negativamente, todos los electrones habrían vuelto hacia el objeto de metal y éste sería neutro.

También se puede producir una separación de carga en materiales aislantes. Si usted acerca un objeto cargado positivamente a un material aislante neutro, como se indica en la figura 21-9, casi ningún electrón se puede mover con libertad dentro del aislante. Sin embargo, los electrones pueden moverse ligeramente dentro de sus respectivos átomos o moléculas. Cada óvalo de la figura 21-9 representa una molécula (no está a escala); los electrones cargados negativamente, atraídos hacia la carga externa positiva, tienden a moverse en esta dirección dentro de sus moléculas. Como las cargas negativas en el material aislante están más cerca de la carga externa positiva, el material aislante, como un todo, es atraído hacia la carga externa positiva (véase la fotografía al inicio del capítulo, página 559).

Un **electroscopio** es un aparato que puede usarse para detectar carga. Como se muestra en la figura 21-10, dentro de un recipiente hay dos hojas de metal móviles, por

lo general de oro, conectadas a una perilla de metal en el exterior. (En ocasiones sólo una hoja es movible.) Si se acerca un objeto cargado positivamente a la perilla, se inducirá una separación de cargas: los electrones son atraídos hacia la perilla, dejando las hojas cargadas positivamente (figura 21-11a). Las dos hojas se repelen entre sí, como se muestra, porque ambas están cargadas positivamente. Por otro lado, si ahora la perilla se carga por conducción (por contacto), todo el aparato adquiere una carga neta, como se representa en la figura 21-11b. En cualquier caso, cuanto mayor sea la cantidad de carga, mayor será la separación entre las hojas.

Observe que no se puede conocer el signo de las cargas de esta manera, pues cargas negativas harán que las hojas se separen tanto como provocaría la misma cantidad de cargas positivas; en cualquier caso, las dos hojas se repelen entre sí. Sin embargo, un electroscopio puede utilizarse para determinar el signo de las cargas si primero se carga por conducción, digamos negativamente, como se muestra en la figura 21-12a. Si se acerca ahora un objeto con carga negativa, como en la figura 21-12b, se inducen más electrones a moverse hacia las hojas y éstas se separarán aún más. Si, en cambio, se acerca un objeto con carga positiva, los electrones inducidos fluirán hacia la perilla, dejando las hojas con menos carga negativa, por lo que su separación se reduce (figura 21-12c).

El electroscopio se usó en los primeros estudios de electricidad. El mismo principio, apoyado por la electrónica, se utiliza en **electrómetros** modernos mucho más sensibles.

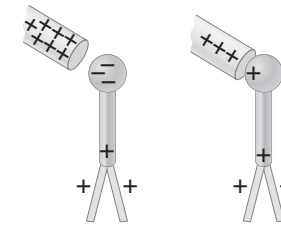
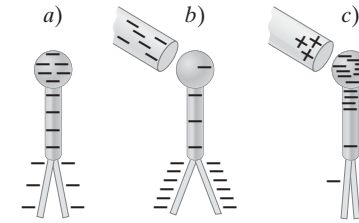


FIGURA 21–11 Electroscopio cargado: *a*) por inducción, *b*) por conducción.

FIGURA 21–12 Un electroscopio previamente cargado puede utilizarse para determinar el signo de la carga de un objeto cargado.



21–5 La ley de Coulomb

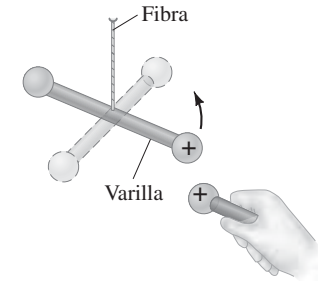
Hemos visto que una carga eléctrica ejerce una fuerza de atracción o repulsión sobre otras cargas eléctricas. ¿Qué factores determinan la magnitud de esta fuerza? Para encontrar la respuesta, el físico francés Charles Coulomb (1736-1806) investigó las fuerzas eléctricas en la década de 1780 usando una balanza de torsión (figura 21-13) muy parecida a la que utilizó Cavendish en sus estudios de la fuerza gravitacional (capítulo 6).

En el tiempo de Coulomb no había instrumentos precisos para medir cargas eléctricas. Sin embargo, Coulomb fue capaz de preparar pequeñas esferas con diferentes magnitudes de carga en las que se conocía el *cociente* de las cargas.[†] Aunque tuvo algunos problemas con las cargas inducidas, Coulomb logró argumentar que la fuerza que ejerce un pequeño objeto cargado sobre un segundo objeto pequeño cargado es directamente proporcional a la carga en cada uno de ellos. Esto es, si la carga en alguno de los objetos se duplica, la fuerza se duplica y si la carga en ambos objetos se duplica, entonces la fuerza aumenta a cuatro veces el valor original. Éste era el caso cuando la distancia entre las dos cargas permanecía constante. Coulomb encontró que, si la distancia entre las cargas aumentaba, la fuerza disminuía con el *cuadrado de la distancia* entre ellas. Esto es, si la distancia se aumenta al doble, la fuerza disminuye a un cuarto de su valor original. Así, Coulomb concluyó que la fuerza que un pequeño objeto cargado ejerce sobre otro pequeño objeto cargado es proporcional al producto de la magnitud de la carga en un objeto, Q_1, por la magnitud de la carga en el segundo objeto, Q_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre ellos (figura 21-14). Como ecuación, escribimos la **ley de Coulomb** como

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \qquad \text{[magnitudes]} \quad \textbf{(21–1)}$$

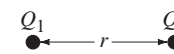
donde k es una constante de proporcionalidad.[‡]

FIGURA 21–13 Coulomb usó una balanza de torsión para investigar cómo varía la fuerza eléctrica como función de la magnitud de las cargas y de la distancia entre ellas. Cuando se coloca una esfera externa cargada cerca de la esfera cargada unida a la barra suspendida, la barra gira ligeramente. La fibra que sostiene la barra resiste el movimiento de torsión, de manera que el ángulo de giro es proporcional a la fuerza eléctrica.



LEY DE COULOMB

FIGURA 21–14 La ley de Coulomb (ecuación 21-1) permite determinar la fuerza entre dos cargas puntuales, Q_1 y Q_2, separadas una distancia r.



[†]Coulomb dedujo que si una esfera conductora cargada se ponía en contacto con una esfera idéntica neutra, la carga de la primera se repartiría en partes iguales debido a la simetría. Encontró una manera de producir cargas iguales a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, y así sucesivamente de la carga original.

[‡]La validez de la ley de Coulomb se apoya en mediciones precisas que son mucho más complejas que el experimento original de Coulomb. Se ha demostrado que el exponente 2 en la ley de Coulomb es exacto en 1 parte en 10^{16} [esto es, $2 \pm (1 \times 10^{-16})$].

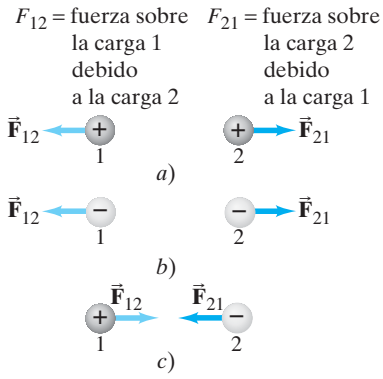


FIGURA 21–15 La dirección de la fuerza electrostática que una carga puntual ejerce sobre otra siempre es a lo largo de la línea que une las cargas; el sentido de la fuerza depende de si las cargas tienen el mismo signo, como en *a*) y en *b*), o de si tienen signos contrarios como en c).

Como acabamos de ver, la ley de Coulomb,

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \qquad \text{[magnitudes]} \quad \textbf{(21–1)}$$

da la *magnitud* de la fuerza eléctrica que ejerce una carga sobre la otra. La *dirección* de la fuerza eléctrica siempre *es a lo largo de la línea recta que une las dos cargas.* Si las dos cargas tienen el mismo signo, la fuerza en una de las cargas se manifiesta alejándose de la otra (las cargas se repelen entre sí). Si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza en una de las cargas se dirige hacia la otra (las cargas se atraen). Véase la figura 21-15. Observe que la fuerza que una carga ejerce sobre la segunda carga tiene la misma magnitud y dirección, pero sentido opuesto, que la fuerza que ejerce la segunda carga sobre la primera, de acuerdo con la tercera ley de Newton.

La unidad de carga en el SI es el **coulomb** (C).[†] Actualmente, la definición precisa de coulomb se da en términos de corriente eléctrica y campo magnético, como se verá más adelante (sección 28-3). En unidades del SI, la constante k en la ley de Coulomb tiene el valor

$$k = 8.99 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

o si sólo necesitamos dos cifras significativas,

$$k \approx 9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}.$$

Así, 1 C es aquella cantidad de carga que, si se coloca en cada uno de dos objetos puntuales separados 1.0 m entre sí, ocasionará que cada objeto produzca una fuerza de $(9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1.0\,\mathrm{C})(1.0\,\mathrm{C})/(1.0\,\mathrm{m})^2 = 9.0 \times 10^9$ N sobre el otro. Lo anterior sería una fuerza enorme, igual al peso de casi un millón de toneladas. Rara vez encontramos cargas tan grandes como un coulomb.

Las cargas que se producen con un frotamiento ordinario (por ejemplo, con un peine o una regla de plástico) son comúnmente del orden de microcoulomb ($1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}$ C) o menos. Los objetos con carga positiva tienen una carencia de electrones, mientras que en los objetos cargados negativamente hay un exceso de electrones. Se ha determinado que la carga del electrón posee una magnitud de 1.602×10^{-19} C, que es negativa. Ésta es la carga más pequeña encontrada en la naturaleza,[‡] a la cual, como es fundamental, se le da el símbolo e, y a menudo se le designa como la *carga elemental*:

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}.$$

Observe que e se define como un número positivo, así que la carga del electrón es $-e$. (La carga de protón, por otro lado, es $+e$). Puesto que un objeto no puede ganar o perder una fracción de un electrón, la carga neta de cualquier objeto debe ser un múltiplo entero de tal carga. Se dice entonces que la carga eléctrica está **cuantizada** (existe sólo en cantidades discretas: $1e$, $2e$, $3e$, etcétera). Sin embargo, como e es tan pequeña, normalmente no notamos esta cuantización en cargas macroscópicas ($1\ \mu$C requiere cerca de 10^{13} electrones), lo cual aparece entonces como un continuo.

La ley de Coulomb se parece mucho a la *ley de la gravitación universal*, $F = Gm_1m_2/r^2$, que representa la fuerza gravitacional que ejerce una masa m_1 sobre otra masa m_2 (ecuación 6-1). Ambas son leyes del cuadrado inverso ($F \propto 1/r^2$). Las dos tienen también una proporcionalidad con respecto a una propiedad de un objeto (la masa para la gravedad, la carga eléctrica para la electricidad). Ellas actúan a distancia (esto es, no se requiere contacto). Una diferencia importante entre ambas leyes es que la gravedad siempre es una fuerza de atracción, mientras que la fuerza eléctrica puede ser de atracción o de repulsión. La carga eléctrica aparece en dos tipos: positiva o negativa, mientras que la masa gravitacional siempre es positiva.

[†]En el sistema de unidades CGS, la constante k se toma igual a 1, mientras la unidad de carga se llama unidad electrostática de carga (esu), o statcoulomb. Un esu se define como la carga en cada uno de dos objetos puntuales separados 1 cm entre sí, que da lugar a una fuerza de una dina entre ellos.

[‡]De acuerdo con el modelo estandar de partículas elementales de la física, las partículas subnucleares llamadas quarks tienen cargas menores que la carga del electrón, igual a $\frac{1}{3}e$ o $\frac{2}{3}e$. No se han detectado los quarks directamente como objetos aislados, por lo que la teoría indica que los quarks libres no pueden ser detectados.

La constante k en la ecuación 21-1 generalmente se escribe en términos de otra constante, ϵ_0, llamada **permitividad del espacio vacío**. Se relaciona con k mediante $k = 1/4\pi\epsilon_0$. La ley de Coulomb puede escribirse entonces como

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \qquad \textbf{(21–2)}$$

LEY DE COULOMB (en términos de ϵ_0)

donde

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}.$$

La ecuación 21-2 parece más complicada que la ecuación 21-1, pero hay otras ecuaciones fundamentales, que aún no hemos visto, las cuales son más simples en términos de ϵ_0 que de k. No importa qué forma utilicemos, pues las ecuaciones 21-1 y 21-2 son equivalentes. (Los últimos valores precisos de e y ϵ_0 se incluyen en la segunda de forros del libro).

[Nuestra convención para las unidades, tal que $\mathrm{C^2/N \cdot m^2}$ para ϵ_0, significa que $\mathrm{m^2}$ está en el denominador. Esto es, $\mathrm{C^2/N \cdot m^2}$ *no* significa $(\mathrm{C^2/N}) \cdot \mathrm{m^2} = \mathrm{C^2 \cdot m^2/N}$].

Las ecuaciones 21-1 y 21-2 se aplican a objetos cuyos tamaños son mucho más pequeños que la distancia de separación entre ellos. Idealmente, es exacta para **cargas puntuales** (tamaño espacial despreciable comparado con otras distancias). Para objetos con tamaños finitos, no siempre es claro qué valor utilizar para r, en particular si la carga no está distribuida de manera uniforme sobre los objetos. Si los dos objetos son esferas, y se sabe que la carga está distribuida de manera uniforme en cada una de ellas, entonces r es la distancia entre sus centros.

La ley de Coulomb describe la fuerza entre dos cargas cuando ambas están en reposo. Cuando las cargas están en movimiento, aparecen fuerzas adicionales, las cuales analizaremos en capítulos posteriores. En este capítulo nos ocuparemos sólo de cargas en reposo, cuyo estudio corre a cargo de la **electrostática**, mientras que la ley de Coulomb proporciona la **fuerza electrostática**.

Cuando usamos la ley de Coulomb, por lo general ignoramos los signos de las cargas y determinamos la dirección y el sentido de las fuerzas con base en si éstas son de atracción o de repulsión.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Use magnitudes en la ley de Coulomb; encuentre la dirección de la fuerza eléctrica a partir de los signos de las cargas.

EJERCICIO A Regrese a la pregunta de inicio del capítulo (página 559) y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO CONCEPTUAL 21–1 **¿Qué carga ejerce una fuerza mayor?** Dos cargas puntuales positivas, $Q_1 = 50\ \mu\mathrm{C}$ y $Q_2 = 1\ \mu\mathrm{C}$, están separadas por una distancia ℓ (figura 21-16). ¿Cuál es mayor en magnitud, la fuerza que ejerce Q_1 sobre Q_2 o la fuerza que ejerce Q_2 sobre Q_1?

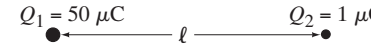


FIGURA 21–16 Ejemplo 21–1.

RESPUESTA De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza que Q_2 ejerce sobre Q_1 es

$$F_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{\ell^2}.$$

La fuerza que Q_1 ejerce sobre Q_2 es

$$F_{21} = k\frac{Q_2 Q_1}{\ell^2}$$

la cual es de la misma magnitud. La ecuación es simétrica con respecto a las dos cargas, así que $F_{21} = F_{12}$.

NOTA La tercera ley de Newton también nos indica que estas dos fuerzas deben ser de la misma magnitud.

EJERCICIO B ¿Cuál es la magnitud de F_{12} (y de F_{21}) en el ejemplo 21-1 si $\ell = 30$ cm?

Tenga en mente que la ecuación 21-2 (o 21-1) da la fuerza sobre una carga debida sólo a una carga. Si varias (o muchas) cargas están presentes, *la fuerza neta sobre cualquiera de ellas será igual a la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada una de las otras cargas*. Este **principio de superposición** se basa en la experimentación y nos dice que los vectores de fuerza eléctrica se suman como cualquier otro vector. Para distribuciones continuas de carga, la suma se convierte en una integral.

EJEMPLO 21–2 **Tres cargas a lo largo de una línea recta.** Tres partículas cargadas se colocan sobre una línea recta, como se ilustra en la figura 21-17. Calcule la fuerza electrostática neta sobre la partícula 3 (la carga de $-4.0\ \mu C$ a la derecha) debido a las otras dos cargas.

PLANTEAMIENTO La fuerza neta sobre la partícula 3 es la suma vectorial de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 3 y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ ejercida por la partícula 2 sobre la partícula 3: $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{31} + \vec{\mathbf{F}}_{32}$.

SOLUCIÓN Las magnitudes de estas dos fuerzas se obtienen a partir de la ley de Coulomb (ecuación 21-1):

$$F_{31} = k\frac{Q_3 Q_1}{r_{31}^2} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(8.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.50\ \text{m})^2} = 1.2\ \text{N},$$

donde $r_{31} = 0.50$ m es la distancia de Q_3 a Q_1. De manera análoga,

$$F_{32} = k\frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(3.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.20\ \text{m})^2} = 2.7\ \text{N}.$$

Como estábamos calculando las magnitudes de las fuerzas, omitimos los signos de las cargas. Pero debemos tenerlos presentes para obtener la dirección de cada fuerza. Tomamos el eje x como la línea que une a las partículas y lo consideramos positivo a la derecha. Así, como $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ es de repulsión y $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ es de atracción, las direcciones de las fuerzas son como se muestran en la figura 21-17b: F_{31} apunta en el sentido de x positiva y F_{32} en el sentido de x negativa. Por lo tanto, la fuerza neta sobre la partícula 3 es

$$F = -F_{32} + F_{31} = -2.7\ \text{N} + 1.2\ \text{N} = -1.5\ \text{N}.$$

La magnitud de la fuerza neta es de 1.5 N y apunta hacia la izquierda.

NOTA La carga Q_1 actúa sobre la carga Q_3 como si Q_2 no estuviera presente (éste es el principio de superposición). Esto es, la carga intermedia, Q_2, no bloquea el efecto de la carga Q_1 sobre la carga Q_3. Naturalmente, Q_2 elige su propia fuerza sobre Q_3.

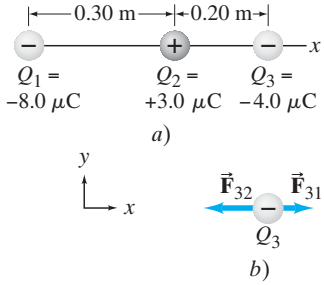


FIGURA 21–17 Ejemplo 21–2.

⚠ CUIDADO

Cada carga ejerce su propia fuerza
Ninguna carga bloquea el efecto de las otras

EJERCICIO C Determine la magnitud y la dirección de la fuerza neta sobre Q_1 en la figura 21-17a.

EJEMPLO 21–3 **Fuerza eléctrica usando componentes vectoriales.** Calcule la fuerza electrostática neta sobre la carga Q_3, que se representa en la figura 21-18a, debida a las cargas Q_1 y Q_2.

PLANTEAMIENTO Usamos la ley de Coulomb para encontrar las magnitudes de las fuerzas individuales. La dirección de cada fuerza será a lo largo de la recta que conecta a Q_3 con Q_1 o Q_2. Las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ tienen las direcciones indicadas en la figura 21-18a, puesto que Q_1 ejerce una fuerza de atracción sobre Q_3, y Q_2 ejerce una fuerza de repulsión. Las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ *no* actúan a lo largo de la misma recta, así que para encontrar la fuerza resultante sobre Q_3 descomponemos $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ en sus componentes x y y; luego, realizamos una suma de vectores.

SOLUCIÓN Las magnitudes de $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ son (ignorando los signos de las cargas, puesto que ya conocemos las direcciones de las fuerzas)

$$F_{31} = k\frac{Q_3 Q_1}{r_{31}^2} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(6.5 \times 10^{-5}\ \text{C})(8.6 \times 10^{-5}\ \text{C})}{(0.60\ \text{m})^2} = 140\ \text{N},$$

$$F_{32} = k\frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(6.5 \times 10^{-5}\ \text{C})(5.0 \times 10^{-5}\ \text{C})}{(0.30\ \text{m})^2} = 330\ \text{N}.$$

Descomponemos $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ en sus componentes x y y, como se muestra en la figura 21-18a:

$$F_{31x} = F_{31}\cos 30^\circ = (140\ \text{N})\cos 30^\circ = 120\ \text{N},$$
$$F_{31y} = -F_{31}\,\text{sen}\,30^\circ = -(140\ \text{N})\,\text{sen}\,30^\circ = -70\ \text{N}.$$

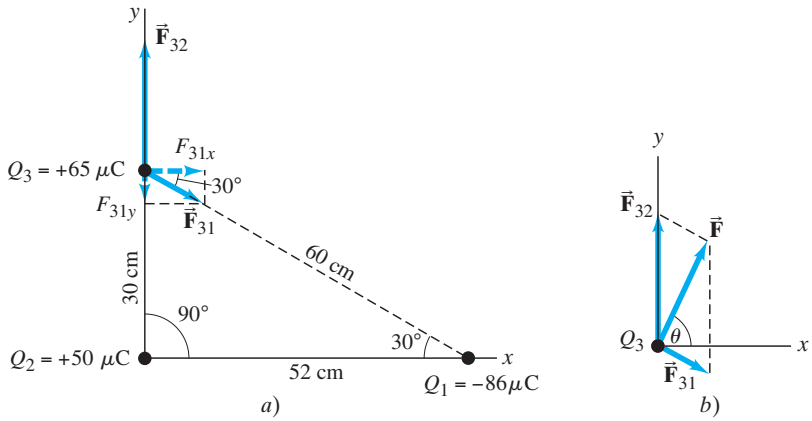


FIGURA 21–18 Cálculo de las fuerzas del ejemplo 21-3. *a*) Las direcciones de las fuerzas individuales son como se muestran, puesto que $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ es repulsiva (la fuerza sobre Q_3 es en la dirección y el sentido alejándose de Q_2, ya que Q_3 y Q_2 son ambas positivas), mientras que $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ es de atracción (Q_3 y Q_1 tienen signos opuestos), así que $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ apunta hacia Q_1. *b*) Suma de $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ para obtener la fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$.

La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ tiene sólo componente y. Así que la fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$ sobre Q_3 tiene componentes

$$F_x = F_{31x} = 120\ \text{N},$$
$$F_y = F_{32} + F_{31y} = 330\ \text{N} - 70\ \text{N} = 260\ \text{N}.$$

La magnitud de la fuerza neta es

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(120\ \text{N})^2 + (260\ \text{N})^2} = 290\ \text{N};$$

y actúa a un ángulo θ dado por (véase figura 21-18b)

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{260\ \text{N}}{120\ \text{N}} = 2.2,$$

así que $\theta = \tan^{-1}(2.2) = 65°$.

NOTA Como $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ no apuntan a lo largo de la misma recta, la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_3$ no es igual a la magnitud de la suma (o de la diferencia como en el ejemplo 21-2) de las magnitudes por separado.

EJEMPLO CONCEPTUAL 21–4 **Haga la fuerza neta sobre Q_3 igual a cero.** En la figura 21-18, ¿dónde localizaría a una cuarta carga $Q_4 = -50\ \mu C$, de manera que la fuerza neta sobre Q_3 sea cero?

RESPUESTA Por el principio de superposición, necesitamos una fuerza en la misma dirección, pero de sentido opuesto a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ debida a Q_2 y Q_1, que calculamos en el ejemplo 21-3 (figura 21-18b). Nuestra fuerza debe tener una magnitud de 290 N, y apuntar hacia abajo y a la izquierda de Q_3 en la figura 21-18b. Así que Q_4 debe estar a lo largo de esta recta. Véase la figura 21-19.

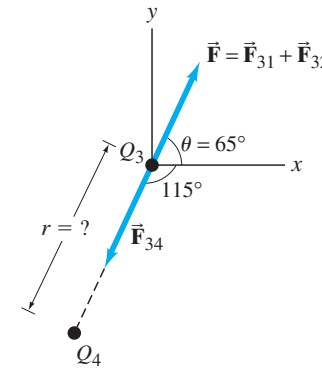


FIGURA 21–19 Ejemplo 21-4. Q_4 ejerce una fuerza ($\vec{\mathbf{F}}_{34}$) que hace que la fuerza neta sobre Q_3 sea cero.

EJERCICIO D *a*) Considere dos cargas puntuales de la misma magnitud, pero de signos opuestos ($+Q$ y $-Q$), que están separadas una distancia fija d. ¿Puede encontrar una posición donde deba colocarse una tercera carga positiva Q, de manera que la fuerza eléctrica neta sobre esta tercera carga sea cero? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta si las dos primeras cargas fueran ambas $+Q$?

*Forma vectorial de la ley de Coulomb

La ley de Coulomb puede escribirse de manera vectorial (como hicimos para la ley de Newton de la gravitación universal en el capítulo 6, sección 6-2) de la siguiente forma:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21},$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ es el vector de fuerza sobre la carga Q_1 debido a Q_2 y $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ es un vector unitario que apunta desde Q_2 hacia Q_1. Esto es, $\vec{\mathbf{r}}_{21}$ apunta desde la carga "fuente" (Q_2) hacia la carga sobre la cual queremos calcular la fuerza (Q_1). Véase la figura 21-20. Las cargas Q_1 y Q_2 pueden ser positivas o negativas, lo cual determinará la dirección de la fuerza eléctrica. Si Q_1 y Q_2 tienen el mismo signo, entonces el producto $Q_1Q_2 > 0$ y la fuerza sobre Q_1 apunta alejándose de Q_2 (esto es, la fuerza es de repulsión). Si Q_1 y Q_2 son de signos opuestos, entonces $Q_1Q_2 < 0$ y $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ apunta hacia Q_2 (es decir, la fuerza es de atracción).

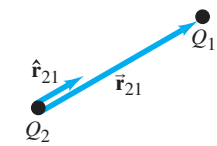


FIGURA 21–20 Determinación de la fuerza sobre Q_1 debida a Q_2, donde se indica la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{21}$.

21–6 El campo eléctrico

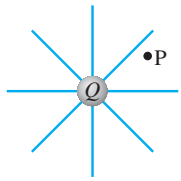


FIGURA 21–21 Cualquier carga eléctrica está rodeada por un campo eléctrico. P es un punto arbitrario.

Muchas fuerzas comunes pueden designarse como "fuerzas de contacto"; por ejemplo, sus manos empujando o tirando de un carrito, o una raqueta que golpea una pelota de tenis.

En contraste, tanto la fuerza gravitacional como la fuerza eléctrica actúan a distancia. Hay una fuerza entre dos objetos aun cuando los objetos no se tocan. La idea de que una fuerza *actúa a distancia* fue difícil para los primeros científicos. Newton mismo se sentía incómodo con esta idea cuando publicó su ley de la gravitación universal. Un concepto que ayuda a comprender esa situación es el concepto de **campo**, que desarrolló el científico británico Michael Faraday (1791-1867). En el caso eléctrico, de acuerdo con Faraday, un *campo eléctrico* se extiende hacia fuera de cualquier carga y permea todo el espacio (figura 21-21). Si una segunda carga (llamada Q_2) se coloca cerca de la primera carga, siente una fuerza ejercida por el campo eléctrico que hay en ese punto (digamos, el punto P en la figura 21-21). Se considera que el campo eléctrico en el punto P interactúa directamente con la carga Q_2 para producir una fuerza sobre Q_2.

En principio, podemos investigar el campo eléctrico que rodea a una carga o a un grupo de cargas midiendo la fuerza sobre una pequeña **carga de prueba** positiva en reposo. Por carga de prueba queremos expresar una carga tan pequeña que la fuerza que ella ejerce no afecta significativamente a las cargas que generan el campo. Si se coloca una carga de prueba positiva pequeña q en varias posiciones, alrededor de una carga positiva individual Q, como se muestra en la figura 21-22 (puntos A, B y C), la fuerza ejercida sobre la carga q es como se indica en la figura. La fuerza en B es menor que la fuerza en A, porque la distancia de Q a B es mayor (ley de Coulomb), mientras que la fuerza en C es aun menor. En cada caso, la fuerza sobre q está dirigida radialmente para alejarse de Q. El campo eléctrico se define en términos de la fuerza sobre una carga de prueba positiva. En particular, el **campo eléctrico**, $\vec{\mathbf{E}}$, en cualquier punto del espacio se define como la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ ejercida sobre una pequeña carga de prueba positiva localizada en ese punto y dividida entre la magnitud de la carga de prueba q:

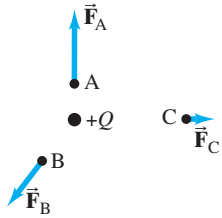


FIGURA 21–22 Fuerza ejercida por la carga $+Q$ sobre una pequeña carga de prueba q, localizada en los puntos A, B y C.

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q}. \qquad \textbf{(21–3)}$$

Con mayor precisión, $\vec{\mathbf{E}}$ se define como el límite de $\vec{\mathbf{F}}/q$, mientras q se hace más y más pequeña. Esto es, q es tan pequeña que, en esencia, no ejerce fuerza sobre las otras cargas que produjeron el campo eléctrico. A partir de esta definición (ecuación 21-3), vemos que el campo eléctrico en cualquier punto del espacio es un vector que apunta en la dirección de la fuerza sobre una carga de prueba positiva pequeña en ese punto, cuya magnitud es la *fuerza por unidad de carga*. Así, las unidades de $\vec{\mathbf{E}}$ en el SI son newton entre coulomb (N/C).

La razón para definir $\vec{\mathbf{E}}$ como $\vec{\mathbf{F}}/q$ (con $q \to 0$) es para que $\vec{\mathbf{E}}$ no dependa de la magnitud de la carga de prueba q. Lo anterior significa que $\vec{\mathbf{E}}$ describe sólo el efecto de las cargas que crean el campo eléctrico en ese punto.

El campo eléctrico en cualquier punto del espacio puede medirse usando la definición (ecuación 21-3). Para situaciones simples que impliquen una o más cargas puntuales, podemos calcular $\vec{\mathbf{E}}$. Por ejemplo, el campo eléctrico a una distancia r de una carga individual Q tendría la magnitud

$$E = \frac{F}{q} = \frac{kqQ/r^2}{q}$$

$$E = k\frac{Q}{r^2}; \qquad \text{[carga puntual individual]} \quad \textbf{(21–4a)}$$

o, en términos de ϵ_0, como en la ecuación 21-12 $\left(k = 1/4\pi\epsilon_0\right)$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \qquad \text{[carga puntual individual]} \quad \textbf{(21–4b)}$$

Observe que E es independiente de la carga de prueba q; esto es, E depende sólo de la carga Q que produce el campo eléctrico, no del valor de la carga de prueba q. A las ecuaciones 21-4 se les conoce como la ley de Coulomb para el campo eléctrico.

Si se nos da el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en un punto dado del espacio, entonces podemos calcular la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre cualquier carga q localizada en ese punto escribiendo (véase la ecuación 21-3):

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}. \qquad \textbf{(21–5)}$$

Esta relación es válida aun si q no es pequeña, en tanto q no ocasione que se muevan las cargas que producen el campo $\vec{\mathbf{E}}$ Si q es positiva, $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$ apuntan en la misma dirección. Si q es negativa, $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$ apuntan en direcciones opuestas. Véase la figura 21-23.

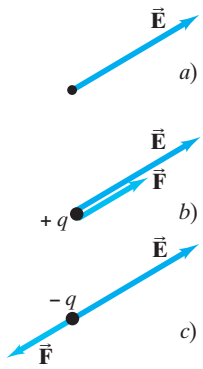


FIGURA 21–23 *a*) Campo eléctrico en un punto dado del espacio. *b*) Fuerza sobre una carga positiva en ese punto. *c*) Fuerza sobre una carga negativa en ese punto.

EJEMPLO 21–5 **Máquina fotocopiadora.** Una fotocopiadora trabaja mediante el arreglo de cargas positivas (en el patrón que será copiado) sobre la superficie de un tambor cilíndrico y luego rocía suavemente partículas de tóner seco cargado negativamente (la tinta) sobre el tambor. Las partículas de tóner se pegan en forma temporal en el patrón sobre el tambor (figura 21-24) y después se transfieren al papel y se "fijan térmicamente" para producir la copia. Suponga que cada partícula de tóner tiene una masa de 9.0×10^{-16} kg y que porta un promedio de 20 electrones extra para producir la carga eléctrica. Suponiendo que la fuerza eléctrica sobre una partícula de tóner debe ser mayor que el doble de su peso, para asegurar una atracción suficiente, calcule la magnitud del campo eléctrico requerido cerca de la superficie del tambor.

PLANTEAMIENTO La fuerza eléctrica sobre una partícula de tóner de carga $q = 20e$ es $F = qE$, donde E es el campo eléctrico que buscamos. Esta fuerza necesita ser por lo menos del doble del peso (mg) de la partícula.

SOLUCIÓN El valor mínimo del campo eléctrico satisface la relación

$$qE = 2mg$$

donde $q = 20e$. Por lo tanto,

$$E = \frac{2mg}{q} = \frac{2(9.0 \times 10^{-16}\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)}{20(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})} = 5.5 \times 10^{3}\,\text{N/C}.$$

FÍSICA APLICADA
Fotocopiadoras

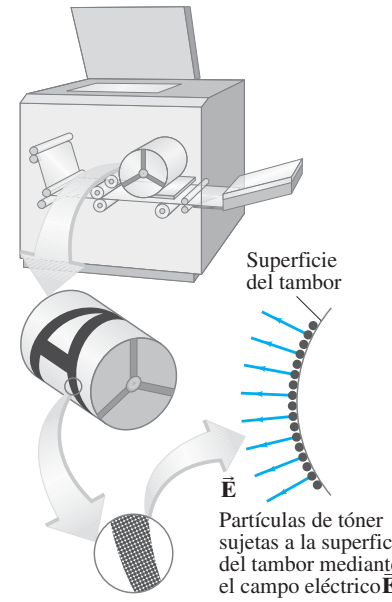


FIGURA 21–24 Ejemplo 21–5.

EJEMPLO 21–6 **Campo eléctrico de una carga puntual individual.** Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto P que está a 30 cm a la derecha de una carga puntual $Q = -3.0 \times 10^{-6}$ C.

PLANTEAMIENTO La magnitud del campo eléctrico, debido a una carga puntual, está dada por la ecuación 21-4. La dirección se determina usando el signo de la carga Q.

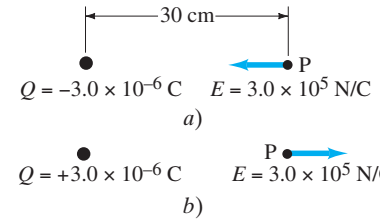
SOLUCIÓN La magnitud del campo eléctrico está dada por

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{(9.0 \times 10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(3.0 \times 10^{-6}\,\text{C})}{(0.30\,\text{m})^2} = 3.0 \times 10^{5}\,\text{N/C}.$$

La dirección del campo eléctrico es *hacia* la carga Q, a la izquierda, como se indica en la figura 21-25a, puesto que definimos la dirección del campo eléctrico como la dirección de la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba positiva, que en este caso sería de atracción. Si Q fuera positiva, el campo eléctrico se alejaría de Q, como se indica en la figura 21-25b.

NOTA No hay ninguna carga eléctrica en el punto P. Sin embargo, sí hay un campo eléctrico en ese punto. La única carga real es Q.

FIGURA 21–25 Ejemplo 21-6. Campo eléctrico en el punto P *a*) debido a una carga negativa Q, y *b*) debido a una carga positiva Q, cada una a 30 cm del punto P.



Este ejemplo ilustra un resultado general: el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ debido a una carga positiva se aleja de la carga, mientras que $\vec{\mathbf{E}}$ debido a una carga negativa apunta hacia esa carga.

EJERCICIO E Cuatro cargas de igual magnitud, pero posiblemente de signos distintos, se localizan en las esquinas de un cuadrado. ¿Qué arreglo de cargas producirá un campo eléctrico con la mayor magnitud en el centro del cuadrado? *a*) Las cuatro cargas positivas; *b*) las cuatro cargas negativas; *c*) tres cargas positivas y una negativa; *d*) dos cargas positivas y dos negativas; *e*) tres cargas negativas y una positiva.

Si el campo eléctrico, en una posición dada del espacio, es ocasionado por más de una carga, los campos individuales (llamados $\vec{\mathbf{E}}_1$, $\vec{\mathbf{E}}_2$, etcétera), debidos a cada una de las cargas, se suman vectorialmente para calcular el campo total en ese punto:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots.$$

La validez de este **principio de superposición** para los campos eléctricos se sustenta completamente en hechos experimentales.

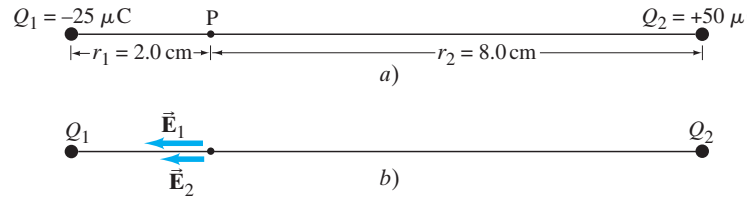


FIGURA 21–26 Ejemplo 21-7. En *b*), no sabemos las magnitudes relativas de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ hasta que hacemos los cálculos.

EJEMPLO 21–7 ***E* en un punto entre dos cargas.** Dos cargas puntuales están separadas por una distancia de 10.0 cm. Una tiene una carga de $-25\ \mu C$ y la otra de $+50\ \mu C$. *a*) Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto P, entre las dos cargas, que está a 2.0 cm a partir de la carga negativa (figura 21-26a). *b*) Si se coloca un electrón (masa = 9.11×10^{-31} kg) en reposo en el punto P y se deja en libertad, ¿cuál será su aceleración inicial (magnitud y dirección)?

PLANTEAMIENTO El campo eléctrico en el punto P está dado por la suma vectorial de los campos creados por Q_1 y Q_2. El campo debido a la carga negativa Q_1 apunta hacia Q_1, mientras el campo debido a la carga positiva Q_2 se aleja de Q_2. Así que ambos campos apuntan hacia la izquierda, como se observa en la figura 21-26b; en consecuencia, podemos sumar las magnitudes de los dos campos algebraicamente, ignorado los signos de las cargas. En *b*) usamos la segunda ley de Newton ($F = ma$) para determinar la aceleración, donde $F = qE$ (ecuación 21-5).

SOLUCIÓN *a*) Cada campo se debe a una carga puntual y está dado por la ecuación 21-4, $E = kQ/r^2$. El campo total es

$$\begin{aligned} E &= k\frac{Q_1}{r_1^2} + k\frac{Q_2}{r_2^2} = k\left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2}\right) \\ &= (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\left(\frac{25 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{(2.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2} + \frac{50 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{(8.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2}\right) \\ &= 6.3 \times 10^8\ \mathrm{N/C}. \end{aligned}$$

b) El campo eléctrico apunta hacia la izquierda, así que el electrón sentirá una fuerza hacia la *derecha*, puesto que está cargado negativamente. Por lo tanto, la aceleración $a = F/m$ (segunda ley de Newton) será hacia la derecha. La fuerza sobre una carga q en un campo eléctrico E es $F = qE$ (ecuación 21-5). En consecuencia, la magnitud de la aceleración es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(6.3 \times 10^8\ \mathrm{N/C})}{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 1.1 \times 10^{20}\ \mathrm{m/s^2}.$$

NOTA Considerando con cuidado la dirección y el sentido de *cada* campo ($\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$) antes de realizar los cálculos, estamos seguros de que nuestros cálculos se pueden hacer de manera sencilla y correcta.

EJEMPLO 21–8 **$\vec{E}$ debido a dos cargas puntuales.** Calcule el campo eléctrico total *a*) en el punto A y *b*) en el punto B de la figura 21-27 debido las cargas Q_1 y Q_2.

PLANTEAMIENTO El cálculo es similar al del ejemplo 21-3, excepto que ahora tratamos con campos eléctricos y no con fuerzas. El campo eléctrico en el punto A es la suma vectorial de los campos $\vec{E}_{A1}$ debido a Q_1, y $\vec{E}_{A2}$ debido a Q_2. Calculamos la magnitud del campo producido por cada carga puntual y luego sumamos sus componentes para hallar el campo total en el punto A. Hacemos lo mismo para el punto B.

SOLUCIÓN *a*) La magnitud del campo eléctrico producido en el punto A por cada una de las cargas Q_1 y Q_2 está dada por $E = kQ/r^2$, así que

$$E_{A1} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(50 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.60\ \mathrm{m})^2} = 1.25 \times 10^6\ \mathrm{N/C},$$

$$E_{A2} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(50 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.30\ \mathrm{m})^2} = 5.0 \times 10^6\ \mathrm{N/C}.$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ignore los signos de las carga, y determine la dirección y el sentido del campo físicamente, mostrando las direcciones correspondientes en un diagrama

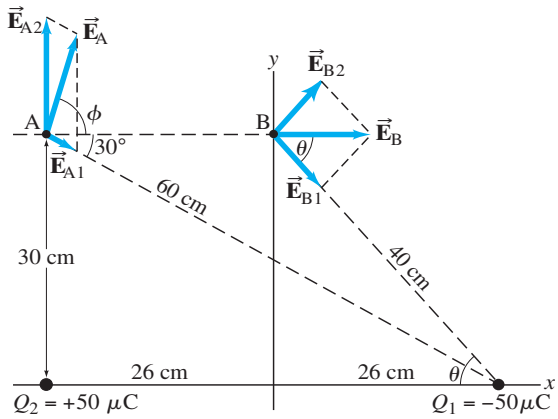


FIGURA 21–27 Cálculo del campo eléctrico en los puntos A y B en el ejemplo 21-8.

La dirección de E_{A1} apunta desde A hacia Q_1 (carga negativa), mientras que E_{A2} apunta desde Q_2 alejándose de A, como se muestra en la figura, así que el campo eléctrico total en el punto A, $\vec{\mathbf{E}}_A$, tiene componentes

$$E_{Ax} = E_{A1}\cos 30^\circ = 1.1 \times 10^6\,\text{N/C},$$
$$E_{Ay} = E_{A2} - E_{A1}\,\text{sen}\,30^\circ = 4.4 \times 10^6\,\text{N/C}.$$

En consecuencia, la magnitud de $\vec{\mathbf{E}}_A$ es

$$E_A = \sqrt{(1.1)^2 + (4.4)^2} \times 10^6\,\text{N/C} = 4.5 \times 10^6\,\text{N/C},$$

y su dirección está dada por el ángulo ϕ, mediante $\tan\phi = E_{Ay}/E_{Ax} = 4.4/1.1 = 4.0$, de manera que $\phi = 76^\circ$.

b) Como el punto B es equidistante de las dos cargas puntuales (40 cm usando el teorema de Pitágoras), las magnitudes de E_{B1} y E_{B2} son las mismas; esto es,

$$E_{B1} = E_{B2} = \frac{kQ}{r^2} = \frac{(9.0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(50 \times 10^{-6}\,\text{C})}{(0.40\,\text{m})^2}$$
$$= 2.8 \times 10^6\,\text{N/C}.$$

También, por la simetría, los componentes *y* son iguales y opuestos, por lo que se cancelan. De ahí que el total de campos E_B sea horizontal e igual a $E_{B1}\cos\theta + E_{B2}\cos\theta = 2\,E_{B1}\cos\theta$. De los diagramas, $\cos\theta = 26\text{ cm}/40\text{ cm} = 0.65$. Entonces,

$$E_B = 2E_{B1}\cos\theta = 2(2.8 \times 10^6\,\text{N/C})(0.65)$$
$$= 3.6 \times 10^6\,\text{N/C},$$

por lo que la dirección de $\vec{\mathbf{E}}_B$ es a lo largo del eje *x* positivo.

NOTA Pudimos resolver el inciso *b*) de la misma manera que lo hicimos en el inciso *a*). Pero la simetría nos permitió resolver el problema con menor esfuerzo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cuando sea posible, use argumentos de simetría para simplificar el trabajo

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Electrostática: Fuerzas eléctricas y campos eléctricos

Para resolver problemas de electrostática se sigue, en gran parte, el procedimiento de resolución de problemas general que se describió en la sección 4-8. Ya sea que se use el campo eléctrico o las fuerzas electrostáticas, el procedimiento es similar:

1. **Dibuje** con cuidado un **diagrama**, esto es, un diagrama de cuerpo libre para cada objeto, mostrando todas las fuerzas que actúan sobre ese objeto o mostrando el campo eléctrico en un punto debido a todas las cargas presentes significativas. Determine la **dirección** de cada fuerza o campo eléctrico físicamente: cargas iguales se repelen; cargas opuestas se atraen; los campos apuntan alejándose de las cargas positivas y hacia las cargas negativas. Muestre y rotule cada vector de fuerza o de campo en su diagrama.
2. **Aplique la ley de Coulomb** para calcular la magnitud de la fuerza que cada carga presente ejerce sobre un cuerpo cargado o la magnitud del campo eléctrico que cada carga produce en un punto dado. Considere sólo las magnitudes de las cargas (sin considerar los signos negativos) y calcule la magnitud de cada fuerza o campo eléctrico.
3. **Sume vectorialmente** todas las fuerzas sobre un objeto, o los campos presentes en un punto dado, para obtener la resultante. Use argumentos de **simetría** (por ejemplo, en la geometría) siempre que sea posible.
4. **Revise** su resultado. ¿Es **razonable**? Si depende de la distancia, ¿da resultados razonables en los casos límite?

21–7 Cálculo del campo eléctrico para distribuciones continuas de carga

En muchas ocasiones podemos tratar la carga como si estuviera distribuida de manera continua.[†] Es posible dividir una distribución continua de carga en cargas infinitesimales dQ, cada una de las cuales actuará como una pequeña carga puntual. La contribución al campo eléctrico a una distancia r de cada una de las dQ es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}. \qquad \textbf{(21–6a)}$$

Por lo que el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, en cualquier punto, se obtiene sumando sobre todas las contribuciones infinitesimales, es decir, integrando

$$\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}}. \qquad \textbf{(21–6b)}$$

Observe que $d\vec{\mathbf{E}}$ es un vector (cuya magnitud está dada por la ecuación 21-6a). [En ocasiones donde la ecuación 21-6b es difícil de evaluar, se pueden utilizar otras técnicas (las cuales se explicarán en los siguientes dos capítulos) para determinar $\vec{\mathbf{E}}$. En muchas ocasiones también puede utilizarse integración numérica].

EJEMPLO 21–9 **Un anillo de carga.** Un objeto delgado, con forma de anillo de radio a tiene una carga total $+Q$ distribuida de manera uniforme sobre él. Determine el campo eléctrico en un punto P a lo largo de su eje, a una distancia x del centro. Véase la figura 21-28. Sea λ la carga por unidad de longitud (C/m).

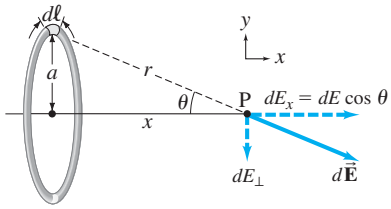


FIGURA 21–28 Ejemplo 21–9.

PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN Seguimos explícitamente los pasos de la estrategia de resolución de problemas de la página 571.

1. **Dibuje** con cuidado un **diagrama**. La figura 21-28 indica la **dirección** del campo eléctrico debido a una longitud infinitesimal $d\ell$ del anillo con carga.
2. **Aplique la ley de Coulomb.** El campo eléctrico, $d\vec{\mathbf{E}}$, debido a este segmento particular del anillo de longitud $d\ell$, tiene una magnitud

   $$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}.$$

   El anillo completo es de una longitud (circunferencia) de $2\pi a$, así que la carga en una longitud $d\ell$ es

   $$dQ = Q\left(\frac{d\ell}{2\pi a}\right) = \lambda\, d\ell$$

   donde $\lambda = Q/2\pi a$ es la carga por unidad de longitud. Ahora escribimos dE como

   $$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}.$$

3. Sume los **vectores**, pero use **simetría**: El vector $d\vec{\mathbf{E}}$ tiene componentes dE_x a lo largo del eje x y $dE_\perp$ perpendicular al eje x (figura 21-28). Vamos a sumar (integrar) a lo largo de todo el anillo. Notamos que un segmento de la misma longitud diametralmente opuesto al $d\ell$, mostrado en la figura producirá un $d\vec{\mathbf{E}}$ cuya componente perpendicular al eje x justo cancelará el $dE_\perp$ mostrado. Lo anterior se cumple para todos los segmentos del anillo, así que, por simetría, $\vec{\mathbf{E}}$ tendrá una componente y igual a cero, por lo que necesitamos sólo sumar las componentes x y dE_x. El campo total es, por lo tanto,

   $$E = E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\int\frac{d\ell}{r^2}\cos\theta.$$

   Como $\cos\theta = x/r$, donde $r = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$, tenemos

   $$E = \frac{\lambda}{(4\pi\epsilon_0)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi a} d\ell = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x(2\pi a)}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. **Revise** si el resultado es **razonable**; observe que, a grandes distancias, $x \gg a$, por lo que el resultado se reduce a $E = Q/(4\pi\epsilon_0 x^2)$. Este resultado es de esperarse porque, a grandes distancias, el anillo aparece como una carga puntual (dependencia de $1/r^2$). Observe también que nuestro resultado da $E = 0$ en $x = 0$, como es de esperarse, puesto que todas las componentes se cancelan en el centro del círculo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Use la simetría cuando sea posible

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Revise el resultado considerando que, a grandes distancias, el anillo aparece como una carga puntual

[†]Como creemos que hay una carga mínima (e), este tratamiento es sólo por conveniencia; sin embargo, es útil y preciso, puesto que e es, por lo general, mucho más pequeña que las cargas macroscópicas.

Observe en este ejemplo tres técnicas importantes de resolución de problemas que pueden usarse en otras ocasiones: **1.** Utilice simetría para reducir la complejidad del problema; **2.** exprese la carga dQ en términos de una densidad de carga (en este caso, lineal, $\lambda = Q/2\pi a$); y **3.** verifique el resultado en el límite, cuando r es grande, lo que sirve como una indicación (pero no una prueba) de que la respuesta es correcta (si su resultado no es consistente a grandes r, estaría incorrecto).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Use la simetría, la densidad de carga y los valores límite $r = 0$ e ∞

EJEMPLO CONCEPTUAL 21–10 **Carga en el centro de un anillo.** Imagine una pequeña carga positiva localizada en el centro de un anillo no conductor, con una distribución de carga negativa uniforme. ¿La carga positiva se encuentra en equilibrio si se desplaza ligeramente del centro a lo largo del eje del anillo? Si lo está, ¿el equilibrio es estable? ¿Qué pasa si la pequeña carga es negativa? Desprecie la gravedad, puesto que es mucho menor que las fuerzas electrostáticas.

RESPUESTA La carga positiva está en equilibrio, porque no hay una fuerza neta sobre ella, por *simetría*. Si la carga positiva se mueve alejándose del centro del anillo, a lo largo del eje en cualquier dirección, la fuerza neta será de regreso hacia el centro del anillo, así que la carga está en equilibrio *estable*. Una carga negativa en el centro del anillo no sentiría una fuerza neta, pero está en equilibrio *inestable* porque, si se mueve a lo largo del eje del anillo, la fuerza neta estaría alejándose del centro del anillo y la carga sería empujada hacia fuera.

EJEMPLO 21–11 **Línea larga de carga.** Determine la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto P a una distancia x del punto central 0, de una línea muy larga de carga positiva (un alambre, por ejemplo) distribuida de manera uniforme (figura 21-29). Considere que x es mucho menor que la longitud del alambre, y sea λ la carga por unidad de longitud (C/m).

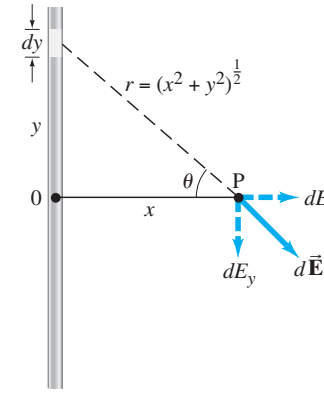


FIGURA 21–29 Ejemplo 21–11.

PLANTEAMIENTO Elegimos un sistema coordenado de manera que el alambre sea paralelo al eje y con el origen en 0, como se representa en la figura. Un segmento de alambre dy tiene una carga $dQ = \lambda\, dy$. El campo eléctrico $d\vec{\mathbf{E}}$ en el punto P debido a esta longitud dy del alambre (en la coordenada y) es de magnitud

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dy}{(x^2 + y^2)},$$

donde $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ como se aprecia en la figura 21-29. El vector $d\vec{\mathbf{E}}$ tiene componentes dE_x y dE_y, como se muestra, donde $dE_x = dE\cos\theta$ y $dE_y = dE\,\text{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN Como 0 está en el punto medio del alambre, la componente y de $\vec{\mathbf{E}}$ será cero, ya que habrá contribuciones iguales a $E_y = \int dE_y$ de segmentos del alambre arriba y abajo del punto 0:

$$E_y = \int dE\,\text{sen}\,\theta = 0.$$

Así que

$$E = E_x = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\cos\theta\, dy}{x^2 + y^2}.$$

La integración aquí es sobre y, a lo largo del alambre, con x igual a la constante. Ahora debemos escribir θ como función de y, o y como función de θ. Hacemos esto último: como $y = x\tan\theta$, tenemos $dy = x\, d\theta/\cos^2\theta$. Más aún, como $\cos\theta = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, entonces $1/(x^2 + y^2) = \cos^2\theta/x^2$ la integral de arriba queda como $(\cos\theta)(x\, d\theta/\cos^2\theta)(\cos^2\theta/x^2) = \cos\theta\, d\theta/x$. Por lo tanto,

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x}(\text{sen}\,\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x},$$

donde hemos considerado que el alambre es extremadamente largo en ambas direcciones ($y \to \pm\infty$) que corresponde al límite $\theta = \pm\pi/2$. Así que el campo cerca de un alambre largo recto de carga uniforme disminuye inversamente con la distancia desde el alambre a la primera potencia.

NOTA Este resultado, obtenido para un alambre infinito, es una buena aproximación para un alambre de longitud finita, siempre y cuando x sea pequeña en comparación con la distancia de P a los extremos del alambre.

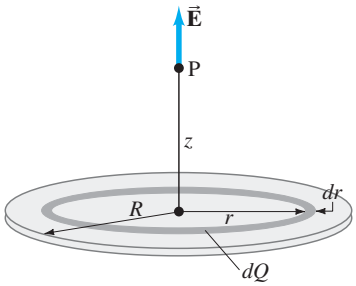


FIGURA 21–30 Ejemplo 21-12: un disco plano de radio R cargado de manera uniforme.

EJEMPLO 21–12 **Disco cargado de manera uniforme.** Se distribuye carga de manera uniforme sobre un disco delgado circular de radio R. La carga por unidad de área (C/m^2) es σ. Calcule el campo eléctrico sobre un punto P en el eje del disco a una distancia z de su centro (figura 21-30).

PLANTEAMIENTO Podemos considerar al disco como un conjunto de anillos concéntricos. Es posible entonces aplicar el resultado del ejemplo 21-9 a cada uno de estos anillos y luego sumar sobre todos los anillos

SOLUCIÓN Para el anillo de radio r, mostrado en la figura 21-30, el campo eléctrico tiene una magnitud (véase el resultado del ejemplo 21-9)

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\,dQ}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donde hemos escrito dE (en lugar de E) para este anillo delgado de carga total dQ. El anillo tiene una área $(dr)(2\pi r)$ y carga por unidad de área $\sigma = dQ/(2\pi r\,dr)$. Despejamos de aquí dQ $(= \sigma\,2\pi r\,dr)$ e insertamos esto en la ecuación anterior para dE:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r\,dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma r\,dr}{2\epsilon_0(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ahora sumamos sobre todos los anillos, comenzando en $r = 0$, hasta el anillo más grande, con $r = R$:

$$E = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Lo anterior nos da la magnitud de $\vec{\mathbf{E}}$ en cualquier punto z a lo largo del eje del disco. La dirección de cada $d\vec{\mathbf{E}}$ debida a cada anillo es a lo largo del eje z (como en el ejemplo 21-9); por lo tanto, la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ es a lo largo del eje z. Si Q y σ son positivas, $\vec{\mathbf{E}}$ apunta alejándose del disco; si Q y σ son negativas, $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia el disco.

Si el radio del disco, en el ejemplo 21-12, es mucho más grande que la distancia del punto P al centro del disco (es decir, $z \ll R$) podemos obtener un resultado muy útil: el segundo término en la solución anterior se vuelve muy pequeño, así que

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \qquad \text{[plano infinito]} \quad \textbf{(21–7)}$$

Este resultado es válido para cualquier punto por arriba (o abajo) de un plano infinito de forma arbitraria con densidad de carga uniforme σ. También es válido para puntos cerca de un plano finito, siempre y cuando el punto esté cerca del plano en comparación con la distancia hacia los bordes del plano. En consecuencia, el campo cercano a un plano cargado uniformemente es homogéneo y se dirige hacia fuera del plano si la carga es positiva.

Es interesante comparar aquí la dependencia con la distancia del campo eléctrico debido a una carga puntual ($E \sim 1/r^2$), debido a una línea larga de carga uniforme ($E \sim 1/r$) y a un plano grande de carga uniforme (E no depende de r).

EJEMPLO 21–13 **Dos placas paralelas.** Determine el campo eléctrico entre dos placas paralelas grandes u hojas, que son muy delgadas y están separadas por una distancia d que es muy pequeña comparada con el largo y el ancho de las placas. Una placa porta una densidad superficial de carga uniforme σ y la otra lleva una densidad superficial de carga uniforme $-\sigma$, como se muestra en la figura 21-31 (las placas se extienden hacia arriba y hacia abajo más allá de lo que se ve en la figura).

PLANTEAMIENTO A partir de la ecuación 21-7, cada placa produce un campo eléctrico de magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. El campo debido a la placa positiva se aleja de la placa, mientras que el campo debido a la placa negativa apunta hacia ella.

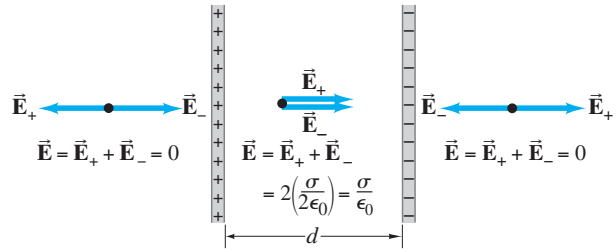


FIGURA 21–31 Ejemplo 21-13. (Sólo se muestra la parte central de estas placas: sus dimensiones son grandes comparadas con su separación d).

SOLUCIÓN En la región entre las placas, los campos se suman como se muestra en la figura:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

El campo es uniforme, puesto que las placas son muy largas, comparadas con la separación entre ellas, así que el resultado es válido para cualquier punto, ya sea que esté cerca de una u otra placa o en el punto medio entre ellas, siempre y cuando el punto esté lejos de los bordes. Fuera de las placas, los campos se cancelan,

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0,$$

como se muestra en la figura 21-31. Tales resultados son válidos en forma ideal para placas infinitamente largas y son una buena aproximación para placas finitas, si la separación es mucho menor que las dimensiones de las placas y para puntos que no están cerca de los bordes.

NOTA: Estos útiles y extraordinarios resultados ilustran el principio de superposición y su gran poder.

21–8 Líneas de campo

Puesto que el campo eléctrico es un vector, en ocasiones se dice que es un **campo vectorial**. Podríamos indicar el campo eléctrico con flechas en varios puntos en una situación dada; por ejemplo, en los puntos A, B y C de la figura 21-32. Las direcciones de $\vec{\mathbf{E}}_A$, $\vec{\mathbf{E}}_B$ y $\vec{\mathbf{E}}_C$ son iguales a las direcciones de las fuerzas mostradas en la figura 21-22, pero sus magnitudes (la longitud de las flechas) son diferentes, ya que dividimos $\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 21-33 entre q para obtener $\vec{\mathbf{E}}$. Sin embargo, las longitudes relativas de $\vec{\mathbf{E}}_A$, $\vec{\mathbf{E}}_B$ y $\vec{\mathbf{E}}_C$ son las mismas que para las fuerzas, puesto que dividimos siempre entre la misma q. No obstante, para indicar el campo eléctrico de esta manera en *muchos* puntos, obtendríamos demasiadas flechas, lo cual resultaría complicado o confuso. Para evitar lo anterior, usamos otra técnica, las llamadas líneas de campo.

Para visualizar el campo eléctrico, dibujamos una serie de líneas para indicar la dirección del campo eléctrico en varios puntos del espacio. Estas **líneas de campo eléctrico** (también llamadas **líneas de fuerza**) se dibujan de manera que señalen la dirección de la fuerza debida al campo dado sobre una carga de prueba positiva. La figura 21-33a muestra las líneas de fuerza debidas a una sola carga positiva aislada, mientras que la figura 21-33b presenta las líneas de fuerza debidas a una sola carga negativa aislada. En el inciso *a*), las líneas apuntan radialmente hacia fuera de la carga y en el inciso *b*) apuntan radialmente hacia la carga, porque ésa es la dirección de la fuerza que actuaría sobre una carga de prueba positiva en cada caso (como en la figura 21-25). Sólo se indican algunas líneas representativas. Podríamos dibujar también líneas intermedias entre aquellas mostradas, ya que también existe un campo eléctrico ahí. Sería posible dibujar las líneas de forma que *el número de líneas que empiecen en una carga positiva, o que terminen en una carga negativa, sea proporcional a la magnitud de la carga.* Observe que cerca de la carga, donde el campo eléctrico es más intenso ($F \propto 1/r^2$), las líneas están más juntas. Ésta es una propiedad general de las líneas de campo eléctrico: *cuanto más cerca estén las líneas de campo, mayor será el campo eléctrico en esa región.* De hecho, es posible dibujar las líneas de campo de manera que el número de líneas que cruzan una área unitaria perpendicular a $\vec{\mathbf{E}}$ es proporcional a la magnitud del campo eléctrico.

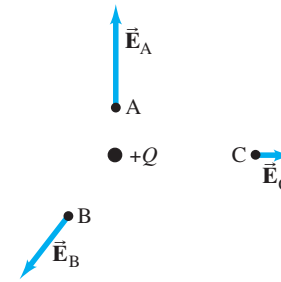
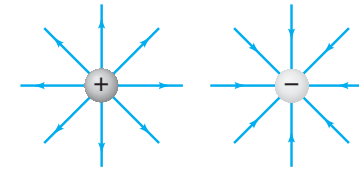


FIGURA 21–32 Vector de campo eléctrico mostrado en tres puntos diferentes, debido a una carga puntual Q. (Compare con la figura 21-22).

FIGURA 21–33 Líneas de campo eléctrico *a*) cerca de una carga puntual positiva aislada y *b*) cerca de una carga puntual negativa aislada.



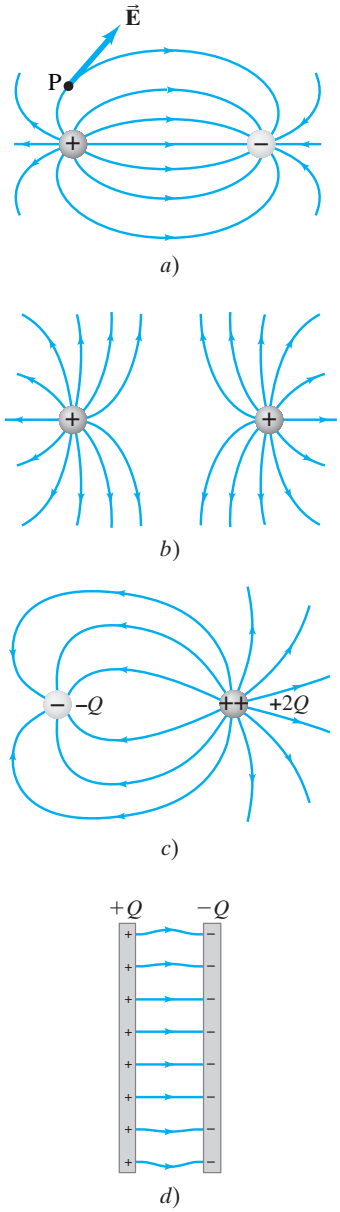


FIGURA 21–34 Líneas de campo eléctrico para cuatro arreglos de cargas.

La figura 21-34a muestra las líneas de campo eléctrico debidas a dos cargas iguales de signos opuestos, una combinación que se conoce con el nombre de **dipolo eléctrico**. Las líneas de campo se curvan en este caso y están dirigidas de la carga positiva a la carga negativa. La dirección del campo eléctrico en cualquier punto es tangente a la línea de campo en ese punto, como se indica con el vector $\vec{\mathbf{E}}$ en el punto P. Para que se convenza de que éste es el patrón de las líneas de campo eléctrico, puede realizar cálculos como los que se hicieron en el ejemplo 21-8, justo para este caso (véase la figura 21-27). La figura 21-34b contiene las líneas de campo para dos cargas iguales positivas y la figura 21-34c, para cargas desiguales $-Q$ y $+2Q$. Observe que salen el doble de líneas de $+2Q$, que las que entran a $-Q$ (el número de líneas es proporcional a la magnitud de Q). Por último, en la figura 21-34d hay líneas de campo entre dos placas paralelas con cargas de la misma magnitud, aunque de signos opuestos. Observe que las líneas de campo eléctrico entre las dos placas empiezan perpendiculares a la superficie de las placas de metal (en la siguiente sección veremos por qué esto es verdad) y van directamente de una placa a la otra, como es de esperarse, porque una carga de prueba positiva localizada entre las placas sentirá una fuerte repulsión de la placa positiva y una fuerte atracción hacia la placa negativa. Las líneas de campo entre dos placas cercanas son paralelas y están igualmente espaciadas en la parte central, pero se curvan un poco cerca de los bordes. Así, en la región central, el campo eléctrico tiene la misma magnitud en todos los puntos, por lo que es posible escribir (véase el ejemplo 21-13).

$$E = \text{constante} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad \left[\begin{array}{l}\text{entre dos placas paralelas,}\\ \text{muy cercanas, con cargas opuestas}\end{array}\right] \qquad \textbf{(21–8)}$$

Por lo general, la curvatura del campo cerca de los bordes puede ignorarse, sobre todo si la separación entre las placas es pequeña comparada con su ancho y su largo.

Resumimos las propiedades de las líneas de campo como sigue:

1. Las líneas de campo eléctrico indican la dirección del campo eléctrico; el campo apunta en la dirección tangente a la línea de campo en cualquier punto.
2. Las líneas de campo eléctrico se dibujan de manera que la magnitud del campo eléctrico, E, es proporcional al número de líneas que atraviesan una área unitaria perpendicular a las líneas. Cuanto más cercanas estén las líneas, más intenso será el campo.
3. Las líneas de campo eléctrico empiezan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas; el número de líneas que empiezan o terminan es proporcional a la magnitud de la carga.

También advierta que las líneas de campo nunca se cruzan. ¿Por qué? Porque el campo eléctrico no puede tener dos direcciones distintas en un punto dado, ni ejercer más de una fuerza sobre una carga de prueba.

Campo gravitacional

El concepto de campo también puede aplicarse a la fuerza gravitacional, como se mencionó en el capítulo 6. Así, es posible afirmar que existe un **campo gravitacional** para cada objeto con masa. Un objeto atrae a otro a través del campo gravitacional. Puede decirse que la Tierra, por ejemplo, posee un campo gravitacional (figura 21-35), que es el responsable de la fuerza gravitacional sobre los objetos. El *campo gravitacional* se define como la *fuerza por unidad de masa*. La magnitud del campo gravitacional de la Tierra, en cualquier punto arriba de la superficie terrestre, es, por lo tanto, (GM_E/r^2), donde M_E es la masa de la Tierra, r es la distancia del punto en cuestión al centro de la Tierra y G es la constante de gravitación universal (capítulo 6). En la superficie de la Tierra, r es el radio de la Tierra y el campo gravitacional es igual a g, la aceleración debida a la gravedad. Más allá de la Tierra, el campo gravitacional puede calcularse en cualquier punto como una suma de términos debidos a la Tierra, el Sol, la Luna y otros cuerpos que contribuyan de manera significativa.

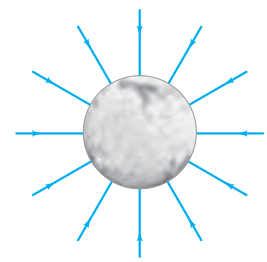


FIGURA 21–35 El campo gravitacional de la Tierra.

21–9 Campos eléctricos y conductores

Ahora veremos algunas propiedades de los materiales conductores. Primero, *el campo eléctrico dentro de un conductor es cero en una situación estática*, esto es, cuando las cargas están en reposo. Si hubiera un campo eléctrico dentro de un conductor, entonces habría una fuerza sobre los electrones libres. Los electrones se moverían hasta alcanzar posiciones donde el campo eléctrico y, por lo tanto, la fuerza eléctrica sobre ellos sean cero.

Este razonamiento produce consecuencias interesantes. La primera es que *cualquier carga neta en un conductor se distribuye sobre su superficie.* (Si *hubiera* cargas adentro, habría un campo eléctrico.) Para un conductor cargado negativamente, puede pensarse que las cargas negativas se repelen entre sí y corren hacia la superficie para alejarse una de otra lo más posible. Otra consecuencia es la siguiente. Suponga que una carga positiva Q está rodeada de un material conductor descargado y aislado con forma de cascarón esférico (figura 21-36). Como no puede haber campo dentro del metal, las líneas que dejan la carga central positiva deben terminar en cargas negativas en la superficie interna del metal, así que una cantidad igual de carga negativa, $-Q$, se induce sobre la superficie interna del cascarón esférico. Luego, como el cascarón es neutro, habrá una carga positiva de la misma magnitud, $+Q$, en la superficie externa del cascarón. Así, aunque no hay un campo en el metal mismo, existe un campo eléctrico fuera de él, como se observa en la figura 21-36, como si el metal no estuviera ahí.

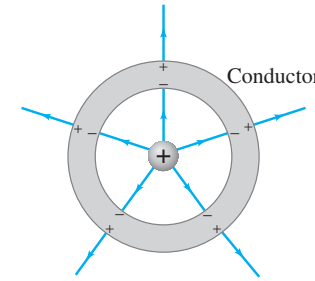
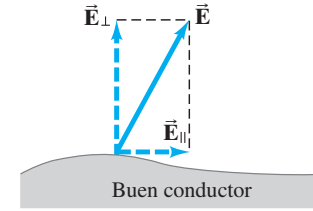


FIGURA 21–36 Una carga dentro de un cascarón de metal esférico neutro induce cargas en sus superficies. El campo eléctrico existe aún más allá del cascarón, pero no dentro del conductor mismo.

Una propiedad relacionada de los campos eléctricos estáticos y los conductores es que *el campo eléctrico siempre es perpendicular a la superficie externa de un conductor.* Si hubiera una componente de $\vec{\mathbf{E}}$ paralela a la superficie (figura 21-37), ejercería una fuerza sobre los electrones libres de la superficie, lo cual produciría que los electrones se muevan a lo largo de la superficie hasta alcanzar posiciones donde no se ejerza una fuerza neta sobre ellos paralela a la superficie, es decir, hasta que el campo eléctrico sea perpendicular a la superficie.

FIGURA 21–37 Si el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en la superficie de un conductor tuviera una componente paralela a la superficie, $\vec{\mathbf{E}}_{||}$, este último pondría los electrones en movimiento. En el caso estático, $\vec{\mathbf{E}}_{||}$ debe ser cero, y el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie del conductor: $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\perp}$.



Tales propiedades se cumplen sólo para conductores. Dentro de un material no conductor, el cual no cuenta con electrones libres, puede haber un campo eléctrico estático, como veremos en el siguiente capítulo. Además, el campo eléctrico afuera de un no conductor no necesariamente forma un ángulo de 90° con la superficie.

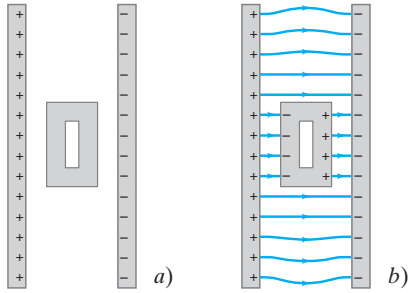


FIGURA 21–38 Ejemplo 21–14.

EJEMPLO CONCEPTUAL 21–14 Escudo eléctrico y seguridad en una tormenta. Una caja de metal hueca neutra se coloca entre dos placas paralelas con carga, como se ilustra en la figura 21-38a. ¿Cómo es el campo dentro de la caja?

RESPUESTA Si nuestra caja de metal fuera sólida, y no hueca, los electrones libres en la caja se redistribuirían a sí mismos a lo largo de la superficie hasta que todos sus campos individuales se cancelaran uno a otro dentro de la caja. El campo neto dentro de la caja sería cero. Para una caja hueca, el campo externo no cambia, puesto que los electrones en el metal se pueden mover a la superficie tan libremente como antes. De ahí que el campo dentro de la caja de metal hueca también es cero y las líneas de campo son como se ilustra en la figura 21-38b. Una caja conductora usada de esta manera es un aparato efectivo para resguardar instrumentos delicados y circuitos electrónicos de campos eléctricos externos no deseados. También vemos que un lugar relativamente seguro para resguardarse durante una tormenta eléctrica es el interior de un automóvil, ya que está rodeado de metal. Véase también la figura 21-39, donde una persona dentro de una "jaula" está protegida de fuertes descargas eléctricas.

FIGURA 21–39 En la vecindad de esta "jaula de Faraday" hay un intenso campo eléctrico, tanto, que electrones sueltos en la atmósfera son acelerados hasta la energía cinética necesaria para arrancar electrones de los átomos del aire, lo que produce una avalancha de carga, la cual fluye a (o desde) la jaula de metal. Aun así, la persona en el interior de la jaula no resulta afectada.

FÍSICA APLICADA
Escudo eléctrico

21–10 Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico

Si un objeto con carga eléctrica q está en un punto del espacio donde el campo eléctrico es $\vec{\mathbf{E}}$, la fuerza sobre el objeto está dada por

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$$

(véase la ecuación 21-5). En las secciones anteriores vimos cómo determinar $\vec{\mathbf{E}}$ para situaciones particulares. Ahora supongamos que conocemos $\vec{\mathbf{E}}$, y que deseamos calcular la fuerza sobre un objeto cargado así como el movimiento posterior del objeto. (Suponemos que no actúa ninguna otra fuerza).

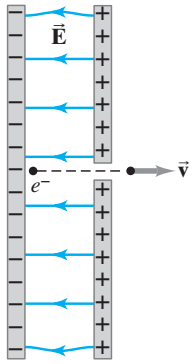


FIGURA 21–40 Ejemplo 21–15.

EJEMPLO 21–15 **Electrón acelerado por un campo eléctrico.** Un electrón (masa $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) es acelerado en el campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ ($E = 2.0 \times 10^4$N/C) entre dos placas cargadas paralelas. La separación entre las placas es de 1.5 cm. El electrón es acelerado a partir del reposo cerca de la placa negativa y pasa a través de un pequeño agujero en la placa positiva (figura 21-40). *a*) ¿Con qué rapidez deja el agujero? *b*) Muestre que la fuerza gravitacional puede ignorarse. Considere que el agujero es tan pequeño que no afecta el campo uniforme entre las placas.

PLANTEAMIENTO Podemos obtener la velocidad de electrón usando las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2, luego de encontrar su aceleración a partir de la segunda ley de Newton, $F = ma$. La magnitud de la fuerza sobre el electrón es $F = qE$ y se dirige hacia la derecha.

SOLUCIÓN *a*) La magnitud de la aceleración del electrón es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}.$$

Entre las placas $\vec{\mathbf{E}}$ es uniforme, así que el electrón sufre un movimiento uniformemente acelerado con aceleración

$$a = \frac{(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(2.0 \times 10^4\,\text{N/C})}{(9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg})} = 3.5 \times 10^{15}\,\text{m/s}^2.$$

Viaja una distancia $x = 1.5 \times 10^{-2}$ m antes de llegar al agujero y, como su rapidez inicial es cero, es posible usar la ecuación cinemática $v^2 = v_0^2 + 2ax$ (ecuación 2-12c), con $v_0 = 0$:

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2(3.5 \times 10^{15}\,\text{m/s}^2)(1.5 \times 10^{-2}\,\text{m})} = 1.0 \times 10^7\,\text{m/s}.$$

No hay campo eléctrico fuera de las placas, así que, después de pasar por el agujero, el electrón continúa moviéndose con esta velocidad, que ahora es constante.

b) La magnitud de la fuerza eléctrica sobre el electrón es

$$qE = (1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(2.0 \times 10^4\,\text{N/C}) = 3.2 \times 10^{-15}\,\text{N}.$$

La fuerza gravitacional es

$$mg = (9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) = 8.9 \times 10^{-30}\,\text{N},$$

la cual es ¡10^{14} veces menor! Observe que el campo eléctrico debido al electrón no se usa en el problema (pues una partícula no puede ejercer una fuerza sobre sí misma).

EJEMPLO 21–16 **Electrón que se mueve en forma perpendicular a $\vec{\mathbf{E}}$.** Suponga que un electrón que viaja con rapidez v_0 e $\vec{\mathbf{E}}$. Entra a un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ que es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}_0$ como se indica en la figura 21-41. Describa su movimiento dando la ecuación de su trayectoria mientras se mueve dentro del campo eléctrico. Ignore la gravedad.

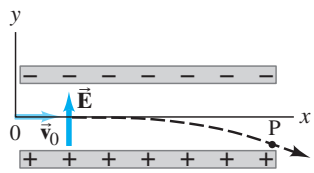
PLANTEAMIENTO De nuevo usamos la segunda ley de Newton, con $F = qE$, y las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2.

SOLUCIÓN Cuando el electrón entra al campo eléctrico (en $x = y = 0$) tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_0 = v_0\hat{\mathbf{i}}$ en la dirección x. El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, que apunta verticalmente hacia arriba, imparte una aceleración vertical uniforme al electrón dada por

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = -\frac{eE}{m},$$

donde establecimos que $q = -e$ para el electrón.

FIGURA 21–41 Ejemplo 21–16.



La posición vertical del electrón está dada por la ecuación 2-12b,

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{eE}{2m}t^2$$

puesto que el movimiento es con aceleración constante. La posición horizontal está dada por

$$x = v_0 t$$

ya que $a_x = 0$. Eliminamos t entre estas dos ecuaciones para obtener

$$y = -\frac{eE}{2mv_0^2}x^2,$$

que es la ecuación de una parábola (como en el movimiento de proyectiles, sección 3-7).

21–11 Dipolos eléctricos

La combinación de dos cargas de la misma magnitud, pero de signos opuestos, $+Q$ y $-Q$, separadas por una distancia ℓ, se conoce como **dipolo eléctrico**. La cantidad $Q\ell$ se llama **momento dipolar** y se representa[†] con el símbolo p. El momento dipolar puede considerarse como un vector $\vec{\mathbf{p}}$, de magnitud $Q\ell$, que apunta en la dirección que va de la carga negativa a la carga positiva, como se indica en la figura 21-42. Muchas moléculas, como la molécula diatómica CO, tienen un momento dipolar (C con una carga positiva pequeña y O con una carga negativa pequeña de la misma magnitud), y se les conoce como **moléculas polares**. Aun cuando la molécula es neutra como un todo, hay una separación de carga que resulta de una distribución desigual de los electrones entre los dos átomos.[‡] (Las moléculas simétricas diatómicas, como el O_2, no tienen momento dipolar.) La molécula de agua, con su distribución desigual de electrones (O es negativo y los dos H son positivos), también cuenta con un momento dipolar (véase la figura 21-43).

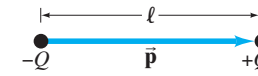
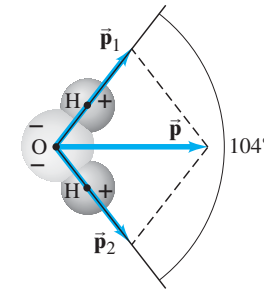


FIGURA 21–42 Un dipolo consiste de dos cargas iguales de signos opuestos, $+Q$ y $-Q$, separadas por una distancia ℓ. El momento dipolar es $\vec{\mathbf{p}} = Q\vec{\boldsymbol{\ell}}$ y apunta de la carga negativa a la carga positiva.

FIGURA 21–43 En la molécula del agua (H_2O), los electrones pasan más tiempo alrededor del átomo de oxígeno que alrededor de los dos átomos de hidrógeno. El momento dipolar neto $\vec{\mathbf{p}}$ puede considerarse como la suma vectorial de los dos momentos dipolares $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_2$ que apuntan desde el O hacia cada uno de los H, como se muestra en la figura: $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$.



Dipolo en un campo externo

Primero consideremos un dipolo, de momento dipolar $p = Q\ell$, que se localiza dentro de un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, como se muestra en la figura 21-44. Si el campo es uniforme, la fuerza $Q\vec{\mathbf{E}}$ sobre la carga positiva y la fuerza $-Q\vec{\mathbf{E}}$ sobre la carga negativa, dan por resultado una fuerza neta nula sobre el dipolo. Sin embargo, habrá una *torca* (también llamada *torque* o *momento de torsión*) sobre el dipolo (figura 21-44), con una magnitud (calculada con respecto al centro, 0, del dipolo).

$$\tau = QE\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta + QE\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta = pE\operatorname{sen}\theta. \qquad \textbf{(21–9a)}$$

Lo anterior puede escribirse en notación vectorial como

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}. \qquad \textbf{(21–9b)}$$

El efecto de la torca es tratar de hacer girar al dipolo de manera que $\vec{\mathbf{p}}$ sea paralelo a $\vec{\mathbf{E}}$. El trabajo que realiza el campo eléctrico sobre el dipolo para cambiar el ángulo θ de θ_1 a θ_2 es (véase la ecuación 10-22):

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta.$$

Necesitamos escribir la torca como $\tau = -pE\operatorname{sen}\theta$, porque su dirección es opuesta a la dirección en que se incrementa θ (regla de la mano derecha). Por lo tanto,

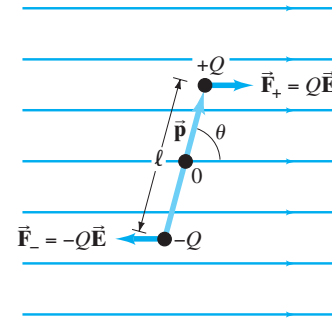
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = -pE\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = pE\cos\theta\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = pE(\cos\theta_2 - \cos\theta_1).$$

El trabajo positivo que realiza el campo disminuye la energía potencial, U, del dipolo en este campo. (Recuerde la relación entre trabajo y energía potencial, ecuación 8-4, $\Delta U = -W$.) Si elegimos $U = 0$, cuando $\vec{\mathbf{p}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{E}}$ (esto es, considerando $\theta_1 = 90°$, de manera que $\cos\theta_1 = 0$), y estableciendo que $\theta_2 = \theta$, tenemos

$$U = -W = -pE\cos\theta = -\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{E}}. \qquad \textbf{(21–10)}$$

Si el campo eléctrico *no* es uniforme, la fuerza sobre $+Q$ del dipolo puede no tener la misma magnitud que la fuerza sobre $-Q$, así que es posible que haya una fuerza neta además de la torca.

FIGURA 21–44 (abajo) Un momento dipolar eléctrico en un campo eléctrico uniforme.



[†]Tenga cuidado de no confundir esta p para el momento dipolar con la p usada para la cantidad de movimiento.

[‡]El valor de las cargas separadas puede ser una fracción de e (digamos $\pm 0.2e$ o $\pm 0.4e$), pero observe que estas cargas no violan lo que afirmamos acerca de que e es la carga más pequeña. Estas cargas menores que e no pueden aislarse y sólo representan cuánto tiempo pasan los electrones alrededor de un átomo o del otro.

EJEMPLO 21–17 **Dipolo en un campo.** El momento dipolar de la molécula de agua es 6.1×10^{-30} C·m. Se coloca una molécula de agua en un campo eléctrico uniforme de magnitud 2.0×10^5 N/C. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la torca máxima que puede ejercer el campo sobre la molécula? *b*) ¿Cuál es la energía potencial cuando la torca alcanza su valor máximo? *c*) ¿En que posición la energía potencial tomará su valor máximo? ¿Por qué ésta es diferente de la posición donde la torca alcanza su valor máximo?

PLANTEAMIENTO La torca está dada por la ecuación 21-9 y la energía potencial por la ecuación 21-10.

SOLUCIÓN *a*) De la ecuación 21-9, vemos que τ se maximiza cuando θ es 90°. Por lo tanto $\tau = pE = (6.1 \times 10^{-30}\,\text{C}\cdot\text{m})(2.0 \times 10^5\,\text{N/C}) = 1.2 \times 10^{-24}\,\text{N}\cdot\text{m}$.

b) La energía potencial para $\theta = 90°$ es cero (ecuación 21-10). Observe que la energía potencial es negativa para valores menores de θ, así que U no es un mínimo para $\theta = 90°$.

c) La energía potencial U será un máximo cuando $\cos\theta = -1$ en la ecuación 21-10, así que $\theta = 180°$, lo cual significa que $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ son antiparalelos. La energía potencial se maximiza cuando el dipolo está orientado de manera que tenga que girar a través del mayor ángulo posible, 180°, para alcanzar la posición de equilibrio en $\theta = 0°$. La torca, por el otro lado, se maximiza cuando las fuerzas eléctricas son perpendiculares a $\vec{\mathbf{p}}$.

Campo eléctrico producido por un dipolo

Acabamos de ver cómo un campo eléctrico afecta a un dipolo eléctrico. Ahora supongamos que no hay un campo externo y que queremos calcular el campo eléctrico producido *por* el dipolo. Por simplicidad, nos restringimos a puntos que están en la bisectriz perpendicular del dipolo, como el punto P en la figura 21-45, que está a una distancia r sobre el punto medio del dipolo. Observe que r en la figura 21-45 no es la distancia de ninguna de las cargas al punto P; esta última es $(r^2 + \ell^2/4)^{\frac{1}{2}}$ que es la que debe usarse en la ecuación 21-4. El campo total en el punto P es

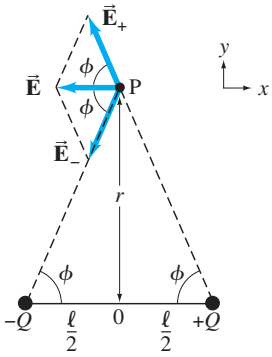


FIGURA 21–45 Campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico.

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_-,$$

donde $\vec{\mathbf{E}}_+$ y $\vec{\mathbf{E}}_-$ son los campos debidos a las cargas + y −, respectivamente. Las magnitudes de E_+ y E_- son iguales:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2 + \ell^2/4}.$$

Sus componentes y se cancelan en el punto P (de nuevo por simetría), así que la magnitud del campo total $\vec{\mathbf{E}}$ es

$$E = 2E_+\cos\phi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r^2 + \ell^2/4}\right)\frac{\ell}{2(r^2 + \ell^2/4)^{\frac{1}{2}}}$$

o, considerando que $Q\ell = p$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{(r^2 + \ell^2/4)^{\frac{3}{2}}}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{sobre la bisectriz}\\ \text{perpendicular del dipolo}\end{array}\right] \quad \textbf{(21–11)}$$

Lejos del dipolo, $r \gg \ell$, esto se reduce a

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{sobre la bisectriz perpendicular}\\ \text{del dipolo, para } r \gg \ell\end{array}\right] \quad \textbf{(21–12)}$$

Así que el campo disminuye más rápidamente para un dipolo que para una carga puntual ($1/r^3$ *versus* $1/r^2$), lo cual es de esperarse, puesto que, a grandes distancias, las dos cargas opuestas aparecen muy juntas y tienden a neutralizarse una con otra. La dependencia $1/r^3$ también se aplica para puntos que no están en la bisectriz perpendicular (véase el problema 67).

*21–12 Fuerzas eléctricas en biología molecular; ADN

El interior de todas las células está compuesto principalmente por agua. Podemos imaginar una célula como un vasto océano de moléculas en movimiento constante (teoría cinética, capítulo 18), con diferentes cantidades de energía cinética y que colisionan una contra otra. Tales moléculas interactúan unas con otras por la *atracción electrostática* entre moléculas.

De hecho, ahora se considera que los procesos celulares son resultado del *movimiento molecular al azar ("térmico"), además del efecto ordenador de la fuerza electrostática.* Por ejemplo, veamos la estructura del ADN y su duplicación. El esquema que presentamos no se ha visto "en acción". Sin embargo, es un modelo de lo que sucede, con base en teorías físicas y en la experimentación.

La información genética que se transmite de una generación a otra en todas las células vivas está contenida en los cromosomas, los cuales están hechos de genes. Cada gen contiene la información necesaria para producir un tipo particular de moléculas de proteína, cuya información está almacenada en la molécula principal de un cromosoma, el ácido desoxirribonucleico (ADN; figura 21-46). Las moléculas de ADN están hechas de muchas pequeñas moléculas conocidas como bases nucleótidos, que son moléculas polares como resultado de una repartición desigual de los electrones. Hay cuatro tipos de bases nucleótidos en el ADN: adenina (A), citosina (C), guanina (G) y tianina (T).

El ADN de un cromosoma generalmente consiste en dos hebras largas de ADN enrolladas una sobre la otra en forma de una "doble hélice". La información genética está contenida en el orden específico de las cuatro bases (A, C, G, T) a lo largo del filamento. Como se muestra en la figura 21-47, las dos hebras son atraídas por fuerzas electrostáticas, es decir, por la atracción de cargas positivas a negativas que existe sobre partes de las moléculas. Vemos en la figura 21-47a que una A (adenina) en una hebra siempre está opuesta a una T en la otra hebra; de manera análoga, una G siempre está opuesta a una C. Este importante efecto de orden ocurre porque las formas de A, T, C y G son tales que T ajusta muy cercanamente sólo dentro de A, y G sólo dentro de C, sólo que en el caso de este corto acercamiento de las porciones cargadas es que la fuerza electrostática es lo suficientemente grande para mantenerlas juntas aun por un tiempo mínimo (figura 21-47b); así se forma lo que se conoce como "enlaces débiles."

FÍSICA APLICADA

Dentro de una célula: Teoría cinética más fuerzas electrostáticas

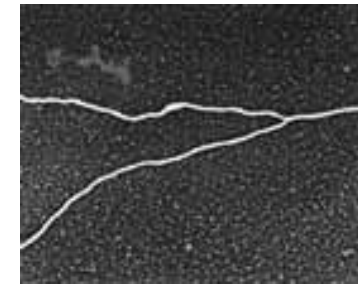


FIGURA 21–46 ADN duplicador en una célula de cáncer humana *HeLa*. Ésta es una imagen tomada con un microscopio electrónico de transmisión (TEM, del cual hablaremos en el capítulo 37).

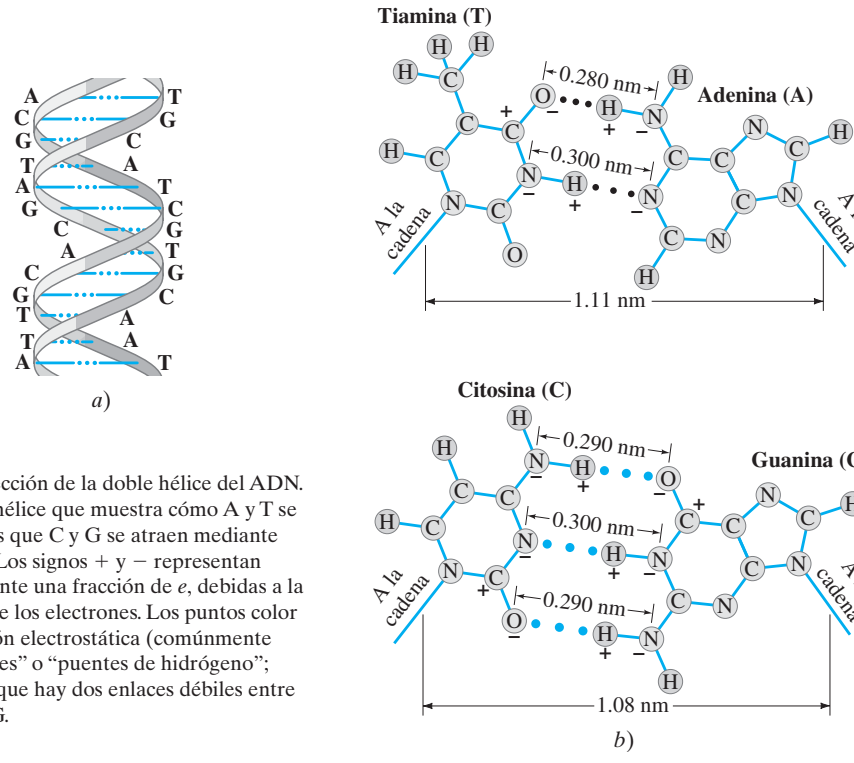


FIGURA 21–47 *a*) Sección de la doble hélice del ADN. *b*) Acercamiento de la hélice que muestra cómo A y T se atraen entre sí, mientras que C y G se atraen mediante fuerzas electrostáticas. Los signos + y − representan cargas netas, generalmente una fracción de *e*, debidas a la distribución dispareja de los electrones. Los puntos color naranja indican atracción electrostática (comúnmente llamados "enlaces débiles" o "puentes de hidrógeno"; sección 40-3). Observe que hay dos enlaces débiles entre A y T, y tres entre C y G.

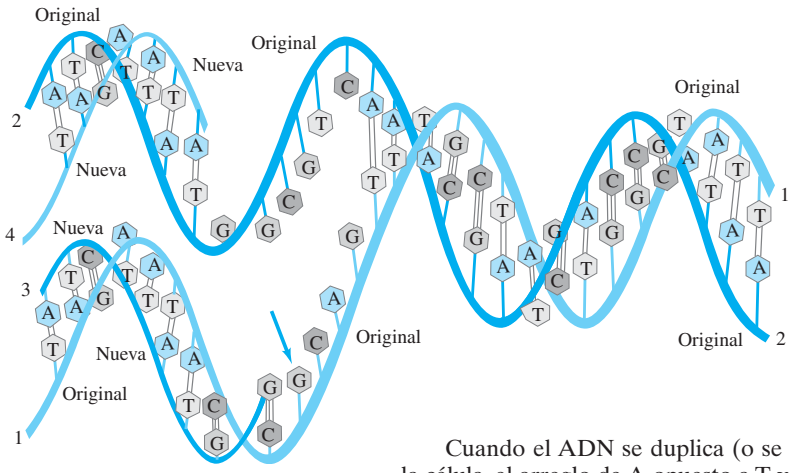


FIGURA 21–48 Duplicación del ADN.

Cuando el ADN se duplica (o se replica) a sí mismo, justo antes de la división de la célula, el arreglo de A opuesto a T y de G opuesto a C es crucial para asegurar que la información genética se transmita de manera precisa a la siguiente generación (figura 21-48). Las dos hebras de ADN se separan (con ayuda de las enzimas, las cuales operan también mediante fuerzas electrostáticas), dejando expuestas las partes cargadas de las bases. Una vez que comienza la duplicación, veamos cómo ocurre el orden correcto de bases fijándonos en la molécula G señalada con la flecha en la figura 21-48. Muchas de las bases nucleótidos de los cuatro tipos que no han sido atraídas están rebotando por ahí dentro del fluido celular, mientras que el único tipo que experimentará una atracción, si se acerca lo suficiente, será una C. Las cargas de las otras tres bases no les permiten acercarse tanto a las cargas en G para proveer de una fuerza de atracción significativa (recuerde que la fuerza disminuye rápidamente con la distancia ($\propto 1/r^2$). Como las G no atraen apreciablemente a A, T o G, una A, T o G será expulsada por colisiones con otras moléculas antes de que las enzimas puedan unirla a la cadena en crecimiento (número 3). Pero la fuerza electrostática mantendrá de forma preferente una C opuesta a nuestra G el tiempo suficiente para que una enzima logre unir una C al extremo en crecimiento de la nueva cadena. Así, vemos que las fuerzas electrostáticas son responsables de seleccionar las bases en el orden apropiado durante la duplicación.

Este proceso de duplicación del ADN generalmente se presenta como si ocurriera de una manera ordenada –como si cada molécula supiera su papel y se dirigiera a su lugar asignado. Pero no ocurre así. Las fuerzas de atracción son más bien débiles, y si las formas moleculares no son las necesarias, casi no habrá atracción electrostática, razón por la cual se presentan algunos errores. Así, haciendo a un lado el movimiento caótico de las moléculas, la fuerza electrostática actúa para poner algo de orden dentro del caos.

Las velocidades aleatorias (térmicas) de moléculas en una célula afectan la *clonación*. Cuando una célula bacterial se divide, las dos nuevas bacterias tienen ADN casi idéntico. Incluso si el ADN fuera perfectamente idéntico, las dos nuevas bacterias no terminarían comportándose de la misma forma. Las proteínas largas, el ADN y las moléculas de ARN toman diferentes formas y, por lo tanto, la expresión de los genes es diferente. Las partes sujetas de forma holgada en las moléculas grandes, como las del grupo metilo (CH_3), también pueden ser extraídas por una colisión fuerte con otra molécula. Por lo tanto, los organismos clonados no son idénticos, incluso si su ADN fuera idéntico. De hecho, no puede haber determinismo genético en realidad.

*21–13 Las máquinas copiadoras y las computadoras electrónicas usan la electrostática

Las máquinas fotocopiadoras y las impresoras láser usan la atracción electrostática para imprimir una imagen. Cada una utiliza una técnica diferente para proyectar una imagen sobre un tambor cilíndrico especial. Por lo general, el tambor está hecho de aluminio, un buen conductor; su superficie está cubierta con una delgada capa de selenio, con la interesante propiedad (llamada "fotoconductividad") de ser un no conductor de la electricidad en la oscuridad, pero un buen conductor cuando está expuesto a la luz.

En una *fotocopiadora*, lentes y espejos enfocan una imagen de la hoja original de papel sobre el cilindro, de la misma forma en que la lente de una cámara enfoca su

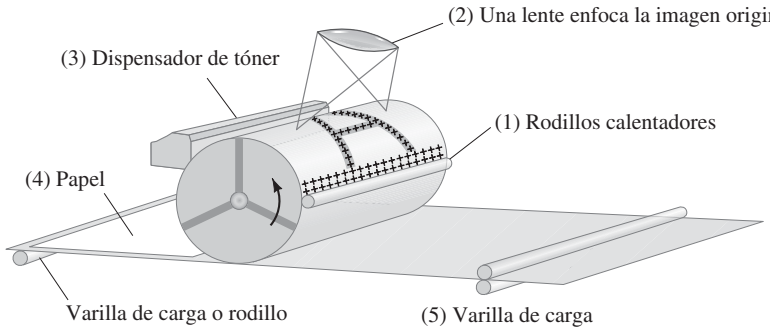


FIGURA 21–49 Dentro de una máquina fotocopiadora: **1.** se da una carga + al tambor de selenio; **2.** la lente enfoca una imagen sobre el tambor (sólo los puntos oscuros se mantienen con carga); **3.** las áreas con carga positiva del tambor atraen partículas de tóner (cargado negativamente); **4.** la imagen se transfiere al papel; **5.** el calor fija la imagen en el papel.

imagen sobre la película. El primer paso es colocar una carga positiva uniforme sobre la capa de selenio del tambor, mediante una varilla o un rodillo, en la oscuridad. En el paso 2, la imagen que se va a imprimir o a copiar se proyecta sobre el tambor. Por simplicidad, suponemos que la imagen es una letra oscura A sobre un fondo blanco (como en la página de un libro) como se muestra en la figura 21-49. La letra A sobre el tambor es oscura, pero todo lo que hay alrededor es claro. En todos estos lugares claros el selenio se vuelve conductor y los electrones fluyen desde el aluminio que hay abajo neutralizando aquellas áreas positivas. En las áreas oscuras de la letra A el selenio es no conductor, así que mantiene una carga positiva (figura 21-49). En el paso 3, se imparte una carga negativa a un polvo fino oscuro conocido como *tóner* y se frota sobre el tambor mientras éste gira. Las partículas de tóner cargadas negativamente son atraídas a las áreas positivas del tambor (la letra A, en nuestro caso) y se quedan adheridas sólo ahí. En el paso 4, el tambor giratorio ejerce presión sobre una hoja de papel que ha sido cargada positivamente más fuerte que en el selenio, así que las partículas se transfieren al papel, formando la imagen final. Por último, en el paso 5, el papel se calienta para fijar las partículas de tóner firmemente en el papel.

FÍSICA APLICADA
Máquinas fotocopiadoras

En una copiadora a color (o impresora), este proceso se repite para cada color –negro, azul (cian), magenta (rojo) y amarillo. Combinando estos colores en diferentes proporciones se obtiene cualquier color deseado.

FÍSICA APLICADA
Impresora láser

Por otra parte, una *impresora láser* usa una señal de computadora para programar la intensidad de un rayo láser sobre un tambor cubierto de selenio. El delgado rayo de luz proveniente del láser se barre (mediante un espejo móvil) de lado a lado sobre el tambor en una serie de líneas horizontales, cada línea debajo de la anterior. Mientras el rayo barre sobre el tambor, la intensidad del haz varía mediante la señal de una computadora: fuerte para un punto que será blanco o brillante, y débil o cero para puntos que serán oscuros. Después de cada barrido, el tambor gira muy lentamente para barridos adicionales (figura 21-50), hasta que se forma una imagen completa sobre él. Las partes ligeras del selenio se vuelven conductoras y pierden su carga eléctrica, mientras el tóner se adhiere sólo en las áreas oscuras, cargadas eléctricamente. El tambor transfiere luego la imagen al papel, como en una fotocopiadora.

FÍSICA APLICADA
Impresora de inyección de tinta

Una *impresora de inyección de tinta* no utiliza un tambor. En vez de ello, se rocía con gotas de tinta directamente sobre el papel mediante boquillas pequeñas. Las boquillas realizan un barrido sobre el papel (cada barrido justo abajo del anterior) mientras el papel avanza hacia abajo. En cada barrido, la tinta marca puntos sobre el papel, excepto en aquellos puntos donde no se desea tinta de acuerdo con la computadora. La imagen consiste en un número enorme de puntos muy pequeños. La calidad de resolución de la impresora generalmente se indica en puntos por pulgada (dpi, por las siglas de *dots per inch*) en cada dirección (lineal).

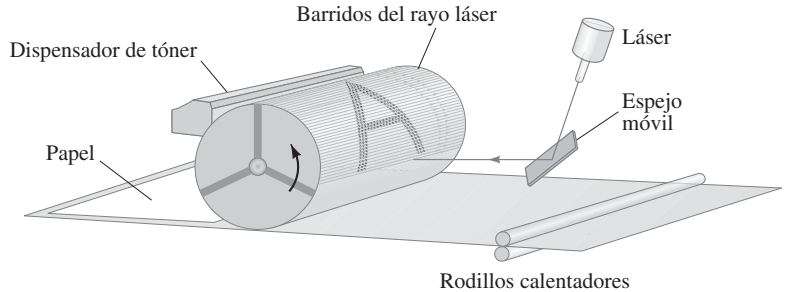


FIGURA 21–50 Dentro de una impresora láser, un espejo móvil barre el rayo láser en líneas horizontales a través del tambor.

Resumen

Hay dos tipos de **cargas eléctricas**, positivas y negativas. Tales designaciones se toman algebraicamente, es decir, cualquier carga es positiva o negativa en un número dado de coulombs (C), en unidades del SI.

La carga eléctrica se **conserva**: si se produce una cierta cantidad de un tipo de carga en un proceso, entonces también se produce una cantidad igual de carga opuesta, así que la carga *neta* producida es cero.

De acuerdo con la teoría atómica, la electricidad se origina en el átomo, el cual está constituido por un núcleo con carga positiva, rodeado de electrones cargados negativamente. Cada electrón tiene una carga $-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C.

Los **conductores** eléctricos son materiales en los cuales hay muchos electrones que pueden moverse con relativa libertad, mientras que los **aislantes** eléctricos son materiales en los que casi no hay electrones para moverse con libertad.

Un objeto tiene carga negativa cuando cuenta con un exceso de electrones, y carga positiva cuando posee menos electrones que su cantidad normal de electrones. La carga de cualquier objeto es un múltiplo entero de $+e$ o $-e$. Esto es, la carga está **cuantizada**.

Un objeto puede cargarse por frotamiento (en el cual se transfieren electrones de un material a otro), por conducción (en la cual se transfieren electrones de un objeto a otro cuando se tocan) o por inducción (la separación de cargas dentro de un objeto debido al acercamiento de otro objeto cargado, pero sin que haya contacto).

Las cargas eléctricas ejercen fuerzas entre sí. Dos cargas de tipos opuestos, una positiva y la otra negativa, ejercen mutuamente una fuerza de atracción. Si las cargas son del mismo tipo, entonces se repelen entre sí.

La magnitud de la fuerza que ejerce una carga puntual sobre otra carga es proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}; \qquad \textbf{(21–1, 21–2)}$$

Ésta es la **ley de Coulomb**. En unidades del SI, k se escribe normalmente como $1/4\pi\epsilon_0$.

Pensamos que alrededor de una carga o un grupo de cargas hay un **campo eléctrico** en el espacio que las rodea. Se dice que la fuerza sobre un objeto cargado se debe al campo eléctrico presente en esa posición.

El *campo eléctrico*, $\vec{\mathbf{E}}$, debido a una o más cargas en cualquier punto del espacio se define como la fuerza por unidad de carga que actuaría sobre una carga de prueba positiva q localizada en ese punto:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q}. \qquad \textbf{(21–3)}$$

La magnitud del campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual Q es

$$E = k\frac{Q}{r^2}. \qquad \textbf{(21–4a)}$$

El campo eléctrico total en un punto del espacio es igual a la suma vectorial de los campos debidos a cada una de las cargas que contribuyen al campo (**principio de superposición**).

El campo eléctrico se representa con **líneas de campo eléctrico**, que empiezan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. Su dirección en un punto dado indica la dirección de la fuerza que sentiría una pequeña carga de prueba positiva localizada en ese punto. Las líneas pueden dibujarse de manera que el número de líneas por unidad de área es proporcional a la magnitud de E.

El campo eléctrico estático dentro de un conductor es cero, mientras las líneas de campo eléctrico, justo fuera de un conductor cargado, son perpendiculares a su superficie.

Un **dipolo eléctrico** es una combinación de dos cargas de la misma magnitud, pero de signos opuestos, $+Q$ y $-Q$, separadas una distancia ℓ. El **momento dipolar** es $p = Q\ell$. Un dipolo localizado en un campo eléctrico uniforme no experimenta ninguna fuerza neta, pero experimenta una torca neta (a menos que $\vec{\mathbf{p}}$ sea paralelo a $\vec{\mathbf{E}}$). El campo eléctrico producido por un dipolo disminuye con la distancia r al cubo desde el dipolo ($E \propto 1/r^3$) para valores grandes de r en comparación con ℓ.

[*En la duplicación del ADN, la fuerza electrostática desempeña un papel crucial en la selección de las moléculas apropiadas para que la información genética se transmita con precisión de una generación a otra].

Preguntas

1. Si usted carga un peine de bolsillo frotándolo con un paño de seda, ¿cómo puede determinar si el peine adquiere carga positiva o carga negativa?
2. ¿Por qué algunas veces al sacar una camisa o una blusa de la secadora de ropa se adhieren a su cuerpo?
3. Explique por qué la neblina o las gotas de lluvia tienden a formarse alrededor de iones o electrones en el aire.
4. Una varilla cargada positivamente se acerca a una pieza de papel neutra, la cual es atraída. Elabore un diagrama que muestre la separación de cargas en el papel y explique por qué ocurre la atracción.
5. ¿Por qué una regla de plástico que se ha frotado con una tela puede levantar pequeños pedacitos de papel? ¿Por qué es más difícil hacer esto en un día húmedo?
6. Compare la *carga neta* en un conductor con las "cargas libres" en el conductor.
7. Las figuras 21-7 y 21-8 muestran cómo una varilla cargada localizada cerca de un objeto de metal puede atraer (o repeler) electrones. Hay una gran cantidad de electrones en el metal; sin embargo, sólo se mueven algunos de ellos, como se ilustra. ¿Por qué no se mueven todos?
8. Cuando se carga un electroscopio, las dos hojas se repelen una a la otra y permanecen a cierto ángulo. ¿Qué equilibra a la fuerza eléctrica de repulsión de manera que las hojas no se separen aún más?
9. La forma de la ley de Coulomb es muy similar a la de la ley de la gravitación universal de Newton. ¿Cuáles son las diferencias entre estas dos leyes? Compare también la masa gravitacional con la carga eléctrica.
10. Normalmente no estamos conscientes de las fuerzas gravitacionales o eléctricas entre dos objetos cualesquiera. ¿Cuál es la razón de esto en cada caso? Dé un ejemplo donde sí estamos conscientes de esto y explique por qué.
11. ¿La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa? ¿Por qué? (Véase el capítulo 8).
12. ¿Qué observaciones experimentales mencionadas en el texto excluyen la posibilidad de que el numerador de la ley de Coulomb contenga la suma $(Q_1 + Q_2)$ y no el producto $Q_1 Q_2$?
13. Cuando una regla cargada atrae pequeños trozos de papel, en ocasiones una pieza de papel salta rápidamente después de tocar la regla. Explique por qué.
14. Explique por qué las cargas de prueba que usamos para hacer mediciones del campo eléctrico deben ser pequeñas.
15. Cuando calculamos un campo eléctrico, ¿debemos usar una carga de prueba *positiva* o podríamos utilizar también una carga de prueba negativa? Explique por qué.
16. Dibuje las líneas de campo alrededor de dos cargas eléctricas negativas separadas una distancia ℓ.

17. Suponga que las dos cargas opuestas de la figura 21-34a están separadas 12.0 cm. Considere la magnitud del campo eléctrico a 2.5 cm de la carga positiva. ¿En qué punto alrededor de esta carga —arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda— está el campo eléctrico más intenso? ¿Y el menos intenso?

18. Considere el campo eléctrico en los tres puntos A, B y C mostrados en la figura 21-51. Dibuje primero una flecha en cada punto indicando la dirección de la fuerza neta que experimentaría una partícula de prueba positiva, localizada en ese punto; luego, liste los tres puntos en orden *decreciente* de la intensidad del campo (comenzando con el más intenso).

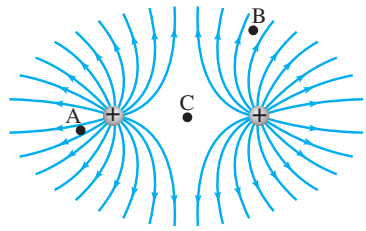


FIGURA 21–51
Pregunta 18.

19. ¿Por qué no se pueden cruzar nunca dos líneas de campo?

20. Usando las tres reglas de las líneas de campo de la sección 21-8, muestre que las líneas de campo que empiezan o terminan en una carga puntual deben estar simétricamente espaciadas alrededor de la carga.

21. Dadas dos cargas puntuales, Q y $2Q$, separadas una distancia ℓ, ¿existe un punto a lo largo de la línea que une las cargas donde $E = 0$ cuando los signos son *a*) opuestos, *b*) iguales? Si es así, indique aproximadamente dónde estaría ese punto.

22. Suponga que el anillo de la figura 21-28 tiene una carga Q negativa distribuida de manera uniforme. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ en el punto P?

23. Considere una pequeña carga de prueba positiva localizada en una línea de campo en un punto dado, como el punto P en la figura 21-34a. ¿La dirección de la velocidad y/o aceleración de la carga de prueba es a lo largo de esta línea? Argumente su respuesta.

24. Queremos determinar el campo eléctrico en un punto cerca de una esfera de metal cargada positivamente (un buen conductor). Hacemos esto acercando una pequeña carga de prueba q_0 a este punto y luego medimos la fuerza F_0 sobre ella. ¿El cociente F_0/q_0 será mayor que, menor que o igual al campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ que había en ese punto antes de que estuviera presente la carga de prueba?

25. ¿De qué manera el movimiento del electrón en el ejemplo 21-16 se asemeja al movimiento de proyectiles (sección 3-7)? ¿De qué manera difiere?

26. Describa el movimiento del dipolo mostrado en la figura 21-44 si se libera del reposo en la posición indicada.

27. Explique por qué puede haber una fuerza neta sobre un dipolo localizado en un campo eléctrico no uniforme.

Problemas

21–5 Ley de Coulomb

$[1\,\text{mC} = 10^{-3}\,\text{C},\ 1\,\mu\text{C} = 10^{-6}\,\text{C},\ 1\,\text{nC} = 10^{-9}\,\text{C}]$.

1. (I) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica de atracción entre un núcleo de hierro ($q = +26e$) y su electrón más interno si la distancia entre ellos es de 1.5×10^{-12} m?

2. (I) ¿Cuántos electrones se necesitan para formar una carga de $-38\ \mu$C?

3. (I) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce una carga de $+25\ \mu$C sobre otra carga de +25 mC si están separadas 28 cm?

4. (I) ¿Cuál es la fuerza eléctrica de repulsión entre dos protones separados 4.0×10^{-15} m uno de otro en el núcleo atómico?

5. (II) Cuando un objeto como un peine de plástico se carga por frotamiento con una tela, la carga neta, por lo general, es de unos cuantos microcoulombs. Si esa carga es de $3.0\ \mu$C, ¿en qué porcentaje cambia la masa de un peine de 35 g durante el proceso de carga?

6. (II) Dos partículas de polvo cargadas ejercen una fuerza mutua de 3.2×10^{-2} N. ¿Cuál será la fuerza si se mueven de forma que queden separadas sólo 1/8 de la distancia inicial?

7. (II) Dos esferas cargadas están separadas 8.45 cm. Se mueven las esferas y se encuentra que la fuerza entre ellas se ha triplicado. ¿A qué distancia se encuentran ahora?

8. (II) Una persona que arrastra sus pies sobre una alfombra de lana en un día seco acumula una carga neta de $-46\ \mu$C. ¿Cuántos electrones acumula en exceso?¿En cuánto se incrementa su masa?

9. (II) ¿Cuál es la carga total de todos los electrones que hay en una barra de oro de 15 kg? ¿Cuál es la carga neta de la barra? (El oro tiene 79 electrones por átomo y una masa atómica de 197 u).

10. (II) Compare la fuerza eléctrica que mantiene al electrón en órbita ($r = 0.53 \times 10^{-10}$ m) alrededor del protón en el núcleo de un átomo de hidrógeno, con la fuerza gravitacional entre el mismo electrón y el protón. ¿Cuál es el cociente de las dos fuerzas?

11. (II) Dos cargas puntuales están separadas una distancia fija. La suma de sus cargas es Q_T. ¿Qué carga debe tener cada una para *a*) maximizar la fuerza eléctrica entre ellas y *b*) minimizarla?

12. (II) Se colocan en una línea partículas con cargas de +75, +48 y $-85\ \mu$C (figura 21-52). La partícula del centro está a 0.35 m de las otras. Calcule la fuerza neta en cada una de las cargas debida a las otras dos.

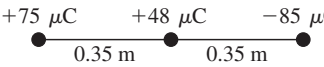


FIGURA 21–52
Problema 12.

13. (II) Tres partículas cargadas se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero de 1.20 m de lado (figura 21-53). Las cargas son $+7.0\ \mu$C, $-8.0\ \mu$C y $-6.0\ \mu$C. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza neta en cada una de ellas debido a las otras dos.

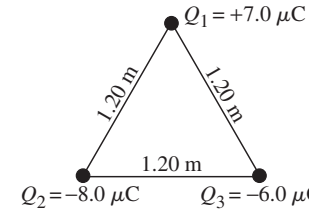


FIGURA 21–53
Problema 13.

14. (II) Dos pequeñas esferas no conductoras tienen una carga total de $90.0\ \mu$C. *a*) Cuando se colocan a 1.16 m, la fuerza que ejercen entre sí es de 12.0 N y es de repulsión. ¿Cuál es la carga en cada una de ellas? *b*) ¿Y si la fuerza es de atracción?

15. (II) Se coloca una carga de 4.15 mC en cada uno de los vértices de un cuadrado de 0.100 m de arista. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza en cada carga.

16. (II) Dos cargas puntuales positivas y dos negativas (magnitud $Q = 4.15$ mC) se colocan en las esquinas opuestas de un cuadrado, como se ilustra en la figura 21-54. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza en cada carga.

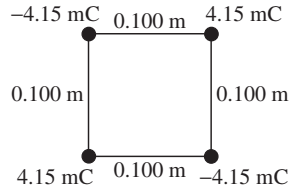


FIGURA 21–54
Problema 16.

17. (II) Se transfiere una carga Q desde una bola de plástico, inicialmente sin carga, hacia otra bola idéntica alejada 12 cm. La fuerza de atracción es entonces de 17 mN. ¿Cuántos electrones se transfirieron de una pelota a otra?

18. (III) Dos cargas, $-Q_0$ y $-4\ Q_0$, están separadas una distancia ℓ. Estas dos cargas pueden moverse libremente, pero no lo hacen, debido a una tercera carga cercana. ¿Cuál debe ser la magnitud de la tercera carga y su posición para que las dos primeras cargas permanezcan en equilibrio?

19. (III) Dos cargas positivas $+Q$ están fijas rígidamente al eje x, una en $x = +d$, y la otra en $x = -d$. Una tercera carga $+q$ de masa m, que está restringida a moverse sólo a lo largo del eje x, se desplaza a partir del origen en una pequeña distancia $s \ll d$ y luego se libera a partir del reposo. *a*) Muestre que (en buena aproximación) $+q$ describirá un movimiento armónico simple y determine una expresión para su periodo de oscilación T. *b*) Si estas tres cargas son átomos de sodio ionizados ($q = Q = +e$) con el desplazamiento de equilibrio $d = 3 \times 10^{-10}$ m, característico del espaciamiento atómico en un sólido, encuentre el periodo T en picosegundos.

20. (III) Dos esferas pequeñas cargadas cuelgan de cuerdas de igual longitud ℓ, como se ilustra en la figura 21-55, y forman ángulos pequeños θ_1 y θ_2 con la vertical. *a*) Si $Q_1 = Q$, $Q_2 = 2Q$ y $m_1 = m_2 = m$, determine el cociente θ_1/θ_2. *b*) Si $Q_1 = Q$, $Q_2 = 2Q$ y $m_1 = m$ y $m_2 = 2m$, determine el cociente θ_1/θ_2. *c*) Estime la distancia entre las esferas en cada caso.

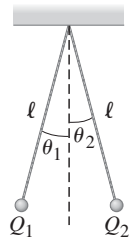


FIGURA 21–55
Problema 20.

21–6 a 21–8 Campo eléctrico, líneas de campo

21. (I) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica sobre un electrón en un campo eléctrico uniforme de magnitud 1920 N/C que apunta hacia el este?

22. (I) Se libera un protón en un campo eléctrico uniforme y experimenta una fuerza eléctrica de 2.18×10^{-14} N hacia el sur. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico?

23. (I) Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico a 16.4 cm directamente arriba de una carga aislada de 33.0×10^{-6} C.

24. (I) Se ejerce una fuerza eléctrica hacia bajo de 8.4 N sobre una carga de –8.8 μC. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en la posición de esta carga?

25. (I) La fuerza eléctrica sobre una carga de +4.20 μC es $\vec{\mathbf{F}} = (7.22 \times 10^{-4}\,\text{N})\hat{\mathbf{j}}$. ¿Cuál es el campo eléctrico en la posición de la carga?

26. (I) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto donde la fuerza sobre una carga de 1.25 μC localizada en ese punto es $\vec{\mathbf{F}} = (3.0\hat{\mathbf{i}} - 3.9\hat{\mathbf{j}}) \times 10^{-3}$ N?

27. (II) Determine la magnitud de la aceleración que experimenta un electrón en un campo eléctrico de 576 N/C. ¿Cómo depende la dirección de la aceleración de la dirección del campo en ese punto?

28. (II) Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto a la mitad entre una carga de $-8.0\ \mu$C y $+5.8\ \mu$C separadas 8.0 cm. Suponga que no hay otras cargas presentes.

29. (II) Dibuje, aproximadamente, las líneas de campo eléctricas en torno a dos cargas puntuales, $+Q$ y $-3Q$, separadas una distancia ℓ.

30. (II) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en un punto del espacio donde un protón experimenta una aceleración de 1.8 millones de "g"?

31. (II) Una línea larga de carga uniforme (densidad lineal de carga $\lambda = 2.5$ C/m) yace a lo largo del eje x en la figura 21-56. Además, en el punto $x = 0$ cm y $y = -5.0$ cm, hay una pequeña esfera cargada ($Q = -2.0$ C). ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto $x = 7.0$ cm, $y = 7.0$ cm? $\vec{\mathbf{E}}_{\text{línea}}$ y $\vec{\mathbf{E}}_{\text{Q}}$ representan los campos debidos a la línea de carga y a la carga Q, respectivamente.

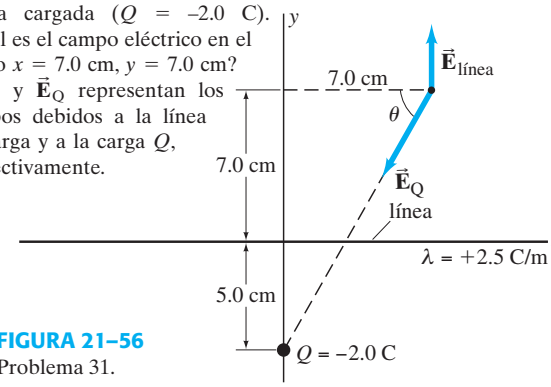


FIGURA 21–56
Problema 31.

32. (II) El campo eléctrico a la mitad del camino entre dos cargas puntuales iguales, pero opuestas, es de 586 N/C y la distancia entre las cargas es de 16.0 cm. ¿Cuál es la magnitud de cada una de las cargas?

33. (II) Calcule el campo eléctrico en la esquina de un cuadrado de 1.22 m de lado si las otras tres esquinas están ocupadas por cargas puntuales de 2.25×10^{-6} C.

34. (II) Calcule el campo eléctrico en el centro de un cuadrado de 52.5 cm de lado si una esquina está ocupada por una carga de $-38.6\ \mu$C y las otras tres esquinas están ocupadas por cargas de $-27.0\ \mu$C.

35. (II) Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto P de la figura 21-57. Las cargas están separadas por una distancia de $2a$ y el punto P está a una distancia x del punto medio entre las dos cargas. Exprese su resultado en términos de Q, x, a y k.

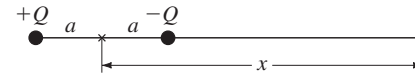


FIGURA 21–57
Problema 35.

36. (II) Dos cargas puntuales, $Q_1 = -25\ \mu$C y $Q_2 = +45\ \mu$C, están separadas por una distancia de 12 cm. El campo eléctrico en el punto P (véase la figura 21-58) es cero. ¿A qué distancia está Q_1 de P?

FIGURA 21–58
Problema 36.

37. (II) Una línea muy delgada de carga yace a lo largo del eje x, desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$. Otra línea de carga similar yace a lo largo del eje y desde $y = -\infty$ hasta $y = +\infty$. Ambas líneas tienen una carga uniforme por unidad de longitud λ. Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico resultante (con respecto al eje x) en un punto (x, y) del primer cuadrante del plano xy.

38. (II) *a*) Determine el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en el origen 0 de la figura 21-59 debido a las dos cargas en A y B. *b*) Repita el inciso *a*), pero considerando ahora que la carga en B es de signo contrario.

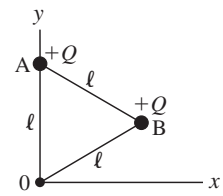


FIGURA 21–59
Problema 38.

39. (II) Dibuje aproximadamente las líneas de campo eléctrico que emanan de un alambre recto cargado uniformemente, cuya longitud ℓ no es tan grande. La separación entre las líneas cerca del alambre debe ser mucho menor que ℓ. [*Sugerencia:* También considere puntos muy lejanos del alambre].

40. (II) Dos anillos circulares paralelos de radio R tienen sus centros a lo largo del eje x y están separados una distancia ℓ, como se ve en la figura 21-60. Si cada anillo lleva una carga Q distribuida de manera uniforme, encuentre el campo $\vec{\mathbf{E}}(x)$, en puntos a lo largo del eje x.

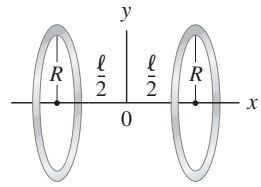


FIGURA 21–60
Problema 40.

41. (II) Se le dan dos cargas puntuales desconocidas, Q_1 y Q_2. En un punto sobre la línea que las une, a un tercio del camino entre Q_1 y Q_2, el campo eléctrico es cero (figura 21-61). ¿Cuál es el cociente Q_1/Q_2?

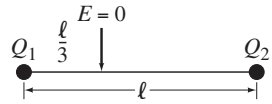


FIGURA 21–61
Problema 41.

42. (II) Con base en la ley de Coulomb determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los puntos A y B de la figura 21-62, debidos a las dos cargas positivas ($Q = 5.7\ \mu$C) mostradas en la figura. ¿Sus resultados son congruentes con la figura 21-34b?

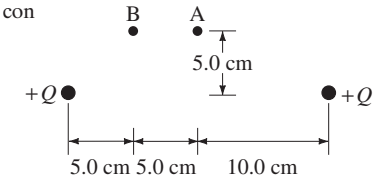


FIGURA 21–62
Problema 42.

43. (II) *a*) Dos cargas iguales están localizadas en los puntos ($x = \ell$, $y = 0$) y ($x = -\ell$, $y = 0$). Determine el campo eléctrico como una función de y para puntos a lo largo del eje y. *b*) Demuestre que el campo tiene un máximo en $y = \pm \ell/\sqrt{2}$.

44. (II) ¿En qué posición, $x = x_M$, es máxima la magnitud del campo eléctrico a lo largo del eje x del anillo en el ejemplo 21-9?

45. (II) Estime el campo eléctrico en un punto a 2.40 cm perpendicular al punto medio de un alambre delgado de 2.00 m de longitud con una carga total uniforme de 4.75 μC.

46. (II) El alambre recto cargado de manera uniforme de la figura 21-29 tiene una longitud ℓ, donde el punto 0 está en su punto medio. Demuestre que el campo en el punto P, a una distancia x perpendicular desde 0, está dado por

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\ell}{x(\ell^2 + 4x^2)^{1/2}},$$

donde λ es la carga por unidad de longitud.

47. (II) Use su resultado del problema 46 para encontrar el campo eléctrico (magnitud y dirección) a una distancia z sobre el centro de una espira cuadrada de alambre, cuyos lados tienen longitud ℓ y carga uniforme por unidad de longitud λ.

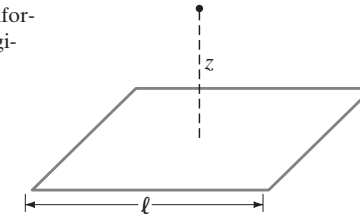


FIGURA 21–63
Problema 47.

48. (II) Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto P mostrado en la figura 21-64. Las dos cargas están separadas por una distancia $2a$. El punto P está sobre la bisectriz perpendicular a la línea que une las cargas, a una distancia x del punto medio entre ellas. Exprese su respuesta en términos de Q, x, a y k.

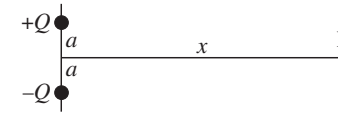


FIGURA 21–64
Problema 48.

49. (III) Una varilla delgada con la forma de un arco de circunferencia de radio R lleva una carga uniforme por unidad de longitud λ. El arco subtiende un ángulo total $2\theta_0$, simétrico en torno al eje x, como se muestra en la figura 21-65. Determine el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en el origen 0.

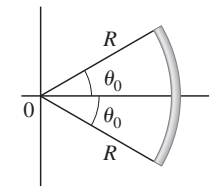


FIGURA 21–65
Problema 49.

50. (III) Una varilla delgada de vidrio tiene la forma de un semicírculo de radio R (figura 21-66). Posee un carga no uniforme distribuida a lo largo de la varilla con una densidad lineal de carga dada por $\lambda = \lambda_0 \operatorname{sen}\theta$, donde λ_0 es una constante positiva. El punto P está en el centro del semicírculo. *a*) Encuentre el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ (magnitud y dirección) en el punto P. [*Sugerencia:* Recuerde que sen $(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, así que las dos mitades de la varilla están con cargas opuestas.] *b*) Determine la aceleración (magnitud y dirección) de un electrón localizado en el punto P, suponiendo que $R = 1.0$ cm y $\lambda_0 = 1.0\ \mu$C/m.

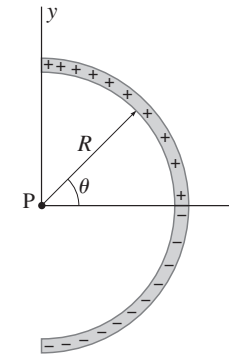


FIGURA 21–66
Problema 50.

51. (III) Suponga que un alambre cargado de manera uniforme empieza en el punto 0 y se levanta verticalmente a lo largo del eje y positivo hasta una longitud ℓ. *a*) Determine las componentes del campo eléctrico E_x y E_y en el punto $(x, 0)$. Esto es, calcule $\vec{\mathbf{E}}$ cerca de un extremo de un alambre largo en el plano perpendicular al alambre. *b*) Si el alambre se extiende desde $y = 0$ hasta $y = \infty$, de manera que $\ell = \infty$, demuestre que $\vec{\mathbf{E}}$ forma un ángulo de 45° con la horizontal para cualquier valor de x. [*Sugerencia:* Véase el ejemplo 21-11 y la figura 21-29].

52. (III) Suponga en el ejemplo 21-11 que $x = 0.250$ m, $Q = 3.15$ μC, y que el alambre cargado de manera uniforme mide sólo 6.00 m de longitud y se extiende a lo largo del eje y, desde $y = -4.00$ m hasta $y = +2.50$ m. *a*) Calcule E_x y E_y en el punto P. *b*) Determine cuál sería el error si usara simplemente el resultado del ejemplo 21-11, $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 x$. Exprese este error como $(E_x - E)/E$ y E_y/E.

53. (III) Una varilla delgada de longitud ℓ tiene una carga total Q distribuida de manera uniforme sobre su longitud. Véase la figura 21-67. Determine el campo eléctrico a lo largo del eje de la varilla empezando en un extremo; es decir, $E(x)$ para $x \geq 0$ en la figura 21-67.

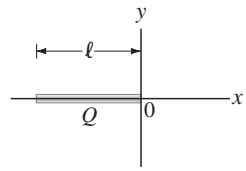


FIGURA 21–67
Problema 53.

54. (III) *Plano cargado de manera uniforme.* Se distribuye carga de manera uniforme sobre un plano grande cuadrado de longitud ℓ, como se muestra en la figura 21-68. La carga por unidad de área es σ (C/m^2). Determine el campo eléctrico en un punto P a una distancia z, sobre el centro del plano, en el límite cuando $\ell \to \infty$. [*Sugerencia:* Divida el plano en franjas delgadas largas de ancho dy, y use el resultado del ejemplo 21-11; luego, sume los campos debidos a cada franja para obtener el campo total en el punto P].

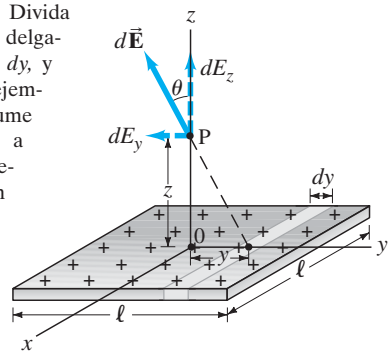


FIGURA 21–68
Problema 54.

55. (III) Suponga que la carga Q en el anillo de la figura 21-28 está toda distribuida uniformemente sólo en la mitad superior del anillo y que no hay carga en la mitad inferior. Determine el campo $\vec{\mathbf{E}}$ en P. (Tome y verticalmente hacia arriba).

21–10 Movimiento de cargas en un campo eléctrico

56. (II) Un electrón con una velocidad $v_0 = 27.5 \times 10^6$ m/s viaja paralelamente a un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 11.4 \times 10^3$ N/C. *a*) ¿Qué distancia recorrerá el electrón antes de detenerse? *b*) ¿Cuánto tiempo pasará para que la elipse regrese al punto de partida?

57. (II) Un electrón tiene una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_0 = (9.80 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\mathbf{j}}$. Entra a una región donde $\vec{\mathbf{E}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 8.0\hat{\mathbf{j}}) \times 10^4$ N/C. *a*) Determine el vector de aceleración del electrón como función del tiempo. *b*) ¿A qué ángulo θ se está moviendo (con respecto a su dirección inicial) en $t = 1.0$ ns?

58. (II) Un electrón que se desplaza a la derecha a 7.5×10^5 m/s entra a un campo eléctrico uniforme paralelo a su dirección de desplazamiento. Si el electrón se lleva al reposo en una distancia de 4.0 cm, *a*) ¿qué dirección se requiere para el campo eléctrico? y *b*) ¿cuál es la intensidad del campo?

59. (II) ¿A qué ángulo dejarán los electrones del ejemplo 21-16 el campo eléctrico uniforme al final de las placas paralelas (punto P en la figura 21-41)? Suponga que las placas miden 4.9 cm de longitud y que $E = 5.0 \times 10^3$ N/C. Ignore los efectos de borde del campo.

60. (II) Un electrón viaja a través de un campo eléctrico uniforme. El campo es constante y está dado por $\vec{\mathbf{E}} = (2.00 \times 10^{-11} \text{ N/C})\hat{\mathbf{i}} - (1.20 \times 10^{-11} \text{ N/C})\hat{\mathbf{j}}$. En $t = 0$, el electrón está en el origen y viaja en la dirección x con una rapidez de 1.90 m/s. ¿Cuál es su posición 2.00 s después?

61. (II) Se coloca una carga positiva q en el centro de un anillo circular de radio R. El anillo lleva una carga negativa distribuida de manera uniforme de magnitud total $-Q$. *a*) Si la carga q se desplaza del centro una pequeña distancia x, como se indica en la figura 21-69, demuestre que describirá un movimiento armónico simple cuando se libere. *b*) Si su masa es m, ¿cuál es su periodo?

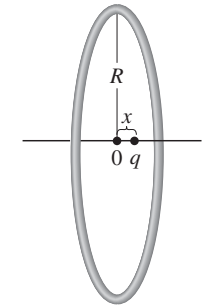


FIGURA 21–69
Problema 61.

21–11 Dipolos eléctricos

62. (II) Un dipolo consiste en cargas $+e$ y $-e$ separadas por 0.68 nm. Está dentro de un campo eléctrico $E = 2.2 \times 10^4$ N/C. *a*) ¿Cuánto vale su momento dipolar? *b*) ¿Cuál es la torca sobre el dipolo cuando se encuentra perpendicular al campo? *c*) ¿Cuál es la torca sobre el dipolo cuando está a un ángulo de 45° del campo eléctrico? *d*) ¿Cuál es el trabajo que se requiere para hacer girar el dipolo desde su posición orientada paralelamente al campo hasta una posición antiparalela al campo?

63. (II) La molécula HCl tiene un momento dipolar cercano a 3.4×10^{-30} C·m. Los dos átomos están separados por 1.0×10^{-10} m, aproximadamente. *a*) ¿Cuál es la carga neta en cada átomo? *b*) ¿Es ésta igual a un múltiplo entero de e? Si no, explique. *c*) ¿Cuál es la torca máxima que experimentaría este dipolo en un campo eléctrico de 2.5×10^4 N/C? *d*) ¿Cuánta energía es necesaria para hacer girar la molécula 45° a partir de su posición de equilibrio de menor energía potencial?

64. (II) Suponga que ambas cargas de la figura 21-45 (para un dipolo) fueran positivas. *a*) Demuestre que el campo eléctrico en la bisectriz perpendicular, para $r \gg \ell$, está dado por $(1/4\pi\epsilon_0)(2Q/r^2)$. *b*) Explique por qué el campo disminuye como $1/r^2$, mientras que para un dipolo disminuye como $1/r^3$.

65. (II) Se sitúa un dipolo eléctrico de momento dipolar p y momento de inercia I, en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$. *a*) Si se hace girar el dipolo un ángulo θ, como se muestra en la figura 21-44, y se libera, ¿en qué condiciones oscilará con movimiento armónico simple? *b*) ¿Cuál será su frecuencia de oscilación?

66. (III) Suponga que un dipolo $\vec{\mathbf{p}}$ se localiza en un campo eléctrico no uniforme $\vec{\mathbf{E}} = E\hat{\mathbf{i}}$ que apunta a lo largo del eje x. Si $\vec{\mathbf{E}}$ depende sólo de x, demuestre que la fuerza neta sobre el dipolo es

$$\vec{\mathbf{F}} = \left(\vec{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{E}}}{dx}\right)\hat{\mathbf{i}},$$

donde $d\vec{\mathbf{E}}/dx$ es el gradiente del campo en la dirección x.

67. (III) *a*) Demuestre que para puntos a lo largo del eje de un dipolo (sobre la misma recta que contiene las cargas $+Q$ y $-Q$), el campo eléctrico tiene una magnitud

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

para $r \gg \ell$ (figura 21-45), donde r es la distancia del punto donde se evalúa el campo al centro del dipolo. *b*) ¿En qué dirección apunta $\vec{\mathbf{E}}$?

Problemas generales

68. ¿Qué tan cerca deben estar dos electrones para que la fuerza eléctrica entre ellos sea igual al peso de uno de ellos en la superficie de la Tierra?

69. Puesto que el cuerpo humano está hecho principalmente de agua, estime la cantidad de carga positiva en una persona de 65 kg.

70. Una moneda de cobre de 3.0 g tiene una carga de 38 μC. ¿Qué fracción de sus electrones ha perdido?

71. Ciertas mediciones indican que hay un campo eléctrico alrededor de la Tierra. Su magnitud es de cerca de 150 N/C en la superficie de la Tierra y apunta radialmente hacia el centro del planeta. ¿Cuál es la magnitud de la carga eléctrica de la Tierra? ¿Es positiva o negativa? [*Sugerencia:* Considere que el campo eléctrico fuera de una esfera cargada de manera uniforme es igual que si toda la carga estuviera concentrada en el centro].

72. *a*) El campo eléctrico cerca de la superficie de la Tierra tiene una magnitud de 150 N/C. ¿Cuál es la aceleración que experimenta un electrón cerca de la superficie de la Tierra? *b*) ¿Para un protón? *c*) Calcule el cociente de cada aceleración con respecto a $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

73. Una gota de agua de radio de 0.018 mm se mantiene suspendida en el aire. Si el campo eléctrico de la Tierra dirigido hacia abajo es de 150 N/C, ¿cuántas cargas electrónicas debe tener la gota de agua?

74. Estime la fuerza neta entre el grupo CO y el grupo HN mostrados en la figura 21.70. El C y el O tienen cargas $\pm 0.40e$ y el H y el N tienen cargas $\pm 0.20e$, donde $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. [*Sugerencia:* No incluya las fuerzas "internas" entre el C y el O, o entre el H y el N].

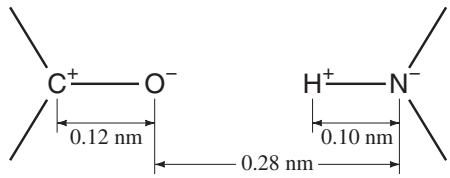


FIGURA 21–70
Problema 74.

75. Suponga que la atracción eléctrica, y no la gravedad, fuera la responsable de mantener a la Luna en órbita alrededor de la Tierra. Si se colocan cargas Q iguales y opuestas en la Tierra y en la Luna, ¿cuál debería ser el valor de Q para mantener la órbita actual? Use datos de la segunda de forros de este libro y considere que la Tierra y la Luna son partículas puntuales.

76. En un modelo simple del átomo de hidrógeno, el electrón gira en una órbita circular en torno al protón con una rapidez de 2.2×10^6 m/s. Determine el radio de la órbita del electrón. [*Sugerencia:* Revise el capítulo 5 sobre movimiento circular].

77. Una carga puntual positiva $Q_1 = 2.5 \times 10^{-5}$ C está fija en el origen del sistema de coordenadas, y una carga puntual negativa $Q_2 = -5.0 \times 10^{-6}$ C está fija en el eje x en $x = +2.0$ m. Encuentre las posiciones a lo largo del eje x para las cuales el campo eléctrico debido a estas dos cargas es cero.

78. Cuando se saca la ropa de la secadora, un calcetín de 40 g se queda pegado a un suéter. Estime la fuerza de atracción mínima entre el suéter y el calcetín. Luego, estime la carga mínima en el suéter y el calcetín. Considere que la carga provino exclusivamente de frotar el calcetín contra el suéter, así que tienen cargas iguales y opuestas; considere el suéter como una hoja plana de carga uniforme.

79. Una pequeña esfera de plomo está recubierta de plástico aislante y suspendida verticalmente de un resorte ideal (constante del resorte $k = 126$ N/m), como se ilustra en la figura 21-71. La masa total de la esfera cubierta es de 0.650 kg y su centro está a 15.0 cm sobre una mesa cuando se encuentra en equilibrio. Se tira de la esfera hacia abajo 5.00 cm y se deposita en ella una carga $Q = -3.00 \times 10^{-6}$ C y luego se suelta. Usando su conocimiento sobre el movimiento armónico simple, escriba una expresión para la intensidad del campo eléctrico como función del tiempo que se mediría en un punto P sobre la mesa directamente debajo de la esfera.

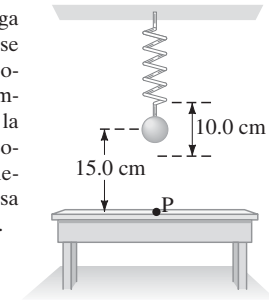


FIGURA 21–71
Problema 79.

80. Se construye un electroscopio grande usando "hojas" que son alambres de 78 cm de longitud con pequeñas esferas de 24 g en sus extremos. Si cada alambre forma 26° con la vertical (figura 21-72), ¿cuál es la carga total Q que debió transferirse al electroscopio? Ignore la masa de los alambres.

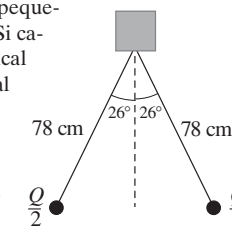


FIGURA 21–72
Problema 80.

81. El aire seco "se rompe" y genera una chispa si el campo eléctrico presente excede 3×10^6 N/C. ¿Cuánta carga debe empacarse dentro de un guisante verde (diámetro de 0.75 cm) antes de que el guisante se descargue espontáneamente? [*Sugerencia:* Las ecuaciones 21-4 funcionan afuera de una esfera si r se mide desde su centro].

82. Dos cargas puntuales, $Q_1 = -6.7\ \mu$C y $Q_2 = 1.8\ \mu$C, están localizadas entre dos placas paralelas con cargas opuestas, como se muestra en la figura 21-73. Las dos cargas están separadas una distancia $x = 0.34$ m. Suponga que el campo eléctrico producido por las placas cargadas es uniforme e igual a $E = 73{,}000$ N/C. Calcule la fuerza electrostática neta sobre Q_1 e indique su dirección.

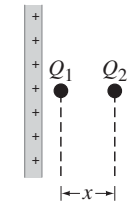


FIGURA 21–73
Problema 82.

83. El material para empaques está hecho de piezas de poliestireno, las cuales pueden cargarse fácilmente y adherirse entre sí. Ya que la densidad de este material es de 35 kg/m^3, aproximadamente, estime cuánta carga puede haber en una esfera de unicel de 2.0 cm de diámetro, suponiendo que la fuerza eléctrica entre dos esferas pegadas entre sí es igual al peso de una de las esferas.

84. Un tipo de *cuadrupolo eléctrico* consiste en dos dipolos colocados extremo con extremo, de manera que sus cargas negativas (por ejemplo) se traslapen; esto es, en el centro hay una carga $-2Q$ flanqueada (en una línea) por cargas $+Q$ a cada lado (figura 21-74). Determine el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en puntos a lo largo de la bisectriz perpendicular y demuestre que E disminuye como $1/r^4$. Mida r desde la carga $-2Q$ y considere que $r \gg \ell$.

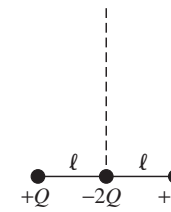


FIGURA 21–74
Problema 84.

85. Suponga que un haz de electrones entra a un campo eléctrico uniforme en el punto medio entre dos placas en un ángulo θ_0 con la horizontal, como se ilustra en la figura 21-75. La trayectoria es simétrica, así que salen con el mismo ángulo θ_0 y justo libran la placa superior. ¿Cuál es el valor de θ_0? Ignore los efectos de borde del campo.

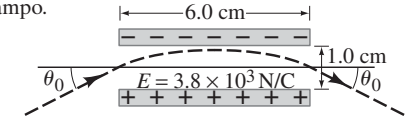


FIGURA 21–75
Problema 85.

86. Un electrón se desplaza en una trayectoria circular r alrededor de un alambre largo cargado de manera uniforme en una cámara de vacío, como se muestra en la figura 21-76. La densidad de carga del alambre es $\lambda = 0.14\ \mu$C/m. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico sobre el electrón (magnitud y dirección en términos de r y λ)? *b*) ¿Cuál es la rapidez del electrón?

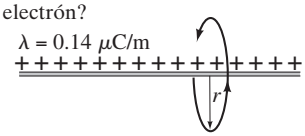


FIGURA 21–76
Problema 86.

87. Tres planos largos cuadrados y con carga se arreglan como se muestra (lateralmente) en la figura 21-77. De izquierda a derecha, los planos tienen densidades de carga por unidad de área de $-0.50\ \mu$C/m^2, $+0.25\ \mu$C/m^2 y $-0.35\ \mu$C/m^2. Determine el campo eléctrico total (magnitud y dirección) en los puntos A, B, C y D. Suponga que las placas son mucho más grandes que la distancia AD.

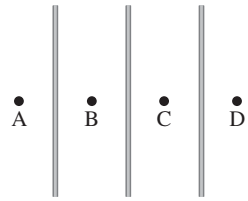


FIGURA 21–77
Problema 87.

88. Una carga puntual ($m = 1.0$ g) en el extremo de una cuerda aislante con longitud de 55 cm se encuentra en equilibrio en un campo eléctrico horizontal de 15,000 N/C, cuando la posición del péndulo es como se indica en la figura 21-78, con la carga a 12 cm sobre la posición (vertical) más baja. Si el campo apunta a la derecha en la figura 21-78, determine la magnitud y el signo de la carga puntual.

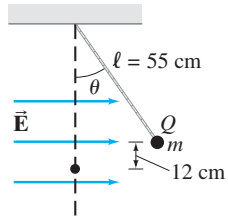


FIGURA 21–78
Problema 88.

89. Se colocan cuatro cargas puntuales positivas iguales, cada una de 8.0 μC, en las esquinas de un cuadrado de 9.2 cm de arista. ¿Qué carga eléctrica debe colocarse en el centro del cuadrado para que las cuatro cargas queden en equilibrio? ¿Es este equilibrio estable o inestable (sección 12-3) en el plano?

90. Dos pequeñas esferas conductoras idénticas A y B están separadas una distancia R, cada una con la misma carga Q. *a*) ¿Cuál es la fuerza que ejerce la esfera B sobre la esfera A? *b*) Una esfera idéntica sin carga, la esfera C, hace contacto con la esfera B y luego se lleva muy lejos. ¿Cuál es la fuerza neta que actúa ahora sobre la esfera A? *c*) La esfera C se trae de regreso y ahora hace contacto con la esfera A; luego, se lleva muy lejos. ¿Cuál es la fuerza neta sobre la esfera A en este tercer caso?

91. Una carga puntual de masa 0.210 kg y carga neta $+0.340\ \mu$C cuelga en reposo del extremo de una cuerda aislante sobre una larga hoja cargada. La hoja horizontal de carga uniforme, fija, crea un campo eléctrico vertical uniforme en la vecindad de la carga puntual. Se observa que la tensión en la cuerda es de 5.18 N. *a*) Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico producido por la hoja cargada (figura 21-79). *b*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga μ (C/m^2) de la hoja?

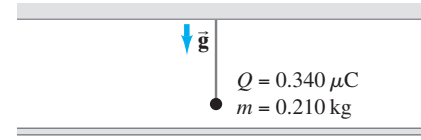


FIGURA 21–79
Problema 91.

92. Una fila unidimensional de iones positivos, cada uno con carga $+Q$, separados cada uno de sus vecinos por una distancia d, ocupa la mitad derecha del eje x. Esto es, hay una carga $+Q$ en $x = 0, x = d, x = 2d, x = 3d$, y así hasta el infinito. *a*) Si se coloca un electrón en la posición $x = -d$, determine la magnitud de la fuerza F que ejerce esta fila de cargas sobre el electrón. *b*) Si el electrón se localiza ahora en $x = -3d$, ¿cuál es el valor de F? [*Sugerencia:* La suma infinita $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donde n es un entero positivo.]

*Problemas numéricos/por computadora

***93.** (III) Un objeto delgado con forma de anillo de radio a contiene una carga total Q distribuida de manera uniforme sobre su longitud. El campo eléctrico en un punto sobre su eje, a una distancia x desde su centro, está dado en el ejemplo 21-9 y es

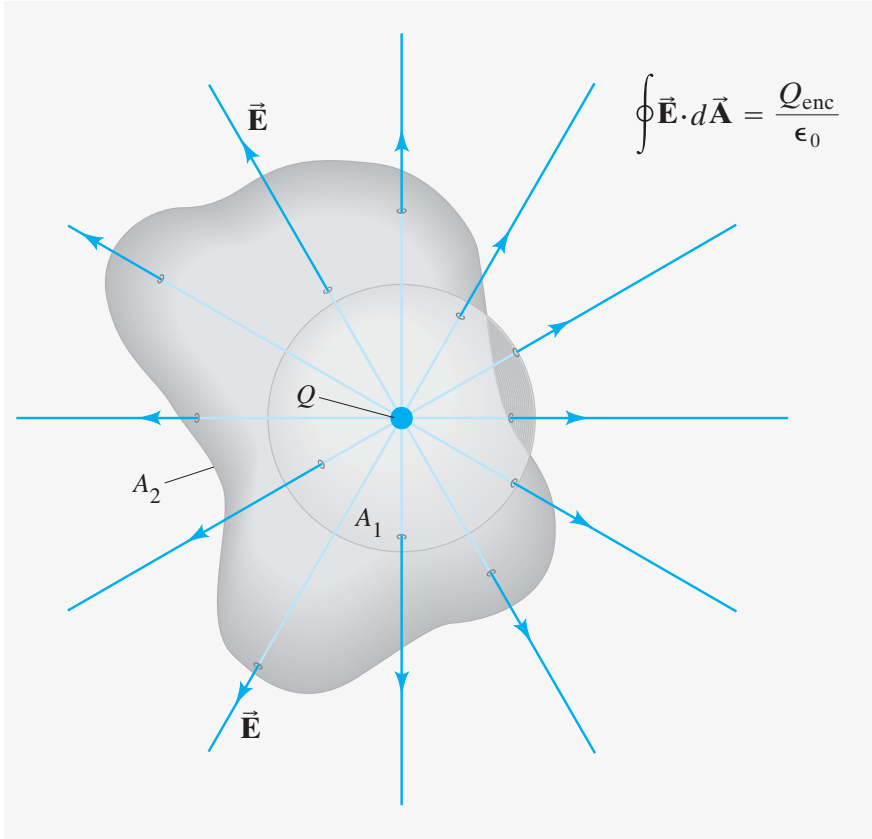
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

a) Use la derivada para encontrar en qué punto sobre el eje x ($x > 0$), E_x es un máximo. Considere que $Q = 6.00\ \mu$C y $a = 10.0$ cm. *b*) Calcule el campo eléctrico desde $x = 0$ hasta $x = +12.0$ cm en pasos de 0.1 cm; luego, construya una gráfica del campo eléctrico. ¿Coincide el máximo de la gráfica con el máximo del campo eléctrico que obtuvo analíticamente? También calcule y grafique el campo eléctrico *c*) debido al anillo y *d*) debido a una carga puntual $Q = 6.00\ \mu$C, localizada en el centro del anillo. Construya una sola gráfica, desde $x = 0$ (o $x = 1.0$ cm) hasta $x = 50.0$ cm en pasos de 1.0 cm, con las curvas de estos dos campos y muestre que ambos campos convergen a grandes distancias del centro. *e*) ¿A qué distancia difiere el campo eléctrico del anillo del campo eléctrico de la carga puntual en 10%?

***94.** (III) Una carga de $8.00\ \mu$C está sobre el eje x de un sistema de coordenadas en $x = +5.00$ cm. Una carga de $-2.00\ \mu$C está en $x = -5.00$ cm. *a*) Grafique la componente x del campo eléctrico para puntos sobre el eje x, desde $x = -30.0$ cm hasta $x = +30.0$ cm. El signo de E_x es positivo cuando $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia la derecha y es negativo si apunta hacia la izquierda. *b*) Construya una grafica de E_x y E_y para puntos sobre el eje y, desde $y = -30.0$ cm hasta $y = +30.0$ cm.

Respuestas a los ejercicios

A: *e*).
B: 5 N.
C: 1.2 N a la derecha.
D: *a*) No; *b*) Sí, a la mitad del camino entre ellas.
E: *d*), si las dos cargas positivas no están en las esquinas opuestas (use simetría).



La ley de Gauss es una relación elegante entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Es más general que la ley de Coulomb. La ley de Gauss incluye la integral del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en cada punto de una superficie cerrada. La superficie es sólo imaginaria, por lo que a nosotros nos toca elegir la forma y la posición de la superficie en tercera dimensión para calcular la integral. En este dibujo se muestran dos superficies diferentes, ambas encerrando a la carga Q. La ley de Gauss establece que el producto $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$, (donde $d\vec{\mathbf{A}}$ es una área infinitesimal de la superficie), integrado sobre toda la superficie, es igual a la carga encerrada por la superficie Q_{enc} dividida entre ϵ_0. Ambas superficies encierran la misma carga Q. Por lo tanto, $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ dará el mismo resultado para las dos superficies.

CAPÍTULO 22

Ley de Gauss

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO ¡Adivine ahora!

Una esfera no conductora tiene una densidad de carga uniforme distribuida sobre toda su superficie. ¿Cómo varía la magnitud del campo eléctrico en el interior con la distancia desde el centro?

a) El campo eléctrico es cero en todas partes.
b) El campo eléctrico es constante, pero distinto de cero en todas partes.
c) El campo eléctrico se incrementa linealmente con la distancia desde el centro hacia fuera.
d) El campo eléctrico se incrementa exponencialmente con la distancia desde el centro hacia fuera.
e) El campo eléctrico se incrementa cuadráticamente con la distancia desde el centro hacia fuera.

El gran matemático Karl Friedrich Gauss (1777-1855) desarrolló una importante relación, conocida ahora como la ley de Gauss, la cual desarrollamos y analizamos en este capítulo. Es un enunciado de la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico, así como una expresión más general y elegante que la ley de Coulomb.

En principio, podemos utilizar la ley de Coulomb para hallar el campo eléctrico debido a cualquier distribución de carga dada. El campo total en cualquier punto será la suma vectorial (la integral) de las contribuciones debidas a todas las cargas presentes (véase la ecuación 21-6). Salvo en algunos casos muy simples, esta suma o integral puede ser muy complicada de evaluar. Para situaciones en las que no es posible obtener una solución analítica (como vimos en los ejemplos de las secciones 21-6 y 21-7), debe usarse una computadora.

Sin embargo, en algunos casos, el campo eléctrico debido a una distribución de carga dada puede calcularse más fácilmente y con mayor elegancia usando la ley de Gauss, como veremos en este capítulo. La mayor importancia de la ley de Gauss es que brinda una visión adicional sobre la naturaleza de los campos eléctricos, así como una relación más general entre cargas y campos.

Antes de estudiar la ley de Gauss, nos ocuparemos del concepto de *flujo*.

CONTENIDO

22–1 Flujo eléctrico
22–2 Ley de Gauss
22–3 Aplicaciones de la ley de Gauss
*22–4 Base experimental de las leyes de Gauss y Coulomb

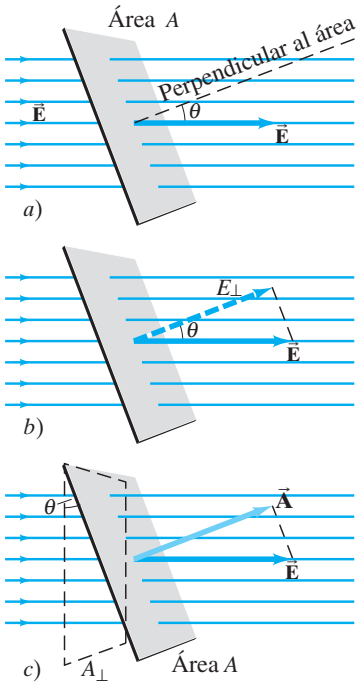


FIGURA 22–1 *a*) Un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ pasa a través de una área plana A. *b*) $E_\perp = E\cos\theta$ es la componente de $\vec{\mathbf{E}}$ perpendicular al plano del área A. *c*) $A_\perp = A\cos\theta$ es la proyección (indicada con líneas punteadas) del área A perpendicular al campo $\vec{\mathbf{E}}$.

FIGURA 22–2 Flujo eléctrico a través de una superficie curva. Se indica una pequeña área $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$, de la superficie.

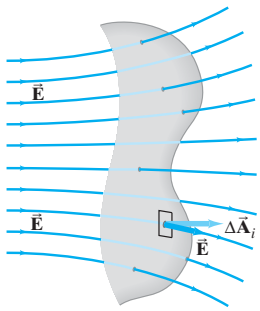
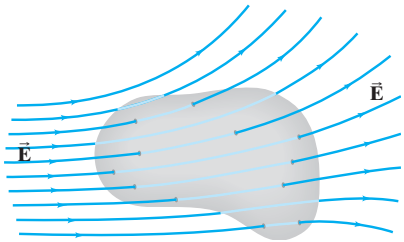


FIGURA 22–3 Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada.



22–1 Flujo eléctrico

La ley de Gauss implica el concepto de **flujo eléctrico**, el cual se refiere al campo eléctrico que pasa a través de una superficie dada. Para un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ que pasa a través de una área A, como se muestra en la figura 22-1a, el flujo eléctrico Φ_E se define como

$$\Phi_E = EA\cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre la dirección del campo eléctrico y una línea perpendicular al área. El flujo puede escribirse como

$$\Phi_E = E_\perp A = EA_\perp = EA\cos\theta, \qquad [\vec{\mathbf{E}} \text{ uniforme}] \quad \textbf{(22–1a)}$$

donde $E_\perp = E\cos\theta$ es la componente de $\vec{\mathbf{E}}$ a lo largo de la dirección perpendicular al área (figura 22-1b) y, de manera similar, $A_\perp = A\cos\theta$ es la proyección del área A perpendicular al campo $\vec{\mathbf{E}}$ (figura 22-1c).

El área A de la superficie puede representarse con un vector $\vec{\mathbf{A}}$ cuya magnitud es A y cuya dirección es perpendicular a la superficie, como se muestra en la figura 22-1c. El ángulo θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{A}}$, así que el flujo eléctrico también puede representarse como

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{A}}. \qquad [\vec{\mathbf{E}} \text{ uniforme}] \quad \textbf{(22–1b)}$$

El flujo eléctrico tiene una interpretación intuitiva simple en términos de las líneas de campo. En la sección 21-8 mencionamos que las líneas de campo siempre se pueden dibujar de manera que el número de líneas (N) que pasa a través de una área unitaria perpendicular al campo ($A_\perp$) es proporcional a la magnitud del campo (E); esto es, $E \propto N/A_\perp$. Por lo tanto,

$$N \propto EA_\perp = \Phi_E,$$

de manera que el flujo a través de una área dada es proporcional al número de líneas que pasan a través de esa área.

EJEMPLO 22–1 **Flujo eléctrico.** Calcule el flujo eléctrico a través del rectángulo mostrado en la figura 22-1a. El rectángulo mide 10 cm por 20 cm, mientras el campo eléctrico es uniforme y vale 200 N/C, en tanto que el ángulo θ es de 30°.

PLANTEAMIENTO Usamos la definición de flujo $\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{A}} = EA\cos\theta$.

SOLUCIÓN El flujo eléctrico es

$$\Phi_E = (200\,\text{N/C})(0.10\,\text{m} \times 0.20\,\text{m})\cos 30^\circ = 3.5\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}.$$

EJERCICIO A ¿Cuál de los siguientes casos producirá un cambio en el flujo eléctrico a través de un círculo contenido en el plano xz, donde el campo eléctrico es $(10\,\text{N})\hat{\mathbf{j}}$? *a*) Cambiar la magnitud del campo eléctrico. *b*) Modificar el tamaño del círculo. *c*) Girar el círculo de manera que quede contenido en el plano xy. *d*) Todos los anteriores. *e*) Ninguno de los anteriores.

En el caso más general, cuando el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es uniforme y la superficie no es plana (figura 22-2), dividimos la superficie elegida en n pequeños elementos de superficie, cuyas áreas son $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots \Delta A_n$. Elegimos la división de forma que cada ΔA_i sea tal que **1.** pueda considerarse plano y **2.** el campo eléctrico varíe muy poco sobre esta pequeña área, de manera que puede considerarse uniforme. El flujo eléctrico a través de toda la superficie es aproximadamente

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i\cdot\Delta\vec{\mathbf{A}}_i,$$

donde $\vec{\mathbf{E}}_i$ es el campo que pasa a través de $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$. En el límite cuando $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i \to 0$, la suma se convierte en una integral sobre toda la superficie y la relación se vuelve matemáticamente exacta

$$\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}. \qquad \textbf{(22–2)}$$

La ley de Gauss involucra el flujo *total* a través de una superficie *cerrada*, una superficie de cualquier forma que encierra completamente un volumen dado de espacio, como el que se ilustra en la figura 22-3. En este caso, el flujo neto a través de la superficie cerrada está dado por

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}, \qquad \textbf{(22–3)}$$

donde el signo de la integral se escribe $\oint$ para indicar que la integral toma el valor de $\vec{\mathbf{E}}$ sobre cada punto de la superficie cerrada.

Hasta ahora no nos hemos preocupado por la ambigüedad en la dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$ o $d\vec{\mathbf{A}}$ que representa una superficie. Por ejemplo, en la figura 22-1c, el vector $\vec{\mathbf{A}}$ pudo apuntar hacia arriba a la derecha (como se indica) o hacia abajo a la izquierda y seguir siendo perpendicular a la superficie. Para una superficie cerrada, definimos (de manera arbitraria) la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$, o $d\vec{\mathbf{A}}$, de manera que apunte *hacia fuera* del volumen encerrado (figura 22-4). Para una línea de campo eléctrico que sale del volumen encerrado (a la derecha de la figura 22-4), el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{A}}$ debe ser menor que $\pi/2$ ($= 90°$), por lo que $\cos\theta > 0$. Para una línea de campo que entra en el volumen (a la izquierda de la figura 22-4) $\theta > \pi/2$, por lo que $\cos\theta < 0$. Por lo tanto, *el flujo que entra al volumen es negativo* $\left(\int E\cos\theta\, dA < 0\right)$, mientras que *el flujo que sale de la superficie es positivo*. En consecuencia, la ecuación 22-3 da el flujo neto *fuera* del volumen. Si Φ_E es negativo, entonces hay un flujo neto *hacia* el volumen.

En las figuras 22-3 y 22-4, cada línea que entra al volumen también sale. Por lo tanto, $\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0$. No hay un flujo neto desde o hacia esta superficie cerrada. El flujo, $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$, será diferente de cero sólo si una o más líneas terminan o empiezan en la superficie. Como las líneas de campo empiezan o terminan sólo en cargas eléctricas, el flujo será diferente de cero sólo si la superficie encierra una carga neta. Por ejemplo, la superficie marcada como A_1 en la figura 22-5 encierra una carga positiva y hay un flujo neto hacia fuera de la superficie ($\Phi_E > 0$). La superficie A_2 encierra una carga negativa de la misma magnitud y hay un flujo neto hacia dentro de la superficie ($\Phi_E < 0$). Para la configuración que se representa en la figura 22-6, el flujo a través de la superficie mostrada es negativo (cuente las líneas). El valor de Φ_E depende de la carga encerrada por la superficie, que es de lo que se trata la ley de Gauss.

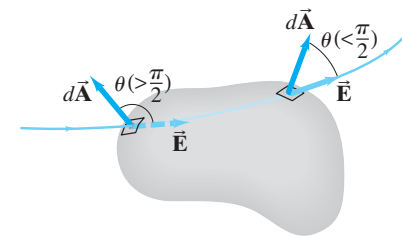


FIGURA 22–4 La dirección de un elemento de área $d\vec{\mathbf{A}}$ se toma apuntando hacia fuera de una superficie cerrada.

FIGURA 22–5 Un dipolo eléctrico. El flujo a través de la superficie A_1 es positivo. El flujo a través de la superficie A_2 es negativo.

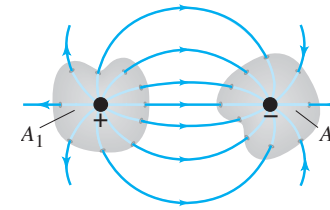


FIGURA 22–6 El flujo neto a través de la superficie A es negativo.

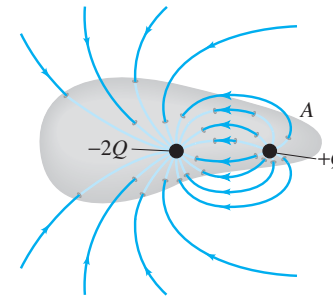
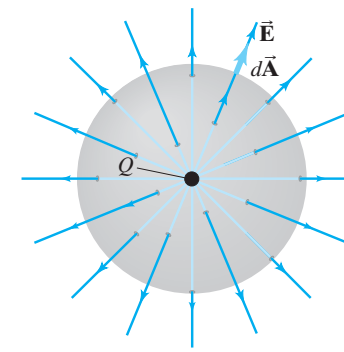


FIGURA 22–7 Una sola carga puntual Q en el centro de una esfera imaginaria de radio r (nuestra "superficie gaussiana", es decir, la superficie cerrada que hemos elegido para aplicar la ley de Gauss en este caso).



22–2 Ley de Gauss

La relación precisa entre el flujo eléctrico a través de una superficie, mientras la carga neta Q_{enc} encerrada dentro de la superficie está dada por la **ley de Gauss**:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}, \qquad \textbf{(22–4)}$$

donde ϵ_0 es la misma constante (permitividad del vacío) que aparece en la ley de Coulomb. La integral del lado izquierdo considera el valor de $\vec{\mathbf{E}}$ sobre cualquier superficie cerrada; elegimos esa superficie como mejor nos convenga para una situación dada. La carga Q_{enc} es la carga neta *encerrada* dentro de esa superficie. No importa dónde o cómo esté distribuida la carga dentro de la superficie. No debe incluirse ninguna carga fuera de esa superficie. Una carga fuera de la superficie seleccionada podría afectar la posición de las líneas de campo eléctrico, pero no afectará el número neto de líneas que entran a la superficie o que salen de ésta. Por ejemplo, para la superficie gaussiana A_1 de la figura 22-5, Q_{enc} sería la carga positiva encerrada por A_1. La carga negativa contribuye al campo eléctrico en A_1, pero *no* está encerrada dentro del la superficie A_1, así que no se incluye en Q_{enc}.

Veamos ahora cómo se relaciona la ley de Gauss con la ley de Coulomb. Primero analizaremos que la ley de Coulomb se obtiene a partir de la ley de Gauss. En la figura 22-7 tenemos una carga aislada Q. Elegimos nuestra "superficie gaussiana" como una esfera imaginaria de radio r centrada en la carga. Como se supone que la ley de Gauss se cumple para cualquier superficie, hemos elegido una superficie para que se simplifiquen nuestros cálculos. Dada la simetría de esta esfera (imaginaria) con respecto a la carga en su centro, sabemos que $\vec{\mathbf{E}}$ debe tener la misma magnitud en cualquier punto sobre su superficie y que $\vec{\mathbf{E}}$ apunta radialmente hacia fuera o (hacia adentro) paralelo a $d\vec{\mathbf{A}}$, un elemento de área superficial. Así, escribimos la integral en la ley de Gauss como

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\, dA = E\oint dA = E(4\pi r^2)$$

dado que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, mientras que la magnitud de $\vec{\mathbf{E}}$ es la misma para todos los puntos sobre esta superficie esférica. Así que la ley de Gauss queda con $Q_{\text{enc}} = Q$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2)$$

porque $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{A}}$ son ambos perpendiculares a la superficie en cada punto, y $\cos\theta = 1$. Al despejar E, obtenemos

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

que es la ley de Coulomb en la forma de campo eléctrico (ecuación 21-4b).

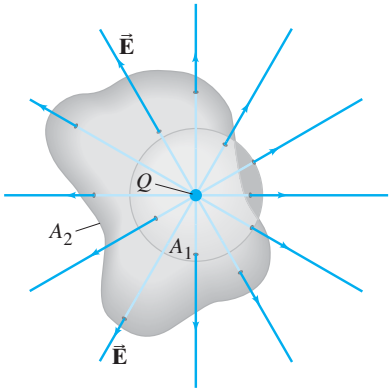


FIGURA 22–8 Una carga puntual sola rodeada por una superficie esférica A_1 y por otra superficie de forma irregular A_2.

Hagamos ahora lo opuesto: obtengamos la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb para cargas eléctricas estáticas.† Primero consideremos una sola carga puntual Q rodeada de una superficie esférica imaginaria como en la figura 22-7 (que se muestra de nuevo en color naranja en la figura 22-8). La ley de Coulomb dice que el campo eléctrico en la superficie de la esfera es $E = (1/4\pi\theta_0)\,(Q/r^2)$. Invirtiendo el argumento que acabamos de usar, tenemos

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ésta es la ley de Gauss con $Q_{\text{enc}} = Q$, y la dedujimos para el caso especial de una superficie esférica que encierra una carga puntual en su centro. Pero, ¿qué sucede cuando se tiene otra superficie, como la superficie irregular A_2 en la figura 22-8? El mismo número de líneas de campo (debidas a nuestra carga Q) pasan a través de la superficie A_2 que las que pasan a través de la superficie esférica A_1. Por lo tanto, como el flujo a través de una superficie es proporcional al número de líneas que atraviesan esa superficie, como vimos en la sección 22-1, el flujo a través de A_2 es el mismo que el flujo a través de A_1:

$$\oint_{A_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint_{A_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Así, podemos esperar que

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

sería válida para *cualquier* superficie que encierre a la sola carga puntual Q.

Por último, veamos el caso de más de una carga. Para cada carga Q_i encerrada por la superficie,

$$\oint \vec{\mathbf{E}}_i \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_i}{\epsilon_0},$$

donde $\vec{\mathbf{E}}_i$ se refiere al campo eléctrico producido sólo por la carga Q_i. Por el principio de superposición de los campos eléctricos (sección 21-6), el campo eléctrico total $\vec{\mathbf{E}}$ es igual a la suma de los campos debidos a cada carga por separado, $\vec{\mathbf{E}} = \Sigma\vec{\mathbf{E}}_i$. De aquí que,

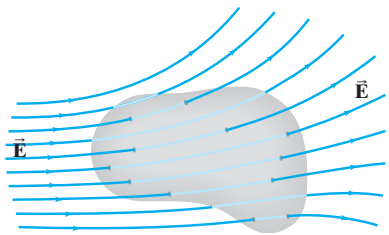
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint (\Sigma\vec{\mathbf{E}}_i) \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \Sigma\frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

donde $Q_{\text{enc}} = \Sigma Q_i$ es la carga neta total encerrada dentro de la superficie. Así, vemos que, con base en este simple argumento, la ley de Gauss se deduce de la ley de Coulomb para cualquier distribución de cargas eléctricas estáticas encerradas dentro de una superficie cerrada de cualquier forma.

La deducción de la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb es válida para campos eléctricos producidos por cargas eléctricas estáticas. Veremos después que también es factible producir campos eléctricos mediante campos magnéticos variables. La ley de Coulomb no puede usarse para describir tales campos. No obstante, *se encuentra* que la ley de Gauss también se cumple para campos producidos por cualquiera de estos modos. Por lo tanto, *la ley de Gauss es una ley más general que la ley de Coulomb*. Se cumple para cualquier campo eléctrico.

Aun en el caso de campos eléctricos estáticos que estamos considerando en este capítulo, es importante reconocer que $\vec{\mathbf{E}}$ en el lado izquierdo de la ley de Gauss no es necesariamente sólo por la carga encerrada Q_{enc} que aparece en el lado derecho. Por ejemplo, en la figura 22-9 hay un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en todos los puntos de la superficie gaussiana imaginaria, pero éste no es consecuencia de la carga encerrada dentro de la superficie (que en este caso es $Q_{\text{enc}} = 0$). El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ que aparece en el lado izquierdo de la ley de Gauss, es el campo eléctrico *total* en cada punto sobre la superficie gaussiana elegida, no sólo el campo debido a la carga encerrada Q_{enc} que aparece en el lado derecho. Se ha encontrado que la ley de Gauss es válida para el flujo total en cualquier superficie. Nos indica que cualquier *diferencia* entre el flujo de entrada y de salida, sobre cualquier superficie, es resultado de cargas dentro de esa superficie.

FIGURA 22–9 Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada (igual que en la figura 22-3). La carga neta encerrada por esta superficie es cero ($Q_{\text{enc}} = 0$).



†Observe que la ley de Gauss parecería más complicada en términos de la constante $k = 1/4\pi\epsilon_0$ que usamos originalmente en ley de Coulomb (ecuaciones 21-1 o 21-4a):

Ley de Coulomb	*Ley de Gauss*
$E = k\frac{Q}{r^2}$	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 4\pi kQ$
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$

La ley de Gauss tiene una forma más simple usando ϵ_0; la ley de Coulomb es más simple usando k. La convención normal es usar ϵ_0 en vez de k, porque la ley de Gauss se considera más general; por lo tanto, es preferible manejarla en una forma más simple.

EJEMPLO CONCEPTUAL 22–2 **Flujo eléctrico a partir de la ley de Gauss.** Considere las dos superficies gaussianas A_1 y A_2 mostradas en la figura 22-10. La única carga presente es la carga Q, que está en el centro de la superficie A_1. ¿Cuál es el flujo neto a través de cada superficie A_1 y A_2?

RESPUESTA La superficie A_1 encierra a la carga $+Q$. Por la ley de Gauss, el flujo neto a través de A_1 es Q/ϵ_0. Para la superficie A_2, la carga $+Q$ está fuera de la superficie. La superficie A_2 no encierra ninguna carga neta, así que por ley de Gauss el flujo eléctrico neto a través de la superficie A_2 es cero. Observe que todas las líneas de campo que entran al volumen encerrado por la superficie A_2 también salen.

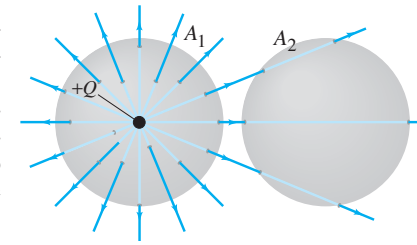


FIGURA 22–10 Ejemplo 22-2. Dos superficies gaussianas.

EJERCICIO B Una carga puntual Q está en el centro de una superficie gaussiana esférica A. Cuando se coloca una segunda carga Q justo afuera de la superficie A, el flujo total a través de esta superficie esférica es *a*) el mismo, *b*) el doble, *c*) la mitad, *d*) ninguna de las anteriores.

EJERCICIO C Tres cargas de 2.95 μC están dentro de una caja pequeña. ¿Cuál es el flujo neto que sale de la caja? *a*) 3.3×10^{12} N·m^2/C, *b*) 3.3×10^5 N·m^2/C, *c*) 1.0×10^{12} N·m^2/C, *d*) 1.0×10^6 N·m^2/C, *e*) 6.7×10^6 N·m^2/C.

Notamos que la integral en la ley de Gauss generalmente es más difícil de llevar a cabo en la práctica. Rara vez tenemos que hacerla, excepto en situaciones muy simples, que explicaremos ahora.

22–3 Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss es una manera compacta y elegante de representar la relación entre carga eléctrica y campo eléctrico. También ofrece una manera simple de determinar el campo eléctrico cuando la distribución de carga es simple y/o posee un alto grado de *simetría*. Sin embargo, para aplicar la ley de Gauss, debemos elegir la superficie "gaussiana" con mucho cuidado (para la integral en el lado izquierdo de la ley de Gauss), de manera que podamos determinar $\vec{\mathbf{E}}$. Normalmente consideramos una superficie que tenga la simetría necesaria para que E sea constante sobre toda la superficie o sobre partes de ella. Algunas veces elegimos una superficie de manera que el flujo a través de parte de la superficie sea cero.

EJEMPLO 22–3 **Conductor esférico.** Un cascarón esférico delgado de radio r_0 posee una carga neta total Q, que está distribuida de manera uniforme sobre su superficie (figura 22-11). Determine el campo eléctrico en puntos *a*) fuera del cascarón y *b*) dentro del cascarón. *c*) ¿Qué pasaría si el conductor fuera una esfera sólida?

PLANTEAMIENTO Como la carga está distribuida simétricamente, el campo eléctrico también debe ser simétrico. Como resultado, el campo fuera de la esfera debe estar dirigido radialmente hacia fuera (o hacia adentro si $Q < 0$) y debe depender sólo de r, no del ángulo (en coordenadas esféricas).

SOLUCIÓN *a*) El campo eléctrico tendrá la misma magnitud sobre todos los puntos de una superficie gaussiana, si elegimos esta superficie como una esfera de radio r ($r > r_0$) concéntrica con el cascarón, como se muestra en la figura 22-11, con el círculo entrecortado A_1. Como $\vec{\mathbf{E}}$ es perpendicular a esta superficie, el coseno del ángulo entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{A}}$ siempre es 1. La ley de Gauss da entonces (con $Q_{\text{enc}} = Q$ en la ecuación 22-4)

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde $4\pi r^2$ es el área de la superficie de nuestra esfera gaussiana de radio r. Así que

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \qquad [r > r_0]$$

En consecuencia, el campo afuera del cascarón esférico cargado de manera uniforme es el mismo, como si toda la carga estuviera concentrada en el centro, como una carga puntual.

b) Dentro del cascarón, el campo eléctrico también habrá de ser simétrico. Así que E debe tener el mismo valor sobre todos los puntos de una superficie gaussiana esférica (A_2 en la figura 22-11) concéntrica con el cascarón. Así que E se puede factorizar de la integral y, como $Q_{\text{enc}} = 0$ porque la carga encerrada dentro de la esfera A_2 es cero, entonces

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2) = 0.$$

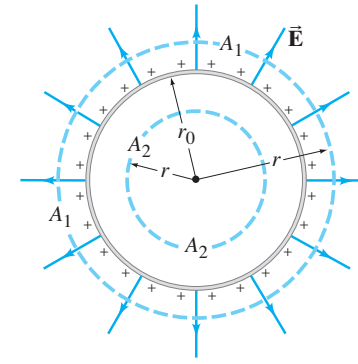
De donde

$$E = 0 \qquad [r < r_0]$$

dentro de un cascarón esférico con carga uniforme.

c) Este mismo resultado se aplica a una esfera conductora sólida cargada de manera uniforme, ya que toda la carga reside en una capa delgada en la superficie.

FIGURA 22–11 Corte transversal de un cascarón esférico delgado de radio r_0, portando una carga neta Q distribuida de manera uniforme. A_1 y A_2 representan dos superficies gaussianas que usamos para determinar $\vec{\mathbf{E}}$. Ejemplo 22-3.



EJERCICIO D Se coloca una carga Q sobre una pelota de metal hueca. En el capítulo 21 vimos que toda la carga reside en la superficie de la pelota, porque el metal es un conductor. ¿Cómo se distribuye la carga sobre la pelota? *a*) La mitad en la superficie interior y la otra mitad en la superficie exterior. *b*) Parte en cada superficie en proporción inversa a los dos radios. *c*) Parte en cada superficie, pero con una dependencia de los radios, más complicada que la respuesta *b*). *d*) Toda en la superficie interna. *e*) Toda en la superficie externa.

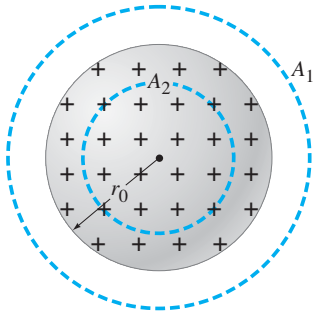


FIGURA 22–12 Una esfera sólida con densidad de carga uniforme. Ejemplo 22-4.

EJEMPLO 22–4 **Esfera sólida de carga.** Se distribuye de manera uniforme una carga eléctrica Q a través de una esfera no conductora de radio r_0 (figura 22-12). Determine el campo eléctrico *a*) afuera de la esfera ($r > r_0$) y *b*) dentro de la esfera ($r < r_0$).

PLANTEAMIENTO Como la carga se distribuye simétricamente en la esfera, el campo eléctrico en todos los puntos también debe ser *simétrico*. $\vec{\mathbf{E}}$ depende sólo de r y se dirige en forma radial hacia fuera (o hacia dentro si $Q < 0$).

SOLUCIÓN *a*) Elegimos nuestra superficie gaussiana como una esfera de radio r ($r > r_0$), llamada A_1 en la figura 22-12. Puesto que E depende sólo de r, con $Q_{\text{enc}} = Q$ la ley de Gauss da

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

o

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

De nuevo, el campo fuera de una distribución de carga con simetría esférica es el mismo que el de una carga puntual de la misma magnitud localizada en el centro de la esfera.
b) Dentro de la esfera, elegimos nuestra superficie gaussiana como una esfera concéntrica de radio r ($r < r_0$), llamada A_2 en la figura 22-12. Por simetría, la magnitud de $\vec{\mathbf{E}}$ es la misma para todos los puntos sobre la superficie A_2 y $\vec{\mathbf{E}}$ es perpendicular a la superficie, así que

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2).$$

Debemos igualar esto a $Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$ donde Q_{enc} es la carga encerrada por A_2. Observe que Q_{enc} no es la carga total Q, sino sólo una fracción de ella. Definimos la **densidad de carga**, ρ_{E}, como la carga por unidad de volumen ($\rho_{\text{E}} = dQ/dV$); en este caso, tenemos que $\rho_{\text{E}} =$ constante. Así que la carga encerrada por la superficie gaussiana A_2, que es una esfera de radio r, es

$$Q_{\text{enc}} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{E}}}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_{\text{E}}}\right) Q = \frac{r^3}{r_0^3} Q.$$

De aquí, usando la ley de Gauss, tenemos,

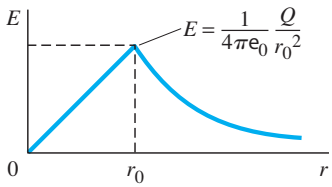
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{r^3}{r_0^3}\frac{Q}{\epsilon_0}$$

o

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0^3} r. \qquad [r < r_0]$$

Así que el campo se incrementa linealmente con r, hasta $r = r_0$, y luego decrece como $1/r^2$, como se grafica en la figura 22-13.

FIGURA 22–13 Magnitud del campo eléctrico como función de la distancia r desde el centro de una esfera sólida con carga uniforme.



EJERCICIO E Regrese a la pregunta de inicio de capítulo (página 591) y contéstela de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Los resultados del ejemplo 22-4 habrían sido difíciles de obtener usando la ley de Coulomb por integración sobre la esfera. Usando la ley de Gauss y la *simetría* de la situación, se obtiene este resultado con facilidad, lo que demuestra el gran poder de la ley de Gauss. Sin embargo, su uso de esta manera se limita generalmente a casos donde la distribución de carga tiene un alto grado de simetría. En tales casos, *elegimos* una superficie simple sobre la cual $E =$ constante, de manera que la integración sea sencilla. La ley de Gauss se cumple, por supuesto, para cualquier superficie.

EJEMPLO 22–5 **Esfera sólida con carga no uniforme.** Suponga que la densidad de carga de la esfera sólida de la figura 22-12 (ejemplo 22-4) está dada por $\rho_E = \alpha r^2$, donde α es una constante. *a*) Encuentre α en términos de la carga total Q y del radio de la esfera r_0. *b*) Determine el campo eléctrico como función de r dentro de la esfera.

PLANTEAMIENTO Dividimos la esfera en cascarones delgados concéntricos de espesor dr, como se muestra en la figura 22-14, e integramos *a*) estableciendo que $Q = \int \rho_E dV$ y *b*) usando la ley de Gauss.

SOLUCIÓN *a*) El volumen de una cascarón delgado de radio r y espesor dr (figura 22-14) es $dV = 4\pi r^2\, dr$. La carga total está dada por

$$Q = \int \rho_E\, dV = \int_0^{r_0} (\alpha r^2)(4\pi r^2\, dr) = 4\pi\alpha \int_0^{r_0} r^4\, dr = \frac{4\pi\alpha}{5} r_0^5.$$

Así que $\alpha = 5Q/4\pi r_0^5$.

b) Para encontrar E dentro de la esfera a una distancia r del centro, aplicamos la ley de Gauss a una esfera imaginaria de radio r, la cual encierra una carga

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^r \rho_E\, dV = \int_0^r (\alpha r^2)\, 4\pi r^2\, dr = \int_0^r \left(\frac{5Q}{4\pi r_0^5} r^2\right) 4\pi r^2\, dr = Q\frac{r^5}{r_0^5}.$$

Por simetría, E será el mismo sobre todos los puntos de la superficie de la esfera de radio r, así que la ley de Gauss da

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$(E)(4\pi r^2) = Q\frac{r^5}{\epsilon_0 r_0^5},$$

por lo que

$$E = \frac{Qr^3}{4\pi\epsilon_0 r_0^5}.$$

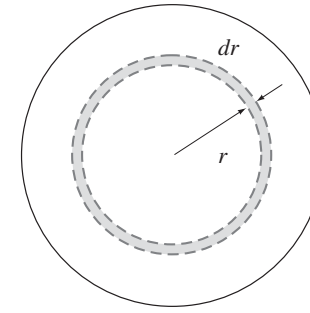


FIGURA 22–14 Ejemplo 22–5.

EJEMPLO 22–6 **Línea larga de carga uniforme.** Un alambre recto muy largo posee una carga positiva uniforme por unidad de longitud, λ. Calcule el campo eléctrico en puntos cerca (pero fuera) del alambre y lejos de sus extremos.

PLANTEAMIENTO Dada la *simetría*, esperamos que el campo eléctrico esté dirigido radialmente hacia fuera y que dependa sólo de la distancia perpendicular R desde el alambre. Dada la simetría cilíndrica, el campo será el mismo sobre todos los puntos de una superficie gaussiana con forma de cilindro con el alambre a lo largo de su eje (figura 22-15). $\vec{\mathbf{E}}$ es perpendicular a esta superficie en todos los puntos. Para aplicar la ley de Gauss necesitamos una superficie cerrada, así que incluimos las dos tapas planas del cilindro. Dado que $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a estas tapas, no hay flujo eléctrico a través de ellas (el coseno del ángulo entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{A}}$ sobre las tapas es $\cos 90° = 0$).

SOLUCIÓN Para la superficie gaussiana que hemos elegido, la ley de Gauss da

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(2\pi R\ell) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0},$$

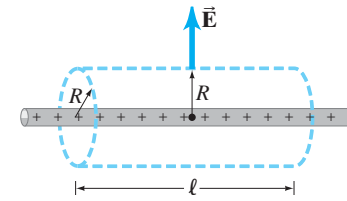
donde ℓ es la longitud de nuestra superficie gaussiana ($\ell \ll$ que la longitud del alambre) y $2\pi R$ es su circunferencia. Por lo tanto,

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}.$$

NOTA Éste es el mismo resultado que encontramos en el ejemplo 21-11 usando la ley de Coulomb (utilizamos x en vez de R), pero esta vez se requirió mucho menos esfuerzo. De nuevo, vemos el gran poder de la ley de Gauss.†

NOTA Recuerde del capítulo 10 (figura 10-2), que usamos R para la distancia de una partícula a un eje (simetría cilíndrica) y r minúscula para la distancia desde un punto dado (por lo general, el origen 0).

FIGURA 22–15 Cálculo de $\vec{\mathbf{E}}$ producido por una línea de carga muy larga. Ejemplo 22-6.



†Sin embargo, observe que el método usado en el ejemplo 21-11 permite calcular también E para una línea de carga corta con los límites apropiados en la integral, mientras que la ley de Gauss no es práctica en ese caso, dada la falta de simetría.

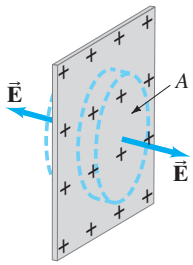


FIGURA 22–16 Cálculo del campo eléctrico fuera de una superficie plana no conductora con carga uniforme. Ejemplo 22-7.

EJEMPLO 22–7 **Plano de carga infinito.** Se distribuye carga de manera uniforme, con una densidad superficial de carga σ (σ = carga por unidad de área = dQ/dA), sobre una superficie plana no conductora muy larga, pero muy delgada. Determine el campo eléctrico en puntos cercanos al plano.

PLANTEAMIENTO Elegimos como superficie gaussiana un cilindro pequeño cerrado, con su eje perpendicular al plano, que se extiende a través del plano como se muestra en la figura 22-16. Dada la simetría, esperamos que $\vec{\mathbf{E}}$ esté dirigido de forma perpendicular al plano a ambos lados, como se muestra en la figura, y que sea uniforme sobre las tapas del cilindro, cada una con área A.

SOLUCIÓN Puesto que no hay flujo eléctrico sobre las paredes curvas de nuestra superficie cilíndrica, todo el flujo es a través de las dos tapas. Así que la ley de Gauss da

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 2EA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

donde $Q_{\text{enc}} = \sigma A$ es la carga encerrada por nuestro cilindro gaussiano. El campo eléctrico es, por lo tanto,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

NOTA Éste es el mismo resultado que obtuvimos de manera mucho más elaborada en el capítulo 21 (ecuación 21-7). El campo es uniforme para puntos lejanos de los bordes del plano y cercano a su superficie.

EJEMPLO 22–8 **Campo eléctrico cerca de cualquier superficie conductora.** Muestre que el campo eléctrico justo fuera de la superficie de cualquier buen conductor de forma arbitraria está dado por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

donde σ es la densidad superficial de carga en la superficie del conductor en cualquier punto.

PLANTEAMIENTO Elegimos como nuestra superficie gaussiana una pequeña caja cilíndrica, como hicimos en el ejemplo anterior. Elegimos el cilindro con una altura muy pequeña, de manera que una de sus tapas circulares quede justo arriba del conductor (figura 22-17). La otra tapa queda justo debajo de la superficie del conductor y la pared cilíndrica es perpendicular a la superficie del conductor.

SOLUCIÓN El campo eléctrico es cero dentro de un conductor y perpendicular a su superficie justo afuera de él (sección 21-9), así que hay flujo eléctrico sólo a través de la tapa externa de nuestra superficie cilíndrica; no hay flujo a través de la tapa interior o de la pared cilíndrica. Elegimos el área A (de la tapa plana) suficientemente pequeña, de manera que E sea uniforme sobre ella. Así que la ley de Gauss nos da

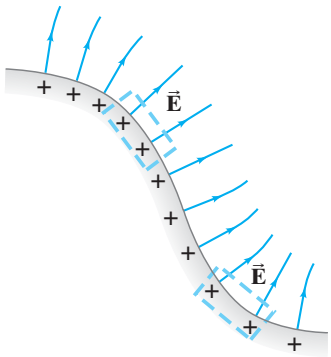
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = EA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

de manera que

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \qquad \text{[en la superficie de un conductor]} \quad \textbf{(22–5)}$$

NOTA Este útil resultado se aplica a un conductor de cualquier forma.

FIGURA 22–17 Campo eléctrico cerca de la superficie de un conductor. Ejemplo 22-8.



⚠ **CUIDADO**

Cuándo usar $E = \sigma/\epsilon_0$ y cuándo $E = \sigma/2\epsilon_0$

¿Cómo es que el campo fuera de un plano grande no conductor es $E = \sigma/2\epsilon_0$ (ejemplo 22-7), mientras que fuera de un conductor es $E = \sigma/2\epsilon_0$ (ejemplo 22-8)? La razón del factor 2 no viene de que sea un conductor *versus* un no conductor, sino de cómo definimos carga por unidad de área σ. Para un no conductor plano delgado (figura 22-16), la carga puede estar distribuida a través del volumen (no sólo en la superficie, como en un conductor). La carga por unidad de área σ representa toda la carga a través de la anchura del no conductor delgado. También nuestra superficie gaussiana tiene sus tapas fuera del no conductor en cada uno de sus lados, de manera que se incluye toda esta

carga. Por otro lado, para un conductor, la carga se acumula en las superficies externas solamente. Para un conductor plano delgado, como se ilustra en la figura 22-18, la carga se acumula en ambas superficies; usando la misma superficie gaussiana pequeña que en la figura 22-17, con una tapa dentro y la otra tapa fuera del conductor, terminamos con el resultado $E = \sigma/\epsilon_0$. Si definimos σ para un conductor, como lo hicimos para un no conductor, σ representaría la carga por unidad de área del conductor entero. Entonces, la figura 22-18 mostraría que la carga superficial en cada superficie es $\sigma/2$, por lo que la ley de Gauss daría $\int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = EA = (\sigma/2)A/\epsilon_0 = \sigma A/2\epsilon_0$ así que $E = \sigma/2\epsilon_0$, lo mismo que para un no conductor. Habrá que ser cuidadosos acerca de cómo definimos la carga por unidad de área σ.

En la sección 21-9 vimos que, en una situación estática, el campo eléctrico dentro de cualquier conductor debe ser cero, aun si tiene una carga neta. (De otro modo, las cargas libres en el conductor se moverían hasta que la fuerza neta en cada una y, por lo tanto $\vec{\mathbf{E}}$, fueran cero.) También mencionamos que cualquier carga eléctrica neta en un conductor debe residir en su superficie exterior. Lo anterior se puede mostrar más fácilmente con la ley de Gauss. Considere un conductor cualquiera de forma arbitraria, como el que se representa en la figura 22-19, el cual porta una carga neta Q. Elegimos la superficie gaussiana, indicada con línea punteada en el diagrama, de manera que toda quede justo debajo de la superficie del conductor y cubra en esencial todo el volumen del conductor. Nuestra superficie gaussiana puede estar arbitrariamente cerca de la superficie, pero aún *dentro* del conductor. El campo eléctrico es cero en todos los puntos de esa superficie, ya que está en el interior de un conductor. Por lo tanto, a partir de la ley de Gaus (ecuación 22-4), la carga neta dentro de la superficie habrá de ser cero. En consecuencia, no puede haber una carga neta dentro del conductor. Cualquier carga neta tiene que residir en la superficie del conductor.

Si hay una cavidad vacía dentro del conductor, ¿se puede acumular carga en esa superficie (interna) también? Como se muestra en la figura 22-20, si imaginamos una superficie gaussiana (indicada con línea punteada) apenas dentro del conductor cubriendo la cavidad, sabremos que $\vec{\mathbf{E}}$ debe ser cero en cualquier punto de tal superficie, puesto que está dentro del conductor. Por lo tanto, por la ley de Gauss, *no puede haber una carga neta en la superficie de la cavidad*.

¿Qué pasa si la cavidad no está vacía y hay una carga dentro de ella?

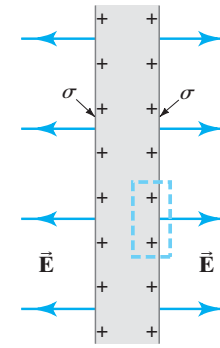
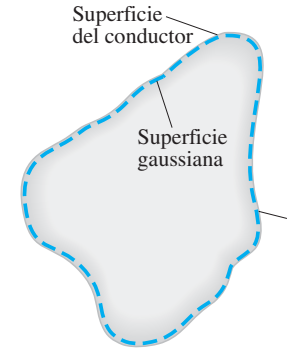


FIGURA 22–18 Conductor delgado plano cargado con densidad superficial de carga θ en cada superficie. Para el conductor como un todo, la densidad de carga es $\sigma' = 2\,\sigma$.

FIGURA 22–19 Un conductor con carga y aislado de forma arbitraria con una superficie gaussiana justo debajo de la superficie del conductor.



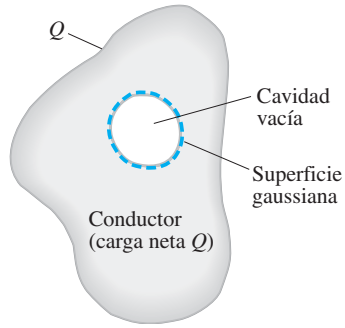
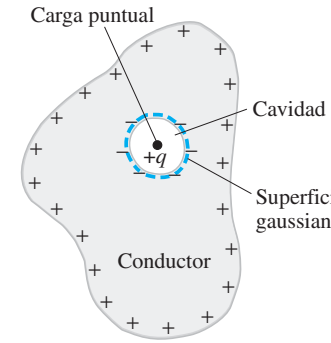


FIGURA 22–20 Una cavidad vacía dentro de un conductor cargado tiene una carga neta igual a cero.

FIGURA 22–21 Ejemplo 22–9.



EJEMPLO CONCEPTUAL 22–9 **Conductor con una carga dentro de una cavidad.** Suponga que un conductor posee una carga neta $+Q$ y que contiene una cavidad dentro de la cual hay una carga puntual $+q$. ¿Qué puede decir acerca de las cargas en las superficies interna y externa del conductor?

RESPUESTA Como se observa en la figura 22-21, una superficie gaussiana dentro del conductor que rodee justo a la cavidad debe contener una carga neta igual a cero ($E = 0$, dentro de un conductor). Así que una carga neta $-q$ tiene que existir en la superficie de la cavidad. El conductor mismo posee una carga $+Q$, así que su superficie exterior debe portar ahora una carga igual a $Q + q$. Estos resultados se aplican a una cavidad de cualquier forma.

EJERCICIO F ¿Cuál de los siguientes enunciados acerca de la ley de Gauss es correcto? *a*) Si conocemos la carga encerrada en una superficie, siempre sabremos el campo eléctrico en cualquier punto de esa superficie. *b*) Para encontrar el campo eléctrico usando la ley de Gauss, siempre usamos una esfera como superficie gaussiana. *c*) Si conocemos el flujo total a través de una superficie, también conoceremos la carga neta dentro de esa superficie. *d*) Podemos usar la ley de Gauss sólo si el campo eléctrico es constante en el espacio.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ley de Gauss para distribuciones simétricas de carga

1. Primero identifique la **simetría** de la distribución de carga: esférica, cilíndrica o plana. Esta identificación debe sugerir la superficie gaussiana para la cual $\vec{\mathbf{E}}$ será constante y/o cero sobre toda o parte de la superficie: una esfera para simetría esférica, un cilindro para simetría cilíndrica o un cilindro pequeño ("caja de píldoras") para simetría plana.
2. Dibuje la superficie gaussiana apropiada verificando que contenga los puntos donde quiere calcular el campo eléctrico.
3. Use la simetría de la distribución de carga para determinar la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ en puntos sobre la superficie gaussiana.
4. Evalúe el flujo, $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$. Usando la superficie gaussiana adecuada, el producto punto $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ debe ser cero o igual a $\pm E\, dA$, siendo la magnitud de E constante sobre toda la superficie o parte de ella.
5. Calcule la carga *encerrada* por la superficie gaussiana. Recuerde que lo que importa es la carga encerrada. Ignore todas las cargas fuera de la superficie gaussiana.
6. Iguale el flujo a la carga encerrada y despeje el campo eléctrico E.

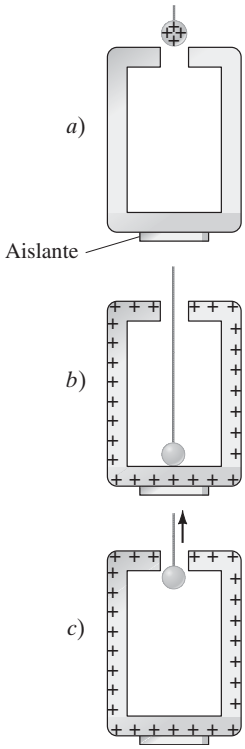


FIGURA 22–22 *a*) Un conductor cargado (una pelota de metal) se hace bajar dentro de una lata de metal (buen conductor) aislada inicialmente neutra. *b*) La pelota cargada toca la lata y toda su carga fluye de forma rápida hacia la superficie exterior de la lata. *c*) Cuando se retira la pelota, se encuentra que tiene una carga neta igual a cero.

*22–4 Base experimental de las leyes de Gauss y de Coulomb

La ley de Gauss predice que la carga neta en cualquier conductor debe residir sólo en su superficie. ¿Pero es esto verdad en la vida real? Veamos cómo se puede verificar esto experimentalmente. Al confirmar esta predicción de la ley de Gauss, también se confirma la ley de Coulomb, ya que esta última se obtiene a partir de la ley de Gauss, como vimos en la sección 22-2. De hecho, la primera observación de que la carga reside sólo en la superficie de un conductor fue registrada por Benjamin Franklin unos 30 años antes de que Coulomb estableciera su ley.

La figura 22-22 ilustra un sencillo experimento. Una lata de metal con una pequeña abertura en la parte superior descansa sobre un material aislante. La lata, que es un conductor, está inicialmente descargada (figura 22-22a). Mediante un hilo aislante se hace descender una bola de metal cargada (también un conductor) dentro de la caja y se permite que toque la caja (figura 22-22b). La pelota y la caja ahora forman un solo conductor. La ley de Gauss, como se explicó, predice que toda la carga fluirá a la superficie externa de la lata. (El flujo de carga en tales situaciones no ocurre en forma instantánea, pero el tiempo implicado, por lo general, es despreciable.) Estas predicciones se confirman con experimentos: **1.** conectando un electroscopio a la lata, lo cual mostrará que la lata está cargada, y **2.** conectando un electroscopio a la pelota después de que se ha retirado de la lata (figura 22-22c), lo cual mostrará que la carga de la pelota es cero.

La precisión con la que se cumplen las leyes de Coulomb y de Gauss puede establecerse cuantitativamente, escribiendo la ley de Coulomb como

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^{2+\delta}}.$$

Para una ley del inverso cuadrado perfecta, $\delta = 0$. Los experimentos más precisos y recientes (1971) indican que $\delta = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$. Encontramos que las leyes de Coulomb y de Gauss son válidas con una precisión ¡extremadamente alta!

Resumen

El **flujo eléctrico** que pasa a través de una área plana A para un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}}. \qquad \textbf{(22–1b)}$$

Si el campo no es uniforme, el flujo se calcula mediante la integral

$$\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}. \qquad \textbf{(22–2)}$$

La dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$ o $d\vec{\mathbf{A}}$ se elige de manera que sea perpendicular a la superficie cuya área es A o dA, y que apunte hacia fuera de una superficie cerrada. El flujo a través de una superficie es proporcional al número de líneas de campo que la atraviesan.

La **ley de Gauss** establece que el flujo neto que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie Q_{enc} dividida entre ϵ_0:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}. \qquad \textbf{(22–4)}$$

La ley de Gauss puede usarse en principio para determinar el campo eléctrico debido a una distribución de carga dada, pero su uso está limitado principalmente a un número pequeño de casos, donde la distribución de carga tenga gran simetría. La importancia de la ley de Gauss es que es un enunciado más general y elegante (que la ley de Coulomb) para representar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Es una de las ecuaciones básicas del electromagnetismo.

Preguntas

1. Si el campo eléctrico a través de una superficie cerrada es cero, ¿el campo eléctrico es necesariamente cero en todos los puntos de la superficie? Explique. ¿Qué sucede con lo contrario? Es decir, si $\vec{\mathbf{E}} = 0$ para todos los puntos de la superficie, ¿el flujo a través de la superficie es cero?
2. ¿Es el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en la ley de Gauss, $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$, creado sólo por la carga encerrada Q_{enc}?
3. Una carga puntual está rodeada por una superficie gaussiana de radio r. Si la esfera se sustituye por un cubo de lado r, ¿será Φ_E mayor, menor o igual? Explique.
4. ¿Qué puede decir acerca del flujo a través de una superficie cerrada que encierra un dipolo eléctrico?
5. El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es cero en todos los puntos de una superficie cerrada; ¿no hay necesariamente una carga neta dentro de la superficie? Si una superficie encierra una carga neta cero, ¿el campo eléctrico es necesariamente cero en todos los puntos sobre la superficie?
6. Defina el flujo gravitacional en analogía con el flujo eléctrico. ¿Hay "fuentes" y "sumideros" para el campo gravitacional, como los hay para el campo eléctrico? Discuta su respuesta.
7. ¿Serviría la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico?
8. A una pelota de básquetbol esférica (un no conductor) se le imparte una carga Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie. ¿Qué puede decir acerca del campo eléctrico dentro de la pelota? Ahora, una persona se pone de pie encima de la pelota, comprimiéndola y forzando a que salga la mayor parte del aire sin alterar la carga. ¿Qué puede decir ahora acerca del campo en el interior?
9. En el ejemplo 22-6 se ve que el campo eléctrico calculado se debe sólo a la carga en el alambre que está encerrado por el cilindro que elegimos como superficie gaussiana. De hecho, la carga entera a lo largo del alambre completo contribuye al campo. Explique de qué manera contribuye al campo E en la superficie gaussiana la carga fuera de la superficie cilíndrica gaussiana de la figura 22-15. [*Sugerencia:* Compare con lo que sería el campo debido a un alambre corto].
10. Suponga que la línea de carga del ejemplo 22-6 se extiende sólo un poco más allá de las tapas del cilindro mostrado en la figura 22-15. ¿Cómo se alteraría el resultado del ejemplo 22-6?
11. Una carga puntual Q está rodeada por una superficie esférica de radio r_0, cuyo centro está en el punto C. Después, se mueve la carga a la derecha una distancia $\frac{1}{2}r_0$, pero la esfera permanece donde estaba (figura 22-23). ¿Cómo cambia el flujo Φ_E a través de la esfera? ¿Cambia el campo eléctrico en la superficie de la esfera? Describa el cambio en cada caso si las respuestas fueron afirmativas.

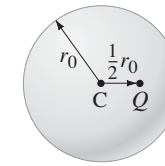


FIGURA 22–23
Pregunta 11.

12. Un conductor sólido transporta una carga neta positiva Q. Hay una cavidad en el conductor, en cuyo centro está una carga puntual negativa $-q$ (figura 22-24). ¿Cuál es la carga *a*) en la superficie externa del conductor y *b*) en la superficie interna de la cavidad del conductor?

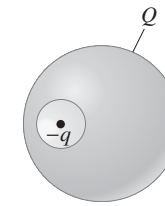


FIGURA 22–24
Pregunta 12.

13. Se localiza una carga puntual q en el centro de una cavidad de un cascarón de metal delgado que es neutro. ¿Sentirá la fuerza eléctrica una carga Q localizada fuera del cascarón? Explique.
14. Se inserta una pequeña bola cargada dentro de un globo. Luego se infla lentamente el globo. Describa cómo cambia el flujo a través de la superficie del globo mientras éste se infla. Considere tanto el flujo total como el flujo por unidad de área del globo.

Problemas

22–1 Flujo eléctrico

1. (I) Un campo eléctrico uniforme de magnitud 5.8×10^2 N/C pasa a través de un círculo de radio de 13 cm. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del círculo cuando su cara se encuentra *a*) perpendicular a las líneas de campo, *b*) a 45° de las líneas de campo y *c*) paralela a las líneas de campo?
2. (I) La Tierra posee un campo eléctrico de magnitud (promedio) de 150 N/C cerca de su superficie. El campo apunta radialmente hacia dentro. Calcule el flujo eléctrico neto hacia fuera a través de una superficie esférica que justo rodee la superficie de la Tierra.

3. (II) Un cubo de lado ℓ se localiza en un campo eléctrico uniforme E_0 y sus lados son paralelos a las líneas de campo. *a*) ¿Cuál es el flujo neto a través del cubo? *b*) ¿Cuál es el flujo a través de cada una de las seis caras?

4. (II) Un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo al eje de un hemisferio hueco de radio r (figura 22-25). *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie hemisférica? *b*) ¿Cuál es el resultado si ahora $\vec{\mathbf{E}}$ es perpendicular al eje?

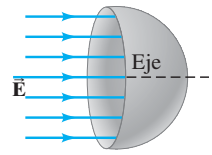


FIGURA 22–25
Problema 4.

22–2 Ley de Gauss

5. (I) El flujo eléctrico total de una caja cúbica de 28.0 cm de lado es 1.84×10^3 N·m^2/C. ¿Cuál es la carga encerrada dentro de la caja?

6. (I) La figura 22-26 muestra cinco superficies cerradas que rodean varias cargas en un plano, como se indica. Determine el flujo eléctrico a través de cada superficie: S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5. Las superficies son "cajas de píldoras" planas que se extienden sólo ligeramente arriba y abajo del plano que las contiene.

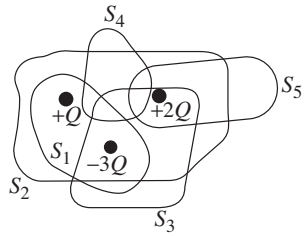


FIGURA 22–26
Problema 6.

7. (II) En la figura 22-27, dos objetos, O_1 y O_2, tienen cargas +1.0 μC y −2.0 μC, respectivamente, y un tercer objeto, O_3, es eléctricamente neutro. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie A_1 que encierra a los tres objetos? *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie A_2, que encierra sólo al tercer objeto?

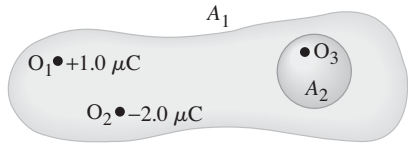


FIGURA 22–27
Problema 7.

8. (II) Un anillo de carga con densidad de carga uniforme está completamente rodeado por una cavidad con forma de rosquilla. Una copia exacta del anillo está encerrada por completo dentro de una esfera hueca. ¿Cuál es el cociente del flujo que sale de la rosquilla con respecto al flujo que sale de la esfera?

9. (II) En cierta región del espacio, el campo eléctrico es constante en dirección (digamos horizontal, en la dirección x), pero su magnitud disminuye desde $E = 560$ N/C en $x = 0$ hasta $E = 410$ N/C en $x = 25$ m. Determine la carga dentro de una caja cúbica de lado $\ell = 25$ m, con la caja orientada de manera que cuatro de sus lados son paralelos a las líneas de campo (figura 22-28).

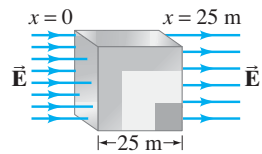


FIGURA 22–28
Problema 9.

10. (II) Se localiza una carga puntual Q en el centro de un cubo de lado ℓ. ¿Cuál es el flujo a través de un lado del cubo?

11. (II) Una varilla de plástico cargada de manera uniforme y que mide 15.0 cm de longitud se sella dentro de una bolsa de plástico. El flujo total que sale de la bolsa es de 7.3×10^5 N·m^2/C. ¿Cuál es la densidad lineal de carga de la varilla?

22–3 Aplicaciones de las leyes de Gauss

12. (I) Dibuje las líneas de campo alrededor de un huevo de metal cargado negativamente.

13. (I) El campo justo afuera de una bola de metal de 3.50 cm de radio es 6.25×10^2 N/C y apunta hacia la pelota. ¿Cuál es la carga dentro de la pelota?

14. (I) A partir del resultado del ejemplo 22-3, muestre que el campo eléctrico justo afuera de un conductor esférico cargado uniformemente es $E = \sigma/\epsilon_0$, consistente con el ejemplo 22-8.

15. (I) Un alambre delgado y largo, con cientos de metros de longitud, tiene una carga uniformemente distribuida de −7.2 μC por metro de longitud. Estime la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los puntos *a*) 5.0 m y *b*) 1.5 m localizados de manera perpendicular desde el centro del alambre.

16. (I) Un globo de metal tiene un carga de 1.50 mC puesta en el polo norte. Luego se aplican −3.00 mC de carga en el polo sur. Dibuje las líneas de campo para este sistema después de que ha llegado al equilibrio.

17. (II) Una esfera no conductora está hecha de dos capas. La sección interna tiene un radio de 6.0 cm y una densidad de carga uniforme de −5.0 C/m^3. La capa externa tiene una densidad de carga uniforme de +8.0 C/m^3 y se extiende desde el radio interior de 6.0 cm hasta un radio exterior de 12.0 cm. Determine el campo eléctrico para *a*) $0 < r < 6.0$ cm, *b*) 6.0 cm $< r <$ 12.0 cm y *c*) 12.0 cm $< r <$ 50.0 cm. *d*) Grafique la magnitud del campo eléctrico para $0 < r <$ 50.0 cm. ¿Es el campo continuo en las fronteras de las capas?

18. (II) Una esfera de metal sólida de radio 3.00 m tiene una carga total de −5.50 μC. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia del centro de la esfera de *a*) 0.250 m, *b*) 2.90 m, *c*) 3.10 m y *d*) 8.00 m? ¿Cómo cambiarían las respuestas si la esfera fuera *e*) un cascarón delgado, o *f*) un no conductor sólido cargado de manera uniforme?

19. (II) Una esfera no conductora de diámetro de 15.0 cm tiene una carga total de 2.25 μC distribuida de manera uniforme en todo su volumen. Grafique el campo eléctrico E como función de la distancia r desde el centro de la esfera (es decir, desde $r =$ 0) hasta $r = 30.0$ cm.

20. (II) Una hoja delgada plana cuadrada de aluminio, de 25 cm de lado, tiene una carga distribuida de manera uniforme de 275 nC. ¿Cuál es, de manera aproximada, el campo eléctrico *a*) a 1.0 cm sobre el centro de la hoja y *b*) a 15 m sobre el centro de la hoja?

21. (II) Una cavidad esférica de radio de 4.50 cm está en el centro de una esfera de metal con radio de 18.0 cm. Una carga puntual $Q = 5.50$ μC descansa justo en el centro de la cavidad, mientras que el metal conductor no porta carga neta. Determine el campo eléctrico en un punto *a*) a 3.00 cm del centro de la cavidad, *b*) a 6.00 cm del centro de la cavidad, *c*) a 30.0 cm del centro.

22. (II) Una carga puntal Q descansa en el centro de un cascarón conductor esférico neutro. ¿Cuál es el campo eléctrico E como función de r *a*) para r menor que el radio del cascarón, *b*) dentro del cascarón y *c*) más allá del cascarón? *d*) ¿Afecta el cascarón al campo debido a Q? ¿La carga Q afecta al cascarón?

23. (II) Un cubo de metal sólido tiene una cavidad hueca esférica en su centro, como se ilustra en la figura 22-29. En el centro de la cavidad hay una carga puntual $Q = +8.00\ \mu C$. El cubo de metal tiene una carga neta de $q = -6.10\ \mu C$ (sin incluir a Q). Determine *a*) la carga total sobre la superficie de la cavidad esférica y *b*) la carga total en la superficie exterior del cubo.

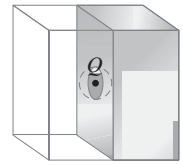


FIGURA 22–29
Problema 23.

24. (II) Dos largas placas planas de metal están separadas una distancia que es muy pequeña comparada con su largo y su ancho. A los conductores se les imparten cargas opuestas con densidad de carga uniforme $\pm\ \sigma$. Ignore los efectos de borde y con base en la ley de Gauss demuestre *a*) que para puntos lejanos de los bordes el campo eléctrico entre las placas es $E = \sigma/\epsilon_0$ y *b*) que en cualquier lado afuera de las placas el campo eléctrico es cero. *c*) ¿Cómo cambiarían sus resultados si las dos placas fueran no conductoras? (Véase la figura 22-30.)

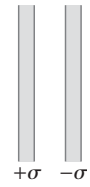


FIGURA 22–30
Problemas 24, 25 y 26.

25. (II) Suponga que las dos placas conductoras del problema 24 tienen el *mismo signo* e *igual* magnitud de carga. ¿Cuál sería entonces el campo eléctrico *a*) entre las placas y *b*) a cualquier lado fuera de ellas? *c)* ¿Qué pasa si las placas son no conductoras?

26. (II) El campo eléctrico entre dos placas de metal cuadradas es de 160 N/C. Las placas tienen 1.0 m de arista y están separadas por 3.0 cm, como en la figura 22-30. ¿Cuál es la carga en cada placa? Ignore los efectos de borde.

27. (II) Dos cascarones esféricos concéntricos de radio r_1 y r_2 ($r_1 < r_2$) contienen densidades de carga uniforme σ_1 y σ_2, respectivamente (véase la figura 22-31). Determine el campo eléctrico para *a*) $0 < r < r_1$, *b*) $r_1 < r < r_2$ y *c*) $r > r_2$. *d*) ¿En qué condiciones será $E = 0$ para $r > r_2$? *e*) ¿En qué condiciones será $E = 0$ para $r_1 < r < r_2$? Ignore el grosor de los cascarones.

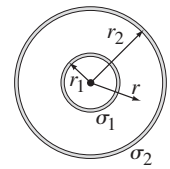


FIGURA 22–31 Dos cascarones esféricos (problema 27).

28. (II) Un globo de hule esférico tiene una carga total Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie. En $t = 0$ el globo no conductor tiene un radio r_0 y el globo se infla lentamente, de manera que r se incrementa en forma lineal hasta $2r_0$ en un tiempo t. Determine el campo eléctrico como función del tiempo *a*) justo fuera de la superficie del globo y *b*) en $r = 3.2\ r_0$.

29. (II) Suponga que la esfera no conductora del ejemplo 22-4 tiene una cavidad esférica de radio r_1 centrada en el centro de la esfera (figura 22-32). Suponiendo que la carga Q está distribuida de manera uniforme en el "cascarón" (entre $r = r_1$ y $r = r_0$), determine el campo eléctrico como función de r para *a*) $0 < r < r_1$, *b*) $r_1 < r < r_0$ y *c*) $r > r_0$.

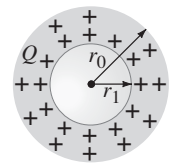


FIGURA 22–32
Problemas 29, 30, 31 y 44.

30. (II) Suponga que en la figura 22-32 (problema 29), también hay una carga q en el centro de la cavidad. Determine el campo eléctrico para *a*) $0 < r < r_1$, *b*) $r_1 < r < r_0$ y *c)* $r > r_0$.

31. (II) Suponga que el cascarón esférico grueso del problema 29 es un conductor. Tiene una carga total neta Q y en su centro hay una carga puntual q. ¿Cuál es la carga total que se encuentra *a*) en la superficie interior del cascarón y *b*) en la superficie exterior del cascarón? Determine el campo eléctrico para *c*) $0 < r < r_1$, *d*) $r_1 < r < r_0$ y *e*) $r > r_0$.

32. (II) Suponga que en el centro de la cavidad dentro del cascarón (carga Q) de la figura 22-11 (ejemplo 22-3) hay una carga puntual q ($\neq \pm Q$). Determine el campo eléctrico para *a*) $0 < r < r_0$ y para. *b*) $r > r_0$. ¿Cuál sería su respuesta si *c*) $q = Q$ y *d*) $q = -Q$?

33. (II) Un largo cascarón cilíndrico de radio R_0 y longitud ℓ ($R_0 \ll \ell$) posee una densidad superficial de carga uniforme (carga por unidad de área) σ (figura 22-33). Determine el campo eléctrico en puntos *a*) fuera del cilindro ($R > R_0$) y *b*) dentro del cilindro ($0 < R < R_0$); suponga que los puntos están lejos de los extremos y no muy lejos del cascarón ($R \ll \ell$). *c*) Compare el resultado para una línea larga de carga (ejemplo 22-6). Ignore el grosor del cascarón.

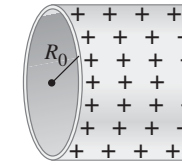


FIGURA 22–33
Problema 33.

34. (II) Un cilindro no conductor sólido muy largo de radio R_0 y longitud ℓ ($R_0 \ll \ell$) posee una densidad volumétrica de carga uniforme ρ_E (C/m^3) (figura 22-34). Determine el campo eléctrico en puntos *a*) fuera del cilindro ($R > R_0$) y *b*) dentro del cilindro ($R < R_0$). Considere sólo puntos muy alejados de los extremos del alambre y que $R \ll \ell$.

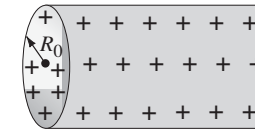


FIGURA 22–34
Problema 34.

35. (II) Un cascarón cilíndrico delgado de radio R_1 está rodeado por un segundo cascarón cilíndrico concéntrico de radio R_2 (figura 22-35). El cascarón interior tiene una carga total $+Q$ y el exterior una carga $-Q$. Suponiendo que la longitud ℓ de los cascarones es mucho mayor que R_1 o R_2, determine el campo eléctrico como función de R (la distancia perpendicular desde el eje común de los cilindros) para *a*) $0 < R < R_1$, *b*) $R_1 < R < R_2$ y *c*) $R > R_2$. *d*) ¿Cuál es la energía cinética de un electrón si se desplaza entre los cascarones (y concéntrico con ellos) en una órbita circular de radio $(R_1 + R_2)/2$? Ignore el grosor de los cascarones.

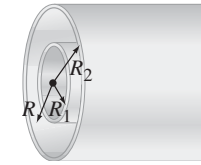


FIGURA 22–35
Problemas 35, 36 y 37.

36. (II) Un cascarón cilíndrico delgado de radio $R_1 = 6.5$ cm está rodeado por un segundo cascarón cilíndrico de radio $R_2 = 9.0$ cm, como en la figura 22-35. Ambos cilindros miden 5.0 m de longitud y el cascarón interno tiene una carga total $Q_1 = -0.88\ \mu C$ y el externo una carga neta $Q_2 = +1.56\ \mu C$. Determine el campo eléctrico para puntos lejanos de los extremos de los cilindros a una distancia radial R desde el eje central de *a*) 3.0 cm, *b*) 7.0 cm y *c*) 12.0 cm.

37. (II) *a*) Si un electrón ($m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) se escapa de la superficie del cilindro interior en el problema 36 (figura 22-35) con rapidez despreciable, ¿cuál será su rapidez cuando llegue al cilindro exterior? *b*) Si un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) gira en una órbita circular de radio $r = 7.0$ cm en torno al eje (es decir, entre los cilindros), ¿qué rapidez debe tener?

38. (II) Un cilindro no conductor sólido muy largo de radio R_1 tiene una carga uniforme con densidad de carga ρ_E. Está rodeado por un tubo cilíndrico concéntrico de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (como se ilustra en la figura 22-36), el cual también tiene una densidad de carga uniforme ρ_E. Determine el campo eléctrico como función de la distancia R desde el centro de los cilindros para *a*) $0 < R < R_1$, *b*) $R_1 < R < R_2$, *c*) $R_2 < R < R_3$ y *d*) $R > R_3$. *e*) Si $\rho_E = 15\ \mu C/m^3$ y $R_1 = \frac{1}{2}R_2 = \frac{1}{3}R_3 = 5.0$ cm, grafique E como función de R desde $R = 0$ hasta $R = 20.0$ cm. Suponga que los cilindros son muy largos comparados con R_3.

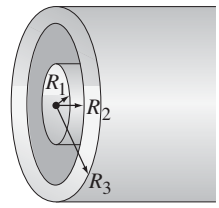


FIGURA 22–36
Problema 38.

39. (II) Una esfera no conductora de radio r_0 tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ_E. Está rodeada por una esfera de metal (conductora) concéntrica de radio interior r_1 y radio exterior r_2, que tiene una carga neta $+Q$. Determine el campo eléctrico resultante en las regiones *a*) $0 < r < r_0$, *b*) $r_0 < r < r_1$, *c*) $r_1 < r < r_2$ y *d*) $r > r_2$, donde la distancia radial r se mide desde el centro de la esfera no conductora.

40. (II) Un cilindro sólido no conductor muy largo de radio R_1 tiene una carga uniforme con densidad de carga ρ_E. Está rodeado por un tubo de metal (conductor) cilíndrico de radio interior R_2 y radio exterior R_3, que no tiene una carga neta (la figura 22-37 muestra un corte transversal). Si los ejes de los dos cilindros son paralelos, pero están separados una distancia d, determine el campo eléctrico resultante en la región $R > R_3$, donde la distancia radial R se mide desde el eje del cilindro de metal. Considere que $d < (R_2 - R_1)$.

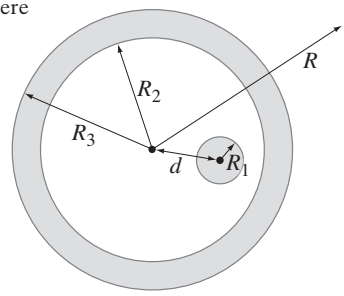


FIGURA 22–37
Problema 40.

41. (II) Un anillo plano (radio interior R_0 y radio exterior $4R_0$) está cargado de manera uniforme. Determine, en términos de la carga total Q, el campo eléctrico sobre el eje en los puntos *a*) $0.25\ R_0$ y *b*) $75R_0$ desde el centro del anillo. [*Sugerencia:* El anillo puede sustituirse por dos discos superpuestos con cargas opuestas].

42. (II) Una esfera conductora sólida descargada y de radio r_0 contiene dos cavidades esféricas de radios r_1 y r_2, respectivamente. Se sitúa una carga puntual Q_1 dentro de la cavidad de radio r_1 y una carga puntual Q_2 se sitúa dentro de la cavidad de radio r_2 (figura 22-38). Determine el campo eléctrico resultante (magnitud y dirección) en posiciones fuera de la esfera sólida ($r > r_0$), donde r es la distancia desde su centro.

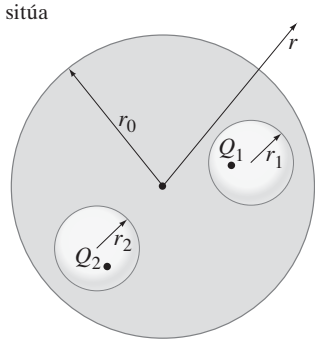


FIGURA 22–38
Problema 42.

43. (III) Una lámina de material no conductor plana muy larga (considérela infinita) tiene un espesor d y una densidad volumétrica de carga uniforme $+\rho_E$. *a*) Muestre que existe un campo eléctrico uniforme fuera de esta lámina. Determine su magnitud y su dirección (con respecto a la superficie de la lámina). *b*) Como se aprecia en la figura 22-39, la lámina se orienta de manera que ahora una de sus caras yace a lo largo de la recta $y = x$. En $t = 0$, una partícula puntual (masa m, carga $+q$) está ubicada en la posición $\vec{\mathbf{r}} = +y_0\hat{\mathbf{j}}$ y tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}} = v_0\hat{\mathbf{i}}$. Muestre que la partícula chocará con la lámina si $v_0 \geq \sqrt{\sqrt{2}qy_0\rho_E d/\epsilon_0 m}$. Ignore la gravedad.

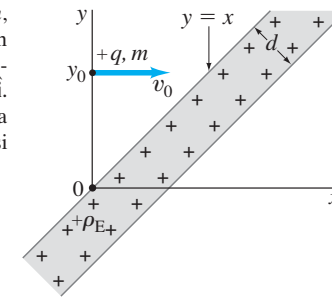


FIGURA 22–39
Problema 43.

44. (III) Suponga que la densidad de carga entre r_1 y r_0 de la esfera hueca del problema 29 (figura 22-32) varía como $\rho_E = \rho_0\, r_1/r$. Determine el campo eléctrico como función de r para *a*) $0 < r < r_1$, *b*) $r_1 < r < r_0$, *c*) $r > r_0$. *d*) Grafique E contra r desde $r = 0$ hasta $r = 2r_0$.

45. (III) Suponga que dos placas planas delgadas miden 1.0 m × 1.0 m y que están separadas por 5.00 mm. Tienen cargas opuestas de $\pm 15\ \mu$C. *a*) Estime la fuerza total ejercida por una placa sobre la otra (ignore los efectos de borde). *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover las placas desde una separación de 5.0 mm hasta 1.00 cm?

46. (III) Una lámina delgada de material no conductor (figura 22-40) tiene una carga uniforme por unidad de volumen ρ_E. La lámina cuenta con un espesor d, que es pequeño comparado con su largo y ancho. Determine el campo eléctrico como función de x *a*) dentro de la lámina y *b*) fuera de la lámina (a distancias mucho menores que su ancho o su largo). Considere el origen en el centro de la lámina.

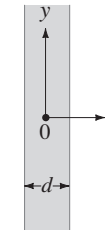


FIGURA 22–40
Problema 46.

47. (III) Una lámina delgada de material no conductor tiene un espesor $2d$, que es pequeño en comparación con su largo y su ancho. Defina el eje x a lo largo de la dirección del espesor de la lámina con el origen en el centro de la lámina (figura 22-41). Si la lámina tiene una densidad de carga volumétrica tal que $\rho_E(x) = -\rho_0$ y $\rho_E(x) = +\rho_0$ en las regiones $-d \leq x < 0$ y $0 < x \leq +d$, respectivamente, donde ρ_0 es una constante positiva. Determine el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ como función de x en las regiones *a*) fuera de la lámina, *b*) $0 < x \leq +d$ y *c*) $-d \leq x < 0$.

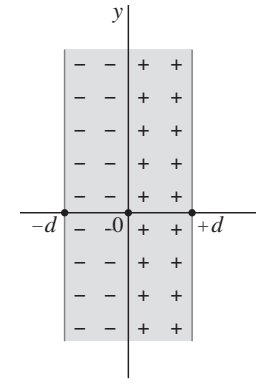


FIGURA 22–41
Problema 47.

48. (III) Un cilindro no conductor sólido extremadamente largo tiene un radio R_0. La densidad de carga dentro del cilindro es una función de la distancia R desde el eje dada por $\rho_E(R) = \rho_0(R/R_0)^2$. ¿Cuál es el campo eléctrico en cualquier punto dentro y fuera del cilindro (lejos de sus bordes) en términos de ρ_0 y R_0?

49. (III) Se distribuye carga dentro de una esfera sólida de radio r_0, de manera que la densidad de carga es una función de la posición radial dentro de la esfera de la forma: $\rho_E(r) = \rho_0(r/r_0)$. Si la carga total dentro de la esfera es Q (y positiva), ¿cuál es el campo eléctrico en cualquier punto dentro de la esfera en términos de Q, r_0 y la posición radial r?

Problemas generales

50. Una carga puntual Q está sobre el centro del eje de un cilindro corto. El diámetro del cilindro es igual a su longitud ℓ (figura 22-42). ¿Cuál es el flujo total a través de la pared curva del cilindro? [*Sugerencia:* Calcule el flujo a través de las dos tapas.]

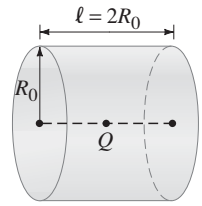


FIGURA 22–42
Problema 50.

51. Escriba la ley de Gauss para el campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ (véase la sección 6-6).

52. La Tierra está rodeada de un campo eléctrico, dirigido hacia dentro en cada punto, de magnitud $E \approx 150$ N/C cerca de la superficie. *a*) ¿Cuál es la carga neta de la Tierra? *b*) ¿A cuántos electrones en exceso por metro cuadrado de la superficie de la Tierra corresponde esto?

53. Un cubo de lado ℓ tiene una esquina en el origen de coordenadas y se extiende a lo largo de los ejes positivos x, y y z. Suponga que el campo eléctrico en esta región está dado por $\vec{\mathbf{E}} = (ay + b)\hat{\mathbf{j}}$. Determine la carga dentro del cubo.

54. Una esfera no conductora sólida de radio r_0 tiene una carga total Q que está distribuida de acuerdo con $\rho_E = br$, donde ρ_E es la carga por unidad de volumen o densidad de carga (C/m^3) y b es una constante. Determine *a*) b en términos de Q, *b*) el campo eléctrico en puntos dentro de la esfera y *c*) el campo eléctrico en puntos afuera de la esfera.

55. Una carga puntual de 9.20 nC está localizada en el origen, y una segunda carga de -5.00 nC está localizada sobre el eje x en $x = 2.75$ cm. Calcule el flujo eléctrico a través de una esfera centrada en el origen de radio de 1.00 m. Repita el cálculo para una esfera de radio de 2.00 m.

56. Una carga puntual produce un flujo eléctrico de +235 N·m^2/C a través de una esfera gaussiana con radio de 15.0 cm y centrada en la carga. *a*) ¿Cuál es el flujo a través de una esfera gaussiana de 27.5 cm de radio? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga?

57. Una carga puntual Q se localiza a una distancia $r = r_0/2$ por arriba de la superficie de una esfera imaginaria de radio r_0 (figura 22-43). *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la esfera? *b*) ¿Qué intervalo de valores tiene E sobre la superficie de la esfera? *c*) ¿Es $\vec{\mathbf{E}}$ perpendicular a la esfera en todos los puntos? *d*) ¿Es la ley de Gauss útil para obtener E sobre la superficie de la esfera?

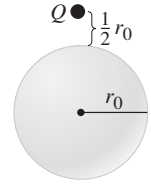


FIGURA 22–43
Problema 57.

58. Tres hojas largas, pero delgadas, y con carga son paralelas entre sí, como se muestra en la figura 22-44. La hoja I tiene una densidad superficial de carga de 6.5 nC/m^2; la hoja II tiene una carga de -2.0 nC/m^2, y la hoja III, una carga de 5.0 nC/m^2. Estime la fuerza por unidad de área sobre cada hoja en N/m^2.

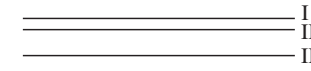


FIGURA 22–44
Problema 58.

59. El hidrógeno neutro se puede modelar como una carga positiva de $+1.6 \times 10^{-19}$ C, rodeada por una distribución negativa de carga con densidad volumétrica dada por $\rho_E(r) = -Ae^{-2r/a_0}$ donde $a_0 = 0.53 \times 10^{-10}$ m es el *radio de Bohr*, A es una constante tal que la cantidad total de carga negativa es -1.6×10^{-19} C y $e = 2.718$ es la base de los logaritmos naturales. *a*) ¿Cuál es la carga neta dentro de una esfera de radio a_0? *b*) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico a una distancia a_0 desde el núcleo? [*Sugerencia:* No confunda la función exponencial e con la carga elemental e que usa el mismo símbolo, pero que tiene un significado y un valor completamente diferentes ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ C)].

60. Un plano delgado muy largo tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. Haciendo contacto por la derecha (figura 22-45) hay una lámina ancha y larga de espesor d con densidad volumétrica de carga uniforme ρ_E. Determine el campo eléctrico *a*) a la izquierda del plano, *b*) a la derecha de la lámina y *c*) en cualquier punto dentro de la lámina.

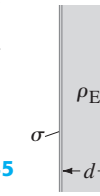


FIGURA 22–45
Problema 60.

61. Una esfera de radio r_0 tiene una densidad de carga volumétrica ρ_E (figura 22-46). Dentro de la esfera se perfora una cavidad esférica de radio $r_0/2$ y se deja hueca, como se muestra. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto A? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto B? Los puntos A y C están en el centro de sus respectivas esferas.

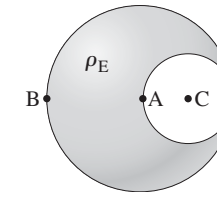


FIGURA 22–46
Problema 61.

62. El aire seco se rompe y genera una chispa si el campo eléctrico excede cerca de 3×10^6 N/C. ¿Cuánta carga podría haber dentro de la superficie de un guisante (diámetro de 0.75 cm) antes de que el guisante se descargue espontáneamente?

63. Tres hojas muy largas están separadas por distancias iguales de 15.0 cm (figura 22-47). La primera y la tercera son muy delgadas y no conductoras, además de que poseen una carga por unidad de área σ de $+5.00\ \mu C/m^2$ y $-5.00\ \mu C/m^2$, respectivamente. La hoja central es conductora, pero no tiene una carga neta. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la hoja central? ¿Cuál es el campo eléctrico *b*) entre la hoja izquierda y la hoja central, y *c*) entre la hoja central y la hoja derecha? *d*) ¿Cuál es la densidad de carga sobre la superficie de la hoja central que da hacia la hoja izquierda y *e*) sobre la superficie de la hoja central que da hacia la hoja derecha?

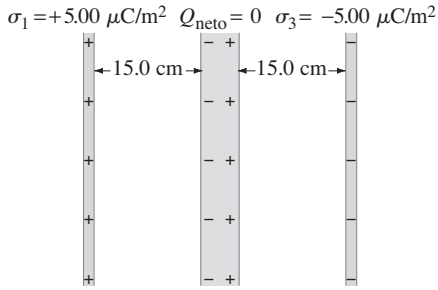


FIGURA 22–47 Problema 63.

64. En un volumen cúbico, de 0.70 m de arista, el campo eléctrico está dado por

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0\left(1 + \frac{z}{a}\right)\hat{\mathbf{i}} + E_0\left(\frac{z}{a}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

donde $E_0 = 0.125$ N/C y $a = 0.70$ m. El cubo tiene sus lados paralelos a los ejes coordenados (figura 22-48). Determine la carga neta dentro del cubo.

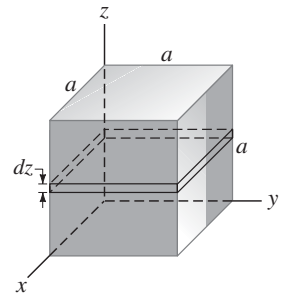


FIGURA 22–48
Problema 64.

65. Un cascarón esférico conductor (figura 22-49) tiene un radio interior de 10.0 cm, un radio exterior de 15.0 cm y una carga puntual de $+3.0\ \mu C$ en su centro. Se pone una carga de $-3\ \mu C$ sobre el conductor. *a*) ¿A dónde va a dar la carga eléctrica de $-3.0\ \mu C$ sobre el conductor? *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico tanto dentro como fuera del cascarón?

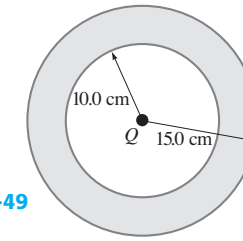


FIGURA 22–49
Problema 65.

66. Se coloca un hemisferio esférico de radio R en una región del espacio libre de carga donde existe un campo eléctrico uniforme de magnitud E dirigido de manera perpendicular a la base circular del hemisferio (figura 22-50). *a*) Usando la definición de Φ_E a través e una superficie "abierta", calcule (con integración explícita) el flujo eléctrico a través del hemisferio. [*Sugerencia:* En la figura 22-50 puede ver que, sobre la superficie de una esfera, el área infinitesimal localizada entre los ángulos θ y $\theta + d\theta$ es $dA = (2\pi R \operatorname{sen}\theta)(R\, d\theta) = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$.] *b*) Elija una superficie gaussiana apropiada y use la ley de Gauss para obtener, mucho más fácilmente, el mismo resultado para el flujo eléctrico a través del hemisferio.

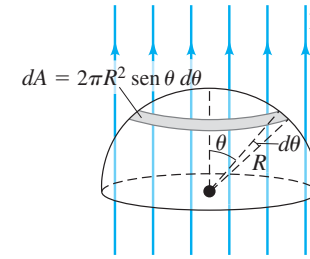


FIGURA 22–50
Problema 66.

*Problema numérico/por computadora

***67.** (III) Un campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{E} = E_{x0}\, e^{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}\hat{\mathbf{i}} + E_{y0}\, e^{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}\hat{\mathbf{j}},$$

donde $E_{x0} = 50$ N/C, $E_{y0} = 25$ N/C y $a = 1.0$ m. Dado un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados, con una esquina en el origen (como en la figura 22-48), y con lados de 1.0 m de longitud, estime el flujo que sale del cubo usando una hoja de cálculo u otro método numérico. ¿Cuál es la carga total encerrada por la superficie?

Respuestas a los ejercicios

A: *d*).
B: *a*).
C: *d*).
D: *e*).
E: *c*).
F: *c*).

Estamos acostumbrados a hablar de voltaje —una batería de automóvil de 12 volts, la línea de 110 o 220 volts en casa, pilas de 1.5 volts para lámparas, etcétera. Aquí vemos un generador de Van de Graaff, que puede alcanzar un voltaje de 50,000 volts o más. Voltaje es lo mismo que diferencia de potencial entre dos puntos. El potencial eléctrico se define como la energía potencial por unidad de carga.

Los niños aquí, con los cabellos de punta porque cada cabello ha recibido carga con el mismo signo, no se lastiman con el voltaje porque el Van de Graaff no puede generar mucha corriente sin que baje el voltaje. (Es la corriente a través del cuerpo la que hace daño, como veremos más adelante).

CAPÍTULO 23

Potencial eléctrico

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Considere dos placas paralelas, con densidades de carga iguales, pero de signos opuestos, σ. ¿Cuál de las siguientes acciones aumentará el voltaje entre las placas (suponiendo densidad de carga constante)?

a) Acercar las placas.
b) Alejar las placas.
c) Duplicar el área de las placas.
d) Reducir a la mitad el área de las placas.

En los capítulos 7 y 8 vimos que el concepto de energía fue sumamente útil para tratar los temas de la mecánica. El punto de vista de la energía es especialmente útil para la electricidad. No sólo expande la ley de la conservación de la energía, sino que también nos ofrece otra manera de tratar los fenómenos eléctricos. Además, en muchos casos, la energía es una poderosa herramienta para solucionar problemas con más facilidad que si se utilizan fuerzas y campos eléctricos.

CONTENIDO

23–1 Energía potencial eléctrica y diferencia de potencial
23–2 Relación entre potencial eléctrico y campo eléctrico
23–3 Potencial eléctrico debido a cargas puntuales
23–4 Potencial debido a cualquier distribución de carga
23–5 Superficies equipotenciales
23–6 Potencial de un dipolo eléctrico
23–7 Determinación de $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de V
*23–8 Energía potencial electrostática; el electrón volt
23–9 Tubo de rayos catódicos: Monitores de TV y de computadora, osciloscopios

23–1 Energía potencial eléctrica y diferencia de potencial

Energía potencial eléctrica

Para aplicar la conservación de la energía necesitamos definir la energía potencial eléctrica, como lo hicimos para otros tipos de energía potencial. Como vimos en el capítulo 8, la energía potencial puede definirse sólo para fuerzas conservativas. El trabajo que efectúa una fuerza conservativa sobre un objeto en movimiento, entre dos posiciones cualesquiera, es independiente de la trayectoria que siga el objeto. La fuerza electrostática entre dos cargas (ecuación 21-1, $F = Q_1Q_2/r^2$) es conservativa, ya que la dependencia en la posición es justo como la dependencia en la posición en el caso de la fuerza gravitacional, $1/r^2$, la cual, como vimos en la sección 8-7, es una fuerza conservativa. Así que podemos definir también la energía potencial U para la fuerza electrostática.

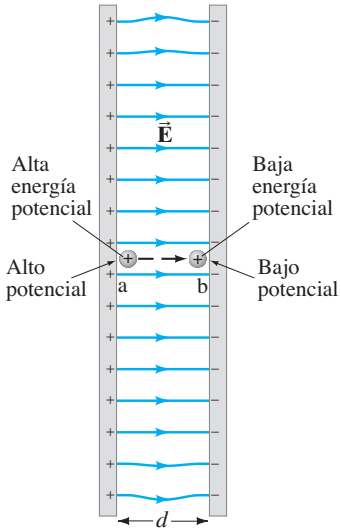


FIGURA 23–1 El campo eléctrico realiza trabajo para mover a la carga q de la posición a a la posición b.

En el capítulo 8 vimos que el cambio en energía potencial entre dos puntos a y b es igual al negativo del trabajo realizado por la fuerza conservativa para mover un objeto desde a hasta b: $\Delta U = -W$.

De esta manera, definimos el cambio en la energía potencial eléctrica, $U_b - U_a$, cuando una carga puntual q se mueve de un punto a a otro punto b, como el negativo del trabajo que efectúa la fuerza eléctrica para mover la carga desde a hasta b. Por ejemplo, considere el campo eléctrico producido entre dos placas paralelas con cargas iguales y opuestas; suponemos que su separación es pequeña en comparación con su largo y su ancho, así que el campo $\vec{\mathbf{E}}$ debe ser uniforme sobre la mayor parte de la región entre las placas (figura 23-1). Ahora considere una pequeña carga puntual positiva q localizada en el punto a muy cerca de la placa positiva, como se muestra en la figura. Esta carga q es tan pequeña que no afecta a $\vec{\mathbf{E}}$. Si esta carga q en el punto a se deja en libertad, la fuerza eléctrica realizará trabajo sobre la carga y la acelerará hacia la placa negativa. El trabajo W que efectúa el campo eléctrico E para mover la carga una distancia d es

$$W = Fd = qEd$$

donde usamos la ecuación 21-5, $F = qE$. El cambio en energía potencial eléctrica es igual al negativo del trabajo realizado por la fuerza eléctrica:

$$U_b - U_a = -W = -qEd \qquad \text{[uniforme } \vec{\mathbf{E}}\text{]} \quad \textbf{(23–1)}$$

para este caso de campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$. uniforme. En el caso ilustrado, la energía potencial disminuye (ΔU es negativa); mientras la carga eléctrica en la partícula se acelera desde el punto a hasta el punto b en la figura 23-1, la energía cinética K de la partícula aumenta en la misma cantidad. De acuerdo con la ley de conservación de la energía, la energía potencial eléctrica se transforma en energía cinética, de manera que la energía total se conserva. Observe que la carga positiva q tiene su energía potencial máxima en el punto a, cerca de la placa positiva.[†] Lo contrario sería cierto para una carga negativa: su energía potencial sería máxima cerca de la placa negativa.

Potencial eléctrico y diferencia de potencial

En el capítulo 21 encontramos útil definir el campo eléctrico como la fuerza por unidad de carga. De manera similar, es útil definir el **potencial eléctrico** (o simplemente el **potencial**, cuando se entiende que es "eléctrico"), como la *energía potencial eléctrica por unidad de carga.* Usamos el símbolo V para representar el potencial eléctrico. Si una carga de prueba positiva q tiene una energía potencial eléctrica U_a en algún punto a (con respecto a algún nivel cero de energía potencial previamente establecido), el potencial eléctrico V_a en este punto es

$$V_a = \frac{U_a}{q}. \qquad \textbf{(23–2a)}$$

Como vimos en el capítulo 8, sólo los cambios en la energía potencial tienen significado físico. Así que sólo la **diferencia de potencial** o la **diferencia en el potencial**, entre dos puntos a y b, es susceptible de ser medida (como los puntos a y b de la figura 23-1). Cuando la fuerza eléctrica efectúa trabajo positivo sobre la carga, la energía cinética aumenta y la energía potencial disminuye. La diferencia en energía potencial, $U_b - U_a$, es igual al negativo del trabajo, W_{ba}, que realiza el campo eléctrico para mover la carga desde a hasta b; por lo mismo, la diferencia de potencial V_{ba} es

$$V_{ba} = \Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -\frac{W_{ba}}{q}. \qquad \textbf{(23–2b)}$$

Observe que el potencial eléctrico, al igual que el campo eléctrico, no depende de nuestra carga de prueba q. V depende de las otras cargas que generan el campo, pero no de q; q adquiere energía potencial cuando está inmersa en el potencial V debido a otras cargas.

Podemos ver, a partir de nuestra definición, que la placa positiva en la figura 23-1 está a un potencial mayor que la placa negativa. Así que un objeto cargado positivamente se desplaza de manera natural de una zona de mayor potencial hacia una zona de menor potencial. Una carga negativa hace justo lo contrario.

La unidad de potencial eléctrico y de diferencia de potencial es joules/coulomb, que recibe el nombre especial de **volt**, en honor de Alejandro Volta (1745-1827), quien es mejor conocido por inventar la batería eléctrica. El volt se abrevia V, así que 1 V = 1 J/C. La diferencia de potencial, como está medida en volts, se conoce comúnmente como **voltaje**.

[†]En este punto, la carga tiene la mayor capacidad de realizar un trabajo (sobre otro objeto o sistema).

Si queremos hablar del potencial eléctrico V_a, en un punto a, debemos estar conscientes de que el valor de V_a depende de en qué punto se elige el nivel cero de potencial. El cero de potencial eléctrico, en una situación dada, puede elegirse de manera arbitraria, justo como la energía potencial, porque sólo pueden medirse las diferencias en la energía potencial. Por lo general, la tierra, o un conductor conectado en forma directa a tierra (la Tierra), se toma como potencial cero, mientras los otros potenciales se dan con respecto a tierra. (Así, un punto donde el voltaje es de 50 V es un punto donde la diferencia del potencial entre éste y tierra es de 50 V.) En otros casos, como veremos, podemos elegir el potencial cero a una distancia infinita ($r = \infty$).

EJEMPLO CONCEPTUAL 23–1 **Una carga negativa.** Considere una carga negativa, como un electrón, que se coloca cerca de la placa negativa de la figura 23-1, en el punto b, indicada de nuevo en la figura 23-2. Si el electrón puede moverse libremente, ¿su energía potencial eléctrica aumenta o disminuye? ¿Cómo cambia el potencial eléctrico?

RESPUESTA Un electrón liberado en el punto b se desplazará hacia la placa positiva. Conforme el electrón se desplaza hacia la placa positiva, su energía potencial *disminuye* en tanto que su energía cinética aumenta, así que $U_a < U_b$ y $\Delta U = U_a - U_b < 0$. Sin embargo, observe que el electrón se mueve desde el punto b de bajo potencial hacia el punto a con mayor potencial: $V_{ab} = V_a - V_b > 0$. (Los potenciales V_a y V_b se deben a las cargas en las placas, no a la carga del electrón). Los signos de ΔU y ΔV son opuestos, porque la carga es negativa.

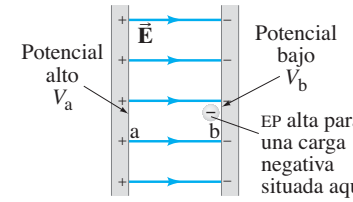


FIGURA 23–2 La parte central de la figura 23-1 muestra una carga puntual negativa cerca de la placa negativa, donde su energía potencial (EP) es elevada. Ejemplo 23-1.

⚠ CUIDADO

Una carga negativa tiene alta energía potencial cuando el potencial V es bajo

Como la diferencia de potencial eléctrico se define como la diferencia de energía potencial por unidad de carga, entonces, el cambio de energía potencial de una carga q cuando se desplaza entre dos posiciones a y b es

$$\Delta U = U_b - U_a = q(V_b - V_a) = qV_{ba}. \qquad \textbf{(23–3)}$$

Esto es, si un objeto con carga q se desplaza a través de una diferencia de potencial V_{ba}, su energía potencial cambia en una cantidad qV_{ba}. Por ejemplo, si la diferencia de potencial entre las dos placas de la figura 23-1 es de 6 V, entonces una carga de +1 C que se mueve (digamos, por una fuerza externa) del punto b al punto a, ganará (1 C) (6 V) = 6 J de energía potencial eléctrica. (Y perderá 6 J de energía potencial eléctrica, si se desplaza de a a b.) De la misma forma, una carga de +2 C ganará 12 J y así sucesivamente. Es decir, la diferencia de energía potencial es una medida de cuánta energía puede adquirir una carga eléctrica en una situación dada y, como la energía es la capacidad de realizar un trabajo, la diferencia de potencial eléctrico es también una medida de cuánto trabajo puede efectuar una carga dada. La cantidad exacta depende tanto de la diferencia de potencial como de la carga.

Para comprender mejor el potencial eléctrico, hagamos una comparación con el caso gravitacional cuando cae una piedra desde la cima de un risco. A mayor altura h del risco, mayor será la energía potencial ($= mgh$) de la roca en la cima del risco con respecto al piso, y mayor será su energía cinética cuando llegue al fondo del risco. La cantidad exacta de energía cinética que adquirirá, y la cantidad de trabajo que puede efectuar, depende tanto de la altura del risco como de la masa m de la roca. Una roca más grande y una roca más pequeña pueden estar a una misma altura h (figura 23-3a) y así tener el mismo "potencial gravitacional", pero la roca más grande tendrá mayor energía potencial (cuenta con más masa). El caso eléctrico es similar (figura 23-3b): el cambio de energía potencial o el trabajo que se puede realizar dependen tanto de la diferencia de potencial (que corresponde a la altura del peñasco) como de la carga (que corresponde a la masa) (ecuación 23-3). Pero advierta una diferencia importante: la carga eléctrica viene en dos tipos: + y −, mientras que la masa gravitacional siempre es +.

Las fuentes de energía eléctrica —como baterías y generadores eléctricos— fueron diseñadas para mantener una diferencia de potencial. La cantidad de energía exacta transformada por tales aparatos depende de cuánta carga fluya, así como de la diferencia de potencial (ecuación 23-3). Por ejemplo, consideremos un faro de automóvil conectado a una batería de 12.0 V: la cantidad de energía transformada (en luz y energía térmica) es proporcional a cuánta carga fluye, lo cual depende de cuánto tiempo esté encendida la luz. Si en un periodo dado fluye una carga de 5.0 C a través de la luz del faro, la energía total transformada es de (5.0 C) (12.0 V) = 60 J. Si el faro se deja trabajando por el doble de tiempo, pasará una carga de 10.0 C y la energía transformada será de (10.0 C) (12.0 V) = 120 J. La tabla 23-1 presenta voltajes típicos.

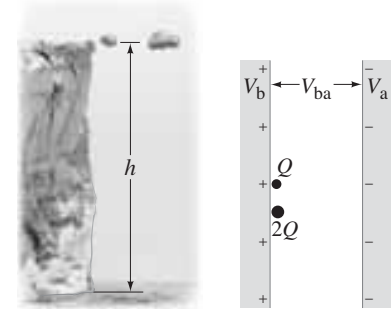


FIGURA 23–3 *a*) Dos piedras a la misma altura. La piedra mayor tiene más energía potencial. *b*) Dos cargas tienen el mismo potencial eléctrico. La carga $2Q$ tiene más energía potencial.

TABLA 23–1 Diferencias de potencial típicas (Voltajes)

Fuente	Voltaje (aprox.)
Nube de tormenta a tierra	10^8 V
Línea de poder de alto voltaje	10^5–10^6 V
Fuente de poder para un cinescopio	10^4 V
Arranque de un automóvil	10^4 V
Contacto en una casa	10^2 V
Batería de un automóvil	12 V
Batería de una lámpara	1.5 V
Potencial de reposo a través de la membrana de un nervio	10^{-1} V
Cambios de potencial en la piel (ECG y EEG)	10^{-4} V

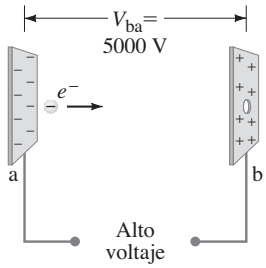


FIGURA 23–4 Electrón acelerado en un tubo de rayos catódicos. Ejemplo 23-2.

EJEMPLO 23–2 **Electrón en un tubo de rayos catódicos.** Considere que un electrón en un tubo de rayos catódicos (sección 23-9) es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial $V_b - V_a = V_{ba} = +5000\,\text{V}$ (figura 23-4). *a*) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial del electrón? *b*) ¿Cuál es la velocidad del electrón ($m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) como resultado de esta aceleración?

PLANTEAMIENTO El electrón acelerado hacia la placa positiva disminuirá su energía potencial en una cantidad $\Delta U = qV_{ba}$ (ecuación 23-3). La pérdida de energía potencial será igual a la ganancia en energía cinética (conservación de energía).

SOLUCIÓN *a*) La carga de un electrón es $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C. Por lo tanto, el cambio en su energía potencial es

$$\Delta U = qV_{ba} = (-1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(+5000\,\text{V}) = -8.0 \times 10^{-16}\,\text{J}.$$

El signo menos indica que la energía potencial disminuye. La diferencia de potencial V_{ba} tiene signo positivo, porque el potencial final V_b es mayor que el potencial inicial V_a. Los electrones negativos son atraídos hacia el electrodo positivo y repelidos del electrodo negativo.

b) La energía potencial perdida por el electrón se convierte en energía cinética K. De la conservación de la energía (ecuación 8-9a), $\Delta K + \Delta U = 0$, así que

$$\begin{aligned} \Delta K &= -\Delta U \\ \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 &= -q(V_b - V_a) = -qV_{ba}, \end{aligned}$$

donde la energía cinética inicial es cero, puesto que el electrón parte del reposo. Despejamos v:

$$v = \sqrt{-\frac{2qV_{ba}}{m}} = \sqrt{-\frac{2(-1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(5000\,\text{V})}{9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg}}} = 4.2 \times 10^7\,\text{m/s}.$$

NOTA La energía potencial eléctrica no depende de la masa, sólo de la carga y el voltaje. La velocidad *sí* depende de m.

23–2 Relación entre potencial eléctrico y campo eléctrico

Los efectos de cualquier distribución de carga pueden describirse ya sea en términos del campo eléctrico o en términos del potencial eléctrico. Por lo general, el potencial eléctrico es más fácil de usar, porque es una cantidad escalar, en comparación con el campo eléctrico, que es una cantidad vectorial. Existe una conexión crucial entre el potencial eléctrico producido por un arreglo de cargas dado y el campo eléctrico debido a esas cargas, que veremos a continuación.

Empezamos recordando la relación entre una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ y la energía potencial U asociada con esa fuerza. Como vimos en la sección 8-2, la diferencia de energía potencial entre dos puntos cualesquiera en el espacio, *a* y *b*, está dada por la ecuación 8-4:

$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}},$$

donde $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es un incremento infinitesimal de desplazamiento y la integral se toma a lo largo de cualquier trayectoria en el espacio, desde el punto *a* hasta el punto *b*. En el caso eléctrico, estamos más interesados en la diferencia de potencial, dada por la ecuación 23-2b, $V_{ba} = V_b - V_a = (U_b - U_a)/q$, más que en la energía potencial. También el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en cualquier punto del espacio se define como la fuerza por unidad de carga (ecuación 21-3): $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}/q$. Usando estas dos relaciones en la ecuación anterior

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}. \qquad \textbf{(23–4a)}$$

Ésta es la relación general entre el campo eléctrico y la diferencia de potencial. Véase la figura 23-5. Si conocemos el campo eléctrico debido a un arreglo de carga eléctrica, podemos usar la ecuación 23-4a para determinar V_{ba}.

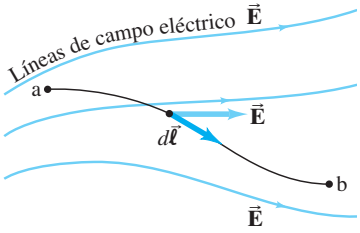


FIGURA 23–5 Para encontrar V_{ba} en un campo eléctrico no uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, integramos $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ del punto *a* al punto *b*.

Un caso especial sencillo es aquél de un campo eléctrico uniforme. En la figura 23-1, por ejemplo, una trayectoria paralela a las líneas de campo, desde el punto a en la placa positiva hasta el punto b en la placa negativa, da (ya que $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido en cualquier punto),

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -E\int_a^b d\ell = -Ed$$

o

$$V_{ba} = -Ed \qquad \text{[sólo si } E \text{ es uniforme]} \quad \textbf{(23–4b)}$$

donde d es la distancia, paralela a las líneas de campo entre los puntos a y b. Tenga cuidado de no usar la ecuación 23-4b a menos que esté seguro de que el campo eléctrico es uniforme.

A partir de cualquiera de las ecuaciones 23-4, vemos que las unidades para la intensidad de campo eléctrico pueden escribirse como volt entre metro (V/m), así como newton entre coulomb (N/C). Éstas son equivalentes en general, porque 1 N/C = 1 N·m/C·m = 1 J/C·m = 1 V/m.

EJERCICIO A Regrese a la pregunta de inicio del capítulo (página 607) y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO 23–3 **Campo eléctrico obtenido a partir del voltaje.** Se cargan dos placas paralelas para producir una diferencia de potencial de 50 V. Si la separación entre las placas es de 0.050 m, calcule la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre las placas (figura 23-6).

PLANTEAMIENTO Aplicamos la ecuación 23-4b para obtener la magnitud de E, considerando que es uniforme.

SOLUCIÓN La magnitud del campo eléctrico es $E = V_{ba}/d = (50\,\text{V}/0.050\,\text{m}) = 1000\,\text{V/m}$.

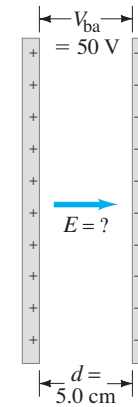


FIGURA 23–6 Ejemplo 23–3.

EJEMPLO 23–4 **Esfera conductora cargada.** Determine el potencial a una distancia r desde el centro de una esfera conductora cargada de manera uniforme y de radio r_0 para *a*) $r > r_0$, *b*) $r = r_0$, *c*) $r < r_0$. La carga total en la esfera es Q.

PLANTEAMIENTO La carga Q se distribuye sobre toda la superficie de la esfera ya que es un material conductor. En el ejemplo 22-3 vimos que el campo eléctrico fuera de una esfera conductora es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad [r > r_0]$$

y apunta radialmente hacia fuera (o hacia adentro si $Q < 0$). Ya que conocemos $\vec{\mathbf{E}}$, es posible empezar utilizando la ecuación 23-4a.

SOLUCIÓN *a*) Usamos la ecuación 23-4a e integramos a lo largo de una línea radial con $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ paralelo a $\vec{\mathbf{E}}$ (figura 23-7) entre dos puntos que están a distancias r_a y r_b del centro de la esfera:

$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

y tomamos $d\ell = dr$. Si consideramos $V = 0$ para $r = \infty$ (elegimos $V_b = 0$ en $r_b = \infty$); entonces, para cualquier otro punto r (para $r > r_0$), tenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}. \qquad [r > r_0]$$

Veremos en la siguiente sección que esta ecuación se aplica para el potencial a una distancia r de una carga puntual. Así, el potencial eléctrico afuera de un conductor esférico, con una distribución de carga uniforme, es igual que si toda la carga estuviera en su centro.

b) Conforme r se aproxima a r_0, vemos que

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0} \qquad [r = r_0]$$

en la superficie del conductor.

c) Para puntos dentro del conductor, $E = 0$. Así que la integral, $\int\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$, entre $r = r_0$ y cualquier punto dentro del conductor produce un cambio nulo en V. Por lo tanto, V es constante dentro del conductor:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0}. \qquad [r \le r_0]$$

El conductor entero, no sólo su superficie, está al mismo potencial. La figura 23-8 muestra gráficas de E y V como función de r para una esfera conductora.

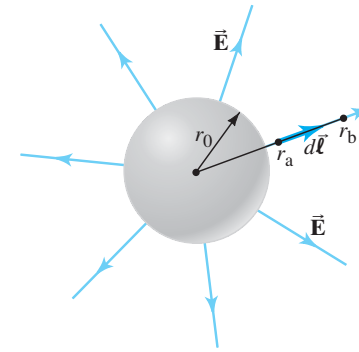
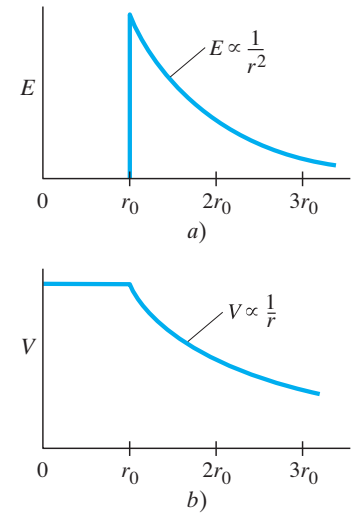


FIGURA 23–7 Ejemplo 23-4. Integración de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ para el campo afuera de una esfera conductora.

FIGURA 23–8 *a*) E versus r y *b*) V versus r, para una esfera conductora sólida cargada uniformemente de radio r_0 (la carga se distribuye a sí misma sobre la superficie); r es la distancia desde el centro de la esfera.



EJEMPLO 23–5 **Voltaje de ruptura.** En diferentes tipos de equipo se utilizan voltajes muy altos. Un problema con altos voltajes es que el aire puede ionizarse debido a los altos campos eléctricos: los electrones libres en el aire (producidos por rayos cósmicos, por ejemplo) pueden ser acelerados por campos tan altos que alcanzan velocidades suficientes para ionizar, mediante colisiones, moléculas de O_2 y N_2, desprendiendo uno o más de sus electrones. En esas condiciones, el aire se vuelve conductor y el alto voltaje no logra mantenerse conforme la carga fluye. El rompimiento del aire ocurre para campos eléctricos cercanos a 3×10^6 V/m. *a*) Demuestre que el potencial de ruptura para un conductor esférico es proporcional al radio de la esfera, y *b*) estime el voltaje de ruptura en aire para una esfera de diámetro de 1.0 cm.

PLANTEAMIENTO El potencial eléctrico en la superficie de un conductor esférico de radio r_0 (ejemplo 23-4) y el campo eléctrico justo afuera de su superficie son

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0} \qquad \text{y} \qquad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0^2}.$$

SOLUCIÓN *a*) Combinamos estas dos ecuaciones y obtenemos

$$V = r_0 E. \qquad \text{[en la superficie del conductor esférico]}$$

b) Para $r_0 = 5 \times 10^{-3}$ m, el voltaje de ruptura en el aire es

$$V = (5 \times 10^{-3}\,\text{m})(3 \times 10^6\,\text{V/m}) \approx 15{,}000\,\text{V}.$$

Cuando hay altos voltajes, se puede ver un brillo alrededor de puntas afiladas, conocido como **descarga de corona**, provocado por los intensos campos eléctricos en estos puntos que logran ionizar las moléculas del aire. La luz que vemos se debe a electrones que saltan a estados de energía más bajos y vacíos. Los **pararrayos**, con sus puntas afiladas, fueron diseñados para ionizar el aire circundante cuando una nube de tormenta está cerca y para proveer un camino de conducción con la finalidad de descargar lentamente una nube de alto voltaje que es peligrosa durante un cierto periodo. Así que los pararrayos, conectados a tierra, fueron diseñados para retirar la carga eléctrica de nubes amenazadoras, antes de que un acumulamiento de carga dé por resultado un relámpago destructor repentino.

EJERCICIO B En un día seco, una persona puede cargarse eléctricamente por frotamiento con alfombras u otros objetos ordinarios. Suponga que usted siente una pequeña descarga, conforme se acerca a la perilla de metal, notando que la descarga ocurre junto con una pequeña chispa cuando su mano está a unos 3.0 mm de la perilla. Con base en la ecuación 23-4b, elabore una estimación de la diferencia de potencial entre su mano y la perilla. *a*) 9 V, *b*) 90 V, *c*) 900 V, *d*) 9000 V, *e*) ninguna de las anteriores.

23–3 Potencial eléctrico debido a cargas puntuales

El potencial eléctrico a una distancia r de una carga puntual sencilla Q puede derivarse directamente de la ecuación 23-4a, $V_b - V_a = -\int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. El campo eléctrico debido a una sola carga puntual tiene una magnitud (ecuación 21-4)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{o} \qquad E = k\frac{Q}{r^2}$$

(donde $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.99 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$), y se dirige en forma radial hacia fuera de una carga positiva (o hacia dentro si $Q < 0$). Tomamos la integral de la ecuación 23-4a a lo largo de una línea de campo recta (figura 23-9) desde un punto *a*, a una distancia r_a de Q, hasta un punto *b*, a una distancia r_b de Q. Entonces $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ será paralelo a $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\ell = dr$. De ahí que

$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_b} - \frac{Q}{r_a}\right).$$

Como se mencionó, sólo tienen significado físico las diferencias de potencial. Por lo tanto, tenemos la libertad de elegir el valor del potencial en el punto que mejor nos

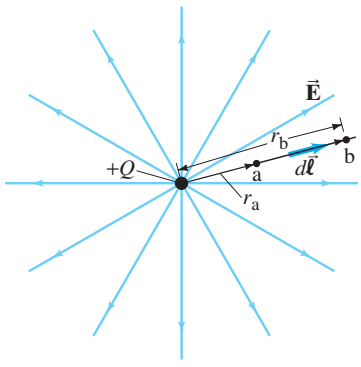


FIGURA 23–9 Integramos la ecuación 23-4a a lo largo de una línea recta (mostrada en negro) desde el punto *a* hasta el punto *b*. La línea *ab* es paralela a la línea de campo.

convenga. Es común elegir el potencial como cero en el infinito (tomamos $V_b = 0$ en $r_b = \infty$). Entonces, el potencial eléctrico V a una distancia r desde una carga puntual es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{una sola carga puntual;}\\ V = 0 \text{ en } r = \infty\end{array}\right] \qquad \textbf{(23–5)}$$

Aquí podemos considerar V como el potencial absoluto, con $V = 0$ en $r = \infty$, o considerar V como la diferencia de potencial entre r y el infinito. Observe que el potencial V disminuye con la primera potencia de la distancia, mientras que el campo eléctrico (ecuación 21-4) decrece con la distancia al *cuadrado*. El potencial cerca de una carga positiva es grande y se reduce a cero a distancias muy grandes (figura 23-10). Para una carga negativa, el potencial es negativo y se incrementa hacia cero a distancias grandes (figura 23-11).

En el ejemplo 23-4 encontramos que el potencial debido a una esfera cargada de manera uniforme está dado por la misma relación (ecuación 23-5) para puntos afuera de la esfera. Así, vemos que el potencial afuera de una esfera cargada de manera uniforme es igual que si toda la carga estuviera concentrada en su centro.

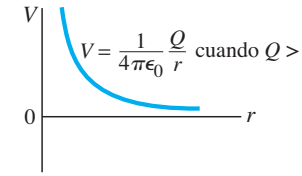
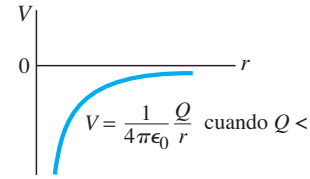


FIGURA 23–10 Potencial V como función de la distancia r para una carga puntual sencilla Q cuando la carga es positiva.

FIGURA 23–11 Potencial V como función de la distancia r para una carga puntual sencilla Q cuando la carga es negativa.



EJERCICIO C ¿Cuál es el potencial a una distancia de 3.0 cm de una carga puntual $Q = -2.0 \times 10^{-9}$ C? *a*) 600 V, *b*) 60 V, *c*) 6 V, *d*) –600 V, *e*) –60 V, *f*) –6 V.

EJEMPLO 23–6 **Trabajo requerido para acercar entre sí dos cargas positivas.** ¿Cuál es el trabajo mínimo que debe realizar una fuerza externa para atraer una carga $q = 3.00\ \mu$C desde una distancia muy grande (considere $r = \infty$) hasta un punto a 0.500 m de una carga $Q = 20.0\ \mu$C?

PLANTEAMIENTO Para determinar el trabajo no podemos simplemente multiplicar la fuerza por la distancia, porque la fuerza no es constante. En vez de ello, podemos igualar el cambio en la energía potencial con el (positivo del) trabajo requerido por una fuerza *externa* (capítulo 8) de acuerdo con la ecuación 23-3: $W = \Delta U = q(V_b - V_a)$. Obtenemos los potenciales V_b y V_a usando la ecuación 23-5.

SOLUCIÓN El trabajo requerido es igual al cambio en la energía potencial

$$\begin{aligned} W &= q(V_b - V_a) \\ &= q\left(\frac{kQ}{r_b} - \frac{kQ}{r_a}\right), \end{aligned}$$

donde $r_b = 0.500$ m y $r_a = \infty$. El término de la derecha dentro del paréntesis es cero ($1/\infty = 0$), así que

$$W = (3.00 \times 10^{-6}\,\text{C})\frac{(8.99 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(2.00 \times 10^{-5}\,\text{C})}{(0.500\,\text{m})} = 1.08\,\text{J}.$$

NOTA No podemos usar la ecuación 23-4b aquí porque se aplica *sólo* a campos uniformes. Sin embargo, empleamos la ecuación 23-3 porque siempre es válida.

⚠ CUIDADO
No podemos usar
$W = Fd$ si F no es constante

Para determinar el campo eléctrico en puntos cercanos a un conjunto de dos o más cargas puntuales, se requiere añadir los campos eléctricos debidos a cada una de las cargas. Puesto que el campo eléctrico es un vector, esto puede ser complicado y requerir mucho tiempo. Es mucho más fácil calcular el potencial eléctrico en un punto dado debido a un conjunto de cargas puntuales, ya que el potencial eléctrico es un escalar, así que sólo necesita sumar números (con los signos apropiados) y dejar de preocuparse por la dirección. Ésta es una ventaja importante para utilizar el potencial eléctrico en la resolución de problemas.

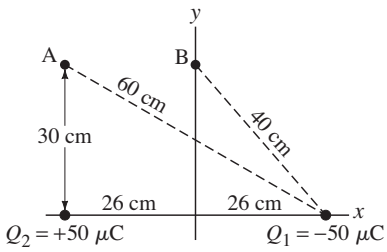


FIGURA 23–12 Ejemplo 23-7. (Véase también el ejemplo 21-8, figura 21-27).

⚠ **CUIDADO**

El potencial es un escalar y no tiene componentes

EJEMPLO 23–7 **Potencial cerca de dos cargas.** Calcule el potencial eléctrico *a*) en el punto A de la figura 23-12 debido a las dos cargas que se muestran y *b*) en el punto B. [Ésta es la misma situación del ejemplo 21-8 (figura 21-27), donde calculamos el campo eléctrico en tales puntos].

PLANTEAMIENTO El potencial total en el punto A (o en el punto B) es la suma de los potenciales en ese punto, debido a cada una de las cargas Q_1 y Q_2. El potencial debido a cada carga está dado por la ecuación 23-5. No tenemos que preocuparnos por la dirección, pues el potencial eléctrico es una cantidad escalar. Habrá que tener cuidado con los signos de las cargas.

SOLUCIÓN *a*) Sumamos los potenciales en A debidos a cada una de las cargas Q_1 y Q_2, luego usamos la ecuación 23-5 para cada una:

$$\begin{aligned} V_A &= V_{A2} + V_{A1} \\ &= k\frac{Q_2}{r_{2A}} + k\frac{Q_1}{r_{1A}} \end{aligned}$$

donde $r_{1A} = 60$ cm y $r_{2A} = 30$ cm. Así

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5.0 \times 10^{-5}\ \text{C})}{0.30\ \text{m}} \\ &\quad + \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(-5.0 \times 10^{-5}\ \text{C})}{0.60\ \text{m}} \\ &= 1.50 \times 10^6\ \text{V} - 0.75 \times 10^6\ \text{V} \\ &= 7.5 \times 10^5\ \text{V}. \end{aligned}$$

b) En el punto B, $r_{1B} = r_{2B} = 0.40$ m, así que

$$\begin{aligned} V_B &= V_{B2} + V_{B1} \\ &= \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5.0 \times 10^{-5}\ \text{C})}{0.40\ \text{m}} \\ &\quad + \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(-5.0 \times 10^{-5}\ \text{C})}{0.40\ \text{m}} \\ &= 0\ \text{V}. \end{aligned}$$

NOTA Los dos puntos en la suma del inciso *b*) se cancelan para cualquier punto equidistante de Q_1 y Q_2 ($r_{1B} = r_{2B}$). Así que el potencial será cero en cualquier plano equidistante entre las dos cargas opuestas. Este plano, donde V es constante, se llama superficie equipotencial.

Se pueden realizar sumas sencillas como éstas para cualquier número de cargas puntuales.

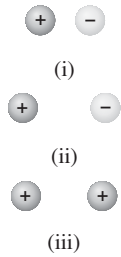


FIGURA 23–13 Ejercicio D.

EJERCICIO D Considere tres pares de cargas Q_1 y Q_2 (figura 23-13). *a*) ¿Qué conjunto tiene una energía potencial positiva? *b*) ¿Qué conjunto tiene la mayor energía potencial negativa? *c*) ¿Qué conjunto requiere la mayor cantidad de trabajo para separar las cargas hasta el infinito? Considere que todas las cargas son de la misma magnitud.

23–4 Potencial debido a cualquier distribución de carga

Si conocemos el campo eléctrico debido a cualquier distribución de carga eléctrica en una región del espacio, es posible determinar la diferencia de potencial entre dos puntos en la región usando la ecuación 23-4a, $V_{ba} = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. En muchos casos, no conocemos $\vec{\mathbf{E}}$ como función de la posición, por lo que puede ser difícil de calcular. Es posible calcular el potencial V debido a una distribución de carga arbitraria de otra manera, usando el potencial debido a una sola carga puntual (ecuación 23-5):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r},$$

donde consideramos que $V = 0$ en $r = \infty$. Luego podemos sumar sobre todas las cargas. Si tenemos n cargas puntuales individuales, el potencial en un punto a (relativo a $V = 0$ en $r = \infty$) es

$$V_a = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_{ia}}, \qquad \textbf{(23–6a)}$$

donde r_{ia} es la distancia de la i-ésima carga (Q_i) al punto a. (Ya usamos este enfoque en el ejemplo 23-7.) Si la distribución de carga puede considerarse continua, entonces

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \qquad \textbf{(23–6b)}$$

donde r es la distancia de un pequeño elemento de carga, dq, al punto donde se está calculando el potencial V.

EJEMPLO 23–8 **Potencial debido a un anillo de carga.** Un anillo circular delgado de radio R tiene una carga Q distribuida uniformemente. Determine el potencial en un punto P sobre el eje del anillo a una distancia x de su centro (figura 23-14).

PLANTEAMIENTO Integramos sobre el anillo usando la ecuación 23-6b.

SOLUCIÓN Cada punto sobre el anillo está equidistante del punto P, cuya distancia es $(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$. Así que el potencial en el punto P es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

NOTA Para puntos muy lejanos del anillo, $x \gg R$, este resultado se reduce a $(1/4\pi\epsilon_0)(Q/x)$, que es el potencial de una carga puntual, como era de esperarse.

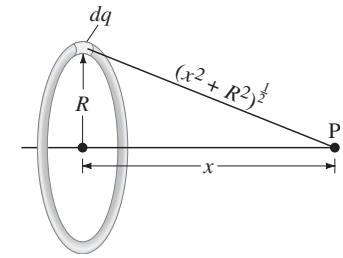


FIGURA 23–14 Ejemplo 23-8. Cálculo del potencial en un punto P, a una distancia x del centro de un anillo cargado de manera uniforme.

EJEMPLO 23–9 **Potencial debido a un disco cargado.** Un disco plano y delgado, de radio R_0, tiene una carga Q distribuida de manera uniforme (figura 23-15). Determine el potencial en un punto P, sobre el eje del disco, a una distancia x de su centro.

PLANTEAMIENTO Dividimos el disco en anillos delgados de radio R y espesor dR: luego, usamos el resultado del ejemplo 23-8 para sumar sobre todo el disco.

SOLUCIÓN La carga Q está distribuida de manera uniforme, así que la carga contenida en cada anillo es proporcional a su área. El disco tiene área πR_0^2 y cada anillo delgado tiene área $dA = (2\pi R)(dR)$. Por lo tanto,

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi R\, dR}{\pi R_0^2}$$

así que

$$dq = Q \frac{(2\pi R)(dR)}{\pi R_0^2} = \frac{2QR\, dR}{R_0^2}.$$

En consecuencia, el potencial en el punto P, usando la ecuación 23-6b en la que sustituimos r con $(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$, es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \int_0^{R_0} \frac{R\, dR}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{R=0}^{R=R_0}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} [(x^2 + R_0^2)^{\frac{1}{2}} - x].$$

NOTA Para $x \gg R_0$, esta fórmula se reduce a

$$V \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R_0^2}{x^2}\right) - x \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}.$$

Éste es el resultado para una carga puntual, como era de esperarse.

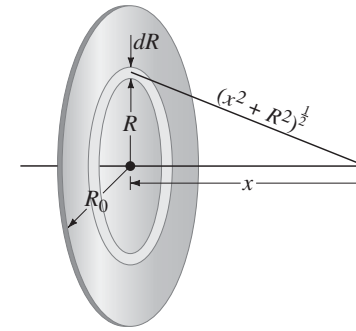


FIGURA 23–15 Ejemplo 23-9. Cálculo del potencial eléctrico en un punto P sobre el eje de un disco delgado cargado de manera uniforme.

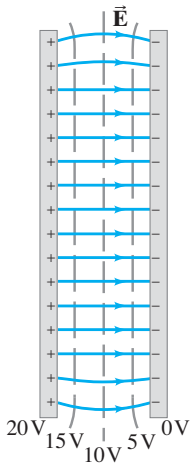


FIGURA 23–16 Líneas equipotenciales (líneas punteadas en color gris) entre dos placas paralelas cargadas con signos opuestos. Observe que las líneas equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico (líneas continuas de color naranja).

FIGURA 23–17 Ejemplo 23-10. Líneas de campo eléctrico y superficies equipotenciales para una carga puntual.

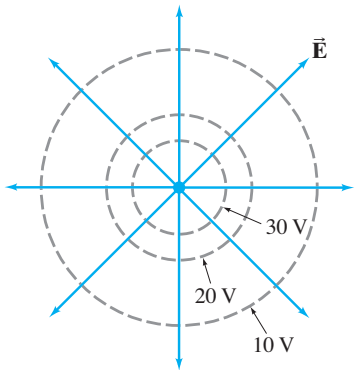
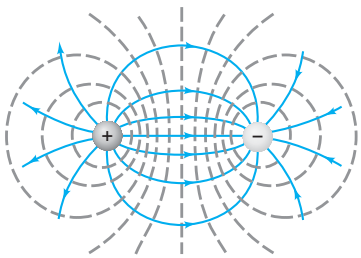


FIGURA 23–18 Las líneas equipotenciales (punteadas y en color gris) siempre son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico (color naranja), como se muestran aquí, para el caso de dos cargas de la misma magnitud, pero con signos opuestos.



23–5 Superficies equipotenciales

El potencial eléctrico puede representarse gráficamente dibujando **líneas equipotenciales** o, en el caso de tres dimensiones, **superficies equipotenciales**. Una superficie equipotencial es una superficie en la que todos los puntos que se encuentran sobre ella están al mismo potencial. Esto es, la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de la superficie es cero y no se requiere ningún trabajo para trasladar una carga de un punto a otro sobre una superficie equipotencial. Una *superficie equipotencial debe ser perpendicular al campo eléctrico* en cualquier punto. Si no fuera así, es decir, si hubiera una componente de $\vec{\mathbf{E}}$ paralela a la superficie, se requeriría realizar un trabajo para mover una carga sobre la superficie en contra de la componente de $\vec{\mathbf{E}}$; lo anterior contradice la idea de que estamos en una superficie equipotencial. Esto también puede verse de la ecuación 23-4a, $\Delta V = -\int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. Sobre una superficie donde V es constante, $\Delta V = 0$, así que se debe cumplir que $\vec{\mathbf{E}} = 0$, $d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 0$, o cos $q = 0$, donde q es el ángulo entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. En consecuencia, en $\vec{\mathbf{E}}$ una región donde no es cero, la trayectoria $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ a lo largo de una superficie equipotencial debe tener cos $q = 0$, es decir, $q = 90°$, por lo que $\vec{\mathbf{E}}$ es perpendicular a la superficie equipotencial.

El hecho de que las líneas de campo y las superficies equipotenciales son mutuamente perpendiculares nos ayuda a ubicar a las superficies equipotenciales cuando se conocen las líneas de campo. En un dibujo normal en dos dimensiones, mostramos las *líneas* equipotenciales, que son la intersección de las superficies equipotenciales con el plano del dibujo. En la figura 23-16 se han dibujado unas cuantas líneas equipotenciales (líneas grises punteadas) y algunas líneas de campo (líneas color naranja) entre dos placas paralelas a una diferencia de potencial de 20 V. La placa negativa se elige de manera arbitraria a un potencial de cero volts y se indica el potencial de cada línea equipotencial. Observe que $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia valores pequeños de V.

EJEMPLO 23–10 **Superficies equipotenciales de una carga puntual.** Para una sola carga puntual con $Q = 4.0 \times 10^{-9}$ C, dibuje las líneas equipotenciales (en un plano de línea que contenga a la carga) correspondientes a $V_1 = 10$ V, $V_2 = 20$ V y $V_3 = 30$ V.

PLANTEAMIENTO El potencial eléctrico V depende de la distancia r desde el centro (ecuación 23-5).

SOLUCIÓN El campo eléctrico para una carga puntual positiva se dirige radialmente hacia fuera. Ya que las superficies equipotenciales deben ser perpendiculares a las líneas de campo eléctrico, tendrán la forma de esferas centradas en el punto de la carga (figura 23-17). De la ecuación 23-5, tenemos $r = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/V)$, así que para $V_1 = 10$ V, $r_1 = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4.0 \times 10^{-9}\ \text{C})/(10\ \text{V}) = 3.6$ m, para $V_2 = 20$ V. De manera análoga, se obtiene que $r_2 = 1.8$ m y para $V_3 = 30$ V, $r_3 = 1.2$ m, como se muestra en la figura.

NOTA La superficie equipotencial con el mayor potencial está más cerca de la carga positiva. ¿Cómo cambiaría esto si Q fuera negativa?

La figura 23-18 muestra las superficies equipotenciales (líneas punteadas de color gris) para el caso de dos cargas de la misma magnitud, pero de signos opuestos. Las líneas y superficies equipotenciales, a diferencia de las líneas de campo, siempre son continuas y nunca terminan, así que siguen más allá de los bordes de las figuras 23-16 y 23-18.

En la sección 21-9 vimos que dentro de un conductor, en el caso estático, no puede haber un campo eléctrico; de otra forma, los electrones sentirían una fuerza y se moverían. De hecho, el volumen entero de un *conductor debe estar todo al mismo potencial en el caso electrostático*; la superficie de un conductor está entonces en la superficie equipotencial. (Si no fuera así, los electrones libres en la superficie se desplazarían, ya que siempre que haya una diferencia de potencial entre dos puntos las cargas libres se pondrían en movimiento.) Lo anterior es completamente congruente con nuestro resultado, ya analizado, de que el campo eléctrico en la superficie de un conductor debe ser perpendicular a su superficie.

Una analogía útil para entender las líneas equipotenciales es un mapa topográfico: las líneas de contorno son esencialmente líneas equipotenciales gravitacionales (figura 23-19).

FIGURA 23–19 Un mapa topográfico (en este caso, una porción de la Sierra Nevada en California) muestra líneas de contorno continuas, cada una de las cuales está a una altura fija sobre el nivel del mar. Aquí están a intervalos de 80 pies (25 m). Si usted camina a lo largo de una línea de contorno, no asciende ni desciende. Si cruza líneas, en particular si escala de manera perpendicular a las líneas, estará modificando su potencial gravitacional (rápidamente, si es que las líneas están muy juntas).

23–6 Potencial de un dipolo eléctrico

Como vimos en la sección 21-11, se llama **dipolo eléctrico** a la configuración formada por dos cargas puntuales iguales, Q, de signos opuestos, separadas una distancia ℓ. También las dos cargas de las figuras 23-12 y 23-18 constituyen un dipolo eléctrico, mientras la última figura muestra las líneas de campo y las superficies equipotenciales para un dipolo eléctrico. Puesto que los dipolos eléctricos se presentan con frecuencia en física, así como en otros campos, es importante que los examinemos con mayor detalle.

El potencial eléctrico en un punto arbitrario P, debido a un dipolo (figura 23-20), es la suma de los potenciales debidos a cada una de las dos cargas (tomamos $V = 0$ en $r = \infty$):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-Q)}{(r + \Delta r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\Delta r}{r(r + \Delta r)},$$

donde r es la distancia desde el punto P hasta la carga positiva y $r + \Delta r$ es la distancia a la carga negativa. Esta ecuación se simplifica si consideramos puntos P cuya distancia hasta el dipolo es mucho mayor que la separación entre las dos cargas; esto es, para $r \gg \ell$. De la figura 23-20, vemos que $\Delta r \approx \ell \cos\theta$; dado que $r \gg \Delta r \approx \ell \cos\theta$, podemos ignorar Δr en el denominador, en comparación con r. Por lo tanto, obtenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\ell\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad [\text{dipolo; } r \gg \ell] \quad \textbf{(23–7)}$$

donde $p = Q\ell$ se conoce como el **momento dipolar**. Vemos que el potencial disminuye con el *cuadrado* de la distancia desde el dipolo, mientras que para una carga puntual sencilla el potencial disminuye como la distancia a la primera potencia (ecuación 23-5). No es sorprendente que el potencial de un dipolo disminuya más rápido que en el caso de una carga puntual; cuando usted está lejos del dipolo, las dos cargas iguales y opuestas aparecen tan cercanas entre sí que tienden a neutralizarse una con otra.

La tabla 23-2 lista los momentos dipolares de varias moléculas. Los signos + y − indican en qué átomos residen estas cargas. Los dos últimos renglones de la tabla corresponden a muchas moléculas orgánicas y desempeñan un papel importante en biología molecular. El momento dipolar tiene unidades de coulomb-metro (C·m), aunque para moléculas se usa en ocasiones una unidad menor llamada *debye*: 1 debye = 3.33×10^{-30} C·m.

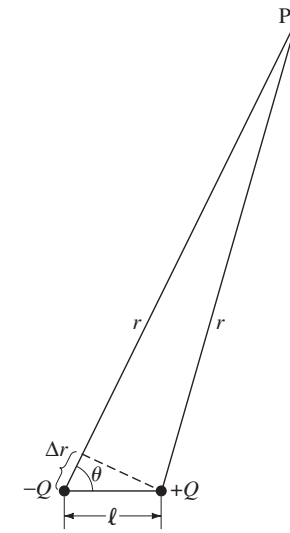


FIGURA 23–20 Dipolo eléctrico. Cálculo del potencial V en un punto P.

TABLA 23–2 Momentos dipolares de algunas moléculas

Molécula	Momento dipolar (C · m)
$H_2{}^{(+)}O^{(-)}$	6.1×10^{-30}
$H^{(+)}Cl^{(-)}$	3.4×10^{-30}
$N^{(-)}H_3{}^{(+)}$	5.0×10^{-30}
$>N^{(-)}—H^{(+)}$	$\approx 3.0^{\dagger} \times 10^{-30}$
$>C^{(+)}=O^{(-)}$	$\approx 8.0^{\dagger} \times 10^{-30}$

† Estos grupos normalmente aparecen en moléculas más grandes, por lo cual el valor del momento dipolar puede variar, lo que depende del resto de la molécula.

23–7 Determinación de $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de V

Podemos usar la ecuación 23-4a, $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell}$, para determinar la diferencia de potencial entre dos puntos si se conoce el campo eléctrico entre esos dos puntos. Invirtiendo la ecuación 23-4a, es posible escribir el campo eléctrico en términos del potencial. Así que el campo eléctrico puede determinarse si se conoce el potencial V. Veamos cómo hacer esto.

Escribimos la ecuación 23-4a en forma diferencial como

$$dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -E_\ell \, d\ell,$$

donde dV es la diferencia de potencial infinitesimal entre dos puntos separados una distancia $d\Delta$ y E_ℓ es la componente del campo eléctrico en la dirección del desplazamiento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. Por lo tanto, podemos escribir

$$E_\ell = -\frac{dV}{d\ell}. \tag{23–8}$$

Así, *la componente del campo eléctrico en cualquier dirección es igual al negativo de la tasa de cambio del potencial eléctrico con la distancia en esa dirección.* La cantidad $dV/d\ell$ es el gradiente de V en una dirección particular. Si no se especifica ninguna dirección, el término *gradiente* se refiere a aquella dirección en la que V cambia más rápido; esta sería la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ en ese punto, así que podemos escribir

$$E = -\frac{dV}{d\ell}. \qquad [\text{si } d\vec{\boldsymbol{\ell}} \| \vec{\mathbf{E}}]$$

Si $\vec{\mathbf{E}}$ se escribe como función de x, y y z, y consideramos que ℓ se refiere a los ejes x, y o z, entonces la ecuación 23-8 queda

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{23–9}$$

Aquí, $\partial V/\partial x$ es la "derivada parcial" de V con respecto a x, manteniendo a y y a z constantes.[†] Por ejemplo, si $V(x, y, z) = (2\ \text{V/m}^2)x^2 + (8\ \text{V/m}^3)y^2z + (2\ \text{V/m}^2)z^2$, entonces

$$E_x = -\partial V/\partial x = -(4\ \text{V/m}^2)x,$$
$$E_y = -\partial V/\partial y = -(16\ \text{V/m}^3)yz,$$

y

$$E_z = -\partial V/\partial z = -(8\ \text{V/m}^3)y^2 - (4\ \text{V/m}^2)z.$$

EJEMPLO 23–11 **$\vec{\mathbf{E}}$ para un anillo y un disco.** Use el potencial eléctrico para determinar el campo eléctrico en un punto P sobre el eje de *a*) un anillo circular de carga (figura 23-14) y *b*) un disco cargado uniformemente (figura 23-15).

PLANTEAMIENTO Obtuvimos V como función de x en los ejemplos 23-8 y 23-9, así que encontramos E derivando (ecuaciones 23-9).

SOLUCIÓN *a*) A partir del ejemplo 23-8,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Luego,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Éste es el mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 21-9.

b) A partir del ejemplo 23-9,

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}\left[(x^2 + R_0^2)^{\frac{1}{2}} - x\right],$$

así que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}\left[1 - \frac{x}{(x^2 + R_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Para puntos muy cercanos al disco, $x \ll R_0$, lo cual puede simplificarse a

$$E_x \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

donde $\sigma = Q/\pi R_0^2$ es la densidad superficial de carga. También obtuvimos estos resultados en el capítulo 21, ejemplo 21-12 y ecuación 21-7.

[†]La ecuación 23-9 puede escribirse como una ecuación vectorial

$$\vec{\mathbf{E}} = -\text{grad}\, V = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

donde el símbolo $\vec{\boldsymbol{\nabla}}$ es el *operador gradiente u operador del:* $\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$.

Si comparamos el último ejemplo con los ejemplos 21-9 y 21-12, veremos que aquí, como en muchas otras distribuciones de carga, es más fácil calcular primero V y luego $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de la ecuación 23-9, que calcular $\vec{\mathbf{E}}$ debido a cada carga a partir de la ley de Coulomb. Esto es así porque V, debido a muchas cargas, es una suma escalar, mientras que $\vec{\mathbf{E}}$ es una suma vectorial.

23–8 Energía potencial electrostática; el electrón volt

Suponga que una carga puntual q se desplaza entre dos puntos en el espacio, a y b, donde el potencial eléctrico debido a otras cargas es V_a y V_b, respectivamente. El cambio de la energía potencial electrostática de q en el campo de las otras cargas es, de acuerdo con la ecuación 23-2b,

$$\Delta U = U_b - U_a = q(V_b - V_a).$$

Ahora considere que tenemos un sistema formado por varias cargas puntuales. ¿Cuál es la energía potencial electrostática del sistema? Es conveniente considerar la energía potencial eléctrica igual a cero cuando las cargas están muy lejos entre sí (idealmente a una distancia infinita). Una carga puntual, Q_1, aislada, no tiene energía potencial porque, si no hay otras cargas a su alrededor, no se pueden ejercer fuerzas eléctricas sobre ella. Si una segunda carga puntual Q_2 se acerca a Q_1, el potencial de Q_1 en la posición de esta segunda carga es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r_{12}},$$

donde r_{12} es la distancia entre las dos cargas. La energía potencial de las dos cargas, considerando $V = 0$ en $r = \infty$, es

$$U = Q_2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}}. \qquad \textbf{(23–10)}$$

Lo anterior representa el trabajo que debe realizar una fuerza externa para traer a Q_2 desde el infinito ($V = 0$) a una distancia r_{12} de Q_1. También es el negativo del trabajo que se requiere para separar las cargas hasta el infinito.

Si el sistema consta de tres cargas, la energía potencial total será igual al trabajo requerido para acercar a las tres cargas entre sí. La ecuación 23-10 representa el trabajo requerido para traer a Q_2 cerca de Q_1; para traer una tercera carga Q_3 hasta una distancia r_{13} de Q_1 y r_{23} de Q_2, se requiere un trabajo igual a

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}.$$

Así que la energía potencial total del sistema formado por las tres cargas es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}\right). \qquad [V = 0 \text{ a } r = \infty]$$

Para un sistema formado por cuatro cargas, la energía potencial total tendría seis de estos términos y así sucesivamente. (Debe tenerse cuidado cuando se realicen estas sumas para evitar contar dos veces el mismo par de cargas).

Electrón volt como unidad

Un joule es una unidad muy grande cuando se trata de la energía de electrones, átomos o moléculas (véase el ejemplo 23-2); por tal razón, se utiliza la unidad de energía llamada **electrón volt** (eV). Un *electrón volt* se define como la energía que adquiere una partícula que porta una carga cuya magnitud es igual a la carga del electrón ($q = e$) cuando se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 V. Puesto que $e = 1.6$ 10^{-19} C y que el cambio en energía potencial es igual a qV, tenemos que 1 eV es igual a $(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(1.0\,\text{V}) = 1.6 \times 10^{-19}\,\text{J}$:

$$1\,\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\,\text{J}.$$

Un electrón que se acelera a través de una diferencia de potencial de 1000 V perderá 1000 eV de energía potencial y ganará 1000 eV o 1 keV (kiloelectrón volt) de energía cinética. Por otro lado, si una partícula con una carga igual al doble de la magnitud de la carga del electrón ($= 2e = 3.2 \times 10^{-19}$ C) se desplaza a través de una diferencia de potencial de 1000 V, su energía potencial cambiará en 2000 eV = 2 keV.

Aunque el electrón volt es una unidad útil para *referirse* a las energías de moléculas y partículas elementales, no es una unidad propia del SI. Para realizar cálculos debe convertirse la energía a joules usando el factor de conversión dado. En el ejemplo 23-2, el electrón adquirió una energía cinética de 8.0×10^{-16} J. Normalmente reportaríamos esta energía como 5000 eV $(= 8.0 \times 10^{-16}\,\text{J}/1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})$. Para determinar la velocidad de una partícula en unidades del SI, debemos usar la energía cinética en J.

EJERCICIO E ¿Cuál es la energía cinética de un ion de He^{2+} liberado desde el reposo y acelerado a través de una diferencia de potencial de 1kV? *a*) 1000 eV, *b*) 500 eV, *c*) 2000 eV, *d*) 4000 eV, *e*) 250 eV.

EJEMPLO 23–12 **Desensamble de un átomo de hidrógeno.** Calcule el trabajo requerido para "desensamblar" un átomo de hidrógeno. Suponga que el electrón y el protón inicialmente están separados una distancia igual al radio "promedio" del átomo de hidrógeno en su estado fundamental: 0.529×10^{-10} m, y que terminan separados una distancia infinita uno del otro.

PLANTEAMIENTO El trabajo necesario será igual a la energía total (cinética más potencial) del electrón y del protón como un átomo, comparada con su energía total cuando están separados una distancia infinita.

SOLUCIÓN A partir de la ecuación 23-10, tenemos al inicio

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(e)(-e)}{r} = \frac{-(8.99 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})^2}{(0.529 \times 10^{-10}\,\text{m})}$$

$$= -27.2(1.60 \times 10^{-19})\,\text{J} = -27.2\,\text{eV}.$$

Esto representa la energía potencial. La energía total debe incluir también a la energía cinética del electrón trasladándose en una órbita de radio $r = 0.529 \times 10^{-10}$ m. A partir de $F = ma$ para la aceleración centrípeta, tenemos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e^2}{r^2}\right) = \frac{mv^2}{r}.$$

Así que

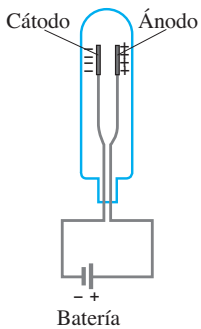
$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{e^2}{r}$$

lo cual es igual a $-\frac{1}{2}U$ (como ya se calculó), así que $K = +13.6$ eV. La energía total inicial es $E = K + U = 13.6\,\text{eV} - 27.2\,\text{eV} = -13.6$ eV. Para separar un átomo de hidrógeno estable en un protón y un electrón en reposo muy lejos entre sí ($U = 0$ en $r = \infty$ y $K = 0$, porque $v = 0$) se requieren +13.6 eV. Lo anterior equivale, de hecho, a la energía de ionización medida para el átomo de hidrógeno.

NOTA Para tratar átomos correctamente, se necesita usar teoría cuántica (capítulos 37 a 39). Sin embargo, en este caso, nuestro cálculo "clásico" brinda la respuesta correcta.

EJERCICIO F La energía cinética de un automóvil de 1000 kg que viaja a 20m/s (70 km/h) sería alrededor de *a*) 100 GeV, *b*) 1000 TeV, *c*) 10^6 TeV, *d*) 10^{12} TeV *e*) 10^{18} TeV.

FIGURA 23–21 Si el cátodo dentro del tubo de vidrio evacuado se calienta hasta que brille, se encuentra que cargas negativas (electrones), antes llamados "rayos catódicos", son expulsadas y fluyen hacia el ánodo (+) hacia el que son atraídos.



*23–9 Tubo de rayos catódicos: Monitores de TV y de computadora, osciloscopios

Un aparato importante que hace uso del voltaje, y nos permite "visualizar" cómo cambia el voltaje en el tiempo, es el *tubo de rayos catódicos* (o CRT, por las siglas de *cathode ray tube*). Un CRT utilizado de esta manera es un *osciloscopio*. El CRT también se ha empleado por muchos años como el cinescopio de un aparato de televisión y en monitores de computadoras; sin embargo, las pantallas de cristal líquido (LCD, por las siglas de *liquid cristal display*) (capítulo 35) y otros tipos de pantallas son más comunes hoy.

La operación de un CRT depende de un fenómeno llamado **emisión termoiónica**, descubierto por Thomas A. Edison (1847–1931). Considere dos placas pequeñas (los electrodos) dentro de una "bombilla" o un "tubo" evacuado, como se ilustra en la figura 23-21, a las cuales se aplica una diferencia de potencial. El electrodo negativo se llama **cátodo**; el positivo, **ánodo**. Si se calienta el cátodo negativo (generalmente mediante una corriente eléctrica, como en una bombilla eléctrica de filamento) hasta que se caliente y brille, se encuentra que cargas negativas abandonan el cátodo y fluyen hacia el ánodo positivo. Estas cargas negativas actualmente se llaman electrones, pero en forma original se conocieron como **rayos catódicos**, pues parecían provenir desde el cátodo (véase la sección 27-7, sobre el descubrimiento del electrón).

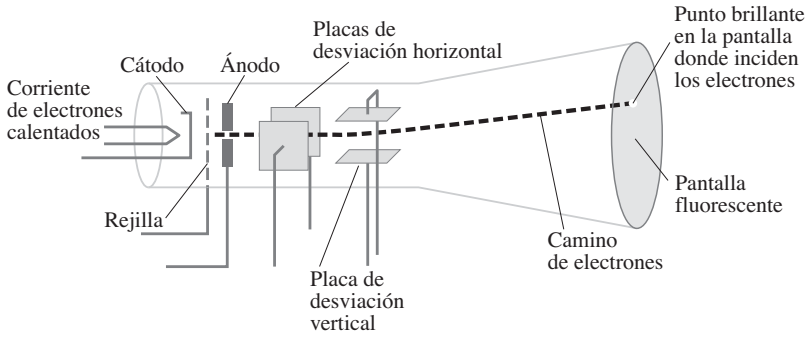


FIGURA 23–22 Un tubo de rayos catódicos. Generalmente se usan anillos de desviación magnética en vez de las placas eléctricas de desviación mostradas en la figura. Para mayor claridad de la figura se exageraron las posiciones relativas de los elementos.

El **tubo de rayos catódicos** obtiene su nombre del hecho de que, dentro del tubo de vidrio evacuado, se dirige un haz de rayos catódicos (electrones) hacia distintos lugares de una pantalla para producir una "imagen". La figura 23-22 es una representación sencilla de un CRT. Los electrones emitidos desde el cátodo caliente son acelerados a través de una alta diferencia de potencial (5000 a 50,000 V) aplicada entre el ánodo y el cátodo. Los electrones salen de esta "pistola de electrones" a través de un pequeño orificio en el ánodo. El interior de la cara del tubo está cubierto de un material fluorescente que brilla cuando es golpeado por los electrones. Así se hace visible un pequeño punto brillante en el lugar donde el haz de electrones incide sobre la pantalla. Dos placas horizontales y verticales pueden desviar el haz de electrones cuando se les aplica un voltaje. Los electrones se desvían hacia la placa que esté cargada positivamente. Así que, variando el voltaje en las placas desviadoras, es posible conseguir que el punto brillante incida sobre cualquier punto de la pantalla. Muchos CRT emplean anillos de desviación magnética (capítulo 27) en vez de placas eléctricas.

FÍSICA APLICADA
CRT, monitores de TV y de computadora

En el tubo de imagen o monitor de una computadora o de un televisor, se consigue que el haz de electrones realice un barrido sobre la pantalla, como se ilustra en la figura 23-23, cambiado adecuadamente los voltajes entre las placas de desviación. Para la televisión estándar en Estados Unidos, un barrido completo consta de 525 líneas cada $\frac{1}{30}$ s, de segundo, sobre toda la pantalla. La televisión de alta definición (HDTV) realiza un barrido de más del doble del número de líneas (1080), lo que da mayor nitidez a la imagen. Somos capaces de ver una imagen porque ésta es retenida por la pantalla fluorescente y por nuestros ojos durante cerca de $\frac{1}{20}$ s. de segundo. La imagen que vemos se debe a la variación de brillo de los puntos sobre la pantalla, que controla una rejilla (un electrodo "poroso", como una rejilla de alambre, la cual permite el paso de los electrones). La rejilla limita el flujo de los electrones a través del voltaje aplicado a ella (la "señal de video"): cuanto más negativo sea este voltaje, más electrones son repelidos y menos electrones logran pasar. Esta señal de video que envía la estación de TV y recibe el televisor está acompañada de señales que sincronizan el voltaje de la rejilla con los barridos horizontales y verticales del haz de electrones. (Más información en el capítulo 31).

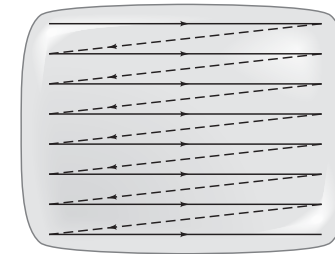


FIGURA 23–23 Un haz de electrones realiza un barrido sobre una pantalla de televisión en una sucesión de líneas horizontales. Cada barrido horizontal se logra variando el voltaje en las placas de desviación horizontal. Luego, el haz de electrones se mueve hacia abajo una pequeña distancia mediante un cambio de voltaje en las placas de desviación vertical, cuyo proceso se repite.

Un **osciloscopio** es un aparato que se usa para amplificar, medir y observar una señal eléctrica como función del tiempo en la pantalla de un CRT (la "señal" generalmente es un voltaje que depende del tiempo). El haz de electrones se barre en forma horizontal a una tasa uniforme mediante las placas de desviación horizontales. La señal que se va a desplegar se aplica (después de una amplificación) a las placas de desviación verticales. La "traza" visible sobre la pantalla, que podría ser un electrocardiograma (figura 23-24) o la señal proveniente de un experimento en la conducción de un nervio, es una gráfica de la señal de voltaje (en la vertical) contra el tiempo (en la horizontal).

FÍSICA APLICADA
Osciloscopio

FIGURA 23–24 Trazo de un electrocardiograma (ECG) desplegado en un CRT.

Resumen

El **potencial eléctrico** se define como la energía potencial por unidad de carga. Esto es, la **diferencia de potencial eléctrico** entre dos puntos cualesquiera en el espacio se define como la diferencia de energía potencial de una carga de prueba q localizada en esos dos puntos y dividida entre la carga q:

$$V_{ba} = \frac{U_b - U_a}{q}. \qquad \textbf{(23–2b)}$$

La diferencia de potencial se mide en volts (1 V = 1 J/C) y algunas veces recibe el nombre de **voltaje**.

El cambio en energía potencial de una carga q cuando se mueve a través de una diferencia de potencia V_{ba} es

$$\Delta U = qV_{ba}. \qquad \textbf{(23–3)}$$

La diferencia de potencial V_{ba} entre dos puntos, a y b, está dada por la relación

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}. \qquad \textbf{(23–4a)}$$

Así, podemos encontrar V_{ba} en cualquier región donde se conozca $\vec{\mathbf{E}}$ Si el campo eléctrico es uniforme, la integral es muy sencilla: $V_{ba} = -Ed$, *donde* d es la distancia (paralela a las líneas de campo) entre los dos puntos.

Una **línea** o **superficie equipotencial** está toda al mismo potencial y es perpendicular al campo eléctrico en cualquier punto.

El potencial eléctrico debido a una carga puntual sencilla Q, con respecto al potencial cero en el infinito, está dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}. \qquad \textbf{(23–5)}$$

El potencial debido a una distribución de carga arbitraria puede obtenerse sumando (o integrando) los potenciales sobre todas las cargas.

El potencial debido a un **dipolo eléctrico** disminuye como $1/r^2$. El **momento dipolar** es $p = Q\ell$, donde ℓ es la distancia entre las dos cargas iguales y opuestas de magnitud Q.

En los puntos donde se conozca V, se pueden calcular las componentes de $\vec{\mathbf{E}}$ mediante el inverso de la relación anterior, es decir,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \qquad \textbf{(23–9)}$$

[*Los monitores de televisión y de computadora usan tradicionalmente un **tubo de rayos catódicos**, el cual acelera electrones mediante un alto voltaje, mientras los barre sobre una pantalla de manera uniforme usando placas de desviación].

Preguntas

1. Si dos puntos están al mismo potencial, ¿significa que no se realiza trabajo alguno al trasladar una carga de prueba de un punto al otro? ¿Significa que no debe ejercerse fuerza alguna? Explique.
2. Si una carga negativa está inicialmente en reposo en un campo eléctrico, ¿se desplazará hacia una zona de mayor potencial o de menor potencial? ¿Qué le pasaría a una carga positiva? ¿Cómo cambia la energía potencial de la carga en cada caso?
3. Establezca claramente la diferencia *a*) entre potencial eléctrico y campo eléctrico, *b*) entre potencial eléctrico y energía potencial eléctrica.
4. Se acelera un electrón a través de una diferencia de potencial de, digamos, 0.10 V. ¿Cuánto más grande sería su velocidad final si se acelera a través de una diferencia de potencial cuatro veces mayor? Explique.
5. ¿Puede una partícula moverse de una región de menor potencial eléctrico a una de mayor potencial y aun así disminuir su energía potencial eléctrica? Explique.
6. Si $V = 0$ en un punto del espacio, ¿debe $\vec{\mathbf{E}} = 0$ en ese punto? Si $\vec{\mathbf{E}} = 0$ en un punto dado del espacio, ¿debe ser $V = 0$ en ese punto? Explique y dé un ejemplo en cada caso.
7. Cuando usamos aparatos prácticos, generalmente consideramos que la Tierra está a 0 V. *a*) Si en vez de esto decimos que la Tierra está a –10V, ¿cómo afectaría esto a V y a E en otros puntos? *b*) El hecho de que la Tierra tenga una carga neta, ¿afecta la elección de V sobre su superficie?
8. ¿Pueden cruzarse dos líneas equipotenciales? Explique.
9. Dibuje unas cuantas líneas equipotenciales en las figuras 21-34b y c.
10. ¿Qué puede decir del campo eléctrico en una región del espacio que está toda ella al mismo potencial?
11. Un satélite está en órbita alrededor de la Tierra sobre una línea potencial gravitacional. ¿Qué forma debe tener la órbita?
12. Suponga que el anillo cargado del ejemplo 23-8 no tuviera una carga uniforme, sino que la densidad de carga fuera dos veces mayor en la parte de arriba con respecto a la parte de abajo. Suponiendo que la carga total Q no cambia, ¿afectaría al potencial en el punto P sobre el eje (figura 23-14)? ¿Afectaría el valor de $\vec{\mathbf{E}}$ en algún punto? ¿Hay alguna discrepancia aquí? Explique.
13. Considere un metal conductor con la forma de una pelota de fútbol americano. Si éste porta una carga total Q, ¿dónde esperaría que la densidad de carga σ sea mayor, en los extremos o a lo largo de los lados más planos? Explique. [*Sugerencia*: Cerca de la superficie de un conductor, $E = \sigma/\epsilon_0$].
14. Si se conoce V en un punto del espacio, ¿se puede calcular $\vec{\mathbf{E}}$ en ese punto? Si se conoce $\vec{\mathbf{E}}$ en un punto del espacio, ¿se puede calcular V en ese punto? Si no, ¿qué más debe conocerse en cada caso?
15. Una esfera conductora tiene una carga Q y una segunda esfera conductora idéntica es neutra. La dos esferas están aisladas inicialmente, pero luego se ponen en contacto. *a*) ¿Qué puede decir del potencial en cada una de ellas cuando están en contacto? *b*) ¿Fluirá carga de una esfera a la otra? Si es así, ¿cuánto? *c*) Si las esferas no poseen el mismo radio, ¿cómo cambian sus respuestas a los incisos *a*) y *b*)?
16. En un punto dado, el campo eléctrico apunta hacia el norte. ¿En qué dirección o direcciones la tasa de cambio del potencial será *a*) mayor, *b*) menor y *c*) cero?
17. Se tienen líneas equipotenciales espaciadas por 1.00 V entre sí. ¿Le dicen algo las distancias entre las líneas en diferentes regiones del espacio sobre la magnitud relativa de $\vec{\mathbf{E}}$ en esas regiones? Si es así, ¿qué le dicen?
18. Si el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es uniforme en una región del espacio, ¿qué puede inferir acerca del potencial eléctrico V? Si V es uniforme en una región del espacio, ¿qué puede inferir acerca de $\vec{\mathbf{E}}$ en esa región?
19. La energía potencial eléctrica de un sistema formado por dos cargas con signos opuestos, ¿es positiva o negativa? ¿Y si las dos cargas son iguales? ¿Cuál es el significado del signo de la energía potencial en cada caso?

Problemas

23–1 Potencial eléctrico

1. (I) ¿Qué diferencia de potencial se necesita para frenar un electrón que tiene una velocidad inicial $v = 5.0 \times 10^5$ m/s?

2. (I) ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico para trasladar un protón de un punto con un potencial de +185 V a otro punto donde el potencial es de −55 V?

3. (I) Un electrón adquiere 5.25×10^{-16} J de energía cinética cuando es acelerado por un campo eléctrico de la placa A a la placa B. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas y cuál placa está a mayor potencial?

4. (II) El trabajo realizado por una fuerza externa para mover una carga de $-9.10\ \mu$C del punto a al punto b es de 7.00×10^{-4} J. Si la carga partió del reposo y tenía 2.10×10^{-4} J de energía cinética cuando llegó al punto b, ¿cuál debe ser la diferencia de potencial entre a y b?

23–2 Potencial relacionado con el campo eléctrico

5. (I) Por lo regular, las nubes de tormenta desarrollan diferencias de voltaje de cerca de 1×10^8 V. Puesto que se requiere un campo eléctrico de 3×10^6 V/m para producir una chispa eléctrica dentro de un volumen de aire, estime la longitud de un relámpago entre dos de estas nubes. [¿Puede darse cuenta de por qué cuando el relámpago llega desde una nube hacia la tierra, se propaga como una secuencia de pasos?]

6. (I) El campo eléctrico entre dos placas paralelas conectadas a una batería de 45 V es de 1300 V/m. ¿Cuál es la distancia de separación entre las placas?

7. (I) ¿Cuál es la cantidad de carga máxima que puede contener un conductor esférico de radio de 6.5 cm en el aire?

8. (I) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre dos placas paralelas separadas 4.0 mm si la diferencia de potencial entre ellas es de 110 V?

9. (I) ¿Cuál es el radio mínimo que debe tener una esfera conductora de una máquina generadora electrostática si habrá de estar a 35,000 V sin descargarse en el aire? ¿Cuál sería la carga que porta la esfera?

10. (II) Un fabricante afirma que una alfombra no generará más de 5.0 kV de estática. ¿Qué magnitud de carga debe transferirse entre la alfombra y un zapato para que haya una diferencia de potencial de 5.0 kV entre el zapato y la alfombra? Aproxime al zapato y la alfombra como grandes hojas de carga separadas una distancia de 1.0 mm.

11. (II) Un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}} = -4.20\,\text{N/C}\hat{\mathbf{i}}$ apunta en la dirección negativa de las x, como se observa en la figura 23-25. Se indican en el diagrama las coordenadas x y y de los puntos A, B y C (en metros). Determine las diferencias de potencial *a*) V_{BA}, *b*) V_{CB} y *c*) V_{CA}.

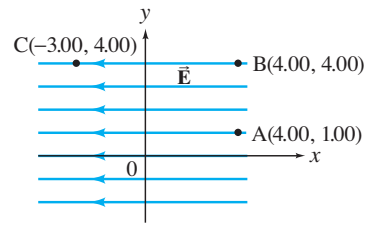


FIGURA 23–25
Problema 11.

12. (II) l potencial eléctrico de una placa de metal plana aislada muy grande es de V_0. La placa porta una densidad superficial de carga uniforme σ (C/m^2), o $\sigma/2$ en cada una de las dos superficies. Determine V a una distancia x de la placa. Considere que el punto x está lejos de los bordes y que x es mucho más pequeño que las dimensiones de las placas.

13. (II) Cerca de su superficie, la Tierra produce un campo eléctrico radial hacia el centro de magnitud de 150 V/m. *a*) ¿Cuál es el potencial de la superficie terrestre con respecto a $V = 0$ en $r = \infty$? *b*) Si el potencial de la Tierra se elige igual a cero, ¿cuál es el potencial en el infinito? (Ignore el hecho de que cargas positivas en la ionosfera cancelan aproximadamente la carga neta de la Tierra. ¿Cómo afectaría esto su respuesta anterior?)

14. (II) Se carga una esfera conductora de 32 cm de diámetro a 680 V con respecto a $V = 0$ en $r = \infty$. *a*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga σ? *b*) ¿A qué distancia el potencial de la esfera será sólo de 25 V?

15. (II) Un conductor esférico de radio r_1 aislado tiene una carga Q. Se conecta otra esfera conductora de r_2 e inicialmente descargada se conecta a la primera esfera mediante una alambre conductor largo. *a*) Después de que se efectúa la conexión, ¿qué puede usted decir acerca del potencial en cada esfera? *b*) ¿Cuánta carga se transfiere a la segunda esfera? Suponga que la separación entre las esferas es mucho mayor que sus radios. (¿Por qué debemos hacer esta suposición?)

16. (II) Determine la diferencia de potencial entre dos puntos que están a distancias R_a y R_b de un alambre recto muy largo ($\gg R_a$ o R_b) que porta una carga por unidad de longitud uniforme λ.

17. (II) Suponga que el extremo de su dedo está cargado. *a*) Estime el potencial de voltaje de ruptura en aire para su dedo. *b*) ¿Qué densidad superficial de carga tendría que haber en su dedo para producir este voltaje?

18. (II) Estime el campo eléctrico en la pared de la membrana de una célula viva. Considere que la pared tiene un espesor de 10 nm y una diferencia de potencial de 0.10 V a través de su superficie.

19. (II) Una esfera no conductora de radio r_0 tiene una carga total Q distribuida de manera uniforme sobre todo su volumen. Determine el potencial eléctrico como función de la distancia r desde el centro de la esfera para *a*) $r > r_0$ y *b*) $r < r_0$. Considere que $V = 0$ en $r = \infty$. *c*) Grafique V en función de r y E en función de r.

20. (III) Repita el problema 19 considerando que la densidad ρ_E se incrementa con el cuadrado de la distancia desde el centro de la esfera y que $\rho_E = 0$ en el centro.

21. (III) La densidad volumétrica de carga ρ_E dentro de una esfera de radio r_0 está dada por la siguiente relación con simetría esférica:

$$\rho_E(r) = \rho_0\left[1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right]$$

donde r se mide desde el centro de la esfera y ρ_0 es una constante. Determine el potencial eléctrico V para un punto P dentro de la esfera ($r < r_0$) considerando que $V = 0$ en el infinito.

22. (III) Un conductor esférico hueco, con carga neta $+Q$, tiene un radio interior r_1 y un radio exterior $r_2 = 2r_1$ (figura 23-26). En el centro de la esfera se encuentra una carga puntual de $+Q/2$. *a*) Determine la magnitud del campo eléctrico E en cada una de las tres regiones como función de r. Determine el potencial como función de r, la distancia desde el centro para *b*) $r > r_2$, *c*) $r_1 < r < r_2$ y *d*) $0 < r < r_1$. *e*) Grafique E y V como función de r desde $r = 0$ hasta $r = 2r_2$.

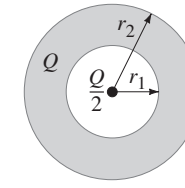


FIGURA 23–26
Problema 22.

23. (III) Un cilindro conductor muy largo (longitud ℓ) de radio R_0 ($R_0 \ll \ell$) porta una densidad superficial de carga uniforme σ (C/m^2). El cilindro está a un potencial eléctrico V_0. ¿Cuál es el potencial, en puntos lejanos, de los extremos a una distancia R desde el centro del cilindro? Dé la respuesta para *a*) $R > R_0$ y *b*) $R < R_0$. *c*) ¿Se cumple que $V = 0$ en $R = \infty$ (considere que $\ell = \infty$)? Explique.

23–3 Potencial debido a cargas puntuales

24. (I) Una carga puntual Q crea un potencial eléctrico de +185 V a una distancia de 15 cm. ¿Cuál es el valor de Q (considere $V = 0$ en $r = \infty$)?

25. (I) *a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico a 0.50×10^{-10} m de un protón (magnitud de carga $+e$)? Considere $V = 0$ en $r = \infty$. *b*) ¿Cuál es la energía potencial de un electrón en ese punto?

26. (II) Se colocan dos cargas puntuales, 3.4 μC y −2.0 μC, separadas 5.0 cm a lo largo del eje x. ¿En qué puntos a lo largo del eje x se cumple que *a*) el campo eléctrico es 0 y *b*) el potencial es cero? Considere que $V = 0$ en $r = \infty$.

27. (II) Se coloca una carga puntual de +25 μC a 6.0 cm de una carga idéntica. ¿Cuánto trabajo debe realizar una fuerza externa para mover una carga de prueba a +0.18 μC desde un punto a la mitad entre las cargas a otro punto 1.0 cm más cerca de alguna de las cargas?

28. (II) El punto *a* se encuentra a 26 cm al norte de una carga puntual de –3.8 μC y el punto *b* está a 36 cm al oeste de la carga (figura 23-27). Determine *a*) $V_b - V_a$ y *b*) $\vec{\mathbf{E}}_b - \vec{\mathbf{E}}_a$ (magnitud y dirección).

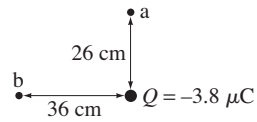


FIGURA 23–27
Problema 28.

29. (II) ¿Cuál es el voltaje que debe usarse para acelerar un protón (radio 1.2×10^{-15} m), de manera que tenga suficiente energía justo para "tocar" un núcleo de silicio? Un núcleo de silicio tiene una carga de $+14e$ y su radio es aproximadamente de 3.6×10^{-15} m. Considere los potenciales como cargas puntuales.

30. (II) Dos cargas puntuales idénticas de +5.5 μC están inicialmente separadas 6.5 cm una de la otra. Si se liberan al mismo tiempo, ¿qué tan rápido se estarán desplazando cuando se encuentren muy lejos una de la otra? Suponga que tienen masas iguales de 1.0 mg.

31. (II) Un electrón parte del reposo a 42.5 cm de una carga puntual fija con Q = –0.125 nC. ¿Qué tan rápido se estará desplazando el electrón cuando se encuentre muy lejos de la carga fija?

32. (II) Dos cargas de igual magnitud, pero de signos opuestos, están separadas una distancia d, como se muestra en la figura 23-28. Determine una expresión para $V_{BA} = V_B - V_A$ para puntos B y A entre la línea que une las cargas, situados como se indica en la figura.

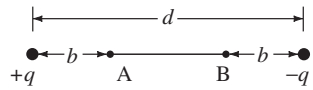


FIGURA 23–28
Problema 32.

23–4 Potencial debido a distribuciones de carga

33. (II) Un anillo circular delgado de radio R (como en la figura 23-14) tiene una carga $+Q/2$ distribuida de manera uniforme sobre la mitad superior y $-Q/2$ sobre la mitad inferior. *a*) ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico en un punto a una distancia x a lo largo del eje a través del centro del anillo? *b*) ¿Qué puede decir acerca del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ a una distancia x en ese punto? Considere $V = 0$ en $r = \infty$.

34. (II) Tres cargas puntuales se encuentran en las esquinas de un cuadrado de lado ℓ, como se representa en la figura 23-29. ¿Cuál es el potencial en la cuarta esquina (el punto A), considerando $V = 0$ a una gran distancia?

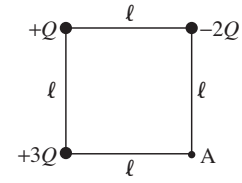


FIGURA 23–29
Problema 34.

35. (II) Un anillo plano de radio interior R_1 y radio exterior R_2 (figura 23-30) porta una densidad superficial de carga uniforme σ. Determine el potencial eléctrico en puntos a lo largo del eje (el eje x). [*Sugerencia:* Trate de sustituir variables].

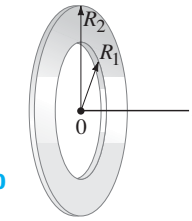


FIGURA 23–30
Problema 35.

36. (II) Una carga total Q está distribuida de manera uniforme sobre un hilo de longitud ℓ. El hilo forma un semicírculo. ¿Cuál es el potencial en el centro? (Considere que $V = 0$ a grandes distancias).

37. (II) Un anillo delgado de radio de 12.0 cm porta una carga de 15.0 μC distribuida de manera uniforme. Se coloca con exactitud en el centro una pequeña esfera de 7.5 g con una carga de 3.0 μC y se le da un pequeño empujón a lo largo del eje del anillo (el eje $+x$). ¿Qué tan rápido se estará desplazando la esfera cuando se encuentre a 2.0 m del centro del anillo (ignore la gravedad)?

38. (II) Una varilla delgada de longitud 2ℓ está centrada en el eje x, como se ilustra en la figura 23-31. La varilla tiene una carga Q distribuida de manera uniforme. Determine el potencial V como función de y para puntos situados a lo largo del eje y. Considere que $V = 0$ en el infinito.

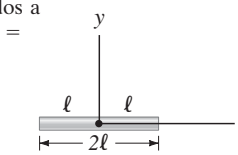


FIGURA 23–31
Problemas 38, 39, 40 y 53.

39. (II) Determine el potencial $V(x)$ para puntos a lo largo del eje x afuera de la varilla de la figura 23-31 (problema 38).

40. (III) La carga de la varilla de la figura 23-31 tiene una distribución lineal no uniforme dada por $\lambda = ax$. Determine el potencial V para *a*) puntos a lo largo del eje y y *b*) puntos a lo largo del eje x fuera de la varilla.

41. (III) Suponga que el disco circular plano de la figura 23-15 (ejemplo 23-9) tiene una densidad superficial de carga no uniforme $\sigma = aR^2$, donde R se mide desde el centro del disco. Encuentre el potencial $V(x)$ para puntos a lo largo del eje x, considerando $V = 0$ y $x = \infty$.

23–5 Equipotenciales

42. (I) Dibuje un conductor con la forma de un balón de fútbol americano. Este conductor porta una carga neta negativa $-Q$. También dibuje aproximadamente una docena de líneas de campo eléctrico y de líneas equipotenciales.

43. (II) Se deben dibujar superficies equipotenciales separadas cada 100 V cerca de una placa muy grande de metal, cargada de manera uniforme con densidad superficial de carga σ = 0.75 μC/m^2. ¿Qué tan lejos (espacialmente) se encuentran las superficies equipotenciales consecutivas?

44. (II) Una esfera de metal de radio r_0 = 0.44 m tiene una carga Q = 0.50 μC. Deben dibujarse superficies equipotenciales cada 100 V afuera de la esfera. Determine el radio r *a*) de la primera, *b*) de la décima y *c*) de la centésima superficie equipotencial.

23–6 Dipolos

45. (II) Calcule el potencial eléctrico debido a un pequeño dipolo cuyo momento dipolar es de 4.8×10^{-30} C·m en un punto alejado 4.1×10^{-9} m si este punto se encuentra *a*) a lo largo del eje del dipolo más cercano de la carga positiva; *b*) 45° sobre el eje del dipolo, pero más cerca de la carga positiva; *c*) 45° sobre el eje, pero más cerca de la carga negativa. Considere $V = 0$ en $r = \infty$.

46. (III) El momento dipolar, considerado como vector, apunta de la carga negativa a la carga positiva. La molécula de agua (figura 23-32) tiene un momento dipolar $\vec{\mathbf{p}}$ que puede considerarse como la suma de los dos momentos dipolares mostrados, $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_2$. La distancia entre el O y cada H es aproximadamente de 0.96×10^{-10} m, mientras que las líneas que unen el centro del O con cada H forman un ángulo de 104°, como se aprecia en la figura; de acuerdo con las mediciones, el momento dipolar neto es $p = 6.1 \times 10^{-30}$ C·m. *a*) Determine la carga efectiva q en cada átomo de H. *b*) Determine el potencial eléctrico, lejos de la molécula, debido a cada dipolo, $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_2$; luego, demuestre que

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2},$$

donde p es la magnitud del momento dipolar neto, $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$, y V es el potencial debido a $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_2$. Considere $V = 0$ en $r = \infty$.

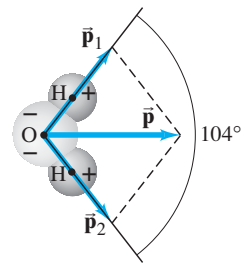


FIGURA 23–32
Problema 46.

23–7 Determinación de $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de V

47. (I) Demuestre que el campo eléctrico de una carga puntual sencilla (ecuación 21-4) se obtiene a partir de la ecuación 23-5, $V = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/r)$.

48. (I) ¿Cuál es el gradiente de potencial justo afuera de un núcleo de uranio ($Q = +92e$), cuyo diámetro es aproximadamente de 15×10^{-15} m.

49. (II) El potencial eléctrico entre dos placas paralelas está dado por $V(x) = (8.0\ \text{V/m})x + 5.0$ V, considerando $x = 0$ en una de las placas y x positiva en la dirección hacia la otra placa. ¿Cuál es la densidad de carga en las placas?

50. (II) El potencial eléctrico en una región del espacio varía como $V = by/(a^2 + y^2)$. Determine $\vec{\mathbf{E}}$.

51. (II) En cierta región del espacio, el potencial eléctrico está dado por $V = y^2 + 2.5xy - 3.5xyz$. Determine el vector de campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en esa región.

52. (II) Una partícula de polvo con masa de 0.050 g y carga de 2.0×10^{-6} C se encuentra en una región del espacio donde el potencial está dado por $V(x) = (2.0\ \text{V/m}^2)x^2 - (3.0\ \text{V/m}^3)x^3$. Si la partícula parte de $x = 2.0$ m, ¿cuál es la aceleración inicial de la carga?

53. (III) Use el resultado de los problemas 38 y 39 para determinar el campo eléctrico debido a la varilla con cargada uniforme de la figura 23-31 para puntos *a*) a lo largo del eje x y *b*) a lo largo del eje y.

23–8 Energía potencial electrostática; electrón volt

54. (I) ¿Cuál es el trabajo que debe realizarse para acercar tres electrones entre sí desde una distancia muy grande hasta 1.0×10^{-10} m uno de otro (en las esquinas de un triángulo equilátero)?

55. (I) ¿Qué diferencia de potencial se necesita para impartir a un núcleo de helio ($Q = 3.2 \times 10^{-19}$ C) 125 keV de energía cinética?

56. (I) ¿Cuál es la rapidez *a*) de un electrón de 1.5 keV (de energía cinética) y *b*) de un protón de 1.5 keV?

57. (II) Muchas reacciones químicas liberan energía. Suponga que al inicio de una reacción, un electrón y un protón están separados por 0.110 nm y que su separación final es de 0.100 nm. ¿Cuánta energía potencial se perdió en esta reacción (en unidades de eV)?

58. (II) Una partícula alfa (formada por un núcleo de helio, $Q = +2e$, $m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) se emite en un decaimiento radiactivo con una energía cinética de 5.53 MeV. ¿Cuál es su rapidez?

59. (II) Escriba la energía potencial electrostática total, U, de *a*) cuatro cargas puntuales y *b*) cinco cargas puntuales. Dibuje un diagrama que defina todas las cantidades implicadas.

60. (II) Cuatro cargas puntuales, Q, están fijas en las esquinas de un cuadrado de lado b. *a*) ¿Cuál es su energía potencial electrostática total? *b*) ¿Cuál es la energía potencial que tendría una quinta carga Q en el centro del cuadrado (con respecto a $V = 0$ en $r = \infty$)? *c*) Si la carga está restringida a permanecer en ese plano, ¿la carga se encuentra en equilibrio estable o inestable? Si es inestable, ¿cuál es la energía cinética máxima que puede adquirir? *d*) Si la carga que se encuentra en el centro es negativa ($-Q$), ¿está en equilibrio estable?

61. (II) Un electrón que parte del reposo adquiere 1.33 keV de energía cinética cuando se traslada del punto A al punto B. *a*) ¿Cuánta energía cinética adquirirá un protón que parte del reposo en B y se dirige al punto A? *b*) Determine la razón de sus velocidades al final de sus trayectorias respectivas.

62. (II) Determine la energía potencial electrostática total de una esfera conductora de radio r_0 que porta una carga total Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie.

63. (II) El **modelo de la gota líquida** del núcleo sugiere que las oscilaciones de alta energía de ciertos núcleos pueden partir (por fisión) un núcleo grande en dos fragmentos desiguales, más algunos cuantos neutrones. Con base en este modelo, considere un núcleo de uranio que se fisiona en dos fragmentos esféricos, uno con una carga $q_1 = +38e$ y radio $r_1 = 5.5 \times 10^{-15}$ m; el otro, con $q_2 = +54e$ y radio $r_2 = 6.2 \times 10^{-15}$ m. Calcule la energía potencial eléctrica (en MeV) de estos fragmentos, suponiendo que la carga está distribuida de manera uniforme en todo el volumen de cada núcleo esférico y que sus superficies están inicialmente en contacto y en reposo. Pueden ignorarse los electrones que rodean al núcleo. Esta energía potencial eléctrica luego se convertirá por completo en energía cinética, mientras los fragmentos se repelen entre sí. ¿Cómo se compara la energía cinética predicha de los fragmentos con el valor observado asociado con la fisión del uranio (aproximadamente 200 MeV en total)? [1 MeV = 10^6 eV].

64. (III) Determine la energía potencial electrostática total de una esfera no conductora de radio r_0 con una carga total Q distribuida de manera uniforme sobre todo su volumen.

*23–9 CRT

***65.** (I) Use el modelo de gas ideal para estimar la rapidez rms de un electrón libre en un metal a 273 K y a 2700 K (que es la temperatura común del cátodo en un CRT).

***66.** (III) Se usa un CRT para acelerar electrones con un potencial de 6.0 kV. La pantalla es de 28 cm de ancho y está a 34 cm de placas de desviación de 2.6 cm de largo. ¿Cuál es el intervalo de variación del campo eléctrico necesario para barrer el rayo completamente sobre la pantalla?

***67.** (III) En un CRT dado, los electrones se aceleran horizontalmente usando un potencial de 7.2 kV. Luego pasan a través de un campo eléctrico uniforme E por una distancia de 2.8 cm que los desvía hacia arriba, de manera que llegan a la parte superior de la pantalla que está a 22 cm de distancia y a 11 cm sobre el centro. Estime el valor de E.

Problemas generales

68. Si los electrones en una sola gota de lluvia de 3.5 mm de diámetro pudieran extraerse de la Tierra (sin extraer los núcleos de los átomos), ¿en cuánto se incrementaría el potencial de la Tierra?

69. Frotando un material no conductor se puede producir una carga de 10^{-8} C. Si se produce esto en una esfera de 15 cm de radio, estime el potencial producido en la superficie. Considere que $V = 0$ en $r = \infty$.

70. Dibuje las líneas de campo y las líneas equipotenciales para dos cargas del mismo signo y de la misma magnitud separadas una distancia d.

71. Una carga puntual de $+33\ \mu$C se coloca a 36 cm de otra carga idéntica. Se traslada una carga de $-1.5\ \mu$C del punto a al punto b de la figura 23-33. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial?

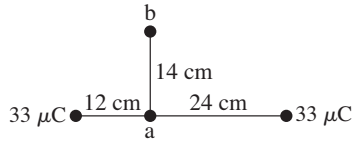


FIGURA 23–33
Problema 71.

72. Se coloca una carga puntual Q en cada una de las esquinas de un cubo de lado ℓ (figura 23-34). *a)* ¿Cuál es el potencial en el centro del cubo (con $V = 0$ en $r = \infty$)? *b)* ¿Cuál es el potencial en cada esquina debido a las otras siete cargas? *c)* ¿Cuál es la energía potencial total de este sistema?

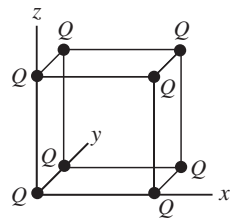


FIGURA 23–34
Problema 72.

73. En un cinescopio de televisión (CRT) se aceleran los electrones con miles de volts a través del vacío. Si un televisor yace sobre su parte posterior, ¿serán capaces los electrones de moverse hacia arriba en contra de la fuerza de gravedad? ¿Qué diferencia de potencial, actuando sobre una distancia de 3.5 cm, sería necesaria para equilibrar la fuerza de la gravedad hacia abajo de manera que un electrón permanezca estacionario? Considere que el campo eléctrico es uniforme.

74. Cuatro cargas puntuales se localizan en las esquinas de un cuadrado de 8.0 cm de lado. Los valores de las cuatro cargas son Q, $2Q$, $-3Q$, y $2Q$, donde $Q = 3.1\ \mu$C (figura 23-35). ¿Cuál es la energía potencial eléctrica total almacenada en este sistema, tomando $U = 0$ a una separación infinita?

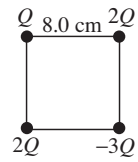


FIGURA 23–35
Problema 74.

75. En una **fotocelda**, luz ultravioleta (UV) proporciona suficiente energía para desprender electrones a altas velocidades de la superficie de una pieza de metal de bario. Véase la figura 23-36. Para medir la energía máxima de los electrones, otra placa arriba de la superficie de bario se mantiene a un potencial negativo suficiente, de manera que los electrones emitidos se frenan, se detienen y regresan a la superficie del bario. Si el voltaje de la placa es de -3.02 V (comparado con el bario) cuando los electrones se detienen, ¿cuál era la rapidez de esos electrones cuando fueron emitidos?

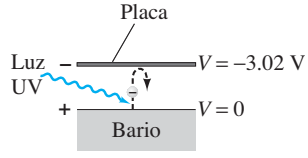


FIGURA 23–36
Problema 75.

76. Se acelera un electrón horizontalmente desde el reposo en un cinescopio de un televisor mediante una diferencia de potencial de 5500 V. Luego pasa entre dos placas horizontales de 6.5 cm de longitud y separadas 1.3 cm, que tienen una diferencia de potencial de 250 V (figura 23-37). ¿A qué ángulo θ viajará el electrón cuando abandone las placas?

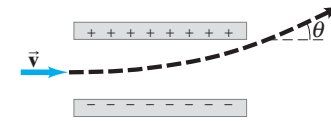


FIGURA 23–37
Problema 76.

77. La figura 23.38 muestra tres cargas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado ℓ. Determine el potencial en el punto medio en cada uno de los lados. Considere que $V = 0$ en $r = \infty$.

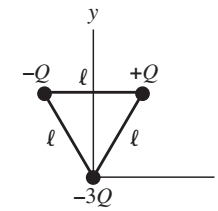


FIGURA 23–38
Problema 77.

78. Cerca de la superficie de la Tierra hay un campo eléctrico de aproximadamente 150 V/m dirigido hacia abajo. Se sueltan dos pelotas idénticas con masa $m = 0.340$ kg desde una altura de 2.00 m, pero una de las pelotas está cargada positivamente con $q_1 = 450\ \mu$C, mientras la segunda tiene carga negativa $q_2 = -450\ \mu$C. Con base en la conservación de la energía, determine las diferencias de las velocidades de las pelotas cuando llegan al piso. (Ignore la resistencia del aire).

79. Un relámpago transfiere 4.0 C de carga y 4.8 MJ de energía a la Tierra. *a)* ¿A través de qué diferencia de potencial viajó el relámpago? *b)* ¿Cuánta agua podría alcanzar la ebullición gracias a esta cantidad de energía partiendo de la temperatura ambiente? [*Sugerencia*: Véase el capítulo 19].

80. Determine las componentes del campo eléctrico, E_x y E_y, como función de x y y en el plano xy, debido a un dipolo (figura 23-39), a partir de la ecuación 23-7. Considere que $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \gg \ell$.

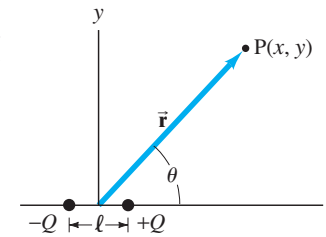


FIGURA 23–39
Problema 80.

81. Una esfera no conductora de radio r_2 contiene una cavidad esférica concéntrica de radio r_1. El material entre r_1 y r_2 posee una densidad de carga uniforme ρ_E (C/m^3). Determine el potencial V, con respecto a $V = 0$ en $r = \infty$, como función de la distancia r desde el centro para *a)* $r > r_2$, *b)* $r_1 < r < r_2$, *c)* $0 < r < r_1$. ¿Es V continuo en r_1 y en r_2?

82. Un disco no conductor plano delgado, de radio R_0 y carga Q, tiene una orificio de radio $R_0/2$ en su centro. Encuentre el potencial eléctrico $V(x)$ en puntos a lo largo del eje de simetría (x) del disco (una línea perpendicular al disco que pasa por su centro). Considere que $V = 0$ en $r = \infty$.

83. Para detectar las partículas con carga emitidas por un núcleo radiactivo se usa un **contador Geiger**. Éste consiste en un alambre central delgado, cargado positivamente y de radio R_a, rodeado por un cilindro conductor concéntrico de radio R_b con una carga negativa de la misma magnitud (figura 23-40). La carga por unidad de longitud en el alambre interno es l (en unidades de C/m). El espacio interior entre el alambre y el cilindro se llena con un gas inerte a baja presión. Partículas cargadas ionizan algunos de estos átomos de gas y los electrones libres resultantes son atraídos por el alambre central positivo. Si el campo eléctrico radial es lo suficientemente fuerte, los electrones libres ganan suficiente energía para ionizar otros átomos, causando una "avalancha" de electrones que golpean el alambre central generando así una señal "eléctrica". Encuentre una expresión para el campo eléctrico entre el alambre y el cilindro, luego demuestre que la diferencia de potencial entre R_a y R_b es

$$V_a - V_b = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right)\ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right).$$

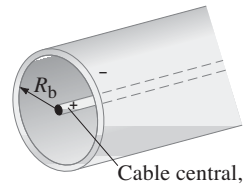


FIGURA 23–40
Problema 83.

84. Un **generador de Van de Graaff** (figura 23-41) puede desarrollar una diferencia de potencial muy grande, hasta millones de volts. Los electrones son arrancados del cinturón mediante un electrodo de alto voltaje con forma de punta situado en A, dejando así al cinturón cargado positivamente. (Recuerde el ejemplo 23-5 donde vimos que cerca de puntas afiladas se incrementa el campo eléctrico y puede ocurrir ionización.) El cinturón sube la carga positiva dentro del cascarón esférico donde los electrones de la gran esfera conductora son atraídos hacia el conductor con forma de punta situado en B, dejando la superficie externa de la esfera conductora cargada positivamente. Conforme se sube más carga, la esfera alcanza un voltaje sumamente alto. Considere un generador de Van de Graaff con una esfera de radio 0.20 m. *a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico sobre la superficie de la esfera cuando ocurre el rompimiento eléctrico? (Suponga que $V = 0$ en $r = \infty$). *b*) ¿Cuál es la carga sobre la esfera para el potencial encontrado en el inciso *a*)?

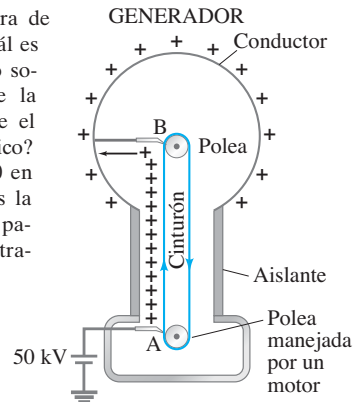


FIGURA 23–41
Problema 84.

85. El potencial en una región del espacio está dado por $V = B/(x^2 + R^2)^2$ donde $B = 150\ \text{V}\cdot\text{m}^4$ y $R = 0.20$ m. *a*) Determine V en $x = 0.20$ m. *b*) Determine $\vec{\mathbf{E}}$ como función de x. *c*) Calcule $\vec{\mathbf{E}}$ en $x = 0.20$ m.

86. Una carga $-q_1$ de masa m descansa sobre el eje y a una distancia b sobre el eje x. Dos cargas positivas de magnitud $+q_2$ están fijas sobre el eje x, una en $x = +a$ y la otra en $x = -a$, respectivamente (figura 23-42). Si se le da una velocidad inicial v_0 en la dirección y positiva a la carga $-q_1$, ¿cuál es el valor mínimo de v_0 de manera que la carga escape a un punto infinitamente lejano de las dos cargas positivas?

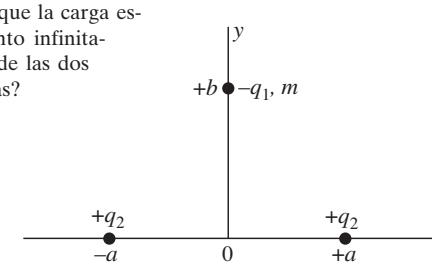


FIGURA 23–42
Problema 86.

*Problemas numéricos/por computadora.

***87.** (II) Un dipolo está compuesto por una carga de –1.0 nC en $x = -1.0$ cm y una carga de +1.0 nC en $x = +1.0$ cm. *a*) Construya una gráfica de V como función de x desde $x = 2.0$ cm hasta $x = 15$ cm. *b*) En la misma gráfica, dibuje V usando la ecuación 23-7 desde $x = 2.0$ cm hasta $x = 15$ cm. Considere que $V = 0$ en $x = \infty$.

***88.** (II) Un disco plano delgado de radio R_0 tiene una carga total Q distribuida uniformemente sobre su superficie. El potencial eléctrico a una distancia x sobre el eje x está dado por

$$V(x) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}\left[(x^2 + R_0^2)^{\frac{1}{2}} - x\right].$$

(Véase el ejemplo 23-9.) Demuestre que el campo eléctrico a una distancia x sobre el eje x está dado por

$$E(x) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}\left(1 - \frac{x}{(x^2 + R_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Construya gráficas de $V(x)$ y $E(x)$ como función de x/R_0 para $x/R_0 = 0$ hasta 4. (Efectúe los cálculos con incrementos de 0.1.) Use $Q = 5.0\ \mu\text{C}$ y $R_0 = 10$ cm para los cálculos y las gráficas.

***89.** (III) Usted está tratando de determinar una cantidad desconocida de carga usando un voltímetro y una regla, sabiendo sólo que la fuente de carga es una sola hoja, o bien, una carga puntual. Usted determina la dirección del cambio máximo de potencial y luego mide potenciales a lo largo de una línea en esa dirección. El potencial *versus* la posición se midió como sigue (observe que el cero de la posición es arbitrario y que el potencial se midió con respecto a tierra):

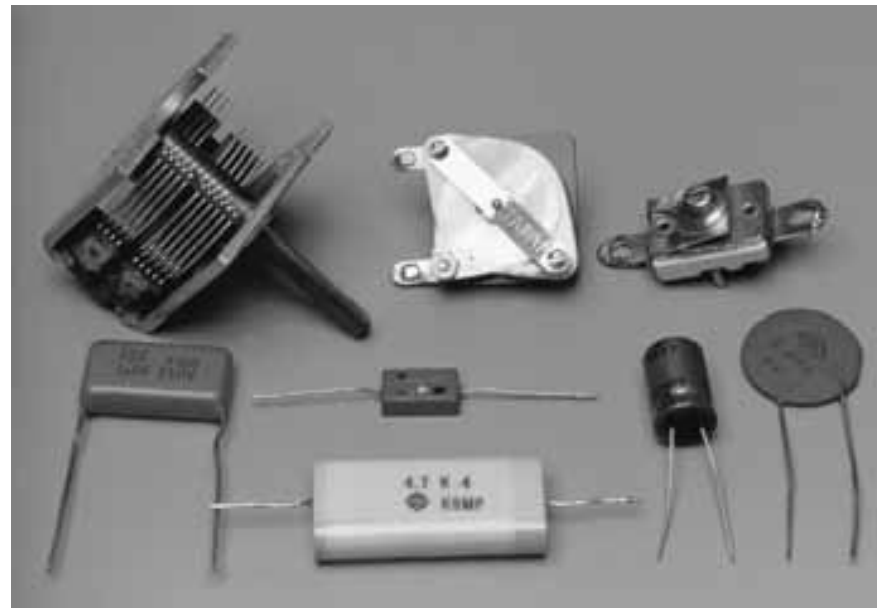
x (cm)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
V (volts)	3.9	3.0	2.5	2.0	1.7	1.5	1.4	1.4	1.2	1.1

a) Grafique V contra la posición. ¿Considera que el campo está producido por una hoja de carga o por una carga puntual? *b*) Grafique los datos de manera que pueda determinar la magnitud de la carga. *c*) ¿Es posible determinar dónde está la carga a partir de este dato? Si es así, indique la posición de la carga.

Respuestas a los ejercicios

A: *b*).
B: *d*).
C: *d*).
D: *a*) iii, (*b*) i, (*c*) i.
E: *c*).
F: *d*).

Los capacitores se presentan en una amplia variedad de formas y tamaños (aquí se observan sólo unos cuantos tipos). Un capacitor está formado básicamente por dos conductores que no se tocan y, por lo tanto, pueden almacenar cargas eléctricas opuestas en sus dos conductores. Los capacitores se usan en diversidad de circuitos, como se verá en éste y en los siguientes capítulos.



CAPÍTULO 24

Capacitancia, dieléctricos y almacenamiento de energía eléctrica

CONTENIDO

24–1 Capacitores
24–2 Cálculo de la capacitancia
24–3 Capacitores en serie y en paralelo
24–4 Almacenamiento de energía eléctrica
24–5 Dieléctricos
*24–6 Descripción molecular de los dieléctricos

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Hay una diferencia de potencial V entre dos placas paralelas cercanas entre sí que portan cargas opuestas, $+Q$ y $-Q$. ¿Cuál de las siguientes acciones no incrementa la magnitud de la carga que usted puede poner sobre las placas?

a) Aumentar el tamaño de las placas.
b) Alejar las placas entre sí.
c) Llenar con papel el espacio entre las placas.
d) Aumentar la diferencia de potencial fijo V.
e) Ninguna de las anteriores.

En este capítulo completaremos nuestro estudio de la electrostática. El capítulo se refiere, en particular, a un dispositivo muy importante, el capacitor, que se utiliza en muchos circuitos electrónicos. También analizaremos el almacenamiento de energía eléctrica y los efectos de un aislante (es decir, un dieléctrico) sobre campos eléctricos o diferencias de potencial.

24–1 Capacitores

FÍSICA APLICADA
Uso de capacitores

Un **capacitor** es un aparato que sirve para almacenar energía eléctrica; por lo general, consiste en dos objetos conductores (placas u hojas), colocados uno cerca del otro, pero sin tocarse. Los capacitores son ampliamente utilizados en circuitos electrónicos. Permiten almacenar energía eléctrica que habrá de usarse posteriormente (por ejemplo, en el *flash* de una cámara fotográfica y para almacenar energía en computadoras

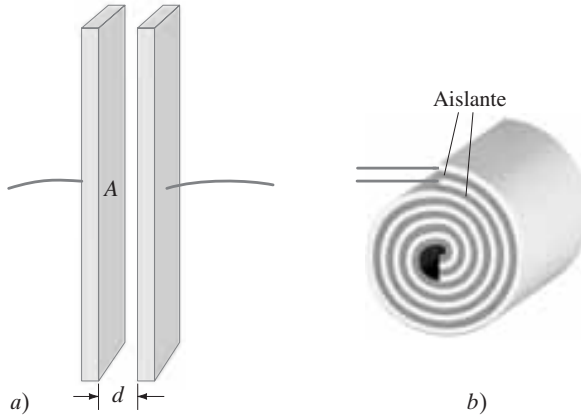


FIGURA 24–1 Diagramas de capacitores *a*) de placas paralelas y *b*) cilíndrico (placas paralelas enrolladas).

cuando falla la corriente eléctrica). Los capacitores también sirven para bloquear picos de carga y energía con la finalidad de proteger circuitos. Las computadoras usan capacitores muy delgados para la memoria de "unos" y "ceros" del código binario en la memoria de acceso aleatorio (RAM). Los capacitores tienen muchas otras aplicaciones, algunas de las cuales estudiaremos en este capítulo.

Un capacitor simple consiste en un par de placas paralelas de área A separadas por una pequeña distancia d (figura 24-1a). Por lo general, las dos placas están enrolladas en forma de cilindro con papel, plástico u otro aislante para separar las placas (figura 24-1b). En un diagrama, el símbolo

[símbolo de capacitor]

representa un capacitor. Una batería, la cual es una fuente de voltaje, se indica con el símbolo

[símbolo de batería]

con lados desiguales.

Si se aplica un voltaje a través de un capacitor conectando el capacitor a una batería mediante cables conductores, como el de la figura 24-2, las dos placas se cargan rápidamente: una placa adquiere carga negativa y la otra una carga positiva de la misma magnitud. Cada terminal de la batería y la placa del capacitor conectada a ella están al mismo potencial, así que el voltaje completo de la batería aparece a través del capacitor. Para un capacitor dado, se encuentra que la cantidad de carga Q que adquiere una de las placas es proporcional a la magnitud de la diferencia de potencial V entra las placas

$$Q = CV. \qquad \textbf{(24–1)}$$

La constante de proporcionalidad C, en la relación anterior, se llama la **capacitancia** del capacitor. La unidad de capacitancia es el coulomb entre volt, y recibe el nombre de **farad** (F). Los capacitores ordinarios tienen una capacitancia en el intervalo de 1 pF (picofarad = 10^{-12} F) a 10^3 μF (microfarad = 10^{-6} F). La relación representada por la ecuación 24-1 fue propuesta inicialmente por Alejandro Volta a fines del siglo XVIII. En general, la capacitancia C no depende de Q ni de V. Su valor depende del tamaño, la forma y la posición relativa entre los dos conductores, así como del material que los separa.

En la ecuación 24-1, de ahora en adelante, usaremos simplemente V (en itálicas) para representar la diferencia de potencial, en vez de V_{ba}, ΔV o $V_b - V_a$, como lo hicimos en capítulos anteriores. [Tenga cuidado de no confundir V y C (en itálicas), que representan voltaje y capacitancia, respectivamente, con V y C (en caracteres normales), que se refieren a las unidades de volt y coulomb, respectivamente].

EJERCICIO A La figura 24-3 muestra gráficas de carga contra voltaje para tres capacitores: A, B y C. ¿Cuál tiene la mayor capacitancia?

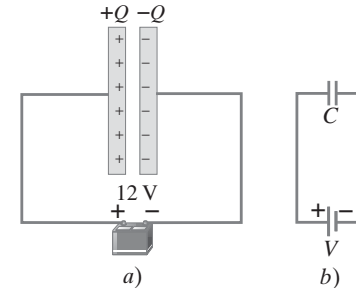
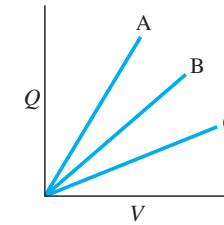


FIGURA 24–2 *a*) Capacitor de placas paralelas conectado a una batería y *b*) El mismo circuito con los símbolos correspondientes.

FIGURA 24–3 Ejercicio A.



CUIDADO

De aquí en adelante, V = diferencia de potencial

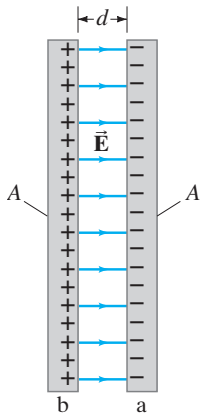


FIGURA 24–4 Capacitor de placas paralelas cuyas placas tienen área A. Ignoramos la curvatura del campo cercano a los bordes.

24–2 Cálculo de la capacitancia

La capacitancia de un capacitor dado puede determinarse en forma experimental directamente de la ecuación 24-1, si se mide la carga Q en cualquiera de los conductores para una diferencia de potencial dada V.

Para un capacitor con una geometría sencilla, es posible calcular C de manera analítica. En esta sección consideraremos que los conductores están separados por vacío o por aire. Primero determinamos C para un capacitor de placas paralelas (véase la figura 24-4). Cada uno de los dos conductores tiene una área A y están separados entre sí por una distancia d. Consideramos que d es pequeña en comparación con las dimensiones de cada placa, así que el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es uniforme entre las placas y nos permite ignorar efectos de borde en las orillas (es decir, desconocemos si las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ son rectas). Ya vimos (en el ejemplo 21-13) que el campo eléctrico entre dos placas planas cercanas tiene una magnitud $E = \sigma/\epsilon_0$ y que su dirección es perpendicular a las placas. Ya que σ es la carga por unidad de área, $\sigma = Q/A$, así que el campo entre las placas es

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}.$$

La relación entre el campo eléctrico y el potencial eléctrico, dada por la ecuación 23-4a, es

$$V = V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}.$$

Podemos realizar la integral de línea a lo largo de una trayectoria que sea antiparalela a las líneas del campo, de la placa a a la placa b, así que $\theta = 180°$ y $\cos 180° = -1$. Por lo tanto,

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b E\, d\ell \cos 180° = +\int_a^b E\, d\ell = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\int_a^b d\ell = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}.$$

Esta ecuación relaciona Q con V; a partir de ella, es posible obtener la capacitancia C en términos de la geometría de las placas.

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \qquad \text{[capacitor de placas paralelas]} \qquad \textbf{(24–2)}$$

Observe, a partir de la ecuación 24-2, que el valor de C no depende de Q ni de V; por lo mismo, predecimos que Q es proporcional a V, tal como se encuentra experimentalmente.

EJEMPLO 24–1 **Cálculos para un capacitor.** *a*) Calcule la capacitancia de un capacitor de placas paralelas cuyas placas miden 20 cm × 3.0 cm y están separadas por un hueco de aire de 1.0 mm de espesor. *b*) ¿Cuál es la carga en cada placa si se conecta una batería de 12 V a través de las dos placas? *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas? *d*) Estime el área requerida de las placas para conseguir una capacitancia de 1 F, dada la misma separación de aire d.

PLANTEAMIENTO Encontramos la capacitancia usando la ecuación 24-2, $C = \epsilon_0 A/d$. La carga en cada placa se obtiene a partir de la definición de capacitancia (ecuación 24-1): $Q = CV$. El campo eléctrico es uniforme, así que podemos usar la ecuación 23-4b para calcular la magnitud del campo eléctrico, $E = V/d$. En *d*) empleamos de nuevo la ecuación 24-2.

SOLUCIÓN *a*) El área es $A = (20 \times 10^{-2}\,\text{m})(3.0 \times 10^{-2}\,\text{m}) = 6.0 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$. Por lo tanto, la capacitancia C es

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)\frac{6.0 \times 10^{-3}\,\text{m}^2}{1.0 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 53\,\text{pF}.$$

b) La carga en cada placa es

$$Q = CV = (53 \times 10^{-12}\,\text{F})(12\,\text{V}) = 6.4 \times 10^{-10}\,\text{C}.$$

c) De acuerdo con la ecuación 23-4b para un campo eléctrico uniforme, la magnitud de E es

$$E = \frac{V}{d} = \frac{12\,\text{V}}{1.0 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 1.2 \times 10^4\,\text{V/m}.$$

d) Podemos despejar A en la ecuación 24-2, así como sustituir $C = 1.0$ F y $d = 1.0$ mm; encontramos que es necesario que las placas tengan una área de

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} \approx \frac{(1\,\text{F})(1.0 \times 10^{-3}\,\text{m})}{(9 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} \approx 10^8\,\text{m}^2.$$

NOTA Ésta es el área de un cuadrado de 10^4 m o 10 km de lado. ¡Lo anterior equivale al tamaño de una ciudad como San Francisco o Boston! Los capacitores de grandes capacitancias no serán simples placas paralelas.

EJERCICIO B Dos placas circulares de 5.0 cm de radio están separadas por un hueco de aire de 0.10 mm. ¿Cuál es la magnitud de la carga en cada una de las placas cuando se conecta el capacitor a una batería de 12 V?

No hace mucho tiempo era inusual encontrar capacitancias mayores que unos cuantos mF. Actualmente se pueden conseguir capacitores con 1 o 2 F, que, sin embargo, tienen apenas unos cuantos centímetros de lado. Estos capacitores se usan para almacenar energía, por ejemplo, en la memoria de las computadoras y de los aparatos electrónicos donde se mantienen la hora y la fecha a través de un flujo de carga muy pequeño. [Los capacitores son superiores a las baterías recargables en este sentido, porque pueden recargarse más de 10^5 veces sin sufrir degradación.] Tales capacitores de alta capacitancia se fabrican usando carbón "activado", el cual tiene una alta porosidad, así que su área superficial es muy grande. Un décimo de gramo de carbón activado puede tener una área superficial de 100 m^2. Más aún, las cargas iguales y opuestas existen en una "capa doble" de carga de 10^{-9} m de espesor. Así que una capacitancia de 0.1 g de carbón activado, cuya área interna puede ser de 10^2 m^2, es equivalente a un capacitor de placas paralelas con $C \approx \epsilon_0 A/d = (8.85 \times 10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)(10^2\,m^2)/(10^{-9}\,m) \approx 1\,F$.

Algunos teclados de computadora operan con capacitores. Como se ilustra en la figura 24-5, cada tecla está conectada a la placa superior de un capacitor. Cuando se presiona la tecla, la placa superior se mueve hacia abajo, lo que reduce la separación entre capacitores de placas e incrementa la capacitancia (ecuación 24-2; menor d, mayor C). El *cambio* en la capacitancia da por resultado una señal eléctrica que es detectada por un circuito electrónico.

La proporcionalidad, $C \propto A/d$ en la ecuación 24-2, también es válida para un capacitor de placas paralelas enrollado en un cilindro, como el de la figura 24-1b. Sin embargo, el factor constante, ϵ_0, debe sustituirse si hay un aislante que separa las placas —como papel, por ejemplo—, factor que se analiza en la sección 24-5. Para un capacitor cilíndrico verdadero —que consiste en dos cilindros largos coaxiales—, el resultado es algo diferente, como veremos en el siguiente ejemplo.

FÍSICA APLICADA
Capacitancia muy alta

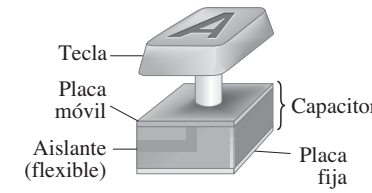


FIGURA 24–5 Tecla del teclado de una computadora. Al apretar la tecla se reduce el espacio entre las placas del capacitor, incrementando la capacitancia, lo cual puede detectarse electrónicamente.

FÍSICA APLICADA
Tecla de computadora

EJEMPLO 24–2 **Capacitor cilíndrico.** Un capacitor cilíndrico consiste en un cilindro (o alambre) de radio R_b rodeado de un cascarón cilíndrico coaxial de radio interior R_a (figura 24-6a). Ambos cilindros tienen longitud ℓ, la cual se considera mucho más grande que la separación entre los cilindros $R_a - R_b$, así que podemos ignorar los efectos de borde. Se carga el capacitor (conectándolo a una batería), de manera que un cilindro adquiere una carga $+Q$ (digamos, el cilindro interior) y el otro, una carga $-Q$. Calcule una expresión para la capacitancia.

PLANTEAMIENTO Para obtener $C = Q/V$, necesitamos determinar la diferencia de potencial V entre los cilindros en términos de Q. Podemos usar nuestro resultado (ejemplos 21-11 o 22-6) para el campo eléctrico afuera de un alambre largo, el cual está dirigido radialmente hacia fuera y tiene una magnitud $E = (1/2\pi\epsilon_0)(\lambda/R)$, donde R es la distancia desde el eje y λ es la carga por unidad de longitud, Q/ℓ. Entonces, $E = (1/2\pi\epsilon_0)(Q/\ell R)$ para puntos entre los cilindros.

SOLUCIÓN Para obtener la diferencia del potencial V en términos de Q, usamos este resultado para E en la ecuación 23-4a, $V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$, luego, escribimos la integral de línea desde el cilindro exterior hasta el interior (así que $V > 0$) a lo largo de una línea radial:†

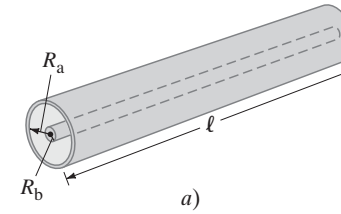
$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\int_{R_a}^{R_b}\frac{dR}{R}$$
$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\ln\frac{R_b}{R_a} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\ln\frac{R_a}{R_b}.$$

Q y V son proporcionales, mientras que la capacitancia es

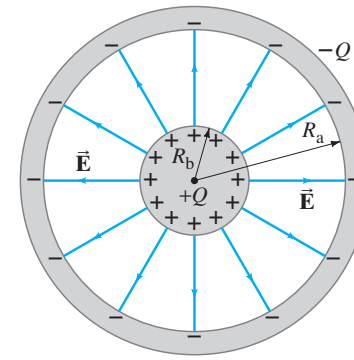
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln(R_a/R_b)}. \qquad \text{[capacitor cilíndrico]}$$

NOTA Si el espacio entre los cilindros $R_a - R_b = \Delta R$ es pequeño, tenemos $\ln(R_a/R_b) = \ln[(R_b + \Delta R)/R_b] = \ln[1 + \Delta R/R_b] \approx \Delta R/R_b$ (véase el apéndice A-3), así que $C \approx 2\pi\epsilon_0\ell R_b/\Delta R = \epsilon_0 A/\Delta R$ porque el área del cilindro b es $A = 2\pi R_b\ell$. Ésta es precisamente la ecuación 24-2 ($d = \Delta R$), lo cual confirma nuestro resultado.

FIGURA 24–6 *a*) Un capacitor cilíndrico consiste en dos conductores cilíndricos coaxiales. *b*) Se muestran las líneas de campo en la vista de corte transversal.



a)



b)

EJERCICIO C ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud de un capacitor cilíndrico con radios R_a = 2.5 mm y R_b = 0.40 mm? *a*) 30 pF/m; *b*) –30 pF/m; *c*) 56 pF/m; *d*) –56 pF/m; *e*) 100 pF/m; *f*) –100 pF/m.

†Observe que $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia fuera en la figura 24-6b, pero $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ apunta hacia dentro para la dirección de integración que hemos elegido; el ángulo entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es de 180° y cos 180° = –1. También, $d\ell = -dr$, porque dr aumenta hacia fuera. Estos dos signos menos se cancelan.

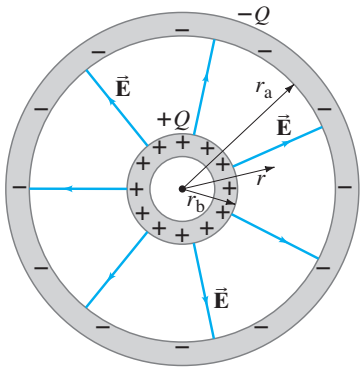


FIGURA 24–7 Corte transversal a través del centro de un capacitor esférico. El cascarón interior delgado tiene radio r_b; el cascarón exterior delgado tiene radio r_a.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Concordancia en un caso límite

EJEMPLO 24–3 **Capacitor esférico.** Un capacitor esférico consiste en dos cascarones conductores esféricos concéntricos delgados, de radios r_a y r_b, como se muestra en la figura 24-7. El capacitor interior tiene una carga Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie; el cascarón exterior tiene una carga igual, pero de signo contrario, $-Q$. Determine la capacitancia de los dos cascarones.

PLANTEAMIENTO En el ejemplo 22-3 usamos la ley de Gauss para mostrar que el campo eléctrico afuera de una esfera conductora cargada uniformemente es $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ como si toda la carga estuviera concentrada en su centro. Ahora utilizaremos la ecuación 23-4a, $V = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$.

SOLUCIÓN Integramos la ecuación 23-4a a lo largo de una línea radial para obtener la diferencia de potencial entre los dos cascarones conductores.

$$V_{ba} = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r_a - r_b}{r_a r_b}\right).$$

Por último,

$$C = \frac{Q}{V_{ba}} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{r_a r_b}{r_a - r_b}\right).$$

NOTA Si la separación $\Delta r = r_a - r_b$ es muy pequeña, entonces $C = 4\pi\epsilon_0 r^2/\Delta r \approx \epsilon_0 A/\Delta r$ (dado que $A = 4pr^2$), que es la ecuación para las placas paralelas (ecuación 24-2).

Es posible también considerar la capacitancia C de un conductor aislado sencillo. En este caso, C también puede definirse como la razón de la carga al potencial absoluto V sobre el conductor (con respecto a $V = 0$ en $r = \infty$), así que la relación

$$Q = CV$$

sigue siendo válida. Por ejemplo, el potencial de una esfera conductora sencilla de radio r_b puede obtenerse de nuestros resultados en el ejemplo 24-3, haciendo que r_a sea infinitamente grande. Conforme $r_a \to \infty$, entonces

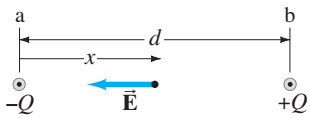
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_b};$$

de manera que su capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 r_b.$$

En algunos casos prácticos, un conductor sencillo puede estar cerca de otros conductores o de la Tierra (que se pensaría como la otra "placa" del capacitor), los cuales afectarán el valor de la capacitancia.

FIGURA 24–8 Ejemplo 24–4.



EJEMPLO 24–4 **Capacitancia de dos alambres largos paralelos.** Estime la capacitancia por unidad de longitud de dos alambre rectos muy largos, cada uno de radio R, con cargas uniformes $+Q$ y $-Q$, que están separados una distancia d, la cual es grande en comparación con R ($d \gg R$) (figura 24-8).

PLANTEAMIENTO Calculamos la diferencia de potencial entre los alambres considerando el campo eléctrico en cualquier punto entre ellos como la superposición de los dos campos creados por cada uno de los alambres. (El campo eléctrico dentro de cada alambre conductor es 0).

SOLUCIÓN El campo eléctrico afuera de un conductor largo y recto lo dedujimos en los ejemplos 21-11 y 22-6; además, vimos que es radial y está dado por $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 x)$ donde λ es la carga por unidad de longitud, $\lambda = Q/\ell$. El campo eléctrico total a una distancia x del alambre izquierdo en la figura 24-8 tiene una magnitud

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d - x)},$$

y apunta a la izquierda (de + a –). Ahora encontramos la diferencia de potencial entre los dos alambres usando la ecuación 23-4a e integrando a lo largo de una línea

recta, desde la superficie del alambre negativo hasta la superficie del alambre positivo, tomando en cuenta que $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ apuntan en direcciones opuestas ($\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} < 0$):

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right) \int_R^{d-R} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(d-x)}\right] dx$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right) [\ln(x) - \ln(d-x)] \Big|_R^{d-R}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right) [\ln(d-R) - \ln R - \ln R + \ln(d-R)]$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\right) [\ln(d-R) - \ln(R)] \approx \left(\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\right) [\ln(d) - \ln(R)].$$

ya que $d \gg R$, tenemos

$$V \approx \left(\frac{Q}{\pi\epsilon_0 \ell}\right) \left[\ln\left(\frac{d}{R}\right)\right].$$

La capacitancia a partir de la ecuación 24-1 es $C = Q/V \approx (\pi\epsilon_0 \ell)/\ln(d/R)$, así que la capacitancia por unidad de longitud está dada aproximadamente por

$$\frac{C}{\ell} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/R)}.$$

24–3 Capacitores en serie y en paralelo

Los capacitores se encuentran en muchos circuitos eléctricos. Por circuito eléctrico entendemos una trayectoria cerrada de conductores —generalmente alambres que conectan capacitores u otros dispositivos— por los cuales puede fluir carga y que incluyen una fuente de voltaje, como una batería, por ejemplo. El voltaje de la batería por lo general se representa con el símbolo V, lo que significa que V representa una *diferencia* de potencial. Se pueden conectar capacitores entre sí de distintas maneras. Las formas más comunes son en *serie* o en *paralelo*, las cuales explicaremos a continuación.

La figura 24-9 ilustra un circuito que contiene tres capacitores conectados en **paralelo**. Están en "paralelo" porque cuando se conecta una batería de voltaje V a los puntos a y b, este voltaje $V = V_{ab}$ existe a través de cada uno de los capacitores. Esto es, ya que todas las placas del lado izquierdo de todos los capacitores se conectan mediante conductores, se encuentran al mismo potencial V_a cuando se conectan a la batería; de igual modo, las placas del lado derecho de cada capacitor están al mismo potencial V_b. Cada placa de capacitor adquiere una carga dada por $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$ y $Q_3 = C_3V$. La carga total Q que debe abandonar la batería es, por lo tanto,

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1V + C_2V + C_3V.$$

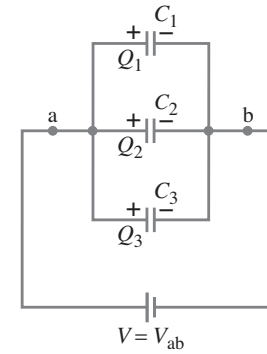


FIGURA 24–9 Capacitores en paralelo: $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$.

Encontremos un capacitor equivalente único con la misma carga Q al mismo voltaje $V = V_{ab}$. Éste tendría una capacitancia C_{eq} dada por

$$Q = C_{eq}V.$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores tenemos,

$$C_{eq}V = C_1V + C_2V + C_3V = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

o

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3. \qquad \text{[en paralelo]} \quad \textbf{(24–3)}$$

El efecto neto de conectar capacitores en paralelo es *incrementar* la capacitancia. Lo anterior tiene sentido porque básicamente estamos incrementando el área de las placas donde puede acumularse carga (véase, por ejemplo, la ecuación 24-2).

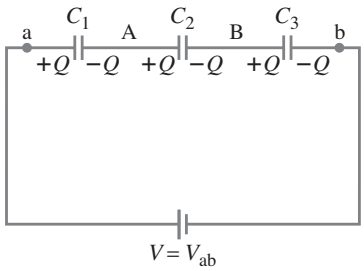


FIGURA 24–10 Capacitores en serie:
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Los capacitores también pueden conectarse en **serie**; esto es, extremo con extremo, como se observa en la figura 24-10. Una carga $+Q$ fluye de la batería a una de las placas de C_1, y una carga $-Q$ fluye a una de las placas de C_3. Las regiones A y B entre los capacitores estaban inicialmente neutras, así que la carga neta debe ser cero. La carga $+Q$ en la placa izquierda de C_1 atrae una carga $-Q$ en la placa opuesta. Como la región A debe tener una carga neta cero, hay, por lo tanto, una carga $+Q$ en la placa izquierda de C_2. La misma consideración se aplica a los otros capacitores; así, vemos que la carga en cada capacitor posee el mismo valor Q. Un capacitor sencillo capaz de remplazar estos tres capacitores en serie sin afectar el circuito (esto es, con los mismos valores de Q y V) tendría una capacitancia equivalente C_{eq}, donde

$$Q = C_{eq}V.$$

Ahora, el voltaje total V a través de los tres capacitores en serie debe ser igual a la suma de los voltajes a través de cada capacitor:

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

También se cumple para cada capacitor que $Q = C_1V_1$, $Q = C_2V_2$ y $Q = C_3V_3$, así que sustituimos V, V_1, V_2 y V_3 en la última ecuación y obtenemos

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

o

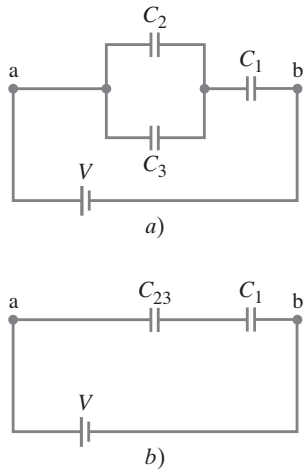
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \qquad \text{[en serie]} \quad \textbf{(24–4)}$$

Observe que la capacitancia equivalente C_{eq} es menor que la capacitancia más pequeña utilizada.

EJERCICIO D Considere dos capacitores idénticos $C_1 = C_2 = 10\ m$F. ¿Cuáles son la capacitancia mínima y máxima que pueden obtenerse conectando estos capacitores en combinaciones en serie o en paralelo? *a*) 0.2 μF, 5 μF; *b*) 0.2 μF, 10 μF; *c*) 0.2 μF, 20 μF; *d*) 5 μF, 10 μF; *e*) 5 μF, 20 μF; *f*) 10 μF, 20 μF.

De la misma manera, es posible analizar otras conexiones de capacitores usando conservación de carga y, en general, simplemente en términos de conexiones en serie o en paralelo.

FIGURA 24–11 Ejemplos 24–5 y 24–6.



EJEMPLO 24–5 **Capacitancia equivalente.** Determine la capacitancia de un capacitor sencillo que tendría el mismo efecto que la combinación mostrada en la figura 24-11a. Considere que $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

PLANTEAMIENTO Primero encontramos la capacitancia equivalente de C_2 y C_3 en paralelo, luego consideramos esta capacitancia en serie con C_1.

SOLUCIÓN Los capacitores C_2 y C_3 están conectados en paralelo, así que son equivalentes a un capacitor único con capacitancia

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 2C.$$

Esta C_{23} se encuentra en serie con C_1 (figura 24-11b), así que la capacitancia equivalente del circuito completo, C_{eq}, está dada por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{3}{2C}.$$

En consecuencia, la capacitancia equivalente de la combinación total es $C_{eq} = \frac{2}{3}C$, y es menor que cualquiera de las capacitancias que contribuyen, $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

EJEMPLO 24–6 **Carga y voltaje en capacitores.** Determine la carga en cada capacitor de la figura 24-11a del ejemplo 24-5 y los voltajes a través de cada capacitor, considerando que $C = 3.0\,\mu\text{F}$ y que el voltaje de la batería es $V = 4.0\,\text{V}$.

PLANTEAMIENTO Tenemos que trabajar en sentido "inverso" a través del ejemplo 24-5. Esto es, encontramos la carga Q que abandona la batería usando la capacitancia equivalente, luego encontramos la carga en cada capacitor por separado y el voltaje a través de cada uno. En cada paso utilizamos la ecuación 24-1, $Q = CV$.

SOLUCIÓN La batería de 4.0 V se comporta como si estuviera conectada a una capacitancia $C_{\text{eq}} = \frac{2}{3}C = \frac{2}{3}(3.0\,\mu\text{F}) = 2.0\,\mu\text{F}$. En consecuencia, la carga Q que abandona la batería, usando la ecuación 24-1, es

$$Q = CV = (2.0\,\mu\text{F})(4.0\,\text{V}) = 8.0\,\mu\text{C}.$$

De acuerdo con la figura 24-11a, esta carga llega a la placa negativa de C_1, así que $Q_1 = 8.0\,\mu\text{C}$. La carga Q que abandona la placa positiva de la batería se divide en partes iguales entre C_2 y C_3 (por simetría: $C_2 = C_3$) y es $Q_2 = Q_3 = \frac{1}{2}Q = 4.0\,\mu\text{C}$. Por ello, los voltajes a través de C_2 y C_3 deben ser los mismos. El voltaje a través de cada capacitor se obtiene con $V = Q/C$. Así que

$$\begin{aligned} V_1 &= Q_1/C_1 = (8.0\,\mu\text{C})/(3.0\,\mu\text{F}) = 2.7\,\text{V} \\ V_2 &= Q_2/C_2 = (4.0\,\mu\text{C})/(3.0\,\mu\text{F}) = 1.3\,\text{V} \\ V_3 &= Q_3/C_3 = (4.0\,\mu\text{C})/(3.0\,\mu\text{F}) = 1.3\,\text{V}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 24–7 **Capacitores reconectados.** Dos capacitores, $C_1 = 2.2\,\mu\text{F}$ y $C_2 = 1.2\,\mu\text{F}$, están conectados en paralelo a una fuente de 24 V, como se muestra en la figura 24-12a. Después de cargarse, se desconectan los capacitores de la fuente y entre sí, luego se reconectan directamente uno a otro con las placas de signos opuestos (véase la figura 24-12b). Encuentre la carga en cada capacitor y el potencial a través de cada uno después de que se establece el equilibrio.

PLANTEAMIENTO Encontramos la carga $Q = CV$ en cada capacitor inicialmente. La carga se conserva a pesar de haberse reacomodado después de conectar los capacitores. Los nuevos dos voltajes deben ser iguales.

SOLUCIÓN Primero calculamos cuánta carga ha sido ubicada en cada capacitor luego de que la fuente de poder los cargó por completo; lo haremos utilizando la ecuación 24-1:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1V = (2.2\,\mu\text{F})(24\,\text{V}) = 52.8\,\mu\text{C}, \\ Q_2 &= C_2V = (1.2\,\mu\text{F})(24\,\text{V}) = 28.8\,\mu\text{C}. \end{aligned}$$

A continuación, los capacitores se conectan en paralelo (figura 24-12b); después, la diferencia de potencial a través de cada uno debe igualarse rápidamente. En consecuencia, la carga no puede mantenerse, como se muestra en la figura 24-12b, sino que habrá de reacomodarse a sí misma, de forma que las placas superiores tengan cargas del mismo signo, y las placas inferiores tengan una carga opuesta, como se indica en la figura 24-12c. La ecuación 24-1 se aplica a cada capacitor

$$q_1 = C_1V' \quad \text{y} \quad q_2 = C_2V',$$

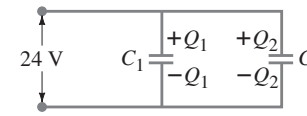
donde V' es el voltaje a través de cada capacitor después de que las cargas se han reacomodado a sí mismas. No conocemos q_1, q_2 ni tampoco V', así que necesitamos una tercera ecuación. Ésta la obtenemos utilizando conservación de carga. Las cargas se han reajustado a sí mismas entre las figuras 24-12b y 24-12c. La carga total en las placas superiores en esas dos figuras debe ser la misma, así que tenemos

$$q_1 + q_2 = Q_1 - Q_2 = 24.0\,\mu\text{C}.$$

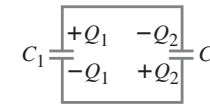
Combinando las últimas tres ecuaciones, encontramos que

$$\begin{aligned} V' &= (q_1 + q_2)/(C_1 + C_2) = 24.0\,\mu\text{C}/3.4\,\mu\text{F} = 7.06\,\text{V} \approx 7.1\,\text{V} \\ q_1 &= C_1V' = (2.2\,\mu\text{F})(7.06\,\text{V}) = 15.5\,\mu\text{C} \approx 16\,\mu\text{C} \\ q_2 &= C_2V' = (1.2\,\mu\text{F})(7.06\,\text{V}) = 8.5\,\mu\text{C} \end{aligned}$$

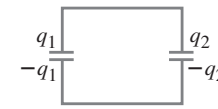
Conservamos sólo dos cifras significativas en nuestras respuestas finales.



a) Configuración inicial.



b) Al momento de la reconexión.



c) Poco tiempo después.

FIGURA 24–12 Ejemplo 24–7.

24–4 Almacenamiento de energía eléctrica

Un capacitor cargado almacena energía eléctrica. La energía almacenada en un capacitor es igual al trabajo realizado para cargarlo. El efecto neto de cargar un capacitor es extraer carga de una de las placas y añadirla a la otra placa. Esto es lo que hace una batería cuando se conecta a un capacitor. Un capacitor no se carga de manera instantánea: le toma cierto tiempo (sección 26-4). Inicialmente, cuando el capacitor está descargado, no se requiere trabajo para mover la primera contribución de carga. Cuando hay cierta carga en cada placa, se necesita trabajo para añadir a la misma placa más carga del mismo signo, a causa de la repulsión eléctrica. Cuanta más carga haya en una placa, más trabajo se requiere para agregar una carga adicional. El trabajo necesario para añadir una pequeña cantidad de carga dq, cuando hay una diferencia de potencial V a través de las placas, es $dW = V\,dq$. Ya que $V = q/C$ en cualquier momento (ecuación 24-1), donde C es la capacitancia, el trabajo requerido para almacenar una carga total Q es

$$W = \int_0^Q V\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Así que es posible decir que la energía "almacenada" en un capacitor es

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

cuando el capacitor C tiene cargas $+Q$ y $-Q$ sobre sus dos conductores. Puesto que $Q = CV$, donde V es la diferencia de potencial a través del capacitor, también es posible escribir

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV. \qquad \textbf{(24–5)}$$

FÍSICA APLICADA

Flash de una cámara

FIGURA 24–13 Unidad de *flash* de una cámara.

EJEMPLO 24–8 **Energía almacenada en un capacitor.** El *flash* de una cámara (figura 24-13) almacena energía en un capacitor de 150 μF a 200 V. *a*) ¿Cuánta energía eléctrica puede almacenarse? *b*) ¿Cuál es la potencia de salida si toda esta energía se libera prácticamente en 1.0 ms?

PLANTEAMIENTO Usamos la ecuación 24-5, expresada como $U = \frac{1}{2}CV^2$ porque conocemos C y V.

SOLUCIÓN La energía almacenada es

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(150 \times 10^{-6}\,\text{F})(200\,\text{V})^2 = 3.0\,\text{J}.$$

Si esta energía se libera en $\frac{1}{1000}$ de segundo, la potencia de salida es $P = U/t = (3.0\,\text{J})/(1.0 \times 10^{-3}\,\text{s}) = 3000\,\text{W}$.

EJEMPLO CONCEPTUAL 24–9 **Aumento de la separación entre placas de un capacitor.** Un capacitor de placas paralelas tiene una carga Q y se le desconecta de una batería. Las dos placas están inicialmente separadas una distancia d. Considere que las placas se separan hasta una distancia $2d$. ¿Cómo ha cambiado la energía almacenada en este capacitor?

RESPUESTA Si aumentamos la separación entre las placas d, disminuimos la capacitancia de acuerdo con la ecuación 24-2, $C = \epsilon_0 A/d$, en un factor de 2. La carga Q no ha cambiado. Así que de acuerdo con la ecuación 24-5, donde elegimos la expresión $U = \frac{1}{2}Q^2/C$ porque conocemos que Q es la misma y C se ha reducido a la mitad, la capacitancia reducida C nos indica que la energía potencial almacenada se ha incrementado en un factor de 2.

NOTA Podemos ver por qué la energía almacenada se incrementa desde un punto de vista físico: las dos placas tienen cargas iguales y opuestas, así que se atraen una a la otra. Si las separamos, debemos efectuar trabajo; por ello, aumentamos su energía potencial.

EJEMPLO 24–10 **Distancia variable entre las placas paralelas de un capacitor.** Las placas de un capacitor de placas paralelas tienen área A, separación x, y están conectadas a una batería con un voltaje V. Mientras están conectadas a la batería, las placas se separan hasta quedar alejadas una distancia de $3x$. *a*) ¿Cuáles son las energías almacenadas al inicio y al final en el capacitor? *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para separar las placas? (Suponga una velocidad constante.) *c*) ¿Cuánta energía se intercambia con la batería?

PLANTEAMIENTO La energía almacenada está dada por la ecuación 24-5: $U = \frac{1}{2}CV^2$, donde $C = \epsilon_0 A/x$. A diferencia del ejemplo 24-9, aquí el capacitor permanece conectado a la batería. De ahí que la carga y la energía pueden fluir hacia la batería o desde ella; no es posible determinar el trabajo como $W = \Delta U$. En vez de ello, el trabajo debe calcularse utilizando la ecuación 7-7, $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$.

SOLUCIÓN *a*) Cuando la separación es x, la capacitancia es $C_1 = \epsilon_0 A/x$ y la energía almacenada es

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1V^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{x}V^2.$$

Cuando la separación es $3x$, $C_2 = \epsilon_0 A/3x$ y

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{3x}V^2.$$

Entonces,

$$\Delta U_{\text{cap}} = U_2 - U_1 = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{3x}.$$

La energía potencial disminuye conforme las placas con cargas opuestas se separan, lo cual tiene sentido. Las placas permanecen conectadas a la batería, así que V no cambia y C disminuye; por lo tanto, algo de carga abandona a cada una de las placas ($Q = CV$), haciendo que U disminuya.

b) El trabajo efectuado para separar las placas es $W = \int_x^{3x} F\,d\ell = \int_x^{3x} QE\,d\ell$, donde Q es la carga en una de las placas en un momento dado cuando las placas están separadas una distancia ℓ, y E es el campo debido a la otra placas en ese instante. Uno podría pensar en utilizar $E = V/\ell$, donde ℓ es la separación entre las placas (ecuación 23-4b). Pero nosotros queremos la fuerza sobre una placa (de carga Q), debida al campo eléctrico de la otra placa solamente, lo cual es la mitad, por *simetría*, así que tomamos $E = V/2\ell$. La carga a una separación ℓ está dada por $Q = CV$, donde $C = \epsilon_0 A/\ell$. Sustituyendo, el trabajo es

$$W = \int_{\ell=x}^{\ell=3x} QE\,d\ell = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2}\int_x^{3x}\frac{d\ell}{\ell^2} = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{2\ell}\Bigg|_{\ell=x}^{\ell=3x} = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2}\left(\frac{-1}{3x}+\frac{1}{x}\right) = \frac{\epsilon_0 AV^2}{3x}.$$

Como podríamos esperar, el trabajo requerido para separar estas placas con cargas opuestas es positivo.

c) Aun cuando el trabajo realizado es positivo, la energía potencial disminuyó, lo que nos dice que la energía debe haberse ido a la batería (como si estuviera cargándola). La conservación de energía nos indica que el trabajo W realizado sobre el sistema tiene que ser igual al cambio de energía potencial del capacitor más el de la batería (es posible suponer que la energía cinética es cero, en esencia):

$$W = \Delta U_{\text{cap}} + \Delta U_{\text{bat}}.$$

Así que la batería experimenta un cambio en energía de

$$\Delta U_{\text{bat}} = W - \Delta U_{\text{cap}} = \frac{\epsilon_0 AV^2}{3x} + \frac{\epsilon_0 AV^2}{3x} = \frac{2\epsilon_0 AV^2}{3x}.$$

Por lo tanto, la carga fluye de vuelta hacia la batería, aumentando su energía almacenada. De hecho, el incremento de energía de la batería es el doble del trabajo que realizamos.

Es útil pensar en la energía almacenada en el capacitor como si estuviera almacenada en el campo eléctrico entre las placas. Como ejemplo, calculemos la energía almacenada en un capacitor de placas paralelas en términos del campo eléctrico.

Hemos visto (ecuación 23-4b) que el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ entre dos placas paralelas cercanas es (aproximadamente) uniforme y que su magnitud está relacionada con la diferencia de potencial a través de $V = Ed$, donde d es la separación entre las placas. La ecuación 24-2 nos muestra también que $C = \epsilon_0 A/d$ para un capacitor de placas paralelas. Así

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(E^2d^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Ad.$$

La cantidad Ad es el volumen entre las placas en donde existe el campo eléctrico E. Si dividimos ambos lados entre el volumen, obtendremos una expresión para la energía por unidad de volumen o **densidad de energía**, u:

$$u = \text{densidad de energía} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \qquad \textbf{(24–6)}$$

La energía eléctrica almacenada por unidad de volumen en una región del espacio es proporcional al campo eléctrico al cuadrado en esa región. Obtuvimos la ecuación 24-6 para el caso especial de un capacitor de placas paralelas. Pero puede demostrarse que es válida para cualquier región del espacio donde haya un campo eléctrico. Observe que las unidades concuerdan: para $(\epsilon_0 E^2)$ tenemos $(\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(\mathrm{N/C})^2 = \mathrm{N/m^2} = (\mathrm{N\cdot m})/\mathrm{m^3} = \mathrm{J/m^3}$.

FÍSICA APLICADA
Desfibriladores, quemaduras, shocks

Efectos para la salud

La energía almacenada en una gran capacitancia puede resultar dañina: producir una quemada o un *shock*. Una razón por la cual usted debe tener cuidado de no tocar un circuito, o el interior de un aparato electrónico, es que los capacitores podrían estar cargados, aun si la potencia externa ha sido desconectada.

Por otro lado, la base para un **desfibrilador de corazón** es un capacitor cargado a un alto voltaje. Un ataque al corazón se caracteriza por latidos irregulares rápidos del corazón, conocidos como *fibrilación ventricular* (o *cardiaca*). En tales circunstancias, el corazón no bombea sangre adecuadamente al resto del cuerpo, lo cual, si se prolonga mucho tiempo, puede causar la muerte. Una sacudida breve repentina de carga a través del corazón, desde el desfibrilador, provoca que el corazón se detenga por completo para dar paso al restablecimiento normal de los latidos. El capacitor del desfibrilador se carga a un alto voltaje, por lo general a unos cuantos miles de volts, y se le permite descargarse de manera rápida a través del corazón mediante un par de contactos anchos conocidos como "paletas", que distribuyen la corriente sobre el pecho (figura 24-14).

FIGURA 24–14 Desfibrilador del corazón.

TABLA 24–1
Constantes dieléctricas (a 20°C)

Material	Constante dieléctrica K	Esfuerzo dieléctrico (V/m)
Vacío	1.0000	
Aire (a 1 atm)	1.0006	3×10^6
Parafina	2.2	10×10^6
Poliestireno	2.6	24×10^6
Vinílico (plástico)	2–4	50×10^6
Papel	3.7	15×10^6
Cuarzo	4.3	8×10^6
Aceite	4	12×10^6
Vidrio, pyrex	5	14×10^6
Porcelana	6–8	5×10^6
Mica	7	150×10^6
Agua (líquida)	80	
Titanato de estroncio	300	8×10^6

24–5 Dieléctricos

Entre las placas de la mayoría de los capacitores hay una hoja aislante de material, como papel o plástico, llamada **dieléctrico**. Esto cumple varios propósitos. Primero que nada, los dieléctricos tienen un rompimiento eléctrico (lo que permite que la carga eléctrica fluya) menos rápido que en el aire, así que pueden aplicarse mayores voltajes sin que pase la carga a través de la separación. Más aún, un dieléctrico facilita que las placas se localicen más cerca una de la otra sin tocarse, lo que da lugar a un incremento en la capacitancia, porque d es menor en la ecuación 24-2. Por último, se encuentra de manera experimental que si un dieléctrico llena el espacio entre los dos conductores, se incrementa la capacitancia en un factor K conocido como la **constante dieléctrica**. Así,

$$C = KC_0, \qquad \textbf{(24–7)}$$

donde C_0 es la capacitancia cuando el espacio entre los dos conductores del capacitor es un vacío, y C es la capacitancia cuando el espacio se ha llenado con un material con constante dieléctrica K.

La tabla 24-1 indica los valores de la constante dieléctrica para varios materiales. También se muestra en la tabla 24-1 el **esfuerzo dieléctrico** (también conocido como resistencia dieléctrica o intensidad dieléctrica), que corresponde al campo eléctrico máximo permitido antes de que ocurra el rompimiento eléctrico (es decir, que fluya la carga).

Para un capacitor de placas paralelas (véase la ecuación 24-2),

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \text{[capacitor de placas paralelas]} \quad \textbf{(24–8)}$$

cuando el espacio entre las placas está completamente lleno con un dieléctrico cuya constante dieléctrica es K. (El caso en el que el dieléctrico llena sólo en forma parcial

el espacio entre las placas se analizará brevemente en el ejemplo 24-11.) La cantidad $K\epsilon_0$ aparece tan a menudo en las ecuaciones que definimos una nueva cantidad

$$\epsilon = K\epsilon_0 \qquad \textbf{(24–9)}$$

llamada la **permitividad** del material. Así que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas puede escribirse como

$$C = \epsilon \frac{A}{d}.$$

Observe que ϵ_0 representa la permitividad del espacio libre (vacío), como en la sección 21-5.

La densidad de energía almacenada en un campo eléctrico E (sección 24-4) en un dieléctrico está dada por (véase la ecuación 24-6)

$$u = \tfrac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2. \qquad [E \text{ en un dieléctrico}]$$

EJERCICIO E Regrese a la pregunta de inicio del capítulo (página 628) y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Dos experimentos sencillos ilustran el efecto de un dieléctrico. En el primero (figura 24-15a), se mantiene una batería de voltaje V_0 conectada a un capacitor mientras se inserta un dieléctrico entre las placas. Si la carga en las placas sin el dieléctrico es Q_0, entonces cuando se inserta el dieléctrico se encuentra de manera experimental (como encontró Faraday por primera vez) que la carga Q en las placas se incrementa en un factor K,

$$Q = KQ_0. \qquad [\text{voltaje constante}]$$

La capacitancia se ha incrementado a $C = Q/V_0 = KQ_0/V_0 = KC_0$, que es la ecuación 24-7. En un segundo experimento (figura 24-15b), se conecta una batería V_0 a un capacitor C_0, que tiene entonces una carga $Q_0 = C_0V_0$. Luego, la batería se desconecta, dejando el capacitor aislado con una carga Q_0 y aún al voltaje V_0. En seguida se inserta un dieléctrico entre las placas del capacitor. La carga sigue siendo Q_0 (no puede irse a ningún lado), pero se encuentra experimentalmente que el voltaje decrece en un factor K:

$$V = \frac{V_0}{K}. \qquad [\text{carga constante}]$$

Observe que la capacitancia cambia a $C = Q_0/V = Q_0/(V_0/K) = KQ_0/V_0 = KC_0$, así que este experimento también confirma la ecuación 24-7.

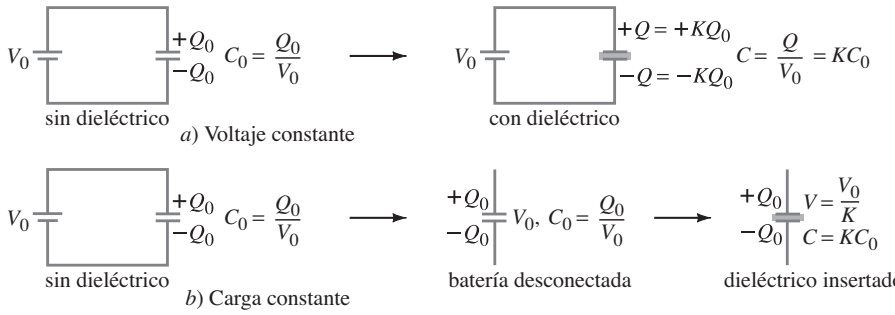


FIGURA 24–15 Dos experimentos con un capacitor. Se inserta un dieléctrico manteniendo *a*) el voltaje constante y *b*) la carga constante.

Cuando se inserta un dieléctrico, el campo eléctrico también se altera. Cuando no hay ningún dieléctrico presente, el campo eléctrico entre las placas de un capacitor de placas paralelas está dado por la ecuación 23-4b:

$$E_0 = \frac{V_0}{d},$$

donde V_0 es la diferencia de potencial entre las placas y d es su separación. Si se aísla el capacitor de manera que la carga permanezca constante sobre las placas cuando se inserta un dieléctrico, llenando el espacio entre las placas, la diferencia de potencial disminuye a $V = V_0/K$. Así que el campo eléctrico entre el dieléctrico es

$$E = E_D = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{Kd}$$

o

$$E_D = \frac{E_0}{K}. \qquad [\text{en un dieléctrico}] \qquad \textbf{(24–10)}$$

El campo eléctrico en un dieléctrico se reduce en un factor igual a la constante dieléctrica. El campo en un dieléctrico (o aislante) no se reduce hasta cero, como en un conductor. La ecuación 24-10 se cumple aun si el ancho del dieléctrico es menor que el espacio entre las placas del capacitor.

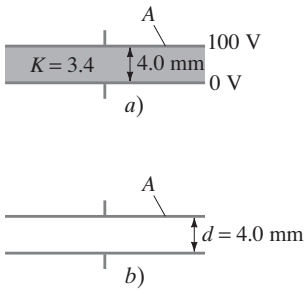


FIGURA 24–16 Ejemplo 24–11.

EJEMPLO 24–11 **Extracción del dieléctrico.** Un capacitor de placas paralelas, lleno con un dieléctrico con $K = 3.4$, se conecta a una batería de 100 V (figura 24-16a). Después de que el capacitor se carga por completo, se desconecta de la batería. Las placas tienen área $A = 4.0\ \text{m}^2$ y están separadas por $d = 4.0$ mm. *a*) Calcule la capacitancia, la carga en el capacitor, la intensidad de campo eléctrico y la energía almacenada en el capacitor. *b*) Se retira el dieléctrico con cuidado, sin cambiar la separación entre las placas y sin que ninguna carga abandone el capacitor (figura 24-16b). Determine los nuevos valores de la capacitancia, la intensidad del campo eléctrico, el voltaje entre las placas y la energía almacenada en el capacitor.

PLANTEAMIENTO Utilizamos las ecuaciones para la capacitancia de placas paralelas, así como para el campo eléctrico con y sin dieléctrico.

SOLUCIÓN *a*) Primero encontramos la capacitancia, con dieléctrico:

$$C = \frac{K\epsilon_0 A}{d} = \frac{3.4(8.85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(4.0\,\text{m}^2)}{4.0 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 3.0 \times 10^{-8}\,\text{F}.$$

La carga Q sobre las placas es

$$Q = CV = (3.0 \times 10^{-8}\,\text{F})(100\,\text{V}) = 3.0 \times 10^{-6}\,\text{C}.$$

El campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{V}{d} = \frac{100\,\text{V}}{4.0 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 25\,\text{kV/m}.$$

Por último, la energía total almacenada en el capacitor es

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(3.0 \times 10^{-8}\,\text{F})(100\,\text{V})^2 = 1.5 \times 10^{-4}\,\text{J}.$$

b) La capacitancia sin dieléctrico disminuye en un factor $K = 3.4$:

$$C_0 = \frac{C}{K} = \frac{(3.0 \times 10^{-8}\,\text{F})}{3.4} = 8.8 \times 10^{-9}\,\text{F}.$$

Ya que la batería ha sido desconectada, la carga Q no puede cambiar; cuando el dieléctrico se retira, $V = Q/C$ se incrementa en un factor $K = 3.4$ hasta 340 V. El campo eléctrico es

$$E = \frac{V}{d} = \frac{340\,\text{V}}{4.0 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 85\,\text{kV/m}.$$

La energía almacenada es

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(8.8 \times 10^{-9}\,\text{F})(340\,\text{V})^2 = 5.1 \times 10^{-4}\,\text{J}.$$

NOTA ¿De dónde viene toda esta energía extra? La energía se incrementa porque fue necesario realizar trabajo para extraer el dieléctrico. El trabajo requerido fue $W = (5.1 \times 10^{-4}\,\text{J}) - (1.5 \times 10^{-4}\,\text{J}) = 3.6 \times 10^{-4}\,\text{J}$. En la sección siguiente veremos que se requiere efectuar un trabajo a causa de la fuerza de atracción entre la carga inducida en el dieléctrico y las cargas en las placas (figura 24-17c).

*24–6 Descripción molecular de los dieléctricos

Examinemos, desde el punto de vista molecular, por qué la capacitancia de un capacitor debe aumentar cuando hay un dieléctrico entre las placas. Un capacitor cuyas placas están separadas por aire tiene una carga $+Q$ en una placa y $-Q$ en la otra (figura 24-17a).

Considere que el capacitor está aislado (desconectado de la batería), así que no puede fluir carga desde las placas o hacia ellas. La diferencia de potencial entre las placas, V_0, está dada por la ecuación 24-1:

$$Q = C_0 V_0,$$

donde los subíndices se refieren al aire entre las placas. Ahora, insertamos un dieléctrico entre las placas (figura 24-17b). En virtud del campo eléctrico entre las capas del capacitor, las moléculas del dieléctrico tenderán a orientarse, como se muestra en la figura 24-17b. Si las moléculas del dieléctrico son *polares*, el extremo positivo es atraído hacia la placa negativa, y viceversa. Aun si las moléculas del dieléctrico no son polares, los electrones dentro de ellas tenderán a moverse ligeramente hacia la placa positiva del capacitor; el efecto es el mismo. El efecto neto de los dipolos alineados es una carga neta negativa en la pared externa del dieléctrico, que da hacia la placa positiva, y una carga neta positiva en el lado opuesto, como se ilustra en la figura 24-17c.

Por consiguiente, algunas de las líneas de campo no pasan a través del dieléctrico, sino que terminan en cargas inducidas en la superficie del dieléctrico, como se observa en la figura 24-17c. De aquí que el campo eléctrico dentro del dieléctrico es menor que en el aire. Esto es, el campo eléctrico entre las placas del capacitor, que se supone está lleno del dieléctrico, se ha reducido en un factor K. El voltaje a través del capacitor se reduce en el mismo factor K, porque $V = Ed$ (ecuación 23-4b); de aquí, utilizando la ecuación 24-1, $Q = CV$, la capacitancia C debe incrementarse en el mismo factor K para mantener Q constante.

Como se muestra en la figura 24-17d, el campo eléctrico dentro del dieléctrico E_D puede considerarse como el vector suma del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}_0$ debido a las cargas "libres" en las placas del conductor, y el campo $\vec{\mathbf{E}}_{ind}$ consecuencia de la carga inducida sobre las superficies del dieléctrico. Puesto que los dos campos están en sentidos opuestos, el campo neto dentro del dieléctrico, $E_0 - E_{ind}$, es menor que E_0. La relación precisa está dada por la ecuación 24-10, aun si el dieléctrico no llena por completo el espacio entre las placas:

$$E_D = E_0 - E_{ind} = \frac{E_0}{K},$$

así que

$$E_{ind} = E_0\left(1 - \frac{1}{K}\right).$$

El campo eléctrico entre dos placas paralelas está relacionado con la densidad superficial de carga, σ, mediante $E = \sigma/\epsilon_0$ (ejemplo 21-13 o 22-8); por lo tanto,

$$E_0 = \sigma/\epsilon_0$$

donde $\sigma = Q/A$ es la densidad superficial de carga en el conductor; Q es la carga neta en el conductor, que generalmente se llama **carga libre** (ya que la carga puede moverse con libertad en el conductor). Asimismo, definimos una densidad superficial de carga inducida equivalente σ_{ind} en el dieléctrico; entonces,

$$E_{ind} = \sigma_{ind}/\epsilon_0$$

donde E_{ind} es el campo eléctrico debido a la carga inducida $Q_{ind} = \sigma_{ind} A$ en la superficie del dieléctrico (figura 24-17d). Q_{ind} se conoce generalmente como la **carga ligada**, ya que está sobre un aislante y no puede moverse con libertad. Puesto que $E_{ind} = E_0 (1 - 1/K)$, como se muestra, tenemos ahora que

$$\sigma_{ind} = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \qquad \textbf{(24–11a)}$$

y

$$Q_{ind} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right). \qquad \textbf{(24–11b)}$$

Ya que K es siempre mayor que 1, vemos que la carga inducida en el dieléctrico es siempre menor que la carga libre en cada una de las placas del capacitor.

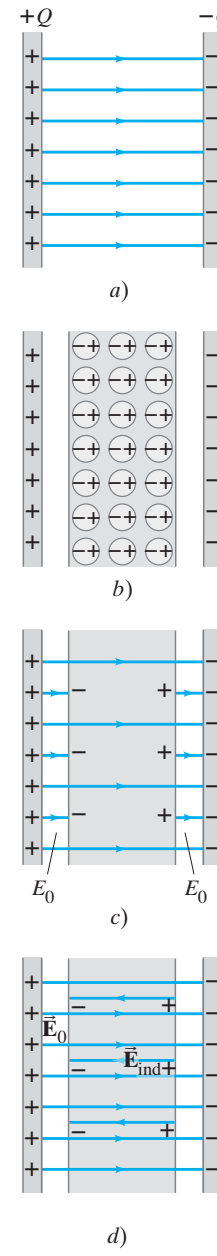


FIGURA 24–17 Visión molecular de los efectos de un dieléctrico.

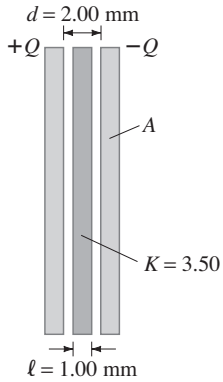


FIGURA 24–18 Ejemplo 24–12.

EJEMPLO 24–12 **Capacitor lleno parcialmente con un dieléctrico.** Un capacitor de placas paralelas tiene placas con área $A = 250\ \text{cm}^2$ y separación $d = 2.0$ mm. El capacitor se carga a una diferencia de potencial $V_0 = 150$ V. Luego se desconecta la batería (la carga Q en las placas no cambiará) y se coloca entre las placas una hoja dieléctrica ($K = 3.50$) de la misma área A, pero con grosor $\ell = 1.00$ mm, como se muestra en la figura 24-18. Determine *a*) la capacitancia inicial en el capacitor lleno de aire, *b*) la carga en cada placa antes de que el dieléctrico sea insertado, *c*) la carga inducida en cada cara del dieléctrico tras haberse insertado, *d*) el campo eléctrico en el espacio entre cada placa y el dieléctrico, *e*) el campo eléctrico en el dieléctrico, *f*) la diferencia de potencial entre las placas después de que se agregó el dieléctrico, y *g*) la capacitancia luego de colocar el dieléctrico.

PLANTEAMIENTO Utilizamos las ecuaciones para la capacitancia y la carga que obtuvimos en esta sección (inciso *e*), ecuación 23-4 a, $V = -\int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$.

SOLUCIÓN *a*) Antes de insertar el dieléctrico, la capacitancia es

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{2.50 \times 10^{-2}\,\text{m}^2}{2.00 \times 10^{-3}\,\text{m}}\right) = 111\ \text{pF}.$$

b) La carga en cada placa es

$$Q = C_0 V_0 = (1.11 \times 10^{-10}\,\text{F})(150\,\text{V}) = 1.66 \times 10^{-8}\,\text{C}.$$

c) Las ecuaciones 24-10 y 24-11 son válidas aun cuando el dieléctrico no llene el espacio, así que (ecuación 24-11b)

$$Q_{\text{ind}} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (1.66 \times 10^{-8}\,\text{C})\left(1 - \frac{1}{3.50}\right) = 1.19 \times 10^{-8}\,\text{C}.$$

d) El campo eléctrico en los espacios entre las placas y el dieléctrico (véase la figura 24-17*c*) es el mismo que en ausencia del dieléctrico, puesto que la carga en las placas no se ha alterado. Es posible utilizar aquí el resultado del ejemplo 21-13, lo cual nos da $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. [O podemos ver que, en ausencia del dieléctrico, $E_0 = V_0/d = Q/C_0 d$ (ya que $V_0 = Q/C_0$) $= Q/\epsilon_0 A$ (puesto que $C_0 = \epsilon_0 A/d$), lo cual es el mismo resultado.] Así,

$$E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{1.66 \times 10^{-8}\,\text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.50 \times 10^{-2}\,\text{m}^2)} = 7.50 \times 10^4\,\text{V/m}.$$

e) El campo eléctrico en el dieléctrico es (ecuación 24-10)

$$E_{\text{D}} = \frac{E_0}{K} = \frac{7.50 \times 10^4\,\text{V/m}}{3.50} = 2.14 \times 10^4\,\text{V/m}.$$

f) Para obtener la diferencia del potencial en presencia del dieléctrico utilizamos la ecuación 23-4a, luego integramos desde la superficie de una placa hasta la otra a lo largo de una línea recta paralela a las líneas de campo:

$$V = -\int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = E_0(d - \ell) + E_{\text{D}}\,\ell,$$

que puede simplificarse como

$$\begin{aligned} V &= E_0\left(d - \ell + \frac{\ell}{K}\right) \\ &= (7.50 \times 10^4\,\text{V/m})\left(1.00 \times 10^{-3}\,\text{m} + \frac{1.00 \times 10^{-3}\,\text{m}}{3.50}\right) \\ &= 96.4\,\text{V}. \end{aligned}$$

g) En presencia del dieléctrico la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1.66 \times 10^{-8}\,\text{C}}{96.4\,\text{V}} = 172\ \text{pF}.$$

NOTA Si el dieléctrico llenara el espacio entre las placas, las respuestas a *f*) y *g*) habrían sido 42.9 V y 387 pF, respectivamente.

Resumen

Un **capacitor** es un aparato utilizado para almacenar carga (y energía eléctrica); consiste en dos conductores que no se tocan. Los dos conductores generalmente tienen cargas de la misma magnitud Q, pero son de signo opuesto. La razón entre esta carga Q y la diferencia de potencial V entre los conductores se llama **capacitancia**, C:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \text{o} \qquad Q = CV. \tag{24–1}$$

La capacitancia de un capacitor de placas paralelas es proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional de su separación d:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{24–2}$$

Cuando los capacitores están conectados en **paralelo**, la capacitancia equivalente es la suma de las capacitancias individuales:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots. \tag{24–3}$$

Cuando los capacitores están conectados en **serie**, el recíproco de la capacidad equivalente es la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots. \tag{24–4}$$

Un capacitor cargado almacena una cantidad de energía eléctrica dada por:

$$U = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \tag{24–5}$$

Puede pensarse que esta energía está almacenada en el campo eléctrico entre las placas. Para cualquier campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en el espacio libre, la **densidad de energía** u (energía por unidad de volumen) es

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \tag{24–6}$$

El espacio entre los conductores contiene un material no conductor como, por ejemplo, aire, papel o plástico. A estos materiales se les conoce como **dieléctricos**, y la capacitancia es proporcional a una propiedad de los dieléctricos llamada **constante dieléctrica**, K (aproximadamente igual a 1 para aire). Para un capacitor de placas paralelas,

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \tag{24–8}$$

donde $\epsilon = K\epsilon_0$ se conoce como la **permitividad** del material dieléctrico. Cuando hay un dieléctrico presente, la densidad de energía es

$$u = \tfrac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2.$$

Preguntas

1. Suponga que dos conductores cercanos tienen la misma carga negativa. ¿Puede haber una diferencia de potencial entre ellos? Si es así, ¿es posible usar aquí la definición de capacitancia, $C = Q/V$?
2. Suponga que la separación entre las placas d de un capacitor de placas paralelas no es tan pequeña comparada con las dimensiones de las placas. ¿Esperaría que la ecuación 24-2 dé una sobreestimación o una subestimación de la capacitancia verdadera? Explique.
3. Suponga que una de las placas de un capacitor de placas paralelas se movió de forma que el área sobrepuesta se redujo a la mitad, pero las placas continúan paralelas. ¿Cómo afectaría esto la capacitancia?
4. Cuando se conecta una batería a un capacitor, ¿por qué adquieren las dos placas cargas de la misma magnitud? ¿Sería esto cierto si los dos conductores tuvieran tamaños o formas diferentes?
5. Describa un método simple para medir ϵ_0 usando un capacitor.
6. Suponga que se conectan tres capacitores idénticos a una batería. ¿Almacenarían más energía si están conectados en serie o en paralelo?
7. Se coloca una hoja de cobre grande de espesor ℓ entre las placas paralelas de un capacitor, pero sin tocarlas. ¿Cómo afectará esto a la capacitancia?
8. Las placas paralelas de un capacitor aislado tienen cargas opuestas Q. Si la separación entre las placas se incrementa, ¿se requiere de una fuerza para hacer esto? ¿Cambia la diferencia de potencial? ¿Qué pasa con el trabajo realizado al separar las placas?
9. ¿Cómo cambia la energía en un capacitor si *a*) se duplica la diferencia de potencial, *b*) se duplica la carga en cada placa y *c*) se duplica la separación entre las placas mientras el capacitor permanece conectado en una batería en cada caso?
10. Si el voltaje a través de un capacitor se duplica, la cantidad de energía que puede almacenar *a*) se duplica, *b*) se reduce a la mitad, *c*) se cuadruplica, *d*) se mantiene igual, *e*) ninguna de las anteriores.
11. Un capacitor cargado y aislado tiene placas horizontales. Si entre las placas se inserta una parte de un dieléctrico delgado (figura 24-19), ¿se moverá hacia la izquierda o hacia la derecha cuando se libere?

FIGURA 24–19
Pregunta 11.

12. Suponga que se mantiene conectada una batería al capacitor de la pregunta 11. ¿Qué pasará entonces cuando se libere el dieléctrico?
13. ¿Cómo cambia la energía almacenada en un capacitor cuando se inserta un dieléctrico si *a*) el capacitor está aislado de manera que Q no cambie, *b*) el capacitor permanece conectado a una batería de manera que V no cambie?
14. Para un dieléctrico que consiste en moléculas polares, ¿cómo esperaría que cambiara la constante dieléctrica con la temperatura?
15. Si se tira de un dieléctrico entre las placas de un capacitor, el cual permanece conectado a una batería, ¿qué cambios ocurren a la capacitancia, la carga en las placas, la diferencia de potencial, la energía almacenada en el capacitor y el campo eléctrico?
16. Hemos visto que la capacitancia C depende del tamaño, la forma y la posición de los dos conductores, así como de la constante dieléctrica K. ¿Qué queríamos decir entonces cuando señalamos, en la ecuación 24-1, que C era una constante?
17. ¿Qué valor podríamos asignar a la constante dieléctrica de un buen conductor? Explique.

Problemas

24–1 Capacitores

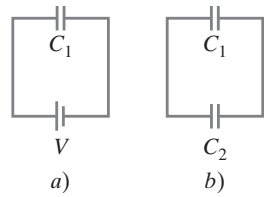
1. (I) Las dos placas de un capacitor tienen +2800 μC y –2800 μC de carga, respectivamente, cuando la diferencia de potencial es de 930 V. ¿Cuál es la capacitancia?

2. (I) ¿Cuánta carga fluye de una batería de 12.0 V cuando se conecta a un capacitor de 12.6 μF?

3. (I) La diferencia de potencial entre dos secciones pequeñas de alambres paralelos en aire es de 24.0 V. Ambos alambres portan cargas de la misma magnitud y signos opuestos de 75 pC. ¿Cuál es la capacitancia de los dos alambres?

4. (I) La carga en un capacitor se incrementa en 26 μC cuando el voltaje a través de él aumenta desde 28 V hasta 78 V. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor?

5. (II) Un capacitor de 7.7 μF se carga con una batería de 125 V (figura 24-20a) y luego se desconecta de la batería. Cuando este capacitor (C_1) se conecta (figura 24-20b) a un segundo capacitor (inicialmente descargado), C_2, el voltaje final en cada capacitor es de 15 V. ¿Cuál es el valor de C_2? [*Sugerencia*: Considere que la carga se conserva].



a) *b*)

FIGURA 24–20 Problemas 5 y 48.

6. (II) Un capacitor aislado C_1 tiene una carga Q_0. Sus alambres están conectados a los de un segundo capacitor C_2, inicialmente descargado. ¿Qué carga tendrá cada uno ahora? ¿Cuál será la diferencia de potencial a través de cada uno?

7. (II) Se requieren 15 J de energía para mover 0.20 mC de carga de una placa a otra de un capacitor de 15 μF. ¿Cuál es la carga que hay en cada placa?

8. (II) Un capacitor de 2.70 μF se carga a 475 V, y un capacitor de 4.00 μF se carga a 525 V. *a*) Estos capacitores luego se desconectan de sus baterías, y las placas positivas de cada uno se conectan entre sí, al igual que las placas negativas. ¿Cuál será la diferencia de potencial a través de cada capacitor y la carga en cada uno de ellos? *b*) ¿Cuál son el voltaje y la carga de cada capacitor si se conectan entre sí las placas de signos opuestos?

9. (II) Hoy se dispone comercialmente de ultracapacitores compactos con capacitancias de hasta miles de faradays. Una aplicación de los ultracapacitores es proveer de potencia a circuitos eléctricos cuando se apagan otras fuentes (como una batería). Para tener una idea de cuánta carga puede almacenarse en uno de estos capacitores, considere un ultracapacitor de 1200 F que se carga inicialmente a 12.0 V mediante una batería y luego se desconecta. Si de inmediato se retira la carga de las placas del capacitor a una tasa de 1.0 mC/s, por ejemplo, para respaldar la memoria de una aparato eléctrico, ¿cuánto tiempo (en días) le tomará a la diferencia de potencial a través de este capacitor bajar hasta 6.0 V?

10. (II) En un chip de computadora de **memoria dinámica aleatoria de acceso directo (DRAM)**, cada celda de memoria consiste principalmente en un capacitor para almacenar carga. Cada una de tales celdas representa un valor único de código binario de 1 cuando su capacitor de 35 fF (1 fF = 10^{-15}F) se carga a 1.5 V, o un valor de 0 cuando está descargado a 0 V. *a*) Cuando está completamente cargado, ¿cuántos electrones en exceso hay en la placa negativa del capacitor de la celda? *b*) Después de que se ha puesto carga sobre la celda del capacitor, se "fuga" carga lentamente (a través de diferentes mecanismos) a una tasa constante de 0.30 fC/s. ¿Cuánto tiempo le toma a la diferencia de potencial a través este capacitor disminuir en 1.0% de su valor cuando está completamente cargado? (Por este efecto de *fuga*, la carga en un capacitor DRAM "se restablece" muchas veces por segundo).

24–2 Determinación de la capacitancia

11. (I) Para fabricar un capacitor de 0.40 μF, ¿cuál debe ser el área de las placas si éstas deben estar separadas por una capa de aire de 2.8 mm?

12. (I) ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud (F/m) de un cable coaxial cuyo conductor interno tiene un diámetro de 1.0 mm y una funda exterior cilíndrica de 5.00 mm de diámetro? Suponga que el espacio entre las placas está lleno de aire.

13. (I) Determine la capacitancia de la Tierra suponiendo que es un conductor esférico.

14. (II) Con base en la ley de Gauss, demuestre que $\vec{\mathbf{E}} = 0$ dentro del conductor interno de un capacitor cilíndrico (véase la figura 24-6 y el ejemplo 24-2), así como en el exterior del cilindro externo.

15. (II) El aire seco sufre un rompimiento eléctrico cuando el campo eléctrico excede un valor aproximado de 3.0×10^6 V/m. ¿Qué cantidad de carga debe localizarse en el capacitor si el área de cada placa es de 6.8 cm^2?

16. (II) Deseamos tener un campo eléctrico de 4.80×10^5 V/m entre dos placas paralelas, cada una con área de 21.0 cm^2, separadas por 0.250 cm de aire. ¿Cuál es la carga que debe haber en cada placa?

17. (II) ¿Qué tan intenso es el campo eléctrico entre las placas de un capacitor de 0.80 μF con separación de aire si las placas están separadas 2.0 mm y cada una tiene una carga de 92 μC?

18. (II) Se coloca una placa de metal grande de espesor ℓ paralelamente entre un capacitor de placas paralelas, como se muestra en la figura 24-4. No toca las placas y se extiende más allá de sus bordes. *a*) ¿Cuál es ahora la nueva capacitancia en términos de A, d y ℓ? *b*) Si $\ell = 0.40\,d$, ¿en qué factor cambia la capacitancia cuando se inserta la placa?

19. (III) Generalmente es posible medir las distancias pequeñas en términos de capacitancias. Considere un capacitor de placas paralelas lleno de aire con placas fijas de área $A = 25$ mm^2 y una distancia variable x de separación entre las placas. Suponga que el capacitor está unido a un instrumento para medir capacitancias, el cual puede medir una capacitancia C en el intervalo de 1.0 pF a 1000.0 pF con una exactitud de $\Delta C = 0.1$ pF. *a*) Si se mide C mientras x está variando, ¿dentro de qué intervalo ($x_{\text{mín}} \leq x \leq x_{\text{máx}}$) puede determinarse la distancia de separación entre las placas (en μm) para este dispositivo? *b*) Defina Δx como la magnitud de la precisión con la cual puede determinarse x y deduzca una expresión para Δx. *c*) Determine la precisión porcentual con la cual es posible medir $x_{\text{mín}}$ y $x_{\text{máx}}$.

20. (III) En un **limpiador de aire electrostático ("precipitador")**, el intenso campo eléctrico no uniforme de la región central de un capacitor cilíndrico (con radios interno y externo R_a y R_b) se usa para crear moléculas de aire ionizadas que a la vez sirven para cargar polvo y partículas de ceniza (figura 24.21). En condiciones atmosféricas estándar, si el aire se somete a una intensidad de campo eléctrico que exceda su esfuerzo dieléctrico $E_S = 2.7 \times 10^6$ N/C, las moléculas del aire se disocian en iones cargados en forma positiva y en electrones libres. En un precipitador, la región dentro de la cual se ioniza el aire (la región de *descarga de corona*) ocupa un volumen cilíndrico de radio R que, en general, es cinco veces mayor que el cilindro interior. Considere un precipitador particular construido con $R_b = 0.10$ mm y $R_a = 10.0$ cm. Para crear una región de descarga de corona con un radio $R = 5.0\ R_b$, ¿qué diferencia de potencial V debe aplicarse entre los cilindros, conductores interno y externo, del precipitador? [Además de disociar el aire, el cilindro interior cargado repele los iones positivos resultantes de la región de la descarga de corona, donde se usan para cargar las partículas de polvo, que luego son "colectadas" en el cilindro externo cargado de manera negativa.]

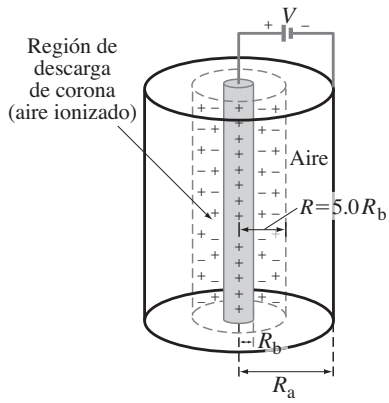


FIGURA 24–21 Problema 20.

24–3 Capacitores en serie y en paralelo

21. (I) La capacitancia de una porción de un circuito debe reducirse desde 2900 pF hasta 1600 pF. ¿Qué capacitancia tiene que añadirse al circuito para producir este efecto sin extraer elementos del circuito existentes? ¿Habrán de romperse algunas conexiones para conseguir esto?

22. (I) Seis capacitores de 3.8 μF están conectados en paralelo. ¿Cuál es la capacitancia equivalente? *b*) ¿Cuál es su capacitancia equivalente si están conectados en serie?

23. (II) Dados los capacitores $C_1 = 2.0\ \mu$F, $C_2 = 1.5\ \mu$F y $C_3 = 3.0\ \mu$F, ¿qué arreglo de conexiones en serie y en paralelo con una batería de 12 V dará la menor caída de voltaje a través del capacitor de 2.0 μF? ¿Cuál es la caída de voltaje mínima?

24. (II) Suponga que tres capacitores de placas paralelas, cuyas áreas son A_1, A_2 y A_3, y con separaciones d_1, d_2 y d_3, están conectados en paralelo. Demuestre, utilizando sólo la ecuación 24-2, que la ecuación 24-3 es válida.

25. (II) Por equivocación, se construyó un circuito eléctrico utilizando un capacitor de 5.0 μF en lugar del valor de 16 μF que se requería. Sin quitar el capacitor de 5.0 μF, ¿qué debe añadir un técnico para corregir este circuito?

26. (II) Tres placas conductoras, cada una de área A, están conectadas, como se indica en la figura 24-22. *a*) ¿Se encuentran en serie o en paralelo los dos capacitores que se forman? *b*) Determine C como función de d_1, d_2 y A. Considere que $d_1 + d_2$ es mucho menor que las dimensiones de las placas. *c*) La placa de en medio puede moverse (cambiando los valores de d_1 y d_2), para variar la capacitancia. ¿Cuál es el valor mínimo y cuál el valor máximo de la capacitancia neta?

FIGURA 24–22
Problema 26.

27. (II) Considere tres capacitores cuyas capacitancias son 3600 pF, 5800 pF y 0.0100 μF. ¿Cuáles son la capacitancia máxima y mínima que pueden obtenerse con estos capacitores? ¿Cómo se realiza la conexión en cada caso?

28. (II) Se conectan un capacitor de 0.50 μF y otro de 0.80 μF en serie a una batería de 9.0 V. Calcule *a*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor y *b*) la carga en cada uno de ellos. *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) suponiendo que los dos capacitores están conectados en paralelo.

29. (II) En la figura 24-23 considere que $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$. *a*) Determine la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b*. *b*) Determine también la carga en cada capacitor y la diferencia de potencial en cada uno en términos de V.

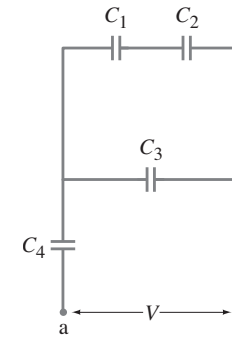


FIGURA 24–23
Problemas 29 y 30.

30. (II) Suponga, en la figura 24-23, que $C_1 = C_2 = C_3 = 16.0\ \mu$F y $C_4 = 28.5\ \mu$F. Si la carga en C_2 es $Q_2 = 12.4\ \mu$C, determine la carga en cada uno de los otros capacitores, el voltaje a través de cada capacitor y el voltaje V_{ab} a través de toda la combinación completa.

31. (II) El interruptor S de la figura 24-24 se conecta hacia abajo, de manera que el capacitor C_2 queda completamente cargado mediante la batería con voltaje V_0. Si el interruptor se conecta hacia arriba, determine la carga en cada capacitor después de la segunda conexión.

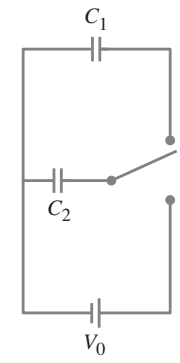


FIGURA 24–24
Problema 31.

32. (II) *a*) Determine la capacitancia equivalente entre los puntos a y b para la combinación de capacitores mostrada en la figura 24-25. *b*) Determine la carga en cada capacitor y la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos si $V_{ba} = V$.

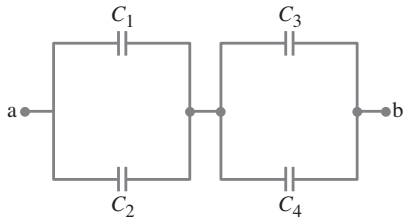


FIGURA 24–25 Problemas 32 y 33.

33. (II) Suponga que en el problema 32 (figura 24-25), $C_1 = C_3 = 8.0\ \mu$F, $C_2 = C_4 = 16\ \mu$F y $Q_3 = 23\ \mu$C. Determine *a*) la carga sobre cada uno de los capacitores, *b*) el voltaje a través de cada capacitor y *c*) el voltaje V_{ba} a través de la combinación completa.

34. (II) Dos capacitores conectados en paralelo producen una capacitancia equivalente de 35.0 μF, pero, cuando se conectan en serie, la capacitancia equivalente es sólo de 5.5 μF. ¿Cuál es la capacitancia individual de cada capacitor?

35. (II) En el **puente de capacitores** que se ilustra en la figura 24-26, se aplica un voltaje de V_0, y el capacitor variable C_1 se ajusta hasta que hay un voltaje cero entre los puntos *a* y *b*, según se miden con el voltímetro (•—Ⓥ—•). Determine la capacitancia incógnita C_x si $C_1 = 8.9\ \mu$F y los capacitores fijos tienen $C_2 = 18.0\ \mu$F y $C_3 = 4.8\ \mu$F. Considere que no fluye ninguna carga a través del voltímetro.

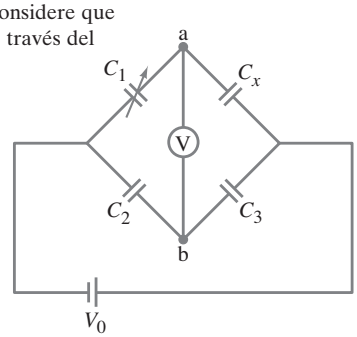


FIGURA 24–26
Problema 35.

36. (II) Dos capacitores, $C_1 = 3200$ pF y $C_2 = 1800$ pF, están conectados en serie a una batería de 12.0 V. Después, los capacitores se desconectan de la batería y se conectan directamente entre sí: placa positiva con placa positiva y placa negativa con placa negativa. ¿Cuál será entonces la carga en cada capacitor?

37. (II) *a*) Determine la capacitancia equivalente del circuito mostrado en la figura 24-27. *b*) Si $C_1 = C_2 = 2C_3 = 24.0\ \mu$F, ¿cuánta carga está almacenada en cada capacitor cuando $V = 35.0$ V?

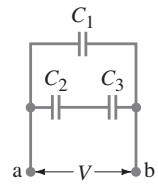


FIGURA 24–27
Problemas 37, 38 y 45.

38. (II) En la figura 24-27, considere que $C_1 = 2.00\ \mu$F, $C_2 = 3.00\ \mu$F, $C_3 = 4.00\ \mu$F y $V = 24.0$ *V*. ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor?

39. (III) Suponga que una de las placas de un capacitor de placas paralelas se inclina de manera que forma un ángulo θ con la otra placa, como se muestra en la figura 24-28. Determine una expresión para la capacitancia *C* en términos de *A*, *d* y θ, donde *A* es el área de cada una de las placas y θ es pequeño. Suponga que las placas son cuadradas. [*Sugerencia:* Imagine al capacitor formado por muchos capacitores infinitesimales en paralelo].

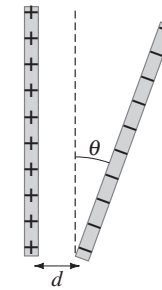


FIGURA 24–28
Problema 39.

40. (III) Se aplica un voltaje *V* a la red de capacitores mostrada en la figura 24-29. *a*) ¿Cuál es la capacitancia equivalente? [*Sugerencia:* Considere que hay una diferencia de potencial V_{ab} a través de la red, como se indica en la figura; escriba las diferencias de potencial a través de varias trayectorias de la red desde *a* hasta *b*, en términos de las cargas en los capacitores y de sus capacitancias.] *b*) Determine la capacitancia equivalente si $C_2 = C_4 = 8.0\ \mu$F y $C_1 = C_3 = C_5 = 4.5\ \mu$F.

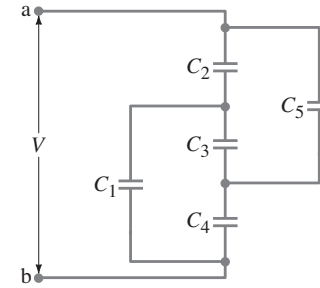


FIGURA 24–29
Problema 40.

24–4 Almacenamiento de energía eléctrica

41. (I) Se aplican 2200 V a una capacitor de 2800 pF. ¿Cuánta energía eléctrica se almacena?

42. (I) Hay un campo eléctrico cerca de la superficie de la Tierra cuya intensidad es aproximadamente de 150 V/m. ¿Cuánta energía por m^3 está almacenada en este campo?

43. (I) ¿Cuánta energía está almacenada por el campo eléctrico entre dos placas cuadradas, de 8 cm de lado, separadas por un espacio de 1.3 mm de aire? Las cargas sobre las placas son iguales y opuestas y tienen una magnitud de 420 μC.

44. (II) Un capacitor de placas paralelas tiene cargas fijas $+Q$ y $-Q$. En esas condiciones, se triplica la separación entre las placas. *a*) ¿En qué factor cambia la energía almacenada en el campo eléctrico? *b*) ¿Cuánto trabajo debe realizarse para incrementar la separación entre las placas desde *d* a 3.0*d*? El área de cada placa es *A*.

45. (II) En la figura 24-27 considere que $V = 10.0$ V y $C_1 = C_2 = C_3 = 22.6\ m$F. ¿Cuánta energía está almacenada en esta red de capacitores?

46. (II) ¿Cuánta energía debe proveer una batería de 28 V para cargar por completo un capacitor de 0.45 μF y otro capacitor de 0.20 μF cuando se colocan en *a*) paralelo y *b*) en serie? *c*) ¿Cuánta carga fluyó de la batería en cada caso?

47. (II) *a*) Suponga que el radio externo R_a de un capacitor cilíndrico se triplica, pero la carga se mantiene constante. ¿En qué factor cambiará la energía almacenada? ¿De dónde viene la energía? *b*) Repita el inciso *a*) suponiendo que el voltaje permanece constante.

48. (II) Un capacitor de 2.20 μF se carga con una batería de 12.0 V. Se desconecta de la batería y luego se conecta a un capacitor descargado de 3.50 μF (figura 24-20). Determine la energía total almacenada: *a*) antes de que se conecten los capacitores y *b*) después de ser conectados. *c*) ¿Cuál es el cambio en la energía?

49. (II) ¿Cuánto trabajo se requiere para retirar una hoja de metal de entre las placas de un capacitor (como en el problema 18a), suponiendo que *a*) la batería permanece conectada de manera que el voltaje sea constante; *b*) la batería se desconecta de manera que la carga permanezca constante.

50. (II) *a*) Demuestre que cada placa de un capacitor de placas paralelas ejerce una fuerza

$$F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$$

sobre la otra, calculando dW/dx, donde dW es el trabajo requerido para incrementar la separación en dx. *b*) ¿Por qué el hecho de utilizar la expresión $F = QE$, donde E es el campo eléctrico entre las placas, daría una respuesta equivocada?

51. (II) Demuestre que la energía electrostática almacenada en el campo eléctrico afuera de un conductor esférico aislado de radio r_0 que porta una carga neta Q es

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{r_0}.$$

Realice esto de tres formas: *a*) Utilice la ecuación 24-6 para la densidad de energía en un campo eléctrico. [*Sugerencia:* Considere cascarones esféricos de espesor *dr*.] *b*) Utilice la ecuación 24-5 junto con la capacitancia de una esfera aislada (sección 24-2). *c*) Calcule el trabajo necesario para traer la carga Q desde el infinito en elementos infinitesimales dq.

52. (II) Al conectarse dos capacitores en paralelo y después a una batería, la energía total almacenada es 5.0 veces mayor que cuando están conectados en serie y luego son conectados a la misma batería. ¿Cuál es el radio de las dos capacitancias? (Antes de conectar la batería en cada caso, los capacitores están completamente descargados).

53. (II) En circuitos digitales comunes de semiconductores de metal óxido complementario **(CMOS)**, cargar los capacitores componentes C a su diferencia de potencial de trabajo V da cuenta de las principales contribuciones a sus requerimientos de consumo de energía. Así, si una operación lógica requiere uno de estos circuitos para cargar sus capacitores N veces, podemos suponer que la operación requiere una energía de $N(\frac{1}{2}CV^2)$. En los últimos 20 años, la capacitancia en circuitos digitales se ha reducido en un factor de 20 aproximadamente, en tanto que el voltaje al cual tales capacitores están conectados se ha reducido desde 5.0 hasta 1.5 V. También las baterías alcalinas actuales almacenan cerca de cinco veces la energía de las baterías anteriores. Dos pilas alcalinas AA, cada una de las cuales mide 1 cm de diámetro y 4 cm de longitud, pueden alimentar los circuitos lógicos de un **asistente digital personal** de bolsillo (PDA), con su dispositivo apagado por dos meses. Si se hiciera el intento de fabricar un PDA similar hace 20 años (es decir, con las mismas funciones digitales, de manera que N permanezca constante), ¿cuántas baterías AA (de las antiguas) se requerirían para alimentar sus circuitos digitales por dos meses? ¿Este PDA cabría en su bolsillo?

24–5 Dieléctricos

54. (I) ¿Cuál es la capacitancia de dos placas paralelas cuadradas de 4.2 cm de lado si están separadas por 1.8 mm de parafina?

55. (II) Suponga que el capacitor del ejemplo 24-11 permanece conectado a la batería mientras se retira el dieléctrico. ¿Cuál sería el trabajo requerido para remover el dieléctrico en este caso?

56. (II) ¿Cuánta energía estaría almacenada en el capacitor del problema 43 si se coloca un dieléctrico de mica entre las placas? Considere que la mica tiene un espesor de 1.3 mm (y, por lo tanto, llena el espacio entre las placas).

57. (II) En el chip de computadora DRAM del problema 10, las dos placas paralelas conductoras del capacitor están separadas por un material aislante de 2.0 nm de espesor y con constante dieléctrica $K = 25$. *a*) Determine el área A (en μm^2) de las placas del capacitor. *b*) En diseños "planos" (anteriores), el capacitor estaba montado sobre la superficie de una pastilla de silicio con sus placas paralelas al plano de la pastilla (la base). Suponiendo que el área de la placa A represente la mitad del área de cada celda, determine ¿cuántos megabytes de memoria pueden localizarse en la pastilla de silicio de 3.0 cm^2 con el diseño plano? (un byte = 18 bits).

58. (II) Un capacitor de 3500 pF con espacio de aire se conecta a una batería de 32 V. Si el espacio entre las placas se llena con una pieza de mica, ¿cuánta carga fluirá desde la batería?

59. (II) Dos dieléctricos diferentes llenan la mitad del espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas, como se muestra en la figura 24-30. Determine una expresión para la capacitancia en términos de K_1, K_2, el área A de las placas y la separación d. [*Sugerencia:* ¿Puede considerar este capacitor como dos capacitores en serie o en paralelo?]

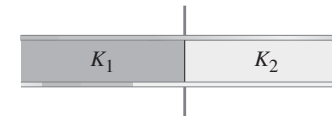


FIGURA 24–30
Problema 59.

60. (II) Dos dieléctricos diferentes llenan el espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas, como se ilustra en la figura 24-31. Determine una expresión para la capacitancia en términos de K_1, K_2, el área A de las placas y la separación $d_1 = d_2 = d/2$. [*Sugerencia:* ¿Puede considerar este capacitor como dos capacitores en serie o en paralelo?]

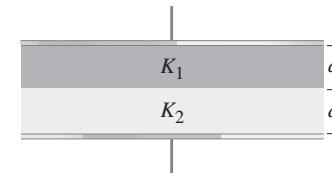


FIGURA 24–31
Problemas 60 y 61.

61. (II) Repita el problema 60 (figura 24-31), pero considere que la separación $d_1 \neq d_2$.

62. (II) Dos capacitores idénticos están conectados en paralelo y cada uno adquiere una carga Q_0 cuando se conectan a una fuente de voltaje V_0. La fuente de voltaje se desconecta y luego se inserta un dieléctrico ($K = 3.2$) para llenar el espacio entre las placas de uno de los capacitores. Determine *a*) la carga presente ahora en cada capacitor y *b*) el voltaje a través de cada capacitor.

63. (III) Una tablilla de ancho d y constante dieléctrica K se inserta a una distancia x dentro del espacio entre las placas cuadradas paralelas (de lado ℓ) de un capacitor como se indica en la figura 24-32. Determine, como función de x, *a*) la capacitancia, *b*) la energía almacenada si la diferencia de potencial es V_0, y *c*) la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre la tablilla (considere que V_0 es constante).

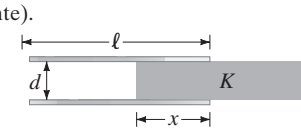


FIGURA 24–32
Problema 63.

64. (III) La cantidad de líquido (como por ejemplo nitrógeno líquido criogénico), disponible en un tanque de almacenamiento, se monitorea generalmente mediante un sensor de nivel de capacitancia. Este sensor es un capacitor cilíndrico alineado en forma vertical con radios conductores externo e interno R_a y R_b, cuya longitud ℓ abarca la altura completa del tanque. Cuando un líquido no conductor llena el tanque hasta una altura h ($\leq \ell$) desde el fondo del tanque, el dieléctrico en la región inferior y superior entre los cilindros conductores es el líquido (K_{liq}) y su vapor (K_V), respectivamente (figura 24-33). *a*) Determine una expresión para la fracción F del tanque llenado por el líquido en términos de la capacitancia C del sensor de nivel. [*Sugerencia:* Considere el sensor como una combinación de dos capacitores]. *b*) Conectando un instrumento para medir la capacitancia al sensor de nivel, es posible monitorear F. Suponga que las dimensiones del sensor son ℓ = 2.0 m, R_a = 5.0 mm y R_b = 4.5 mm. Para nitrógeno líquido (K_{liq} = 1.4, K_V = 1.0), ¿qué valores de C (en pF) corresponderán al tanque completamente lleno y completamente vacío?

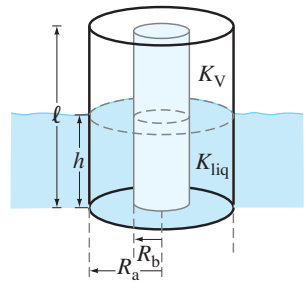


FIGURA 24–33
Problema 64.

*24–6 Descripción molecular de los dieléctricos

***65.** (II) Demuestre que el capacitor en el ejemplo 24-12, con un dieléctrico insertado, puede considerarse como equivalente a tres capacitores en serie y, con base en esta suposición, demuestre que se obtiene el mismo valor de la capacitancia que el obtenido en el inciso *g*) del ejemplo.

***66.** (II) Repita el ejemplo 24-12, suponiendo que la batería permanece conectada cuando que se inserta el dieléctrico. Además, ¿cuál es la carga libre en las placas después de que se añade el dieléctrico [considere esto como el inciso *h*) de este problema]?

***67.** (II) Considere el ejemplo 24-12 como modelo para deducir una expresión para la capacitancia de un capacitor de placas paralelas cuyas placas tienen un área A, una separación d, y un dieléctrico de constante dieléctrica K y espesor ℓ ($\ell < d$) localizado entre las placas.

***68.** (II) En el ejemplo 24-12, ¿qué porcentaje de la energía almacenada está en el campo eléctrico en el dieléctrico?

***69.** (III) El capacitor mostrado en la figura 24-34 se conecta a una batería de 90.0 V. Calcule y dibuje el campo eléctrico en toda la región entre todas las capas del capacitor. Encuentre la carga libre en la placa del capacitor y la carga inducida sobre las caras de la placa de vidrio dieléctrico.

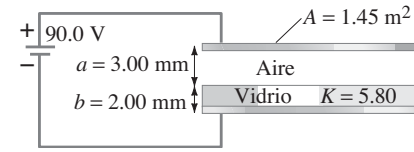


FIGURA 24–34
Problema 69.

Problemas generales

70. *a*) Una regla general para estimar la capacitancia C de una esfera conductora aislada de radio r es C (en pF) $\approx r$ (en cm). Esto es, el valor numérico de C en pF es aproximadamente el mismo que el valor numérico del radio de la esfera r en cm. Justifique esta regla. *b*) Modelando el cuerpo humano como una esfera conductora de 1 m de radio, use la regla anterior para estimar la capacitancia de su cuerpo. *c*) Mientras camina a través de una alfombra, adquiere una carga Q en exceso de "electricidad estática" y produce una chispa de 0.5 cm cuando se acerca a la perilla de metal de una puerta. El esfuerzo dieléctrico o resistencia dieléctrica del aire es 30 kV/cm. Utilice tal información para estimar Q (en μC).

71. Un *desfibrilador cardiaco* se usa para impartir una descarga a un corazón que está latiendo de manera errática. Se carga un capacitor en este aparato a 7.5 kV y almacena 1200 J de energía. ¿Cuál es su capacitancia?

72. Se ensambla un capacitor casero poniendo dos charolas de pastel de 9 pulgadas separadas 5.0 cm y conectándolas a las terminales opuestas de una batería de 9 V. Estime *a*) la capacitancia, *b*) la carga en cada placa, *c*) el campo eléctrico a la mitad entre las placas y *d*) el trabajo realizado por la batería para cargar las placas. *e*) ¿Cuál de los valores anteriores cambia si se inserta un dieléctrico?

73. Se conecta un capacitor descargado a una batería de 34.0 V hasta que está completamente cargado, después de lo cual se desconecta de la batería. Luego se inserta una tablilla de parafina entre las placas. ¿Cuál será ahora el voltaje entre las placas?

74. Se requiere de 18.5 J de energía para mover una carga de 13.0 mC desde una placa de un capacitor de 17.0 μF a la otra. ¿Cuál es la carga en cada placa?

75. Un capacitor enorme de 3.0 F tiene suficiente energía almacenada para calentar 3.5 kg de agua desde 22°C hasta 95°C. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

76. El cable coaxial de la figura 24-35 consiste en un alambre conductor cilíndrico interior de radio R_b rodeado por un aislante dieléctrico. Alrededor del alambre dieléctrico hay una funda conductora exterior de radio R_a, la cual generalmente está conectada a tierra. *a*) Determine una expresión para la capacitancia por unidad de longitud de un cable cuyo aislante tiene constante dieléctrica K. *b*) Para un cable dado, R_b = 2.5 mm y R_a = 9.0 mm. La constante dieléctrica del aislante dieléctrico es K = 2.6. Considere que hay un potencial de 1.0 kV entre el cable conductor interior y la funda conductora exterior. Determine la capacitancia por metro de longitud del cable.

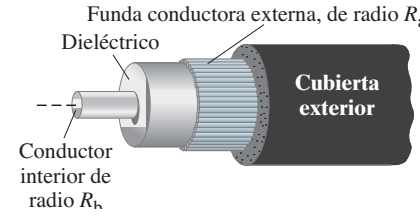


FIGURA 24–35
Problema 76.

77. El campo eléctrico entre las placas de un capacitor separado con papel (K = 3.75) es de 9.21 × 10^4 V/m. Las placas están separadas 1.95 mm y la carga en cada placa es de 0.675 μC. Determine la capacitancia de este capacitor y el área de cada placa.

78. Los capacitores pueden utilizarse como "contadores de carga eléctrica". Considere un capacitor de capacitancia C inicialmente descargado con su placa inferior conectada a tierra y su placa superior conectada a una fuente de electrones. *a*) Si viajan N electrones hacia la placa superior del capacitor, demuestre que la diferencia potencial resultante V a través del capacitor es directamente proporcional a N. *b*) Suponga que el instrumento utilizado para medir voltajes puede medir con exactitud sólo cambios de voltaje cercanos a 1 mV. ¿Qué valor de C sería necesario para detectar cada nuevo electrón recibido? *c*) Usando tecnología moderna de fabricación de semiconductores, puede fabricarse un capacitor con tamaño del orden de micrones con placas conductoras paralelas separadas por un óxido aislante de constate dieléctrica $K = 3$ y espesor $d = 100$ nm. Para distinguir la llegada de un electrón individual sobre la placa de uno de estos capacitores, determine el valor requerido de ℓ (en μm) suponiendo placas cuadradas de arista ℓ.

79. Un capacitor de placas paralelas está aislado con una carga $\pm Q$ en cada placa. Si la separación de las placas se reduce a la mitad y se inserta un dieléctrico (con constante K) en vez de aire, ¿en qué factor cambia la energía almacenada? ¿A qué atribuye usted el cambio en la energía potencial almacenada? ¿Cómo se compara el nuevo valor del campo eléctrico entre las placas con el valor original?

80. En tormentas eléctricas, la diferencia de potencial entre la Tierra y la parte inferior de las nubes puede ser tan alta como de 35,000,000 V. Por lo general, la parte inferior de las nubes está a 1500 m sobre la Tierra y puede tener una área de 120 km^2. Modelando el sistema Tierra-nube como un capacitor inmenso, calcule *a*) la capacitancia del sistema Tierra-nube, *b*) la carga almacenada en el "capacitor" y *c*) la energía almacenada entre el "capacitor".

81. Un capacitor multicapa de película tiene un voltaje máximo indicado de 100 V y una capacitancia de 1.0 μF. Está hecho de hojas alternadas de papel metálico conectadas entre sí y separadas por películas de poliéster dieléctrico. Las hojas tienen dimensiones de 12.0 mm por 14.0 mm y el grosor total del capacitor es de 6.0 mm (sin considerar el espesor del aislante en el exterior). El papel metálico está hecho de una capa de metal muy delgada depositada directamente sobre el dieléctrico, así que la mayor parte del grosor del capacitor se debe al dieléctrico. El esfuerzo dieléctrico del poliéster es cercana a 30×10^6 V/m. Estime la constante dieléctrica del material poliéster del capacitor.

82. Un capacitor de 3.5 μF se carga con una batería de 12.4 V y luego se desconecta de la batería. Cuando este capacitor (C_1) se conecta a un segundo capacitor (inicialmente descargado), C_2, el voltaje en el primero cae a 5.9 V. ¿Cuál es el valor de C_2?

83. La fuente de poder de un láser de nitrógeno tiene un capacitor de 0.080 μF con un voltaje máximo de 25 kV. *a*) Estime cuánta energía podría almacenarse en este capacitor. *b*) Si el 15% de esta energía eléctrica almacenada se convierte en energía luminosa de un pulso de luz que dura 4.0 μs, ¿cuál es la potencia del pulso láser?

84. Un capacitor de placas paralelas tiene placas cuadradas de 12 cm de lado separadas por 0.10 mm de plástico con constante dieléctrica $K = 3.1$. Las placas están conectadas a una batería haciendo que adquieran cargas opuestas. Puesto que las placas con cargas opuestas se atraen entre sí, ejercen una presión sobre el dieléctrico. Si esta presión es de 40.0 Pa, ¿cuál es el voltaje de la batería?

85. El capacitor variable del sintonizador de un radio antiguo consiste en cuatro placas conectadas entre sí, localizadas alternadamente entre otras cuatro placas, también conectadas entre sí (figura 24-36). Cada placa está separada de la placa adyacente por 1.6 mm de aire. Un juego de placas puede moverse de manera que el área de traslape de cada placa varía desde 2.0 cm^2 hasta 9.0 cm^2. *a*) ¿Están los siete capacitores conectados en serie o en paralelo? *b*) Determine el intervalo de valores de la capacitancia.

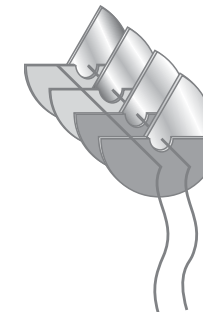


FIGURA 24–36
Problemas 85 y 86.

86. Una fuente de alto voltaje puede construirse con un capacitor variable con placas intercaladas con posibilidad de girar, como se muestra en la figura 24-36. Una versión de este tipo de capacitor con más placas tiene una capacitancia que puede variar desde 10 pF hasta 1 pF. *a*) Inicialmente, este capacitor se carga con una fuente de poder de 7500 V, cuando la capacitancia es de 8.0 pF. Luego se desconecta de la fuente de poder y la capacitancia se reduce a 1.0 pF haciendo girar las placas. ¿Cuál es el voltaje a través del capacitor ahora? *b*) ¿Cuál es una desventaja importante de este dispositivo como una fuente de poder de alto voltaje?

87. Un capacitor de 175 pF se conecta en serie con un capacitor desconocido y esta combinación en serie se conecta a la vez a una batería de 25.0 V. Si el capacitor de 175 pF almacena 125 pC de carga en sus placas, ¿cuál es la capacitancia desconocida?

88. Un capacitor de placas paralelas con placas de área de 2.0 cm^2 y una separación de aire de 0.50 mm se conecta a una batería de 12 V, cargándose por completo. Luego se desconecta la batería. *a*) ¿Cuál es la carga en el capacitor? *b*) Las placas se separan hasta una separación de 0.75 mm. ¿Cuál es ahora la carga en el capacitor? *c*) ¿Cuál es ahora la diferencia de potencial a través de las placas? *d*) ¿Cuánto trabajo fue requerido para mover las placas hasta su nueva separación?

89. En el circuito mostrado en la figura 24-37, $C_1 = 1.0$ μF, $C_2 = 2.0$ μF, $C_3 = 2.4$ μF, y se aplica un voltaje $V_{ab} = 24$ V, a través de los puntos a y b. Después de que C_1 se carga por completo, el interruptor se gira hacia la derecha. ¿Cuál es la carga final y cuál la diferencia de potencial en cada capacitor?

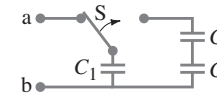


FIGURA 24–37
Problema 89.

90. El capacitor cilíndrico largo mostrado en la figura 24-38 consiste en cuatro cilindros concéntricos, con radios respectivos R_a, R_b, R_c y R_d. Los cilindros b y c están unidos por bandas de metal. Determine la capacitancia por unidad de longitud de este arreglo. (Considere que hay cargas opuestas e iguales en el cilindro más interno y en el cilindro más externo).

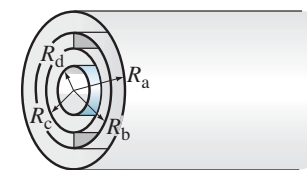


FIGURA 24–38
Problema 90.

91. Un capacitor de placas paralelas tiene placas de área A, separación entre las placas x y una carga almacenada Q en sus placas (figura 24-39). Encuentre el trabajo requerido para duplicar la separación hasta $2x$, suponiendo que la carga permanece constante en Q. Demuestre que su respuesta es congruente con el cambio en la energía almacenada en el capacitor. [*Sugerencia:* Véase el ejemplo 24-10].

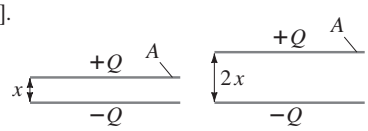


FIGURA 24–39
Problema 91.

92. Considere el uso de capacitores como celdas de memoria. Un capacitor cargado representaría un "uno" y un capacitor descargado, un "cero". Suponga que estos capacitores se fabricaron sobre una oblea de silicio y que cada uno tiene una capacitancia de 30 femto-farads (1 fF = 10^{-15} F.) El dieléctrico que llena el espacio entre las placas paralelas tiene una constante dieléctrica $K = 25$ y un esfuerzo dieléctrico (o resistencia dieléctrica) de 1.0×10^9 V/m. *a*) Si el voltaje de operación es de 1.5 V, ¿cuántos electrones se almacenarían en uno de estos capacitores cuando está completamente cargado? *b*) Sin considerar ningún factor de seguridad, ¿qué tan delgada debe ser la capa de dieléctrico que podíamos usar para operar a 1.5 V? *c*) Usando el grueso de la capa dada en el inciso *b*), ¿cuál sería el área de las placas del capacitor?

93. Para tener una idea de qué tan grande es un farad, suponga que usted quiere hacer un capacitor de placas paralelas lleno de aire de 1 F para un circuito que está construyendo. Para hacerlo de tamaño razonable, considere que limita el área de las placas a 1.0 cm^2. ¿Cuál tendría que ser el espacio entre las placas? ¿Se puede conseguir esto en la práctica?

94. Un estudiante que usa zapatos con suelas aislantes delgadas está de pie en un piso de metal conectado a tierra cuando apoya su mano en posición plana contra la pantalla de un monitor CRT de computadora. El voltaje dentro de la pantalla del monitor, a 6.3 mm de su mano, es de 25,000 V. La mano del estudiante y el monitor forman un capacitor; el estudiante es un conductor; además, hay otro capacitor entre el piso y sus pies. Usando valores razonables para las áreas de la mano y el pie, estime el voltaje del estudiante con respecto al piso. Considere que las suelas de los zapatos son de material vinílico de 1 cm de ancho.

95. Un capacitor de placas paralelas con área $A = 2.0$ m^2 y separación entre las placas de $d = 3.0$ mm se conecta a una batería de 45 V (figura 24-40a). *a*) Determine la carga sobre en el capacitor, el campo eléctrico, la capacitancia y la energía almacenada en el capacitor. *b*) Estando el capacitor conectado a la batería, se inserta una tablilla de plástico con constante dieléctrica $K = 3.2$ entre las capas del capacitor, de manera que el espacio entre las placas se llena completamente con el dieléctrico. ¿Cuáles son los nuevos valores de la carga, el campo eléctrico, la capacitancia y la energía almacenada U en el capacitor?

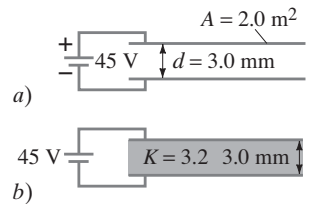


FIGURA 24–40
Problema 95.

96. Tratemos de estimar la carga de "electricidad estática" que puede resultar durante cada paso sobre un piso aislante. Suponga que la suela del zapato de una persona tiene área $A \approx 150$ cm^2 y cuando el pie se levanta del piso, durante cada paso, la suela adquiere un exceso de carga Q por frotamiento con el piso. *a*) Modele la suela como una superficie conductora plana con Q distribuida uniformemente sobre ella mientras se levanta el pie del piso. Si el esfuerzo dieléctrico del aire entre la suela y el piso, mientras se levanta el pie, es $E_S = 3 \times 10^6$ N/C, determine el exceso de carga máximo posible, $Q_{máx}$, que puede transferirse a la suela durante cada paso. *b*) Modele a una persona como una esfera conductora aislada de radio $r \approx 1$ m y estime la capacitancia de la persona. *c*) Después de levantar el pie del piso, suponga que el exceso de carga Q se distribuye rápidamente sobre la superficie entera de la persona. Estime la diferencia de potencial máxima que el individuo logra obtener con respecto al piso.

97. El papel tiene una constante dieléctrica $K = 3.7$ y un esfuerzo dieléctrico (o resistencia dieléctrica) de 15×10^6 V/m. Suponga que una hoja de papel común tiene un espesor de 0.030 mm. Usted fabrica un capacitor "hecho en casa" poniendo una hoja de papel de 21 × 14 cm entre dos hojas de papel aluminio (figura 24-41). El grosor del papel aluminio es de 0.040 mm. *a*) ¿Cuál es la capacitancia C_0 de su aparato? *b*) ¿Cuánta carga aproximadamente podría usted almacenar en su capacitor antes de que se rompa? *c*) Muestre en un esquema cómo colocaría hojas de papel y aluminio para formar una combinación en paralelo. Si construye 100 capacitores como éstos y conecta las orillas de las hojas en paralelo, de manera que tenga un capacitor sencillo largo de capacitancia 100 C_0, ¿qué tan grueso sería su nuevo capacitor? *d*) ¿Cuál es el voltaje máximo que podría aplicar a este capacitor de 100 C_0 sin romperlo?

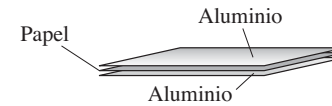


FIGURA 24–41
Problema 97.

*Problemas numéricos/por computadora

***98.** (II) Se entregó un capacitor lleno de aire a cada uno de seis estudiantes de física. Aunque las áreas fueron diferentes, la separación entre las placas, d, era la misma para los seis capacitores, pero no se conocía. Cada estudiante hizo una medición del área A y de la capacitancia C de su capacitor. Abajo se muestra la tabla con sus datos. Determine la separación d entre las placas usando los datos combinados y un programa de graficación o una hoja de cálculo.

Área (m^2)	Capacitancia (pF)
0.01	90
0.03	250
0.04	340
0.06	450
0.09	800
0.12	1050

Respuestas a los ejercicios

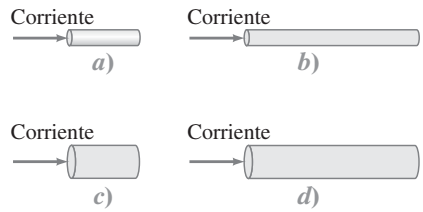
A: A.
B: 8.3×10^{-9} C.
C: *a*).
D: *e*).
E: *b*).

El brillo del delgado filamento de alambre de una bombilla eléctrica se debe a la corriente eléctrica que fluye a través de él. La energía eléctrica se transforma en energía térmica (por medio de las colisiones entre los electrones en movimiento con los átomos del alambre), lo que produce un aumento en la temperatura del alambre hasta el punto de hacerlo brillar. La corriente y la potencia eléctricas en un circuito eléctrico son muy importantes en la vida diaria. En este capítulo estudiaremos los circuitos ca y cd, incluyendo un análisis microscópico de la corriente eléctrica.

Corrientes eléctricas y resistencia

CAPÍTULO 25

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Los conductores que se ilustran a continuación están hechos de cobre y se encuentran a la misma temperatura. ¿Qué conductor presentará la mayor resistencia al flujo de carga que entra por el lado izquierdo? ¿Cuál ofrecerá la menor resistencia?



En los cuatro capítulos anteriores analizamos la electricidad estática, es decir, la electricidad que tiene que ver con cargas eléctricas en reposo. En este capítulo comenzamos nuestro estudio de cargas en movimiento; al flujo de carga lo llamaremos corriente eléctrica.

En nuestra vida diaria estamos acostumbrados a manejar corrientes eléctricas en cables y otros conductores. De hecho, la mayoría de los aparatos eléctricos dependen de corrientes eléctricas: la corriente en una bombilla eléctrica, la corriente en un aparato calefactor de una estufa o en un calentador eléctrico. Las corrientes eléctricas existen en conductores como cables y también en dispositivos como el CRT del monitor de un televisor o el de una computadora, cuyos electrones cargados viajan a través del espacio (sección 23-9).

CONTENIDO

25–1 La batería eléctrica
25–2 Corriente eléctrica
25–3 Ley de Ohm: Resistencia y resistores
25–4 Resistividad
25–5 Potencia eléctrica
25–6 Potencia en circuitos domésticos
25–7 Corriente alterna
25–8 Visión microscópica de la corriente eléctrica: Densidad de corriente y velocidad de deriva
*25–9 Superconductividad
*25–10 Conducción eléctrica en el sistema nervioso

FIGURA 25–1 Alessandro Volta. En esta pintura, Volta exhibe su batería a Napoleón en 1801.

En las secciones 21-9 y 22-3 vimos que, en situaciones electrostáticas, el campo eléctrico debe ser cero dentro de un conductor (si no fuera cero, habría movimiento de cargas). Pero cuando las cargas están en *movimiento* dentro de un conductor, generalmente *hay* un campo eléctrico dentro del conductor. De hecho, se necesita un campo eléctrico para poner las cargas en movimiento y para mantenerlas en movimiento en cualquier conductor normal. Es posible controlar el flujo de carga usando campos eléctricos y potencial eléctrico (voltaje), conceptos que ya hemos estudiado. Para mantener una corriente en un alambre se requiere que haya una diferencia de potencial, la cual puede ser suministrada por una batería.

Primero estudiaremos la corriente eléctrica desde el punto de vista macroscópico; esto es, la corriente medida en un laboratorio. Después veremos la corriente desde el punto de vista microscópico (teórico), como el flujo de electrones dentro de un alambre.

Hasta 1800, el desarrollo tecnológico de la electricidad consistió en producir cargas estáticas mediante fricción. Todo cambió ese año cuando Alessandro Volta (1745-1827, figura 25-1) inventó la batería eléctrica y con ella produjo el primer flujo de carga estacionario: una corriente eléctrica constante.

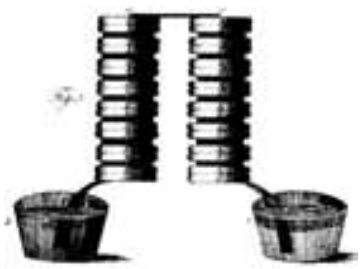
25–1 La batería eléctrica

Los acontecimientos que dieron lugar a la invención de la batería son interesantes. No sólo se trató de un importante avance científico, sino que también originó un famoso debate científico.

En la década de 1780, Luigi Galvani (1737-1798), profesor de la Universidad de Bologna, llevó a cabo una serie de experimentos sobre la contracción del músculo de las extremidades de una rana a través de la electricidad producida por electricidad estática. Encontró que el músculo también se contraía cuando se insertaban distintos metales dentro de la rana. Galvani creía que la fuente de la carga eléctrica estaba en el músculo de la rana o en el nervio mismo, y que el metal sólo transmitía la carga a los puntos adecuados. Cuando publicó su trabajo en 1791, llamó a esta carga "electricidad animal". Muchos, incluido el mismo Galvani, se preguntaron si se había descubierto la "fuerza viva" que se había buscado por tanto tiempo.

Alessandro Volta, en la Universidad de Pavia (ubicada a 200 km de donde se encontraba Galvani), escéptico de los resultados de su colega, llegó a pensar que la fuente de la electricidad no estaba en el animal, sino en *el contacto entre los diferentes metales*. Volta se dio cuenta de que un conductor húmedo, como el músculo de una rana o la humedad en el punto de contacto entre dos metales distintos, era necesario en el circuito para que éste fuera efectivo. Asimismo, mostró que el músculo en contracción de la rana era un instrumento sensible para detectar la "tensión eléctrica" o la "fuerza electromotriz" (los términos que él usaba para lo que hoy conocemos como potencial); de hecho, era más sensible que los mejores electroscopios disponibles (sección 21-4) desarrollados por él y otros.†

FIGURA 25–2 Una batería voltaica, tomada de la publicación original de Volta.



La investigación de Volta permitió conocer que ciertas combinaciones de metales producían un efecto mayor que otras; luego, utilizando sus mediciones, elaboró una lista de tales combinaciones en orden de efectividad. (Los químicos aún utilizan esta "serie electroquímica".) De igual manera, encontró que el carbón podía usarse en lugar de alguno de los metales.

Fue entonces que Volta realizó su mayor contribución a la ciencia. Entre un disco de zinc y otro de plata, colocó un pedazo de tela o papel humedecido, sumergido en una solución salina o en ácido diluido, y apiló una "batería" de tales uniones, como se muestra en la figura 25-2. Esta "pila" o "batería" manifestó una diferencia de potencial mucho mayor que las anteriores. De hecho, cuando se juntaron tiras de metal conectadas a los dos extremos de la pila, se produjo una chispa. Volta había diseñado y construido la primera pila eléctrica. Publicó su descubrimiento en 1800.

†El electroscopio más sensible de Volta medía aproximadamente 40 V por grado (ángulo de separación entre las hojas). Sin embargo, fue capaz de estimar diferencias de potencial producidas por diferentes metales en contacto: para una unión plata-zinc, obtuvo 0.7 V, muy cercano al valor actual de 0.78 V.

Pilas eléctricas y baterías

Una batería produce electricidad al transformar energía química en energía eléctrica. Actualmente contamos con gran variedad de pilas eléctricas y baterías: desde las baterías de una linterna de mano hasta la batería de almacenamiento de un automóvil. Las baterías más simples contienen dos placas o varillas hechas de metales distintos (una de ellas puede ser de carbón) llamadas **electrodos**. Los electrodos están inmersos en una solución, como un ácido diluido llamado **electrolito**. Un dispositivo como éste se conoce con el nombre de **celda** o **pila eléctrica**; varias pilas conectadas entre sí constituyen una **batería**, aunque actualmente una pila simple aún se conoce como batería. Las reacciones químicas implicadas en la mayoría de las pilas eléctricas son muy complicadas. Aquí describimos cómo funciona una pila muy simple, poniendo énfasis en los aspectos físicos.

La celda que se ilustra en la figura 25-3 usa ácido sulfúrico diluido como electrolito. Uno de los electrodos está hecho de carbón y el otro de zinc. Las partes de cada electrodo que están afuera de la solución se llaman **terminales**, las cuales se conectan a alambres o circuitos. El ácido tiende a disolver el electrodo de zinc. Cada átomo de zinc deja atrás dos electrones en el electrodo y entra a la solución como un ion positivo. El electrodo de zinc adquiere así una carga negativa. Conforme se carga positivamente el electrolito, arranca electrones del electrodo de carbón. En consecuencia, el electrodo de carbón se carga positivamente. Puesto que hay cargas opuestas en los dos electrodos, se establece una diferencia de potencial entre las dos terminales.

En una pila cuyas terminales no están conectadas, se disuelve sólo una pequeña cantidad del zinc, ya que, mientras el electrodo de zinc se torna más negativo, los nuevos iones positivos de zinc producidos son atraídos de regreso hacia el electrodo. Como resultado, se mantiene una diferencia de potencial (o voltaje) particular entre las dos terminales. Si se permite que la carga fluya entre las terminales, por ejemplo, mediante un alambre (o una bombilla), entonces será posible disolver más zinc. Después de un tiempo, alguno de los electrodos se desgasta y la batería "se muere".

El voltaje que hay entre las terminales de una batería depende de qué estén hechos los electrodos y de su capacidad relativa para disolverse o ceder electrones.

Cuando se conectan dos o más pilas de manera que la terminal positiva de una se conecta a la terminal negativa de la siguiente, se dice que están conectadas en *serie* y sus voltajes se suman. Así, el voltaje entre los extremos de dos baterías de linterna de 1.5 V conectadas en serie es de 3.0 V; de igual forma, las seis celdas de 2 V de la batería de almacenamiento de un automóvil producen un voltaje de 12 V. La figura 25-4a presenta el diagrama de una "batería seca" común o la "batería de una linterna" usada en radios portátiles o reproductores de CD, linternas, etcétera, mientras que la figura 25-4b muestra dos pilas más pequeñas en serie, conectadas a una bombilla. Una bombilla consiste en un alambre enrollado, delgado (el filamento), dentro de un bulbo de vidrio evacuado, como se observa en la figura 25-5 y en la foto que viene al inicio de este capítulo (página 651). El filamento se calienta mucho (3000 K) y brilla cuando la carga pasa a través de él.

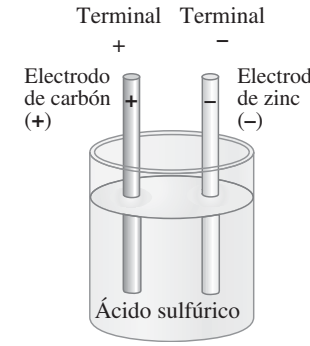
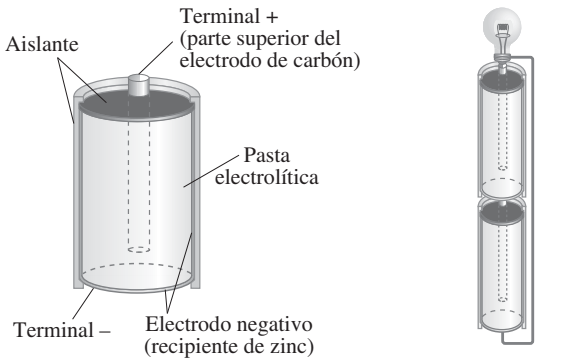


FIGURA 25–3 Celda o pila eléctrica simple.

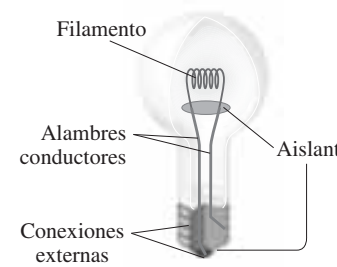
FIGURA 25–4 *a*) Diagrama de una pila seca ordinaria (como una pila D o AA). El recipiente cilíndrico de zinc está cubierto en sus extremos; su base plana es la terminal negativa. *b*) Dos pilas secas (tipo AA) conectadas en serie. Observe que la terminal positiva de una pila está conectada a la terminal negativa de la otra.



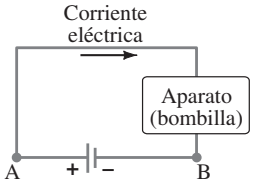
a) Una pila D

b) Dos baterías AA

FIGURA 25–5 Una bombilla: el delgado alambre del filamento se calienta tanto que brilla. Este tipo de bombilla se conoce como bombilla o foco incandescente (en contraste con un bulbo fluorescente).



a)



b)

FIGURA 25–6 *a*) Un circuito eléctrico sencillo. *b*) Esquema del mismo circuito, que consiste en una batería, alambres conductores (líneas grises gruesas) y una bombilla u otro aparato.

⚠ **CUIDADO**

Una batería no crea carga; una bombilla eléctrica no destruye ninguna carga

25–2 Corriente eléctrica

El propósito de una batería es producir una diferencia de potencial, la cual puede provocar un movimiento de cargas. Cuando se forma una trayectoria de conducción entre las terminales de una batería, tenemos un **circuito eléctrico** (figura 25-6a). En cualquier diagrama de un circuito, como en la figura 25-6b, usamos el símbolo

[símbolo de una batería]

para representar una batería. El aparato que se conecta a la batería puede ser una bombilla eléctrica, un calentador, un radio o algún otro. Cuando se forma un circuito de esta manera, la carga eléctrica puede fluir a través de los cables del circuito desde una terminal de la batería hasta la otra terminal, siempre y cuando el camino de conducción sea continuo. A cualquier flujo de carga como éste, se le conoce como **corriente eléctrica**.

Con mayor precisión, la corriente eléctrica en un alambre se define como la cantidad de carga neta que pasa a través de la sección transversal completa del alambre en cualquier punto por unidad de tiempo. Así, la corriente eléctrica promedio $\bar{I}$ está dada por:

$$\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \qquad \textbf{(25–1a)}$$

donde ΔQ es la cantidad de carga que pasa a través del conductor en cualquier posición durante el intervalo de tiempo Δt. La corriente instantánea se define como el límite

$$I = \frac{dQ}{dt}. \qquad \textbf{(25–1b)}$$

La corriente eléctrica se mide en coulombs por segundo; a este cociente se le da el nombre especial de **ampere** (que se abrevia amp o A), en honor al físico francés André Ampère (1775-1836). Así, 1 A = 1 C/s. A menudo se emplean unidades más pequeñas de corriente, tales como el miliampere (1 mA = 10^{-3} A) y el microampere (1 μA = 10^{-6}A).

Una corriente puede fluir en un circuito sólo si hay una trayectoria *continua* de conducción. En este caso, tenemos un **circuito completo**. Si el circuito se interrumpe, por ejemplo, por un alambre roto, le llamamos **circuito abierto** y no hay flujo de corriente. En cualquier circuito sencillo, con una sola trayectoria para la corriente, como se muestra en la figura 25-6b, se tiene una corriente estacionaria en cualquier punto en cualquier instante (por ejemplo, el punto A), que es igual a la que existe en cualquier otro punto (digamos, el punto B). Lo anterior se deduce a partir de la ley de conservación de la carga eléctrica: la carga no desaparece. Una batería no crea (o no destruye) ninguna carga neta, así como una bombilla tampoco absorbe ni destruye carga.

EJEMPLO 25–1 **La corriente es un flujo de carga.** Se tiene una corriente estacionaria de 2.5 A en un alambre durante 4.0 min. *a*) ¿Cuál es la carga total que pasó por un punto dado del circuito durante los 4.0 min? *b*) ¿A cuántos electrones equivale esto?

PLANTEAMIENTO La corriente es el flujo de carga por unidad de tiempo (ecuación 25-1), así que la cantidad de carga que pasa por un punto es el producto de la corriente por el intervalo. Para calcular el número de electrones en el inciso *b*), dividimos la carga obtenida entre la carga del electrón.

SOLUCIÓN *a*) Puesto que la corriente es de 2.5 A, o 2.5 C/s, tenemos que en 4.0 min (= 240 s) la carga total que pasó por un punto dado del circuito fue, de acuerdo con la ecuación 25-1,

$$\Delta Q = I\,\Delta t = (2.5\ \text{C/s})(240\ \text{s}) = 600\ \text{C}.$$

b) La carga de un electrón es de 1.60×10^{-19} C, así que 600 C están formados por

$$\frac{600\ \text{C}}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C/electrón}} = 3.8 \times 10^{21}\ \text{electrones}.$$

EJERCICIO A Si por un punto de un alambre pasan 1 millón de electrones, ¿cuál es la corriente en amperes?

EJEMPLO CONCEPTUAL 25–2 **Cómo conectar una batería.** ¿Qué es lo que está mal, en cada uno de los esquemas mostrados en la figura 25-7, para encender una bombilla eléctrica usando una batería de linterna y un simple alambre?

RESPUESTA *a*) No hay una trayectoria cerrada para que la carga fluya alrededor. Las cargas podrían empezar a fluir brevemente desde la batería hacia la bombilla, pero ahí llegan a un "callejón sin salida", por lo que el flujo cesará de inmediato.

b) Ahora tenemos una trayectoria cerrada, pero el alambre toca sólo una terminal de la batería, así que no hay diferencia de potencial en el circuito que produzca movimiento de cargas.

c) Nada está mal. Éste es un circuito completo: la carga puede fluir desde una terminal de la batería, a través del alambre y la bombilla, hacia la otra terminal. Este esquema encenderá la bombilla.

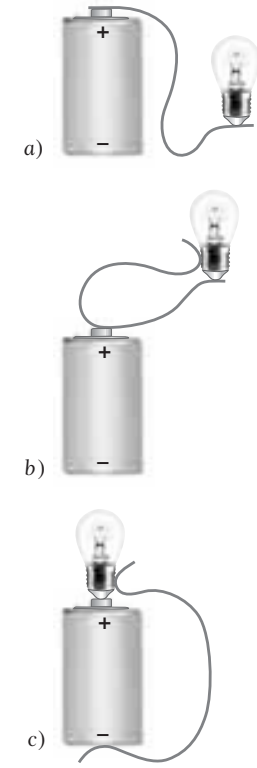


FIGURA 25–7 Ejemplo 25–2.

En muchos circuitos reales, los alambres están conectados a un conductor común que provee continuidad. A este conductor común se le llama **tierra**, generalmente representada con el símbolo ⏚ o ⏚, y en realidad está conectado a la tierra en un edificio o en una casa. En un automóvil se le llama "tierra" a una de las terminales de la batería, pero no está conectada a la tierra —está conectada al chasis del automóvil, como si fuera una conexión a una bombilla u otros aparatos. Así que el chasis del automóvil es un conductor en cada circuito, lo que asegura una trayectoria continua para que fluya la carga.

En el capítulo 21 vimos que los conductores contienen muchos electrones libres. Así, si un alambre conductor continuo se conecta a las terminales de una batería, los electrones cargados negativamente fluirán en el alambre. Cuando el alambre se conecta por primera vez, la diferencia de potencial entre las terminales de la batería establece un campo eléctrico dentro del alambre[†] y paralelo a él. Los electrones libres en un extremo del alambre son atraídos hacia la terminal positiva; al mismo tiempo, otros electrones abandonan la terminal negativa de la batería y entran al alambre en el otro extremo. A lo largo del alambre se establece un flujo continuo de electrones que comienza tan pronto como el alambre se conecta a *ambas* terminales. Sin embargo, cuando se establecieron las convenciones de carga positiva y carga negativa hace dos siglos, se consideró que la carga positiva fluía en el alambre. Para casi todos los casos, una carga positiva que fluye en un sentido es equivalente a una carga negativa, que fluye en sentido opuesto,[‡] como se observa en la figura 25-8. Hoy utilizamos todavía la convención histórica de flujo de carga positiva cuando analizamos la dirección de una corriente. En consecuencia, cuando hablamos de la dirección de la corriente en un circuito, queremos indicar la dirección en la que fluirían las cargas positivas. Lo anterior se conoce en ocasiones como la **corriente convencional**. Cuando queramos hablar de la dirección del flujo de los electrones, estableceremos específicamente que se trata de la corriente de los electrones. En los líquidos y gases, las cargas positivas y negativas (iones) pueden moverse.

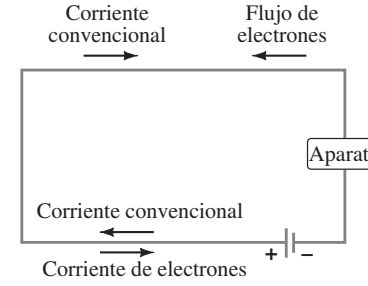


FIGURA 25–8 La corriente convencional de + a – es equivalente a un flujo de electrones negativos de – a +.

25–3 Ley de Ohm: Resistencia y resistores

Para producir una corriente eléctrica en un circuito se requiere establecer una diferencia de potencial. Una manera de lograr una diferencia de potencial a través de un alambre es conectar sus extremos a las terminales opuestas de una batería. Fue Georg Simon Ohm (1787-1854) quien estableció en forma experimental que la corriente en un alambre de metal es proporcional a la diferencia de potencial V aplicada a sus extremos:

$$I \propto V.$$

Si conectamos, por ejemplo, un alambre a una batería de 6 V, el flujo de corriente será dos veces mayor que si el alambre estuviera conectado a una batería de 3 V. Se encuentra también que invertir el signo del voltaje no afecta la magnitud de la corriente.

[†]Esto no contradice lo que se aseguró en la sección 21-9: que en el caso *estático* no puede haber un campo eléctrico dentro de un conductor, pues de otra manera las cargas se moverían. De hecho, cuando hay un campo eléctrico dentro de un conductor, las cargas se mueven, por lo que obtenemos una corriente eléctrica.

[‡]Una excepción de esto se analiza en la sección 27-8.

Una analogía útil compara el flujo de corriente eléctrica en un alambre con el flujo de agua en un río, o en una tubería, afectado por la gravedad. Si el río o la tubería corren de manera horizontal, la tasa de flujo es pequeña. Pero si un extremo está más alto que el otro, la tasa de flujo, o la corriente, será mayor. Cuanto mayor sea la diferencia de alturas, más rápida será la corriente. En el capítulo 23 vimos que la diferencia de potencial es análoga, en el caso gravitacional, a la altura de un acantilado. Lo anterior se aplica en el presente caso a la altura a través de la cual se da el flujo. Así como un incremento en la altura puede producir un incremento en el flujo de agua, una mayor diferencia de potencial eléctrico, o voltaje, produce una mayor corriente eléctrica.

La magnitud de una corriente en un alambre depende no sólo del voltaje, sino también de la resistencia que ofrece el alambre al flujo de los electrones. Las paredes de una tubería, o la ribera de un río y las rocas en el camino, ofrecen resistencia a la corriente de agua. De la misma manera, el flujo de los electrones encuentra obstáculos en las interacciones con los átomos del alambre. A mayor resistencia, menos corriente para un voltaje dado V. Definimos entonces la *resistencia* eléctrica de forma que la corriente es inversamente proporcional a la resistencia; esto es,

$$I = \frac{V}{R} \qquad \textbf{(25–2a)}$$

donde R es la **resistencia** del alambre o de otros aparatos, V es la diferencia de potencial aplicada a través del alambre o del aparato e I es la corriente que circula por él. La ecuación 25-2a se escribe de manera habitual como

"LEY" DE OHM

$$V = IR. \qquad \textbf{(25–2b)}$$

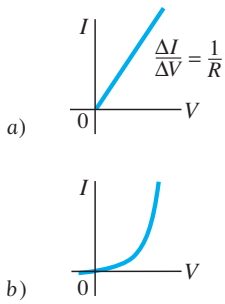


FIGURA 25–9 Gráficas de corriente contra voltaje para *a*) un material conductor que obedece la ley de Ohm y *b*) un aparato no óhmico; en este caso, un diodo semiconductor.

Como ya se mencionó, Ohm encontró experimentalmente que en un metal conductor R es una constante independiente de V, resultado que se conoce como la **ley de Ohm**. A la ecuación 25-2b, $V = RI$, se le llama en ocasiones ley de Ohm, pero sólo cuando nos referimos a materiales o aparatos para los cuales R es una constante independiente de V. Sin embargo, R no es una constante para muchas sustancias que no sean metales, como los diodos, los tubos de vacío, los transistores, etcétera. Aun el filamento de una bombilla eléctrica no es un material óhmico: la resistencia medida es baja para pequeñas corrientes, pero mucho más alta a su corriente normal de operación, que la pone a una alta temperatura necesaria para hacerla brillar (3000 K). Así que la "ley" de Ohm no es una ley fundamental, sino más bien una descripción de cierto tipo de materiales: metales conductores, cuya temperatura no cambia mucho. A los materiales o aparatos que no siguen la ley de Ohm (R = constante) se les conoce como materiales no óhmicos. Véase la figura 25-9.

La unidad de resistencia se llama **ohm**, que se abrevia con la letra griega omega mayúscula Ω. Puesto que $R = V/I$, vemos que 1.0 Ω equivale a 1.0 V/A.

EJEMPLO CONCEPTUAL 25–3 **Corriente y potencial.** Una corriente I entra a un resistor R como se indica en la figura 25-10. *a*) ¿El potencial es mayor en el punto A o en el punto B? *b*) ¿La corriente es mayor en el punto A o en el punto B?

RESPUESTA *a*) La carga positiva siempre fluye de + a −, de un potencial alto a un potencial bajo. Piense de nuevo en la analogía gravitacional: una masa se moverá de una región de alto potencial gravitacional a otra de menor potencial. Así que para una corriente positiva I, el punto A está a un potencial mayor que el punto B.

b) Por conservación de carga, cualquier cantidad de carga que fluya hacia el resistor en el punto A será igual a la cantidad de carga que emerja en el punto B. La carga o la corriente no se "gasta" en el resistor, así como un objeto que cae a través de un potencial gravitacional no gana ni pierde masa. En consecuencia, la corriente es la misma en los puntos A y B.

FIGURA 25–10 Ejemplo 25–3.

Un decremento en el potencial eléctrico, como del punto A al punto B en el ejemplo 25-3, se conoce generalmente como **caída de potencial** o **caída de voltaje**.

EJEMPLO 25–4 **Resistencia de una bombilla de linterna.** Una pequeña bombilla de linterna (figura 25-11) toma 300 mA de su batería de 1.5 V. *a*) ¿Cuál es la resistencia de la bombilla? *b*) Si la batería se debilita y el voltaje cae a 1.2 V, ¿en cuánto variará la corriente?

PLANTEAMIENTO Podemos aplicar la ley de Ohm a la bombilla, donde el voltaje aplicado a través de ella es el voltaje de la batería.

SOLUCIÓN *a*) Convertimos 300 mA a 0.30 A y usamos la ecuación 25-2a o b:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.5\text{ V}}{0.30\text{ A}} = 5.0\,\Omega.$$

b) Si la resistencia permanece constante, la corriente sería

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1.2\text{ V}}{5.0\,\Omega} = 0.24\text{ A} = 240\text{ mA},$$

es decir, una disminución de 60 mA.

NOTA Con la corriente menor en el inciso *b*), la temperatura del filamento de la bombilla sería menor y la bombilla brillaría menos. Además, la resistencia depende de la temperatura (sección 25-4), así que nuestros cálculos son tan sólo una aproximación.

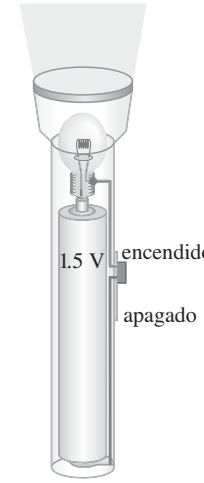


FIGURA 25–11 Linterna (ejemplo 25-4). Observe cómo el circuito se cierra a lo largo de la banda lateral.

EJERCICIO B ¿Qué resistencia debe conectarse a una batería de 9.0 V para conseguir una corriente de 10-mA? *a*) 9 Ω, *b*) 0.9 Ω, *c*) 900 Ω, *d*) 1.1 Ω, *e*) 0.11 Ω.

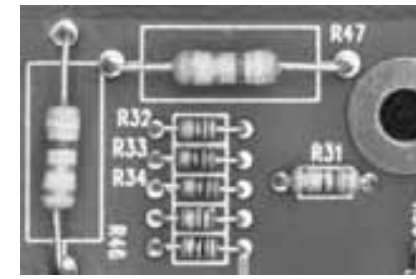
Todos los aparatos eléctricos, desde calentadores y bombillas hasta amplificadores estéreo, ofrecen resistencia al flujo de la corriente. Los filamentos en las bombillas eléctricas (figura 25-5) y los calentadores eléctricos son tipos especiales de alambre, cuya resistencia origina que se calienten mucho. Por lo general, los alambres conectores tienen una resistencia muy baja en comparación con la resistencia del alambre del filamento o las bobinas de un calentador, así que los alambres conectores por lo general tienen un efecto mínimo en la magnitud de la corriente. En muchos circuitos, en particular en aparatos electrónicos, se utilizan **resistores** para controlar la cantidad de corriente. Los resistores cuentan con resistencias que varían desde menos de un ohm hasta millones de ohms (véase las figuras 25-12 y 25-13). Los tipos principales son: resistores de "alambre enrollado", formados por una bobina de alambre fino; resistores de "composición", hechos generalmente de carbón, y carbones delgados o películas de metal.

Cuando dibujamos el diagrama de un circuito, usamos el símbolo

[símbolo de resistor]

para indicar una resistencia. Sin embargo, los alambres cuya resistencia es despreciable, se dibujan sólo con líneas rectas simples.

FIGURA 25–12 Fotografía de resistores (con franjas), junto con otros aparatos en una tabla de circuito.



Código de color de resistores

Color	Número	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	1	
Café	1	10^1	1%
Rojo	2	10^2	2%
Naranja	3	10^3	
Amarillo	4	10^4	
Verde	5	10^5	
Azul	6	10^6	
Violeta	7	10^7	
Gris	8	10^8	
Blanco	9	10^9	
Oro		10^{-1}	5%
Plata		10^{-2}	10%
Sin color			20%

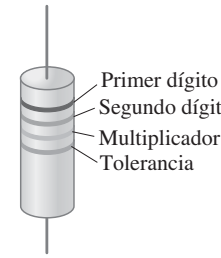


FIGURA 25–13 El valor de la resistencia de un resistor dado está escrito en el exterior o mediante un código de color, como se indica arriba y en la tabla: los primeros dos colores representan los primeros dos dígitos del valor de la resistencia, el tercer color representa la potencia de 10 a la que debe multiplicarse, mientras el cuarto es la tolerancia del fabricante. Por ejemplo, un resistor cuyos cuatro colores son rojo, verde, amarillo y plata tiene una resistencia de $25 \times 10^4\,\Omega = 250{,}000\,\Omega = 250\,\text{k}\Omega$, más o menos 10%. Un ejemplo alternativo de un código simple es un número como 104, que significa $R = 1.0 \times 10^4\,\Omega$.

Algunas aclaraciones útiles

Resumimos aquí algunos de los posibles malentendidos y hacemos ciertas aclaraciones. Las baterías no proveen una corriente constante. En realidad, las baterías fueron diseñadas para mantener una diferencia de potencial constante, o prácticamente constante. (Para conocer algunos detalles, véase el siguiente capítulo.) Así que una batería debe considerarse una fuente de voltaje. El voltaje se aplica *a través* del alambre o el aparato.

⚠ CUIDADO
El voltaje se aplica a través *de un aparato, mientras que la corriente pasa* por *el aparato*

Las corrientes eléctricas pasan *a lo largo* del alambre o el aparato (conectado a una batería) y su magnitud depende de la resistencia del aparato. La resistencia es una *propiedad* del alambre o del aparato. El voltaje, por otro lado, es externo al alambre o al aparato, y se aplica a través de los dos extremos del alambre o del aparato. La corriente a lo largo del aparato puede ser la "respuesta": la corriente aumenta si el voltaje se incrementa o si la resistencia disminuye, es decir, $I = V/R$.

En un alambre, la dirección de la corriente siempre es paralela al alambre, sin importar cómo se curve el alambre, al igual que el agua en una tubería. La dirección de la corriente convencional (positiva) es de mayor potencial (+) a menor potencial (−).

⚠ CUIDADO
La corriente no se consume

La corriente o la carga no aumentan, ni disminuyen ni se "desgastan" cuando pasan por un alambre o un aparato. La cantidad de carga que entra por un extremo es igual a la cantidad de carga que sale por el otro extremo.

25–4 Resistividad

Se encuentra en forma experimental que la resistencia R de un alambre es directamente proporcional a su longitud ℓ e inversamente proporcional a su sección transversal A. Esto es,

$$R = \rho \frac{\ell}{A}, \tag{25–3}$$

donde ρ, la constante de proporcionalidad, es la **resistividad** y depende del material utilizado. Valores típicos de ρ, cuyas unidades son $\Omega \cdot m$ (véase la ecuación 25-3), se indican para varios materiales en la columna central de la tabla 25-1, que está dividida en categorías de *conductores*, *aislantes* y *semiconductores* (véase la sección 21-3). Los valores dependen en parte de la pureza, el tratamiento térmico, la temperatura y otros factores. Observe que la plata tiene la menor resistividad; por lo tanto, es el mejor conductor (aunque es un material caro). El cobre está cerca y es mucho más barato, razón por la cual la mayoría de los alambres están hechos de cobre. El aluminio, aunque con una resistividad más alta, es mucho menos denso que el cobre; por lo tanto, es más apropiado que el cobre en algunas situaciones —por ejemplo, para líneas de transmisión— porque su resistencia, para el mismo peso, es menor que la del cobre.

TABLA 25–1 Resistividad y coeficientes de temperatura (a 20°C)

Material	Resistividad, ρ ($\Omega \cdot$ m)	Coeficiente de temperatura, α $(C°)^{-1}$
Conductores		
Plata	1.59×10^{-8}	0.0061
Cobre	1.68×10^{-8}	0.0068
Oro	2.44×10^{-8}	0.0034
Aluminio	2.65×10^{-8}	0.00429
Tungsteno	5.6×10^{-8}	0.0045
Hierro	9.71×10^{-8}	0.00651
Platino	10.6×10^{-8}	0.003927
Mercurio	98×10^{-8}	0.0009
Nicromo (aleación de Ni, Fe y Cr)	100×10^{-8}	0.0004
Semiconductores†		
Carbón (grafito)	$(3 – 60) \times 10^{-5}$	−0.0005
Germanio	$(1 – 500) \times 10^{-3}$	−0.05
Silicio	0.1 – 60	−0.07
Aislantes		
Vidrio	$10^{9} – 10^{12}$	
Hule duro	$10^{13} – 10^{15}$	

† Los valores dados dependen fuertemente de la presencia de impurezas aun en pequeñas cantidades

La **conductividad** se define como el recíproco de la resistividad

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \qquad \textbf{(25–4)}$$

y tiene unidades de $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$.

EJERCICIO C Regrese a la pregunta inicial del capítulo (página 651) y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO D Un alambre de cobre tiene una resistencia de 10 Ω. ¿Cuál sería su resistencia si se corta a la mitad? *a*) 20 Ω, *b*) 10 Ω, *c*) 5 Ω, *d*) 1 Ω, *e*) ninguna de las anteriores.

EJEMPLO 25–5 **Alambres de altavoces.** Suponga que quiere conectar su estéreo a altavoces remotos (figura 25-14). *a*) Si cada alambre debe ser de 20 m de longitud, ¿cuál es el diámetro que debe usarse para alambres de cobre con una resistencia menor de 0.10 Ω por alambre? *b*) Si la corriente para cada altavoz es de 4.0 A, ¿cuál es la diferencia de potencial, o caída de voltaje, a través de cada alambre?

PLANTEAMIENTO Resolvemos la ecuación 25-3, para obtener el área A, con lo que será posible calcular el radio del alambre usando $A = \pi r^2$. El diámetro es $2r$. En el inciso *b*) podemos usar la ley de Ohm, $V = IR$.

SOLUCIÓN *a*) Despejamos el área A en la ecuación 25-3; encontramos el valor ρ para el cobre en la tabla 25-1:

$$A = \rho \frac{\ell}{R} = \frac{(1.68 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m})(20\,\text{m})}{(0.10\,\Omega)} = 3.4 \times 10^{-6}\,\text{m}^2.$$

El área A de la sección transversal de un alambre circular es $A = \pi r^2$. Por lo tanto, el radio debe ser por lo menos de

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 1.04 \times 10^{-3}\,\text{m} = 1.04\,\text{mm}.$$

El diámetro es el doble del radio; por lo tanto, tiene que ser por lo menos de $2r = 2.1$ mm. *b*) A partir de $V = IR$, encontramos que la caída de voltaje a través de cada alambre es

$$V = IR = (4.0\,\text{A})(0.10\,\Omega) = 0.40\,\text{V}.$$

NOTA La caída de voltaje a través de los alambres reduce el voltaje que llega a los altavoces desde el amplificador del estéreo, lo que disminuye un poco el nivel del sonido.

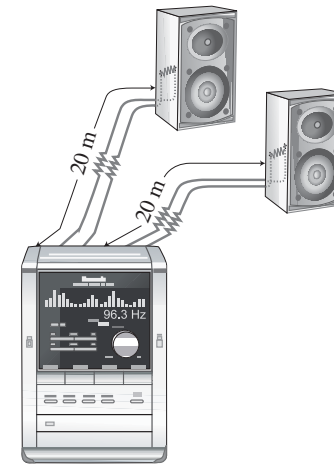


FIGURA 25–14 Ejemplo 25–5.

EJEMPLO CONCEPTUAL 25–6 **Cambios en la resistencia por alargamiento.** Suponga que un alambre con resistencia R puede estirarse de manera uniforme hasta alcanzar el doble de su longitud inicial. ¿Qué le pasará a su resistencia?

RESPUESTA Si la longitud ℓ se duplica, entonces, el área A de la sección transversal se reduce a la mitad, puesto que el volumen ($V = A\ell$) del alambre permanece constante. A partir de la ecuación 25-3, vemos que la resistencia se incrementará en un factor de cuatro $(2/\frac{1}{2} = 4)$.

EJERCICIO E Los alambres de cobre en una casa tienen valores típicos de diámetro de 1.5 mm. ¿Qué tan largo debe ser un alambre para tener una resistencia de 1.0 Ω?

Dependencia con la temperatura de la resistividad

La resistividad de un material depende un poco de la temperatura. Por lo general, la resistencia de los metales se incrementa con la temperatura. Lo anterior no nos sorprende, puesto que a mayores temperaturas los átomos se mueven más rápido y están arreglados en patrones menos ordenados. En consecuencia, esperamos que interfieran más con el flujo de los electrones. Si el cambio de temperatura no es muy grande, la resistividad de los metales generalmente se incrementa de manera lineal con el cambio de temperatura. Esto es,

$$\rho_T = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad \textbf{(25–5)}$$

donde ρ_0 es la resistividad a una temperatura de referencia T_0 (digamos 0° C o 20° C), ρ_T es la resistividad a temperatura T y α es el *coeficiente térmico de la resistividad*. La tabla 25-1 indica los valores de α. Observe que el coeficiente de temperatura para los semiconductores puede ser negativo. ¿Por qué? Parece que a mayores temperaturas, algunos de los electrones que normalmente no están libres en un semiconductor se liberan y logran contribuir a la corriente. Así, la resistencia de un semiconductor disminuye al aumentar la temperatura.

FÍSICA APLICADA

Termómetro de resistencia

EJEMPLO 25–7 **Termómetro de resistencia.** La variación de la resistencia eléctrica con la temperatura puede utilizarse para realizar mediciones precisas de temperatura. Por lo general se usa platino, pues es un material relativamente libre de efectos corrosivos y tiene un alto punto de fusión. Suponga que a 20.0° C la resistencia de un termómetro de resistencia de platino es de 164.2 Ω. Cuando se coloca en una solución particular, la resistencia es de 187.4 Ω. ¿Cuál es la temperatura de la solución?

PLANTEAMIENTO Ya que la resistencia R es directamente proporcional a la resistividad ρ, podemos combinar las ecuaciones 25-3 y 25-5 para encontrar R como función de la temperatura T y luego despejar T en esa ecuación.

SOLUCIÓN Multiplicamos la ecuación 25-5 por (ℓ/A) para obtener (véase también la ecuación 25-3).

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)].$$

Aquí $R_0 = \rho_0\ell/A$ es la resistencia del alambre a $T_0 = 20.0°$ C. Despejamos T de esta ecuación y encontramos (véase la tabla 25-1 para α)

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = 20.0°\text{C} + \frac{187.4\ \Omega - 164.2\ \Omega}{(3.927 \times 10^{-3}(\text{C}°)^{-1})(164.2\ \Omega)} = 56.0°\text{C}.$$

NOTA Los termómetros de resistencia tienen la ventaja de que pueden usarse a temperaturas muy altas o muy bajas, donde los termómetros de líquido o gas no son útiles.

NOTA Aún más conveniente para algunas aplicaciones es el *termistor* (figura 25-15), que consiste en un óxido de metal o semiconductor cuya resistencia varía notablemente con la temperatura. Es posible fabricar termistores muy pequeños que responden muy rápido a los cambios en la temperatura.

FIGURA 25–15 Se muestra un resistor térmico junto a una regla en milímetros, como referencia.

EJERCICIO F ¿Cuántas veces más grande es la resistencia de un filamento de tungsteno de una bombilla incandescente ordinaria a su temperatura de operación de 3000 K en comparación con su resistencia a temperatura ambiente? *a*) Menos de 1% mayor, *b*) aproximadamente 10% mayor, *c*) cerca de dos veces mayor, *d*) aproximadamente 10 veces mayor, *e*) más de 100 veces mayor.

El valor de α en la ecuación 25-5 puede depender de la temperatura, así que es importante revisar la validez del intervalo de temperaturas de cualquier valor (digamos, en un manual de datos físicos). Si el intervalo de temperaturas es amplio, la ecuación 25-5 no es adecuada, por lo que se necesitan términos proporcionales a la temperatura al cuadrado o al cubo, aunque en general son muy pequeños, excepto cuando $T - T_0$ es grande.

25–5 Potencia eléctrica

La energía eléctrica es útil porque puede transformase fácilmente en otras formas de energía. Los motores transforman energía eléctrica en energía mecánica, como veremos en el capítulo 27.

En aparatos como calentadores eléctricos, estufas, tostadores y secadoras para el cabello, la energía eléctrica se transforma en energía térmica en una resistencia de alambre conocida como el "elemento calefactor". En una bombilla eléctrica ordinaria, el filamento de alambre delgado (figura 25-5 y fotografía al inicio del capítulo) se calienta tanto que brilla; sólo un pequeño porcentaje de la energía se transforma en luz visible, mientras el resto, más del 90%, se transforma en energía térmica. Los filamentos de las bombillas eléctricas y los elementos calefactores (figura 25-16) en aparatos domésticos comúnmente tienen resistencias desde unos cuantos ohms hasta algunos cientos de ohms.

FIGURA 25–16 El elemento calefactor del quemador de una estufa eléctrica brilla porque la corriente eléctrica transforma la energía.

En tales aparatos, la energía eléctrica se transforma en energía térmica o luz, y en ellos ocurren muchas colisiones entre los electrones en movimiento con los átomos del alambre. En cada colisión, parte de la energía cinética del electrón se transfiere al átomo con el cual colisiona. Como resultado, la energía cinética de los átomos del alambre aumenta; por lo tanto, la temperatura del elemento de alambre también aumenta. El incremento de energía térmica puede transferirse como calor por conducción o convección al aire en un calentador o a los alimentos en una sartén, o transferirse por radiación al pan en un tostador o ser emitida como luz.

Para calcular la potencia transformada por un dispositivo eléctrico, recuerde que la energía transformada cuando un elemento infinitesimal de carga dq se mueve a través de una diferencia de potencial V es $dU = V\,dq$ (ecuación 23-3). Sea dt el tiempo

requerido para que una cantidad de carga dq se mueva a través de una diferencia de potencial V. Así, la potencia P, que es la tasa a la que se transforma la energía, es

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt}V.$$

La carga que fluye por segundo, dq/dt, es la corriente eléctrica I. Como resultado, tenemos que

$$P = IV. \qquad \textbf{(25–6)}$$

Esta relación general nos permite conocer la potencia transformada por cualquier aparato, donde I es la corriente que pasa a través de él y V es la diferencia de potencial a la que está sometido. También proporciona la potencia de salida de una fuente como una batería. La unidad del SI de la potencia eléctrica es la misma que para cualquier otro tipo de potencia, es decir, el **watt** (1 W = 1 J/s).

La tasa de transformación de energía en una resistencia R puede escribirse de otras dos formas, a partir de la relación general $P = IV$ y sustituyendo $V = IR$:

$$P = IV = I(IR) = I^2R \qquad \textbf{(25–7a)}$$

$$P = IV = \left(\frac{V}{R}\right)V = \frac{V^2}{R}. \qquad \textbf{(25–7b)}$$

Las ecuaciones 25-7a y b se aplican sólo a resistores, mientras que la ecuación 25-6, $P = IV$, que es más general, se aplica a cualquier dispositivo, incluyendo una resistencia.

EJEMPLO 25–8 **Faros de un automóvil.** Calcule la resistencia de un faro de automóvil de 40 W diseñado para trabajar a 12 V (figura 25-17).

PLANTEAMIENTO Despejamos R en la ecuación 25-7b.

SOLUCIÓN De acuerdo con la ecuación 25-7b,

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(12\text{ V})^2}{(40\text{ W})} = 3.6\,\Omega.$$

NOTA Tal es la resistencia cuando el faro brilla intensamente a 40 W. Cuando el faro está frío, la resistencia es mucho menor, como vimos en la ecuación 25-5. Como la corriente es alta cuando la resistencia es baja, los faros se consumen más cuando están recién encendidos.

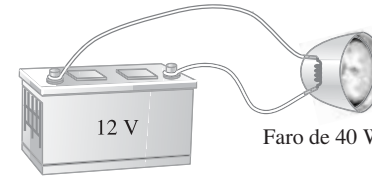


FIGURA 25–17 Ejemplo 25–8.

FÍSICA APLICADA

Por qué los faros de un automóvil se consumen más cuando están recién encendidos

Es la energía, y no la potencia, la que usted paga en su recibo de la compañía que le suministra electricidad. Ya que la potencia es la *tasa* a la cual se transforma la energía, la energía total que usa cualquier aparato es su consumo de potencia multiplicado por el tiempo que está encendido. Si la potencia está en watts y el tiempo en segundos, la energía estará en joules, porque 1W = 1 J/s. Las compañías eléctricas generalmente especifican la energía con una unidad mucho más grande, el **kilowatt-hora** (kWh). Un kWh = (1000 W) (3600 s) = 3.6×10^6 J.

CUIDADO

Usted no paga la potencia, sino la energía consumida, la cual es potencia × tiempo

EJEMPLO 25–9 **Calentador eléctrico.** Un calentador eléctrico usa 15.0 A cuando se conecta a una línea de 120 V. ¿Cuál es la potencia requerida y cuánto cuesta esa potencia al mes (30 días) si el calentador opera durante 3.0 h al día y la compañía eléctrica cobra $0.092 centavos por kWh?

PLANTEAMIENTO Usamos la ecuación 25-6, $P = IV$, para calcular la potencia. Multiplicamos la potencia (en kW) por el tiempo (h) de uso en un mes y el costo por unidad de energía, $0.092/kWh, para obtener el costo mensual.

SOLUCIÓN La potencia es

$$P = IV = (15.0\text{ A})(120\text{ V}) = 1800\text{ W}$$

o 1.80 kW. El tiempo (en horas) que se usa el calentador al mes es (3.0 h/d) (30 d) = 90 h, el cual, a 9.2 centavos/kWh, costaría (1.80 kW) (90 h) ($0.092/kWh) = $15.

NOTA La corriente doméstica es, de hecho, una corriente alterna (ca), pero nuestra solución sigue siendo válida suponiendo que los valores dados para V e I son los valores propios (rms), como veremos en la sección 25-7.

FÍSICA APLICADA
Relámpagos

FIGURA 25–18 Ejemplo 25-10. Un relámpago.

EJEMPLO 25–10 **ESTIMACIÓN** **Relámpagos.** Los relámpagos son un ejemplo espectacular de corrientes eléctricas en un fenómeno natural (figura 25-18). Hay gran diversidad en los relámpagos, pero un suceso típico puede transferir 10^9 J de energía a través de una diferencia de potencial de quizá 5×10^7 V durante un intervalo cercano a 0.2 s. Use esta información para determinar *a*) la cantidad total de carga transferida entre una nube y la tierra, *b*) la corriente en el relámpago y *c*) la potencia promedio liberada durante los 0.2 s.

PLANTEAMIENTO Estimamos la carga Q, tomando en cuenta que el cambio de la energía potencial es igual a la diferencia de potencial ΔV multiplicada por el tiempo de carga Q (ecuación 23-3). Igualamos ΔU con la energía transferida, $\Delta U \approx 10^9$ J. Después, la corriente I es Q/t (ecuación 25-1a) y la potencia P es energía/tiempo.

SOLUCIÓN *a*) De acuerdo con la ecuación 23-3, la energía transformada es $\Delta U = Q\,\Delta V$. Despejamos Q:

$$Q = \frac{\Delta U}{\Delta V} \approx \frac{10^9\ \text{J}}{5 \times 10^7\ \text{V}} = 20\ \text{coulombs}.$$

b) La corriente durante los 0.2 s es aproximadamente

$$I = \frac{Q}{t} \approx \frac{20\ \text{C}}{0.2\ \text{s}} = 100\ \text{A}.$$

c) La potencia promedio liberada es

$$P = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}} = \frac{10^9\ \text{J}}{0.2\ \text{s}} = 5 \times 10^9\ \text{W} = 5\ \text{GW}.$$

También podemos usar la ecuación 25-6:

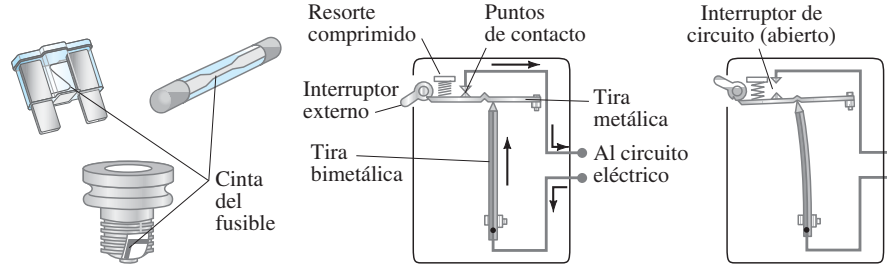
$$P = IV = (100\ \text{A})(5 \times 10^7\ \text{V}) = 5\ \text{GW}.$$

NOTA Puesto que la mayoría de los relámpagos constan de varias etapas, es posible que partes individuales transporten corrientes mucho mayores que los 100 A calculados.

25–6 Potencia en circuitos domésticos

FÍSICA APLICADA
Seguridad: Los cables se calientan

Los alambres o cables eléctricos que transportan la electricidad a las bombillas u otros aparatos eléctricos tienen cierta resistencia, aunque generalmente es muy pequeña. Sin embargo, si la corriente es muy grande, los alambres pueden calentarse y producir energía térmica a una tasa igual a I^2R, donde R es la resistencia del alambre. Un posible riesgo es que los alambres que portan corriente en la pared de un edificio lleguen a calentarse demasiado al grado de provocar un incendio. Un alambre más grueso tiene menor resistencia (ecuación 25-3) y puede, por lo tanto, transportar más corriente sin calentarse tanto. Cuando un cable transporta más corriente de lo que es seguro, se dice que está "sobrecargado". Para prevenir la sobrecarga, se instalan *fusibles*, o bien,



a) Tipos de fusibles
b) Interruptor de circuito (cerrado)
c) Contactos abiertos

FIGURA 25–19 *a*) Fusibles. Cuando la corriente excede un cierto valor, la cinta metálica se derrite y el circuito se abre. Luego, el fusible debe remplazarse. *b*) Un tipo de interruptor de circuito. La corriente pasa a través de una tira bimetálica. Cuando la corriente excede el nivel de seguridad, el calentamiento de la tira bimetálica ocasiona que ésta se doble tanto a la izquierda que la hendidura en la banda de metal que soporta al resorte baja hasta el extremo de la tira bimetálica; *c*) el circuito se abre entonces en los puntos de contacto (uno está fijo a la tira de metal) y el interruptor externo también se activa. Tan pronto como la tira bimetálica se enfría, puede restaurarse a su posición original usando el interruptor externo. En los capítulos 28 y 29 se examinarán los interruptores de circuito magnético.

disyuntores en los circuitos. Básicamente, éstos son interruptores de circuito (figura 25-19) que abren el circuito cuando la corriente excede un valor determinado. Un fusible o un interruptor de 20 A, por ejemplo, se abre cuando la corriente que pasa a través de él excede los 20 A. Si un circuito repetidamente quema un fusible o abre un interruptor (disyuntor), existen dos posibilidades: hay demasiados aparatos tomando corriente de ese circuito o hay una falla en algún lado, como un "corto", por ejemplo. Un corto, o "cortocircuito", significa que se han tocado dos cables que no debían hacerlo (quizá porque se gastó la cubierta aislante), de manera que la resistencia se reduce mucho y la corriente se hace muy grande. Los cortocircuitos deben repararse de inmediato.

FÍSICA APLICADA
Fusibles y disyuntores

Los circuitos domésticos están diseñados para que varios aparatos estén conectados, de manera que cada uno reciba de la compañía eléctrica el voltaje estándar (generalmente 120 V en Estados Unidos) (figura 25-20). Los circuitos con los aparatos arreglados, como en la figura 25-20, se llaman *circuitos en paralelo*, como veremos en el siguiente capítulo. Cuando se quema un fusible o se abre interruptor, es importante revisar la corriente total que se toma de ese circuito, que es la suma de las corrientes en cada uno de los aparatos que están conectados.

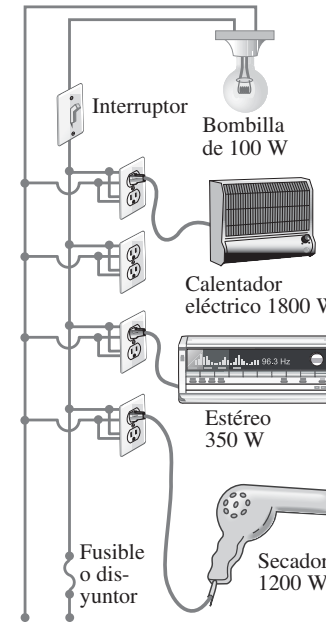


FIGURA 25–20 Conexión de aparatos domésticos.

EJEMPLO 25–11 **¿Se quemará el fusible?** Determine la corriente total tomada por todos los aparatos que se ilustran en el circuito de la figura 25-20.

PLANTEAMIENTO Cada aparato está conectado al mismo voltaje: 120 V. La corriente que cada aparato toma de la fuente se determina a partir de $I = P/V$ (ecuación 25-6).

SOLUCIÓN El circuito de la figura 25-20 toma las siguientes corrientes: la bombilla requiere $I = P/V = 100\ \text{W}/120\ \text{V} = 0.8\ \text{A}$; el calentador usa $1800\ \text{W}/120\ \text{V} = 15.0\ \text{A}$; el estéreo usa un máximo de $350\ \text{W}/120\ \text{V} = 2.9\ \text{A}$; la secadora para el cabello consume $1200\ \text{W}/120\ \text{V} = 10.0\ \text{A}$. La corriente total empleada, si se utilizan todos los aparatos al mismo tiempo, es

$$0.8\ \text{A} + 15.0\ \text{A} + 2.9\ \text{A} + 10.0\ \text{A} = 28.7\ \text{A}.$$

NOTA La secadora para el cabello consume tanta corriente como 18 bombillas de 100 W. Por seguridad, es recomendable que la secadora se utilice en un circuito por separado.

Si el circuito de la figura 25-20 se diseña para un fusible de 20 A, el fusible se quemará —y esperamos que así lo haga— para evitar que alambres sobrecargados se calienten demasiado y generen un incendio. Algo tiene que apagarse para conseguir que este circuito ocupe menos de 20 A. (Las casa y los departamentos generalmente cuentan con varios circuitos, cada uno con su propio fusible o interruptor de circuito; trate de mover alguno de los aparatos a otro circuito.) Si ese circuito fue diseñado con un cable más grueso y un fusible de 30 A, el fusible no debería fundirse (si lo hace, el problema tal vez sea un corto). (El lugar más probable para un corto es en el cable de uno de los aparatos). El tamaño apropiado de un fusible se selecciona de acuerdo con el cable usado para administrar la corriente. Un fusible calibrado correctamente no debe remplazarse *nunca* con uno de mayor amperaje. Un fusible que se quema y un disyuntor que se abre actúan como un interruptor, produciendo un "circuito abierto". Por circuito abierto queremos decir que no hay una trayectoria de conducción completa, de manera que no puede haber flujo de corriente; es como si se tuviera una resistencia $R = \infty$.

FÍSICA APLICADA
Fusibles apropiados y cortos

EJEMPLO CONCEPTUAL 25–12 **Un cable de extensión peligroso.** Considere que su calentador eléctrico portátil de 1800 W está muy lejos de su escritorio para calentar sus pies. Su cable es muy corto, así que lo conecta al cable de una extensión calibrado a 11 A. ¿Por qué es peligroso hacer esto?

RESPUESTA 1800 W a 120 V consumen una corriente de 15 A. Los alambres de la extensión calibrada a 11 A pueden calentarse tanto que derretirían la funda aislante y llegarían a producir fuego.

FÍSICA APLICADA
Cables de extensión y peligros potenciales

EJERCICIO G ¿Cuántas bombillas de 60 W a 120 V pueden operar en una línea de 20 A? *a*) 2; *b*) 3; *c*) 6; *d*) 20; *e*) 40.

25–7 Corriente alterna

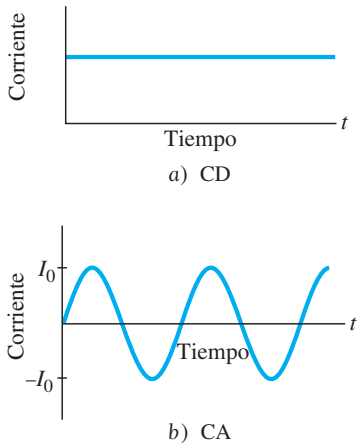


FIGURA 25–21 *a*) Corriente directa. *b*) Corriente alterna.

Cuando se conecta una batería a un circuito, la corriente avanza siempre en la misma dirección. Esto se llama **corriente directa** o **cd**. Sin embargo, los generadores eléctricos en las plantas de generación de energía producen **corriente alterna** o **ca**. (A veces se usan abreviaturas en mayúsculas, CD o CA.) Una corriente alterna invierte la dirección muchas veces por segundo y es generalmente sinusoidal, como se muestra en la figura 25-21. Los electrones en un alambre se mueven primero en un sentido y luego en sentido inverso. La corriente que se suministra a las casas y oficinas es ca prácticamente en todo el mundo. Estudiaremos circuitos ca en detalle en el capítulo 30. Sin embargo, como los circuitos ca son tan comunes en la vida diaria, examinaremos aquí algunos de sus aspectos básicos.

El voltaje producido por un generador eléctrico ca es sinusoidal, como veremos. La corriente producida es entonces sinusoidal (figura 25-21b). Podemos escribir el voltaje como función del tiempo de la siguiente manera:

$$V = V_0 \operatorname{sen} 2\pi f t = V_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

El potencial V oscila entre $+V_0$ y $-V_0$, y V_0 se conoce como el **voltaje pico**. La frecuencia f es el número de oscilaciones completas realizadas por segundo, y $\omega = 2\pi f$. En la mayor parte de Estados Unidos y Canadá, $f = 60$ Hz (la unidad "hertz", como vimos en los capítulos 10 y 14, significa ciclos por segundo). Sin embargo, en muchos otros países, se usan 50 Hz.

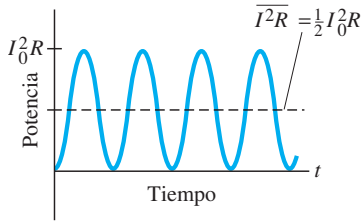
La ecuación 25-2, $V = IR$, también funciona para ca: si existe un voltaje V a través de una resistencia R, entonces la corriente I a través de la resistencia es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \operatorname{sen} \omega t = I_0 \operatorname{sen} \omega t. \qquad \textbf{(25–8)}$$

La cantidad $I_0 = V_0/R$ es la **corriente pico**. Se considera que la corriente es positiva cuando los electrones fluyen en un sentido, y negativa cuando fluyen en sentido opuesto. A partir de la figura 25-21b, es claro que la corriente alterna es tantas veces positiva como negativa. Así que la corriente promedio es cero. Sin embargo, esto no significa que no se necesita potencia o que no se produce calor en una resistencia. Los electrones se mueven de atrás para adelante y producen calor. De hecho, la potencia transformada en una resistencia R es en cualquier momento es

$$P = I^2R = I_0^2 R \operatorname{sen}^2 \omega t.$$

FIGURA 25–22 Potencia transformada en un resistor en un circuito ca.



Como la corriente aparece al cuadrado, vemos que la potencia siempre es positiva, como se grafica en la figura 25-22. La cantidad $\operatorname{sen}^2 \omega t$ varía entre 0 y 1; no es muy difícil demostrar[†] que su valor promedio es $\frac{1}{2}$, como se indica en la figura 25-22. Así, la *potencia promedio* transformada, $\overline{P}$, es

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} I_0^2 R.$$

Puesto que la potencia también puede escribirse como $P = V^2/R = (V_0^2/R) \operatorname{sen}^2 \omega t$, la potencia promedio también se escribiría como

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}$$

El valor promedio o valor medio del *cuadrado* de la corriente o el voltaje es lo que importa para calcular la potencia promedio: $\overline{I^2} = \frac{1}{2} I_0^2$ y $\overline{V^2} = \frac{1}{2} V_0^2$. La raíz cuadrada de cada una de estas cantidades es la corriente o el voltaje eficaz o **rms** (por las siglas de *root-mean-square*, que significa raíz cuadrática media):

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0.707 I_0, \qquad \textbf{(25–9a)}$$

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0.707 V_0. \qquad \textbf{(25–9b)}$$

[†]La gráfica de $\cos^2 \omega t$ contra t es idéntica a la gráfica de $\operatorname{sen}^2 \omega t$ de la figura 25-22, excepto que los puntos están desfasados (por $\frac{1}{4}$ de ciclo) sobre el eje del tiempo. Por lo tanto, el valor promedio de sen^2 y de $\cos^2$, promediados sobre uno o más ciclos completos, será el mismo: $\overline{\operatorname{sen}^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t}$. A partir de la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2\theta + \cos 2\theta = 1$, podemos escribir

$$\overline{(\operatorname{sen}^2 \omega t)} + \overline{(\cos^2 \omega t)} = 2\overline{(\operatorname{sen}^2 \omega t)} = 1.$$

Así que el valor promedio de $\operatorname{sen}^2 \omega t$ es $\frac{1}{2}$.

En ocasiones, los valores rms de V e I se conocen como *valores efectivos*. Estas relaciones son útiles porque pueden sustituirse directamente en las fórmulas de la potencia (ecuaciones 25-6 y 25-7) para calcular la potencia promedio:

$$\overline{P} = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}} \qquad \textbf{(25–10a)}$$

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} I_0^2 R = I_{\text{rms}}^2 R \qquad \textbf{(25–10b)}$$

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}. \qquad \textbf{(25–10c)}$$

Así, una corriente directa cuyos valores de I y V son iguales a los valores rms de I y V de una corriente alterna producirán la misma potencia. Es por esto que generalmente se especifican o se miden los valores rms de la corriente y el voltaje. Por ejemplo, en Estados Unidos y Canadá, el voltaje estándar de la línea[†] es de 120 V de ca. Los 120 V son V_{rms}; el voltaje pico V_0 es

$$V_0 = \sqrt{2}\, V_{\text{rms}} = 170 \text{ V}.$$

En una buena parte del mundo (Europa, Asia, Australia) el voltaje rms es de 240 V, así que el voltaje pico es de 340 V.

EJEMPLO 25–13 **Secadora para el cabello.** *a*) Calcule la resistencia y el voltaje pico en una secadora para el cabello de 1000 W (figura 25-23) conectada a una línea de 120 V. *b*) ¿Qué sucede si se conecta a una línea de 240 V en Gran Bretaña?

PLANTEAMIENTO Conocemos $\overline{P}$ y V_{rms}, así que $I_{\text{rms}} = \overline{P}/V_{\text{rms}}$ (ecuaciones 25-10a o 25-6) e $I_0 = \sqrt{2}\, I_{\text{rms}}$. Por último, calculamos R a partir de $V = IR$.

SOLUCIÓN *a*) Despejamos la corriente rms de la ecuación 25-10a:

$$I_{\text{rms}} = \frac{\overline{P}}{V_{\text{rms}}} = \frac{1000 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 8.33 \text{ A}.$$

Entonces,

$$I_0 = \sqrt{2}\, I_{\text{rms}} = 11.8 \text{ A}.$$

La resistencia es

$$R = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} = \frac{120 \text{ V}}{8.33 \text{ A}} = 14.4\ \Omega.$$

También podíamos calcular la resistencia usando los valores pico:

$$R = \frac{V_0}{I_0} = \frac{170 \text{ V}}{11.8 \text{ A}} = 14.4\ \Omega.$$

b) Cuando se conecta la secadora a una línea de 240 V, fluirá más corriente y la resistencia cambiará con el correspondiente incremento de temperatura (sección 25-4). Pero hagamos una estimación de la potencia transformada con base en la misma resistencia de 14.4 Ω. La potencia promedio sería

$$\overline{P} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{(240 \text{ V})^2}{(14.4\ \Omega)} = 4000 \text{ W}.$$

Esto equivale a cuatro veces la potencia nominal de la secadora y seguramente derretirá el elemento calefactor o las bobinas de alambre del motor.

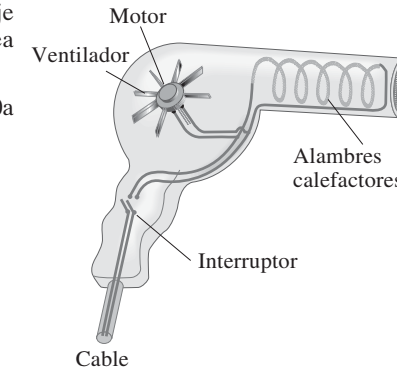


FIGURA 25–23 Una secadora para el cabello. La mayor parte de la corriente se va a los alambres calefactores, los cuales constituyen una resistencia pura; una pequeña parte de la corriente se va al motor para encender el ventilador. Ejemplo 25-13.

EJERCICIO H Cada canal de un aparato estereofónico es capaz de producir una potencia de salida promedio de 100 W en un altavoz de 8 Ω (véase la figura 25-14). ¿Cuáles son el voltaje rms y la corriente rms que llegan al altavoz *a*) a la potencia máxima de 100 W y *b*) a 1.0 W cuando se ha bajado el volumen?

[†]El voltaje de la línea puede variar, lo que depende de la carga total en la línea; la frecuencia de 60 Hz o 50 Hz, sin embargo, permanece extremadamente constante.

25–8 Visión microscópica de la corriente eléctrica: Densidad de corriente y velocidad de deriva

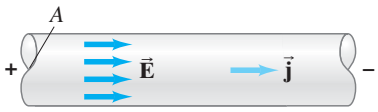


FIGURA 25–24 Campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en un alambre uniforme de sección transversal de área A que transporta una corriente I. La densidad de corriente es $j = I/A$.

Hasta ahora hemos tratado principalmente con una visión macroscópica de la corriente eléctrica. Sin embargo, vimos que, de acuerdo con la teoría atómica, la corriente eléctrica en alambres de metal es transportada por electrones cargados negativamente y que en las soluciones líquidas la corriente también puede ser transportada por iones positivos o negativos. Analicemos ahora con más detalle esa visión microscópica.

Cuando se aplica una diferencia de potencial a los dos extremos de un alambre de sección transversal uniforme, la dirección del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es paralela a las paredes del alambre (figura 25-24). La existencia del campo $\vec{\mathbf{E}}$ no contradice nuestro resultado de que $\vec{\mathbf{E}} = 0$ dentro de un conductor de alambre en el caso electrostático, pues no tratamos un caso estático. Las cargas pueden desplazarse con libertad dentro de un conductor y, por lo tanto, pueden moverse bajo la acción del campo eléctrico. Si todas las cargas están en reposo, entonces $\vec{\mathbf{E}}$ debe ser cero (caso electrostático).

Ahora definimos una nueva cantidad microscópica, la **densidad de corriente**, $\vec{\mathbf{j}}$. Ésta se define como la *corriente eléctrica por unidad de área de sección transversal* en cualquier punto del espacio. Si la densidad de corriente $\vec{\mathbf{j}}$ en un alambre de sección transversal de área A es uniforme en toda la sección transversal, entonces j está relacionada con la corriente eléctrica por

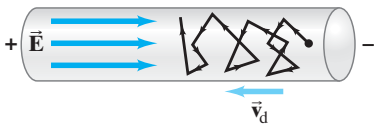
$$j = \frac{I}{A} \qquad \text{o} \qquad I = jA. \tag{25–11}$$

Si la densidad de corriente no es uniforme, entonces se aplica la siguiente relación general

$$I = \int \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}, \tag{25–12}$$

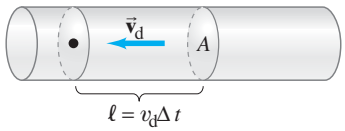
donde $d\vec{\mathbf{A}}$ es un elemento de superficie e I es la corriente a través de la superficie sobre la cual se realiza la integración. La dirección de la densidad de corriente en cualquier punto es la dirección en la que se desplazaría una carga positiva localizada en ese punto; esto es, la dirección del vector $\vec{\mathbf{j}}$ en cualquier punto generalmente es la misma que la dirección del vector $\vec{\mathbf{E}}$, (figura 25-24). La densidad de corriente existe en cualquier *punto* del espacio. Por otro lado, la corriente I se refiere al conductor como un todo; por lo tanto, es una cantidad macroscópica.

FIGURA 25–25 El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en un alambre le da a los electrones con movimiento aleatorio una velocidad de deriva v_d.



La dirección de $\vec{\mathbf{j}}$ elige para representar la dirección del flujo neto de carga positiva. En un conductor, son los electrones cargados negativamente los que se mueven, así que éstos se desplazan en la dirección de $-\vec{\mathbf{j}}$, o $-\vec{\mathbf{E}}$ (hacia la izquierda en la figura 25-24). Podemos imaginar a los electrones libres moviéndose de manera aleatoria a altas velocidades, rebotando entre los átomos del alambre (como sucede con las moléculas de un gas, capítulo 18). Cuando existe un campo eléctrico en el alambre (figura 25-25), los electrones experimentan una fuerza e inicialmente comienzan a acelerarse. Pero tarde o temprano alcanzan una velocidad promedio más o menos estable en la dirección del vector $\vec{\mathbf{E}}$, conocida como **velocidad de deriva**, $\vec{v}_d$ (las colisiones con los átomos de alambre impiden que los electrones se aceleren aún más). La velocidad de deriva normalmente es mucho menor que la velocidad aleatoria promedio de los electrones.

FIGURA 25–26 Los electrones en el volumen $A\ell$ pasarán a través de la sección indicada en un tiempo Δt, donde $\ell = v_d \Delta t$.



Podemos relacionar la velocidad de deriva v_d con la corriente macroscópica I en el alambre. En un tiempo Δt, los electrones viajarán en promedio una distancia $\ell = v_d \Delta t$. Supongamos que el alambre tiene una sección transversal de área A. Entonces, durante el intervalo Δt, los electrones en un volumen $V = A\ell = A v_d \Delta t$ pasarán a través de la sección transversal A del alambre, como se ilustra en la figura 25-26. Si hay n electrones libres (cada uno con carga $-e$) por unidad de volumen ($n = N/V$), entonces la carga total ΔQ que pasa a través del área A en el tiempo Δt es

$$\begin{aligned} \Delta Q &= (\text{número de cargas, } N) \times (\text{carga por partícula}) \\ &= (nV)(-e) = -(nAv_d\,\Delta t)(e). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la corriente I en el alambre es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -neAv_d. \tag{25–13}$$

La densidad de corriente, $j = I/A$, es

$$j = -nev_d. \tag{25–14}$$

En notación vectorial, esto se expresa como

$$\vec{\mathbf{j}} = -ne\vec{\mathbf{v}}_d, \tag{25–15}$$

donde el signo menos indica que la dirección del flujo de corriente (positiva) es opuesta a la velocidad de deriva de los electrones.

Podemos generalizar la ecuación 25-15 a cualquier tipo de flujo de carga, como por ejemplo, el flujo de iones en un electrolito. Si hay varios tipos de iones presentes (los cuales pueden incluir electrones libres), cada uno de densidad n_i (número por unidad de volumen), carga q_i (para electrones $q_i = -e$) y velocidad de deriva $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}i}$, entonces la densidad de corriente en cualquier punto es

$$\vec{\mathbf{j}} = \sum_i n_i q_i \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}i}. \qquad \textbf{(25–16)}$$

Así, la corriente total I que pasa a través de una área A perpendicular a una $\vec{\mathbf{j}}$ uniforme es

$$I = \sum_i n_i q_i v_{\mathrm{d}i} A.$$

EJEMPLO 25–14 **Rapideces de los electrones en un alambre.** Un alambre de cobre de 3.2 mm de diámetro lleva una corriente de 5.0 A. Determine *a*) la densidad de corriente en el alambre y *b*) la velocidad de deriva de los electrones libres. *c*) Estime la rapidez rms de los electrones, suponiendo que se comportan como un gas ideal a 20° C. Considere que por cada átomo de Cu hay un electrón libre para moverse (los otros permanecen ligados al átomo).

PLANTEAMIENTO En el caso de *a*) $j = I/A = I/\pi r^2$. En el caso de *b*) podemos aplicar la ecuación 25-14 para calcular v_{d} si podemos determinar el número n de electrones libres por unidad de volumen. Como suponemos que hay un electrón libre por cada átomo, la densidad de electrones libre, n, es la misma que la densidad de los átomos de cobre. La masa atómica del Cu es 63.5 u (véase la tabla periódica en la tercera de forros del libro), así que 63.5 g de Cu contienen un mol o 6.02×10^{23} electrones libres. La densidad de masa del cobre (tabla 13-1) es $\rho_{\mathrm{D}} = 8.9 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, donde $\rho_{\mathrm{D}} = m/V$. (Usamos ρ_{D} para distinguirla de la ρ de resistividad.) En *c*) usamos $K = \frac{3}{2}kT$ (ecuación 18-4). (No confunda V de volumen con V de voltaje).

SOLUCIÓN *a*) La densidad de corriente es (con $r = \frac{1}{2}(3.2\ \mathrm{mm}) = 1.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$)

$$j = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{5.0\ \mathrm{A}}{\pi(1.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})^2} = 6.2 \times 10^5\ \mathrm{A/m^2}.$$

b) El número de electrones libres por unidad de volumen, $n = N/V$ (donde $V = m/\rho_{\mathrm{D}}$), es

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N}{m/\rho_{\mathrm{D}}} = \frac{N(1\ \mathrm{mol})}{m(1\ \mathrm{mol})}\rho_{\mathrm{D}}$$

$$n = \left(\frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{electrones}}{63.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}}\right)(8.9 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}) = 8.4 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Así, usando la ecuación 25-14, la magnitud de la velocidad de deriva es

$$v_{\mathrm{d}} = \frac{j}{ne} = \frac{6.2 \times 10^5\ \mathrm{A/m^2}}{(8.4 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}})(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})} = 4.6 \times 10^{-5}\ \mathrm{m/s} \approx 0.05\ \mathrm{mm/s}.$$

c) Si modelamos los electrones libres como un gas ideal (una aproximación bastante burda), usamos la ecuación 18-5 para estimar la rapidez aleatoria rms de un electrón mientras avanza:

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K})(293\ \mathrm{K})}{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 1.2 \times 10^5\ \mathrm{m/s}.$$

La velocidad de deriva (la velocidad promedio en la dirección de la corriente) es mucho menor que la velocidad térmica rms de los electrones, en un factor de 10^9.

NOTA El resultado en *c*) es una subestimación. Cálculos basados en la teoría cuántica, y en experimentos, indican una rapidez rms en cobre cercana a 1.6×10^6 m/s.

La velocidad de deriva de los electrones en un alambre es muy pequeña, apenas 0.05 mm/s (ejemplo 25-14, arriba), lo que significa que un electrón tarda 20×10^3 s, o $5\frac{1}{2}$ h, para avanzar apenas 1 m. Esto no es, por supuesto, la rapidez con que "viaja la electricidad": cuando usted enciende el interruptor de la luz —aun a muchos metros de distancia—, ésta se enciende casi instantáneamente. ¿Por qué? Porque el campo eléctrico viaja, en esencia, a la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). Es posible pensar en los electrones en un alambre como si estuvieran en una tubería llena de agua: cuando un poco de agua entra por un extremo de la tubería, casi de inmediato algo de agua sale por el otro extremo.

*Campo eléctrico dentro de un alambre

La ecuación 25-2b, $V = IR$, puede escribirse en términos de cantidades microscópicas como sigue. Escribimos la resistencia R en términos de la resistividad ρ.

$$R = \rho\frac{\ell}{A};$$

y escribimos V e I como

$$I = jA \qquad \text{y} \qquad V = E\ell.$$

La relación anterior se obtiene a partir de la ecuación 23-4, donde suponemos que el campo eléctrico es uniforme dentro del alambre y ℓ es la longitud del alambre (o una porción del alambre) entre cuyos extremos la diferencia de potencial es V. Así, a partir de $V = IR$, tenemos

$$E\ell = (jA)\left(\rho\frac{\ell}{A}\right) = j\rho\ell$$

así que

$$j = \frac{1}{\rho}E = \sigma E, \qquad \textbf{(25–17)}$$

donde $\sigma = 1/\rho$ es la *conductividad* (ecuación 25-4). Para un conductor metálico, ρ y σ no dependen de V (por lo tanto, tampoco dependen de E). En consecuencia, la densidad de corriente $\vec{\mathbf{j}}$ es proporcional al campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ dentro del conductor. Éste es el enunciado "microscópico" de la ley de Ohm. La ecuación 25-17, que puede escribirse en forma vectorial como

$$\vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{E}},$$

se considera algunas veces como la definición de conductividad σ y resistividad ρ.

EJEMPLO 25–15 **El campo eléctrico dentro de un alambre.** ¿Cuál es el campo eléctrico dentro del alambre del ejemplo 25-14?

PLANTEAMIENTO Usamos la ecuación 25-17 y $\rho = 1.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ para el cobre.

SOLUCIÓN Del ejemplo 25-14, sabemos que $j = 6.2 \times 10^5\ \text{A/m}^2$, así que

$$E = \rho j = (1.68 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})(6.2 \times 10^5\ \text{A/m}^2) = 1.0 \times 10^{-2}\ \text{V/m}.$$

NOTA En comparación, el campo eléctrico entre las placas de un capacitor es con frecuencia mucho mayor; así, en el ejemplo 24-1, E es del orden de 10^4 V/m. De esta forma, vemos que se necesita sólo un modesto campo eléctrico para que fluya la corriente en casos comunes.

*25–9 Superconductividad

A muy bajas temperaturas, por debajo de 0°C, la resistividad (sección 25-4) de ciertos metales y compuestos o aleaciones se vuelve cero de acuerdo con las técnicas más precisas. Se dice que los materiales en este estado son **superconductores**. Esto lo observó por primera vez H. K. Onnes (1853-1926) en 1911 cuando enfrió mercurio por debajo de 4.2 K (–269°C) y encontró que la resistencia del mercurio disminuyó de repente a cero. En general, los superconductores se convierten en tales sólo por debajo de cierta *temperatura de transición* o *temperatura crítica*, T_C, la cual está generalmente muy cerca del cero absoluto. Se ha observado que la corriente en un material superconductor con forma de anillo ha fluido durante años en ausencia de una diferencia de potencial, sin una disminución apreciable. Las mediciones indican que la resistividad ρ de los superconductores son menores que $4 \times 10^{-25}\ \Omega\cdot\text{m}$, lo cual es 10^{16} veces menos que la resistividad del cobre, lo que se considera cero en la práctica. Véase la figura 25-27.

Antes de 1986, la temperatura más alta a la cual se encontró que un material podía ser superconductor fue 23 K, lo que requirió helio líquido para mantener frío el material. En 1987 se desarrolló un compuesto de itrio, bario, cobre y oxígeno (YBCO) que puede ser superconductor a 90 K. Lo anterior fue un importante avance, dado que el nitrógeno líquido hierve a 77 K (suficientemente frío para mantener al material superconductor), y es más fácil y barato de obtener que el helio líquido necesario para los superconductores convencionales. Se ha reportado superconductividad a temperaturas tan altas como 160 K, aunque para compuestos frágiles.

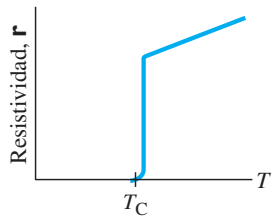


FIGURA 25–27 Un material superconductor tiene resistividad cero cuando su temperatura está por debajo de su "temperatura crítica". A T_C, la resistividad cambia a un valor "normal" distinto de cero y se incrementa con la temperatura, como lo hacen la mayoría de los materiales (ecuación 25-5).

En la actualidad, la mayoría de las aplicaciones usan un óxido de bismuto, estroncio, calcio y cobre, conocido como BSCCO. Un reto importante es cómo conseguir un alambre de BSCCO que sea práctico y manejable, dado que éste es muy quebradizo. (Una solución es incrustar pequeños filamentos de material superconductor T_C de alta temperatura en una aleación metálica, la cual sí tiene resistencia, pero es mucho menor que la resistencia de un alambre de cobre convencional).

*25–10 Conducción eléctrica en el sistema nervioso

El flujo de carga eléctrica en el sistema nervioso humano nos permite estar conscientes del mundo que nos rodea. Aunque el funcionamiento detallado aún no se comprende del todo, tenemos una comprensión razonable de cómo se transmiten los mensajes dentro el sistema nervioso: se trata de señales eléctricas que se transmiten a través del elemento básico del sistema nervioso: la *neurona*.

Las neuronas son células vivas con una forma inusual (figura 25-28). Existen varios apéndices pequeños unidos al cuerpo central de la célula que se conocen como *dendritas* y también hay una cola larga llamada el *axón*. Las señales se reciben por las dendritas y se propagan a lo largo del axón. Cuando una señal alcanza las terminales nerviosas, se transmite a la siguiente neurona o a un músculo en una conexión llamada *sinapsis*.

Antes de transmitir una señal eléctrica, una neurona se encuentra en el llamado "estado de reposo". Al igual que prácticamente todos los seres vivos, las neuronas tienen una carga eléctrica positiva en la superficie exterior de la membrana celular y una carga negativa en la superficie interior. Esta diferencia de carga, o "capa dipolar", significa que hay una diferencia de potencial a través de la membrana celular. Cuando una neurona no transmite una señal, este "potencial de reposo", referido normalmente como

$$V_{\text{adentro}} - V_{\text{afuera}},$$

es por lo general de –60 mV a –90 mV, lo que depende del tipo de organismo. Los iones más comunes en una célula son K^+, Na^+ y Cl^-. Hay grandes diferencias en las concentraciones de estos iones adentro y afuera de una célula, como indican los valores típicos que vienen en la tabla 25-2. También están presentes otros iones, así que los fluidos tanto adentro como afuera del axón son eléctricamente neutros. Dadas las diferencias de concentración, hay una tendencia de los iones a difundirse sobre la membrana (véase la sección 18-7 sobre difusión). Sin embargo, en el estado en reposo, la membrana celular evita cualquier flujo neto de Na^+ (a través de un mecanismo de "bombeo activo" de Na^+ hacia el exterior de la célula). Sin embargo, permite el flujo de iones Cl^-, y un poco menos de iones K^+; son estos dos iones los que producen la capa de carga dipolar en la membrana. Puesto que hay una mayor concentración de K^+ adentro de la célula que afuera, hay más iones de K^+ que tienden a difundirse hacia fuera a través de la membrana que los que se difunden hacia dentro. Un ion de K^+ que pasa a través de la membrana es atraído hacia la superficie externa de la membrana y deja tras de sí una carga igual negativa que reside en la superficie interior de la membrana (figura 25-29). Independientemente, los iones de Cl^- tienden a difundirse *hacia* la célula, dado que su concentración exterior es mayor. Tanto la difusión de K^+ y de Cl^- tienden a cargar el interior de la superficie de la membrana negativamente y el exterior de manera positiva. Conforme se acumula carga en la superficie de la membrana, se vuelve cada vez más difícil que se difundan más iones: los iones de K^+ que tratan de moverse hacia fuera, por ejemplo, son repelidos por la carga positiva que ya existe ahí. Se alcanza el equilibrio cuando la tendencia a difundirse a causa de la diferencia de concentración se equilibra exactamente con la diferencia de potencial eléctrico a través de la membrana. A mayor diferencia en la concentración, mayor diferencia de potencial a través de la membrana (–60 mV a –90 mV).

El aspecto más importante de una neurona no es que tenga un potencial de reposo (la mayoría de las células lo tienen), sino que logran responder a estímulos y conducir una señal eléctrica. El estímulo puede ser térmico (como cuando tocamos una estufa caliente) o químico (cuando se degusta algo); puede ser una presión (por ejemplo, sobre la piel o el tímpano) o luz (en el ojo); o puede ser un estímulo eléctrico de una señal que viene del cerebro o de otra neurona. En el laboratorio el estímulo generalmente es eléctrico y se aplica mediante una pequeña sonda en algún punto de una neurona. Si el estímulo excede cierto umbral, un pulso de voltaje viaja por el axón. Este pulso de voltaje puede detectarse en un punto del axón usando un voltímetro o un osciloscopio conectado como en la figura 25-30. Este pulso de voltaje tiene la forma

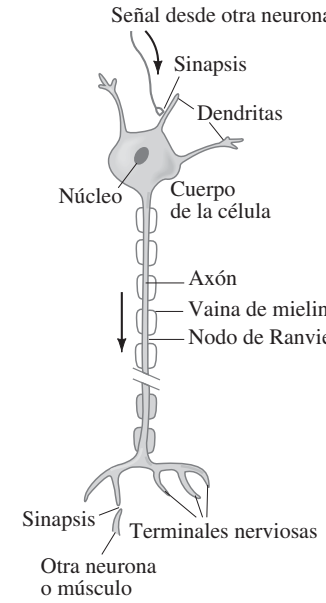


FIGURA 25–28 Esquema simplificado de una neurona.

TABLA 25–2 Concentraciones de iones dentro y fuera de un axón típico

	Concentración dentro del axón (mol/m^3)	Concentración fuera del axón (mol/m^3)
K^+	140	5
Na^+	15	140
Cl^-	9	125

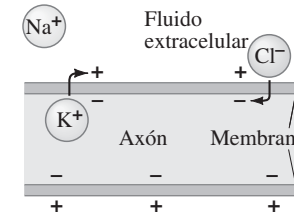
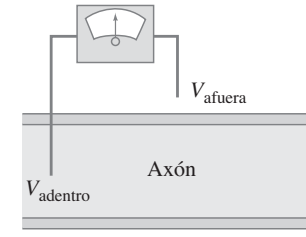


FIGURA 25–29 Cómo se forma una capa dipolar de carga en la membrana de una célula.

FIGURA 25–30 Medición de la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de una célula nerviosa.



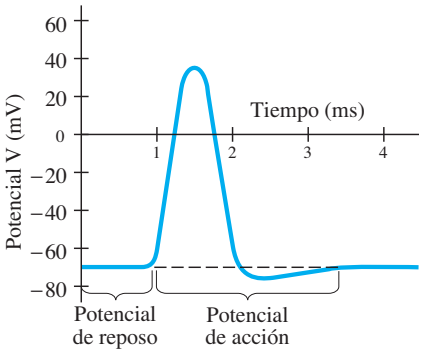
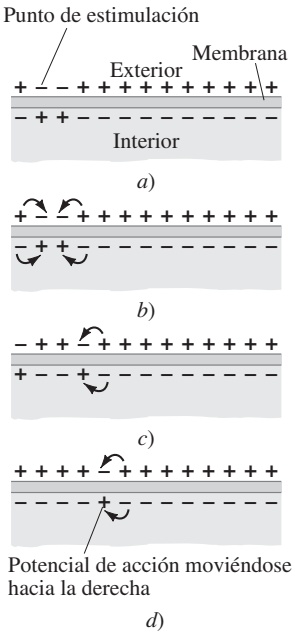


FIGURA 25–31 Potencial de acción.

FIGURA 25–32 Propagación de un potencial de acción a lo largo de la membrana de un axón.



mostrada en la figura 25-31, y se le conoce como **potencial de acción**. Como se observa, el potencial se incrementa desde un potencial de reposo de unos −70 mV y se vuelve positivo hasta 30 mV o 40 mV. El potencial de acción dura cerca de 1 ms y viaja por el axón con una rapidez de 30 m/s a 150 m/s. Cuando se estimula un potencial de acción, se dice que el nervio está "encendido".

¿Qué origina el potencial de acción? Aparentemente, la membrana de la célula tiene la capacidad de alterar sus propiedades de permeabilidad. En el punto donde ocurre el estímulo, la membrana se vuelve de repente mucho más permeable a los iones de Na^+ que a los de K^+ y Cl^-. Así, los iones de Na^+ se apresuran hacia la célula, y la superficie interna de la pared se carga positivamente, mientras la diferencia de potencial rápidamente se vuelve positiva ($\approx +30$ mV en la figura 25-31). De forma igualmente repentina, la membrana regresa a su estado inicial: se vuelve impermeable a Na^+ y, de hecho, bombea hacia fuera iones de Na^+. La difusión de iones de Cl^- y K^+ predomina de nuevo y se recupera el potencial de reposo original (−70 mV en la figura 25-31).

¿Qué provoca que el potencial de acción viaje a lo largo del axón? El potencial de acción se presenta en el punto de estimulación, como se indica en la figura 25-32a. Momentáneamente la membrana es positiva en el interior y negativa en el exterior en ese punto. Las cargas cercanas son atraídas hacia esta región, como se muestra en la figura 25-32b. El potencial en esas regiones adyacentes, por lo tanto, decrece, produciendo ahí un potencial de acción. En consecuencia, conforme la membrana regresa a su estado normal en el punto original, experimenta un potencial de acción, así que el potencial de acción se mueve a lo largo del axón (figuras 25-32c y d).

Usted podría preguntarse si el número de iones que pasan a través de la membrana alterarían significativamente las concentraciones. La respuesta es no; podemos mostrar por qué no, y para ello trataremos al axón como un capacitor en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 25–16 **ESTIMACIÓN** **Capacitancia de un axón.** *a*) Haga una estimación del orden de magnitud de la capacitancia de un axón de 10 cm de longitud y 10 μm de radio. El grosor de la membrana es aproximadamente de 10^{-8} m, en tanto que la constante dieléctrica es cercana a 3. *b*) ¿En qué factor cambia la concentración de iones de Na^+ (número de iones por unidad de volumen) en la célula como resultado de un potencial de acción?

PLANTEAMIENTO Modelamos la membrana de un axón como un capacitor cilíndrico de placas paralelas, con cargas opuestas en cada lado. La separación de las "placas" es el espesor de la membrana, $d \approx 10^{-8}$ m. Calculamos primero el área del cilindro y luego podemos usar la ecuación 24-8, $C = K\epsilon_0 A/d$, para encontrar la capacitancia. En *b*), usamos el cambio de voltaje durante un potencial de acción para encontrar la cantidad de carga que se desplaza a través de la membrana.

SOLUCIÓN *a*) El área A es el área de un cilindro de radio r y longitud ℓ:

$$A = 2\pi r\ell \approx (6.28)(10^{-5}\,\text{m})(0.1\,\text{m}) \approx 6 \times 10^{-6}\,\text{m}^2.$$

A partir de la ecuación 24-8, tenemos

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \approx (3)(8.85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)\frac{6 \times 10^{-6}\,\text{m}^2}{10^{-8}\,\text{m}} \approx 10^{-8}\,\text{F}.$$

b) Puesto que el voltaje cambia de −70 mV hasta +30 mV aproximadamente, el cambio total es de 100 mV. Por lo tanto, la cantidad de carga que se desplaza es

$$Q = CV \approx (10^{-8}\,\text{F})(0.1\,\text{V}) = 10^{-9}\,\text{C}.$$

Cada ion porta una carga $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, así que el número de iones que fluyen en un potencial de acción es $Q/e = (10^{-9}\,\text{C})/(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}) \approx 10^{10}$. El volumen de nuestro axón cilíndrico es

$$V = \pi r^2\ell \approx (3)(10^{-5}\,\text{m})^2(0.1\,\text{m}) = 3 \times 10^{-11}\,\text{m}^3,$$

y la concentración de iones Na^+ dentro de la célula (véase la tabla 25-2) es de 15 mol/m^3 $= 15 \times 6.02 \times 10^{23}$ iones/m^3 $\approx 10^{25}$ iones/m^3. Así, la célula contiene (10^{25} iones/m^3) $\times$ (3×10^{-11} m^3) $\approx 3 \times 10^{14}$ iones de Na^+. Por lo tanto, un potencial de acción cambiará la concentración de iones de Na^+ en aproximadamente $10^{10}/(3 \times 10^{14}) = \frac{1}{3} \times 10^{-4}$, es decir, 1 parte en 30,000. Este pequeño cambio no sería mensurable.

Así, aun 1000 potenciales de acción no alterarán la concentración de manera significativa. Por lo tanto, la bomba de sodio no tiene que extraer iones de Na^+ tan rápido después de un potencial de acción, pero puede operar con lentitud en el tiempo para mantener la concentración relativamente constante.

Resumen

Una **batería** eléctrica sirve como una fuente de diferencia de potencial prácticamente constante transformando energía química en energía eléctrica. Una batería simple consta de dos electrodos, hechos de distintos metales, que están inmersos en una solución o pasta conocida como electrolito.

La **corriente eléctrica**, I, es igual a la tasa a la cual fluye la carga eléctrica y se mide en **amperes** (A): 1 A equivale al flujo de 1C/s en un punto dado.

La dirección de la **corriente convencional** es aquélla del flujo de carga positiva. En un alambre, son en realidad los electrones cargados negativamente los que se desplazan, así que fluyen en dirección opuesta a la corriente convencional. Un flujo de carga positiva en un sentido es casi siempre equivalente a un flujo de carga negativa en el sentido opuesto. La corriente convencional positiva siempre fluye de una región de alto potencial a otra región de menor potencial.

La **resistencia** R de un aparato se define por la relación

$$V = IR, \qquad \textbf{(25–2)}$$

donde I es la corriente en el aparato cuando existe una diferencia de potencial V aplicada a través de él. Para materiales como los metales, R es una constante independiente de V (así que $I \propto V$); este resultado se conoce como la **ley de Ohm**. De este modo, la corriente que proviene de una batería de voltaje V depende de la resistencia R del circuito al cual está conectada.

El voltaje se aplica *a través* de un aparato o entre los extremos de un alambre. La corriente pasa *a lo largo* del alambre o del aparato. La resistencia es una propiedad *del* alambre o del aparato.

La unidad de resistencia es el **ohm** (Ω); $1\ \Omega = 1\ \text{V/A}$. Véase la tabla 25-3.

TABLA 25–3 Resumen de unidades

Corriente	$1\ \text{A} = 1\ \text{C/s}$
Diferencia de potencial	$1\ \text{V} = 1\ \text{J/C}$
Potencia	$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s}$
Resistencia	$1\ \Omega = 1\ \text{V/A}$

La resistencia R de un alambre es inversamente proporcional a su área de sección transversal de A, así como directamente proporcional a su longitud ℓ y a una propiedad intrínseca del material llamada resistividad:

$$R = \frac{\rho \ell}{A}. \qquad \textbf{(25–3)}$$

La **resistividad**, ρ, se incrementa con la temperatura para los metales, aunque para materiales semiconductores puede disminuir.

La tasa a la cual se transforma energía en una resistencia R de energía eléctrica a otras formas de energía (como luz o calor) es igual al producto de la corriente por el voltaje. Esto es, la **potencia** transformada, medida en watts, está dada por

$$P = IV, \qquad \textbf{(25–6)}$$

que en el caso de resistores puede escribirse como

$$P = I^2R = \frac{V^2}{R}. \qquad \textbf{(25–7)}$$

La unidad del SI para la potencia es el **watt** ($1\ \text{W} = 1\ \text{J/s}$).

La energía eléctrica total transformada en cualquier aparato es igual al producto de la potencia y del tiempo durante el cual el aparato estuvo operando. En unidades del SI, la energía está dada en joules ($1\ \text{J} = 1\ \text{W}\cdot\text{s}$), pero las compañías eléctricas usan una unidad mayor, el **kilowatt-hora** ($1\ \text{kWh} = 3.6 \times 10^6\ \text{J}$).

La corriente eléctrica puede ser **corriente directa** (cd), en cuyo caso la corriente es estable siempre en una dirección, o **corriente alterna** (ca), en cuyo caso la corriente invierte su dirección a una frecuencia particular f, generalmente de 60 Hz. En general, las corrientes alternas son sinusoidales en el tiempo,

$$I = I_0 \operatorname{sen} \omega t, \qquad \textbf{(25–8)}$$

donde $\omega = 2\pi f$, y son producidas por un voltaje alternante.

Los valores **rms** de las corrientes alternas sinusoidales y los voltajes alternos están dados por

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \qquad \textbf{(25–9)}$$

respectivamente, donde I_0 y V_0 son los valores **pico**. La relación para la potencia, $P = IV = I^2R = V^2/R$, se cumple para la potencia promedio cuando se usan los valores rms de V y de I.

La **densidad de corriente** $\vec{\mathbf{j}}$ es la corriente por unidad de área de sección transversal. Desde un punto de vista microscópico, la densidad de corriente se relaciona con el número de portadores de carga por unidad de volumen, n, su carga, q, y su **velocidad de deriva**, $\vec{\mathbf{v}}_{\text{d}}$, a través de la relación

$$\vec{\mathbf{j}} = nq\vec{\mathbf{v}}_{\text{d}}. \qquad \textbf{(25–16)}$$

El campo eléctrico dentro de un alambre está relacionado con la densidad de corriente $\vec{\mathbf{j}}$ por $\vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}}$ donde $\sigma = 1/\rho$ es la **conductividad**.

[*A muy bajas temperaturas, algunos materiales se convierten en **superconductores**, lo cual significa que la resistencia eléctrica se vuelve prácticamente cero].

[*El sistema nervioso humano funciona a través de conducción eléctrica: cuando un nervio se "dispara", viaja una señal eléctrica como un pulso de voltaje conocido como **potencial de acción**].

Preguntas

1. ¿Qué cantidad se mide con una batería con especificaciones dadas en ampere-hora (A · h)?
2. Cuando se conecta una pila eléctrica a un circuito, los electrones fluyen a partir de la terminal negativa del circuito. Sin embargo, dentro de la pila, los electrones fluyen *hacia* la terminal negativa. Explique este hecho.
3. Cuando se enciende una linterna de mano, ¿qué es lo que se gasta: la corriente de la batería, el voltaje de la batería, la energía de la batería, la potencia de la batería o la resistencia de la batería? Explique.
4. Se dice que una de las terminales de la batería de un automóvil está conectada a "tierra". Puesto que en realidad no está conectada a la tierra, ¿qué es lo que significa tal expresión?
5. Cuando usted abre una llave de agua, el agua normalmente fluye de inmediato. No tiene que esperar para que el agua fluya desde la válvula del agua hasta el chorro. ¿Por qué no? ¿Ocurre algo similar cuando conecta un alambre a las terminales de una batería?
6. ¿Pueden un alambre de cobre y otro de aluminio de la misma longitud tener la misma resistencia? Explique.
7. La ecuación $P = V^2/R$ indica que la potencia disipada en una resistencia disminuye si la resistencia aumenta, mientras que la ecuación $P = I^2R$ implica lo contrario. ¿Existe alguna contradicción en esto? Explique.
8. ¿Qué pasa cuando se funde una bombilla eléctrica?

9. Si se aumenta la resistencia de un pequeño calentador de inmersión (usado para calentar agua para té o sopa, figura 25-33), ¿se aceleraría o se retardaría el proceso de calentamiento? Explique.

FIGURA 25–33
Pregunta 9.

10. Si un sólido rectangular de carbón tiene lados con longitudes a, $2a$ y $3a$, ¿cómo conectaría los cables provenientes de una batería para obtener *a*) la menor resistencia y *b*) la mayor resistencia?

11. Explique por qué las bombillas eléctricas se funden casi siempre justo después de encenderse y no después de un rato de estar encendidas.

12. ¿Qué consume más corriente, una bombilla de 100 W o un bulbo de 75 W? ¿Cuál tiene la mayor resistencia?

13. La potencia eléctrica se transfiere por largas distancias a voltajes muy altos. Explique por qué los altos voltajes reducen las pérdidas de potencia en las líneas de transmisión.

14. Un fusible de 15 A se quema repetidamente. ¿Por qué es peligroso sustituir este fusible con otro de 25-A?

15. Cuando las luces eléctricas operan a bajas frecuencias de ca (por ejemplo, 5 Hz), éstas titilan apreciablemente. ¿Por qué?

16. Cuando se trabaja con ca, los mismos electrones pasan a través de su lámpara de lectura una y otra vez. Explique por qué la luz se mantiene encendida en vez de apagarse después del primer paso de los electrones.

17. El elemento calefactor en un tostador está hecho de alambre de nicromo. Justo después de que se enciende el tostador, ¿la corriente (I_{rms}) en el alambre aumenta, disminuye o se mantiene estable? Explique.

18. ¿La corriente se agota en una resistencia? Explique.

19. Compare las velocidades de deriva y las corrientes eléctricas en dos alambres que tienen la misma geometría y densidad de átomos, pero el número de electrones libres por átomo en el material de un alambre es el doble que en el otro.

20. Se conecta un voltaje V a través de un alambre de longitud ℓ y radio r. ¿Cómo cambia la velocidad de deriva de los electrones si *a*) se duplica ℓ, *b*) se duplica r, *c*) se duplica V?

21. ¿Por qué es más peligroso encender un aparato eléctrico cuando usted está de pie en el exterior y descalzo que cuando está de pie en el interior usando zapatos con suelas anchas?

Problemas

25–2 y 25–3 Corriente eléctrica, resistencia y ley de Ohm

(*Nota:* La carga de un electrón es de 1.60×10^{-19} C)

1. (I) En un alambre fluye una corriente de 1.30 A. ¿Cuántos electrones por segundo pasan por un punto dado del alambre?

2. (I) Una estación de servicio carga una batería usando una corriente de 6.7 A durante 5.0 h. ¿Cuánta carga pasa a través de la batería?

3. (I) ¿Cuál es la corriente en amperes si fluyen 1200 iones de Na^+ a través de la membrana de una célula en 3.5 μs? La carga en un ion de sodio es la misma que la del electrón, pero positiva.

4. (I) ¿Cuál es la resistencia de un tostador si 120 V producen una corriente de 4.2 A?

5. (II) Una secadora eléctrica de ropa tiene un elemento calefactor con una resistencia de 8.6 Ω. *a*) ¿Cuál es la corriente en el elemento calefactor cuando se conecta a 240 V? *b*) ¿Cuánta carga pasa a través del elemento calefactor en 50 min? (Considere corriente directa).

6. (II) Una secadora para el cabello usa 9.5 A cuando se conecta a una línea de 120 V. *a*) ¿Cuál es su resistencia? *b*) ¿Cuánta carga pasa a través de la secadora en 15 min? (Considere corriente directa).

7. (II) Se conecta una batería de 4.5 V a un bulbo con una resistencia de 1.6 Ω, ¿Cuántos electrones salen de la batería por minuto?

8. (II) Un ave se posa sobre una línea de transmisión de corriente eléctrica cd que conduce 3100 A (figura 25-34). La línea tiene una resistencia de 2.5×10^{-5} Ω por metro, mientras las patas del ave están separadas 4.0 cm. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las patas del ave?

FIGURA 25–34
Problema 8.

9. (II) Una batería de 12 V produce una corriente de 0.60 A sobre un resistor. *a*) ¿Cuál es el valor de la resistencia? *b*) ¿Cuántos joules de energía pierde la batería por minuto?

10. (II) Un aparato eléctrico toma 6.50 A a 240 V. *a*) Si el voltaje disminuye en un 15%, ¿cuál será la corriente, suponiendo que todo lo demás permanece constante? *b*) Si la resistencia del aparato se reduce en un 15%, ¿qué corriente circularía a 240 V?

25–4 Resistividad

11. (I) ¿Cuál es el diámetro de un alambre de tungsteno de 1.00 m de longitud cuya resistencia es de 0.32 Ω?

12. (I) ¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de 4.5 m de longitud y 1.5 mm de diámetro?

13. (II) Calcule la razón entre la resistencia de un alambre de aluminio de 10.0 m de largo y 2.0 mm de diámetro y la resistencia de un alambre de cobre de 20.0 m de longitud y 1.8 mm de diámetro.

14. (II) ¿Puede un alambre de cobre de 2.2 mm de diámetro tener la misma resistencia que un alambre de tungsteno de la misma longitud? Use argumentos numéricos para responder.

15. (II) Se aplica una serie de diferencias de potencial V a un alambre (11 cm de longitud y 0.32 mm de diámetro) y la medida de las corrientes resultantes I es la siguiente:

V (V)	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500
I (mA)	72	144	216	288	360

(*a*) Si este cable cumple con la ley de Ohm, al graficar I contra V se obtendrá una línea recta. Explique por qué esto es así y determine las predicciones teóricas para la pendiente de la línea recta y la intersección en y. *b*) Grafique I en función de V. Con base en esa gráfica, ¿puede usted concluir si el alambre cumple con la ley de Ohm (es decir, obtuvo una línea recta con la ordenada al origen que esperaba)? Si es así, determine la resistencia R del alambre. *c*) Calcule la resistividad del alambre y utilice la tabla 25-1 para identificar el material sólido del que está compuesto.

16. (II) ¿En cuánto tendría que aumentar la temperatura de un alambre de cobre (inicialmente a 20°C) para aumentar su resistencia en un 15%?

17. (II) Un cierto alambre de cobre tiene una resistencia de 10.0 Ω. ¿En qué punto debe cortarse el alambre de manera que la resistencia de un segmento sea 4.0 veces la resistencia del otro segmento? ¿Cuál es la resistencia de cada segmento?

18. (II) Determine a qué temperatura el aluminio tendrá la misma resistividad que el tungsteno a 20°C.

19. (II) Una bombilla eléctrica de 100 Ω tiene una resistencia de 12 Ω aproximadamente cuando está fría (20°C) y de 140 Ω cuando está encendida (caliente). Determine la temperatura del filamento cuando está caliente suponiendo un coeficiente térmico de resistividad promedio de $\alpha = 0.0045\ (°C)^{-1}$.

20. (II) Calcule la caída de voltaje a través de un tramo de 26 m de un alambre de cobre casero número 14 (usado en circuitos de 15 A). El diámetro del alambre es de 1.628 mm y transporta una corriente de 12 A.

21. (II) Dos alambres de aluminio tienen la misma resistencia. Si uno es dos veces más largo que el otro, ¿cuál es la razón del diámetro del alambre largo con respecto al diámetro del alambre corto?

22. (II) La figura 25-35 muestra un sólido rectangular hecho de carbón con lados de 1.0 cm, 2.0 cm y 4.0 cm a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente. Determine la resistencia cuando la corriente pasa a través del sólido en *a*) la dirección x, *b*) la dirección y y *c*) la dirección z. Considere que la resistividad es $\rho = 3.0 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot \text{m}$.

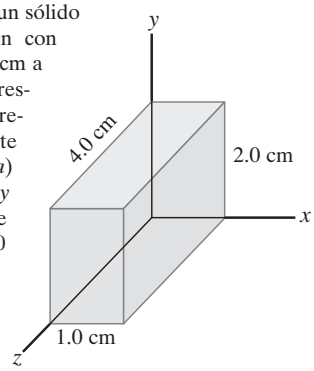


FIGURA 25–35
Problema 22.

23. (II) Se conecta un alambre de aluminio de determinada longitud a una fuente de poder precisa de 10.00 V, luego se mide con precisión una corriente de 0.4212 A a 20.0°C. Ahora se coloca al alambre en otro entorno de temperatura desconocida y se mide una corriente de 0.3818 A. ¿Cuál es la temperatura desconocida?

24. (II) Pueden medirse pequeños cambios en la longitud de un objeto usando un **sensor de medición de esfuerzos**, el cual se forma con un alambre de longitud original ℓ_0, área de sección transversal A_0 y resistencia R_0. Se fija rígidamente el sensor a la superficie del objeto, alineando su longitud en la dirección en la cual se medirán los cambios en la longitud. Conforme el objeto se deforma, la longitud del alambre sensor cambia en $\Delta\ell$, y se mide el cambio ΔR en la resistencia del sensor. Suponiendo que el alambre sólido se deforma hasta una longitud ℓ, y que su densidad y su volumen permanecen constantes (lo cual es sólo una aproximación), demuestre que el esfuerzo ($= \Delta\ell/\ell_0$) del alambre sensor, y por lo tanto el esfuerzo del objeto al cual está unido, es $\Delta R/2R_0$.

25. (II) Un cierto tramo de alambre se corta a la mitad y los dos alambres resultantes se envuelven uno junto a otro para formar un alambre del doble de ancho. ¿Cómo se compara la resistencia de esta nueva combinación con la resistencia del alambre original?

26. (III) Para algunas aplicaciones, es importante que el valor de la resistencia no cambie con la temperatura. Por ejemplo, suponga que usted elaboró un resistor de 3.70 kΩ a partir de una resistencia de carbón y de un resistor de alambre enrollado de nicromo, conectados entre sí, de manera que la resistencia total es la suma de sus resistencias por separado. ¿Cuál es el valor que debe tener cada una de las resistencias (a 0°C) para que la resistencia de la combinación no cambie con la temperatura?

27. (III) Determine una expresión para la resistencia total de un cascarón esférico hecho de un material cuya conductividad es σ, con radio interior r_1 y radio exterior r_2. Considere que la corriente fluye radialmente hacia fuera.

28. (III) El filamento de una bombilla eléctrica tiene una resistencia de 12 Ω a 20°C y de 140 Ω cuando está caliente (como en el problema 19). *a*) Calcule la temperatura del filamento cuando está caliente, considerando los cambios en longitud y área del filamento debidos a la expansión térmica (considere que el material es tungsteno con un coeficiente de expansión térmica de $\approx 5.5 \times 10^{-6}\ \text{C}^{\circ -1}$). *b*) Para ese intervalo de temperatura, ¿cuál es el cambio porcentual en la resistencia debido a la expansión térmica y cuál es el cambio porcentual en la resistencia debido sólo al cambio en ρ? Use la ecuación 25-5.

29. (III) Un alambre de 10.0 m de longitud está formado por 5.0 m de cobre seguidos de 5.0 m de aluminio, ambos con un diámetro de 1.4 mm. Se aplica una diferencia de potencial de 85 mV a través del alambre completo. *a*) ¿Cuál es la resistencia total (suma) de los dos alambres? *b*) ¿Cuál es la corriente en el alambre? *c*) ¿Cuáles son los voltajes a través de la parte de aluminio y a través de la parte de cobre?

30. (III) Un resistor cilíndrico hueco con radio interior r_1, radio exterior r_2 y longitud ℓ está hecho de un material con resistividad ρ (figura 25-36). *a*) Muestre que la resistencia está dada por

$$R = \frac{\rho}{2\pi\ell} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

para corriente que fluye radialmente hacia fuera. [*Sugerencia:* Divida el resistor en cascarones cilíndricos concéntricos e integre.] *b*) Evalúe la resistencia R para el caso de un resistor hecho de carbón con radio interior de 1.0 mm, radio exterior de 1.8 mm y longitud de 2.4 cm. (Considere $\rho = 15 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot \text{m}$). *c*) ¿Cuál es la resistencia en el inciso *b*) cuando la corriente fluye *paralela* al eje del cilindro?

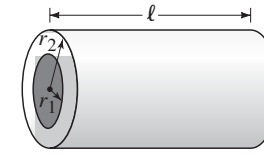


FIGURA 25–36
Problema 30.

25–5 y 25–6 Potencia eléctrica

31. (I) ¿Cuál es la potencia máxima que consume un reproductor de CD portátil de 3.0 V que toma un máximo de 270 mA de corriente?

32. (I) El elemento calefactor de un horno eléctrico está diseñado para producir 3.3 kW de calor cuando se conecta a una fuente de 240 V. ¿Cuál debe ser la resistencia del elemento?

33. (I) ¿Cuál es el voltaje máximo que puede aplicarse a través de un resistor de 3.3 kΩ especificado a $\frac{1}{4}$ de watt?

34. (I) *a*) Determine la resistencia y la corriente en una bombilla de 75 W conectada a su fuente correcta de voltaje de 110 V. *b*) Elabore el cálculo para una bombilla de 440 W

35. (II) Una planta de energía eléctrica produce electricidad a una potencia fija P, pero el operador de la planta puede elegir a qué voltaje V se genera. La electricidad se conduce mediante una corriente I a través de líneas de transmisión (con resistencia R) desde la planta hasta el usuario, donde se suministra con una potencia P'. *a*) Demuestre que la reducción en la potencia $\Delta P = P - P'$ debida a pérdidas en la transmisión está dada por $\Delta P = P^2R/V^2$. *b*) Con la finalidad de reducir las pérdidas de energía durante la transmisión, ¿el operador de la planta debería elegir voltajes V tan altos o tan bajos como sea posible?

36. (II) Una secadora para el cabello de 120 V tiene dos niveles de operación: a 850 W y a 1250 W. *a*) ¿A qué nivel espera usted que la resistencia sea mayor? Después de razonar su respuesta, calcule la resistencia *b*) en el nivel bajo y *c*) en el nivel alto.

37. (II) El calentador de 115 V de una pecera está diseñado para 95 W. Calcule *a*) la corriente a través del calentador cuando está trabajando y *b*) su resistencia.

38. (II) Usted compra una bombilla de 75 W en Europa, donde la electricidad que se provee a las casas es de 240 V. Si usa la bombilla en Estados Unidos a 120 V (suponga que la resistencia no cambia), ¿qué tan brillante será con respecto a la bombilla de 75 W y 120 V? [*Sugerencia:* Suponga que el brillo es aproximadamente proporcional a la potencia consumida].

39. (II) ¿Cuántos kWh de energía usa un tostador de 550 W en la mañana si está en operación durante un total de 6.0 min? Si cada kWh cuesta 9.0 centavos de dólar, estime cuánto añade esto a su recibo de energía eléctrica mensual si tuesta pan cuatro veces a la semana.

40. (II) A un costo de \$0.095/kWh, ¿cuánto cuesta dejar la luz de 25 W del porche encendida todo el día y toda la noche durante un año?

41. (II) ¿Cuál es la cantidad de energía total almacenada en una batería de automóvil de 12 V y 75 A · h cuando está completamente cargada?

42. (II) La figura 25-37 muestra una linterna ordinaria que usa dos baterías D de 1.5 V conectadas en serie como en la figura 25-4b. La bombilla utiliza 380 mA cuando está encendida. Calcule la resistencia de la bombilla y la potencia disipada. *b*) ¿En qué factor se incrementaría la potencia si se usan cuatro baterías D en serie con la misma bombilla? (Ignore los efectos de calentamiento en el filamento.) ¿Por qué no debería intentar hacer esto?

FIGURA 25–37 Problema 42.

43. (II) ¿Cuántas bombillas de 75 W, conectadas a 120 V como en la figura 25-20, pueden usarse sin quemar un fusible de 15 A?

44. (II) Un cable de extensión hecho con dos alambres de 0.129 cm de diámetro (alambre de cobre número 16) y 2.7 m de longitud está conectado a un calentador eléctrico que extrae 15.0 A de una línea de 120 V. ¿Cuál es la potencia disipada en el cable?

45. (II) Una estación de energía suministra 750 kW de potencia a 12,000 V a una fábrica a través de alambres con una resistencia total de 3.0 Ω. ¿Cuánta potencia menos se desperdiciaría si la electricidad se suministrara a 50,000 V y no a 12,000 V?

46. (III) Puede usarse un pequeño calentador de inmersión en un automóvil para calentar una taza de agua para café o té. Si el calentador puede calentar 120 mL de agua de 25°C a 95°C en 8.0 min, *a*) ¿cuánta corriente aproximadamente extrae el calentador de la batería de 12 V del automóvil? *b*) ¿Cuál es su resistencia? Considere que el constructor asegura una eficiencia del 75%.

47. (III) La corriente en un electroimán conectado a una línea de 240 V es de 17.5 A. ¿A qué tasa debe fluir agua para enfriar sobre las bobinas si la temperatura del agua no debe incrementarse en más de 6.50° C?

48. (III) Un alambre redondo de tungsteno de 1.0 m de largo debe alcanzar una temperatura de 3100 K cuando por él fluye una corriente de 15.0 A. ¿Qué diámetro debe tener el alambre? Considere que el alambre pierde energía sólo por radiación (emisividad $\epsilon = 1.0$, sección 19-10) y que la temperatura del entorno es de 20°C.

25–7 Corriente alterna

49. (I) Calcule la corriente pico en un resistor de 2.7 kΩ conectado a una fuente ca de 220 rms.

50. (I) Una fuente de voltaje ca, cuyo valor pico es de 180 V, está conectada a través de un resistor de 380 Ω. ¿Cuánto valen las corrientes pico y rms en el resistor?

51. (II) Estime la resistencia en los circuitos de 120 V_{rms} de su casa vistos por la compañía eléctrica, cuando *a*) todos los aparatos eléctricos están desconectados y *b*) sólo hay dos bombillas de 75 W conectadas.

52. (II) El valor pico de una corriente alterna en un aparato de 1500 W es de 5.4 A. ¿A qué voltaje rms está conectado el aparato?

53. (II) Un arco para soldadura de 1800 W está conectado a una línea ca de 660 V_{rms}. Calcule *a*) el voltaje pico y *b*) la corriente pico.

54. (II) *a*) Cuál es la máxima potencia instantánea disipada por una bomba de 2.5 hp conectada a una fuente de poder de 240 V_{rms}? *b*) ¿Cuál es la corriente máxima que pasa a través de la bomba?

55. (II) Un anillo calefactor conectado a una línea ca de 240 V_{rms} tiene una resistencia de 44 Ω. *a)* ¿Cuál es la potencia promedio utilizada? *b)* ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la potencia instantánea?

56. (II) El voltaje rms de un voltaje dependiente del tiempo $V(t)$, que es periódico con tiempo T, está definido por $V_{rms} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T V^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$. Use esta definición para determinar V_{rms} (en términos del voltaje pico V_0) para *a*) un voltaje sinusoidal, es decir, $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(2\pi t/T)$ para $0 \le t \le T$; y *b*) un voltaje de onda cuadrada positivo, es decir,

$$V(t) = \begin{cases} V_0 & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}.$$

25–8 Visión microscópica de la corriente eléctrica

57. (II) Un alambre de cobre de 0.65 mm de diámetro conduce una pequeña corriente de 2.3 μA. Estime *a*) la velocidad de deriva de los electrones, *b*) la densidad de corriente y *c*) el campo eléctrico en el alambre.

58. (II) Un alambre de 5.80 m de largo y 2.00 mm de diámetro conduce una corriente de 750 mA cuando se aplican 22.0 mV a sus extremos. Si la velocidad de deriva es de 1.7×10^{-5} m/s, determine *a*) la resistencia R del alambre, *b*) la resistividad ρ, *c*) la densidad de corriente j, *d*) el campo eléctrico dentro del alambre y *e*) el número n de electrones libres por unidad de volumen.

59. (II) En un punto alto de la atmósfera de la Tierra se encuentran en movimiento iones de He^{2+} con una concentración de $2.8 \times 10^{12}/m^3$ hacia el norte con una rapidez de 2.0×10^6 m/s. También, iones de O_2^- con una concentración de $7.0 \times 10^{11}/m^3$ se desplazan hacia el sur con una rapidez de 6.2×10^6 m/s. Determine la magnitud y la dirección de la densidad de corriente $\vec{\mathbf{j}}$ en ese punto.

*25–10 Conducción en nervios

***60.** (I) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a través de la membrana del axón de 1.0×10^{-8} m de espesor si el potencial de reposo es de −70 mV?

***61.** (II) Se estimula una neurona con un pulso eléctrico. El potencial de acción se detecta en un punto situado 3.40 cm más adelante del axón 0.0052 segundos después. Cuando se detecta el potencial de acción a 7.20 cm del punto de estimulación, han pasado 0.0063 s. ¿Cuál es la rapidez del pulso eléctrico a lo largo del axón? (¿Por qué se necesitan dos mediciones y no sólo una?)

***62.** (III) Durante un potencial de acción, iones de Na^+ se desplazan hacia la célula a una tasa aproximada de 3×10^{-7} mol/m²·s. ¿Cuál es la potencia que debe producir el sistema de "bombeo activo de Na^+" para producir ese flujo en contra de una diferencia de potencial de +30 mV? Considere que el axón tiene 10 cm de largo y 20 μm de diámetro.

Problemas generales

63. Una persona deja encendidas accidentalmente las luces del automóvil. Si cada uno de los faros consume 40 W y cada una de las luces traseras requiere 6 W, para un total de 92 W, ¿cuánto durará una batería nueva de 12 V con una especificación de 85 A·h? Considere que los 12 V aparecen completos a través de cada bombilla.

64. ¿Cuántos coulombs hay en 1.00 ampere-hora?

65. Usted desea diseñar una manta eléctrica portátil que opere con baterías de 1.5 V. Si usa alambre de cobre de 0.50 mm de diámetro como elemento calefactor, ¿qué tan largo debe ser el alambre si quiere generar 15 W de potencia de calentamiento? ¿Qué pasa si usted conecta accidentalmente la manta a una batería de 9.0 V?

66. ¿Cuál es la potencia promedio que extrae un motor de 1.0 hp a 120 V? (1 hp = 746 W).

67. La *conductividad* G de un objeto se define como el recíproco de la resistencia R; esto es $G = 1/R$. La unidad de la conductividad es el *mho* ($= \text{ohm}^{-1}$), también conocida como *siemens* (S). ¿Cuál es la conductividad (en siemens) de un objeto que consume 480 mA de corriente a 3.0 V?

68. El elemento calefactor de un calentador de 1500 W y 110 V tiene 3.5 m de longitud. ¿Cuál debe ser su diámetro si está hecho de hierro?

69. *a*) Un hogar particular usa un calentador de 1.8 kW por 2.0 h/día (encendido), cuatro bombillas de 100 W por 6.0 h/día, una estufa eléctrica de 3.0 kW durante 1.0 h/día y otros aparatos con 2.0 kWh/día. Si el costo de la electricidad es de $0.105 por kWh, ¿de cuánto será su recibo mensual (30 días)? *b*) ¿Cuánto carbón (el cual produce 7500 kcal/kg) debe quemarse en una planta generadora de electricidad con una eficiencia del 35% para proveer las necesidades anuales de esta casa?

70. Una ciudad pequeña requiere cerca de 15 MW de energía eléctrica. Suponga que en vez de usar líneas de alto voltaje para proveer la energía eléctrica, ésta se suministrara a 120 V. Considere una línea de dos alambres de cobre de 0.50 cm de diámetro y estime el costo de la energía perdida en forma de calor por hora por metro. Considere que el costo de la electricidad es de 9.0 centavos de dólar por kWh.

71. Una secadora para el cabello de 1400 W está diseñada para operar a 117 V. *a*) ¿Cuál sería el cambio porcentual en la potencia de salida si el voltaje cae a 105 V? Considere que la resistencia no cambia. *b*) ¿Cómo afectaría su respuesta el cambio real de la resistividad con la temperatura?

72. El cableado en una casa debe tener un grosor suficiente para que no se caliente tanto como para generar un incendio. ¿Cuál es el diámetro que debe tener un alambre de cobre si habrá de conducir una corriente máxima de 35 A y producir no más de 1.5 W de calor por metro de longitud?

73. Determine la resistencia del filamento de tungsteno en una bombilla incandescente de 75 W a 120 V, *a*) a su temperatura de operación cercana a 3000 K y *b*) a temperatura ambiente.

74. Suponga que una corriente está dada por la ecuación $I = 1.80 \operatorname{sen} 210\, t$, donde I está en amperes y t en segundos. *a*) ¿Cuál es la frecuencia? *b*) ¿Cuál es el valor rms de la corriente? *c*) Si ésta es la corriente a través de una resistencia de 24.0 Ω, determine la ecuación que describe al voltaje como función del tiempo.

75. Un horno de microondas que trabaja al 65% de eficiencia envía 950 W de energía por segundo hacia el interior. Considere una fuente de voltaje de 120 V y determine *a*) la potencia que toma de la fuente y *b*) la corriente que ocupa.

76. Se estira uniformemente un alambre de 1.00 Ω hasta 1.20 veces su longitud original. ¿Cuál es la nueva resistencia?

77. Se aplican 220 V a dos conductores diferentes hechos del mismo material. Un conductor es dos veces más largo y dos veces más ancho que el otro. ¿Cuál es la razón entre la potencia transformada por el primer alambre con respecto a la del segundo?

78. Se usa un calentador eléctrico para calentar un cuarto con un volumen de 54 m^3. Se hace ingresar aire dentro del cuarto a 5°C y se remplaza por completo dos veces cada hora. La pérdida de calor a través de las paredes es aproximadamente de 850 kcal/h. Si el aire debe mantenerse a 20°C, ¿cuál es la mínima potencia en watts que debe tener el calentador? (El calor específico del aire es de cerca de 0.17 kcal/kg · C°).

79. Se conecta un horno de 2800 W a una fuente de 240 V. *a*) ¿Cuál es la resistencia del horno? *b*) ¿Cuánto tiempo tardará en calentar 120 mL de agua de 15°C a 100°C suponiendo una eficiencia del 75%? *c*) ¿Cuánto costará esto a 11 centavos/kWh?

80. Un vehículo eléctrico propuesto usa baterías almacenadas como su fuente de energía. Su masa es de 1560 kg y es alimentado con 24 baterías, cada una de 12 V y 95 A·h. Suponga que el auto se maneja sobre una pista plana a una rapidez promedio de 45 km/h y que la fuerza promedio de fricción es de 240 N. Considere una eficiencia del 100% e ignore la energía usada para acelerar. No se consume energía cuando el vehículo se detiene, puesto que el motor no necesita marchar en ralentí (es decir, sin acelerar). *a*) Determine los caballos de potencia requeridos para operar el vehículo. *b*) ¿Después de cuántos kilómetros aproximadamente deben remplazarse las baterías?

81. Un resistor de 12.5 Ω está hecho a partir de una bobina de alambre de cobre con una masa total de 15.5 g. ¿Cuál es el diámetro del alambre y cuál es su longitud?

82. El calentador de una pecera está diseñado para 95 W cuando se conecta a 120 V. El elemento calefactor es una bobina de alambre de nicromo. Cuando se desenrolla, el alambre tiene una longitud total de 3.8 m. ¿Cuál es el diámetro del alambre?

83. Un foco de 100 W a 120 V tienen una resistencia de 12 Ω cuando está frío (20°C) y 140 Ω cuando está encendido (caliente). Calcule la potencia consumida *a*) en el instante en que se enciende y *b*) después de un rato de estar encendido.

84. En un automóvil el sistema de voltaje varía de cerca de 12 V cuando el auto está apagado a cerca de 13.8 V cuando está encendido y el sistema de carga está en operación, una diferencia del 15%. ¿En qué porcentaje cambia la potencia suministrada a los faros cuando el voltaje cambia de 12 V a 13.8 V? Considere que la resistencia de los faros permanece constante.

85. El acelerador Tevatron en Fermilab (Illinois) está diseñado para transportar un haz de protones de 11 mA viajando casi a la velocidad de la luz (3.0×10^8 m/s) alrededor de un anillo de 6300 m de circunferencia. ¿Cuántos protones hay en el haz?

86. La bombilla A está diseñada para operar sa 120 V y a 40 W para aplicaciones caseras. La bombilla B está diseñada a 12 V y 40 W para aplicaciones automotrices. *a*) ¿Cuál es la corriente a través de cada bombilla? *b*) ¿Cuál es la resistencia de cada bombilla? *c*) En una hora, ¿cuánta carga pasa a través de cada bombilla? *d*) En una hora, ¿cuánta energía usa cada bombilla? *e*) ¿Qué bombilla requiere alambres de mayor diámetro para conectarla a la fuente de poder?

87. Un aparato de aire acondicionado usa 14 A a 220 V de ca. El cable conector es un alambre de cobre con un diámetro de 1.628 mm. *a*) ¿Cuánta potencia consume el aparato de aire acondicionado? *b*) Si la longitud total del alambre es de 15 m, ¿cuánta potencia se disipa en el alambre? *c*) Si en su lugar se usa alambre del número 12, con un diámetro de 2.053 mm, ¿cuánta potencia se disiparía en el cableado? *d*) Considerando que el aparato de aire acondicionado trabaja durante 12 h al día, ¿cuánto dinero se ahorraría al mes (30 días) si se usa alambre del número 12? Considere que el costo de la electricidad es de 12 centavos por kWh.

88. Se usa alambre de cobre de 0.259 cm de diámetro para conectar un conjunto de aparatos a 120 V, los cuales consumen una potencia total de 1750 W. *a*) ¿Cuánta potencia se desperdicia en 25.0 m de este cable? *b*) ¿Cuál sería su respuesta si se usa alambre de 0.412 cm de diámetro?

89. La electricidad provista por baterías es mucho más cara que la electricidad suministrada por una toma de corriente en la pared. Estime el costo de 1 kWh de *a*) una pila alcalina D (costo $1.70) y *b*) una pila alcalina AA (costo $1.25). Estas baterías pueden suministrar una corriente continua de 25 mA durante 820 h y 120 h, respectivamente a 1.5 V. Compare con la corriente doméstica normal a 120 V de ca a $0.10/kWh.

90. ¿Qué tan lejos se desplaza un electrón a lo largo de los alambres de un tostador de 550 W durante un ciclo de corriente alterna? El cable de alimentación tiene alambres de cobre de 1.7 mm de diámetro y se conecta a una terminal estándar de 60 Hz y 120 V de ca. [*Sugerencia:* Considere que la corriente máxima en un ciclo está relacionada con la velocidad de deriva máxima. La velocidad máxima en una oscilación está relacionada con el desplazamiento máximo (véase el capítulo 14)].

91. Una tubería de cobre tiene un diámetro interior de 3.00 cm y un diámetro exterior de 5.00 cm (figura 25-38). ¿Cuál es la resistencia de una tubería de este tipo que mide 10.0 m de longitud?

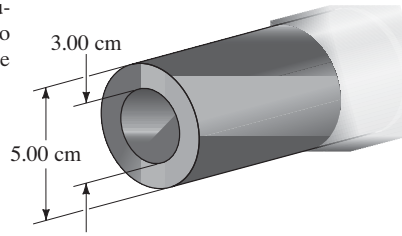


FIGURA 25–38
Problema 91.

92. La figura 25-39 muestra un alambre cuyo diámetro varía uniformemente desde *a* hasta *b* como se indica. Considere una corriente $I = 2.0$ A que entra por el punto *a*. Si $a = 2.5$ mm y $b = 4.0$ mm, ¿cuál es la densidad de corriente (considerada uniforme) en cada extremo?

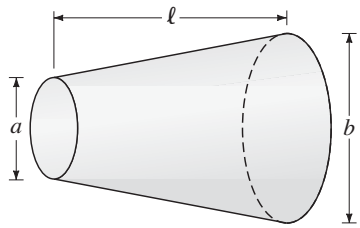


FIGURA 25–39
Problemas 92 y 93.

93. La sección transversal de un alambre se incrementa de manera uniforme, como se indica en la figura 25-39, de manera que el alambre tiene la forma de un cono truncado. En un extremo, el diámetro es *a* y en el otro extremo el diámetro es *b*. La longitud total a lo largo del eje es ℓ. Si el material tiene resistividad ρ, determine la resistencia *R* entre los dos extremos en términos de *a*, *b*, ℓ y ρ. Considere que la corriente fluye de manera uniforme a través de cada sección transversal y que la inclinación es pequeña, es decir, $(b - a) \ll \ell$.

94. Un filamento de tungsteno utilizado en la bombilla de una linterna opera a 0.20 A y 3.2 V. Si su resistencia a 20°C es de 1.5 Ω, ¿cuál es la temperatura del filamento cuando la linterna está encendida?

95. En un tanque de almacenamiento puede monitorearse el nivel de helio líquido (temperatura $\leq$ 4 K) usando un alambre de niobio-titanio (NbTi) alineado verticalmente, cuya longitud ℓ abarca la altura del tanque. En este dispositivo de monitoreo de altura, un circuito electrónico mantiene una corriente eléctrica constante *I* en todo momento en el alambre de NbTi, y un voltímetro monitorea la diferencia de voltaje *V* entre los extremos del alambre. Puesto que la temperatura de transición superconductora del NbTi es de 10 K, la porción del alambre inmersa en el helio líquido está en el estado superconductor, mientras que la porción arriba del líquido (en vapor de helio a una temperatura mayor a 10 K) está en el estado normal. Defina $f = x/\ell$ como la fracción del tanque lleno con helio líquido (figura 25-40) y V_0 como el valor de *V* cuando el tanque está vacío ($f = 0$). Determine la relación entre *f* y *V* (en términos de V_0).

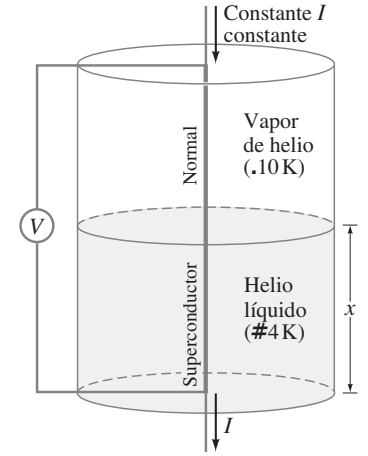


FIGURA 25–40
Problema 95.

*Problemas numéricos/por computadora

***96.** (II) La resistencia *R* de un termistor particular como función de la temperatura *T* se muestra en la siguiente tabla.

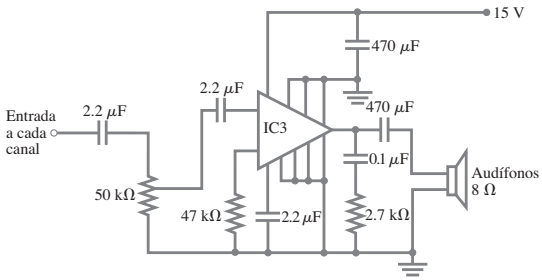
T (°C)	*R* (Ω)	*T* (°C)	*R* (Ω)
20	126,740	36	60,743
22	115,190	38	55,658
24	104,800	40	51,048
26	95,447	42	46,863
28	87,022	44	43,602
30	79,422	46	39,605
32	72,560	48	36,458
34	66,356	50	33,591

Determine qué tipo de ecuación (lineal, cuadrática, exponencial, o alguna otra) tiene el mejor ajuste para describir la variación de *R* con *T*. La resistencia del termistor es de 57,641 Ω cuando está dentro de una sustancia con temperatura desconocida. Con base en su ecuación anterior, ¿cuál es la temperatura desconocida?

Respuestas a los ejercicios

A: 1.6×10^{-13} A.
B: *c*).
C: *b*), *c*).
D: *c*).
E: 110 m.
F: *d*).
G: *e*).
H: *a*) 28 V, 3.5 A; (*b*) 2.8 V, 0.35 A.

Estos reproductores MP3 contienen circuitos de cd, al menos en parte. (La señal de audio es de ca). El diagrama que aparece más abajo muestra un posible circuito de un amplificador para cada canal de audio estéreo. Dos de los elementos del circuito representados ya se estudiaron: resistores y capacitores, y se les analizará en los circuitos de este capítulo. (El triángulo grande representa un chip amplificador que contiene transistores, los cuales se estudiarán en el capítulo 40). También se estudiarán los voltímetros y amperímetros, cómo se construyen y cómo se emplean para realizar mediciones.

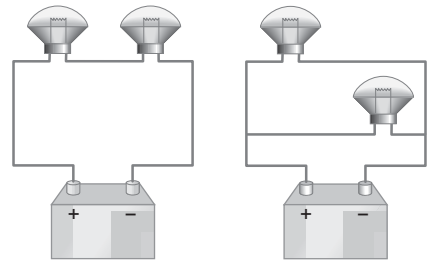


CAPÍTULO 26

Circuitos de cd

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Los faros de automóvil que se incluyen en estos circuitos son idénticos. La conexión que produce más luz es

a) el circuito 1.
b) el circuito 2.
c) ambos circuitos son iguales.
d) no hay suficiente información para determinarlo.



Circuito 1 Circuito 2

Los circuitos eléctricos son elementos básicos de todos los dispositivos electrónicos, desde los aparatos de radio y TV, hasta las computadoras y los automóviles. Las mediciones científicas, en los campos de la física, la biología y la medicina, utilizan circuitos eléctricos. En el capítulo 25 se estudiaron los principios básicos de la corriente eléctrica. Ahora se aplicarán tales principios para analizar los circuitos de cd que implican combinaciones de baterías, resistores y capacitores. También se estudiará la operación de algunos instrumentos útiles.†

†Los circuitos de ca que contienen sólo una fuente de voltaje y resistores se pueden analizar como los circuitos de cd en este capítulo. Sin embargo, los circuitos de ca que contienen capacitores y otros elementos de circuito son más complicados y se estudiarán en el capítulo 30.

CONTENIDO

26–1 FEM y voltaje terminal
26–2 Resistores en serie y en paralelo
26–3 Reglas de Kirchhoff
26–4 FEM en serie y en paralelo; cómo cargar una batería
26–5 Circuitos que contienen resistores y capacitores (circuitos RC)
26–6 Riesgos eléctricos
*26–7 Amperímetros y voltímetros

TABLA 26–1 Símbolos para elementos de circuito

Símbolo	Dispositivo
⊣⊢	Batería
⊣⊢ o ⊣(	Capacitor
⁄\/\/\/	Resistor
———	Alambre con resistencia despreciable
—⁄—	Interruptor
⏚ o ⏚	Tierra

Cuando se dibuja un diagrama de circuito, las baterías, los capacitores y los resistores se representan con los símbolos que se incluyen en la tabla 26-1. Los alambres cuya resistencia es despreciable en comparación con otra resistencia en el circuito se dibujan simplemente como líneas rectas. Algunos diagramas de circuito incluyen un símbolo de tierra (⏚ o ⏚) que puede significar una conexión real a tierra, quizás mediante una tubería metálica, o que simplemente significa una conexión común, como el chasis de un automóvil.

En la mayor parte de este capítulo, excepto en la sección 26-5 referente a los circuitos *RC*, el interés se centrará en los circuitos que operan en situaciones estables. Es decir, no se analizará un circuito en el momento en que éste experimenta un cambio, como cuando se conecta o se desconecta una batería o un resistor, sino después, cuando las corrientes alcanzan sus valores estables.

26–1 FEM y voltaje terminal

Para tener una corriente en un circuito eléctrico se necesita un dispositivo, como una batería o un generador eléctrico, que transforme un tipo de energía (química, mecánica o lumínica, por ejemplo) en energía eléctrica. A tal dispositivo se le llama **fuente** de **fuerza electromotriz** o de **fem**. (El término "fuerza electromotriz" es un nombre incorrecto, pues no se trata de una "fuerza" que se mida en newtons. Por ello, y para evitar confusión, en el texto se preferirá el uso de la abreviatura fem.) La *diferencia de potencial* entre las terminales de tal fuente, cuando no fluye corriente hacia un circuito externo, se llama **fem** de la fuente. Por lo general se emplea el símbolo $\mathscr{E}$ para la fem (no lo confunda con E para campo eléctrico), y su unidad es el volt.

⚠ CUIDADO

Por qué el voltaje de una batería no es perfectamente constante

Una batería no es una fuente de corriente constante: la corriente que sale de una batería varía de acuerdo con la resistencia en el circuito. Sin embargo, una batería *es* una fuente de voltaje casi constante, pero no perfectamente constante, como se analizará a continuación. Es posible que el lector haya notado en su propia experiencia que, cuando se extrae una corriente de una batería, la diferencia de potencial (voltaje) a través de sus terminales disminuye por debajo del valor nominal de su fem. Por ejemplo, si usted enciende un automóvil con los faros encendidos, podrá notar que los faros se apagan brevemente. Esto ocurre porque el motor de arranque extrae una gran corriente y, como resultado, el voltaje de la batería cae. La caída de voltaje ocurre porque las reacciones químicas en una batería (sección 25-1) no pueden suministrar carga lo suficientemente rápido para mantener el valor de la fem. Por una razón: la carga debe moverse (dentro del electrolito) entre los electrodos de la batería, y siempre existe algún obstáculo que impide el flujo completamente libre. Por lo tanto, una batería en sí tiene alguna resistencia, llamada **resistencia interna** y generalmente se le designa como r.

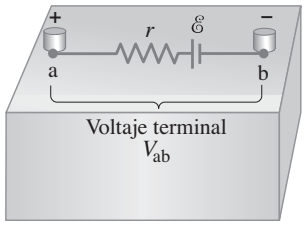


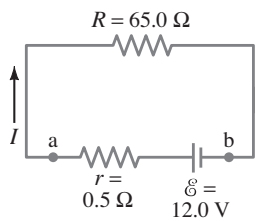
FIGURA 26–1 Diagrama para una pila o batería eléctrica.

Una batería real se representa como si fuera una fem $\mathscr{E}$ perfecta en serie con un resistor r, como se muestra en la figura 26-1. Como esta resistencia r está dentro de la batería, nunca se le puede separar de la batería. Los dos puntos a y b en el diagrama representan las dos terminales de la batería. Lo que se mide es el **voltaje terminal** $V_{ab} = V_a - V_b$. Cuando no se extrae corriente de la batería, el voltaje terminal es igual a la fem, que se determina mediante las reacciones químicas en la batería: $V_{ab} = \mathscr{E}$. Sin embargo, cuando una corriente I fluye de manera natural desde la batería, existe una caída interna en el voltaje igual a Ir. Por lo tanto, el voltaje terminal (el voltaje real) es[†]

$$V_{ab} = \mathscr{E} - Ir. \qquad \textbf{(26–1)}$$

Por ejemplo, si una batería de 12 V tiene una resistencia interna de 0.1 Ω, entonces, cuando fluyan 10 A de la batería, el voltaje terminal será 12 V − (10 A)(0.1 Ω) = 11 V. Por lo general, la resistencia interna de una batería es pequeña. Por ejemplo, una batería ordinaria de linterna, cuando está nueva, quizás tenga una resistencia interna de 0.05 Ω. (Sin embargo, conforme pasa el tiempo y el electrolito se seca, la resistencia interna aumenta a muchos ohms). Las baterías de los automóviles tienen resistencia interna más baja.

FIGURA 26–2 Ejemplo 26–1.



EJEMPLO 26–1 **Batería con resistencia interna.** Un resistor de 65.0 Ω se conecta a las terminales de una batería cuya fem es de 12.0 V y cuya resistencia interna es de 0.5 Ω (figura 26-2). Calcule *a*) la corriente en el circuito, *b*) el voltaje terminal de la batería, V_{ab}, y *c*) la potencia disipada en el resistor R y en la resistencia interna r de la batería.

PLANTEAMIENTO Considere primero la batería como un todo, la cual se muestra en la figura 26-2 como una fem $\mathscr{E}$ y una resistencia interna r entre los puntos a y b. Luego aplicamos $V = IR$ al circuito mismo.

[†]Cuando se carga una batería, una corriente se ve forzada a pasar a través de ella; entonces, escribimos $V_{ab} = \mathscr{E} + Ir$.
Véase la sección 26-4 o el problema 28 y la figura 26-46.

SOLUCIÓN *a*) De la ecuación 26-1 se tiene

$$V_{ab} = \mathscr{E} - Ir.$$

Se aplica la ley de Ohm (ecuaciones 25-2) a esta batería y la resistencia R del circuito: $V_{ab} = IR$. Por lo tanto, $IR = \mathscr{E} - Ir$ o $\mathscr{E} = I(R + r)$, y de este modo

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r} = \frac{12.0\ \text{V}}{65.0\ \Omega + 0.5\ \Omega} = \frac{12.0\ \text{V}}{65.5\ \Omega} = 0.183\ \text{A}.$$

b) El voltaje terminal es

$$V_{ab} = \mathscr{E} - Ir = 12.0\ \text{V} - (0.183\ \text{A})(0.5\ \Omega) = 11.9\ \text{V}.$$

c) La potencia disipada (ecuación 25-7) por R es

$$P_R = I^2R = (0.183\ \text{A})^2(65.0\ \Omega) = 2.18\ \text{W},$$

y por r es

$$P_r = I^2r = (0.183\ \text{A})^2(0.5\ \Omega) = 0.02\ \text{W}.$$

EJERCICIO A Repita el ejemplo 26-1, pero suponga ahora que la resistencia $R = 10.0\ \Omega$, mientras que $\mathscr{E}$ y r permanecen como antes.

En buena parte de lo que se presenta a continuación, a menos que se establezca de otro modo, se supondrá que la resistencia interna de la batería es despreciable, y que el voltaje de la batería es su voltaje terminal, que generalmente sólo se representará como V en vez de V_{ab}. No confunda V (itálica) para voltaje con V (tipo normal) para la unidad volt.

26–2 Resistores en serie y en paralelo

Cuando dos o más resistores se conectan extremo con extremo a lo largo de una sola trayectoria, como se muestra en la figura 26-3a, se dice que están conectados en **serie**. Los resistores podrían ser resistores simples como los que se representan en la figura 25-12, o podrían ser bombillas (figura 26-3b) o elementos calefactores u otros dispositivos resistivos. Cualquier carga que pase a través de R_1 en la figura 26-3a también pasará a través de R_2 y luego a R_3. Por ende, la misma corriente I pasa a través de cada resistor. (Si no fuera así, esto implicaría que la carga no se conservó o que la carga se acumuló en algún punto del circuito, lo que no ocurre en el estado de equilibrio).

Sea V la diferencia de potencial (voltaje) a través de los tres resistores en la figura 26-3a. Se supone que todas las demás resistencias en el circuito se pueden ignorar, de manera que V es igual al voltaje terminal suministrado por la batería. Sean V_1, V_2 y V_3 las diferencias de potencial a través de cada uno de los resistores, R_1, R_2 y R_3, respectivamente. De acuerdo con la ley de Ohm, $V = IR$, podemos escribir $V_1 = IR_1$, $V_2 = IR_2$ y $V_3 = IR_3$. Puesto que los resistores están conectados extremo con extremo, la conservación de la energía nos indica que el voltaje total V es igual a la suma de los voltajes[†] a través de cada resistor:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3. \qquad \text{[series]} \quad \textbf{(26–2)}$$

Ahora se determinará una resistencia equivalente R_{eq} que extraería la misma corriente I que la combinación de tres resistores en serie; véase la figura 26-3c. Tal resistencia R_{eq} se relacionaría con V mediante

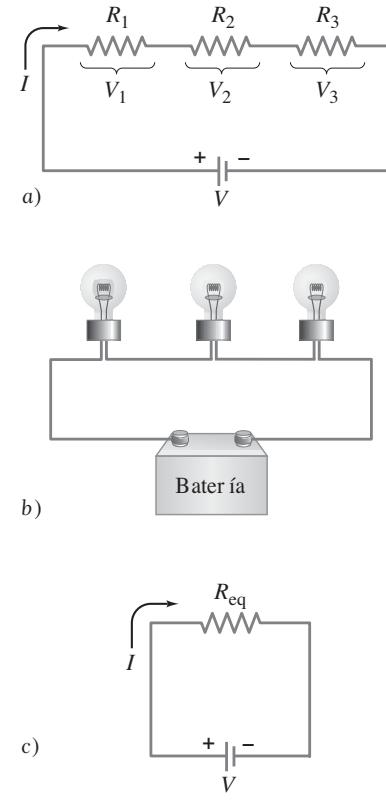
$$V = IR_{eq}.$$

Esta expresión se iguala con la ecuación 26-2, $V = I(R_1 + R_2 + R_3)$, y se obtiene

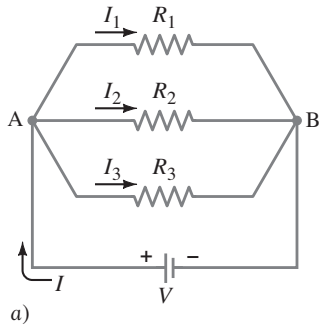
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3. \qquad \text{[en serie]} \quad \textbf{(26–3)}$$

Esto es, de hecho, lo que se esperaba. Cuando se conectan varias resistencias en serie, la resistencia total o equivalente es la suma de las resistencias separadas. (A veces también se le puede llamar "resistencia neta"). Esta suma se aplica a cualquier número de resistencias en serie. Advierta que, al agregar más resistencias al circuito, la corriente a través del circuito disminuirá. Por ejemplo, si una batería de 12 V se conecta a un resistor de 4 Ω, la corriente será de 3 A. Pero si la batería de 12 V se conecta a tres resistores de 4 Ω en serie, la resistencia total es de 12 Ω y la corriente a través de todo el circuito será sólo de 1 A.

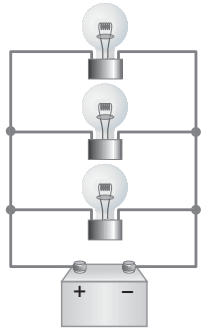
FIGURA 26–3 *a*) Resistencias conectadas en serie. *b*) Las resistencias podrían ser bombillas o cualquier otro tipo de resistencia. *c*) Resistencia equivalente R_{eq} que extrae la misma corriente: $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$.



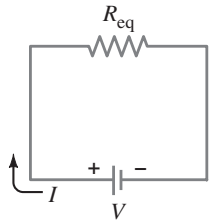
[†]Para ver con más detalle por qué es cierto esto, advierta que una carga eléctrica q que pasa a través de R_1 pierde una cantidad de energía potencial igual a qV_1. Al pasar a través de R_2 y R_3, la energía potencial U disminuye en qV_2 y qV_3, para un total $\Delta U = qV_1 + qV_2 + qV_3$; esta suma debe ser igual a la energía que entrega la batería a q, qV, de manera que la energía se conserva. En consecuencia, $qV = q(V_1 + V_2 + V_3)$, y por lo tanto, $V = V_1 + V_2 + V_3$, que es la ecuación 26-2.



a)



b)



c)

FIGURA 26–4 *a*) Resistencias conectadas en paralelo. *b*) Las resistencias podrían ser bombillas eléctricas. *c*) Circuito equivalente con la R_{eq} obtenida a partir de la ecuación 26-4:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

FIGURA 26–5 Tuberías de agua en paralelo: analogía con corrientes eléctricas en paralelo.

Otra forma sencilla de conectar resistores es en **paralelo**, de tal manera que la corriente de la fuente se divide en ramas o trayectorias separadas, como se ilustra en las figuras 26-4a y b. El cableado en casas y edificios se distribuye de manera que todos los dispositivos eléctricos estén en paralelo, como ya se vio en el capítulo 25 (figura 25-20). Con el cableado en paralelo, si se desconecta un dispositivo (por ejemplo, R_1 en la figura 26-4a), la corriente hacia los otros dispositivos no se interrumpe. Compare con un circuito en serie, donde si un dispositivo se desconecta (por ejemplo, R_1 en la figura 26-3a), la corriente *sí* se interrumpe hacia todos los demás.

En un circuito en paralelo, figura 26-4a, la corriente total I que sale de la batería se divide en tres trayectorias separadas. Sean I_1, I_2 e I_3 las corrientes a través de cada uno de los resistores, R_1, R_2 y R_3, respectivamente. Puesto que *la carga eléctrica se conserva*, la corriente I que fluye hacia el nodo en el punto A (donde se juntan los diferentes alambres o conductores, figura 26-4a) debe ser igual a la corriente que fluye desde el nodo. Por consiguiente,

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \qquad \text{[en paralelo]}$$

Cuando los resistores se conectan en paralelo, cada uno está sometido al mismo voltaje. (De hecho, dos puntos cualesquiera en un circuito conectados con un alambre de resistencia despreciable están al mismo potencial). En consecuencia, todo el voltaje de la batería se aplica a cada resistor en la figura 26-4a. Al aplicar la ley de Ohm a cada resistor, se tiene

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{V}{R_2}, \qquad \text{y} \qquad I_3 = \frac{V}{R_3}.$$

Ahora se determinará qué resistor R_{eq} (figura 26-4c) extraerá la misma corriente I que estas tres resistencias en paralelo. Esta resistencia equivalente R_{eq} también debe satisfacer la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R_{eq}}.$$

Ahora se combinan las ecuaciones anteriores:

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$
$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}.$$

Cuando se elimina V de cada término se obtiene

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \qquad \text{[en paralelo]} \quad \textbf{(26–4)}$$

Por ejemplo, suponga que dos altavoces de 4 Ω se conectan sólo a un canal de salida de audio de un amplificador o receptor estéreo. (Ignore por un momento el otro canal: los dos altavoces están conectados, digamos, al canal izquierdo). La resistencia equivalente de los dos "resistores" de 4 Ω en paralelo es

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega} = \frac{2}{4\,\Omega} = \frac{1}{2\,\Omega},$$

y así $R_{eq} = 2\ \Omega$. Por lo tanto, la resistencia total (o equivalente) es *menor* que cada resistencia sola. Esto tal vez parezca sorprendente en un principio. Pero recuerde que, cuando se conectan resistores en paralelo, se forman trayectorias adicionales para la corriente. En consecuencia, la resistencia total será menor.

Las ecuaciones 26-3 y 26-4 tienen sentido. Al recordar la ecuación 25-3 para la resistividad, $R = \rho\ell/A$, vemos que el hecho de colocar resistores en serie aumenta la longitud y, por lo tanto, la resistencia; conectar resistores en paralelo aumenta el área a través de la cual fluye la corriente, lo que reduce la resistencia total.

Aquí puede ayudar una analogía. Considere dos tuberías idénticas que toman agua cerca de lo alto de una presa y la liberan abajo, como se indica en la figura 26-5. La diferencia de potencial gravitacional, proporcional a la altura h, es la misma para ambas tuberías, tal como el voltaje es el mismo para los resistores en paralelo. Si ambas tuberías se abren, en vez de sólo una, fluirá el doble de agua. Esto es, con dos tuberías iguales abiertas, la resistencia total al flujo de agua se reducirá a la mitad, tal como sucede en el caso de los resistores eléctricos en paralelo. Advierta que, si ambas tuberías están cerradas, la presa ofrece resistencia infinita al flujo de agua. Esto corresponde, en el caso eléctrico, a un circuito abierto, cuando la trayectoria no es continua y no fluye corriente, de manera que la resistencia eléctrica es infinita.

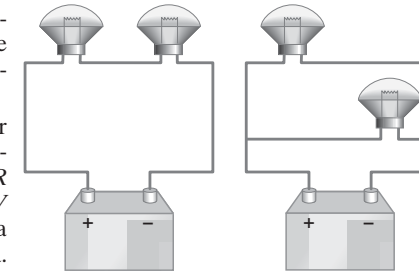
EJERCICIO B Usted tiene dos resistores, de 10 Ω y 15 Ω. ¿Cuál es la resistencia equivalente más pequeña y más grande que usted puede obtener con estos dos resistores?

EJEMPLO CONCEPTUAL 26–2 **¿En serie o en paralelo?** *a*) Las bombillas de la figura 26-6 son idénticas. ¿Cuál configuración produce más luz? *b*) ¿De qué forma cree que están conectados los faros de un automóvil? Ignore el cambio de la resistencia del filamento R con la corriente.

RESPUESTA *a*) La resistencia equivalente del circuito en paralelo se encuentra a partir de la ecuación 26-4, $1/R_{eq} = 1/R + 1/R = 2/R$. Por lo tanto, $R_{eq} = R/2$. Así, la combinación en paralelo tiene resistencia más baja ($= R/2$) que la combinación en serie ($R_{eq} = R + R = 2R$. Habrá más corriente en la configuración en paralelo (2), pues $I = V/R_{eq}$ y V es el mismo para ambos circuitos. La potencia total transformada, que se relaciona con la luz emitida, es $P = IV$, de manera que la mayor corriente en (2) significa más luz emitida.

b) Los faros están conectados en paralelo (2), pues si una bombilla falla, la otra puede permanecer encendida. Si estuvieran en serie (1), cuando una bombilla se queme (al fundirse el filamento), el circuito estaría abierto y no fluiría la corriente, así que ninguna bombilla encendería.

NOTA Cuando respondió la pregunta de apertura del capítulo, en la página 677, ¿su respuesta fue el circuito 2? ¿Puede expresar cualquier idea falsa que haya tenido?



1) Series 2) Paralelo

FIGURA 26–6 Ejemplo 26–2.

EJEMPLO CONCEPTUAL 26–3 **Una sorpresa iluminadora.** Una bombilla de 100 W y 120 V, y otra de 60 W y 120 V se conectan en dos formas diferentes, como se ilustra en la figura 26-7. En cada caso, ¿cuál bombilla brilla con más intensidad? Ignore el cambio de resistencia (y de temperatura) del filamento con la corriente.

RESPUESTA *a*) Estas bombillas son normales, con potencias nominales dadas para 120 V. Ambas reciben 120 V, de manera que la bombilla de 100 W naturalmente es más brillante.

b) La resistencia de la bombilla de 100 W es menor que la de la bombilla de 60 W (calculada a partir de $P = V^2/R$ con un voltaje de 120 V). Aquí están conectadas en serie y reciben la misma corriente. Por lo tanto, de acuerdo con $P = I^2R$ (I = constante), la bombilla con mayor resistencia "60 W" transformará más potencia y, en consecuencia, será más brillante.

NOTA Cuando se conectan en serie, como en *b*), las dos bombillas *no* disipan 60 W y 100 W, porque ninguna bombilla recibe 120 V.

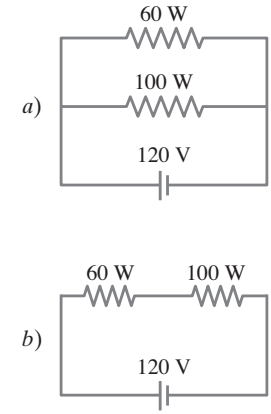


FIGURA 26–7 Ejemplo 26–3.

Advierta que, siempre que un grupo de resistores se sustituya por la resistencia equivalente, la corriente, el voltaje y la potencia en el resto del circuito no resultan afectados.

EJEMPLO 26–4 **Circuito con resistores en serie y en paralelo.** ¿Cuánta corriente se extrae de la batería que se ilustra en la figura 26-8a?

PLANTEAMIENTO La corriente I que fluye de la batería pasa por completo a través del resistor de 400 Ω, pero luego se divide en I_1 e I_2, que pasan a través de los resistores de 500 Ω y 700 Ω. Los últimos dos resistores están en paralelo. Busque algo que ya sepa cómo tratar. Comience por encontrar la resistencia equivalente, R_p, de los resistores en paralelo, 500 Ω y 700 Ω. Luego puede considerar esta R_p como en serie con el resistor de 400 Ω.

SOLUCIÓN La resistencia equivalente, R_p, de los resistores de 500 Ω y 700 Ω en paralelo está dada por

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{500\,\Omega} + \frac{1}{700\,\Omega} = 0.0020\,\Omega^{-1} + 0.0014\,\Omega^{-1} = 0.0034\,\Omega^{-1}.$$

Esto es $1/R_p$, así que se toma el recíproco para encontrar R_p. Un error común es olvidar tomar este recíproco. Note que las unidades de ohms recíprocos, Ω^{-1}, son un recordatorio. Por lo tanto,

$$R_P = \frac{1}{0.0034\,\Omega^{-1}} = 290\,\Omega.$$

Estos 290 Ω son la resistencia equivalente de los dos resistores en paralelo, la cual está en serie con el resistor de 400 Ω, como se muestra en el circuito equivalente de la figura 26-8b. Para encontrar la resistencia equivalente total R_{eq}, sumamos las resistencias de 400 Ω y 290 Ω, pues están en serie, y obtenemos

$$R_{eq} = 400\,\Omega + 290\,\Omega = 690\,\Omega.$$

Entonces, la corriente total que fluye de la batería es

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12.0\,\text{V}}{690\,\Omega} = 0.0174\,\text{A} \approx 17\,\text{mA}.$$

NOTA Esta I también es la corriente que fluye a través del resistor de 400 Ω, mas no a través de los resistores de 500 Ω y 700 Ω (ambas corrientes son menores; véase el siguiente ejemplo).

NOTA Los circuitos con resistores complejos a menudo se pueden analizar de esta forma, considerando el circuito como una combinación de resistencias en serie y en paralelo.

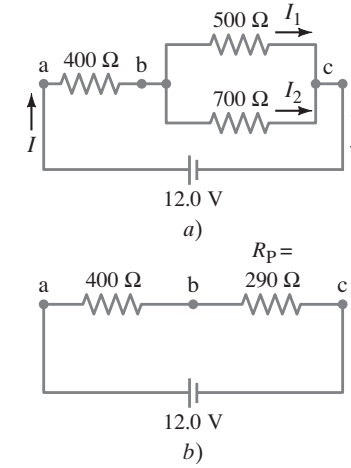


FIGURA 26–8 *a*) Circuito para los ejemplos 26-4 y 26-5. *b*) Circuito equivalente que muestra la resistencia equivalente de 290 Ω para los dos resistores en paralelo en *a*).

⚠ CUIDADO

Recuerde tomar el recíproco

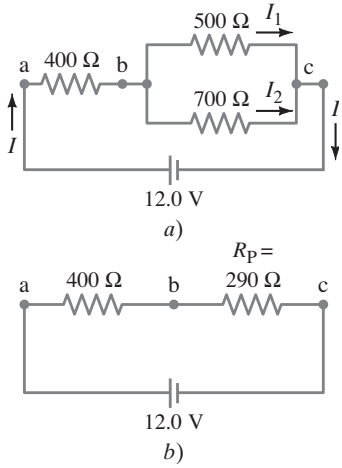


FIGURA 26–8 (repetida) *a*) Circuito para los ejemplos 26-4 y 26-5. *b*) Circuito equivalente, que muestra la resistencia equivalente de 290 Ω para los dos resistores en paralelo en *a*).

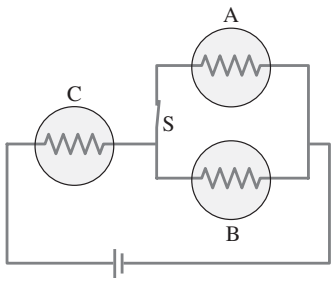


FIGURA 26–9 Ejemplo 26-6, tres bombillas idénticas. Cada círculo amarillo con en su interior representa una bombilla y su resistencia.

EJEMPLO 26–5 **Corriente en una malla.** ¿Cuál es la corriente a través del resistor de 500 Ω que se ilustra en la figura 26-8a?

PLANTEAMIENTO Se necesita encontrar el voltaje a través del resistor de 500 Ω, que es el voltaje entre los puntos *b* y *c* en la figura 26-8a, al que llamaremos V_{bc}. Una vez que se conoce V_{bc}, se puede aplicar la ley de Ohm, $V = IR$, para obtener la corriente. Primero encuentre el voltaje a través del resistor de 400 Ω, V_{ab}, pues se sabe que a través de él pasan 17.4 mA.

SOLUCIÓN V_{ab} se determina mediante $V = IR$:

$$V_{ab} = (0.0174\ \text{A})(400\ \Omega) = 7.0\ \text{V}.$$

Puesto que el voltaje total a través de la red de resistores es $V_{ac} = 12.0$ V, entonces V_{bc} debe ser 12.0 V − 7.0 V = 5.0 V. La ley de Ohm aplicada al resistor de 500 Ω nos indica que la corriente I_1 a través de ese resistor es

$$I_1 = \frac{5.0\ \text{V}}{500\ \Omega} = 1.0 \times 10^{-2}\ \text{A} = 10\ \text{mA}.$$

Ésta es la respuesta que se quería. También podemos calcular la corriente I_2 a través del resistor de 700 Ω, pues el voltaje a través de él también es de 5.0 V:

$$I_2 = \frac{5.0\ \text{V}}{700\ \Omega} = 7\ \text{mA}.$$

NOTA Cuando I_1 se combina con I_2 para formar la corriente total I (en el punto *c* de la figura 26-8a), su suma es 10 mA + 7 mA = 17 mA. Esto iguala la corriente total I calculada en el ejemplo 26-4, como debe ser.

EJEMPLO CONCEPTUAL 26–6 **Brillo de una bombilla en un circuito.** El circuito que se representa en la figura 26-9 tiene tres bombillas idénticas, cada una con resistencia *R*. *a*) Cuando se cierra el interruptor S, ¿cómo se comparará el brillo de las bombillas A y B con el de la bombilla C? *b*) ¿Qué ocurre cuando se abre el interruptor S? Use un mínimo de matemáticas en sus respuestas.

RESPUESTA *a*) Con el interruptor S cerrado, la corriente que pasa a través de la bombilla C debe dividirse en dos partes iguales cuando llega al nodo que conduce a las bombillas A y B. Se divide en partes iguales porque la resistencia de la bombilla A es igual a la de B. Por lo tanto, las bombillas A y B reciben, cada una, la mitad de la corriente de C; A y B serán igualmente brillantes, pero serán menos brillantes que la bombilla C ($P = I^2R$). *b*) Cuando se abre el interruptor S, ninguna corriente puede fluir a través de la bombilla A, así que estará apagada. Ahora se tiene un circuito en serie con una sola espira, y se espera que las bombillas B y C sean igualmente brillantes. Sin embargo, la resistencia equivalente de este circuito (= *R* + *R*) es mayor que la del circuito con el interruptor cerrado. Cuando se abre el interruptor, aumenta la resistencia y se reduce la corriente que sale de la batería. Por lo tanto, la bombilla C será más tenue cuando se abra el interruptor. La bombilla B obtiene más corriente cuando el interruptor está abierto (es posible que aquí tenga que usar un poco de matemáticas) y, de este modo, será más brillante que con el interruptor cerrado; así que B será tan brillante como C.

EJEMPLO 26–7 **ESTIMACIÓN** **Ventilador de dos velocidades.** Una forma de diseñar un ventilador de múltiples velocidades para un automóvil consiste en conectar resistores en serie con el motor del ventilador. Los resistores reducen la corriente a través del motor y lo hacen funcionar más lentamente. Suponga que la corriente en el motor es de 5.0 A cuando se conecta directamente a través de una batería de 12 V. *a*) ¿Qué resistor en serie se debe usar para reducir la corriente a 2.0 A para la operación a baja rapidez? *b*) ¿Qué potencia nominal está asociada al resistor?

PLANTEAMIENTO Un motor eléctrico conectado en serie con un resistor se puede tratar como dos resistores en serie. La potencia proviene de $P = IV$.

SOLUCIÓN *a*) Cuando el motor se conecta a 12 V y extrae 5.0 A, su resistencia es $R = V/I = (12\ \text{V})/(5.0\ \text{A}) = 2.4\ \Omega$. Se supondrá que ésta es la resistencia del motor para todas las velocidades. (Ésta es una aproximación, porque la corriente a través del motor depende de su rapidez). Luego, cuando fluye una corriente de 2.0 A, el voltaje a través del motor es (2.0 A)(2.4 Ω) = 4.8 V. Los restantes 12.0 V − 4.8 V = 7.2 V deben aparecer a través del resistor en serie. Cuando fluyen 2.0 A a través del resistor, su resistencia debe ser $R = (7.2\ \text{V})/(2.0\ \text{A}) = 3.6\ \Omega$. *b*) La potencia disipada por el resistor es $P = (7.2\ \text{V})(2.0\ \text{A}) = 14.4\ \text{W}$. Para que sea seguro, es apropiada una potencia nominal de 20 W.

EJEMPLO 26–8 **Análisis de un circuito.** Una batería de 9.0 V, cuya resistencia interna r es de 0.50 Ω, se conecta en el circuito que se ilustra en la figura 26-10a. *a*) ¿Cuánta corriente se extrae de la batería? *b*) ¿Cuál es el voltaje terminal de la batería? *c*) ¿Cuál es la corriente en el resistor de 6.0 Ω?

PLANTEAMIENTO Para determinar la corriente de la batería, primero es necesario determinar la resistencia equivalente R_{eq} de todo el circuito, incluida r, lo que se logra identificando y aislando combinaciones simples de resistores en serie o en paralelo. Una vez encontrada I a partir de la ley de Ohm, $I = \mathcal{E}/R_{eq}$, se obtiene el voltaje terminal mediante $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$. Para *c*), se aplica la ley de Ohm al resistor de 6.0 Ω.

SOLUCIÓN *a*) Se quiere determinar la resistencia equivalente del circuito. Pero, ¿por dónde comenzamos? Advierta que los resistores de 4.0 Ω y 8.0 Ω están en paralelo y, por lo tanto, tienen una resistencia equivalente R_{eq1} dada por

$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{8.0\,\Omega} + \frac{1}{4.0\,\Omega} = \frac{3}{8.0\,\Omega};$$

de manera que $R_{eq1} = 2.7\ \Omega$. Estos 2.7 Ω están en serie con el resistor de 6.0 Ω, como se observa en el circuito equivalente de la figura 26-10b. La resistencia total del tramo inferior del circuito es, por lo tanto,

$$R_{eq2} = 6.0\,\Omega + 2.7\,\Omega = 8.7\,\Omega,$$

como se muestra en la figura 26-10c. La resistencia equivalente R_{eq3} de las resistencias en paralelo de 8.7 Ω y 10.0 Ω está dada por

$$\frac{1}{R_{eq3}} = \frac{1}{10.0\,\Omega} + \frac{1}{8.7\,\Omega} = 0.21\,\Omega^{-1},$$

de manera que $R_{eq3} = (1/0.21\ \Omega^{-1}) = 4.8\ \Omega$. Estos 4.8 Ω están en serie con el resistor de 5.0 Ω y la resistencia interna de 0.50 Ω de la batería (figura 26-10d), así que la resistencia equivalente total R_{eq} del circuito es $R_{eq} = 4.8\ \Omega + 5.0\ \Omega + 0.50\ \Omega = 10.3\ \Omega$. En consecuencia, la corriente extraída es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{9.0\ \text{V}}{10.3\ \Omega} = 0.87\ \text{A}.$$

b) El voltaje terminal de la batería es

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 9.0\ \text{V} - (0.87\ \text{A})(0.50\ \Omega) = 8.6\ \text{V}.$$

c) Ahora podemos trabajar "hacia atrás" y obtener la corriente en el resistor de 6.0 Ω. Debe ser la misma que la corriente a través de los 8.7 Ω que se muestran en la figura 26-10c (¿por qué?). El voltaje a través de esos 8.7 Ω será la fem de la batería menos la caída de voltaje a través de r y el resistor de 5.0 Ω: $V_{8.7} = 9.0\ \text{V} - (0.87\ \text{A})(0.50\ \Omega + 5.0\ \Omega)$. Al aplicar la ley de Ohm, se obtiene la corriente (llamémosla I')

$$I' = \frac{9.0\ \text{V} - (0.87\ \text{A})(0.50\,\Omega + 5.0\,\Omega)}{8.7\,\Omega} = 0.48\ \text{A}.$$

Ésta es la corriente a través del resistor de 6.0 Ω.

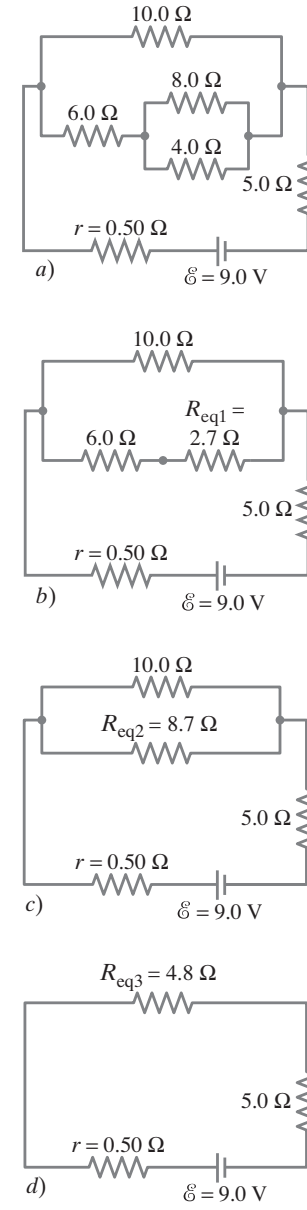


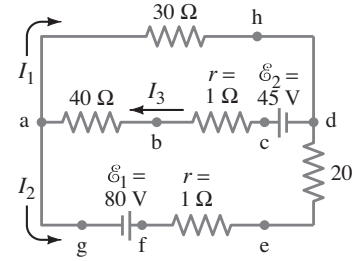
FIGURA 26–10 Circuito para el ejemplo 26-8, donde r es la resistencia interna de la batería.

26–3 Reglas de Kirchhoff

En los últimos ejemplos pudimos encontrar las corrientes en circuitos mediante la combinación de resistencias en serie y en paralelo, y mediante la ley de Ohm. Esta técnica se puede usar para muchos circuitos. Sin embargo, algunos circuitos son demasiado complicados para ese análisis. Por ejemplo, no es posible encontrar las corrientes en cada parte del circuito que se muestra en la figura 26-11 simplemente combinando las resistencias, como se hizo antes.

Para tratar con tales circuitos complicados, se usan las reglas de Kirchhoff, establecidas por G. R. Kirchhoff (1824-1887) a mediados del siglo XIX. Son dos reglas y simplemente son aplicaciones convenientes de las leyes de conservación de la carga y la energía.

FIGURA 26–11 Las corrientes se pueden calcular con las reglas de Kirchhoff.



La **primera regla de Kirchhoff**, o **regla de los nodos**, se basa en la conservación de la carga eléctrica que ya se usó al deducir la regla para resistores en paralelo. Esa regla afirma que

Regla de los nodos (conservación de carga)

> **en cualquier punto de unión, la suma de todas las corrientes que entran al nodo debe ser igual a la suma de todas las corrientes que salen del nodo.**

Esto es, cualquier carga que entre debe salir. En la NOTA al final del ejemplo 26-5 se vio un caso ilustrativo.

La **segunda regla de Kirchhoff** o **regla de las espiras** se basa en la conservación de la energía y establece que

Regla de las espiras (conservación de energía)

> **la suma de los cambios en el potencial alrededor de cualquier trayectoria cerrada de un circuito debe ser cero.**

Para ver por qué esta regla debe cumplirse, considere una sencilla analogía con la energía potencial de una montaña rusa en su circuito. Cuando la montaña rusa parte de la estación, tiene una energía potencial determinada. Conforme asciende la primera colina, su energía potencial aumenta y alcanza un máximo en la cima. Conforme desciende hacia el otro lado, su energía potencial disminuye y alcanza un mínimo local en el fondo de la pendiente. Mientras la montaña rusa continúa en su trayectoria, su energía potencial experimenta más cambios. Pero cuando llega de regreso al punto de partida, tiene exactamente la misma energía potencial que tenía cuando partió de ese punto. Otra forma de decir esto es que había tantas subidas como bajadas.

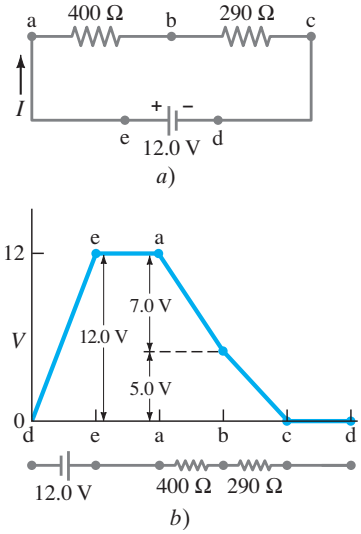


FIGURA 26–12 *a*) Cambios en el potencial alrededor del circuito. *b*) Gráfica correspondiente.

Un razonamiento similar se puede aplicar a un circuito eléctrico. Dentro de poco se analizará el circuito de la figura 26-11, pero primero consideraremos el circuito más simple de la figura 26-12. Se eligió el mismo circuito equivalente de la figura 26-8b ya analizado. La corriente en este circuito es $I = (12.0\ \text{V})/(690\ \Omega) = 0.0174\ \text{A}$, como se calculó en el ejemplo 26-4. (Se conserva un dígito adicional en I para reducir los errores de redondeo). El lado positivo de la batería, punto e en la figura 26-12a, está a un potencial más alto en comparación con el punto d en el lado negativo de la batería. Esto es, el punto e es como la cima de una colina para una montaña rusa. Seguimos la corriente alrededor del circuito a partir de cualquier punto. Elegimos comenzar en el punto d y seguir una carga de prueba positiva completamente alrededor de este circuito. Conforme avanzamos, advertimos todos los cambios en el potencial. Cuando la carga de prueba regresa al punto d, el potencial será el mismo que cuando partió (el cambio total en el potencial alrededor del circuito es cero). Graficamos los cambios en el potencial alrededor del circuito en la figura 26-12b; el punto d se elige arbitrariamente como cero.

Conforme la carga de prueba positiva va del punto d, que es el lado negativo o de bajo potencial de la batería, al punto e, que es la terminal positiva (el lado de potencial alto) de la batería, el potencial aumenta en 12.0 V. (Esto es como si la montaña rusa ascendiera la primera colina). Esto es,

$$V_{ed} = +12.0\ \text{V}.$$

Cuando la carga de prueba se desplaza del punto e al punto a, no existe cambio en el potencial, pues no hay fuente de fem y se supone una resistencia despreciable en los alambres de conexión. A continuación, conforme la carga pasa a través del resistor de 400 Ω para llegar al punto b, existe una disminución en el potencial de $V = IR = (0.0174\ \text{A})(400\ \Omega) = 7.0\ \text{V}$. La carga de prueba positiva fluye "colina abajo", pues se dirige hacia la terminal negativa de la batería, como se indica en la gráfica de la figura 26-12b. Puesto que se trata de una *disminución* en el potencial, se usa un signo *negativo*:

$$V_{ba} = V_b - V_a = -7.0\ \text{V}.$$

Conforme la carga avanza de b a c, se presenta otra disminución de potencial (una "caída de voltaje") de $(0.0174\ \text{A}) \times (290\ \Omega) = 5.0\ \text{V}$, y esto también es una disminución en el potencial:

$$V_{cb} = -5.0\ \text{V}.$$

No hay cambio en el potencial conforme la carga de prueba se traslada de c a d, pues se supuso resistencia despreciable en los alambres.

La suma de todos los cambios en el potencial alrededor del circuito de la figura 26-12 es

$$+12.0\ \text{V} - 7.0\ \text{V} - 5.0\ \text{V} = 0.$$

Esto es exactamente lo que la regla de Kirchhoff de las espiras indicaba que sucedería.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Sea consistente con los signos cuando aplique la regla de las espiras

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Reglas de Kirchhoff

1. **Designe la corriente** en cada segmento separado del circuito con un subíndice diferente, como I_1, I_2, I_3 (véase las figuras 26-11 o 26-13). Cada corriente se refiere a un segmento entre dos nodos. Elija la dirección de cada corriente e identifíquela con una flecha. La dirección se puede elegir de manera arbitraria: si en realidad la corriente está en el sentido opuesto, resultará con un signo negativo en la solución.
2. **Identifique las incógnitas.** Necesitará tantas ecuaciones independientes como incógnitas. Puede escribir más ecuaciones que esto, pero encontrará que algunas de las ecuaciones son redundantes (esto es, no serán independientes en el sentido de que proporcionen nueva información). Puede usar $V = IR$ para cada resistor, lo que a veces reducirá el número de incógnitas.
3. **Aplique la regla de Kirchhoff de los nodos** a uno o más nodos.
4. **Aplique la regla de Kirchhoff de las espiras** a una o más espiras: siga cada espira sólo en una dirección. Ponga mucha atención a los subíndices y a los signos:
   a) Para un resistor, aplique la ley de Ohm; la diferencia de potencial es negativa (una disminución) si la dirección elegida de la espira es la misma que la dirección elegida para la corriente a través de ese resistor; la diferencia de potencial es positiva (un aumento) si la dirección elegida de la espira es opuesta a la dirección elegida de la corriente.
   b) En el caso de una batería, la diferencia de potencial es positiva si la dirección elegida de la espira va de la terminal negativa hacia la terminal positiva; la diferencia de potencial es negativa si la dirección de la espira va de la terminal positiva hacia la terminal negativa.
5. **Resuelva las ecuaciones** algebraicamente para despejar las incógnitas. Tenga cuidado de no cometer errores con los signos al manipular las ecuaciones. Al final, compruebe sus respuestas sustituyéndolas en las ecuaciones originales, o incluso utilizando algunas ecuaciones adicionales de las reglas de las espiras o de los nodos no usadas previamente.

EJEMPLO 26–9 **Uso de las reglas de Kirchhoff.** Calcule las corrientes I_1, I_2 e I_3 en los tres segmentos del circuito de la figura 26-13 (que es la misma que la figura 26-11).

PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN

1. **Designe las corrientes** e identifique sus direcciones. La figura 26-13 presenta los rótulos I_1, I_2 e I_3 para la corriente en los tres segmentos separados. Puesto que la corriente (positiva) tiende a alejarse de la terminal positiva de una batería, las direcciones de I_2 e I_3 se eligen como se muestra en la figura 26-13. La dirección de I_1 no es obvia por anticipado, así que arbitrariamente se elige la dirección indicada. Si la corriente en realidad fluye en el sentido opuesto, la respuesta tendrá un signo negativo.
2. **Identifique las incógnitas.** Se tienen tres incógnitas y, por consiguiente, se necesitan tres ecuaciones, lo que se obtiene aplicando las reglas de Kirchhoff de los nodos y de las espiras.
3. **Regla de los nodos.** Aplique la regla de Kirchhoff de los nodos a las corrientes en el punto *a*, donde entra I_3 y salen I_2 e I_1:
$$I_3 = I_1 + I_2. \qquad a)$$
Esta misma ecuación se cumple en el punto *d*, así que no se obtiene nueva información al escribir una ecuación para el punto *d*.
4. **Regla de las espiras.** Aplique la regla de Kirchhoff de las espiras a dos espiras cerradas diferentes. Primero se aplica a la espira superior *ahdcba*. Comience (y termine) en el punto *a*. De *a* a *h* se tiene una disminución de potencial $V_{ha} = -(I_1)(30\ \Omega)$. De *h* a *d* no hay cambio, pero de *d* a *c* el potencial aumenta en 45 V: esto es, $V_{cd} = +45$ V. De *c* a *a* el potencial disminuye a través de las dos resistencias en una cantidad $V_{ac} = -(I_3)(40\ \Omega + 1\ \Omega) = -(41\ \Omega)I_3$. Por lo tanto, se tiene $V_{ha} + V_{cd} + V_{ac} = 0$, o
$$-30I_1 + 45 - 41I_3 = 0, \qquad b)$$
donde se omitieron las unidades (volts y amperes), así que las operaciones algebraicas se pueden efectuar con más facilidad. Para la segunda espira, tome la espira exterior *ahdefga*. (En vez de ello, bien podría elegirse la espira inferior *abcdefga*). De nuevo, comenzamos en el punto *a* y obtenemos $V_{ha} = -(I_1)(30\ \Omega)$, y $V_{dh} = 0$. Pero cuando la carga de prueba positiva se lleva de *d* a *e*, en realidad se va "colina arriba", contra la corriente, o al menos contra la dirección *supuesta* de la corriente, que es lo que cuenta en este cálculo. Por lo tanto $V_{ed} = I_2(20\ \Omega)$ tiene un signo *positivo*. De igual modo, $V_{fe} = I_2(1\ \Omega)$. De *f* a *g* existe una disminución de 80 V en el potencial, pues se va de la terminal de potencial alto de la batería a la de potencial bajo. En consecuencia, $V_{gf} = -80$ V. Finalmente, $V_{ag} = 0$ y la suma de los cambios de potencial alrededor de esta espira es
$$-30I_1 + (20 + 1)I_2 - 80 = 0. \qquad c)$$
El trabajo principal está hecho. El resto es álgebra.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Elija arbitrariamente las direcciones de la corriente

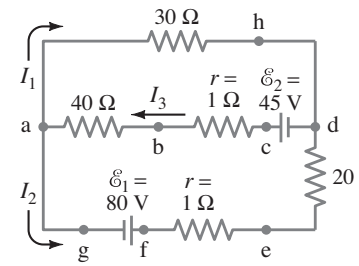


FIGURA 26–13 Las corrientes se pueden calcular mediante las reglas de Kirchhoff. Véase el ejemplo 26-9.

5. Resuelva las ecuaciones. Se tienen tres ecuaciones —indicadas como *a*), *b*) y *c*)— y tres incógnitas. A partir de la ecuación *c*) se tiene

$$I_2 = \frac{80 + 30I_1}{21} = 3.8 + 1.4I_1. \qquad d)$$

De la ecuación *b*) se obtiene

$$I_3 = \frac{45 - 30I_1}{41} = 1.1 - 0.73I_1. \qquad e)$$

Al sustituir las ecuaciones *d*) y *e*) en la ecuación *a*):

$$I_1 = I_3 - I_2 = 1.1 - 0.73I_1 - 3.8 - 1.4I_1.$$

Despejamos I_1 reuniendo términos:

$$3.1I_1 = -2.7$$
$$I_1 = -0.87 \text{ A}.$$

El signo negativo indica que el sentido de I_1 en realidad es opuesto al que se supuso inicialmente y se indica en la figura 26-13. Advierta que la respuesta automáticamente se presenta en amperes porque todos los valores estuvieron en volts y ohms. A partir de la ecuación (*d*) se tiene

$$I_2 = 3.8 + 1.4I_1 = 3.8 + 1.4(-0.87) = 2.6 \text{ A},$$

y de la ecuación (*e*)

$$I_3 = 1.1 - 0.73I_1 = 1.1 - 0.73(-0.87) = 1.7 \text{ A}.$$

Esto completa la solución.

NOTA Las incógnitas en diferentes situaciones no necesariamente son corrientes. Es posible que las corrientes estén dadas y uno tenga que despejar la resistencia o el voltaje desconocidos. En ese caso, las variables son diferentes, pero la técnica es la misma.

EJERCICIO C Escriba la ecuación para la espira inferior *abcdefga* del ejemplo 26-9 y demuestre, suponiendo las corrientes calculadas en este ejemplo, que los potenciales suman cero para esta espira inferior.

26–4 FEM en serie y en paralelo; cómo cargar una batería

Cuando dos o más fuentes de fem, como las baterías, se disponen en serie como en la figura 26-14a, el voltaje total es la suma algebraica de sus respectivos voltajes. Por otra parte, cuando una batería de 20 V y una de 12 V se conectan de manera opuesta, como se ilustra en la figura 26-14b, el voltaje neto V_{ca} es de 8 V (ignorando las caídas de voltaje a través de las resistencias internas). Esto es, una carga de prueba positiva que se desplaza de *a* a *b* gana 20 V en potencial, pero cuando pasa de *b* a *c* pierde 12 V. Así que el cambio neto es 20 V − 12 V = 8 V. Se podría pensar que conectar las baterías a la inversa, como en este caso, sería un desperdicio. Para la mayoría de los propósitos esto sería cierto. Pero tal ordenamiento a la inversa es precisamente la forma como funciona un cargador de baterías. En la figura 26-14b, la fuente de 20 V carga a la batería de 12 V. En virtud de su mayor voltaje, la fuente de 20 V obliga a la carga a regresar a la batería de 12 V: los electrones son forzados hacia su terminal negativa y removidos de su terminal positiva.

Un alternador de automóvil mantiene cargada la batería del vehículo en la misma forma. Un voltímetro colocado entre las terminales de una batería de automóvil (12 V) con el motor en marcha puede indicar con bastante rapidez si el alternador carga o no la batería. Si es así, el voltímetro da una lectura de 13 o 14 V. Si la batería no se carga, el voltaje será de 12 V, o menos si la batería se descarga. Las baterías de automóvil se pueden recargar, pero otras baterías no son recargables, pues las reacciones químicas en muchas de ellas no se pueden revertir. En tales casos, el arreglo de la figura 26-14b simplemente desperdiciaría energía.

También es posible disponer las fuentes de fem en paralelo (figura 26-14c). Con fem iguales, un arreglo en paralelo da más energía debido a que se necesitan grandes corrientes. Cada una de las pilas en paralelo tiene que producir sólo una fracción de la corriente total, de manera que la pérdida de energía debida a la resistencia interna es menor que para una sola pila; y las baterías se agotarán más lentamente.

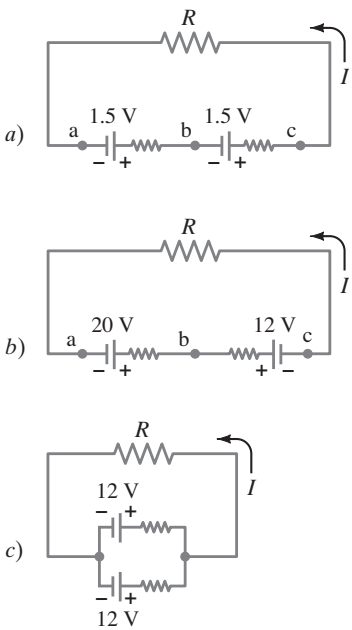


FIGURA 26–14 *a*) y *b*) Baterías en serie, y *c*) en paralelo.

EJEMPLO 26–10 **Cómo poner en marcha un automóvil que se ha quedado sin batería.** Para poner en marcha un automóvil con una batería descargada, se usa una batería de automóvil cargada. La batería en buen estado tiene una fem de 12.5 V y una resistencia interna de 0.020 Ω. Suponga que la batería descargada tiene una fem de 10.1 V y una resistencia interna de 0.10 Ω. Cada cable de acoplamiento de cobre mide 3.0 m de largo y 0.50 cm de diámetro, y se puede colocar como se muestra en la figura 26-15. Suponga que el motor de arranque se representa como un resistor $R_S = 0.15\ \Omega$. Determine la corriente a través del motor de arranque *a*) si sólo se le conecta la batería débil y *b*) si la batería en buen estado también se conecta, como se indica en la figura 26-15.

PLANTEAMIENTO Se aplican las reglas de Kirchhoff, pero en *b*) primero es necesario determinar la resistencia de los cables de acoplamiento a partir de sus dimensiones y la resistividad ($r = 1.68 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot$m para el cobre), como se explicó en la sección 25-4.

SOLUCIÓN *a*) El circuito que sólo tiene la batería débil y no tiene cables de acoplamiento es sencillo: una fem de 10.1 V conectada a dos resistencias en serie, 0.10 Ω + 0.15 Ω = 0.25 Ω. Por lo tanto, la corriente es $I = V/R = (10.1\ \text{V})/(0.25\ \Omega) = 40$ A.

b) Es necesario encontrar la resistencia de los cables de acoplamiento que conectan la batería en buen estado. De acuerdo con la ecuación 25-3, cada uno tiene resistencia $R_J = \rho\ell/A = (1.68 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})(3.0\ \text{m})/(\pi)(0.25 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 = 0.0026\ \Omega$. La regla de Kirchhoff de las espiras para toda la espira exterior da

$$12.5\ \text{V} - I_1(2R_J + r_1) - I_3 R_S = 0$$

$$12.5\ \text{V} - I_1(0.025\ \Omega) - I_3(0.15\ \Omega) = 0 \qquad a)$$

ya que $(2R_J + r) = (0.0052\ \Omega + 0.020\ \Omega) = 0.025\ \Omega$.
La aplicación de la regla de las espiras en el caso de la espira inferior, que incluye la batería débil y el motor de arranque, da

$$10.1\ \text{V} - I_3(0.15\ \Omega) - I_2(0.10\ \Omega) = 0. \qquad b)$$

La regla de los nodos en el punto B da como resultado

$$I_1 + I_2 = I_3. \qquad c)$$

Se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas. A partir de la ecuación *c*), $I_1 = I_3 - I_2$, y esto se sustituye en la ecuación *a*):

$$12.5\ \text{V} - (I_3 - I_2)(0.025\ \Omega) - I_3(0.15\ \Omega) = 0,$$

$$12.5\ \text{V} - I_3(0.175\ \Omega) + I_2(0.025\ \Omega) = 0.$$

Al combinar esta última ecuación con *b*) se obtiene $I_3 = 71$ A, un poco mejor que en *a*). Las otras corrientes son $I_2 = -5$ A e $I_1 = 76$ A. Advierta que $I_2 = -5$ A está en el sentido opuesto al que se supuso en la figura 26-15. El voltaje terminal de la batería débil de 10.1 V es ahora $V_{BA} = 10.1\ \text{V} - (-5\ \text{A})(0.10\ \Omega) = 10.6$ V.

NOTA El circuito que se ilustra en la figura 26-15, sin el motor de arranque, indica la forma como se puede cargar una batería. La batería con carga empuja la carga de regreso a la batería descargada.

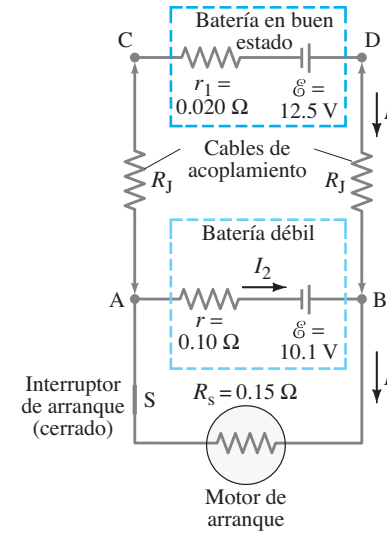
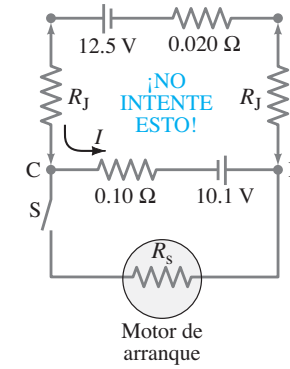


FIGURA 26–15 Ejemplo 26-10, arranque sin batería.

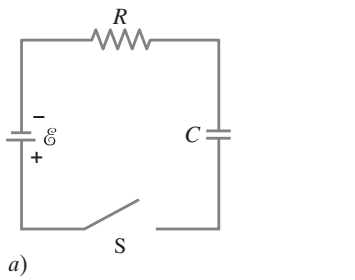
FIGURA 26–16 Ejercicio D.



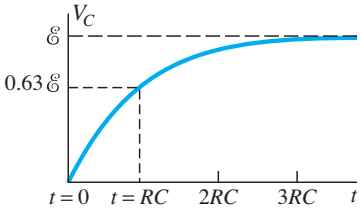
EJERCICIO D Si los cables de acoplamiento del ejemplo 26-10 se conectaran por error a la inversa, la terminal positiva de cada batería se conectaría a la terminal negativa de la otra batería (figura 26-16). ¿Cuál sería la corriente I incluso antes de que el motor de arranque se encienda? (El interruptor S en la figura 26-16 está abierto.) ¿Por qué esto podría hacer que las baterías estallen?

26–5 Circuitos que contienen resistores y capacitores (circuitos *RC*)

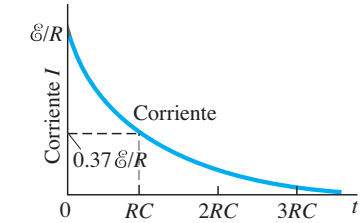
Hasta ahora, el estudio de los circuitos en este capítulo se refiere a corrientes estables que no cambian con el tiempo. Ahora se examinarán circuitos que contienen tanto resistencia como capacitancia. Tales circuitos se denominan **circuitos *RC***. Los circuitos *RC* son comunes en la vida cotidiana: se usan para controlar la rapidez de los limpiaparabrisas de un automóvil y el tiempo de cambio de las luces de los semáforos. Se emplean también en los *flashes* de las cámaras, en los marcapasos cardiacos y en muchos otros dispositivos electrónicos. En los circuitos *RC* uno no está tan interesado por el voltaje del "estado estable" final y la carga en el capacitor, sino más bien en cómo cambian con el tiempo estas variables.



a)



b)



c)

FIGURA 26–17 Después de que el interruptor S se cierra en el circuito *RC* que se observa en *a*), el voltaje a través del capacitor aumenta con el tiempo, como se observa en *b*), y la corriente a través del resistor disminuye con el tiempo como se indica en *c*).

Ahora examinemos el circuito *RC* que se ilustra en la figura 26-17a. Cuando se cierra el interruptor S, la corriente inmediatamente comienza a fluir a través del circuito. Los electrones fluirán desde la terminal negativa de la batería, a través del resistor R, y se acumularán en la placa superior del capacitor. Y los electrones fluirán hacia la terminal positiva de la batería, lo que dejará una carga positiva en la otra placa del capacitor. Conforme la carga se acumula en el capacitor, aumenta la diferencia de potencial a través de éste ($V_C = Q/C$), y la corriente se reduce hasta que finalmente el voltaje a través del capacitor iguala la fem de la batería, $\mathscr{E}$. Entonces ya no hay diferencia de potencial a través del resistor y no fluye más carga. En consecuencia, la diferencia de potencial V_C a través del capacitor aumenta con el tiempo, como se muestra en la figura 26-17b. La forma matemática de esta curva (esto es, V_C como función del tiempo) se deduce a partir de la conservación de la energía (o regla de Kirchhoff de las espiras). La fem $\mathscr{E}$ de la batería será igual a la suma de las caídas de voltaje a través del resistor (IR) y el capacitor (Q/C):

$$\mathscr{E} = IR + \frac{Q}{C}. \qquad \textbf{(26–5)}$$

La resistencia R incluye toda la resistencia en el circuito, incluida la resistencia interna de la batería; I es la corriente en el circuito en cualquier instante, y Q es la carga en el capacitor en ese mismo instante. Aunque $\mathscr{E}$, R y C son constantes, tanto Q como I son funciones del tiempo. La tasa a la que la carga fluye a través del resistor ($I = dQ/dt$) es igual a la tasa a la que la carga se acumula en el capacitor. Por lo tanto, se puede escribir

$$\mathscr{E} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q.$$

Esta ecuación se resuelve reordenándola:

$$\frac{dQ}{C\mathscr{E} - Q} = \frac{dt}{RC}.$$

Ahora se integra desde $t = 0$, cuando $Q = 0$, hasta el tiempo t cuando una carga Q está en el capacitor:

$$\int_0^Q \frac{dQ}{C\mathscr{E} - Q} = \frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$-\ln(C\mathscr{E} - Q)\Big|_0^Q = \frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$-\ln(C\mathscr{E} - Q) - (-\ln C\mathscr{E}) = \frac{t}{RC}$$

$$\ln(C\mathscr{E} - Q) - \ln(C\mathscr{E}) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(1 - \frac{Q}{C\mathscr{E}}\right) = -\frac{t}{RC}.$$

Tome el exponencial[†] de ambos lados

$$1 - \frac{Q}{C\mathscr{E}} = e^{-t/RC}$$

o

$$Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}). \qquad \textbf{(26–6a)}$$

La diferencia de potencial a través del capacitor es $V_C = Q/C$, de manera que

$$V_C = \mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}). \qquad \textbf{(26–6b)}$$

A partir de las ecuaciones 26-6, se ve que la carga Q sobre el capacitor, y el voltaje V_C a través de él, aumentan de cero a $t = 0$ a valores máximos $Q_{máx} = C\mathscr{E}$ y $V_C = \mathscr{E}$ después de un tiempo muy largo. La cantidad RC que aparece en el exponente se llama **constante de tiempo** τ del circuito:

$$\tau = RC. \qquad \textbf{(26–7)}$$

Esto representa el tiempo[‡] requerido para que el capacitor llegue a $(1 - e^{-1}) = 0.63$ o 63% de su carga y voltaje completos. Por lo tanto, el producto RC es una medida de la

[†]La constante e, conocida como la base de los logaritmos naturales, tiene el valor $e = 2.718...$ No confunda esta e con la e para la carga del electrón.

[‡]Las unidades de RC son $\Omega \cdot F = (V/A)(C/V) = C/(C/s) = s$.

rapidez con que se carga el capacitor. En un circuito, por ejemplo, donde $R = 200\ \text{k}\Omega$ y $C = 3.0\ \mu\text{F}$, la constante de tiempo es $(2.0 \times 10^5\ \Omega)(3.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 0.60\ \text{s}$. Si la resistencia es mucho menor, la constante de tiempo es mucho menor. Esto tiene sentido, pues una resistencia más baja retardará menos el flujo de carga. Todos los circuitos contienen cierta resistencia (aunque sólo sea en los alambres conectores), así que un capacitor nunca se puede cargar de manera instantánea cuando se conecta a una batería.

A partir de las ecuaciones 26-6, parece que Q y V_C nunca alcanzan sus valores máximos dentro de un tiempo finito. Sin embargo, llegan al 86% del máximo en $2RC$, 95% en $3RC$, 98% en $4RC$, y así sucesivamente. Q y V_C tienden a sus valores máximos de manera asintótica. Por ejemplo, si $R = 20\ \text{k}\Omega$ y $C = 0.30\ \mu\text{F}$, la constante de tiempo es $(2.0 \times 10^4\ \Omega)(3.0 \times 10^{-7}\ \text{F}) = 6.0 \times 10^{-3}\ \text{s}$. De manera que el capacitor tiene más del 98% de la carga en menos de de segundo.

La corriente I a través del circuito de la figura 26-17a en cualquier instante t se obtiene al diferenciar la ecuación 26-6a:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/RC}. \qquad \textbf{(26–8)}$$

Por ende, en $t = 0$, la corriente es $I = \mathscr{E}/R$, como se esperaba para un circuito que contiene sólo un resistor (todavía no hay diferencia de potencial a través del capacitor). Entonces la corriente cae exponencialmente en el tiempo, con una constante de tiempo igual a RC, conforme aumenta el voltaje a través del capacitor. Esto se muestra en la figura 26-17c. La constante de tiempo RC representa el tiempo requerido para que la corriente caiga a $1/e \approx 0.37$ de su valor inicial.

EJEMPLO 26–11 **Circuito *RC* con fem.** La capacitancia en el circuito de la figura 26-17a es $C = 0.30\ \mu\text{F}$, la resistencia total es $20\ \text{k}\Omega$ y la fem de la batería es 12 V. Determine *a*) la constante de tiempo, *b*) la carga máxima que podría adquirir el capacitor, *c*) el tiempo que tarda la carga en alcanzar el 99% de ese valor, *d*) la corriente I cuando la carga Q es la mitad de su valor máximo, *e*) la corriente máxima y *f*) la carga Q cuando la corriente I es 0.20 de su valor máximo.

PLANTEAMIENTO Use la figura 26-17 y las ecuaciones 26-5, 6, 7 y 8.

SOLUCIÓN *a*) La constante de tiempo es $RC = (2.0 \times 10^4\ \Omega)(3.0 \times 10^{-7}\ \text{F}) = 6.0 \times 10^{-3}\text{s}$.

b) La carga máxima sería $Q = C\mathscr{E} = (3.0 \times 10^{-7}\ \text{F})(12\ \text{V}) = 3.6\ \mu\text{C}$.

c) En la ecuación 26-6a, establecemos que $Q = 0.99C\mathscr{E}$:

$$0.99C\mathscr{E} = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}),$$

o

$$e^{-t/RC} = 1 - 0.99 = 0.01.$$

Entonces

$$\frac{t}{RC} = -\ln(0.01) = 4.6$$

de manera que

$$t = 4.6RC = 28 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

o 28 ms (menos de $\frac{1}{30}$ s).

d) De acuerdo con el inciso *b*), la carga máxima es $3.6\ \mu\text{C}$. Cuando la carga es la mitad de ese valor, $1.8\ \mu\text{C}$, la corriente I en el circuito se determina usando la ecuación diferencial original, o ecuación 26-5:

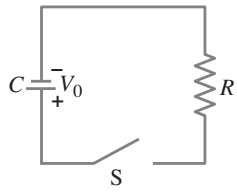
$$I = \frac{1}{R}\left(\mathscr{E} - \frac{Q}{C}\right) = \frac{1}{2.0 \times 10^4\ \Omega}\left(12\ \text{V} - \frac{1.8 \times 10^{-6}\ \text{C}}{0.30 \times 10^{-6}\ \text{F}}\right) = 300\ \mu\text{A}.$$

e) La corriente es un máximo cuando no hay carga en el capacitor ($Q = 0$):

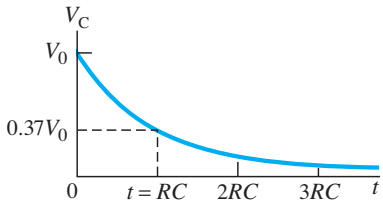
$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{12\ \text{V}}{2.0 \times 10^4\ \Omega} = 600\ \mu\text{A}.$$

f) De nuevo, con la ecuación 26-5, ahora con $I = 0.20I_{\text{máx}} = 120\ \mu\text{A}$, tenemos

$$Q = C(\mathscr{E} - IR)$$
$$= (3.0 \times 10^{-7}\ \text{F})[12\ \text{V} - (1.2 \times 10^{-4}\ \text{A})(2.0 \times 10^4\ \Omega)] = 2.9\ \mu\text{C}.$$



a)



b)

FIGURA 26–18 Para el circuito *RC* que se aprecia en *a*), el voltaje V_C a través del capacitor disminuye con el tiempo, como se muestra en *b*), después de que el interruptor S se cierra en $t = 0$. La carga sobre el capacitor sigue la misma curva, pues $V_C \propto Q$.

El circuito recién analizado implicó el *proceso de carga* de un capacitor por medio de una batería a través de una resistencia. Ahora examinemos otra situación: un capacitor ya cargado (digamos, a un voltaje V_0), se *descarga* a través de una resistencia R, como se muestra en la figura 26-18a. (En este caso no hay batería). Cuando se cierra el interruptor S, la carga comienza a fluir a través del resistor R desde un lado del capacitor hacia el otro lado, hasta que está completamente descargado. El voltaje a través del resistor en cualquier instante es igual al que atraviesa al capacitor:

$$IR = \frac{Q}{C}.$$

La tasa a la que la carga deja al capacitor es igual al negativo de la corriente en el resistor, $I = -dQ/dt$, porque el capacitor se descarga (Q disminuye). Así que la ecuación anterior se escribe como

$$-\frac{dQ}{dt}R = \frac{Q}{C}.$$

Esto se reordena

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

y se integra desde $t = 0$, cuando la carga en el capacitor es Q_0, hasta algún tiempo t posterior cuando la carga es Q:

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

o

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}. \qquad \textbf{(26–9a)}$$

El voltaje a través del capacitor ($V_C = Q/C$) como función del tiempo es

$$V_C = V_0 e^{-t/RC}, \qquad \textbf{(26–9b)}$$

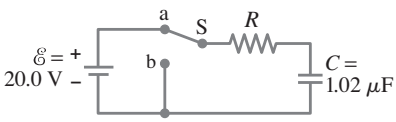
donde el voltaje inicial $V_0 = Q_0/C$. Por lo tanto, la carga en el capacitor y el voltaje a través de él disminuyen exponencialmente con una constante de tiempo RC. Esto se ilustra en la figura 26-18b. La corriente es

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}, \qquad \textbf{(26–10)}$$

y también se ve que disminuye exponencialmente en el tiempo con la misma constante de tiempo RC. La carga en el capacitor, el voltaje a través de él y la corriente en el resistor disminuyen todos al 37% de su valor original en una constante de tiempo $t = \tau = RC$.

EJERCICIO E En 10 constantes de tiempo, la carga en el capacitor de la figura 26-18 será aproximadamente *a*) $Q_0/20{,}000$; *b*) $Q_0/5000$; *c*) $Q_0/1000$; *d*) $Q_0/10$; *e*) $Q_0/3$.

FIGURA 26–19 Ejemplo 26–12.



EJEMPLO 26–12 **Circuito *RC* que se descarga.** En el circuito que se ilustra en la figura 26-19, la batería cargó por completo al capacitor, de manera que $Q_0 = C\mathscr{E}$. Entonces, en $t = 0$, el interruptor se lleva de la posición *a* a la *b*. La fem de la batería es 20.0 V, y la capacitancia $C = 1.02\ \mu$F. Se observa que la corriente I disminuye a 0.50 de su valor inicial en 40 μs. *a*) ¿Cuál es el valor de Q, la carga en el capacitor, en $t = 0$? *b*) ¿Cuál es el valor de R? *c*) ¿Cuál es valor de Q en $t = 60\ \mu$s?

PLANTEAMIENTO En $t = 0$, el capacitor tiene carga $Q_0 = C\mathscr{E}$, y entonces la batería se retira del circuito y el capacitor comienza a descargarse a través del resistor, como en la figura 26-18. En cualquier instante t posterior (ecuación 26-9a) se tiene

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} = C\mathscr{E}e^{-t/RC}.$$

SOLUCIÓN *a*) En $t = 0$,

$$Q = Q_0 = C\mathscr{E} = (1.02 \times 10^{-6}\,\text{F})(20.0\,\text{V}) = 2.04 \times 10^{-5}\,\text{C} = 20.4\,\mu\text{C}.$$

b) Para encontrar R, se sabe que, en $t = 40\ \mu\text{s}$, $I = 0.50I_0$. Por lo tanto,

$$0.50I_0 = I_0 e^{-t/RC}.$$

Al obtener logaritmos naturales en ambos lados ($\ln 0.50 = -0.693$):

$$0.693 = \frac{t}{RC}$$

de manera que

$$R = \frac{t}{(0.693)C} = \frac{(40 \times 10^{-6}\,\text{s})}{(0.693)(1.02 \times 10^{-6}\,\text{F})} = 57\,\Omega.$$

c) En $t = 60\ \mu\text{s}$,

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} = (20.4 \times 10^{-6}\,\text{C})e^{-\frac{60\times10^{-6}\,\text{s}}{(57\,\Omega)(1.02\times10^{-6}\,\text{F})}} = 7.3\,\mu\text{C}.$$

EJEMPLO CONCEPTUAL 26–13 **Bombilla en un circuito *RC*.** En el circuito de la figura 26-20, el capacitor originalmente está descargado. Describa el comportamiento de la bombilla desde el instante en que se cierra el interruptor S hasta mucho tiempo después.

RESPUESTA Cuando el interruptor se cierra por primera vez, la corriente en el circuito es alta y la bombilla eléctrica brilla. Conforme el capacitor se carga, el voltaje a través de éste aumenta, lo que causa una reducción en la corriente y que la bombilla brille menos. Conforme la diferencia de potencial a través del capacitor se aproxima al mismo voltaje que el de la batería, la corriente disminuye hacia cero y la bombilla se apaga.

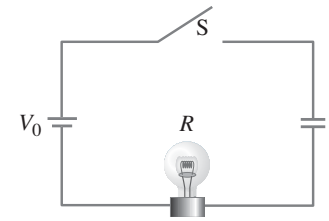


FIGURA 26–20 Ejemplo 26–13.

*Aplicaciones de los circuitos *RC*

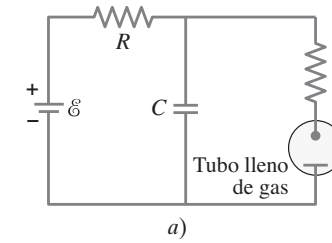
La carga y descarga en un circuito *RC* se puede usar para generar impulsos de voltaje a una frecuencia regular. La carga en el capacitor aumenta hacia un voltaje particular y luego se descarga. Una forma de iniciar la descarga del capacitor es empleando un tubo lleno de gas que tiene un fallo eléctrico cuando el voltaje a través de él alcanza cierto valor V_0. Después de terminada la descarga, el tubo ya no conduce más corriente y el proceso de recarga se repite a sí mismo, comenzando en un voltaje más bajo V_0'. La figura 26-21 muestra un posible circuito y el voltaje en "dientes de sierra" que produce.

Una simple luz titilante es una aplicación de un circuito oscilador de diente de sierra. Aquí la fem se suministra mediante una batería; la bombilla de neón lanza destellos a una tasa de quizá 1 ciclo por segundo. El componente principal de una "unidad de destellos" es un capacitor moderadamente grande.

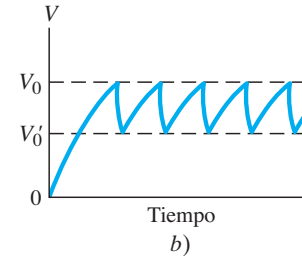
Los limpiaparabrisas intermitentes de un automóvil también pueden usar un circuito *RC*. La constante de tiempo del *RC*, que puede cambiar si se utiliza un interruptor de posiciones múltiples para diferentes valores de R con C fija, determina la tasa a la que se activan los limpiadores.

FÍSICA APLICADA
Oscilador diente de sierra, lámparas titilantes, limpiaparabrisas

FIGURA 26–21 *a*) Un circuito *RC*, acoplado con un tubo lleno de gas como interruptor, genera un voltaje en "diente de sierra" repetitivo, como se muestra en *b*).



a)



b)

EJEMPLO 26–14 **ESTIMACIÓN** **Resistor en una señal de vuelta de un vehículo.** Estime el orden de magnitud del resistor en un circuito de señal direccional de un vehículo.

PLANTEAMIENTO Una señal direccional típica destella quizá dos veces por segundo, de manera que la constante de tiempo está en el orden de 0.5 s. Un capacitor moderado puede tener $C = 1\ \mu\text{F}$.

SOLUCIÓN Al establecer que $\tau = RC = 0.5$ s, encontramos que

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{0.5\,\text{s}}{1 \times 10^{-6}\,\text{F}} \approx 500\,\text{k}\Omega.$$

FÍSICA APLICADA

Marcapasos cardiaco

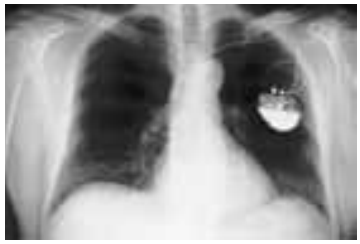


FIGURA 26–22 En esta radiografía de la caja torácica se distingue el marcapasos electrónico activado con una batería.

Un interesante uso médico de un circuito *RC* es el marcapasos cardiaco electrónico, que puede lograr que un corazón en paro comience a latir de nuevo al aplicarle un estímulo eléctrico a través de electrodos unidos al pecho. Si es necesario, el estímulo se repite a la tasa del latido normal. El corazón en sí contiene unas células *marcapasos* que envían pequeños impulsos eléctricos a una tasa de 60 a 80 por minuto. Estas señales inducen el comienzo de cada latido. En algunas formas de enfermedad cardiaca, el marcapasos natural falla en su funcionamiento adecuado y el corazón pierde su ritmo. Tales pacientes usan *marcapasos electrónicos* que producen un impulso de voltaje regular que inicia y controla la frecuencia del latido cardiaco. Los electrodos se implantan en el corazón o cerca de él (figura 26-22), y el circuito contiene un capacitor y un resistor. La carga en el capacitor aumenta hasta cierto punto y luego descarga un impulso al corazón. Luego comienza a cargarse de nuevo. La tasa de pulsación depende de los valores de R y C.

26–6 Riesgos eléctricos

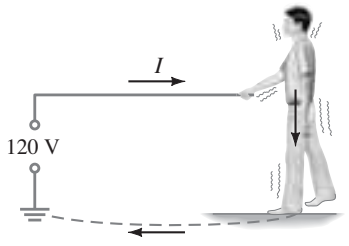
FÍSICA APLICADA

Peligros de la electricidad

El exceso de corriente eléctrica puede calentar los alambres en los edificios y provocar incendios, como se explicó en la sección 25-6. La corriente eléctrica también puede dañar al cuerpo humano o incluso ser mortal. La corriente eléctrica a través del cuerpo humano provoca daños en dos formas: **1.** la corriente eléctrica calienta el tejido y causa quemaduras; **2.** la corriente eléctrica estimula nervios y músculos, y por eso se siente un "choque eléctrico" o golpe de corriente. La severidad de un choque eléctrico depende de la magnitud de la corriente, de cuánto tiempo actúa y de la parte del cuerpo por la que pasa. Una corriente que pasa a través de órganos vitales, como el corazón o el cerebro, es especialmente seria porque interfiere con su funcionamiento.

La mayoría de las personas pueden "sentir" una corriente de aproximadamente 1 mA. Corrientes de algunos mA causan dolor, pero rara vez provocan daño considerable en una persona sana. Las corrientes por arriba de 10 mA causan severa contracción de los músculos; por ello, una persona sometida a una corriente de esta magnitud tal vez no sea capaz de soltar la fuente de la corriente (por ejemplo, un aparato o un alambre dañados). Es posible que ocurra la muerte por parálisis del sistema respiratorio. Sin embargo, en ocasiones la respiración artificial permite revivir a una víctima. Si una corriente por arriba de aproximadamente 80 a 100 mA pasa a través del torso, de manera que una porción pase a través del corazón durante más de un segundo o dos, los músculos cardiacos comenzarán a contraerse de manera irregular y la sangre no se bombeará de manera adecuada. Esta condición se llama **fibrilación ventricular**. Si dura mucho tiempo, ocasiona la muerte. Aunque parezca extraño, si la corriente es mucho mayor, del orden de 1 A, la muerte por falla cardiaca es menos probable,[†] pero tales corrientes pueden provocar serias quemaduras, en especial si se concentran en una pequeña área del cuerpo.

FIGURA 26–23 Una persona recibe un choque eléctrico cuando el circuito se completa.



a)

b)

La seriedad de un choque eléctrico depende del voltaje aplicado y de la resistencia efectiva del cuerpo. El tejido vivo tiene baja resistencia, pues el fluido de las células contiene iones que son buenos conductores. Sin embargo, la capa exterior de la piel, cuando está seca, ofrece alta resistencia y, por lo tanto, es protectora. La resistencia efectiva entre dos puntos en lados opuestos del cuerpo cuando la piel está seca se localiza en el intervalo de 10^4 a $10^6\ \Omega$. Pero cuando la piel está húmeda, la resistencia es de $10^3\ \Omega$ o menos. Una persona descalza o que calce zapatos con suela delgada estará en buen contacto con la tierra, y tocar una línea de 120 V con una mano húmeda podría dar por resultado una corriente de

$$I = \frac{120\ \text{V}}{1000\ \Omega} = 120\ \text{mA}.$$

Como se vio, esto podría ser mortal.

Una persona que recibe un choque eléctrico se convierte en parte de un circuito completo. La figura 26-23 muestra dos formas en que el circuito se puede completar

[†]Las corrientes más intensas aparentemente llevan al corazón a una pausa. Al liberarse de la corriente, el corazón regresa a su ritmo normal. Esto quizá no ocurra cuando se presenta la fibrilación porque, una vez iniciada ésta, es difícil de detener. La fibrilación también ocurre como resultado de un ataque cardiaco o durante una cirugía del corazón. Un dispositivo conocido como *desfibrilador* (descrito en la sección 24-4) permite aplicar brevemente una corriente intensa al corazón, lo que provoca un paro cardiaco total al que, con frecuencia, sigue la reanudación del latido normal.

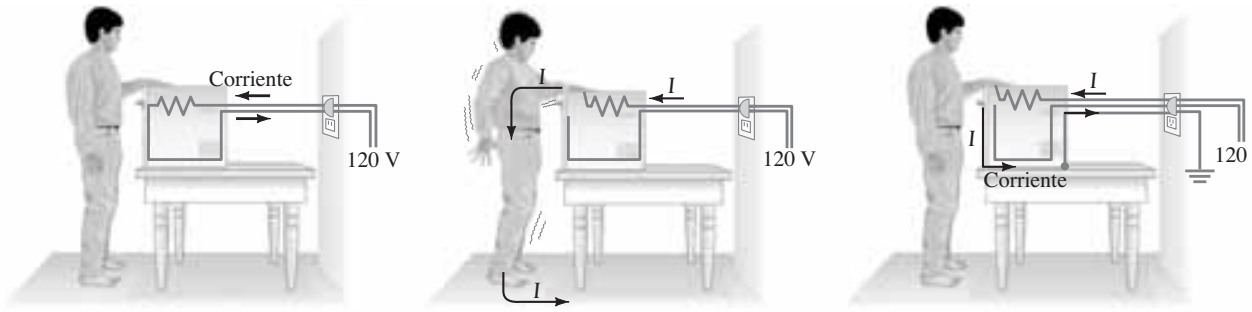


FIGURA 26–24 *a*) Horno eléctrico que opera normalmente con un enchufe de dos patas. *b*) Corto en la cubierta cuando ésta no se conecta a tierra: choque eléctrico. *c*) Corto en la cubierta cuando ésta se conecta a tierra mediante un enchufe de tres patas.

cuando una persona, accidentalmente, toca una alambre conductor de "fase" ["fase" significa un potencial alto, como 120 V (el voltaje doméstico normal), en relación con la tierra]. El otro alambre del cableado de un edificio se conecta a tierra, ya sea mediante un alambre conectado a un conductor enterrado o a través de una tubería de agua en el suelo. En la figura 26-23a, la corriente pasa del alambre de alto voltaje, a través de la persona, hacia tierra a través de sus pies descalzos y de regreso a lo largo del suelo (un buen conductor) hacia la terminal a tierra de la fuente. Si la persona está de pie sobre un buen aislante (zapatos con gruesas suelas de goma o un piso de madera seco) habrá mucha más resistencia en el circuito y, en consecuencia, mucho menos corriente a través de la persona. Si el individuo está de pie con los pies descalzos sobre el suelo, o está en una bañera, existe un peligro mortal ya que la resistencia es mucho menor y la corriente puede ser más intensa. En una bañera (o una alberca), uno no sólo está mojado, lo que reduce la resistencia, también el agua está en contacto con la tubería de drenaje (por lo general metálica) que conduce a tierra. Se recomienda de forma insistente no tocar un aparato eléctrico cuando uno esté mojado o descalzo. Serían de gran ayuda como medida de seguridad códigos de construcción que requieran el uso de tuberías no metálicas.

En la figura 26-23b, una persona toca un conductor de "fase" defectuoso con una mano, y la otra mano toca un grifo (conectado a tierra a través de la tubería). La corriente es particularmente peligrosa porque atraviesa el pecho, a través del corazón y los pulmones. Una regla útil: si una mano toca algo eléctrico, tenga la otra mano en el bolsillo (¡no la use!), y calce zapatos con suela de goma gruesa. También es buena idea quitarse la joyería metálica, especialmente anillos (por lo general, el dedo está húmedo debajo del anillo).

⚠ CUIDADO

Tenga una mano en su bolsillo cuando la otra toque alguna fuente de electricidad

Es posible entrar en contacto con un conductor de fase al tocar un alambre desnudo cuyo aislante se desgastó, o al manipular un aparato eléctrico que tiene un alambre desnudo en el interior. (¡Siempre desconecte el aparato eléctrico antes de investigar[†] en su interior!) Otra posibilidad es que un alambre en el interior de un dispositivo se rompa o pierda su aislante y entre en contacto con la cubierta. Si la cubierta es metálica, conducirá electricidad. Entonces una persona podría sufrir un severo choque eléctrico simplemente al tocar la cubierta, como se ilustra en la figura 26-24b. Para evitar un accidente, se supone que las cubiertas metálicas deben conectarse directamente a tierra mediante un alambre de tierra separado. Entonces, si un conductor de "fase" toca la cubierta a tierra, en el interior ocurre inmediatamente un cortocircuito, como se muestra en la figura 26-24c, y la mayor parte de la corriente pasará a través del alambre a tierra de baja resistencia y no a través de la persona. Más aún, la corriente intensa debe fundir el fusible o el interruptor de circuito. La conexión a tierra de una cubierta metálica se logra al separar el alambre de tierra conectado a la tercera pata (redonda) de un enchufe de tres patas. Nunca corte la tercera pata de un enchufe: podría salvar su vida.

FÍSICA APLICADA

Conexión a tierra y choques eléctricos

[†]Incluso entonces podría recibir un choque eléctrico de un capacitor que no se descarga sino hasta que usted lo toca.

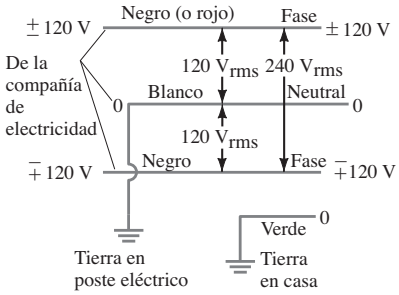
a)

b)

c)

FIGURA 26–25 *a*) Enchufe con tres patas y *b*) un adaptador (gris) para los antiguos tomacorrientes de dos patas: asegúrese de atornillar la lengüeta a tierra. *c*) Enchufe polarizado de dos patas.

FIGURA 26–26 Los cuatro alambres que entran a una casa típica (en EUA). Los códigos de color para los alambres no siempre son los que se muestran aquí. ¡Tenga cuidado!



En las figuras 26-25a y b se ilustran un enchufe de tres patas y un adaptador.

¿Por qué se necesita un tercer alambre? Los otros dos alambres conducen los 120 V: uno de ellos está conectado a **fase** (120 V de ca), el otro es **neutro**, que en sí mismo está conectado a tierra. El tercer alambre "dedicado" a tierra, con la pata redonda, quizá parezca redundante. Pero constituye una protección por dos razones: **1.** protege contra el cableado interno realizado de manera incorrecta; **2.** el alambre neutro conduce corriente normal (corriente "de regreso" de los 120 V) y tiene resistencia; así que puede haber una caída de voltaje a lo largo de éste, por lo general pequeña, pero si las conexiones son deficientes o se encuentran corroídas, o el enchufe está flojo, la resistencia podría ser lo suficientemente grande como para que uno sienta ese voltaje si toca el alambre neutro a cierta distancia de su punto de conexión.

Algunos dispositivos eléctricos vienen sólo con dos alambres, y las dos patas del enchufe tienen diferentes anchos; el enchufe sólo se puede insertar de una forma en el tomacorriente, de manera que el pretendido neutro (la pata más ancha) del dispositivo se conecta al neutro en el cableado (figura 26-25c). Por ejemplo, el enroscado de tornillo en una bombilla tiene la intención de conectarse al neutro (y el contacto de la base a la fase) para evitar choques eléctricos cuando se cambie una bombilla en un conector o portalámparas que posiblemente esté salido. Los dispositivos con enchufes de dos patas *no* tienen puestas sus cubiertas a tierra; se supone que tienen doble aislamiento eléctrico. De cualquier forma, tome precauciones adicionales.

El aislamiento de un alambre a menudo tiene un código de colores. Los medidores de mano suelen tener alambres guía rojos (fase) y negros (neutro). Pero, en una casa, el negro generalmente es fase (o tal vez rojo), mientras que el blanco es neutro y el verde se dedica a tierra (figura 26-26). Pero tenga cuidado: uno no siempre debe confiar en estos códigos de colores. [En Estados Unidos, por lo general, entran tres alambres a una casa: dos conductores *de fase* a 120 V cada uno (que suman 240 V para electrodomésticos o dispositivos que operan a 240 V) más el *neutro* a tierra (que conduce corriente de retorno para las dos fases). Véase la figura 26-26. El alambre "dedicado" a *tierra* (no portador de corriente) es un cuarto alambre que no proviene de la compañía eléctrica, sino que entra a la casa desde un pesado poste cercano en la tierra o una tubería metálica enterrada. Los dos conductores de fase pueden alimentar circuitos separados de 120 V en la casa, así que cada circuito de 120 V dentro de la casa sólo tiene tres alambres, incluido el de tierra].

Los interruptores de circuito normales o disyuntores (secciones 25-6 y 28-8) protegen el equipo y los edificios de sobrecargas e incendios. Protegen a los humanos sólo en algunas circunstancias, como en el caso de corrientes muy altas que resultan de un corto, si responden lo suficientemente rápido. Los *interruptores de circuito de falla a tierra* (GFCI, por las siglas de *ground fault circuit interrupters*), descritos en la sección 29-8, están diseñados para proteger a la gente de las corrientes mucho más bajas (de 10 mA a 100 mA) que son mortales pero que no activarían un interruptor de circuito de 15 A ni quemarían un fusible de 20 A.

La corriente es la que daña, pero es el voltaje el que conduce la corriente. A veces se dice que 30 volts son el umbral para el peligro. Pero incluso una batería de automóvil de 12 V (que puede suministrar grandes corrientes) es capaz de causar desagradables quemaduras y choques eléctricos.

Otro peligro es la **corriente de fuga**, que se define como una corriente a lo largo de una trayectoria no deseada. Las corrientes de fuga con frecuencia están "acopladas capacitivamente". Por ejemplo, un alambre en una lámpara forma un capacitor con la cubierta de metal; las cargas que se mueven en un conductor atraen o repelen carga en el otro, así que existe una corriente. Los códigos eléctricos típicos limitan las corrientes de fuga a 1 mA para cualquier dispositivo. Una corriente de fuga de 1 mA generalmente no es dañina. Sin embargo, podría ser muy peligrosa para un paciente de hospital con electrodos implantados que se conectan a tierra a través del aparato. Esto se debe a la ausencia de la capa protectora de la piel y a que la corriente puede pasar directamente a través del corazón, en comparación con la situación habitual donde la corriente entra a las manos y se esparce a través del cuerpo. Aunque 100 mA son suficientes para provocar fibrilación cardiaca cuando entran por las manos (en realidad una pequeña porción pasa al corazón), se sabe de fibrilaciones producidas por tan sólo 0.02 mA cuando pasan directamente al corazón. Por esa razón, un paciente "conectado" está en considerable peligro por las corrientes de fuga, incluso con un acto tan simple como tocar una lámpara.

Finalmente, nunca toque una línea de potencia caída (¡es mortal!), ni siquiera se acerque a ella. Una línea de potencia viva está a miles de volts. A través del suelo o del pavimento puede fluir una enorme corriente –desde donde el alambre de alto voltaje toca el suelo a lo largo de su trayectoria hasta el punto de conexión a tierra de la línea neutra—, suficiente como para que el voltaje entre sus dos pies sea muy grande. *Sugerencia:* En tal caso, permanezca en un pie o corra (sólo un pie toca el suelo a la vez).

*26–7 Amperímetros y voltímetros

Un **amperímetro** sirve para medir corriente, y un **voltímetro** mide diferencias de potencial o voltajes. Las mediciones de corriente y de voltaje se realizan con medidores que son de dos tipos: **1.** medidores *analógicos*, que despliegan valores numéricos mediante la posición de un puntero que se mueve a través de una escala (figura 26-27a); y **2.** medidores *digitales*, que despliegan el valor numérico en números (figura 26-27b). Ahora se estudiarán los medidores y cómo funcionan, luego cómo se conectan a los circuitos para efectuar las mediciones. Finalmente veremos cómo el uso de medidores afecta al circuito que se mide, lo que posiblemente cause resultados erróneos, y explicaremos qué hacer al respecto.

FÍSICA APLICADA
Medidores de cd

a)

b)

FIGURA 26–27 *a*) Multímetro analógico que se usa como voltímetro. *b*) Medidor digital electrónico.

*Amperímetros y voltímetros analógicos

El elemento fundamental de un amperímetro o voltímetro analógico, en los que la lectura es mediante un puntero sobre una escala (figura 26-27a), es un *galvanómetro*. El galvanómetro funciona de acuerdo con el principio de la fuerza entre un campo magnético y una bobina de alambre portadora de corriente, que se estudiará en el capítulo 27. Por el momento, simplemente se necesita saber que la desviación de la aguja de un galvanómetro es proporcional a la corriente que fluye a través de él. La *corriente de sensibilidad a escala completa* de un galvanómetro, I_m, es la corriente eléctrica necesaria para hacer que la aguja se desvíe el rango completo de la escala.

Un galvanómetro permite medir directamente pequeñas corrientes cd. Por ejemplo, un galvanómetro cuya sensibilidad I_m es de 50 μA permite medir corrientes desde aproximadamente 1 μA (corrientes menores que ésta serían difíciles de leer en la escala) y hasta 50 μA. Para medir corrientes más intensas, se coloca un resistor en paralelo con el galvanómetro. De esta forma, un **amperímetro** analógico, representado por el símbolo •Ⓐ•, consiste en un galvanómetro (•Ⓖ•) en paralelo con un resistor llamado **resistor en derivación** (*shunt*), como se muestra en la figura 26-28. ("En derivación" es un sinónimo de "en paralelo"). La resistencia en derivación es R_{sh}, y la resistencia de la bobina del galvanómetro, a través de la cual pasa la corriente, es r. El valor de R_{sh} se elige de acuerdo con la desviación de escala completa deseada; por lo general, R_{sh} es muy pequeña, dada la muy pequeña resistencia total de un amperímetro, así que la mayor parte de la corriente pasa a través de R_{sh} y muy poca ($\lesssim$ 50 μA) pasa a través del galvanómetro para desviar la aguja.

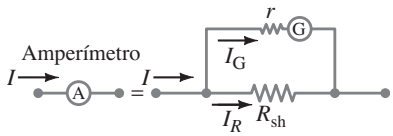


FIGURA 26–28 Un amperímetro es un galvanómetro en paralelo con un resistor (en derivación) con baja resistencia, R_{sh}.

EJEMPLO 26–15 **Diseño de un amperímetro.** Diseñe un amperímetro para leer 1.0 A a escala completa empleando un galvanómetro con una sensibilidad de 50 μA y una resistencia $r = 30\ \Omega$. Compruebe si la escala es lineal.

PLANTEAMIENTO Sólo 50 μA ($= I_G = 0.000050$ A) de la corriente de 1.0 A debe pasar a través del galvanómetro para dar una desviación de escala completa. El resto de la corriente ($I_R = 0.999950$ A) pasa a través del pequeño resistor en derivación, R_{sh}, figura 26-28. La diferencia de potencial a través del galvanómetro es igual a la que cruza el resistor en derivación (están en paralelo). Se aplica la ley de Ohm para encontrar R_{sh}.

SOLUCIÓN Puesto que $I = I_G + I_R$, cuando $I = 1.0$ A fluye hacia el medidor, se desea que I_R a través del resistor en derivación sea $I_R = 0.999950$ A. La diferencia de potencial a través de la derivación es la misma que cruza el galvanómetro, así que la ley de Ohm establece que

$$I_R R_{sh} = I_G r;$$

por lo tanto,

$$R_{sh} = \frac{I_G r}{I_R} = \frac{(5.0 \times 10^{-5}\ \text{A})(30\ \Omega)}{(0.999950\ \text{A})} = 1.5 \times 10^{-3}\ \Omega,$$

o 0.0015 Ω. Por lo tanto, el resistor en derivación debe tener una resistencia muy baja y la mayor parte de la corriente pasa a través de él.

Puesto que $I_G = I_R(R_{sh}/r)$ y (R_{sh}/r) es constante, se sabe que la escala es lineal.

Un **voltímetro** analógico (•-Ⓥ-•) también consiste en un galvanómetro y un resistor. Pero el resistor R_{ser} se conecta en serie, figura 26-29, y generalmente es grande, lo que da al voltímetro una alta resistencia interna.

FIGURA 26–29 Un voltímetro es un galvanómetro en serie con un resistor con alta resistencia, R_{ser}.

EJEMPLO 26–16 **Diseño de un voltímetro.** Con un galvanómetro con resistencia interna $r = 30\ \Omega$ y corriente de sensibilidad a escala completa de 50 μA, diseñe un voltímetro que tome lecturas de 0 a 15 V. ¿La escala es lineal?

PLANTEAMIENTO Cuando entre las terminales del voltímetro exista una diferencia de potencial de 15 V, se desea que 50 μA pasen a través de él para dar una desviación de escala completa.

SOLUCIÓN De acuerdo con la ley de Ohm, $V = IR$, se tiene (véase la figura 26-29)

$$15\ \text{V} = (50\,\mu\text{A})(r + R_{ser}),$$

de manera que

$$R_{ser} = \frac{15\ \text{V}}{5.0 \times 10^{-5}\ \text{A}} - r = 300\,\text{k}\Omega - 30\,\Omega = 300\,\text{k}\Omega.$$

Advierta que $r = 30\ \Omega$ es tan pequeña en comparación con el valor de R_{ser}, que no influye significativamente en el cálculo. De nuevo, la escala será lineal: si el voltaje a medir es 6.0 V, la corriente que pasa a través del voltímetro será (6.0 V)/($3.0 \times 10^5\ \Omega$) = 2.0×10^{-5} A, o 20 μA. Esto producirá dos quintos de desviación de escala completa, como se requiere (6.0 V/15.0 V = 2/5).

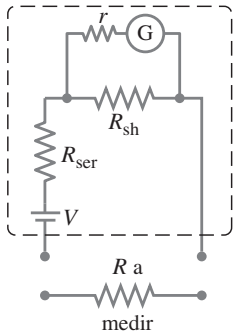
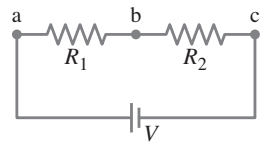
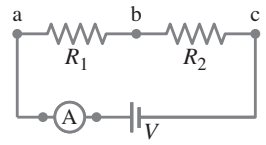


FIGURA 26–30 Un óhmetro.

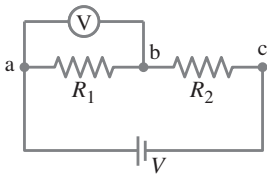
FIGURA 26–31 Medición de corriente y voltaje.



a)



b)



c)

Los medidores recién descritos son para corriente directa. Es posible modificar un medidor de cd para medir ca (corriente alterna, sección 25-7) si se agregan diodos (capítulo 40), lo que permite que la corriente fluya sólo en una dirección. Es posible calibrar un medidor de ca para leer valores rms o pico.

Los voltímetros y amperímetros pueden tener varios resistores en serie o en derivación para ofrecer una variedad de rangos. Los **multímetros** son capaces de medir voltaje, corriente y resistencia. A veces un multímetro se conoce como VOM (volt-ohm-medidor o volt-ohm-miliamperímetro).

Un **óhmetro** mide resistencia y debe contener una batería de voltaje conocido conectada en serie a un resistor (R_{ser}) y a un amperímetro (figura 26-30). El resistor cuya resistencia se habrá de medirse completa el circuito. La desviación de la aguja es inversamente proporcional a la resistencia. La calibración de la escala depende del valor del resistor en serie. Puesto que un óhmetro envía una corriente a través del dispositivo cuya resistencia se medirá, no se debe usar en dispositivos muy delicados que pudieran dañarse con la corriente.

La **sensibilidad** de un medidor generalmente se especifica en la carátula. Se expresa como tantos ohms por volt, lo que indica cuántos ohms de resistencia hay en el medidor por volt de lectura de escala completa. Por ejemplo, si la sensibilidad es de 30,000 Ω/V, esto significa que, en la escala de 10 V, el medidor tiene una resistencia de 300,000 Ω, mientras que, en la escala de 100 V, la resistencia del medidor es de 3 MΩ. La corriente de sensibilidad a escala completa, I_m, examinada con anterioridad, es justo el recíproco de la sensibilidad en Ω/V.

*Cómo conectar los medidores

Suponga que quiere determinar la corriente I en el circuito que se ilustra en la figura 26-31a, y el voltaje V a través del resistor R_1. ¿Cómo se conectan exactamente los amperímetros y voltímetros al circuito que se va a medir?

Puesto que un amperímetro se usa para medir la corriente que fluye en el circuito, se le debe insertar directamente en el circuito, en serie con los otros elementos, como se muestra en la figura 26-31b. Cuanto menor sea su resistencia interna, menos afectará al circuito.

Por otra parte, un voltímetro se conecta "externamente", en paralelo con el elemento de circuito a través del cual se medirá el voltaje. Se usa para medir la diferencia de potencial entre dos puntos. Sus dos alambres guía (alambres conectores) se conectan a los dos puntos, como se observa en la figura 26-31c, donde se medirá el voltaje que cruza R_1. Cuanto mayor sea su resistencia interna, ($R_{ser} + r$) en la figura 26-29, menos afectará al circuito que se mide.

*Efectos de la resistencia del medidor

Es importante conocer la sensibilidad de un medidor, porque en muchos casos la resistencia del medidor puede afectar seriamente los resultados. Considere el siguiente ejemplo.

FÍSICA APLICADA
Corrección para la resistencia del medidor

EJEMPLO 26–17 **Lectura de voltaje frente a voltaje verdadero.** Suponga que usted está probando un circuito electrónico que tiene dos resistores, R_1 y R_2, cada uno de 15 kΩ, conectados en serie como se indica en la figura 26-32a. La batería mantiene 8.0 V a través de ellos y tiene resistencia interna despreciable. Un voltímetro, cuya sensibilidad es de 10,000 Ω/V, se coloca en la escala de 5.0 V. ¿Qué voltaje registra el medidor cuando se conecta a través de R_1, figura 26-32b, y qué error provoca la resistencia finita del medidor?

PLANTEAMIENTO El medidor actúa como un resistor en paralelo con R_1. Recurrimos al análisis de resistores en paralelo y en serie, así como a la ley de Ohm, para determinar las corrientes y los voltajes.

SOLUCIÓN En la escala de 5.0 V, el voltímetro tiene una resistencia interna de (5.0 V)(10,000 Ω/V) = 50,000 Ω. Cuando se conecta a través de R_1, como en la figura 26-32b, estos 50 kΩ se tienen en paralelo con R_1 = 15 kΩ. La resistencia total R_{eq} de estos dos es

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{50\,\text{k}\Omega} + \frac{1}{15\,\text{k}\Omega} = \frac{13}{150\,\text{k}\Omega};$$

de manera que R_{eq} = 11.5 kΩ. Esta R_{eq} = 11.5 kΩ está en serie con R_2 = 15 kΩ, así que la resistencia total del circuito ahora es de 26.5 kΩ (en vez de los 30 kΩ originales). En consecuencia, la corriente de la batería es

$$I = \frac{8.0\,\text{V}}{26.5\,\text{k}\Omega} = 3.0 \times 10^{-4}\,\text{A} = 0.30\,\text{mA}.$$

Así, la caída de voltaje a través de R_1, que es la misma que la que cruza el voltímetro, es $(3.0 \times 10^{-4}\ \text{A})(11.5 \times 10^{3}\ \Omega) = 3.5$ V. [La caída de voltaje a través de R_2 es $(3.0 \times 10^{-4}\ \text{A})(1.5 \times 10^{3}\ \Omega) = 4.5$ V, para un total de 8.0 V]. Si suponemos que el medidor es exacto, dará una lectura de 3.5 V. En el circuito original, sin el medidor, $R_1 = R_2$, así que el voltaje que cruza R_1 es la mitad del voltaje de la batería, o 4.0 V. Por ende, el voltímetro, en virtud de su resistencia interna, brinda una lectura baja. En este caso varía en 0.5 V, o más del 10%.

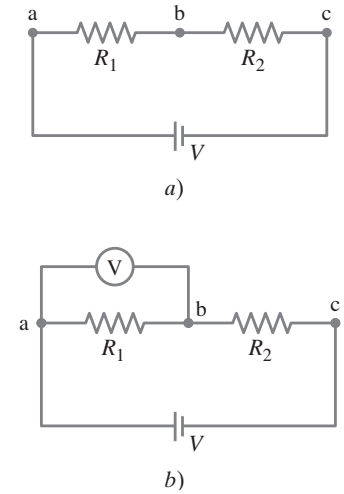


FIGURA 26–32 Ejemplo 26–17.

El ejemplo 26-17 ilustra cuán seriamente un medidor puede afectar un circuito y dar una lectura equivocada. Sin embargo, si la resistencia de un voltímetro es mucho mayor que la resistencia del circuito, tendrá poco efecto y sus lecturas serán confiables, al menos hasta la precisión de fábrica del medidor, que para los medidores analógicos ordinarios por lo general es del 3% al 4% de la desviación de escala completa. Un amperímetro también puede interferir con un circuito, pero el efecto es mínimo si su resistencia es mucho menor que la del circuito como un todo. Tanto en el caso de voltímetros como en el de amperímetros, cuanto más sensible sea el galvanómetro, menor efecto tendrá. Un medidor de 50,000 Ω/V es mucho mejor que un medidor de 1000 Ω/V.

*Medidores digitales

Los medidores digitales (véase la figura 26-27b) se usan en la misma forma que los medidores analógicos: se insertan directamente en el circuito, en serie, para medir la corriente (figura 26-31b), y se conectan en el "exterior", en paralelo con el circuito, para medir el voltaje (figura 26-31c).

No obstante, la construcción interna de los medidores digitales es diferente de la de los medidores analógicos, pues los medidores digitales no usan galvanómetro. El circuito electrónico y las lecturas digitales son más sensibles que un galvanómetro, y tienen menos efecto sobre el circuito que se va a medir. Cuando se miden voltajes de cd, la resistencia del medidor digital es muy alta, por lo general en el orden de 10 a 100 MΩ (10^7 a 10^8 Ω), y no cambia significativamente cuando se seleccionan diferentes escalas de voltaje. Un medidor digital de 100 MΩ extrae muy poca corriente cuando se conecta a través de una resistencia aun de 1 MΩ.

La precisión de los medidores digitales es excepcional, con frecuencia de una parte en 10^4 (= 0.01%) o mejor. Sin embargo, esta precisión no es lo mismo que exactitud. Un medidor preciso con 10^8 Ω de resistencia interna no brindará resultados exactos si se usa para medir un voltaje a través de un resistor de 10^8 Ω, en cuyo caso es necesario realizar un cálculo como el del ejemplo 26-17.

Siempre que se efectúa una medición en un circuito, hasta cierto grado se afecta ese circuito (ejemplo 26-17). Esto también es cierto para otros tipos de mediciones: cuando se realiza una medición en un sistema, éste resulta afectado en alguna forma. En una medición de temperatura, por ejemplo, el termómetro podría intercambiar calor con el sistema, alterando así su temperatura. Es importante tener la capacidad de realizar las correcciones necesarias, como se vio en el ejemplo 26-17.

Resumen

Un dispositivo que transforma algún tipo de energía en energía eléctrica se llama **fuente** de **fem**. Una batería se comporta como una fuente de fem en serie con una **resistencia interna**. La fem es la diferencia de potencial determinada por las reacciones químicas en la batería y es igual al voltaje terminal cuando no se extrae corriente. Cuando se extrae una corriente, el voltaje en las terminales de la batería es menor que su fem por una cantidad igual a la disminución de potencial Ir a través de la resistencia interna.

Cuando las resistencias se conectan en **serie** (extremo con extremo en una sola trayectoria lineal), la resistencia equivalente es la suma de las resistencias individuales:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots. \qquad \textbf{(26–3)}$$

En una combinación en serie, R_{eq} es mayor que cualquier resistencia componente.

Cuando los resistores se conectan en **paralelo**, el recíproco de la resistencia equivalente es igual a la suma de los recíprocos de las resistencias individuales:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots. \qquad \textbf{(26–4)}$$

En una conexión en paralelo, la resistencia total es menor que cualquiera de las resistencias individuales.

Las **reglas de Kirchhoff** son útiles para determinar las corrientes y los voltajes en los circuitos. La **regla de Kirchhoff de los nodos** se basa en la conservación de la carga eléctrica y afirma que la suma de todas las corrientes que entran a cualquier nodo es igual a la suma de todas las corrientes que salen de ese nodo. La segunda, o **regla de las espiras**, se basa en la conservación de la energía y afirma que la suma algebraica de los cambios en el potencial alrededor de cualquier trayectoria cerrada del circuito debe ser cero.

Cuando un **circuito *RC*** que contiene una resistencia R en serie con una capacitancia C se conecta a una fuente de fem, el voltaje a través del capacitor se eleva gradualmente en el tiempo caracterizado por una exponencial de la forma $(1 - e^{-t/RC})$, donde la **constante de tiempo**

$$\tau = RC, \qquad \textbf{(26–7)}$$

es el tiempo que el voltaje tarda en alcanzar el 63% de su valor máximo. La corriente a través del resistor disminuye como $e^{-t/RC}$.

Un capacitor que se descarga a través de un resistor se caracteriza por la misma constante de tiempo: en un tiempo $\tau = RC$, el voltaje a través del capacitor cae al 37% de su valor inicial. La carga en el capacitor, y el voltaje a través del mismo, disminuye como $e^{-t/RC}$, como lo hace la corriente.

Los choques eléctricos son provocados por la corriente que pasa a través del cuerpo. Para evitar choques eléctricos, el cuerpo no debe volverse parte de un circuito completo al permitir que distintas partes corporales toquen objetos a diferentes potenciales. Comúnmente, los choques eléctricos son provocados por una parte del cuerpo que toca tierra y otra parte que toca un potencial eléctrico alto.

[*Un **amperímetro** mide corriente. Un amperímetro analógico consiste en un galvanómetro y un **resistor en derivación** en paralelo que conduce la mayor parte de la corriente. Un **voltímetro** analógico consiste en un galvanómetro y un resistor en serie. Un amperímetro se inserta *en* el circuito cuya corriente se medirá. Un voltímetro es externo y se conecta en paralelo con el elemento cuyo voltaje se va a medir. Los voltímetros digitales tienen mayor resistencia interna y afectan menos al circuito que habrá de medirse que los medidores analógicos].

Preguntas

1. Explique por qué las aves se pueden posar con seguridad en las líneas de alta tensión, y, en cambio, el hecho de apoyar una escalera de metal en una línea de potencia para recuperar una cometa atorada en ella es extremadamente peligroso.
2. Discuta las ventajas y desventajas de conectar en serie y en paralelo las luces de los árboles de Navidad.
3. Si se tiene una línea de 120 V, ¿sería posible iluminar varias lámparas de 6 V sin quemarlas? ¿Cómo?
4. Dos bombillas, con resistencias R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$), y una batería se conectan en serie. ¿Cuál bombilla es más brillante? ¿Y si se conectan en paralelo? Explique.
5. Los tomacorrientes domésticos con frecuencia son tomacorrientes dobles. ¿Están conectados en serie o en paralelo? ¿Cómo lo sabe?
6. Con dos bombillas idénticas y dos baterías idénticas, ¿cómo las ordenaría en un circuito para obtener la máxima potencia total posible hacia las bombillas? (Suponga que las baterías tienen resistencia interna despreciable).
7. Si dos resistores idénticos se conectan en serie a una batería, ¿la batería tiene que suministrar más potencia o menos potencia que cuando sólo se conecta uno de los resistores? Explique.
8. En una habitación hay una sola bombilla de 60 Ω. ¿Cómo cambia la resistencia total del circuito eléctrico de la habitación cuando se enciende una bombilla adicional de 100 Ω?
9. Cuando se aplica la regla de Kirchhoff de las espiras (como en la figura 26-33), ¿el signo (o la dirección) de la fem de una batería depende de la dirección de la corriente a través de la batería? ¿Y qué hay acerca del voltaje terminal?

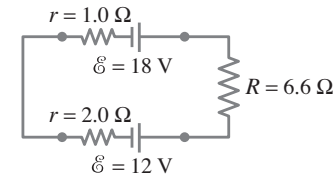


FIGURA 26–33
Pregunta 9.

10. Compare y analice las fórmulas para resistores y capacitores cuando se conectan en serie y en paralelo.
11. ¿Para qué uso se conectan en serie las baterías? ¿Para qué uso se conectan en paralelo? ¿Importa si las baterías son casi idénticas o no en cualquiera de los casos?
12. ¿El voltaje terminal de una batería alguna vez puede superar su fem? Explique.
13. Explique con detalle cómo podría medir la resistencia interna de una batería.
14. En un circuito RC, la corriente fluye de la batería hasta que el capacitor se carga por completo. ¿La energía total suministrada por la batería es igual a la energía total almacenada por el capacitor? Si no es así, ¿adónde va la energía adicional?

15. En el caso del circuito que se muestra en la figura 26-34, use las palabras "aumenta", "disminuye" o "permanece igual" para completar los siguientes enunciados:

a) Si R_7 aumenta, la diferencia de potencial entre A y E _____. Suponga que no hay resistencia en Ⓐ y en $\mathscr{E}$.

b) Si R_7 aumenta, la diferencia de potencial entre A y E _____. Suponga que Ⓐ y $\mathscr{E}$ tienen resistencia.

c) Si R_7 aumenta, la caída de voltaje a través de R_4 _____.

d) Si R_2 disminuye, la corriente a través de R_1 _____.

e) Si R_2 disminuye, la corriente a través de R_6 _____.

f) Si R_2 disminuye, la corriente a través de R_3 _____.

g) Si R_5 aumenta, la caída de voltaje a través de R_2 _____.

h) Si R_5 aumenta, la caída de voltaje a través de R_4 _____.

i) Si R_2, R_5 y R_7 aumentan, $\mathscr{E}$ $(r = 0)$ _____.

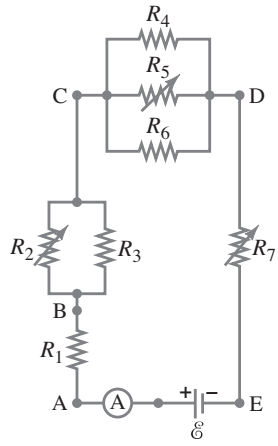


FIGURA 26–34
Pregunta 15. R_2, R_5 y R_7 son resistores *variables* (es posible cambiar sus resistencias), y se les da el símbolo ⟋.

16. La figura 26-35 es el diagrama de un capacitor (o condensador) de **micrófono**. La presión del aire variable en una onda sonora provoca que una placa del capacitor *C* se mueva a un lado y otro. Explique cómo se produce una corriente de la misma frecuencia que la onda sonora.

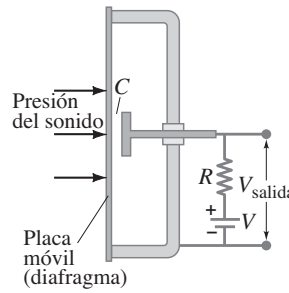


FIGURA 26–35 Diagrama del capacitor de un micrófono. Pregunta 16.

17. Diseñe un circuito donde se puedan usar dos interruptores diferentes, del tipo que se ilustra en la figura 26-36, para operar la misma bombilla desde lados opuestos de una habitación.

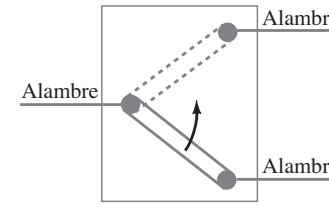


FIGURA 26–36
Pregunta 17.

* **18.** ¿Cuál es la diferencia principal entre un voltímetro analógico y un amperímetro analógico?

* **19.** ¿Qué ocurriría si, por equivocación, usted utiliza un amperímetro donde debería usar un voltímetro?

* **20.** Explique por qué un amperímetro ideal tendría resistencia cero y un voltímetro ideal tendría resistencia infinita.

* **21.** Un voltímetro conectado a través de un resistor siempre da una lectura *menor* que el voltaje real a través del resistor cuando el medidor no está presente. Explique por qué.

* **22.** Una pequeña linterna operada con batería requiere una sola batería de 1.5 V. La bombilla apenas brilla, pero cuando usted saca la batería y la verifica con un voltímetro, registra 1.5 V. ¿Cómo explicaría esto?

23. Diferentes linternas pueden tener baterías conectadas en cualquiera de las disposiciones que se muestran en la figura 26-37. ¿Cuáles serían las ventajas de cada esquema?

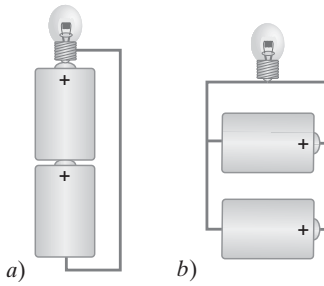


FIGURA 26–37
Pregunta 23.

Problemas

26–1 Fem y voltaje terminal

1. (I) Calcule el voltaje terminal para una batería con una resistencia interna de 0.900 Ω y una fem de 6.00 V cuando la batería se conecta en serie con *a*) un resistor de 81.0 Ω y *b*) un resistor de 810 Ω.

2. (I) Cuatro pilas de 1.5 V se conectan en serie con una bombilla de 12 Ω. Si la corriente resultante es de 0.45 A, ¿cuál es la resistencia interna de cada pila, si se supone que son idénticas y se desprecia la resistencia de los alambres?

3. (II) Una pila seca de 1.5 V se puede probar al conectarla a un amperímetro de baja resistencia. Debería suministrar al menos 25 A. ¿Cuál es la resistencia interna de la pila en este caso, suponiendo que es mucho mayor que la del amperímetro?

4. (II) ¿Cuál es la resistencia interna de una batería de automóvil de 12.0 V cuyo voltaje terminal cae a 8.4 V cuando el motor de arranque extrae 95 A? ¿Cuál es la resistencia del motor de arranque?

26–2 Resistores en serie y en paralelo

En los problemas de esta sección, desprecie la resistencia interna de una batería a menos que el problema se refiera a ella.

5. (I) Un resistor de 650 Ω y uno de 2200 Ω se conectan en serie con una batería de 12 V. ¿Cuál es el voltaje a través del resistor de 2200 Ω?

6. (I) Tres bombillas de 45 Ω y tres bombillas de 65 Ω se conectan en serie. *a*) ¿Cuál es la resistencia total del circuito? *b*) ¿Cuál es la resistencia total si las seis se conectan en paralelo?

7. (I) Suponga que usted tiene resistores de 680 Ω, 720 Ω y 1.20 kΩ. ¿Cuál es la resistencia *a*) máxima y *b*) mínima que puede obtener al combinarlas?

8. (I) ¿Cuántos resistores de 10 Ω se deben conectar en serie para dar una resistencia equivalente a cinco resistores de 100 Ω conectados en paralelo?

9. (II) Suponga que tiene una batería de 9.0 V y desea aplicar un voltaje de sólo 4.0 V. Dado un suministro ilimitado de resistores de 1.0 Ω, ¿cómo podría conectarlos de manera que realicen la función de un "divisor de voltaje" que produzca una salida de 4.0 V para una entrada de 9.0 V?

10. (II) Tres resistores de 1.70 kΩ se pueden conectar juntos en cuatro formas diferentes, formando combinaciones de circuitos en serie y/o en paralelo. ¿Cuáles son estas cuatro formas, y cuál es la resistencia total en cada caso?

11. (II) Una batería con una fem de 12.0 V presenta un voltaje terminal de 11.8 V cuando opera en un circuito con dos bombillas, cada una clasificada con 4.0 W (a 12.0 V), que se conectan en paralelo. ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?

12. (II) Ocho bombillas idénticas se conectan en serie a través de una línea de 110 V. *a*) ¿Cuál es el voltaje a través de cada bombilla? *b*) Si la corriente es de 0.42 A, ¿cuál es la resistencia de cada bombilla y cuál es la potencia disipada por cada una?

13. (II) Ocho bombillas se conectan en paralelo a una fuente de 110 V mediante dos largas guías de 1.4 Ω de resistencia total. Si 240 mA fluyen a través de cada bombilla, ¿cuál es la resistencia de cada una y qué fracción de la potencia total se desperdicia en las guías?

14. (II) El desempeño del circuito de arranque de un automóvil se puede degradar significativamente por una pequeña corrosión en una terminal de la batería. La figura 26-38a muestra un circuito que funciona de manera adecuada con una batería (fem de 12.5 V, 0.02 Ω de resistencia interna) unida mediante cables libres de corrosión a un motor de arranque con resistencia $R_S = 0.15\ \Omega$. Suponga que, más tarde, la corrosión entre una terminal de batería y un cable del motor de arranque introduce en el circuito una resistencia en serie adicional $R_C = 0.10\ \Omega$, como se sugiere en la figura 26-38b. Sea P_0 la potencia entregada al motor de arranque en el circuito libre de corrosión, y P la potencia entregada al circuito con corrosión. Determine la razón P/P_0.

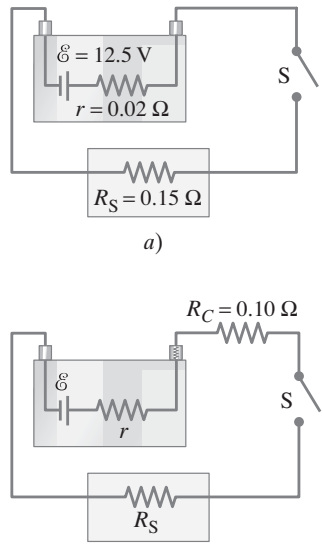


FIGURA 26–38
Problema 14.

15. (II) Una inspección cercana de un circuito eléctrico revela que un resistor de 480 Ω se soldó inadvertidamente en el lugar donde se necesita un resistor de 370 Ω. ¿Cómo se puede solucionar esto sin eliminar nada del circuito existente?

16. (II) Determine *a*) la resistencia equivalente del circuito que se ilustra en la figura 26-39 y *b*) el voltaje a través de cada resistor.

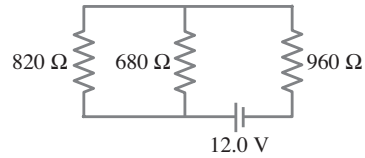


FIGURA 26–39
Problema 16.

17. (II) Una bombilla de 110 V y 75 W se conecta en paralelo con una bombilla de 110 V y 25 W. ¿Cuál es la resistencia total?

18. (II) *a*) Determine la resistencia equivalente de la "escalera" de resistores iguales de 125 Ω que se muestra en la figura 26-40. En otras palabras, ¿qué resistencia registraría un óhmetro si se conecta entre los puntos A y B? *b*) ¿Cuál es la corriente a través de cada uno de los tres resistores de la izquierda si se conecta una batería de 50.0 V entre los puntos A y B?

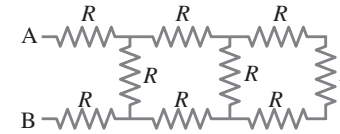


FIGURA 26–40
Problema 18.

19. (II) ¿Cuál es la resistencia total del circuito conectado a la batería de la figura 26-41?

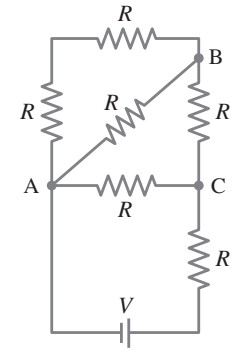


FIGURA 26–41
Problemas 19 y 20.

20. (II) Calcule la corriente a través de cada resistor en la figura 26-41 si en cada resistencia $R = 1.20\ \text{k}\Omega$ y $V = 12.0$ V. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos A y B?

21. (II) Las dos terminales de una fuente de voltaje con una fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna r se conectan a los dos lados de una resistencia de carga R. ¿Para qué valor de R se entregará la potencia máxima de la fuente a la carga?

22. (II) Dos resistores, cuando se conectan en serie a una línea de 110 V, usan un cuarto de la potencia que se utiliza cuando se conectan en paralelo. Si un resistor tiene 3.8 kΩ, ¿cuál es la resistencia del otro?

23. (III) Tres resistores iguales (R) se conectan a una batería como se indica en la figura 26-42. En términos cualitativos, ¿qué ocurre con *a*) la caída de voltaje a través de cada uno de estos resistores, *b*) la corriente que fluye a través de cada uno y *c*) el voltaje terminal de la batería, cuando se abre el interruptor S, después de estar cerrado durante largo tiempo? *d*) Si la fem de la batería es de 9.0 V, ¿cuál es su voltaje terminal cuando se cierra el interruptor, si la resistencia interna r es de 0.50 Ω y $R = 5.50\ \Omega$? *e*) ¿Cuál es el voltaje terminal cuando se abre el interruptor?

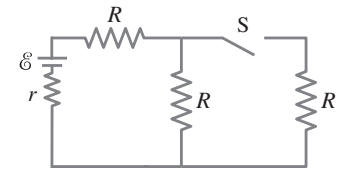


FIGURA 26–42
Problema 23.

24. (III) Un resistor de 2.8 kΩ y uno de 3.7 kΩ se conectan en paralelo; esta combinación se conecta en serie con un resistor de 1.8 kΩ. Si cada resistor está clasificado en $\frac{1}{2}$ W (máximo sin sobrecalentamiento), ¿cuál es el voltaje máximo que se puede aplicar a través de toda la red?

25. (III) Considere la red de resistores que se ilustra en la figura 26-43. Responda en términos cualitativos: *a*) ¿Qué ocurre con el voltaje a través de cada resistor cuando se cierra el interruptor S? *b*) ¿Qué ocurre con la corriente a través de cada uno cuando se cierra el interruptor? *c*) ¿Qué ocurre con la salida de potencia de la batería cuando se cierra el interruptor? *d*) Sea $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 125\ \Omega$ y $V = 22.0$ V. Determine la corriente a través de cada resistor antes y después de cerrar el interruptor. ¿Se confirman sus predicciones cualitativas?

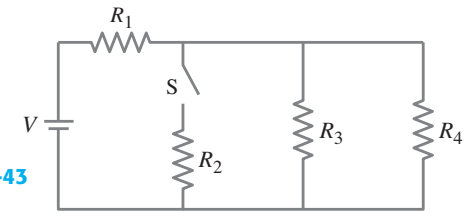


FIGURA 26–43
Problema 25.

26. (III) Se le pide diseñar un calentador con resistencia de alambre para calentar un volumen de gas encerrado. Para que el aparato funcione de manera adecuada, este calentador debe transferir calor al gas a una tasa muy constante. Mientras está en operación, la resistencia del calentador siempre estará cerca del valor $R = R_0$, pero puede fluctuar ligeramente haciendo que su resistencia varíe una pequeña cantidad ΔR ($\ll R_0$). Para mantener al calentador a potencia constante, usted diseña el circuito que se muestra en la figura 26-44, que incluye dos resistores, cada uno con resistencia r. Determine el valor para r de manera que la potencia del calentador permanezca constante incluso si su resistencia R fluctúa por una pequeña cantidad. [*Sugerencia:* Considere que si $\Delta R \ll R_0$, entonces $\Delta P \approx \Delta R \left.\frac{dP}{dR}\right|_{R=R_0}$.]

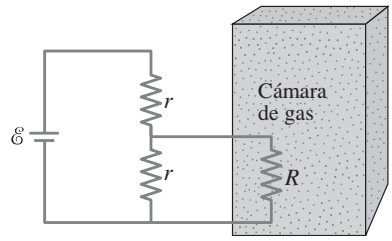


FIGURA 26–44
Problema 26.

26–3 Reglas de Kirchhoff

27. (I) Calcule la corriente en el circuito de la figura 26-45 y demuestre que la suma de todos los cambios de voltaje alrededor del circuito es cero.

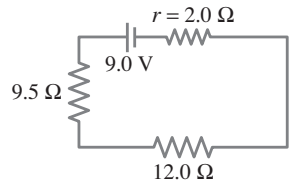


FIGURA 26–45
Problema 27.

28. (II) Determine el voltaje terminal de cada batería en la figura 26-46.

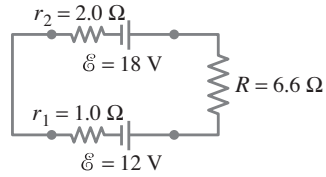


FIGURA 26–46
Problema 28.

29. (II) Para el circuito de la figura 26-47, determine la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*. Cada resistor tiene $R = 130\ \Omega$ y cada batería es de 1.5 V.

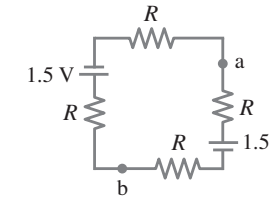


FIGURA 26–47
Problema 29.

30. (II) *a*) Una red de cinco resistores iguales R se conecta a una batería $\mathcal{E}$, como se indica en la figura 26-48. Determine la corriente I que fluye desde la batería. *b*) Use el valor determinado para I para encontrar el resistor R_{eq} que es equivalente a la red de cinco resistores.

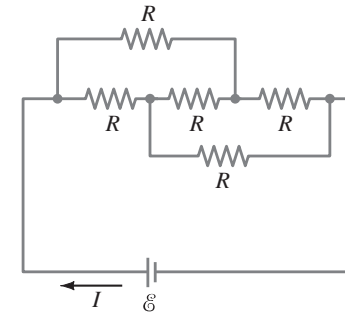


FIGURA 26–48
Problema 30.

31. (II) *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *d* en la figura 26-49 (similar a la figura 26-13, ejemplo 26-9), y *b*) cuál es el voltaje terminal de cada batería?

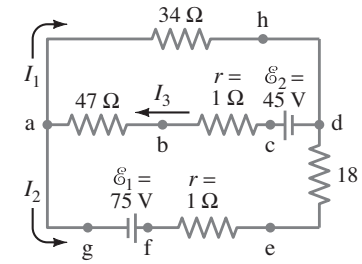


FIGURA 26–49
Problema 31.

32. (II) Calcule las corrientes en cada resistor de la figura 26-50.

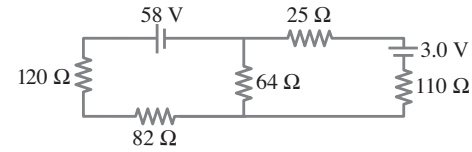


FIGURA 26–50 Problema 32.

33. (II) Determine las magnitudes y direcciones de las corrientes a través de R_1 y R_2 en la figura 26-51.

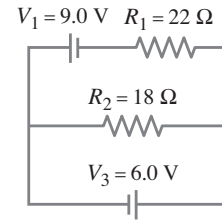


FIGURA 26–51
Problema 33.

34. (II) Determine las magnitudes y direcciones de las corrientes en cada resistor que se muestra en la figura 26-52. Las baterías tienen una fem de $\mathscr{E}_1 = 9.0$ V y $\mathscr{E}_2 = 12.0$ V, y los resistores tienen valores de $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 48\ \Omega$ y $R_3 = 35\ \Omega$. *a*) Ignore la resistencia interna de las baterías. *b*) Suponga que cada batería tiene resistencia interna $r = 1.0\ \Omega$.

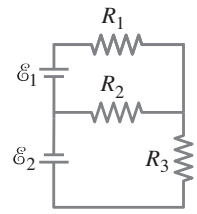


FIGURA 26–52
Problema 34.

35. (II) Un voltaje V se aplica a n resistores idénticos conectados en paralelo. Si en vez de ello, los resistores se conectan en serie con el voltaje aplicado, demuestre que la potencia transformada disminuye en un factor n^2.

36. (III) *a*) Determina las corrientes I_1, I_2 e I_3 en la figura 26-53. Suponga que la resistencia interna de cada batería es $r = 1.0\ \Omega$. *b*) ¿Cuál es el voltaje terminal de la batería de 6.0 V?

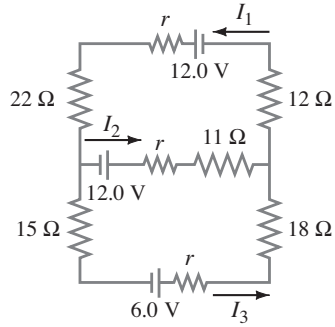


FIGURA 26–53
Problemas 36 y 37.

37. (III) ¿Cuál sería la corriente I_1 en la figura 26-53 si el resistor de 12 Ω se funde (resistencia = 0)? Sea $r = 1.0\ \Omega$.

38. (III) Determine la corriente a través de cada uno de los resistores en la figura 26-54.

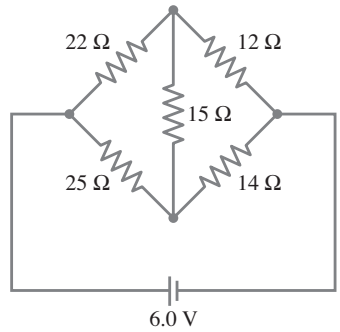


FIGURA 26–54
Problemas 38 y 39.

39. (III) Si el resistor de 25 Ω en la figura 26-54 se funde (resistencia = 0), ¿entonces cuál sería la corriente a través del resistor de 15 Ω?

40. (III) Doce resistores, cada uno con resistencia R, se conectan en las aristas de un cubo, como se muestra en la figura 26-55. Determine la resistencia equivalente *a*) entre los puntos *a* y *b*, los extremos de un lado; *b*) entre los puntos *a* y *c*, los extremos de una diagonal de cara; *c*) entre los puntos *a* y *d*, los extremos de la diagonal de volumen. [*Sugerencia:* Aplique una fem y determine las corrientes; use simetría en las uniones].

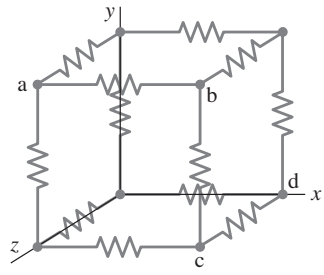


FIGURA 26–55
Problema 40.

41. (III) Determine la resistencia total en la figura 26-56 *a*) entre los puntos *a* y *c*, y *b*) entre los puntos *a* y *b*. Suponga que $R' \neq R$. [*Sugerencia:* Aplique una fem y determine las corrientes; use simetría en las uniones].

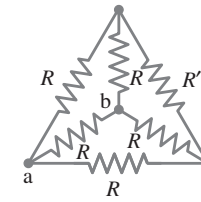


FIGURA 26–56
Problema 41.

26–4 Fem combinada, carga de una batería

42. (II) Suponga que dos baterías, con fem distintas de 2.00 y 3.00 V, se conectan como se indica en la figura 26-57. Si cada resistencia interna es $r = 0.450\ \Omega$ y $R = 4.00\ \Omega$, ¿cuál es el voltaje a través del resistor R?

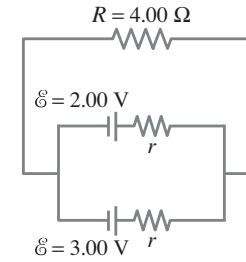


FIGURA 26–57
Problema 42.

26–5 Circuitos *RC*

43. (I) Estime el intervalo de resistencia necesaria para hacer un temporizador variable para unos limpiaparabrisas intermitentes típicos, si el capacitor utilizado está en el orden de 1 μF.

44. (II) En la figura 26-58 (la misma que la figura 26-17a), la resistencia total es de 15.0 kΩ y la fem de la batería es de 24.0 V. Si la constante de tiempo se mide en 24.0 μs, calcule *a*) la capacitancia total del circuito y *b*) el tiempo que tarda el voltaje a través del resistor en alcanzar 16.0 V después de que se cierra el interruptor.

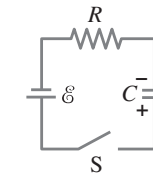


FIGURA 26–58
Problemas 44 y 46.

45. (II) Dos capacitores de 3.8 μF, dos resistores de 2.2 kΩ y una fuente de 12.0 V se conectan en serie. A partir del estado no cargado, ¿cuánto tarda la corriente en caer desde su valor inicial a 1.50 mA?

46. (II) ¿Cuánto tarda la energía almacenada en un capacitor de un circuito *RC* en serie (figura 26-58) en llegar al 75% de su valor máximo? Exprese la respuesta en términos de la constante de tiempo $\tau = RC$.

47. (II) Un capacitor de placas paralelas está lleno con un dieléctrico con constante dieléctrica K y alta resistividad ρ (conduce muy ligeramente). Este capacitor se puede modelar como una capacitancia pura C en paralelo con una resistencia R. Suponga que una batería coloca una carga $+Q$ y $-Q$ en las placas opuestas del capacitor y luego se desconecta. Demuestre que el capacitor se descarga con una constante de tiempo $\tau = K\epsilon_0\rho$ (conocida como *tiempo de relajación dieléctrica*). Evalúe τ si el dieléctrico es vidrio con $\rho = 1.0 \times 10^{12}\ \Omega\cdot$m y $K = 5.0$.

48. (II) El circuito *RC* de la figura 26-59 (el mismo de la figura 26-18a) tiene $R = 8.7$ kΩ y $C = 3.0$ *m*F. El capacitor está a un voltaje V_0 en $t = 0$ cuando se cierra el interruptor. ¿Cuánto tarda el capacitor en descargarse al 0.10% de su voltaje inicial?

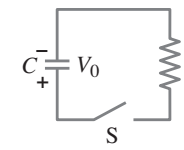


FIGURA 26–59
Problema 48.

49. (II) Considere el circuito que se muestra en la figura 26-60, donde todos los resistores tienen la misma resistencia R. En $t = 0$, con el capacitor C descargado, el interruptor se cierra. *a*) En $t = 0$, las tres corrientes se pueden determinar al analizar un circuito más sencillo, pero equivalente. Identifique este circuito más sencillo y úselo para encontrar los valores de I_1, I_2 e I_3 en $t = 0$. *b*) En $t = \infty$, las corrientes se pueden determinar al analizar un circuito equivalente más sencillo. Identifique este circuito más sencillo y utilícelo para encontrar los valores de I_1, I_2 e I_3 en $t = \infty$. *c*) En $t = \infty$, ¿cuál es la diferencia de potencial a través del capacitor?

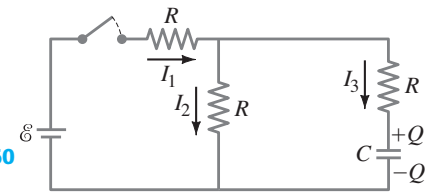


FIGURA 26–60
Problema 49.

50. (III) Determine la constante de tiempo para cargar el capacitor en el circuito de la figura 26-61. [*Sugerencia:* Use las reglas de Kirchhoff]. *b*) ¿Cuál es la máxima carga sobre el capacitor?

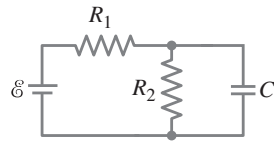


FIGURA 26–61
Problema 50.

51. (III) Dos resistores y dos capacitores no cargados se acomodan como se ilustra en la figura 26-62. Entonces se aplica una diferencia de potencial de 24 V a través de la combinación, como se indica. *a*) ¿Cuál es el potencial en el punto *a* con el interruptor S abierto? (Sea $V = 0$ en la terminal negativa de la fuente). *b*) ¿Cuál es el potencial en el punto *b* con el interruptor abierto? *c*) Cuando el interruptor se cierra, ¿cuál es el potencial final del punto *b*? *d*) ¿Cuánta carga fluye a través del interruptor S después de que se cierra?

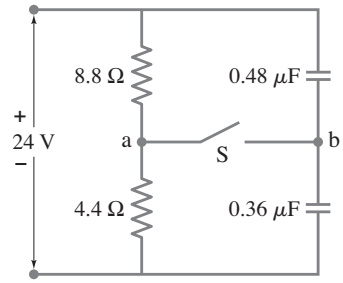


FIGURA 26–62
Problemas 51 y 52.

52. (III) Suponga que se cierra el interruptor S en la figura 26-62. ¿Cuál es la constante de tiempo (o constantes de tiempo) para cargar los capacitores después de aplicar 24 V?

*26–7 Amperímetros y voltímetros

***53.** (I) Un amperímetro tiene una sensibilidad de 35,000 Ω/V. ¿Qué corriente en el galvanómetro produce una desviación de escala completa?

***54.** (I) ¿Cuál es la resistencia de un voltímetro en la escala de 250 V, si la sensibilidad del medidor es de 35,000 Ω/V?

***55.** (II) Un galvanómetro tiene una sensibilidad de 45 kΩ/V y resistencia interna de 20.0 Ω. ¿Cómo podría convertir esto en *a*) un amperímetro que dé una lectura de escala completa de 2.0 A o *b*) un voltímetro que dé una lectura de escala completa de 1.00 V?

***56.** (II) Un galvanómetro tiene una resistencia interna de 32 Ω y desviación de escala completa para una corriente de 55 μA. Describa cómo usar este galvanómetro para hacer *a*) un amperímetro para registrar corrientes de hasta 25 A y *b*) un voltímetro para dar una desviación de escala completa de 250 V.

***57.** (II) Un medidor digital particular se basa en un módulo electrónico que tiene una resistencia interna de 100 MΩ y una sensibilidad de escala completa de 400 mV. Dos resistores conectados como se muestra en la figura 26-63 se pueden usar para cambiar el rango del voltaje. Suponga que $R_1 = 10$ MΩ. Determine el valor de R_2 que dará por resultado un voltímetro con un rango de escala completa de 40 V.

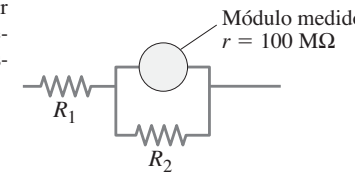


FIGURA 26–63
Problema 57.

***58.** (II) Un miliamperímetro da una lectura de escala completa de 25 mA. Consiste en un resistor de 0.20 Ω en paralelo con un galvanómetro de 33 Ω. ¿Cómo puede cambiar este amperímetro a un voltímetro que dé una lectura de escala completa de 25 V sin quitar el amperímetro? ¿Cuál será la sensibilidad (Ω/V) del voltímetro?

***59.** (II) Una batería de 45 V, con resistencia interna despreciable, se conecta a dos resistores en serie, de 44 kΩ y 27 kΩ. ¿Qué lectura dará un voltímetro, con 95 kΩ de resistencia interna, cuando se use para medir el voltaje a través de cada resistor? ¿Cuál es la inexactitud porcentual que se debe a la resistencia del medidor en cada caso?

***60.** (II) Un amperímetro cuya resistencia interna es de 53 Ω da una lectura de 5.25 mA cuando se conecta en un circuito que contiene una batería y dos resistores en serie cuyos valores son 650 Ω y 480 Ω. ¿Cuál es la corriente real cuando el amperímetro está ausente?

***61.** (II) Una batería con $\mathscr{E} = 12.0$ V y resistencia interna $r = 1.0$ Ω se conecta a dos resistores de 7.5 kΩ en serie. Un amperímetro con 0.50 Ω de resistencia interna mide la corriente, y al mismo tiempo un voltímetro con resistencia interna de 15 kΩ mide el voltaje a través de uno de los resistores de 9.0 kΩ en el circuito. ¿Qué lecturas dan el amperímetro y el voltímetro?

***62.** (II) Una batería de 12.0 V (suponga una resistencia interna = 0) se conecta a dos resistores en serie. Un voltímetro, cuya resistencia interna es de 18.0 kΩ, mide 5.5 V y 4.0 V, respectivamente, cuando se conecta a través de cada uno de los resistores. ¿Cuál es la resistencia de cada resistor?

***63.** (III) Dos resistores de 9.4 kΩ se colocan en serie y se conectan a una batería. Un voltímetro de 1000 Ω/V de sensibilidad está en la escala de 3.0 V y da una lectura de 2.3 V cuando se coloca a través de cualquiera de los resistores. ¿Cuál es la fem de la batería? (Ignore su resistencia interna).

***64.** (III) Cuando el resistor R de la figura 26-64 es de 35 Ω, el voltímetro de alta resistencia da una lectura de 9.7 V. Cuando R se sustituye por un resistor de 14.0 Ω, la lectura del voltímetro disminuye a 8.1 V. ¿Cuáles son la fem y la resistencia interna de la batería?

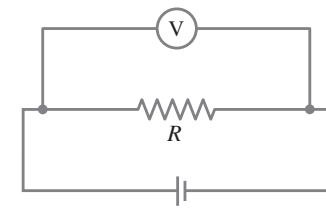


FIGURA 26–64
Problema 64.

Problemas generales

65. Suponga que desea aplicar una diferencia de potencial de 0.25 V entre dos puntos en el cuerpo humano. La resistencia es de aproximadamente 1800 Ω y usted sólo tiene una batería de 1.5 V. ¿Cómo puede conectar uno o más resistores para producir el voltaje deseado?

66. Una **bombilla de tres intensidades** es capaz de producir 50 Ω, 100 Ω o 150 W a 120 V. Tal bombilla contiene dos filamentos que se pueden conectar a los 120 V individualmente o en paralelo. *a*) Describa cómo se hacen las conexiones a los dos filamentos para dar cada una de las tres potencias. *b*) ¿Cuál debe ser la resistencia de cada filamento?

67. Suponga que quiere operar un aparato que está a 65 m de un tomacorriente eléctrico. Cada uno de los alambres que conectan su aparato con la fuente de 120 V tiene una resistencia por unidad de longitud de 0.0065 Ω/m. Si el aparato extrae 3.0 A, ¿cuál será la caída de voltaje a través de los alambres conectores y qué voltaje se aplicará al aparato?

68. Para el circuito que se ilustra en la figura 26-18a, demuestre que la disminución en energía almacenada en el capacitor, desde $t = 0$ hasta transcurrida una constante de tiempo, es igual a la energía disipada como calor en el resistor.

69. Un marcapasos cardiaco está diseñado para operar a 72 latidos/min con un capacitor de 6.5 μF en un circuito *RC* simple. ¿Qué valor de resistencia se debe usar si el marcapasos se activará (lo que implica la descarga del capacitor) cuando el voltaje alcance el 75% del máximo?

70. Suponga que la resistencia del cuerpo de una persona es de 950 Ω. *a*) ¿Qué corriente pasa a través del cuerpo cuando la persona accidentalmente se conecta a 110 V? *b*) Si existe una trayectoria alternativa hacia tierra cuya resistencia sea de 35 Ω, ¿qué corriente pasa a través de la persona? *c*) Si la fuente de voltaje puede producir cuando mucho 1.5 A, ¿cuánta corriente pasa a través de la persona en el caso *b*)?

71. Un **puente de Wheatstone** es un tipo de "circuito puente" que se usa para realizar mediciones de resistencia. La resistencia desconocida que se desea medir, R_x, se coloca en el circuito con las resistencias R_1, R_2 y R_3 conocidas con exactitud (figura 26-65). Una de éstas, R_3, es un resistor variable que se ajusta de manera que, cuando el interruptor se cierra momentáneamente, el amperímetro Ⓐ indica flujo cero de corriente. *a*) Determine R_x en términos de R_1, R_2 y R_3. *b*) Si un puente de Wheatstone se "equilibra" cuando $R_1 = 630\ \Omega$, $R_2 = 972\ \Omega$ y $R_3 = 78.6\ \Omega$, ¿cuál es el valor de la resistencia desconocida?

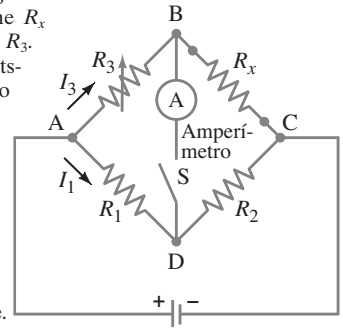


FIGURA 26–65
Problemas 71 y 72.
Puente de Wheatstone.

72. Un tramo de alambre de platino de longitud desconocida y 1.22 mm de diámetro se coloca como la resistencia desconocida en un puente de Wheatstone (véase el problema 71, figura 26-65). Los segmentos 1 y 2 tienen resistencias de 38.0 Ω y 29.2 Ω, respectivamente. El equilibrio se logra cuando R_3 es de 3.48 Ω. ¿Qué longitud tiene el alambre de platino?

73. La resistencia interna de una pila de mercurio de 1.35 V es de 0.030 Ω, mientras que la de una pila seca de 1.5 V es de 0.35 Ω. Explique por qué tres pilas de mercurio pueden activar de manera más efectiva un auxiliar auditivo de 2.5 W que requiere 4.0 V, de lo que pueden hacerlo tres pilas secas.

74. ¿Cuántos resistores de $\frac{1}{2}$ W cada uno de la misma resistencia, se deben usar para producir un resistor equivalente de 3.2 kΩ y 3.5 W? ¿Cuál es la resistencia de cada uno y cómo se deben conectar? No rebase $P = \frac{1}{2}$ W en cada resistor.

75. Una celda solar, cuadrada y que mide 3.0 cm de lado, tiene una salida de 350 mA a 0.80 V cuando se expone a luz solar plena. Se necesita un panel solar que entregue casi 1.3 A de corriente y una fem de 120 V a una carga externa. ¿Cuántas celdas se necesitarán para formar el panel? ¿Qué tan grande será el panel y cómo conectaría usted las celdas entre sí? ¿Cómo podría optimizar la salida del panel solar?

76. Una fuente de poder tiene un voltaje de salida fijo de 12.0 V, pero usted necesita $V_T = 3.0$ V de salida para un experimento. *a*) Con el divisor de voltaje que se ilustra en la figura 26-66, ¿cuál debería ser R_2 si R_1 es 14.5 Ω? *b*) ¿Cuál será el voltaje terminal V_T si se conecta una carga a la salida de 3.0 V, suponiendo que la carga tiene una resistencia de 7.0 Ω?

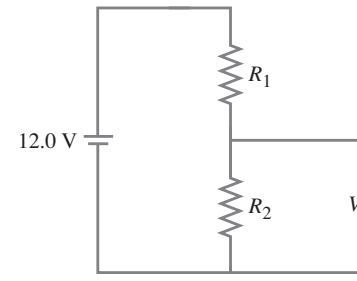


FIGURA 26–66
Problema 76.

77. La corriente a través del resistor de 4.0 kΩ en la figura 26-67 es de 3.10 mA. ¿Cuál es el voltaje terminal V_{ba} de la batería "desconocida"? (Existen dos respuestas. ¿Por qué?)

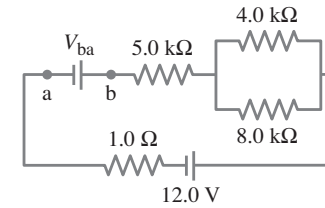


FIGURA 26–67
Problema 77.

78. Una batería produce 40.8 V cuando de ella se extraen 7.40 A, y 4.73 V cuando se extraen 2.80 A. ¿Cuáles son la fem y la resistencia interna de la batería?

79. En el circuito que se representa en la figura 26-68, el resistor de 33 Ω disipa 0.80 W. ¿Cuál es el voltaje de la batería?

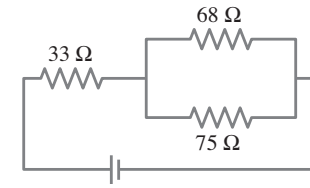


FIGURA 26–68
Problema 79.

80. La corriente a través del resistor de 20 Ω en la figura 26-69 no cambia si los dos interruptores S_1 y S_2 están ambos abiertos o cerrados. Use esta información para determinar el valor de la resistencia desconocida *R*.

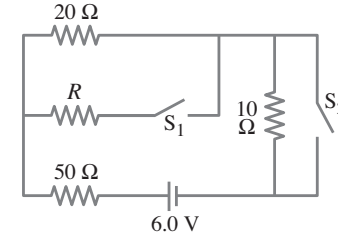


FIGURA 26–69
Problema 80.

*81. *a*) Un voltímetro y un amperímetro se conectan como se indica en la figura 26-70a para medir una resistencia R. Si V es la lectura del voltímetro e I es la lectura del amperímetro, el valor de R no será V/I (como en la ley de Ohm) porque parte de la corriente en realidad se va a través del voltímetro. Demuestre que el valor real de R está dado por

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{V} - \frac{1}{R_V},$$

donde R_V es la resistencia del voltímetro. Advierta que $R \approx V/I$ si $R_V \gg R$. *b*) Un voltímetro y un amperímetro también se pueden conectar como se muestra en la figura 26-70b para medir una resistencia R. Demuestre que, en este caso,

$$R = \frac{V}{I} - R_A,$$

donde V e I son las lecturas del voltímetro y el amperímetro, y R_A es la resistencia del amperímetro. Advierta que $R \approx V/I$ si $R_A \ll R$.

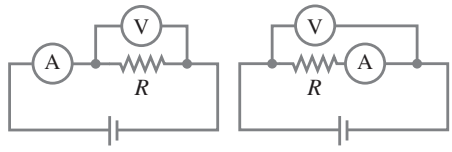


FIGURA 26–70 Problema 81.

82. *a*) ¿Cuál es la resistencia equivalente del circuito que se ilustra en la figura 26-71? *b*) ¿Cuál es la corriente en el resistor de 18 Ω? *c*) ¿Cuál es la corriente en el resistor de 12 Ω? *d*) ¿Cuál es la disipación de potencia en el resistor de 4.5 Ω?

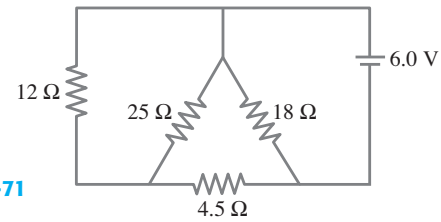


FIGURA 26–71
Problema 82.

83. Una bombilla de linterna con valor nominal de 2.0 W y 3.0 V opera mediante una batería de 9.0 V. Para iluminar la bombilla a este voltaje y potencia nominales, se conecta en serie un resistor R, como se indica en la figura 26-72. ¿Qué valor debe tener el resistor?

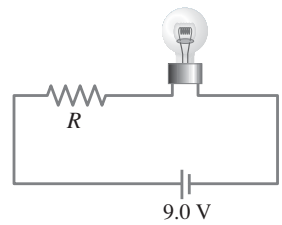


FIGURA 26–72
Problema 83.

84. Algunos interruptores reguladores de la intensidad de luz usan un resistor variable como se ilustra en la figura 26-73. La corredera se mueve desde la posición $x = 0$ hasta $x = 1$, y la resistencia en la posición de deslizamiento x es proporcional a x (la resistencia total es $R_{var} = 150\ \Omega$ en $x = 1$). ¿Cuál es la potencia gastada en la bombilla si *a*) $x = 1.00$, *b*) $x = 0.65$, *c*) $x = 0.35$?

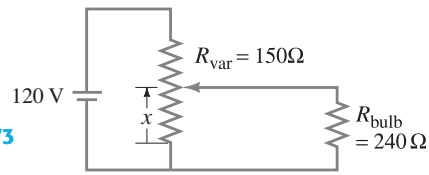


FIGURA 26–73
Problema 84.

85. Un **potenciómetro** es un dispositivo para medir con precisión diferencias de potencial o fem, empleando una técnica "nula". En el circuito potenciómetro simple que se muestra en la figura 26-74, R' representa la resistencia total del resistor de A a B (que podría ser un alambre largo y uniforme que sirve como "corredera"), mientras que R representa sólo la resistencia de la parte de A al contacto móvil en C. Cuando la fem desconocida que se va a medir, $\mathscr{E}_x$, se coloca en el circuito como se indica, el contacto móvil C se mueve hasta que el galvanómetro G da una lectura nula (es decir, cero) cuando se cierra el interruptor S. La resistencia entre A y C para esta situación se llama R_x. A continuación, una fem estándar $\mathscr{E}_s$, que se conoce con precisión, se inserta en el circuito en vez de $\mathscr{E}_x$ y de nuevo el contacto C se mueve hasta que deja de fluir carga a través del galvanómetro cuando se cierra el interruptor S. La resistencia entre A y C ahora se llama R_S. *a*) Demuestre que la fem desconocida está dada por

$$\mathscr{E}_x = \left(\frac{R_x}{R_S}\right)\mathscr{E}_S$$

donde R_x, R_S y $\mathscr{E}_x$ se conocen con precisión. Se supone que la batería operativa es nueva y que suministra un voltaje constante. *b*) Un potenciómetro de alambre deslizante es calibrado con una pila estándar de 1.0182 V cuando la corredera se encuentra en 33.6 cm de una longitud total de 100.0 cm. Para una fuente desconocida, la configuración es de 45.8 cm. ¿Cuál es la fem de la incógnita? *c*) El galvanómetro de un potenciómetro tiene una resistencia interna de 35 Ω y puede detectar una corriente tan pequeña como 0.012 mA. ¿Cuál es la incertidumbre mínima posible al medir un voltaje desconocido? *d*) Explique la ventaja de usar este método "nulo" de medición de fem.

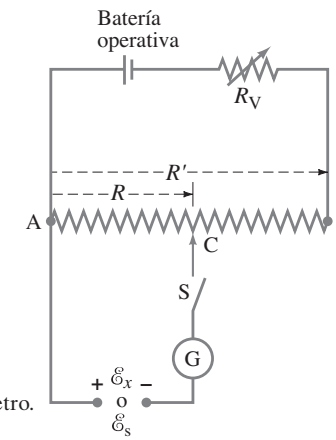


FIGURA 26–74
Circuito potenciómetro.
Problema 85.

86. Con frecuencia, los dispositivos electrónicos usan un circuito RC para proteger contra interrupciones de potencia, como se muestra en la figura 26-75. *a*) Si se supone que el circuito protector mantiene el suministro de voltaje al menos al 75% del voltaje completo durante 0.20 s, ¿cuál es la magnitud de la resistencia R necesaria? El capacitor es de 8.5 μF. Suponga que la "electrónica" vinculada extrae corriente despreciable. *b*) ¿Entre cuáles dos terminales se debe conectar el dispositivo, *a* y *b*, *b* y *c*, o *a* y *c*?

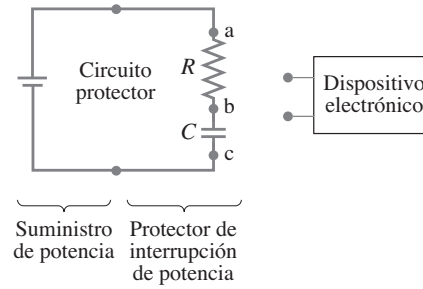


FIGURA 26–75
Problema 86.

87. El circuito que se aprecia en la figura 26-76 es un primitivo **convertidor digital a analógico (DAC)** de 4 bits. En este circuito, para representar cada dígito (2^n) de un número binario, un "1" tiene el interruptor n-ésimo cerrado mientras el cero ("0") tiene el interruptor abierto. Por ejemplo, 0010 se representa cerrando el interruptor $n = 1$, mientras que todos los demás interruptores están abiertos. Demuestre que el voltaje V a través del resistor de 1.0 Ω para los números binarios 0001, 0010, 0100 y 1010 (que representan 1, 2, 4, 10) sigue el patrón que se espera para un DAC de 4 bits.

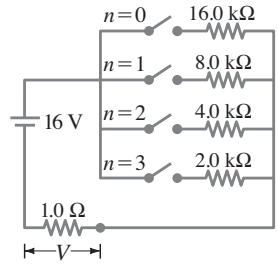


FIGURA 26–76
Problema 87.

88. Determine la corriente en cada resistor del circuito que se ilustra en la figura 26-77.

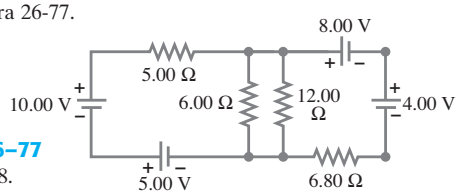


FIGURA 26–77
Problema 88.

89. En el circuito que se muestra en la figura 26-78, el interruptor S está cerrado en el instante $t = 0$. *a*) Después de que el capacitor se carga por completo, ¿cuál es el voltaje a través de él? ¿Cuánta carga hay en él? *b*) Ahora el interruptor S está abierto. ¿Cuánto tardará ahora el capacitor en descargarse hasta quedar sólo con el 3.0% de su carga inicial?

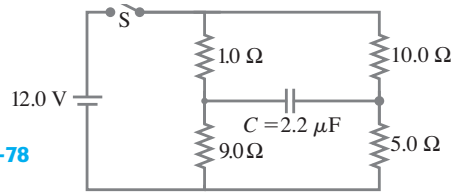


FIGURA 26–78
Problema 89.

90. La figura 26-79 ilustra el circuito para un **oscilador de diente de sierra** sencillo. En el instante $t = 0$, su interruptor S está cerrado. La bombilla de neón inicialmente tiene resistencia infinita hasta que el voltaje a través de ella alcanza 90.0 V, y luego comienza a conducir con muy poca resistencia (en esencia, cero). Deja de conducir (su resistencia se vuelve esencialmente infinita) cuando el voltaje cae a 65.0 V. *a*) ¿En qué tiempo t_1 la bombilla de neón alcanza 90.0 V y comienza a conducir? *b*) ¿En qué tiempo t_2 la bombilla alcanza 90.0 V por segunda vez y de nuevo se vuelve conductora? *c*) Dibuje la forma ondulatoria en diente de sierra entre $t = 0$ y $t = 0.70$ s.

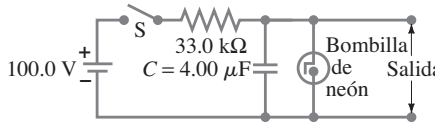


FIGURA 26–79
Problema 90.

***91.** Las mediciones realizadas en circuitos que contienen grandes resistencias en ocasiones son confusas. Considere un circuito impulsado por una batería $\mathscr{E} = 15.000$ V con un resistor de 10.00 MΩ en serie con un resistor desconocido R. Como se muestra en la figura 26-80, un voltímetro particular da una lectura $V_1 = 366$ mV cuando se conecta a través del resistor de 10.00 MΩ, y este medidor da una lectura $V_2 = 7.317$ V cuando se conecta a través de R. Determine el valor de R. [*Sugerencia:* Defina R_V como la resistencia interna del voltímetro].

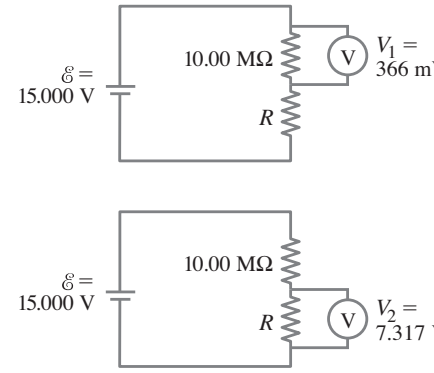


FIGURA 26–80 Problema 91.

***92.** Un voltímetro típico tiene una resistencia interna de 10 MΩ y sólo puede medir diferencias de voltaje de hasta varios cientos de volts. La figura 26-81 representa el diseño de una sonda para medir una diferencia de voltaje muy grande V utilizando un voltímetro. Si usted desea que el voltímetro dé una lectura de 50 V cuando $V = 50$ kV, ¿qué valor R debe usar en esta sonda?

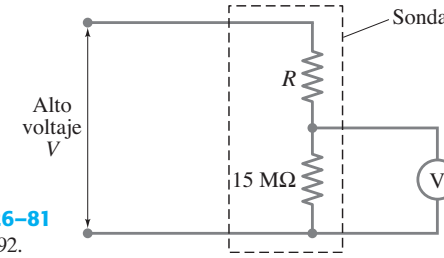


FIGURA 26–81
Problema 92.

*Problemas numéricos/por computadora

***93.** (II) Un circuito RC en serie contiene un resistor $R = 15$ kΩ, un capacitor $C = 0.30$ μF y una batería con una fem $\mathscr{E} = 9.0$ V. Al comenzar en $t = 0$, cuando la batería se conecta, determine la carga Q en el capacitor y la corriente I en el circuito de $t = 0$ a $t = 10.0$ ms (en intervalos de 0.1 ms). Elabore gráficas que muestren cómo la carga Q y la corriente I cambian con el tiempo dentro de ese intervalo de tiempo. A partir de las gráficas, determine el momento en el que la carga alcanza el 63% de su valor final, $C\mathscr{E}$, y la corriente cae al 37% de su valor inicial, $\mathscr{E}/R$.

Respuestas a los ejercicios

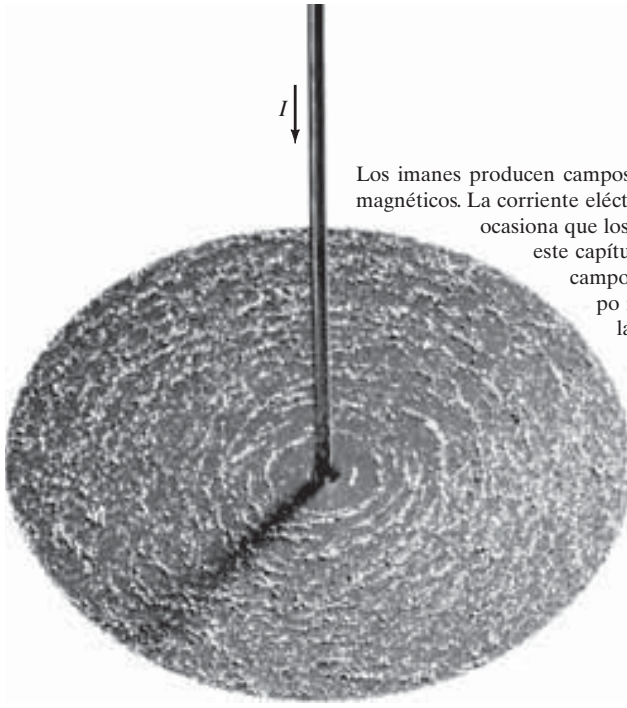
A: *a*) 1.14 A; *b*) 11.4 V; *c*) $P_R = 13.1$ Ω, $P_r = 0.65$ Ω.

B: 6 Ω y 25 Ω.

C: $41I_3 - 45 + 21I_2 - 80 = 0$.

D: 180 A; esta elevada corriente a través de las baterías podría hacer que se pongan muy calientes; ¡la potencia disipada en la batería débil sería $P = I^2r = (180\text{ A})^2(0.10\ \Omega) = 3200$ *W*!

E: *a*).



Los imanes producen campos magnéticos, pero también las corrientes eléctricas producen campos magnéticos. La corriente eléctrica que fluye en este alambre recto produce un campo magnético que ocasiona que los pequeños pedacitos de hierro (limaduras) se alineen con el campo. En este capítulo veremos cómo se define el campo magnético y que la dirección del campo magnético es a lo largo de las limaduras de hierro. Las líneas de campo magnético debido a la corriente eléctrica en este alambre largo tienen la forma de círculos alrededor del alambre.

También analizaremos cómo los campos magnéticos ejercen fuerzas sobre las corrientes eléctricas y sobre partículas cargadas; también examinaremos aplicaciones útiles de la interacción entre los campos magnéticos y las corrientes eléctricas y cargas en movimiento.

CAPÍTULO 27

Magnetismo

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
¿Cuál de los siguientes puede experimentar una fuerza cuando se le coloca en el campo magnético de un imán?

a) Una carga eléctrica en reposo.
b) Una carga eléctrica en movimiento.
c) Una corriente eléctrica en un alambre.
d) Otro imán.

La historia del magnetismo comenzó hace miles de años. En una región de Asia Menor, conocida como Magnesia, se encontraron rocas que podían atraerse entre sí. A estas rocas se les llamó imanes o "magnetos", en recuerdo del lugar donde se encontraron.

Sin embargo, no fue sino hasta el siglo XIX que se descubrió que el magnetismo y la electricidad están íntimamente relacionados. Se hizo un descubrimiento crucial: las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos (actualmente los llamamos "campos magnéticos"), al igual que los imanes. Una gran variedad de aparatos prácticos dependen del magnetismo, desde brújulas, motores, altavoces, la memoria de computadoras y los generadores eléctricos.

CONTENIDO

27–1 Imanes y campos magnéticos
27–2 Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos
27–3 Fuerza sobre una corriente eléctrica en un campo magnético; definición de $\vec{\mathbf{B}}$
27–4 Fuerza sobre una carga eléctrica que se desplaza en un campo magnético
27–5 Torca sobre una espira de corriente; momento dipolar magnético
*27–6 Aplicaciones: Motores, altavoces y galvanómetros
27–7 Descubrimiento y propiedades del electrón
*27–8 El efecto Hall
*27–9 Espectrómetro de masas

27–1 Imanes y campos magnéticos

Todos hemos observado cómo un imán atrae a un sujetapapeles de metal, clavos u otros objetos hechos de hierro (figura 27-1). Cualquier imán, ya sea que tenga forma de barra o de herradura (o cualquier otra), tiene dos extremos o caras llamadas **polos**, que es donde el efecto magnético es más fuerte. Si se suspende un imán de barra de un hilo delgado, se encuentra que uno de los polos del imán siempre apuntará hacia el norte. No se sabe con certeza cuándo se descubrió este hecho, pero se sabe que los chinos lo usaban como una herramienta de navegación desde el siglo XI y probablemente desde antes. Éste es el principio de la brújula.

FIGURA 27–1 Un imán de herradura atrae tachuelas y sujetapapeles de metal.

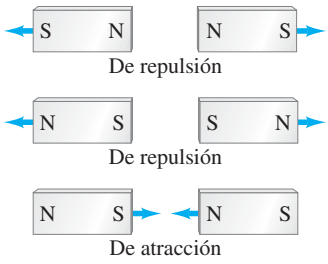
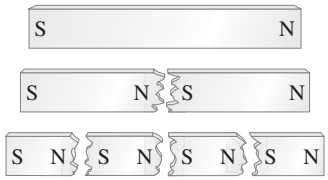


FIGURA 27–2 Polos iguales de un imán se repelen y polos opuestos se atraen. Las flechas indican la dirección de la fuerza.

FIGURA 27–3 Si se divide un imán a la mitad, no se obtendrá un polo norte y un polo sur aislados; de hecho, se producen dos nuevos imanes, cada uno con su polo norte y su polo sur.



⚠ CUIDADO

Los imanes no atraen a todos los metales

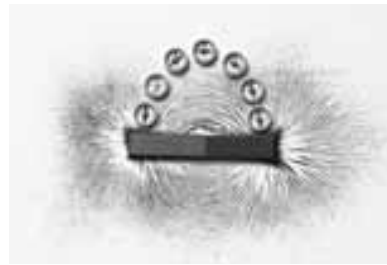
Una aguja de brújula es simplemente un imán de barra que está sostenida en su centro de gravedad de manera que pueda girar libremente. El polo de un imán suspendido libremente que apunta hacia el polo norte geográfico se llama el **polo norte** del imán. El otro polo apunta hacia el sur y se llama **polo sur**.

Un hecho conocido es que cuando se acercan dos imanes entre sí, cada uno ejerce una fuerza sobre el otro. La fuerza puede ser de atracción o de repulsión y se manifiesta aun si los imanes no se tocan. Cuando se acerca el polo norte de un imán al polo norte de otro imán, la fuerza entre ellos es de repulsión. De la misma manera, si se acercan los polos sur de dos imanes, la fuerza es de repulsión. Sin embargo, si se acerca el polo norte de un imán al polo sur de otro imán, la fuerza entre ellos es de atracción. Estos resultados se ilustran en la figura 27-2 y nos recuerdan a las fuerzas entre cargas eléctricas: polos iguales se repelen, y polos opuestos se atraen. *Sin embargo, no confunda los polos magnéticos con las cargas eléctricas*. Son muy diferentes. Una diferencia importante es que una carga eléctrica positiva o negativa puede aislarse fácilmente. Sin embargo, nunca se ha observado un polo magnético aislado. Si se corta un imán de barra a la mitad, no se obtiene un polo norte y un polo sur aislados. En vez de ello, se producen dos nuevos imanes, figura 27-3, cada uno con sus polos norte (N) y sur (S). Si seguimos cortando los imanes, se producirán más imanes, cada uno con su polo norte y su polo sur. Los físicos han buscado un solo polo magnético aislado (monopolo), pero nunca se ha observado un **monopolo magnético**.

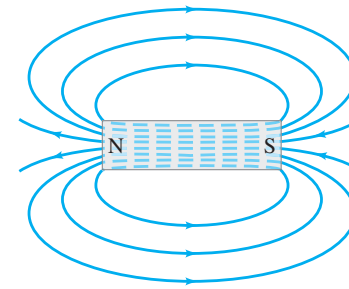
Sólo el hierro y unos cuantos materiales, como el cobalto, níquel, gadolinio y algunos de sus óxidos y aleaciones, presentan fuertes efectos magnéticos. Se dice que son materiales **ferromagnéticos** (de la palabra latina *ferrum* para el hierro). Otros materiales manifiestan efectos magnéticos muy leves, tanto que sólo pueden detectarse con delicados instrumentos de medición. Veremos con mayor detalle el ferromagnetismo en la sección 28-7.

En el capítulo 21 usamos el concepto de un campo eléctrico que rodea a una carga eléctrica. Del mismo modo, podemos considerar al **campo magnético** que rodea a un imán. La fuerza que un imán ejerce sobre otro puede describirse entonces como la interacción entre un imán y el campo magnético del otro. Así como dibujamos las líneas de campo eléctrico, también podemos dibujar **líneas de campo magnético**. Pueden dibujarse, al igual que las líneas de campo eléctrico, de manera que **1.** la dirección del campo magnético sea tangente a la línea de campo en cualquier punto, y **2.** el número de líneas por unidad de área sea proporcional a la intensidad de campo magnético.

FIGURA 27–4 *a*) Visualización de las líneas de campo magnético alrededor de un imán de barra, usando limaduras de hierro y agujas de brújula. El extremo izquierdo del imán de barra es su polo norte. El polo N de la aguja de una brújula cercana apunta alejándose del polo norte del imán de barra. *b*) Líneas de campo magnético de un imán de barra.



a)



b)

La *dirección* del campo magnético en un punto dado se define como la dirección en la que apuntaría el polo norte de la aguja de una brújula localizada en ese punto. (En la sección 27-3 se dará una definición más precisa). La figura 27-4a muestra cómo pequeñas limaduras de hierro (que se comportan como pequeños imanes) revelan las líneas de campo magnético alineándose igual que las agujas de las brújulas. El campo magnético determinado de esta manera para el campo que rodea al imán de barra se muestra en la figura 27-4b. Observe que, de acuerdo con nuestra definición, las líneas siempre salen del polo norte y entran al polo sur del imán (el polo norte de la aguja de una brújula magnética es atraído hacia el polo sur del imán).

Las líneas de campo continúan dentro del imán, como se ilustra en la figura 27-4b. De hecho, dada la ausencia de polos magnéticos aislados, las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas, a diferencia de las líneas de campo eléctrico que empiezan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

⚠ CUIDADO

Las líneas de campo magnético forman espiras cerradas, a diferencia de las líneas de campo eléctrico

El campo magnético terrestre

La figura 27-5 muestra el campo magnético terrestre. El patrón de las líneas de campo es como si hubiera un imán de barra imaginario dentro de la Tierra. Puesto que el polo norte (N) de la aguja de una brújula apunta hacia el norte, el polo sur magnético de la Tierra está en el polo norte geográfico de la Tierra, como se indica en la figura 27-5 con la letra S en el imán de barra imaginario dentro de la Tierra. Recuerde que el polo norte de un imán es atraído hacia el polo sur de otro imán. Sin embargo, al polo de la Tierra que está en el norte generalmente se le llama el "polo norte magnético" o "norte geomagnético", simplemente porque está en el norte. Del mismo modo, el polo magnético sur de la Tierra, que está cerca del polo geográfico sur, es el polo norte magnético (N). Los polos magnéticos de la Tierra no coinciden con los polos *geográficos*, que están sobre el eje de rotación de la Tierra. El polo norte magnético, por ejemplo, está en el ártico canadiense,[†] a unos 900 km del polo norte geográfico, o "norte verdadero." Esta diferencia debe tomarse en cuenta cuando usamos una brújula (figura 27-6). La diferencia angular entre el norte magnético y el norte (geográfico) verdadero se conoce como **declinación magnética**. En Estados Unidos varía entre 0° y cerca de 20°, dependiendo de la posición.

Advierta en la figura 27-5 que el campo magnético de la Tierra en muchos lugares no es tangente a la superficie terrestre. El ángulo que forma el campo magnético de la Tierra con la horizontal en un punto dado se conoce como **ángulo de inclinación**.

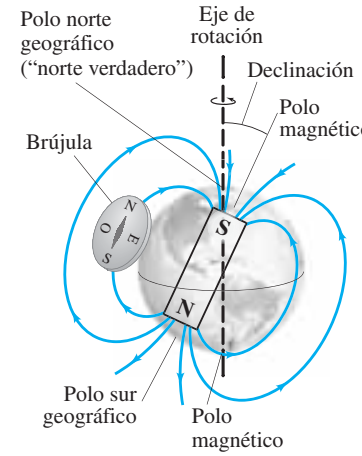


FIGURA 27–5 La Tierra se comporta como un enorme imán, pero sus polos magnéticos no coinciden con los polos geográficos, los cuales están sobre el eje de rotación de la Tierra.

EJERCICIO A ¿Dónde tiene una magnitud mayor el campo magnético de la Tierra, cerca de los polos o cerca del ecuador? [*Sugerencia:* Observe las líneas de campo en la figura 27-5].

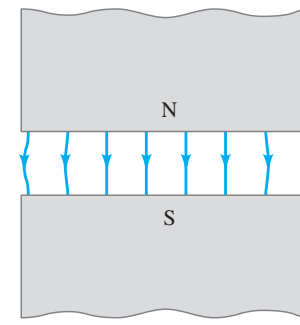
FÍSICA APLICADA
Uso de una brújula

FIGURA 27–6 Uso de un mapa y una brújula en el campo. Se alinea primero la aguja de la brújula de manera que apunte alejándose del norte verdadero (N) tantos grados como lo señale la declinación registrada en el mapa (15° para el lugar mostrado en este mapa topográfico de una parte de California). Luego se alinea el mapa con el norte verdadero, pero *no* con la aguja de la brújula, como se observa en la fotografía.

Campo magnético uniforme

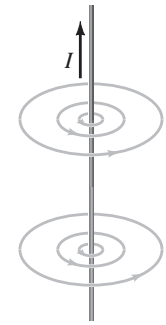
El campo magnético más simple es un campo magnético uniforme, es decir, aquel que no cambia de magnitud ni dirección de un punto a otro. No es fácil producir un campo magnético uniforme sobre una región grande. Sin embargo, el campo magnético entre dos piezas planas paralelas con polos magnéticos opuestos es aproximadamente uniforme si el área de las piezas es grande comparada con su separación, como se muestra en la figura 27-7. En los extremos, el campo se "pandea" un poco: las líneas de campo magnético no son exactamente paralelas ni uniformes. Las líneas paralelas espaciadas a intervalos regulares en la región central del hueco entre las piezas indican que el campo es uniforme en puntos alejados de los extremos, de manera similar a las líneas de campo eléctrico entre dos placas paralelas (figura 23-16).

FIGURA 27–7 El campo magnético entre dos polos magnéticos opuestos anchos es aproximadamente uniforme, excepto cerca de los bordes.



[†]Actualmente, el norte magnético se mueve varios kilómetros al año. El magnetismo en las rocas terrestres sugiere que los polos magnéticos de la Tierra no sólo se han movido de manera significativa durante las eras geológicas, sino que también han invertido su dirección unas 400 veces en los últimos 330 millones de años.

a)



b)

c)

FIGURA 27–8 *a*) Desviación de las agujas de varias brújulas cerca de un alambre con corriente, lo que revela la presencia y dirección de un campo magnético. *b*) Líneas de campo magnético alrededor de la corriente eléctrica en un alambre recto. *c*) Regla de la mano derecha para recordar la dirección del campo magnético: cuando el dedo pulgar apunta en la dirección de la corriente convencional, los dedos se enrollan naturalmente alrededor del alambre en la dirección del campo magnético. Véase también la fotografía al inicio del capítulo.

27–2 Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos

Durante el siglo XVIII, muchos científicos trataron de encontrar un vínculo entre la electricidad y el magnetismo. Se demostró que una carga eléctrica en reposo y un imán no tenían influencia uno sobre el otro. Sin embargo, en 1820, Hans Christian Oersted (1777-1851) descubrió que cuando se coloca una brújula cerca de un alambre, la aguja se desvía tan pronto como los extremos del alambre se conectan a las terminales de una batería de manera que el alambre conduzca una corriente eléctrica. Como hemos visto, la aguja de una brújula se desvía en presencia de un campo magnético. Así que el experimento de Oersted demostró que **una corriente eléctrica produce un campo magnético**. Había encontrado una conexión entre la electricidad y el magnetismo.

Cuando se coloca la aguja de una brújula cerca de una sección recta de un alambre que conduce corriente, experimenta una fuerza, lo que hace que la aguja se alinee de manera tangente a un círculo alrededor del alambre, como se muestra en la figura 27-8a. Así que las líneas de campo magnético producidas por una corriente en un alambre recto tienen la forma de círculos centrados en el alambre, figura 27-8 b. La dirección de estas líneas de campo la indica el polo norte de la brújula en la figura 27-8a. Hay una manera muy simple de recordar la dirección de las líneas de campo magnético en este caso. Se llama la **regla de la mano derecha**: tome el alambre con su mano derecha de manera que el pulgar apunte en la dirección de la corriente convencional (positiva); así sus dedos enrollarán alrededor del alambre en la dirección del campo magnético, figura 27-8c.

Las líneas de campo magnético debidas a una espira circular cerrada que conduce corriente pueden determinarse de manera similar usando una brújula. El resultado se aprecia en la figura 27-9. De nuevo puede usarse la regla de la mano derecha, como se indica en la figura 27-10. A diferencia del campo uniforme ilustrado en la figura 27-7, los campos magnéticos que se representan en las figuras 27-8 y 27-9 *no* son uniformes: los campos cambian de magnitud y dirección en distintos puntos.

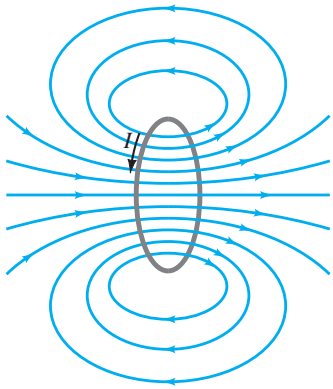
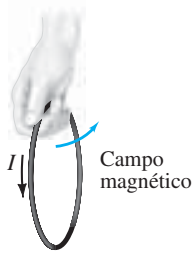


FIGURA 27–9 Líneas de campo magnético debidas a una espira circular con corriente.

Regla de la mano derecha 1: Dirección del campo magnético producido por una corriente eléctrica

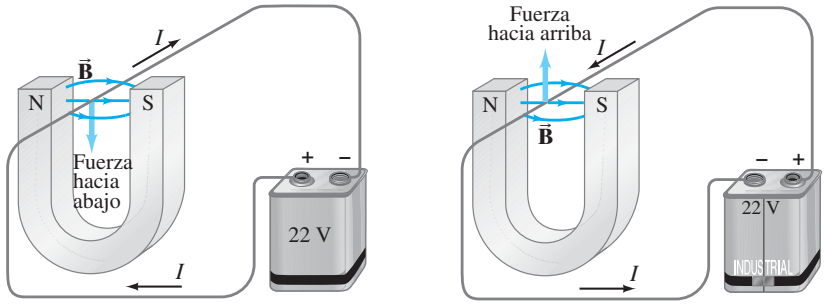
FIGURA 27–10 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético producido por una corriente.

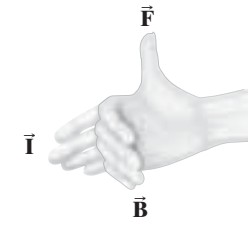


EJERCICIO B Un alambre recto conduce corriente directamente hacia usted. ¿En qué dirección rodean las líneas de campo magnético al alambre?

27–3 Fuerza sobre una corriente eléctrica en un campo magnético; definición de $\vec{B}$

En la sección 27-2 vimos que una corriente eléctrica ejerce una fuerza sobre un imán, como por ejemplo, la aguja de una brújula. De acuerdo con la tercera ley de Newton, esperaríamos que la situación opuesta fuera verdad, es decir, que *un imán ejerza una fuerza sobre un alambre con corriente.* De hecho, la evidencia experimental confirma este efecto y también fue Oersted quien lo observó por primera vez.





c) Regla de la mano derecha

FIGURA 27–11 *a*) Fuerza sobre una alambre portador de corriente inmerso en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$; *b*) lo mismo, pero con el sentido de la corriente invertido; *c*) regla de la mano derecha aplicada al inciso *b*).

Suponga que se coloca un alambre recto en el campo magnético entre los polos opuestos de un imán de herradura, como se indica en la figura 27-11. La experiencia revela que cuando se hace fluir una corriente en el alambre, se ejerce una fuerza sobre el alambre. Pero esta fuerza *no* se dirige a ninguno de los polos del imán. En vez de ello, la fuerza se ejerce de manera perpendicular a la dirección del campo magnético, hacia abajo en la figura 27-11a. Si se invierte el sentido de la corriente, entonces la fuerza es en el sentido opuesto, hacia arriba, como se muestra en la figura 27-11b. Los experimentos indican que *la dirección de la fuerza siempre es perpendicular a la dirección de la corriente y también perpendicular a la dirección del campo magnético* $\vec{\mathbf{B}}$.

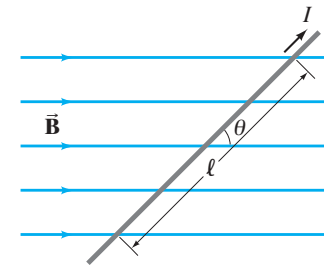
La dirección de la fuerza está dada por otra **regla de la mano derecha**, como se ilustra en la figura 27-11c. Oriente su mano derecha de manera que sus dedos extendidos apunten en la dirección de la corriente convencional I; ahora enrolle los dedos para que apunten en la dirección de las líneas del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. En estas condiciones su pulgar extendido apuntará en la dirección de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el alambre.

Regla de la mano derecha 2: Fuerza sobre una corriente ejercida por $\vec{\mathbf{B}}$

La regla de la mano derecha nos indica la dirección de la fuerza. Pero, ¿qué sucede con la magnitud de la fuerza sobre el alambre? En los experimentos se ha encontrado que la magnitud de la fuerza es directamente proporcional a la magnitud de la corriente I en el alambre, y a la longitud ℓ de alambre expuesto al campo magnético (el cual se considera uniforme). Más aún, si el campo magnético B aumenta, se encuentra que la fuerza se incrementa en la misma proporción. La fuerza también depende del ángulo θ entre la dirección de la corriente y el campo magnético (figura 27-12), siendo proporcional al seno de θ. Así que la fuerza sobre un alambre que conduce una corriente I con una longitud ℓ dentro de un campo magnético uniforme B está dada por

$$F \propto I\ell B \operatorname{sen}\theta.$$

FIGURA 27–12 Alambre con corriente en un campo magnético. La fuerza sobre el alambre en este caso entra a la hoja de papel.



Cuando la corriente es perpendicular a las líneas de campo ($\theta = 90°$), la fuerza es máxima. Cuando el alambre es paralelo a las líneas de campo magnético ($\theta = 0°$), no hay fuerza sobre el alambre.

Sin embargo, hasta ahora no hemos definido la intensidad de campo magnético de manera precisa. De hecho, es conveniente definir el campo magnético en términos de las proporciones anteriores, de manera que la constante de proporcionalidad sea exactamente igual a 1. Así, tenemos que

$$F = I\ell B \operatorname{sen}\theta. \qquad \textbf{(27–1)}$$

Si la dirección de la corriente es proporcional al campo $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 90°$), entonces la fuerza es

$$F_{\text{máx}} = I\ell B. \qquad [\text{corriente} \perp \vec{\mathbf{B}}] \qquad \textbf{(27–2)}$$

Si la corriente es paralela al campo ($\theta = 0°$), la fuerza sobre el alambre es cero. Así, se puede definir la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ usando la ecuación 27-2 como $B = F_{\text{máx}}/I\ell$, donde $F_{\text{máx}}$ es la magnitud de la fuerza sobre un segmento recto de alambre de longitud ℓ que conduce una corriente I cuando el alambre es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$.

Podemos expresar con una ecuación vectorial la relación entre la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre un alambre que conduce una corriente I y el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ que produce la fuerza. Para esto, recordemos que la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$ está dada por la regla de la mano derecha (figura 27-11c), y la magnitud está dada por la ecuación 27-1. Esto es congruente con la definición del vector de producto cruz (véase la sección 11-2), así que podemos escribir

$$\vec{\mathbf{F}} = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}; \qquad \textbf{(27–3)}$$

donde $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es un vector cuya magnitud es igual a la longitud del alambre y su dirección es a lo largo del alambre (el cual se supone recto), en la dirección de la corriente convencional (positiva).

La ecuación 27-3 se cumple sólo si el campo magnético es uniforme y el alambre es recto. Si $\vec{\mathbf{B}}$ no es uniforme, o si el alambre no forma el mismo ángulo θ con $\vec{\mathbf{B}}$, en todos los puntos, entonces la ecuación 27-3 se escribe como

$$d\vec{\mathbf{F}} = I\, d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}, \qquad \textbf{(27–4)}$$

donde $d\vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza infinitesimal que actúa sobre el elemento diferencial de longitud $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ del alambre. La fuerza total sobre el alambre se calcula integrando la expresión anterior.

La ecuación 27-4 puede servir (al igual que las ecuaciones 27-2 o 27-3) como una definición práctica de $\vec{\mathbf{B}}$. En la siguiente sección se discute una manera equivalente para definir $\vec{\mathbf{B}}$, en términos de la fuerza sobre una carga eléctrica en movimiento.

EJERCICIO C Un alambre que conduce una corriente I es perpendicular a un campo magnético de magnitud B. Suponiendo una longitud de alambre fija, ¿cuál de los siguientes cambios dará por resultado una disminución de la fuerza sobre el alambre en un factor de 2? *a*) Disminuir el ángulo de 90° a 45°; *b*) disminuir el ángulo de 90° a 30°; *c*) disminuir la corriente en el alambre a $I/2$; *d*) disminuir la magnitud del campo magnético a $B/2$; *e*) ninguna de las anteriores.

La unidad del SI para el campo magnético es el **tesla** (T). A partir de las ecuaciones 27-1, 2, 3 o 4, vemos que 1 T = 1N/A·m. Anteriormente, en vez del término tesla se empleaba la unidad de "weber por metro cuadrado" (1 Wb/m^2 = 1T). Otra unidad que se usa en ocasiones para especificar el campo magnético es una unidad en el sistema cgs: el **gauss** (G) = 10^{-4} T. Siempre debemos convertir un campo dado en gauss a teslas antes de efectuar operaciones con otras unidades del SI. Para tener una idea de estas unidades, advierta que el campo magnético de la Tierra en su superficie es aproximadamente $\frac{1}{2}$ G, o 0.5×10^{-4} T. Por otro lado, el campo cerca de un imán pequeño pegado en su refrigerador puede ser de 100 G (0.01T), mientras que electroimanes fuertes son capaces de producir campos del orden de 2 T, y los imanes superconductores producen hasta 10 T.

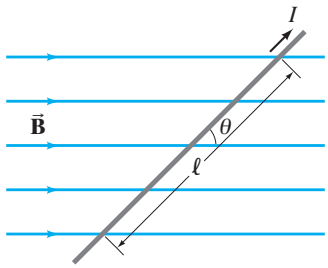


FIGURA 27–12 (Repetida para el ejemplo 27-1.) Un alambre que conduce corriente en presencia de un campo magnético. La fuerza sobre el alambre está dirigida hacia dentro de la página.

EJEMPLO 27–1 **Fuerza magnética sobre un alambre portador de corriente.** Un alambre de longitud ℓ = 12 cm conduce una corriente de 30 A entre los polos opuestos de un imán a un ángulo $\theta = 60°$ (figura 27-12). El campo magnético es aproximadamente uniforme y tiene una intensidad de 0.90 T. Ignore los efectos de borde más allá de los polos del imán. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que actúa sobre el alambre?

PLANTEAMIENTO Usamos la ecuación 27-1, $F = I\ell B \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN La fuerza F sobre los 12 cm de longitud del alambre dentro del campo magnético uniforme B es

$$F = I\ell B \operatorname{sen}\theta = (30\,\text{A})(0.12\,\text{m})(0.90\,\text{T})(0.866) = 2.8\,\text{N}.$$

EJERCICIO D Un cable de suministro de electricidad conduce 30 A y es perpendicular al campo magnético de la Tierra de 0.5×10^{-4} T. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre una sección de 100 m de longitud de este cable?

En un diagrama, cuando queremos representar una corriente eléctrica o un campo magnético que apunta hacia fuera de la página (hacia nosotros) o entrando a la página, usamos el símbolo ⊙ o $\times$, respectivamente. El símbolo ⊙ representa la punta de una flecha apuntando directamente hacia el lector, mientras que el símbolo $\times$ o ⊗ representan la cola de una flecha que se está alejando. (Véase las figuras 27-13 y 27-14).

EJEMPLO 27–2 **Medición de un campo magnético.** La figura 27-13 ilustra una espira rectangular de alambre que cuelga verticalmente. Un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ está dirigido horizontalmente, perpendicular al alambre, y apunta hacia fuera de la página en todos los puntos, como se representa con el símbolo ⊙. La magnitud del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ es aproximadamente uniforme sobre toda la porción horizontal del alambre *ab* (de longitud ℓ = 10.0 cm), la cual está cerca del centro del espacio de un gran imán que produce el campo. La parte superior de la espira de alambre está fuera del campo magnético. La espira cuelga de una balanza que mide la fuerza magnética hacia abajo (además de la fuerza gravitacional) de magnitud $F = 3.48 \times 10^{-2}$ N cuando el alambre conduce una corriente I = 0.245 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético B?

PLANTEAMIENTO Existen tres secciones rectas del alambre dentro de la región de campo magnético: una sección horizontal y dos secciones verticales. Aplicamos la ecuación 27-1 a cada sección y usamos la regla de la mano derecha.

SOLUCIÓN La fuerza magnética sobre la sección vertical izquierda del alambre apunta hacia la izquierda, mientras que la fuerza sobre la sección vertical derecha del alambre apunta hacia la derecha. Estas dos fuerzas son de igual magnitud, pero actúan en direcciones opuestas, por lo que su resultante es cero. Por lo tanto, la fuerza magnética neta sobre la espira corresponde a la fuerza sobre la sección *ab*, cuya longitud es $\ell = 0.100$ m. El ángulo θ entre $\vec{\mathbf{B}}$ y el alambre es $\theta = 90°$, así que sen $\theta = 1$. Por consiguiente, la ecuación 27-1 da

$$B = \frac{F}{I\ell} = \frac{3.48 \times 10^{-2}\,\text{N}}{(0.245\,\text{A})(0.100\,\text{m})} = 1.42\,\text{T}.$$

NOTA Esta técnica puede usarse para obtener una determinación precisa de la intensidad del campo magnético.

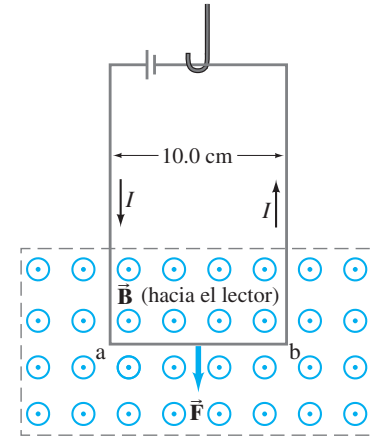


FIGURA 27–13 Medición de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. Ejemplo 27-2.

EJEMPLO 27–3 **Fuerza magnética sobre un alambre semicircular.** Un alambre rígido que conduce una corriente I, está formado por un semicírculo de radio R y dos secciones rectas, como se ilustra en la figura 27-14. El alambre está contenido en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}_0$. Note la elección de los ejes x y y. Ambas porciones rectas tienen una longitud ℓ dentro del campo magnético. Determine la fuerza neta sobre el alambre debido al campo magnético $\vec{\mathbf{B}}_0$.

PLANTEAMIENTO La fuerzas sobre los dos segmentos rectos tienen la misma magnitud ($= I\ell B_0$), pero tienen direcciones opuestas, así que se cancelan. Por lo tanto, la fuerza neta es aquella que actúa sobre la porción semicircular.

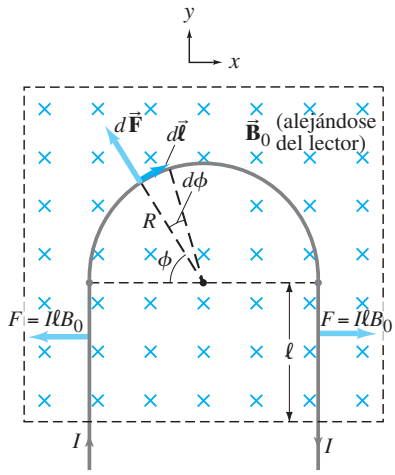


FIGURA 27–14 Ejemplo 27–3.

SOLUCIÓN Dividimos el semicírculo en tramos pequeños $d\ell = R\,d\phi$ como se indica en la figura 27-14, y usamos la ecuación 27-4, $d\vec{\mathbf{F}} = I\,d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$, para encontrar

$$dF = IB_0 R\,d\phi,$$

donde dF es la fuerza sobre el segmento de longitud $d\,\ell = R\,d\phi$, y el ángulo entre $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ y $\vec{\mathbf{B}}_0$ es 90° (así que sen $\theta = 1$ en el producto cruz). La componente x de la fuerza $d\vec{\mathbf{F}}$ sobre el segmento $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ mostrado en la figura, y la componente x de $d\vec{\mathbf{F}}$ sobre un elemento $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ localizado simétricamente sobre el otro lado del semicírculo, se cancelan entre sí. Así, la fuerza neta sobre el semicírculo completo no tiene componente x. Por consiguiente, debemos considerar sólo las componentes y, cada una igual a dF sen ϕ, de manera que la fuerza total tendrá una magnitud

$$F = \int_0^\pi dF \operatorname{sen}\phi = IB_0 R \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\,d\phi = -IB_0 R \cos\phi \Big|_0^\pi = 2IB_0 R,$$

dirigida verticalmente hacia arriba a lo largo del eje y, como se ilustra en la figura 27-14.

27–4 Fuerza sobre una carga eléctrica que se desplaza en un campo magnético

Hemos visto que un alambre que conduce corriente experimenta una fuerza cuando se encuentra dentro de un campo magnético. Puesto que la corriente en un alambre consiste en cargas eléctricas en movimiento, esperaríamos que partículas cargadas que se mueven libremente (no dentro de un alambre) también experimenten una fuerza cuando pasan a través de un campo magnético. De hecho, así ocurre.

A partir de lo que ya sabemos, podemos predecir la fuerza sobre una sola carga eléctrica en movimiento. Si en un punto determinado pasan N de tales partículas de carga q en un tiempo t, éstas constituyen una corriente $I = Nq/t$. Ahora consideremos que t es el tiempo en el que una carga q viaja una distancia ℓ en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$; así $\vec{\boldsymbol{\ell}} = \vec{\mathbf{v}}t$ donde $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad de la partícula. Por consiguiente, con base en la ecuación 27-3, la fuerza sobre estas N partículas es $\vec{\mathbf{F}} = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} = (Nq/t)(\vec{\mathbf{v}}t) \times \vec{\mathbf{B}} = Nq\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. De esta forma, la fuerza sobre *una* de las N partículas es

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}. \qquad \textbf{(27–5a)}$$

Este resultado básico e importante constituye una manera alternativa de definir el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$, en vez de la ecuación 27-4 o 27-3. La magnitud de la fuerza en la ecuación 27-5a es

$$F = qvB \operatorname{sen}\theta. \qquad \textbf{(27–5b)}$$

Esta ecuación da la magnitud de la fuerza que actúa sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en un punto donde el campo magnético tiene una magnitud B. El ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es θ. La fuerza es máxima cuando la partícula se mueve perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 90°$):

$$F_{\text{máx}} = qvB. \qquad [\vec{\mathbf{v}} \perp \vec{\mathbf{B}}]$$

La fuerza es *cero* si la partícula se desplaza en dirección *paralela* a las líneas de campo ($\theta = 0°$). La *dirección* de la fuerza es perpendicular al campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ y a la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ de la partícula. Está dada de nuevo por la **regla de la mano derecha** (como en cualquier producto cruz): oriente su mano derecha de manera que sus dedos extendidos apunten a lo largo de la dirección de la velocidad de la partícula ($\vec{\mathbf{v}}$), y cuando doble sus dedos, éstos deben apuntar en la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$. Así, su dedo pulgar apuntará en la dirección de la fuerza. Esto es verdad sólo para partículas cargadas *positivamente*, y será hacia "arriba" para la partícula cargada positivamente que se ilustra en la figura 27-15. Para partículas cargadas negativamente, la fuerza tiene exactamente la dirección opuesta, hacia "abajo" en la figura 27-15.

Regla de la mano derecha

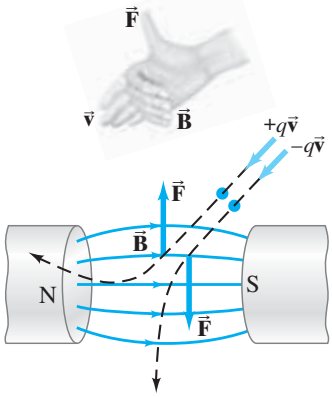


FIGURA 27–15 La fuerza sobre una partícula cargada debida a un campo magnético es perpendicular a la dirección del campo magnético.

Regla de la mano derecha 3: Fuerza sobre una carga en movimiento ejercida por un $\vec{\mathbf{B}}$

EJEMPLO CONCEPTUAL 27–4 **Carga negativa cerca de un imán.** Se coloca una carga negativa $-Q$ en reposo cerca de un imán. ¿Comenzará a moverse la carga? ¿Experimentará alguna fuerza? ¿Qué pasaría si la carga fuera positiva, $+Q$?

RESPUESTA La respuesta es *no* a todas las preguntas. Una carga en reposo tiene velocidad igual a cero. Los campos magnéticos ejercen una fuerza sólo sobre cargas eléctricas en movimiento (ecuaciones 27-5).

EJERCICIO E Regrese a la pregunta al inicio del capítulo, página 707, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizá usted la respondió de manera diferente la primera vez.

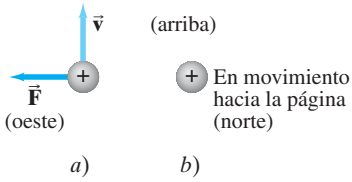
EJEMPLO 27–5 **Fuerza magnética sobre un protón.** Un campo magnético ejerce una fuerza de 8.0×10^{-14} N hacia el oeste sobre un protón que se desplaza verticalmente hacia arriba a una rapidez de 5.0×10^{6} m/s (figura 27-16a). Cuando el protón se desplaza horizontalmente hacia el norte, la fuerza sobre el protón es nula (figura 27-16b). Determine la magnitud y dirección del campo magnético en esa región. (La carga de un protón es $q = +e = 1.6 \times 10^{-19}$ C).

PLANTEAMIENTO Puesto que la fuerza sobre el protón es cero cuando se desplaza hacia el norte, el campo debe tener una dirección norte–sur. Para conseguir que la fuerza sea hacia el oeste cuando el protón se desplaza hacia arriba, la regla de la mano derecha nos dice que $\vec{\mathbf{B}}$ debe apuntar hacia el norte. (Su pulgar apunta hacia el oeste y los dedos extendidos de su mano derecha apuntan hacia arriba sólo cuando sus dedos se doblan hacia el norte). Podemos encontrar la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ usando la ecuación 27-5b.

SOLUCIÓN La ecuación 27-5b con $\theta = 90°$ da

$$B = \frac{F}{qv} = \frac{8.0 \times 10^{-14}\,\text{N}}{(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(5.0 \times 10^{6}\,\text{m/s})} = 0.10\,\text{T}.$$

FIGURA 27–16 Ejemplo 27–5.



EJEMPLO 27–6 **ESTIMACIÓN** **Fuerza magnética sobre iones durante un pulso nervioso.** Estime la fuerza magnética debida al campo magnético de la Tierra para iones que cruzan una membrana celular durante un potencial de acción. Considere que la rapidez de los iones es 10^{-2} m/s (sección 25-10).

PLANTEAMIENTO Con base en $F = qvB$, establecemos que el campo magnético de la Tierra es aproximadamente $B \approx 10^{-4}$ T y la carga $q \approx e \approx 10^{-19}$ C.

SOLUCIÓN $F \approx (10^{-19}\,\text{C})(10^{-2}\,\text{m/s})(10^{-4}\,\text{T}) = 10^{-25}\,\text{N}$.

NOTA Ésta es una fuerza extremadamente pequeña. Sin embargo, se piensa que animales migratorios detectan de alguna manera el campo magnético de la Tierra, y éste es un tema actual de investigación.

La trayectoria de una partícula cargada que se desplaza en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme es un círculo, como mostraremos a continuación. En la figura 27-17 el campo magnético está dirigido hacia *dentro* del papel, como se representa con ×s. Un electrón en el punto P se está moviendo hacia la derecha, y la fuerza sobre él en ese punto es hacia abajo, como se indica en la figura (use la regla de la mano derecha e invierta la dirección ya que se trata de una carga negativa). El electrón se desvía entonces hacia la parte inferior de la página. Un momento después, por ejemplo, cuando ha llegado al punto Q, la fuerza sigue siendo perpendicular a la velocidad, como se indica. Puesto que la velocidad siempre es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}$ no cambia (el electrón se mueve con rapidez constante). En el capítulo 5 vimos que si la fuerza sobre una partícula es siempre perpendicular a su velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, la partícula se mueve en un círculo y tiene una aceleración centrípeta $a = v^2/r$ (ecuación 5-1). Así que una partícula cargada se desplaza en una trayectoria circular con aceleración centrípeta constante en un campo magnético uniforme (véase el ejemplo 27-7). En la figura 27-7 el electrón se mueve en sentido horario. Una carga positiva en este campo experimentaría una fuerza en la dirección opuesta y se movería entonces en sentido antihorario.

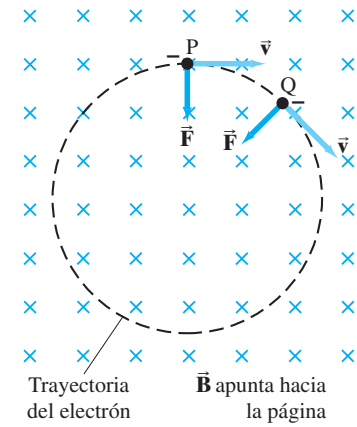


FIGURA 27–17 La fuerza ejercida por un campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento (en este caso, un electrón) produce una trayectoria circular.

EJEMPLO 27–7 **Trayectoria de electrones en un campo magnético uniforme.** Un electrón viaja a 2.0×10^7 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.010 T. Describa su trayectoria de manera cuantitativa.

PLANTEAMIENTO El electrón de mueve con una rapidez v en una trayectoria curva y, por lo tanto, debe tener una aceleración centrípeta $a = v^2/r$ (ecuación 5-1). Podemos calcular el radio de curvatura empleando la segunda ley de Newton. La fuerza está dada por la ecuación 27-5b con sen $\theta = 1$: $F = qvB$.

SOLUCIÓN Sustituimos F y a en la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F = ma$$
$$qvB = \frac{mv^2}{r}.$$

Despejamos r y encontramos que

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Dado $\vec{\mathbf{F}}$ que es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}$ no cambia. A partir de esta ecuación vemos que si $\vec{\mathbf{B}}$ constante, entonces r = constante, y la curva debe ser un círculo, como argumentamos arriba. Para encontrar r sustituimos los valores numéricos:

$$r = \frac{(9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg})(2.0 \times 10^7\,\text{m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(0.010\,\text{T})} = 1.1 \times 10^{-2}\,\text{m} = 1.1\,\text{cm}.$$

NOTA Véase la figura 27-18.

FIGURA 27–18 El anillo dentro del tubo de vidrio es el brillo de un haz de electrones que ioniza las moléculas de gas. Las bobinas están formadas por alambres que transportan una corriente y producen un campo magnético casi uniforme, lo que describe la trayectoria circular de partículas cargadas que se mueven en un campo magnético uniforme.

El tiempo T que requiere una carga q que se desplaza con rapidez constante v para completar una revolución circular dentro de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ ($\perp \vec{\mathbf{v}}$) es $T = 2\pi r/v$, donde $2\pi r$ es la circunferencia de su trayectoria circular. A partir del ejemplo 27-7, $r = mv/qB$, así que

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Dado que T es el periodo de rotación, la frecuencia de rotación es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}. \qquad \textbf{(27–6)}$$

A esta frecuencia se le llama generalmente **frecuencia ciclotrón** de una partícula en un campo porque es la frecuencia a la cual se giran las partículas en un ciclotrón (véase el problema 66).

EJEMPLO CONCEPTUAL 27–8 **Frenado de partículas cargadas** ¿Puede usarse un campo magnético para detener una sola partícula cargada, al igual que sucede cuando se emplea un campo eléctrico?

RESPUESTA No, puesto que la fuerza magnética *siempre* es perpendicular a la velocidad de la partícula y, por lo tanto, no cambia la magnitud de su velocidad. Esto también significa que el campo magnético no puede realizar trabajo sobre la partícula cargada y, por lo tanto, no modifica su energía cinética.

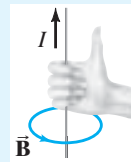
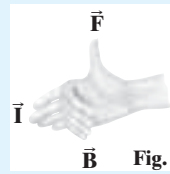
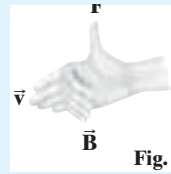
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Campos magnéticos

Los campos magnéticos tienen ciertas analogías con los campos eléctricos que estudiamos en el capítulo 21; sin embargo, existen varias diferencias importantes que vale la pena recordar:

1. La fuerza que experimenta una partícula cargada que se mueve en un campo magnético es *perpendicular* a la dirección del campo magnético (y perpendicular a la dirección de la velocidad de la partícula), mientras que la fuerza ejercida por un campo eléctrico es *paralela* a la dirección del campo (y no depende de la velocidad de la partícula).
2. La *regla de la mano derecha*, en sus diferentes expresiones, permite determinar las direcciones del campo magnético, y las direcciones de las fuerzas que éstos ejercen, así como las direcciones de corrientes eléctricas o las direcciones de la velocidad de partículas cargadas. Las reglas de la mano derecha (tabla 27-1) nos ayudan a lidiar con la naturaleza "perpendicular" de estas cantidades.

TABLA 27–1 Resumen de las reglas de la mano derecha (= RMD)

Situación física	Ejemplo	Cómo orientar la mano derecha	Resultado
1. Campo magnético producido por una corriente (RMD-1)	 Fig. 27–8c	Doble los dedos alrededor del alambre con el pulgar apuntando en la dirección de la corriente I	Los dedos apuntan en la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$
2. Fuerza sobre una corriente I debida a un campo magnético (RMD-2)	 Fig. 27–11c	Los dedos apuntan a lo largo de la corriente I, luego los dedos se doblan hacia la dirección del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$	El pulgar apunta en la dirección de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$
3. Fuerza sobre una carga $+q$ debida a un campo magnético (RMD-3)	 Fig. 27–15	Los dedos apuntan a lo largo de la dirección de la velocidad de la partícula $\vec{\mathbf{v}}$, y luego se doblan hacia la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$	El pulgar apunta en la dirección de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$

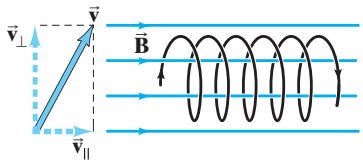


FIGURA 27–19 Ejemplo 27–9.

EJEMPLO CONCEPTUAL 27–9 **Una trayectoria helicoidal.** ¿Cuál es la trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético uniforme si su velocidad *no* es perpendicular al campo magnético?

RESPUESTA El vector de velocidad puede descomponerse en dos componentes, una paralela al campo y otra perpendicular a éste. La componente de la velocidad paralela a las líneas de campo no experimenta ninguna fuerza ($\theta = 0$), así que esta componente permanece constante. La componente de la velocidad perpendicular al campo produce un movimiento circular alrededor de las líneas de campo. Combinando estos dos movimientos se produce un movimiento helicoidal (en espiral) alrededor de las líneas de campo, como se aprecia en la figura 27-19.

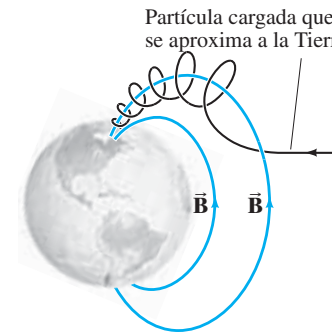
EJERCICIO F ¿Cuál es el signo de la carga de la figura 27-19? ¿Cómo modificaría el dibujo si el signo de la carga se invirtiera?

*Auroras boreales

FÍSICA APLICADA
Auroras boreales

Iones cargados provenientes del Sol se aproximan a la Tierra (el llamado "viento solar") y entran a la atmósfera terrestre principalmente cerca de los polos, y en ocasiones producen un fenómeno conocido como **auroras boreales** o "luces del norte" en las latitudes septentrionales. Para comprender por qué ocurre esto, considere el ejemplo 27-9 y la figura 27-20 (véase también la figura 27-19). En la figura 27-20, representamos un flujo de partículas cargadas que se acercan a la Tierra. La componente de la velocidad *perpendicular* al campo de cada partícula da lugar a una trayectoria circular alrededor de las líneas de campo, mientras que la componente de la velocidad *paralela* a las líneas de campo conduce a la partícula a lo largo de las líneas de campo hacia los polos. Conforme una partícula se aproxima al polo norte, el campo magnético se incrementa y el radio de la trayectoria helicoidal se hace más pequeño.

Una alta concentración de partículas cargadas ioniza el aire, y cuando los electrones se recombinan con los átomos, se emite luz (capítulo 37), lo que origina las auroras, las cuales son especialmente espectaculares durante los periodos de alta actividad de manchas solares, cuando el viento solar trae más partículas cargadas hacia la Tierra.



a)

b)

FIGURA 27–20 *a*) Diagrama que muestra a una partícula cargada negativamente que se aproxima a la Tierra y es "atrapada" por el campo magnético terrestre. Estas partículas siguen las líneas de campo hacia los polos, como se indica en la figura. *b*) Fotografía de una aurora boreal (en este caso en Kansas, lo cual es un raro acontecimiento).

Ecuación de Lorentz

Si una partícula con carga q se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en presencia de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ así como de un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, experimentará una fuerza

$$\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \qquad \textbf{(27–7)}$$

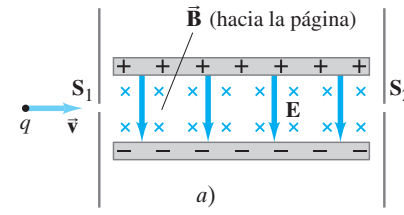
donde hemos usado las ecuaciones 21-3 y 27-5a. La ecuación 27-7 se conoce generalmente como la **ecuación de Lorentz** y se considera una de las ecuaciones básicas de la física.

EJEMPLO CONCEPTUAL 27–10 **Selector de velocidades o filtro; Campos $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$ cruzados.** Algunos aparatos electrónicos y ciertos experimentos requieren un haz de partículas cargadas, donde todas las partículas se muevan más o menos a la misma velocidad. Esto se logra usando tanto un campo eléctrico uniforme como un campo magnético uniforme, dispuestos de tal modo que sean perpendiculares entre sí. Como se muestra en la figura 27-21a, un haz de partículas con carga q pasa a través de la rendija S_1 y entra a una región donde $\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia la página y $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia abajo, desde la placa positiva hacia la placa negativa. Si las partículas entran con distintas velocidades, muestre cómo este aparato "selecciona" una velocidad en particular, y determine cuál es esa velocidad.

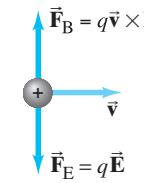
RESPUESTA Después de pasar por la rendija S_1, cada partícula está sometida a dos fuerzas, como se representa en la figura 27-21b. Si q es positiva, la fuerza magnética es hacia arriba y la fuerza eléctrica es hacia abajo (y viceversa si q es negativa.) Consideramos que la ranura de salida, S_2 está alineada directamente con S_1 y con la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. de las partículas. Dependiendo de la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}$, algunas partículas se desviarán hacia arriba y otras se desviarán hacia abajo. Las partículas que lograrán llegar a la rendija S_2 son aquellas para las cuales la fuerza neta es cero: $\Sigma F = qvB - qE = 0$. Así que este dispositivo selecciona partículas cuya velocidad es

$$v = \frac{E}{B}. \qquad \textbf{(27–8)}$$

Este resultado no depende del signo de la carga q.



a)



b)

FIGURA 27–21 Un selector de velocidades: si $v = E/B$, las partículas que pasan a través de S_1 logran llegar hasta S_2.

EJERCICIO G Una partícula que entra al selector de velocidades que se representa en la figura 27-21 golpea por debajo de la rendija de salida S_2. Esto significa que la partícula *a*) va más rápido que la velocidad seleccionada; *b*) va más lentamente que la velocidad seleccionada; *c*) la respuesta *a* es verdadera si $q > 0$, y *b* es verdad si $q < 0$; *d*) la respuesta *a* es verdadera si $q < 0$, y *b* es verdad si q es > 0.

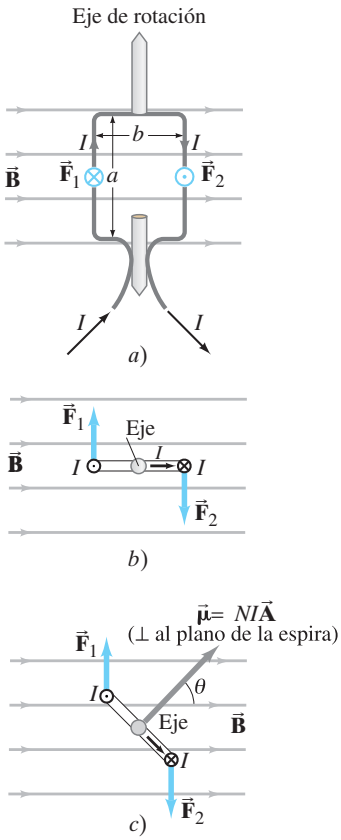


FIGURA 27–22 Cálculo de la torca sobre una espira de corriente en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. *a*) Plano de la espira paralelo a las líneas de campo $\vec{\mathbf{B}}$ *b*) vista superior; *c*) la espira forma un ángulo con respecto a $\vec{\mathbf{B}}$, reduciendo la torca puesto que el brazo de palanca disminuye.

27–5 Torca sobre una espira de corriente; momento dipolar magnético

Cuando fluye una corriente eléctrica en una espira cerrada de alambre localizado en un campo magnético externo, como se muestra en la figura 27-22, la fuerza magnética sobre la corriente puede generar una torca (o torque). Éste es el principio con el cual funcionan varios aparatos prácticos importantes, incluyendo motores, así como amperímetros y voltímetros analógicos, los cuales examinaremos en la siguiente sección. Existen otras áreas donde también es importante la interacción entre una corriente y un campo magnético, como en la física atómica.

Consideremos que fluye una corriente a través de la espira rectangular que se ilustra en la figura 27-22a, cuyo plano suponemos paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$. $\vec{\mathbf{B}}$ no ejerce ninguna fuerza o torca sobre los segmentos horizontales del alambre porque éstos son paralelos al campo y sen $\theta = 0$ en la ecuación 27-1. Sin embargo, el campo sí ejerce una fuerza sobre cada una de las secciones verticales del alambre, como se observa en la figura anexa, $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ (véase también la imagen enfocada desde arriba de la figura 27-22b). Por la regla de la mano derecha 2 (figura 27-11c o tabla 27-1), la dirección de la fuerza sobre la corriente que va hacia arriba en el segmento de la izquierda es opuesta a la fuerza de la misma magnitud $\vec{\mathbf{F}}_2$ que actúa sobre la corriente que va hacia abajo en el segmento de la derecha. Estas fuerzas dan lugar a una torca neta que tiende a hacer girar la espira alrededor de su eje vertical.

Calculemos la magnitud de esta torca. A partir de la ecuación 27-2 (corriente ($\perp \vec{\mathbf{B}}$), la fuerza es $F = IaB$, donde a es la longitud del segmento vertical de la espira. El brazo de palanca de cada una de las fuerzas es $b/2$, donde b es el ancho de la espira y el "eje" se encuentra en el punto medio. Las torcas producidas por $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ actúan en la misma dirección, así que la torca total es la suma de las dos torcas:

$$\tau = IaB\frac{b}{2} + IaB\frac{b}{2} = IabB = IAB,$$

donde $A = ab$ es el área de la bobina. Si la bobina consiste en N vueltas o espiras de alambre, la corriente es entonces NI, así que la torca es

$$\tau = NIAB.$$

Si la bobina forma un ángulo θ con el campo magnético, como se observa en la figura 27-22c, las fuerzas no cambian, pero cada brazo de palanca se reduce de $\frac{1}{2}b$ a $\frac{1}{2}b$ sen θ. Advierta que θ es el ángulo entre el vector $\vec{\mathbf{B}}$ y la perpendicular al plano de la bobina, figura 27-22c. Así que la torca es

$$\tau = NIAB \operatorname{sen}\theta. \qquad \textbf{(27–9)}$$

Esta ecuación, deducida en este caso para una bobina rectangular, es válida para una bobina plana de cualquier forma.

A la cantidad NIA se le llama **momento dipolar magnético** de la bobina y se considera un vector:

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = NI\vec{\mathbf{A}}, \qquad \textbf{(27–10)}$$

donde la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$ (y por lo tanto de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$) es *perpendicular* al plano de la bobina (la flecha gris en la figura 27-22c), lo cual es congruente con la regla de la mano derecha (hay que ahuecar la mano de manera que sus dedos se enrollen alrededor de la espira en la dirección del flujo de corriente; así, su pulgar apuntará en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ y de $\vec{\mathbf{A}}$). Con esta definición de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$, podemos escribir la ecuación 27-9 en forma vectorial como:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = NI\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

o

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}}, \qquad \textbf{(27–11)}$$

la cual nos da la magnitud y dirección correcta de la torca $\vec{\boldsymbol{\tau}}$.

La ecuación 27-11 tiene la misma forma que la ecuación 21-9b para un dipolo eléctrico (con momento dipolar eléctrico $\vec{\mathbf{p}}$) en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, la cual es $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$. Y así como un dipolo eléctrico tiene una energía potencial eléctrica dada por $U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$ cuando se encuentra en un campo eléctrico, esperaríamos una expresión similar para un dipolo magnético inmerso en un campo magnético. Para hacer girar la espira de corriente (figura 27-22) incrementando θ, debemos hacer trabajo en contra de la torca

debida al campo magnético. Así que la energía potencial depende del ángulo (véase el principio del trabajo y la energía para el movimiento rotacional, ecuación 10-22)

$$U = \int \tau \, d\theta = \int NIAB \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\mu B \cos\theta + C.$$

Si elegimos $U = 0$ para $\theta = \pi/2$, entonces la constante arbitraria C es igual a cero y la energía potencial es

$$U = -\mu B \cos\theta = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}, \qquad \textbf{(27–12)}$$

acomo se esperaba (compare este resultado con la ecuación 21-10). Los imanes de barra y las agujas de las brújulas, así como las espiras de corriente, pueden considerarse dipolos magnéticos. Advierta la impresionante similitud entre el campo producido por un imán de barra y el producido por una espira de corriente, figuras 27-4b y 27-9.

EJEMPLO 27–11 **Torca en una bobina.** Una bobina circular de alambre tiene un diámetro de 20.0 cm y contiene 10 espiras. La corriente en cada espira es de 3.00 A, y la bobina está localizada en un campo magnético externo de 2.00 T. Determine las torcas máxima y mínima ejercidas sobre la bobina por el campo.

PLANTEAMIENTO La ecuación 27-9 es válida para una bobina de cualquier forma, incluyendo bobinas circulares. La torca máxima y la mínima están determinadas por el ángulo θ que forma la bobina con el campo magnético.

SOLUCIÓN El área de una espira de la bobina es

$$A = \pi r^2 = \pi(0.100\,\text{m})^2 = 3.14 \times 10^{-2}\,\text{m}^2.$$

La torca máxima se presenta cuando el plano de la bobina es paralelo al campo magnético, así que $\theta = 90°$ en la figura 27-22c, y $\operatorname{sen}\theta = 1$ en la ecuación 27-9:

$$\tau = NIAB \operatorname{sen}\theta = (10)(3.00\,\text{A})(3.14 \times 10^{-2}\,\text{m}^2)(2.00\,\text{T})(1) = 1.88\,\text{N}\cdot\text{m}.$$

La torca mínima se presenta cuando $\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir, cuando $\theta = 0$, y entonces $\tau = 0$ a partir de la ecuación 27-9.

NOTA Si la bobina puede girar libremente, girará hacia una orientación tal que $\theta = 0$.

EJEMPLO 27–12 **Momento magnético de un átomo de hidrógeno.** Determine el momento dipolar magnético de un electrón orbitando a un protón en un átomo de hidrógeno en un instante dado, considerando (en el modelo de Bohr) que el electrón está en su estado fundamental con una órbita circular de radio 0.529×10^{-10} m. [Ésta es una idealización de la estructura atómica, pero a pesar de ello da un resultado exacto].

PLANTEAMIENTO Comenzamos considerando la fuerza electrostática sobre el electrón debido al protón igual a $ma = mv^2/r$, puesto que la aceleración del electrón es centrípeta.

SOLUCIÓN El electrón se mantiene en su órbita por la fuerza de coulomb, así que la segunda ley de Newton, $F = ma$, da

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r};$$

de manera que

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} = \sqrt{\frac{(8.99 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})^2}{(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.529 \times 10^{-10}\,\text{m})}} = 2.19 \times 10^6\,\text{m/s}.$$

Puesto que la corriente es la carga eléctrica que pasa por un punto dado por unidad de tiempo, el electrón en órbita equivale a una corriente

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r},$$

donde $T = 2\pi r/v$ es el tiempo requerido para completar una órbita. Como el área de la órbita es $A = \pi r^2$, el momento dipolar magnético es

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \tfrac{1}{2} evr$$
$$= \tfrac{1}{2}(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})(2.19 \times 10^6\,\text{m/s})(0.529 \times 10^{-10}\,\text{m}) = 9.27 \times 10^{-24}\,\text{A}\cdot\text{m}^2,$$

o 9.27×10^{-24} J/T.

*27–6 Aplicaciones: Motores, altavoces y galvanómetros

*Motores eléctricos

FÍSICA APLICADA
Motor de cd

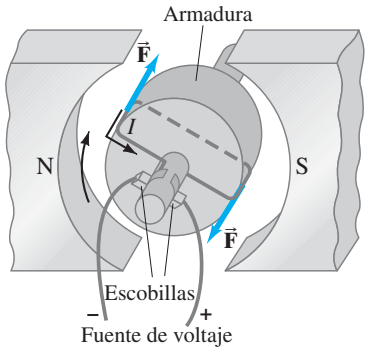


FIGURA 27–23 Diagrama de un motor simple de cd.

Un **motor eléctrico** transforma energía eléctrica en energía mecánica (rotacional). Un motor opera de acuerdo con el principio de que se ejerce una torca sobre una bobina de alambre que conduce una corriente y que se encuentra suspendida en el campo magnético de un imán, como se describió en la sección 27-5. Se monta la bobina en un cilindro grande llamado **rotor** o **armadura**, figura 27-23, de manera que la espira pueda girar continuamente en una dirección. De hecho, hay varias bobinas, aunque en la figura sólo se ilustra una. La armadura se monta en un árbol o eje. Cuando la armadura está en la posición mostrada en la figura 27-23, el campo magnético ejerce fuerzas sobre la corriente en la espira, como se indica en la figura (perpendicular a y a la dirección de la corriente). Sin embargo, cuando la bobina, la cual está girando en sentido horario en la figura 27-23, pasa más allá de la posición vertical, las fuerzas harían regresar a la bobina a la posición vertical si la corriente permaneciera igual. Sin embargo, si la corriente pudiera de alguna manera invertirse en el momento crítico, las fuerzas se invertirían, y la bobina continuaría girando en la misma dirección. Así, es necesario que la corriente sea alterna si el motor debe girar continuamente en una dirección. Esto se logra en un **motor de cd** empleando **conmutadores** y **escobillas**; como se indica en la figura 27-24, la corriente de entrada pasa a través de escobillas fijas que frotan sobre los conmutadores conductores montados en el eje del motor. A cada media revolución, cada conmutador cambia su conexión hacia la otra escobilla. Así, la corriente en la bobina se invierte cada media revolución como se requiere para tener una rotación continua.

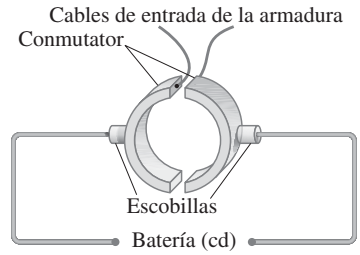


FIGURA 27–24 La combinación de un conmutador y escobillas en un motor de cd garantiza que la corriente sea alterna en la armadura para mantener una rotación continua. Los conmutadores están unidos al árbol del motor y giran con él, mientras que las escobillas permanecen fijas.

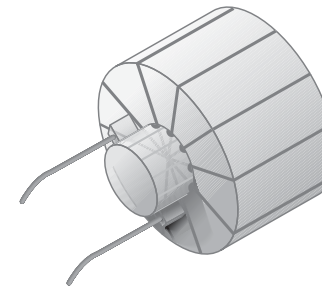


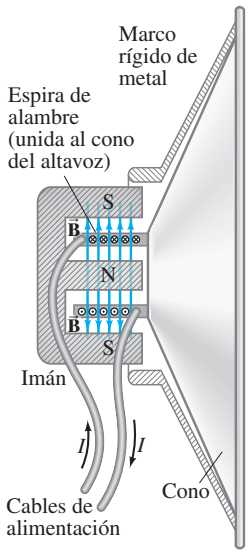
FIGURA 27–25 Motor con varios devanados.

La mayoría de los motores tienen varias bobinas, llamadas *devanados*, cada uno colocado en diferentes partes de la armadura, figura 27-25. La corriente fluye a través de cada bobina sólo durante una pequeña parte de una revolución, en el momento en que su orientación produce la torca máxima. De este modo, un motor produce una torca mucho más estable que la que se obtendría si se usara una sola bobina.

Un **motor ca**, con corriente ca de entrada, puede trabajar sin conmutadores ya que la corriente misma es alterna. Muchos motores usan bobinas de alambre para producir el campo magnético (electroimanes) en vez de un imán permanente. En realidad, el diseño de la mayoría de los motores es más complejo que el que describimos aquí; sin embargo, los principios generales son los mismos.

*Altavoces

FIGURA 27–26 Altavoz



Un **altavoz** también trabaja de acuerdo con el principio de que un imán ejerce una fuerza sobre un alambre que conduce corriente. La salida eléctrica de un aparato estéreo o un televisor está conectada a los cables que llegan al altavoz. Los cables están conectados internamente a una bobina de alambre, la cual, a la vez, está unida al cono del altavoz, figura 27-26. El cono del altavoz, por lo general, está hecho de cartón endurecido y está montado de manera que puede moverse hacia atrás y delante libremente. Un imán permanente está montado directamente en línea con la espira de alambre. Cuando una corriente alterna de una señal de audio fluye a través de la espira de alambre, la cual puede moverse libremente dentro del imán, la espira experimenta una fuerza

debida al campo magnético del imán. (La fuerza es hacia la derecha en el instante que se representa en la figura 27-26). Conforme la corriente se alterna a la frecuencia de la señal de audio, la bobina y el cono del altavoz al que está unida se mueven hacia atrás y delante a la misma frecuencia, produciendo compresiones y rarefacciones alternas del aire adyacente, así como ondas sonoras. De esta forma, un altavoz transforma la energía eléctrica en energía sonora, y las frecuencias e intensidades de los sonidos emitidos son una preproducción exacta de la señal eléctrica de entrada.

*Galvanómetro

El componente básico de los medidores analógicos (aquellos con una aguja y una escala), incluyendo amperímetros, voltímetros y óhmetros analógicos, es un galvanómetro. Ya hemos visto cómo están diseñados estos medidores (sección 26-7), y ahora podemos examinar cómo trabaja el elemento fundamental, es decir, un galvanómetro. Como se aprecia en la figura 27-27, un **galvanómetro** consiste en una bobina de alambre (con una aguja unida) suspendida en el campo magnético de un imán permanente. Cuando la corriente fluye a través de la espira de alambre, el campo magnético ejerce una torca sobre la espira, que se determina mediante la ecuación 27-9,

$$\tau = NIAB \operatorname{sen} \theta.$$

Esta torca se contrarresta con un resorte que ejerce una torca τ_s aproximadamente proporcional al ángulo f a través del cual ha girado (ley de Hooke). Esto es,

$$\tau_s = k\phi,$$

donde k es la constante de rigidez del resorte. La espira y la aguja que tiene unida giran hasta un ángulo en el cual las torcas se cancelan. Cuando al aguja está en equilibrio y en reposo, las torcas son iguales: $k\phi = NIAB \operatorname{sen} \theta$, o

$$\phi = \frac{NIAB \operatorname{sen} \theta}{k}.$$

El ángulo de desviación de la aguja, ϕ, es directamente proporcional a la corriente I que fluye en la bobina, pero también depende del ángulo θ que forma la espira con $\vec{\mathbf{B}}$. Para que el medidor sea útil, necesitamos que ϕ dependa sólo de la corriente I y que sea independiente de θ. Para resolver este problema, se usan imanes con polos curvos, y la bobina del galvanómetro se enrolla alrededor de un núcleo cilíndrico de hierro, como se ilustra en la figura 27-28. El hierro tiende a concentrar las líneas de campo magnético, de manera que $\vec{\mathbf{B}}$ siempre apunta paralelo al plano de la bobina en el alambre fuera del núcleo. De esta forma, la fuerza siempre es perpendicular al plano de la bobina, y la torca no variará con el ángulo. Así, ϕ será proporcional a I, como se requiere.

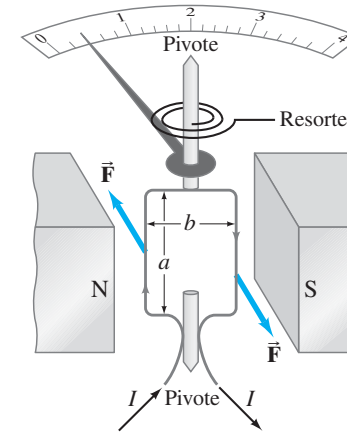
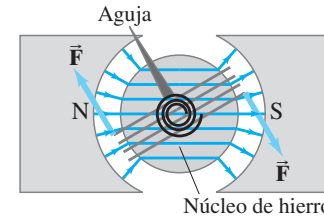


FIGURA 27–27 Galvanómetro.

FIGURA 27–28 Bobina de un galvanómetro enrollada en un núcleo de hierro.



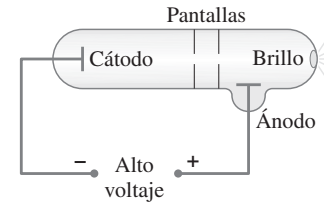
27–7 Descubrimiento y propiedades del electrón

En la actualidad, el electrón desempeña un papel básico en nuestra comprensión de la electricidad y el magnetismo. Sin embargo, su existencia no fue sugerida sino hasta la década de 1890. Presentamos esta discusión aquí porque los campos magnéticos fueron cruciales para la medición de sus propiedades.

Hacia fines del siglo XIX, se realizaban estudios sobre descargas eléctricas en gases rarificados. Un aparato, ilustrado en la figura 27-29, era un tubo de vidrio con electrodos y evacuado de manera que en su interior permanecía sólo una pequeña cantidad de gas. Cuando se aplicaba un voltaje muy alto a los electrodos, aparecía un espacio oscuro afuera del cátodo (el electrodo negativo) hacia el extremo opuesto del tubo, y ese extremo opuesto brillaba. Si se insertaban una o más pantallas con un pequeño orificio, como se muestra, el brillo se restringía a un pequeño punto en el extremo del tubo. Parecía como si algo emitido desde el cátodo viajara al extremo opuesto del tubo. A este "algo" se le llamó **rayos catódicos**.

Hubo mucha discusión en ese tiempo acerca de la naturaleza de los rayos catódicos. Algunos científicos pensaron que éstos podían parecerse a la luz. Pero la observación de que el punto brillante al final del tubo podía desviarse hacia un lado mediante un campo eléctrico o magnético sugirió que los rayos catódicos podían ser partículas cargadas; y la dirección de la desviación observada era congruente con una carga negativa. Más aún, si el tubo contenía ciertos tipos de gases rarificados, la trayectoria de los rayos catódicos se hacía visible mediante un ligero brillo.

FIGURA 27–29 Tubo de descarga. En algunos modelos, una de las pantallas es el ánodo (la placa positiva).



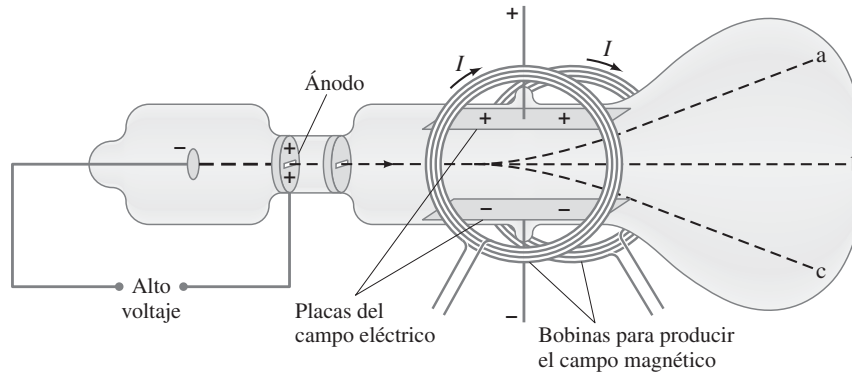


FIGURA 27–30 Rayos catódicos desviados mediante campos eléctricos y magnéticos.

En 1897 se hicieron estimaciones de la carga e de las (supuestas) partículas de los rayos catódicos, así como su cociente carga-masa e/m. Pero en ese año, J. J. Thomson (1856-1940) fue capaz de medir e/m directamente, usando el aparato mostrado en la figura 27-30. Los rayos catódicos son acelerados mediante un alto voltaje y luego pasan entre un par de placas paralelas dispuestas dentro del tubo. El voltaje aplicado a las placas produce un campo eléctrico, y un par de bobinas producen un campo magnético. Cuando sólo está presente el campo eléctrico, digamos, con la placa superior positiva, los rayos catódicos se desvían hacia arriba como en la trayectoria a de la figura 27-30. Si existe sólo un campo magnético, por ejemplo, hacia la página, los rayos se desvían hacia abajo a lo largo de la trayectoria c. Estas observaciones corresponden justo con lo que se esperaría para una partícula cargada negativamente. La fuerza de los rayos debida al campo magnético es $F = evB$, donde e es la carga y v es la velocidad de los rayos catódicos. En ausencia de un campo eléctrico, los rayos se desvían hacia una trayectoria curva, así que, a partir de $F = ma$,

$$evB = m\frac{v^2}{r},$$

y, por lo tanto,

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{Br}.$$

El radio de curvatura r puede medirse, así como B. La velocidad v se determina aplicando un campo eléctrico además del campo magnético. Se ajusta el campo eléctrico E de manera que los rayos catódicos no se desvíen y sigan la trayectoria b señalada en la figura 27-30. Esto es justo como el selector de velocidades del ejemplo 27-10, donde la fuerza debida al campo magnético, $F = eE$, se contrarresta con la fuerza debida al campo magnético, $F = evB$. Así, $eE = evB$ y $v = E/B$. Al combinar esto con la ecuación anterior tenemos

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{B^2 r}. \qquad \textbf{(27–13)}$$

Es posible medir todas las cantidades del lado derecho, así que a pesar de que e y m no puedan determinarse por separado, es factible determinar el cociente e/m. Actualmente el valor aceptado es $e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg. Pronto se llamó **electrones** a los rayos catódicos.

Vale la pena resaltar que el "descubrimiento" del electrón, como muchos otros descubrimientos en la ciencia, no es tan obvio como descubrir oro o petróleo. ¿Debería acreditarse el descubrimiento del electrón a la persona que vio por primera vez el brillo en el tubo? ¿O a quien usó por primera vez el término rayos catódicos? Quizás a ninguno de ellos, ya que no tenían una concepción del electrón como la que tenemos en la actualidad. De hecho, el crédito del descubrimiento se atribuye por lo general a Thomson, pero no porque él haya sido el primero en ver la luz en el tubo, sino porque creyó que este fenómeno se debía a pequeñas partículas cargadas negativamente e hizo mediciones cuidadosas de ellas. Más aún, él argumentó que estas partículas formaban parte del átomo, y que no eran iones ni átomos en sí, como muchos pensaban. De esta forma, Thomson desarrolló una teoría de la materia considerando los electrones. Su visión era cercana a la que se acepta en la actualidad y, por ello, el crédito del "descubrimiento" del electrón es para Thomson. Sin embargo, advierta que ni él ni ningún otro científico vieron en realidad al electrón mismo. Explicamos esto brevemente para ilustrar el hecho de que un descubrimiento científico no siempre es una cuestión claramente definida. De hecho, algunos filósofos de la ciencia piensan que la palabra "descubrimiento" generalmente es inapropiada, como en este caso.

Thomson creía que el electrón no era un átomo, sino que en realidad era un elemento constitutivo o una parte de un átomo. Poco después, al determinar la carga y la masa de los rayos catódicos se obtuvo evidencia convincente de que esto era así. Un alumno de Thomson, J. S. Townsend realizó la primera medición directa (aunque aproximada) de e en 1897. Pero fue el experimento más refinado de la **gota de aceite** de Robert A. Millikan (1868-1953) lo que dio un valor más preciso de la carga del electrón y mostró que la carga venía en cantidades discretas. En este experimento, se dejó que gotas pequeñas de aceite mineral con una carga eléctrica cayeran por acción de la gravedad entre dos placas paralelas, figura 27-31. El campo eléctrico E entre las placas se ajustó hasta que la gota quedó suspendida en al aire. El tirón descendente de la gravedad, mg, justo se canceló con la fuerza ascendente debida al campo eléctrico. Así, $qE = mg$, de manera que la carga $q = mg/E$. La masa de la gota se determinó midiendo su velocidad terminal en ausencia del campo eléctrico. Algunas veces la gota estaba cargada negativamente, y otras positivamente, lo que sugirió que la gota había adquirido o perdido electrones (mediante la fricción al salir del atomizador). Las meticulosas observaciones y análisis de Millikan presentaron evidencia convincente de que cualquier carga puede ser un múltiplo entero de una carga más pequeña, e, que fue atribuida al electrón, y cuyo valor se estableció como $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Este valor de e, combinado con las mediciones de e/m, nos da la masa del electrón: $(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})/(1.76 \times 10^{11}\ \text{C/kg}) = 9.1 \times 10^{-31}$ kg. Esta masa es menor que un milésimo de la masa del átomo más pequeño, y así se confirmó la idea de que el electrón es sólo una parte del átomo. Actualmente el valor aceptado para la masa del electrón es $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg.

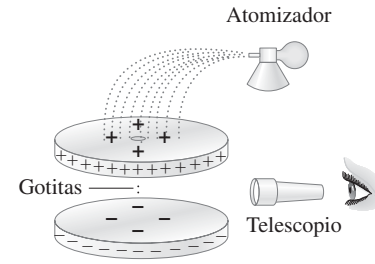


FIGURA 27–31 Experimento de Millikan de la gota de aceite.

Revisión del tubo de rayos catódicos

En el capítulo 23 se examinó el tubo de rayos catódicos (CRT, por las siglas de *cathode ray tube*), el cual puede servir como tubo de imágenes en televisores, osciloscopios y monitores de computadora. En ese capítulo, en la figura 23-22, vimos un dispositivo que usa placas eléctricas de desviación para manipular un haz de electrones. Sin embargo, muchos CRT utilizan el campo magnético producido por bobinas para manipular el haz de electrones y operan de manera similar a las bobinas mostradas en la figura 27-30.

27–8 El efecto Hall

Cuando un conductor que transporta corriente se mantiene fijo en un campo magnético, el campo ejerce una fuerza lateral sobre las cargas en movimiento dentro del conductor. Por ejemplo, si los electrones se mueven hacia la derecha en el conductor rectangular mostrado en la figura 27-32a, el campo magnético hacia la página ejercerá una fuerza descendente sobre los electrones $\vec{\mathbf{F}}_B = -e\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}}$, donde $\vec{\mathbf{v}}_d$ es la velocidad de arrastre (o de deriva) de los electrones (sección 25-8). De esta manera, los electrones tenderán a moverse más cerca de la cara D que de la cara C. Así se establecerá una diferencia de potencial entre las caras C y D del conductor. Esta diferencia de potencial se acumula hasta que el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}_H$ que produce ejerce una fuerza $e\vec{\mathbf{E}}_H$ sobre las cargas en movimiento, que es de la misma magnitud pero opuesta a la fuerza magnética. Este efecto se conoce como **efecto Hall** en honor a E. H. Hall, quien lo descubrió en 1879. La diferencia de potencial producida se llama **fem de Hall**.

El campo eléctrico que se produce por la separación de cargas se llama *campo de Hall*, $\vec{\mathbf{E}}_H$, y apunta hacia abajo en la figura 27-32a, como se indica. En equilibrio, la fuerza debida a este campo eléctrico se cancela con la fuerza magnética ev_dB, así que

$$eE_H = ev_d B.$$

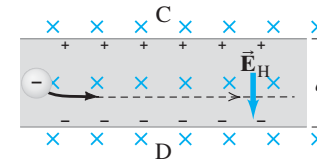
De aquí que $E_H = v_d B$. La fem de Hall es (suponiendo que el conductor es largo y delgado de manera que E_H es uniforme, ecuación 23-4b)

$$\mathcal{E}_H = E_H d = v_d B d, \qquad \textbf{(27–14)}$$

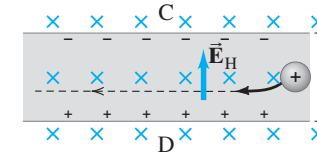
donde d es el espesor del conductor.

Una corriente de cargas negativas que se desplazan a la derecha es equivalente a una corriente de cargas positivas que se desplazan a la izquierda, al menos en la mayoría de los casos. Sin embargo, el efecto Hall permite distinguir entre estos dos casos. Como se observa en la figura 27-32b, las partículas positivas que se desplazan hacia la izquierda se desvían hacia abajo, de manera que la superficie inferior adquiere una carga positiva con respecto a la superficie superior. Ésta es la situación opuesta a aquella mostrada en el inciso *a*). De hecho, la dirección de la fem en el efecto Hall reveló primero que son las partículas negativas las que se mueven dentro de conductores metálicos.

FIGURA 27–32 El efecto Hall. *a*) Cargas negativas que se desplazan hacia la derecha como una corriente. *b*) Cargas positivas que se desplazan hacia la izquierda como una corriente.



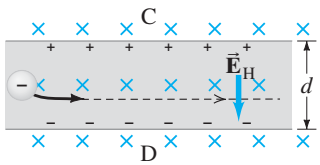
a)



b)

La magnitud de la fem de Hall es proporcional a la intensidad del campo magnético. Así, el efecto Hall permite medir la intensidad de campos magnéticos. El conductor, llamado *detector de Hall*, se calibra primero con un campo magnético conocido. Entonces, para una misma corriente, su fem de salida será una medida de B. Pueden construirse detectores de Hall muy pequeños que son prácticos y exactos.

El efecto Hall también permite medir la velocidad de arrastre de los portadores de carga cuando se conoce el campo magnético externo B. Tal medición también nos permite medir la densidad de portadores de carga en el material.



a)

FIGURA 27–32a (repetida aquí para el ejemplo 27-13).

EJEMPLO 27–13 **Velocidad de arrastre usando el efecto Hall.** Una larga banda de cobre de 1.8 cm de ancho y 1.0 mm de espesor se coloca en un campo magnético de 1.2 T, como en la figura 27-32a. Cuando pasa una corriente estable de 15 A a través de la banda, se mide una fem de Hall de 1.02 μV. Determine la velocidad de arrastre de los electrones y la densidad de los electrones libres (conductores) en el cobre (número por unidad de volumen).

PLANTEAMIENTO Con base en la ecuación 27-14 se obtiene la velocidad de arrastre, y la ecuación 25-13 del capítulo 25 nos permite encontrar la densidad de los electrones conductores.

SOLUCIÓN La velocidad de arrastre (ecuación 27-14) es

$$v_d = \frac{\mathscr{E}_H}{Bd} = \frac{1.02 \times 10^{-6}\,\text{V}}{(1.2\,\text{T})(1.8 \times 10^{-2}\,\text{m})} = 4.7 \times 10^{-5}\,\text{m/s}.$$

La densidad de portadores de carga n se obtiene de la ecuación 25-13, $I = nev_dA$, donde A es el área de la sección transversal a través de la cual fluye la corriente I. Así,

$$n = \frac{I}{ev_dA} = \frac{15\,\text{A}}{(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(4.7 \times 10^{-5}\,\text{m/s})(1.8 \times 10^{-2}\,\text{m})(1.0 \times 10^{-3}\,\text{m})}$$
$$= 11 \times 10^{28}\,\text{m}^{-3}.$$

Este valor de la densidad de los electrones libres en el cobre, $n = 11 \times 10^{28}$ por m^3, es el valor medido experimentalmente. Este valor representa *más* de un electrón libre por átomo, el cual, como vimos en el ejemplo 25-14, es $8.4 \times 10^{28}\,\text{m}^{-3}$.

*27–9 Espectrómetro de masas

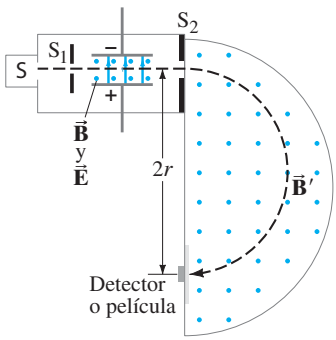
FÍSICA APLICADA
El espectrómetro de masas

Un **espectrómetro de masas** es un dispositivo para medir masas atómicas. Actualmente este aparato se emplea no sólo en física, sino también en química, geología y medicina, y a menudo para identificar átomos (y su concentración) en muestras dadas. Como se ilustra en la figura 27-33, se producen iones por calentamiento, o mediante una corriente eléctrica, en la fuente o muestra S. Generalmente, las partículas después de haber sido aceleradas, pasan a través de una rendija S_1 y entran a una región de campos eléctricos y magnéticos cruzados. Los iones siguen trayectorias rectas en ese "selector de velocidad" (como en el ejemplo 27-10) si la fuerza eléctrica qE se equilibra con la fuerza magnética qvB; esto es, si $qE = qvB$, o si $v = E/B$. De esta forma, sólo aquellos iones cuya velocidad es $v = E/B$ pasarán sin desviarse y emergerán a través de la rendija S_2. En la región semicircular después de S_2 sólo hay un campo magnético, B', así que los iones siguen una trayectoria circular. El radio de la trayectoria circular se encuentra a partir de las marcas que dejan los iones en una película (o en un detector) si B' se mantiene fijo; o r se mantiene fijo mediante la posición de un detector y B' se hace variar hasta que ocurra una detección. La segunda ley de Newton $\Sigma F = ma$, aplicada a iones que se mueven en círculo bajo la influencia sólo del campo magnético B', da $qvB' = mv^2/r$. Puesto que $v = E/B$, tenemos

$$m = \frac{qB'r}{v} = \frac{qBB'r}{E}.$$

Todas las cantidades del lado derecho se conocen o pueden medirse, de manera que podemos determinar m.

FIGURA 27–33 Espectrómetro de masas tipo *Bainbridge*. Los campos magnéticos B y B' apuntan hacia fuera del papel (lo que se indica mediante puntos), para iones positivos.



En el pasado, se midieron las masas de muchos átomos de esta manera. Cuando se usó una sustancia pura, se encontró algunas veces que dos o más marcas aparecían una cerca de la otra en la película. Por ejemplo, el neón produjo dos marcas cuyos radios correspondieron a átomos de 20 y 22 unidades de masa atómica (u). Se eliminaron las impurezas y se concluyó que debía haber dos tipos de neón con masas diferentes. A estas formas diferentes se les llamó **isótopos**. Poco después se encontró que muchos elementos son mezclas de isótopos, y la diferencia en masa se debe al número diferente de neutrones (como se verá en el capítulo 41).

EJEMPLO 27–14 **Espectrometría de masas.** Se encuentra que átomos de carbón de masa atómica 12.0 u están mezclados con otro elemento desconocido. En un espectrómetro de masas con B' fijo, el carbón describe una trayectoria con radio de 22.4 cm y la trayectoria de la partícula desconocida tiene un radio de 26.2 cm. ¿Cuál es el elemento desconocido? Suponga que los iones de ambos elementos tienen la misma carga.

PLANTEAMIENTO El carbón y los átomos desconocidos pasan a través de los mismos campos magnéticos y eléctricos. Por lo tanto, sus masas son proporcionales a los radios de sus respectivas trayectorias (véase la ecuación en la página anterior).

SOLUCIÓN Expresamos el cociente de las masas, usando la ecuación que se encuentra en la parte inferior de la página anterior:

$$\frac{m_x}{m_C} = \frac{qBB'r_x/E}{qBB'r_C/E} = \frac{26.2\text{ cm}}{22.4\text{ cm}} = 1.17.$$

Así, $m_x = 1.17 \times 12.0\text{ u} = 14.0\text{ u}$. El otro elemento probablemente es nitrógeno (véase la tabla periódica en la tercera de forros del libro).

NOTA El elemento desconocido también podría ser un isótopo como el carbono 14 $\left({}^{14}_{6}\text{C}\right)$. Véase el apéndice F. Para precisarlo se necesitaría un análisis físico o químico adicional.

Resumen

Un imán tiene dos **polos**, norte y sur. El polo norte es el extremo que apunta hacia el norte geográfico cuando el imán se suspende libremente. Los polos iguales de un imán se repelen entre sí, mientras que los polos diferentes se atraen.

Podemos considerar que alrededor de cada imán existe un **campo magnético**. La unidad del SI del campo magnético es el **tesla** (T).

Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos. Por ejemplo, las líneas de campo magnético debidas a una corriente en un conductor recto forman círculos alrededor del alambre, y el campo ejerce una fuerza sobre los imanes (o las corrientes eléctricas) cerca de él.

Un campo magnético ejerce una fuerza sobre una corriente eléctrica. La fuerza sobre una longitud infinitesimal de alambre $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ que conduce una corriente I en un campo magnético es $\vec{\mathbf{B}}$

$$d\vec{\mathbf{F}} = I\, d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}. \qquad \textbf{(27–4)}$$

Si el campo $\vec{\mathbf{B}}$ es uniforme sobre un tramo recto de un alambre $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ entonces la fuerza es

$$\vec{\mathbf{F}} = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad \textbf{(27–3)}$$

la cual tiene una magnitud

$$F = I\ell B \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(27–1)}$$

donde θ es el ángulo entre el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ y el alambre. La dirección de la fuerza es perpendicular al alambre y al campo magnético, y está dada por la regla de la mano derecha. Esta relación sirve como la definición del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$.

De la misma manera, un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ ejerce una fuerza sobre una carga θ que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ dada por

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}. \qquad \textbf{(27–5a)}$$

La magnitud de la fuerza es

$$F = qvB \operatorname{sen}\theta, \qquad \textbf{(27–5b)}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

Una partícula cargada que se desplaza de manera perpendicular a un campo magnético uniforme describe una trayectoria circular.

Si están presentes tanto campos eléctricos y magnéticos ($\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$) la fuerza sobre una carga q que se desplaza con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ es

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}. \qquad \textbf{(27–7)}$$

La torca sobre una espira de corriente en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}}, \qquad \textbf{(27–11)}$$

donde $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ es el **momento dipolar magnético** de la espira:

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = NI\vec{\mathbf{A}}. \qquad \textbf{(27–10)}$$

Aquí N es el número de vueltas de enrollado que conducen una corriente I en la espira y $\vec{\mathbf{A}}$ es un vector perpendicular al plano de la espira (use la regla de la mano derecha, con los dedos a lo largo de la corriente en la espira) y tiene una magnitud igual al área de la espira.

La medición del cociente carga-masa (e/m) del electrón se logró usando campos eléctricos y magnéticos. La carga e del electrón se midió por primera vez con el experimento de Millikan de la gota de aceite y luego pudo determinarse su masa a partir de la medición del valor del cociente e/m.

[*En el **efecto Hall**, las cargas que se mueven en un conductor localizado en un campo magnético se desplazan a un lado, lo que produce una fem entre los dos lados del conductor].

[*Un **espectrómetro de masas** usa campos eléctricos y magnéticos para medir la masa de iones].

Preguntas

1. La aguja de una brújula no siempre se equilibra en una posición paralela a la superficie de la Tierra, sino que un extremo puede apuntar hacia el piso. Explique por qué.

2. Dibuje las líneas de campo magnético alrededor de una sección recta de alambre que conduce una corriente horizontal hacia la izquierda.

3. Se sostiene un imán de herradura verticalmente con el polo norte a la izquierda y el polo sur a la derecha. Un alambre que pasa entre los polos, en el punto medio entre ellos, conduce una corriente directamente alejándose de usted. ¿Cuál es dirección de la fuerza sobre el alambre?

4. En la relación $\vec{\mathbf{F}} = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$, ¿qué pares de vectores($\vec{\mathbf{F}}, \vec{\boldsymbol{\ell}}, \vec{\mathbf{B}}$) están siempre a 90°? ¿Cuáles pueden estar a otro ángulo?

5. El campo magnético debido a una corriente en una casa puede afectar una brújula. Discuta el efecto en términos de corrientes y si éstas son ca o cd.

6. Si una partícula cargada negativamente entra a una región con un campo magnético uniforme, el cual es perpendicular a la velocidad de la partícula, ¿la energía cinética de la partícula aumenta, disminuye o permanece igual? Explique su respuesta. (Ignore la gravedad y considere que no hay campos eléctricos).

7. En la figura 27-34 se mueven partículas cargadas en la vecindad de un alambre portador de corriente. Para cada partícula cargada, la flecha indica la dirección de movimiento de la partícula, y el signo + o − indica el signo de la carga. Para cada partícula, indique la dirección de la fuerza magnética debida al campo magnético producido por el alambre.

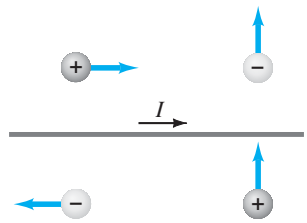


FIGURA 27–34
Pregunta 7.

8. Una partícula cargada positivamente en un campo magnético no uniforme sigue la trayectoria mostrada en la figura 27-35. Indique la dirección del campo magnético en todos los puntos del espacio, suponiendo que la trayectoria siempre está contenida en el plano de la página, e indique las magnitudes relativas del campo en cada región.

FIGURA 27–35
Pregunta 8.

9. El patrón de las líneas de campo magnético alrededor de un imán de barra es similar al de las líneas de campo eléctrico alrededor de un dipolo eléctrico. A partir de este hecho, prediga cómo cambiará el campo magnético con la distancia *a*) cerca de uno de los polos de un imán de barra muy largo, y *b*) lejos del imán como un todo.

10. Explique por qué un imán fuerte que se mantiene cerca de la pantalla de un televisor con cinescopio ocasiona que la imagen se distorsione. Además, explique por qué la imagen en ocasiones se vuelve completamente negra cuando el campo es muy intenso. [Pero no corra el riesgo de dañar su televisor tratando de hacer esto].

11. Describa la trayectoria de una partícula cargada negativamente en el selector de velocidades de la figura 27-21 si su rapidez es mayor que E/B. ¿Cuál es su trayectoria si $v < E/B$? ¿Habría alguna diferencia si la partícula tuviera carga positiva?

12. ¿Podría usted poner en movimiento un electrón que se encuentra inicialmente en reposo utilizando un campo magnético? ¿Y si utiliza un campo eléctrico? Explique.

13. Una partícula cargada se desplaza en un círculo bajo la influencia de un campo magnético uniforme. Si se enciende un campo eléctrico que apunte en la misma dirección que el campo magnético, describa la trayectoria que seguirá la partícula cargada.

14. La idea detrás del **bombeo electromagnético** es la fuerza que existe sobre una partícula en un campo magnético. Se usa para bombear fluidos metálicos (como el sodio) y para bombear la sangre en máquinas para corazones artificiales. La figura 27-36 presenta el diseño básico. Se aplica un campo eléctrico de manera perpendicular a un vaso sanguíneo y perpendicular a un campo magnético. Explique cuál es la causa del movimiento de los iones. ¿Los iones positivos y negativos experimentarán una fuerza en la misma dirección?

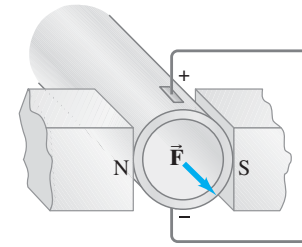


FIGURA 27–36
Bombeo electromagnético en un vaso sanguíneo.
Pregunta 14.

15. Se dirige un haz de electrones hacia un alambre horizontal que conduce una corriente de izquierda a derecha (figura 27-37). ¿En qué dirección se desvía el haz?

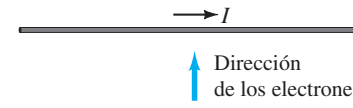


FIGURA 27–37
Pregunta 15.

16. Una partícula cargada se mueve en línea recta a través de una región particular del espacio. ¿Podría haber un campo magnético diferente de cero en esa región? Si es así, indique dos situaciones posibles.

17. Si una partícula cargada en movimiento se desvía de manera lateral en cierta región del espacio, ¿podemos concluir a ciencia cierta que $\vec{\mathbf{B}} \neq 0$ en esa región? Explique.

18. ¿Cómo podría usted saber si electrones que se mueven en una cierta región del espacio están siendo desviados por un campo eléctrico o por un campo magnético (o por ambos)?

19. ¿Cómo podría construir una brújula sin usar hierro u otro material ferromagnético?

20. Describa cómo se podría determinar el momento dipolar magnético de un imán de barra o de la aguja de una brújula.

21. ¿En qué posiciones (si es que existen) una espira de corriente localizada en un campo magnético uniforme estará *a*) en equilibrio estable y *b*) en equilibrio inestable?

*** 22.** Se inserta una pieza rectangular de material semiconductor en un campo magnético y se conecta una batería a sus extremos como se ilustra en la figura 27-38. Cuando se coloca un voltímetro de precisión entre los extremos *a* y *b*, se encuentra que el punto *a* está a un potencial mayor que el punto *b*. ¿Cuál es el signo de los portadores de carga en este material semiconductor?

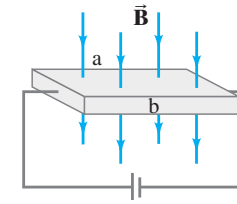


FIGURA 27–38
Pregunta 22.

*** 23.** Dos iones tienen la misma masa, pero uno está ligeramente ionizado mientras que el otro está ionizado al doble. ¿Cómo diferirán sus posiciones en la película del espectrómetro de masas de la figura 27-33?

Problemas

27–3 Fuerzas sobre corrientes eléctricas en un campo magnético

1. (I) *a*) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre un alambre recto que conduce una corriente de 9.40 A de manera perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.90 T? *b*) ¿Cuál sería el resultado si el ángulo entre el alambre y el campo fuera de 35.0°?

2. (I) Calcule la magnitud de la fuerza magnética sobre un alambre de 240 m de longitud tendido entre dos torres y que conduce una corriente de 150 A. El campo magnético de la Tierra es de 5.0×10^{-5} T y forma un ángulo de 68° con el alambre.

3. (I) Un alambre horizontal de 1.6 m de longitud conduce una corriente de 4.5 A hacia el sur. En esa región de la superficie de la Tierra, el ángulo de inclinación del campo magnético terrestre es de 41° con respecto al alambre. Estime la magnitud de la fuerza magnética sobre el alambre debido al campo magnético de la Tierra que tiene un valor de 5.5×10^{-5} T en esa región.

4. (II) Se encuentra que la fuerza magnética por unidad de longitud sobre un alambre es sólo el 25% de su valor máximo posible. Esboce una relación entre el alambre y el campo si la fuerza hubiera sido un máximo, y esboce una relación en el caso presente, calculando el ángulo entre el alambre y el campo magnético.

5. (II) La fuerza sobre un alambre tiene un valor máximo de 7.50×10^{-2} N cuando se le coloca entre los polos opuestos de un imán. La corriente fluye de manera horizontal hacia la derecha y el campo magnético es vertical. Se observa que el alambre "salta" hacia el observador cuando se enciende la corriente. *a*) ¿Qué polaridad tiene el polo magnético superior? *b*) Si la superficie de los polos magnéticos tiene un diámetro de 10.0 cm, estime la corriente en el alambre si el campo magnético es de 0.220 T. *c*) Si se inclina el alambre de manera que forme un ángulo de 10.0° con la horizontal, ¿qué fuerza sentirá ahora?

6. (II) Suponga que un alambre de cobre recto de 1.00 mm de diámetro justo "flota" horizontalmente en el aire debido a la fuerza del campo magnético de la Tierra $\vec{\mathbf{B}}$, el cual es horizontal, perpendicular al alambre y con una magnitud de 5.0×10^{-5} T. ¿Cuál es la corriente que conduce el alambre? ¿La respuesta suena razonable? Explique brevemente.

7. (II) Un alambre rígido de 50.0 cm de longitud se dobla en ángulo recto justo por la mitad. Una sección yace a lo largo del eje z y la otra se encuentra a lo largo de la línea $y = 2x$ en el plano xy. Una corriente de 20.0 A fluye en el alambre (hacia abajo del eje z y hacia fuera del alambre en el plano xy). El alambre pasa a través de un campo magnético uniforme dado por $\vec{\mathbf{B}} = (0.318\hat{\mathbf{i}})$T. Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta sobre el alambre.

8. (II) Un alambre largo se extiende a lo largo del eje x y conduce una corriente de 3.0 A hacia la derecha ($+x$). El alambre pasa a través de un campo magnético uniforme dado por $\vec{\mathbf{B}} = (0.20\hat{\mathbf{i}} - 0.36\hat{\mathbf{j}} + 0.25\hat{\mathbf{k}})$ T. Determine las componentes de la fuerza sobre el alambre por cm de longitud.

9. (II) Una espira circular de alambre con corriente (radio r, corriente I) está inmerso parcialmente en un campo magnético de magnitud constante B_0 que se dirige hacia fuera de la página como se muestra en la figura 27-39. Determine la fuerza neta sobre la espira en términos de θ_0.

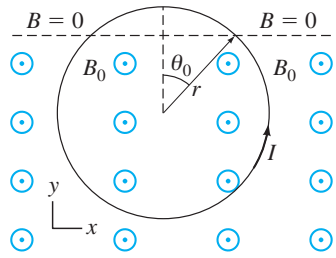


FIGURA 27–39
Problema 9.

10. (II) Un alambre de 2.0 m de longitud conduce una corriente de 8.2 A y está inmerso dentro de un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Cuando el alambre está a lo largo del eje $+x$, una fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}} = (-2.5\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre el alambre, y cuando el alambre está a lo largo del eje $+y$, la fuerza magnética es $\vec{\mathbf{F}} = (2.5\hat{\mathbf{i}} - 5.0\hat{\mathbf{k}})$ N. Determine $\vec{\mathbf{B}}$.

11. (III) Un alambre curvo, que conecta dos puntos a y b, está contenido en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ y conduce una corriente I. Demuestre que la fuerza magnética resultante sobre el alambre, sin importar su forma, es igual que la fuerza sobre un alambre recto que conecta a y b y que conduce la misma corriente. (Véase la figura 27-40).

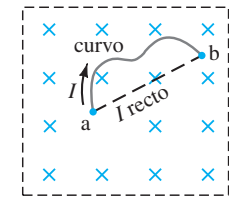


FIGURA 27–40
Problema 11.

12. (III) Una espira circular de alambre, de radio r, conduce una corriente I. La espira se localiza en un campo magnético cuyas líneas de campo parecen divergir a partir de un punto localizado a una distancia d por abajo del eje del anillo y sobre su eje. (Esto es, el campo forma un ángulo θ con la espira en todos los puntos, figura 27-41, donde $\tan\theta = r/d$). Determine la fuerza sobre la espira.

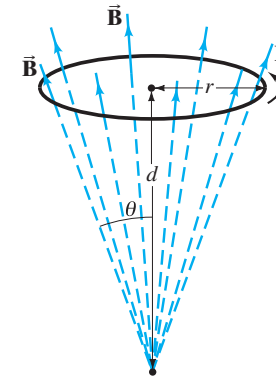


FIGURA 27–41
Problema 12.

27–4 Fuerza sobre cargas en movimiento en un campo magnético

13. (I) Determine la magnitud y dirección de la fuerza sobre un electrón que viaja a 8.5×10^5 m/s en dirección horizontal hacia el este en un campo magnético vertical hacia arriba, cuya magnitud es de 0.45 T.

14. (I) Se proyecta un electrón verticalmente hacia arriba con una rapidez de 1.70×10^6 m/s dentro de un campo magnético uniforme de 0.480 T dirigido horizontalmente y alejándose del observador. Describa la trayectoria del electrón en ese campo.

15. (I) Se emiten partículas alfa con carga $q = +2e$ y masa $m = 6.6 \times 10^{-27}$ kg de una fuente radiactiva con una rapidez de 1.6×10^7 m/s. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético requerida para desviarlos dentro de una trayectoria circular de radio $r = 0.18$ m?

16. (I) Encuentre la dirección de la fuerza magnética sobre una carga negativa para cada uno de los diagramas mostrados en la figura 27-42, donde $\vec{\mathbf{v}}$ (gris) es la velocidad de la carga y $\vec{\mathbf{B}}$ (naranja) es la dirección del campo magnético. ($\otimes$ significa que el vector apunta hacia la página, mientras que $\odot$ significa que el campo apunta hacia fuera de la página, es decir, hacia usted).

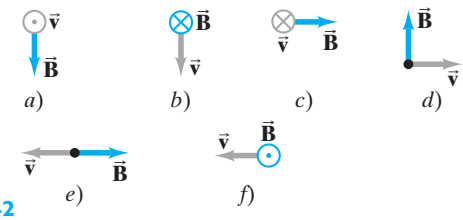


FIGURA 27–42
Problema 16.

17. (I) Determine la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ para cada caso mostrado en la figura 27-43, donde $\vec{\mathbf{F}}$ representa la fuerza magnética máxima sobre una partícula cargada positivamente que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$.

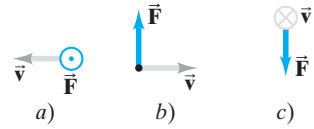


FIGURA 27–43
Problema 17.

18. (II) ¿Cuál es la velocidad de un haz de electrones que no sufre ninguna desviación cuando pasa a través de campos eléctricos y magnéticos perpendiculares de magnitud 8.8×10^3 V/m y 7.5×10^{-3} T, respectivamente? ¿Cuál es el radio de la órbita del electrón si se apaga el campo eléctrico?

19. (II) Un átomo de helio con doble carga cuya masa es 6.6×10^{-27} kg se acelera mediante un voltaje de 2700 V. *a*) ¿Cuál será el radio de curvatura si se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.340 T? *b*) ¿Cuál es su periodo de revolución?

20. (II) Un protón (masa m_p), un deuterón ($m = 2m_p$, $Q = e$) y una partícula alfa ($m = 4m_p$, $Q = 2e$) son acelerados mediante la misma diferencia de potencial V y luego entran a un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, donde se mueven en trayectorias circulares perpendiculares a $\vec{\mathbf{B}}$. Determine el radio de las trayectorias del deuterón y de la partícula alfa en términos del radio de la trayectoria del protón.

21. (II) Considere una partícula de masa m y carga q que se desplaza en una trayectoria circular en un campo magnético B. *a*) Demuestre que su energía cinética es proporcional a r^2, el cuadrado del radio de curvatura de su trayectoria, y *b*) demuestre que su cantidad de movimiento angular es $L = qBr^2$ con respecto al centro del círculo.

22. (II) Un electrón se desplaza con velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (7.0\hat{\mathbf{i}} - 6.0\hat{\mathbf{j}}) \times 10^4$ m/s en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}} = (-0.80\hat{\mathbf{i}} + 0.60\hat{\mathbf{j}})$ T. Determine la magnitud y dirección de la fuerza sobre el electrón.

23. (II) Un protón de 6.0 MeV (energía cinética) entra a un campo de 0.20 T, desplazándose en un plano perpendicular al campo. ¿Cuál es el radio de su trayectoria? Véase la sección 23-8.

24. (II) Un electrón experimenta la mayor fuerza cuando viaja a 2.8×10^6 m/s en un campo magnético cuando se desplaza hacia el norte. La fuerza sobre el electrón es vertical ascendente y de magnitud 8.2×10^{-13} N. ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo magnético?

25. (II) Un protón se mueve en una región del espacio donde hay un campo magnético $\vec{\mathbf{B}} = (0.45\hat{\mathbf{i}} + 0.38\hat{\mathbf{j}})$ T y un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}} = (3.0\hat{\mathbf{i}} - 4.2\hat{\mathbf{j}}) \times 10^3$ V/m. En un instante dado, la velocidad del protón es $\vec{\mathbf{v}} = (6.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}} - 5.0\hat{\mathbf{k}}) \times 10^3$ m/s. Determine las componentes de la fuerza neta sobre el protón.

26. (II) Un electrón experimenta una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (3.8\hat{\mathbf{i}} - 2.7\hat{\mathbf{j}}) \times 10^{-13}$ N cuando pasa a través de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}} = (0.85\text{ T})\,\hat{\mathbf{k}}$. Calcule la velocidad del electrón.

27. (II) Una partícula de carga q se desplaza en una trayectoria circular de radio r en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Si la magnitud del campo magnético se duplica, y la energía cinética de la partícula permanece constante, ¿qué le ocurre a la cantidad de movimiento angular de la partícula?

28. (II) Un electrón ingresa a una región donde hay un campo magnético uniforme $B = 0.28$ T con un ángulo de 45° con respecto a $\vec{\mathbf{B}}$. Determine el radio r y la separación p (distancia entre espiras consecutivas) de la trayectoria helicoidal del electrón suponiendo que su rapidez es 3.0×10^6 m/s. Véase la figura 27-44.

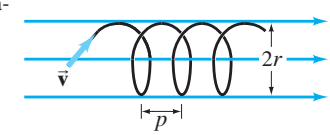


FIGURA 27–44
Problema 28.

29. (II) Una partícula con carga q y cantidad de movimiento p, que se desplaza inicialmente a lo largo del eje x, entra a una región donde hay un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}} = B_0\hat{\mathbf{k}}$ que se extiende sobre una región de ancho $x = \ell$ como se muestra en la figura 27-45. La partícula se desvía una distancia d a lo largo del eje $+y$ conforme atraviesa el campo. Determine *a*) si la carga q es positiva o negativa, y *b*) la magnitud de su cantidad de movimiento p.

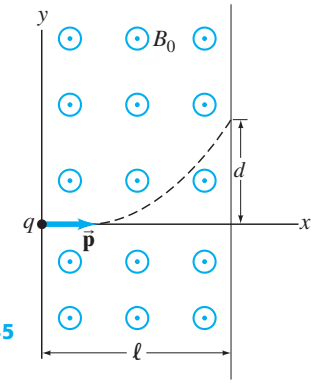


FIGURA 27–45
Problema 29.

30. (II) La trayectoria de protones que emergen de un acelerador debe doblarse 90° mediante un "imán desviador" de manera que los protones no choquen con una barrera que se encuentra a lo largo de su trayectoria a una distancia d medida desde el orificio de salida del acelerador. Demuestre que el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ del imán de desvío, el cual consideramos que es uniforme y que puede extenderse sobre una área $d \times d$, debe tener una magnitud $B \geq (2mK/e^2d^2)^{\frac{1}{2}}$, donde m es la masa de un protón y K es su energía cinética.

31. (III) Considere que el campo magnético terrestre en el ecuador tiene una magnitud de 0.50×10^{-4} T y apunta hacia el norte en todos los puntos. Estime la rapidez que necesitaría un ion de uranio una vez ionizado ($m = 238$ u, $q = e$) para darle la vuelta a la Tierra a 5.0 km sobre el ecuador. ¿Puede usted ignorar la gravedad? [Ignore la relatividad].

32. (III) Una bala de 3.40 g se desplaza con una rapidez de 155 m/s de manera perpendicular al campo magnético de la Tierra de 5.00×10^{-5} T. Si la bala posee una carga neta de 18.5×10^{-9} C, ¿por qué distancia será desviada con respecto a su trayectoria debido al campo magnético de la Tierra después de haber recorrido 1.00 km?

33. (III) Un protón, que se desplaza con una rapidez de $v = 1.3 \times 10^5$ m/s en una región sin campos, entra de manera abrupta a un campo magnético aproximadamente uniforme $B = 0.850$ T ($\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\mathbf{v}}$). Si el protón entra al campo magnético con un ángulo de 45°, como se ilustra en la figura 27-46, *a*) ¿a qué ángulo sale de la región?, y *b*) ¿a qué distancia x saldrá del campo?

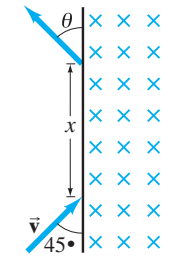


FIGURA 27–46
Problema 33.

34. (III) Una partícula con carga $+q$ y masa m viaja en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}} = B_0\hat{\mathbf{k}}$. En el tiempo $t = 0$, la rapidez de la partícula es v_0, su vector de velocidad está contenido en el plano xy y está dirigido a un ángulo de 30° con respecto al eje y, como se indica en la figura 27-47. En un tiempo posterior, $t = t_\alpha$, la partícula cruzará el eje x en $x = \alpha$. Determine, en términos de q, m, v_0 y B_0, *a*) α y *b*) t_α.

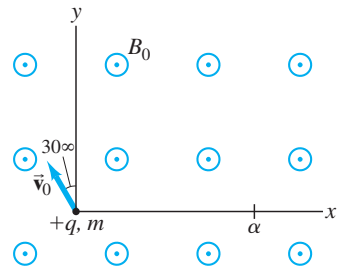


FIGURA 27–47
Problema 34.

27–5 Torca sobre una espira con corriente; momento magnético

35. (I) ¿Cuánto trabajo se requiere para hacer girar una espira de corriente (figura 27-22) en un campo magnético desde *a*) $\theta = 0°$ $(\vec{\boldsymbol{\mu}} \| \vec{\mathbf{B}})$ hasta $\theta = 180°$, *b*) $\theta = 90°$ desde $\theta = -90°$?

36. (I) Una espira circular de alambre cuyo diámetro es de 13.0 cm se localiza con su plano paralelo a un campo magnético uniforme entre los polos de un gran imán. Cuando fluye una corriente de 4.20 A por la espira, la torca sobre ella es de 0.185 m·N. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético?

37. (II) Una bobina circular de 18.0 cm de diámetro y que contiene 12 espiras yace sobre el piso. El campo magnético de la Tierra en esa región tiene una magnitud de 5.50×10^{-5} T y apunta hacia la Tierra a un ángulo de 66.0° por debajo de una línea que apunta justo hacia el norte. Si una corriente de 7.10 A pasa por la bobina en sentido horario, determine *a*) la torca sobre la bobina, y *b*) ¿qué lado de la espira se levanta, el lado norte, el sur, el este o el oeste?

38. (II) Demuestre que el momento dipolar magnético μ de un electrón que gira alrededor del protón en el núcleo de un átomo de hidrógeno se relaciona con la cantidad de movimiento orbital L del electrón mediante

$$\mu = \frac{e}{2m} L.$$

39. (II) Una bobina circular con 15 espiras de 22 cm de diámetro yace en el plano xy. La corriente en cada espira de la bobina es 7.6 A en sentido horario, y un campo magnético externo $\vec{\mathbf{B}} = (0.55\hat{\mathbf{i}} + 0.60\hat{\mathbf{j}} - 0.65\hat{\mathbf{k}})$ T pasa a través de la bobina. Determine *a*) el momento magnético de la bobina, $\vec{\boldsymbol{\mu}}$; *b*) la torca sobre la bobina debida al campo magnético externo; *c*) la energía potencial U de la bobina en el campo magnético (tomando el mismo nivel de referencia 0 como lo hicimos en la discusión de la figura 27-22).

40. (III) Suponga que una varilla no conductora de longitud d transporta una carga Q distribuida uniformemente. Se hace girar con una velocidad angular ω en torno a un eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos, figura 27-48. Demuestre que el momento dipolar magnético de la varilla es $\frac{1}{6}Q\omega d^2$. [*Sugerencia:* Considere el movimiento de cada elemento infinitesimal de la varilla].

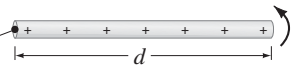


FIGURA 27–48
Problema 40.

*27–6 Motores y galvanómetros

***41.** (I) Si la corriente en un motor disminuye en 12%, ¿en qué factor cambiará la torca de salida?

***42.** (I) La aguja de un galvanómetro se desvía sobre la escala completa para una corriente de 63.0 μA. ¿Qué corriente dará una desviación sobre la escala completa si el campo magnético se reduce a 0.800 de su valor original?

***43.** (I) Si el resorte de restitución de un galvanómetro se debilita en un 15% al paso de los años, ¿qué corriente dará una desviación sobre la escala completa si originalmente se requería una corriente de 46 μA?

27–7 Descubrimiento del electrón

44. (I) ¿Cuál es el valor de q/m para una partícula que se mueve sobre un círculo con radio de 8.0 mm en un campo magnético de 0.46 T si un campo eléctrico cruzado de 260 V/m haría que su trayectoria fuera una línea recta?

45. (II) Una gota de aceite cuya masa es 33×10^{-15} kg se mantiene en reposo entre dos grandes placas separadas por una distancia de 1.0 cm, como se muestra en la figura 27-31. Si la diferencia de potencial entre las placas es de 340 V, ¿cuántos electrones en exceso tiene esa gota?

27–8 Efecto Hall

46. (II) Un detector de Hall, que consiste en un tabique rectangular de material que conduce una corriente, se calibra colocándolo en un campo magnético conocido de 0.10 T. Cuando el campo está orientado de manera perpendicular a la cara rectangular del tabique, se mide una fem de Hall de 12 mV a través del espesor del tabique. Luego se coloca el detector en un campo magnético de magnitud desconocida B y se mide una fem de Hall de 63 mV. Determine B suponiendo que el ángulo θ entre el campo desconocido y el plano de la cara rectangular del tabique es *a*) $\theta = 90°$, y *b*) $\theta = 60°$.

47. (II) Un detector de Hall, que se emplea para medir la intensidad del campo magnético, está formado por un tabique rectangular de material (con densidad de electrones libres n) con ancho d y grosor t, y conduce una corriente I a lo largo de su longitud ℓ. Se introduce el tabique en un campo magnético de magnitud B orientado de manera perpendicular a su cara rectangular (de área ℓd), de manera que se produce una fem de Hall $\mathscr{E}_H$ a través de su ancho d. La sensibilidad magnética del detector, definida como $K_H = \mathscr{E}_H/IB$, indica la magnitud de la fem de Hall que se obtiene para un determinado campo magnético aplicado. Un tabique con un valor grande de K_H es un buen candidato para usarse como detector de Hall. *a*) Demuestre que $K_H = 1/ent$. Así, un buen detector de Hall tiene valores pequeños tanto de n como de t. *b*) Como posibles candidatos para detectores de Hall, considere un metal típico y un semiconductor (con impurezas) con n aproximadamente igual a 1×10^{29} m^{-3} y 3×10^{22} m^{-3}, respectivamente. Puesto que es posible fabricar un tabique semiconductor con un grosor de 0.15 mm, ¿qué tan delgado (en nm) tendría que ser un tabique de metal para producir un valor de K_H igual al del tabique semiconductor? Compare el grosor de este tabique de metal con el tamaño típico de un átomo de metal de 0.3 nm. *c*) Para el tabique semiconductor típico descrito en el inciso *b*), ¿cuál es el valor esperado para $\mathscr{E}_H$ cuando I = 100 mA y B = 0.1 T?

48. (II) Una muestra rectangular de un metal tiene un ancho de 3.0 cm y un espesor de 680 μm. Cuando transporta una corriente de 42 A y está ubicada en un campo magnético de 0.80 T, produce una fem de Hall de 6.5 μV. Calcule *a*) el campo de Hall en el conductor, *b*) la velocidad de arrastre de los electrones conductores, y *c*) la densidad de electrones libres en el metal.

49. (II) En un detector que usa el efecto Hall para medir campos magnéticos, pasa una corriente de 12.0 A a través una franja metálica de sodio de 1.50 cm de ancho y 1.30 mm de espesor. Si la fem de Hall es de 1.89 μV, ¿cuál es la magnitud del campo magnético (considere que el campo es perpendicular a la cara plana de la franja)? Considere que se tiene un electrón libre por átomo de Na, y considere su gravedad específica como 0.971.

50. (II) El efecto Hall puede usarse para medir la tasa de flujo sanguíneo, ya que la sangre contiene iones que constituyen una corriente eléctrica. *a*) ¿El signo de los iones afecta la magnitud de la fem? *b*) Determine la velocidad del flujo en una arteria de 3.3 mm de diámetro si la fem medida es de 0.13 mV y B es 0.070 T. (En la práctica, se usa un campo magnético alternante).

*27–9 Espectrómetro de masas

***51.** (I) En un espectrómetro de masas, distintos átomos de germanio tienen un radio de curvatura de 21.0, 21.6, 21.9, 22.2, y 22.8 cm. El radio mayor corresponde a una masa atómica de 76 u. ¿Cuáles son las masas atómicas de los otros isótopos?

***52.** (II) Un tipo de espectrómetro de masas acelera iones mediante un voltaje V antes de que entren a un campo magnético B. Se supone que, al inicio, los iones están en reposo. Demuestre que la masa de un ion es $m = qB^2R^2/2V$, donde R es el radio de la trayectoria de los iones en un campo magnético y q es su carga.

***53.** (II) Considere que el campo eléctrico entre las placas eléctricas en el espectrómetro de masas de la figura 27-33 es 2.48×10^4 V/m y que los campos magnéticos son $B = B' = 0.58$ T. La fuente contiene isótopos de carbono con números atómicos de masa de 12, 13 y 14 de una muestra antigua de árbol muerto. (Para estimar la masa atómica, multiplique por 1.66×10^{-27} kg). ¿Qué tan separadas están las marcas formadas por los iones de cada tipo cargados una vez sobre la placa fotográfica? ¿Y si los iones estuvieran doblemente cargados?

***54.** (II) Se usa un espectrómetro de masas para monitorear contaminantes del aire. Sin embargo, es difícil separar moléculas con masas casi iguales, como el CO (28.0106 u) y N_2 (28.0134 u). ¿Qué tan grande debe ser el radio de curvatura de un espectrómetro si estas dos moléculas deben separarse en la película o en los detectores por una distancia de 0.65 mm?

***55.** (II) Una partícula desconocida viaja en línea recta a través de campos eléctricos y magnéticos cruzados con $E = 1.5$ kV/m y $B = 0.034$ T. Si se apaga el campo eléctrico, la partícula se mueve en una trayectoria circular de radio $r = 2.7$ cm. ¿Cuál podría ser esta partícula?

Problemas generales

56. Se mueven protones en un círculo, de radio 5.10 cm, dentro de un campo magnético de 0.625 T. ¿Qué valor del campo eléctrico podría hacer que sus trayectorias fueran rectas? ¿En qué dirección debe apuntar el campo eléctrico?

57. Protones con cantidad de movimiento de 3.8×10^{-16} kg·m/s se conducen magnéticamente en sentido horario en una trayectoria circular de 2.0 km de diámetro en el Fermi National Accelerator Laboratory, en Illinois. Determine la magnitud y dirección del campo en los imanes que rodean al tubo del haz.

58. Un protón y un electrón tienen la misma energía cinética cuando entran a una región con un campo magnético constante. ¿Cuál es el cociente de los radios de sus trayectorias circulares?

59. Dos alambres rígidos paralelos, separados una distancia d en un plano horizontal, actúan como rieles para cargar una varilla de metal ligero de masa m (perpendicular a cada riel), figura 27-49. En toda la región actúa un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$, dirigido verticalmente hacia arriba (saliendo del diagrama). En $t = 0$, alambres que están conectados a los rieles se conectan a una fuente de corriente constante, de manera que comienza a fluir una corriente I a través del sistema. Si la varilla parte del reposo en $t = 0$, determine la rapidez de la varilla como función del tiempo *a*) suponiendo que no hay fricción entre la varilla y los rieles, y *b*) si el coeficiente de fricción es μ_k. *c*) ¿En qué dirección se moverá la varilla, hacia el este o el oeste, si la corriente se dirige hacia el norte?

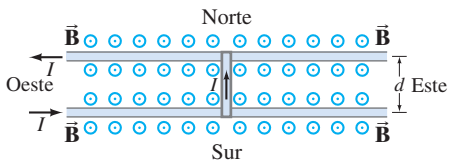


FIGURA 27–49 Vista hacia abajo de una varilla que se desliza sobre rieles. Problemas 59 y 60.

60. Considere que la varilla que se ilustra en la figura 27-49 (problema 59) tiene una masa $m = 0.40$ kg y una longitud de 22 cm, y que la corriente a través de ella es $I = 36$ A. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.50$, determine el campo magnético mínimo $\vec{\mathbf{B}}$ (no necesariamente vertical) que justo causará que la varilla se deslice. Indique la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y su dirección con respecto a la vertical.

61. Cerca del ecuador, el campo magnético de la Tierra apunta casi horizontalmente hacia el norte y tiene una magnitud $B = 0.50 \times 10^{-4}$ T. ¿Cuál debería ser la magnitud y dirección de la velocidad de un electrón si su peso debe cancelarse exactamente con la fuerza magnética?

62. Calcule la fuerza magnética sobre un avión el cual ha adquirido una carga neta de 1850 μC y que viaja con una rapidez de 120 m/s de manera perpendicular al campo magnético de la Tierra de 5.0×10^{-5} T.

63. Un motor que opera con una batería de 9.0 V tiene una bobina cuadrada con 20 vueltas con lados de 5.0 cm de longitud y una resistencia total de 24 Ω. Cuando gira, el campo magnético que actúa sobre el alambre en la bobina es de 0.020 T. ¿Cuál es la torca máxima sobre el motor?

64. Estime aproximadamente la desviación máxima de un haz de electrones cerca del centro de una pantalla de televisión de CRT debido al campo magnético de 5.0×10^{-5} T de la Tierra. Considere que la pantalla es de 18 cm desde la pistola de electrones, donde los electrones son acelerados *a*) por 2.0 kV, o *b*) por 28 kV. Advierta que en un aparato de TV a color, el haz de electrones debe dirigirse con precisión dentro de un intervalo menor a 1 mm de manera que los electrones puedan incidir en el fósforo correcto. Puesto que el campo de la Tierra es importante aquí, se usan escudos de metal *mu* para reducir el campo de la Tierra en el CRT. (Véase la sección 23-9).

65. La espira rectangular que se ilustra en la figura 27-22 tiene una masa m y conduce una corriente I. Demuestre que si la espira está orientada a un ángulo $\theta \ll 1$ (en radianes), entonces cuando se deja en libertad realizará un movimiento armónico simple en torno a $\theta = 0$. Calcule el periodo del movimiento.

66. Un **ciclotrón** (figura 27-50) es un aparato que se usa para acelerar partículas elementales, como protones a altas velocidades. Las partículas comienzan en el punto A con cierta velocidad inicial y viajan en órbitas circulares en el campo magnético B. Las partículas se aceleran a altas velocidades cada vez que pasan por el espacio entre las "des" de metal, donde hay un campo eléctrico E. (No hay un campo eléctrico en el interior de las "des"). El campo eléctrico cambia de dirección cada medio ciclo mediante un voltaje de ca $V = V_0 \operatorname{sen} 2\pi ft$, así que se incrementa la velocidad de las partículas cada vez que pasan por el hueco entre las "des". *a*) Demuestre que la frecuencia f del voltaje debe ser $f = Bq/2\pi m$, donde q es la carga de las partículas y m es su masa. *b*) Demuestre que la energía cinética de las partículas se incrementa en $2qV_0$ en cada revolución, suponiendo que el hueco es pequeño. *c*) Si el radio del ciclotrón es de 0.50 m y la intensidad del campo magnético es 0.60 T, ¿cuál será la energía cinética máxima de los protones acelerados en MeV?

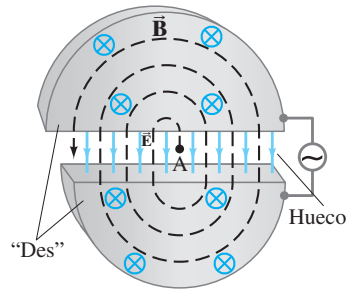
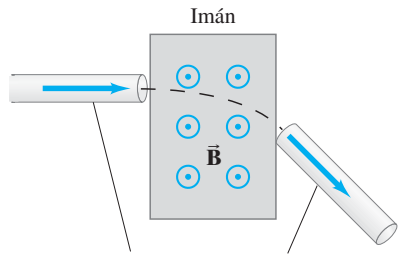


FIGURA 27–50
Un ciclotrón.
Problema 66.

67. Los campos magnéticos son muy útiles en aceleradores de partículas para "conducción de haces"; esto es, el campo magnético puede usarse para cambiar la dirección de un haz sin alterar su rapidez (figura 27-51). Demuestre cómo podría operar esto en el caso de un haz de protones. ¿Qué sucede con los protones que no se desplazan a la velocidad para la cual el campo magnético está diseñado? Si el campo se extiende sobre una región de 5.0 cm de ancho y tiene una magnitud de 0.38 T, ¿a qué ángulo aproximadamente se desviarán los protones que viajan a 0.85×10^7 m/s?



Tubos al vacío, dentro de los cuales los protones se desplazan con la velocidad indicada mediante flechas

FIGURA 27–51
Problema 67.

68. Una espira cuadrada de alambre de aluminio tiene 20.0 cm de lado. Debe conducir una corriente de 15.0 A y girar en un campo magnético uniforme de 1.35 T, como se muestra en la figura 27-52. *a*) Determine el diámetro mínimo del alambre de manera que no se fracture debido a esfuerzos de tensión o de corte. Considere un factor de seguridad de 10. (Véase la tabla 12-2). *b*) ¿Cuál es la resistencia de una sola espira de ese alambre?

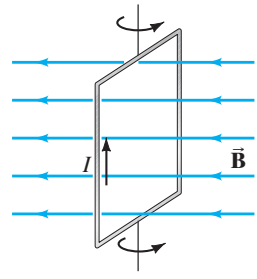


FIGURA 27–52
Problema 68.

69. La figura 27-53 representa un tipo de "lanzador de proyectiles". Una corriente grande se desplaza a través de una espira cerrada formada por rieles fijos, una fuente de poder y una barra muy ligera, que toca los rieles casi sin fricción. Un campo magnético de 1.8 T es perpendicular al plano del circuito. Si los rieles están separados una distancia $d = 24$ cm, y la barra tiene una masa de 1.5 g, ¿cuál es el flujo de corriente constante necesario para acelerar la barra a partir del reposo hasta 25 m/s en una distancia de 1.0 m? ¿En qué dirección debe apuntar el campo?

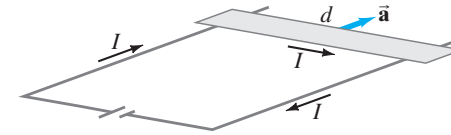


FIGURA 27–53 Problema 69.

70. *a*)¿Qué valor del campo magnético haría que un haz de electrones, que viaja a la derecha con una rapidez de 4.8×10^6 m/s, siga sin desviarse a través de una región en la cual hay un campo eléctrico uniforme de 8400 V/m apuntando verticalmente hacia arriba? *b*) ¿Cuál es la dirección del campo magnético si se sabe que es perpendicular al campo eléctrico? *c*) ¿Cuál es la frecuencia de la órbita circular de los electrones si se apaga el campo eléctrico?

71. En cierto tubo de rayos catódicos, los electrones son acelerados horizontalmente mediante un potencial de 25 kV. Luego, los electrones pasan a través de un campo magnético uniforme por una distancia de 3.5 cm, lo cual los desvía hacia arriba de manera que alcanzan la parte superior de la pantalla localizada 22 cm más adelante, en un punto a 11 cm arriba del centro de la pantalla. Estime el valor de B.

72. **Efecto Zeeman.** En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mantiene en su órbita circular de radio r alrededor del protón en el núcleo gracias a la atracción electrostática. Si se coloca el átomo en un campo magnético débil $\vec{\mathbf{B}}$, la frecuencia de rotación de los electrones que giran en un plano perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ se modifica por una cantidad

$$\Delta f = \pm \frac{eB}{4\pi m}$$

donde e y m son la carga y la masa de un electrón. *a*) Obtenga este resultado, suponiendo que la fuerza debida a $\vec{\mathbf{B}}$ es mucho menor que aquella debida a la atracción electrostática del núcleo. *b*) ¿Qué indica el signo $\pm$?

73. Un protón sigue un patrón en espiral a través de gas en un campo magnético de 0.018 T, perpendicular al plano de la espiral, como se ilustra en la figura 27-54. En dos vueltas sucesivas, en los puntos P y Q, los radios son de 10.0 mm y 8.5 mm, respectivamente. Calcule el cambio en la energía cinética del protón conforme viaja de P a Q.

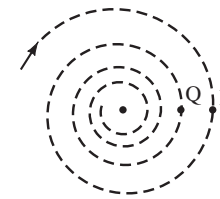


FIGURA 27–54 Problema 73.

74. La fuerza neta sobre una espira con corriente cuyo plano es perpendicular a un campo magnético uniforme es cero, puesto que se cancelan las contribuciones a la fuerza neta que vienen de lados opuestos de la espira. Sin embargo, si el campo varía en magnitud de un lado a otro de la espira, entonces puede generarse una fuerza neta sobre la espira. Considere una espira cuadrada con lados de longitud a, localizada de manera que un lado se encuentre en $x = b$ en el plano xy (figura 27-55). Un campo magnético está dirigido a lo largo del eje z, con una magnitud que varía con x de acuerdo a

$$B = B_0\left(1 - \frac{x}{b}\right).$$

Si la corriente en la espira circula en sentido antihorario (esto es, el momento dipolar magnético de la espira es a lo largo del eje z), encuentre una expresión para la fuerza neta sobre la espira.

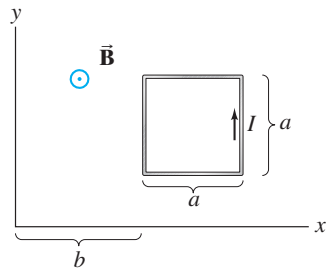


FIGURA 27–55
Problema 74.

75. El cable de alimentación de un tranvía eléctrico (figura 27-56) conduce una corriente horizontal de 330 A hacia el este. El campo magnético de la Tierra tiene una intensidad de 5.0×10^{-5} T y forma un ángulo con respecto a la horizontal de 22° en esa región. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre un tramo de 5.0 m de ese cable.

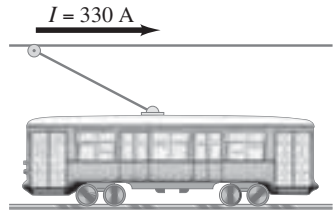


FIGURA 27–56
Problema 75.

76. Una varilla conductora uniforme de longitud d y masa m descansa sobre un fulcro o punto de apoyo, el cual está localizado a una distancia $d/4$ del extremo izquierdo de la varilla. La varilla está inmersa en un campo magnético uniforme de magnitud B dirigido hacia la página (figura 27-57). Un objeto cuya masa M es 8.0 veces más grande que la masa de la varilla está colgado del extremo izquierdo de la varilla. ¿Qué corriente (en magnitud y dirección) debe fluir a través de la varilla para que se encuentre "balanceada" (es decir, para que esté en equilibrio en posición horizontal) sobre el fulcro? (No se muestran los alambres conectores flexibles, los cuales ejercen una fuerza insignificante sobre la varilla).

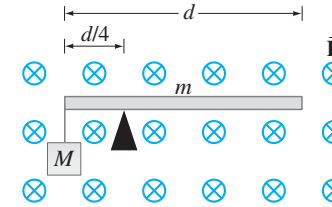


FIGURA 27–57
Problema 76.

77. En un aparato simple para medir la magnitud B de un campo magnético, una varilla conductora (de longitud $d = 1.0$ m y masa $m = 150$ g) cuelga de un pivote libre de fricción y está orientada de manera que su eje de rotación está alineado con la dirección del campo magnético que quiere medirse. Alambres flexibles delgados (los cuales ejercen una fuerza despreciable sobre la varilla) conducen una corriente $I = 12$ A, lo cual ocasiona que la varilla gire un ángulo θ con respecto a la vertical, posición en la cual permanece en reposo (figura 27-58). *a*) ¿La corriente fluye hacia arriba (hacia el pivote) o hacia abajo en la figura 27-58? *b*) Si $\theta = 13°$, determine B. *c*) ¿Cuál es la magnitud más grande del campo magnético que puede medirse usando este aparato?

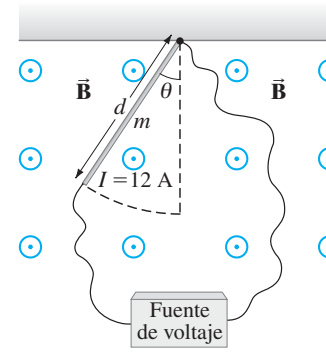


FIGURA 27–58
Problema 77.

Respuestas a los ejercicios

A: Cerca de los polos, donde las líneas de campo están más cerca entre sí.

B: En sentido antihorario.

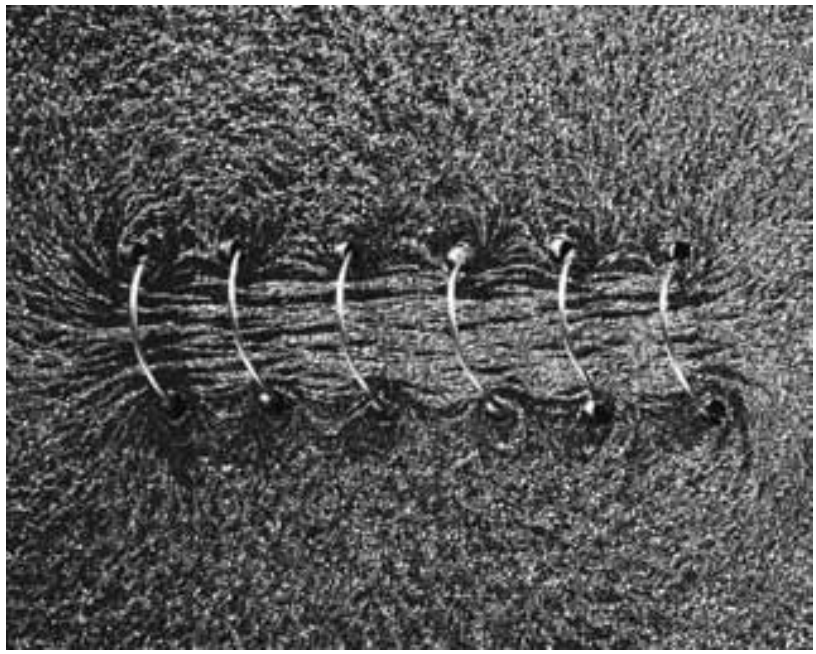
C: *b*), *c*) y *d*).

D: 0.15 N.

E: *b*), *c*), *d*).

F: Negativo; la dirección de la trayectoria helicoidal puede invertirse (manteniéndose hacia la derecha).

G: *d*).



Una larga bobina de alambre con muchas espiras muy apretadas se llama solenoide. Cuando un largo solenoide conduce una corriente eléctrica, se produce un campo magnético casi uniforme dentro de las espiras, como sugiere el alineamiento de las limaduras de hierro en esta fotografía. La magnitud del campo dentro de un solenoide se encuentra fácilmente usando la ley de Ampère, una de las importantes leyes generales del electromagnetismo, que relaciona los campos magnéticos con las corrientes eléctricas. En este capítulo se examinarán con detalle tales vinculaciones, así como otros medios para producir campos magnéticos.

CAPÍTULO 28

Fuentes de campo magnético

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
¿Cuál de los siguientes producirá un campo magnético?

a) Una carga eléctrica en reposo.
b) Una carga eléctrica en movimiento.
c) Una corriente eléctrica.
d) El voltaje de una batería no conectada a algo.
e) Cualquier pieza de hierro.
f) Un trozo de cualquier metal.

En el capítulo anterior estudiamos los efectos (fuerzas y torcas) que un campo magnético tiene sobre las corrientes eléctricas y sobre las cargas eléctricas en movimiento. También vimos que los campos magnéticos se producen no sólo mediante imanes, sino también mediante corrientes eléctricas (un gran descubrimiento de Oersted). Es este aspecto del magnetismo, la producción de campos magnéticos, el que se estudia en este capítulo. Ahora se verá cómo algunas situaciones simples determinan la intensidad del campo magnético, y se estudiarán algunas relaciones generales entre los campos magnéticos y sus fuentes, la corriente eléctrica. Más elegante es la ley de Ampère. También se estudia la ley de Biot-Savart, que es muy útil para resolver problemas prácticos.

CONTENIDO

28–1 Campo magnético debido a un alambre recto
28–2 Fuerza entre dos alambres paralelos
28–3 Definiciones de ampere y coulomb
28–4 Ley de Ampère
28–5 Campo magnético de un solenoide y un toroide
28–6 Ley de Biot-Savart
28–7 Materiales magnéticos: Ferromagnetismo
*28–8 Electroimanes y solenoides: Aplicaciones
*28–9 Campos magnéticos en materiales magnéticos; histéresis
*28–10 Paramagnetismo y diamagnetismo

28–1 Campo magnético debido a un alambre recto

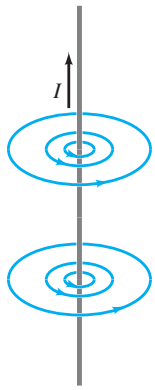


FIGURA 28–1 Igual que la figura 27-8b. Líneas de campo magnético en torno a un largo alambre recto que conduce una corriente eléctrica I.

En la sección 27-2 vimos que el campo magnético debido a la corriente eléctrica en un largo alambre recto es tal que las líneas de campo son círculos con el alambre en el centro (figura 28-1). Se espera que la intensidad del campo en un punto dado sea mayor si la corriente que fluye en el alambre es mayor; y que el campo sea menor en puntos más alejados del alambre. De hecho, éste es el caso. Experimentos cuidadosos demuestran que el campo magnético B debido a un largo alambre recto en un punto cerca de él es directamente proporcional a la corriente I en el alambre e inversamente proporcional a la distancia r desde el alambre:

$$B \propto \frac{I}{r}.$$

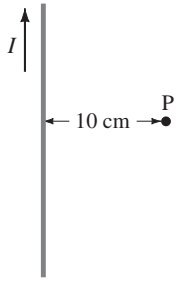
Esta relación $B \propto I/r$ es válida en tanto r, la distancia perpendicular al alambre, sea mucho menor que la distancia hacia los extremos del alambre (es decir, el alambre es largo).

La constante de proporcionalidad se escribe[†] como $\mu_0/2\pi$; por lo tanto,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}. \qquad \text{[cerca de un largo alambre recto]} \quad \textbf{(28–1)}$$

El valor de la constante μ_0, que se llama **permeabilidad del espacio libre**, es $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A}$.

FIGURA 28–2 Ejemplo 28–1.



EJEMPLO 28–1 **Cálculo de $\vec{\mathbf{B}}$ cerca de un alambre.** Un alambre eléctrico en la pared de un edificio conduce una corriente cd de 25 A, verticalmente hacia arriba. ¿Cuál es el campo magnético debido a esta corriente en un punto P, localizado 10 cm al norte del alambre (figura 28-2)?

PLANTEAMIENTO Se supone que el alambre es mucho más largo que la distancia de 10 cm hacia el punto P, así que aplicamos la ecuación 28-1.

SOLUCIÓN De acuerdo con la ecuación 28-1:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(25\,\text{A})}{(2\pi)(0.10\,\text{m})} = 5.0 \times 10^{-5}\,\text{T},$$

o 0.50 G. Por la regla de la mano derecha (figura 27-8c), el campo debido a la corriente apunta hacia el oeste (hacia la página en la figura 28-2) en esta posición.

NOTA El campo del alambre tiene aproximadamente la misma magnitud que el campo magnético de la Tierra, así que una brújula no apuntaría hacia el norte, sino en una dirección hacia el noroeste.

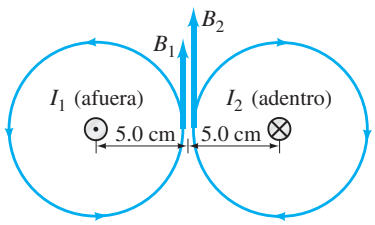
NOTA La mayor parte del cableado eléctrico en los edificios consta de cables con dos alambres en cada cable. Puesto que los dos alambres conducen corriente en direcciones opuestas, sus campos magnéticos se cancelan en gran medida, pero aun así podrían afectar dispositivos electrónicos sensibles.

⚠ CUIDADO

Una brújula, cerca de una corriente, podría no apuntar al norte

EJERCICIO A En el ejemplo 25-10 se vio que un relámpago típico produce una corriente de 100 A durante 0.2 s. Estime el campo magnético a 10 m de un relámpago. ¿Tendría un efecto significativo sobre una brújula?

FIGURA 28–3 Ejemplo 28-2. El alambre 1, que conduce corriente I_1 hacia el lector, y el alambre 2, que transporta corriente I_2 hacia la página, producen campos magnéticos cuyas líneas son círculos en torno a sus alambres respectivos.



EJEMPLO 28–2 **Campo magnético en medio de dos corrientes.** Dos alambres rectos paralelos, separados 10.0 cm, conducen corrientes en direcciones opuestas (figura 28-3). La corriente $I_1 = 5.0$ A sale de la página, e $I_2 = 7.0$ A entra a la página. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto medio entre los dos alambres.

PLANTEAMIENTO La magnitud del campo producido por cada alambre se calcula a partir de la ecuación 28-1. La dirección del campo de *cada* alambre se determina con la regla de la mano derecha. El campo total es la suma vectorial de los dos campos en el punto medio.

SOLUCIÓN Las líneas de campo magnético debidas a la corriente I_1 forman círculos alrededor del alambre de I_1, y la regla de la mano derecha 1 (figura 27-8c) dice que apuntan en sentido antihorario en torno al alambre. Las líneas de campo debidas a I_2 forman círculos alrededor del alambre de I_2 y apuntan en sentido horario (figura 28-3).

[†]La constante se elige de esta forma complicada porque la ley de Ampère (sección 28-4), que se considera más fundamental, tendrá una forma simple y elegante.

En el punto medio, ambos campos apuntan hacia arriba, como se indica, y por lo tanto se suman. El punto medio está a 0.050 m de cada alambre y, de acuerdo con la ecuación 28-1, las magnitudes de B_1 y B_2 son

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(5.0\,\text{A})}{2\pi(0.050\,\text{m})} = 2.0 \times 10^{-5}\,\text{T};$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(7.0\,\text{A})}{2\pi(0.050\,\text{m})} = 2.8 \times 10^{-5}\,\text{T}.$$

El campo total es *hacia arriba*, con una magnitud de

$$B = B_1 + B_2 = 4.8 \times 10^{-5}\,\text{T}.$$

EJERCICIO B Suponga que I_1 e I_2 apuntan hacia la página en la figura 28-3. Entonces, ¿cuál es el campo a la mitad entre los dos alambres?

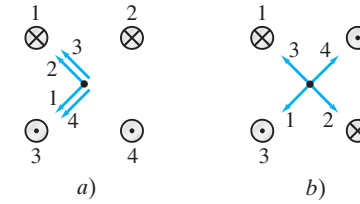


FIGURA 28–4 Ejemplo 28–3.

EJEMPLO CONCEPTUAL 28–3 **Campo magnético debido a cuatro alambres.** La figura 28-4 muestra cuatro largos alambres paralelos que conducen corrientes iguales hacia o desde la página, como se indica. ¿En cuál configuración, *a*) o *b*), el campo magnético es mayor en el centro del cuadrado?

RESPUESTA Es mayor en *a*). Las flechas ilustran las direcciones del campo producido por cada alambre; para confirmar estos resultados utilice la regla de la mano derecha. El campo neto en el centro es la superposición de los cuatro campos, que apuntará a la izquierda en *a*) y que es cero en *b*).

28–2 Fuerza entre dos alambres paralelos

Ya se vio que un alambre que conduce una corriente produce un campo magnético (magnitud dada por la ecuación 28-1 para un largo alambre recto). Además, un alambre que conduce corriente experimenta una fuerza cuando se coloca en un campo magnético (sección 27-3, ecuación 27-1). Por lo tanto, se espera que dos alambres que conducen corriente ejerzan una fuerza mutua.

Considere dos largos alambres paralelos separados por una distancia d, como en la figura 28-5a. Ambos transportan corrientes I_1 e I_2, respectivamente. Cada corriente produce un campo magnético que "siente" el otro, así que cada uno debe ejercer una fuerza sobre el otro. Por ejemplo, el campo magnético B_1 producido por I_1 en la figura 28-5 está dado por la ecuación 28-1, que en la posición del alambre 2 es

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d}.$$

Observe la figura 28-5b, donde se muestra el campo debido *sólo* a I_1. De acuerdo con la ecuación 27-2, la fuerza F_2 ejercida por B_1 sobre una longitud ℓ_2 del alambre 2, que conduce corriente I_2, es

$$F_2 = I_2 B_1 \ell_2.$$

Advierta que la fuerza sobre I_2 se debe sólo al campo producido por I_1. Desde luego, I_2 también produce un campo, pero no ejerce una fuerza sobre sí mismo. Al sustituir B_1 en la fórmula para F_2, se encuentra que la fuerza sobre una longitud ℓ_2 del alambre 2 es

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}\ell_2. \qquad \text{[alambres paralelos]} \quad \textbf{(28–2)}$$

Si empleamos la regla de la mano derecha 1 de la figura 27-8c, vemos que las líneas de B_1 son como se indica en la figura 28-5b. Entonces, al usar la regla de la mano derecha 2 de la figura 27-11c, vemos que la fuerza que se ejerce sobre I_2 estará a la izquierda en la figura 28-5b. Esto es, I_1 ejerce una fuerza de atracción sobre I_2 (figura 28-6a). Esto es cierto en tanto las corrientes estén en el mismo sentido. Si I_2 está en el sentido opuesto, la regla de la mano derecha indica que la fuerza está en el sentido opuesto. Esto es, I_1 ejerce una fuerza de repulsión sobre I_2 (figura 28-6b).

Un razonamiento similar al anterior demuestra que el campo magnético producido por I_2 ejerce una fuerza igual, pero opuesta, sobre I_1. Se espera que esto también sea cierto a partir de la tercera ley de Newton. En consecuencia, como se observa en la figura 28-6, corrientes paralelas en el mismo sentido se atraen mutuamente, mientras que corrientes paralelas en sentidos opuestos se repelen.

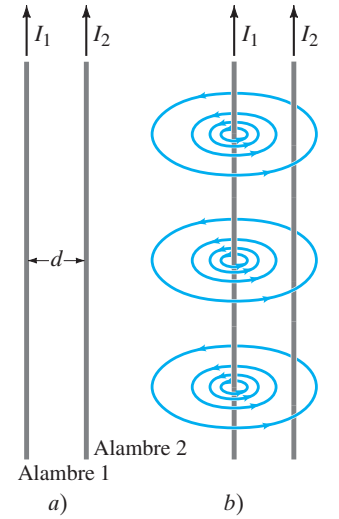
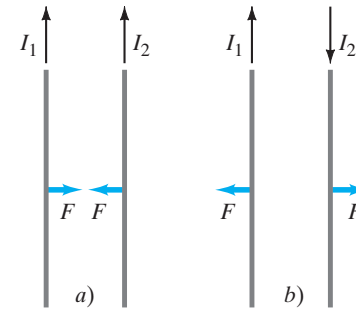


FIGURA 28–5 *a*) Dos conductores paralelos que transportan corrientes I_1 e I_2. *b*) Campo magnético $\vec{\mathbf{B}}_1$ producido por I_1. (No se muestra el campo producido por I_2). $\vec{\mathbf{B}}_1$ apunta hacia la página en la posición de I_2.

FIGURA 28–6 *a*) Corrientes paralelas en el mismo sentido ejercen una fuerza de atracción mutua. *b*) Corrientes antiparalelas (en sentidos opuestos) ejercen entre sí una fuerza de repulsión.



EJEMPLO 28–4 **Fuerza entre dos alambres que conducen corriente.** Los dos alambres del cordón de 2.0 m de largo de un aparato electrodoméstico están separados 3.0 mm y conducen una corriente de 8.0 A cd. Calcule la fuerza que un alambre ejerce sobre el otro.

PLANTEAMIENTO Cada alambre está en el campo magnético del otro cuando la corriente se enciende, así que aplicamos la ecuación 28-2.

SOLUCIÓN La ecuación 28-2 da por resultado

$$F = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(8.0\,\mathrm{A})^2(2.0\,\mathrm{m})}{(2\pi)(3.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})} = 8.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

Las corrientes están en sentidos opuestos (una hacia el electrodoméstico, la otra alejándose de él), así que la fuerza sería de repulsión y tendería a separar los alambres.

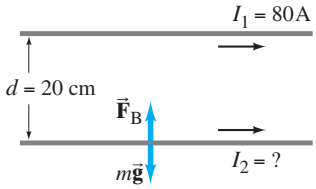


FIGURA 28–7 Ejemplo 28–5.

EJEMPLO 28–5 **Suspensión de un alambre con una corriente.** Un alambre horizontal transporta una corriente $I_1 = 80$ A cd. ¿Cuánta corriente I_2 debe conducir un segundo alambre paralelo, 20 cm debajo del primero (figura 28-7), para que no caiga por acción de la gravedad? El alambre inferior tiene una masa de 0.12 g por metro de longitud.

PLANTEAMIENTO Si el alambre 2 no debe caer por acción de la gravedad, que actúa hacia abajo, la fuerza magnética sobre él debe ser hacia arriba. Esto significa que la corriente en los dos alambres debe estar en el mismo sentido (figura 28-6). Podemos determinar la corriente I_2 al igualar las magnitudes de la fuerza magnética y la fuerza gravitacional sobre el alambre.

SOLUCIÓN La fuerza de gravedad sobre el alambre 2 es hacia abajo. Para cada 1.0 m de longitud de alambre, la fuerza gravitacional tiene magnitud

$$F = mg = (0.12 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m})(1.0\,\mathrm{m})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 1.18 \times 10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

La fuerza magnética sobre el alambre 2 debe ser hacia arriba, y la ecuación 28-2 da por resultado

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}\ell$$

donde $d = 0.20$ m e $I_1 = 80$ A. Se despeja I_2 y se igualan las dos magnitudes de fuerza (sea $\ell = 1.0$ m):

$$I_2 = \frac{2\pi d}{\mu_0 I_1}\left(\frac{F}{\ell}\right) = \frac{2\pi(0.20\,\mathrm{m})}{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(80\,\mathrm{A})}\frac{(1.18 \times 10^{-3}\,\mathrm{N/m})}{(1.0\,\mathrm{m})} = 15\,\mathrm{A}.$$

28–3 Definiciones de ampere y coulomb

Tal vez se pregunte cómo la constante μ_0 en la ecuación 28-1 podría ser exactamente $4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A. He aquí cómo ocurrió. Con una antigua definición de ampere, experimentalmente se midió que μ_0 estaba muy cerca de este valor. En la actualidad, μ_0 se *define* exactamente como $4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A. Esto no se podría hacer si el ampere se hubiera definido de manera independiente. El ampere, la unidad de corriente, ahora se define en términos del campo magnético B que produce utilizando el valor definido de μ_0.

En particular, se usa la fuerza entre dos alambres paralelos portadores de corriente, ecuación 28-2, para definir con precisión el ampere. Si $I_1 = I_2 = 1$ A exactamente, y los dos alambres están separados exactamente 1 m, entonces

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})}{(2\pi)}\frac{(1\,\mathrm{A})(1\,\mathrm{A})}{(1\,\mathrm{m})} = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N/m}.$$

Por lo tanto, *un* **ampere** *se define como la corriente que fluye en cada uno de dos largos alambres paralelos separados 1 m, que da por resultado una fuerza de exactamente* 2×10^{-7} *N por metro de longitud de cada alambre.*

Ésta es la definición precisa del ampere. Así, el **coulomb** se define *exactamente* como un ampere-segundo: 1 C = 1 A·s. El valor de k o ϵ_0 en la ley de Coulomb (sección 21-5) se obtiene de manera experimental.

Esto tal vez parezca una forma un tanto rebuscada de definir cantidades. La razón detrás de esto es el deseo de **definiciones operativas** de cantidades; esto es, definiciones de cantidades que realmente se puedan medir dado un conjunto definido de operaciones a realizar. Por ejemplo, la unidad de carga, el coulomb, se podría definir en términos de la fuerza entre dos cargas iguales después de definir un valor para ϵ_0 o k en las ecuaciones 21-1 o 21-2. Sin embargo, realizar un experimento real para medir la fuerza entre dos cargas es muy difícil. Por una razón: cualquier cantidad deseada de carga no se obtiene fácilmente con precisión; y la carga tiende a fugarse de los objetos hacia el aire. Por otra parte, la cantidad de corriente en un alambre puede variar con precisión y de manera continua (al colocar un resistor variable en un circuito). Por lo tanto, la fuerza entre dos conductores portadores de corriente es mucho más fácil de medir con precisión. Por ello, definimos primero el ampere, y luego el coulomb en términos del ampere. En el National Institute of Standards and Technology en Maryland, la medición exacta de corriente se realiza empleando bobinas circulares de alambre y no alambres rectos, porque es más práctico y exacto.

Las intensidades de los campos eléctrico y magnético también se definen de manera operativa: el campo eléctrico en términos de la fuerza medida en una carga, mediante la ecuación 21-3; y el campo magnético en términos de la fuerza por unidad de longitud en un alambre portador de corriente, mediante la ecuación 27-2.

28–4 Ley de Ampère

En la sección 28-1 vimos que la ecuación 28-1 proporciona la relación entre la corriente en un largo alambre recto y el campo magnético que produce. Esta ecuación es válida *sólo* para un largo alambre recto. ¿Existe una relación general entre una corriente en un alambre de cualquier forma y el campo magnético en torno a él? La respuesta es sí: el científico francés André Marie Ampère (1775-1836) propuso tal relación poco después del descubrimiento de Oersted. Considere una trayectoria cerrada arbitraria alrededor de una corriente, como se muestra en la figura 28-8, e imagine que esta trayectoria está constituida por segmentos cortos, cada uno de longitud $\Delta\ell$. Primero, tome el producto de la longitud de cada segmento por la componente de $\vec{\mathbf{B}}$ paralela a ese segmento (llamemos a esta componente $B_\parallel$). Si ahora sumamos todos estos términos, de acuerdo con Ampère, el resultado será igual a μ_0 por la corriente neta I_{enc} que pasa a través de las superficies encerradas por la trayectoria:

$$\sum B_\parallel \, \Delta\ell \;=\; \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

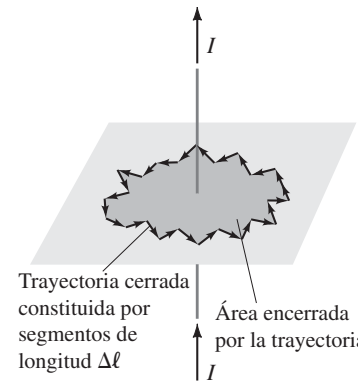


FIGURA 28–8 Trayectoria arbitraria que encierra una corriente, para la ley de Ampère. La trayectoria se descompone en segmentos de igual longitud $\Delta\ell$.

Las longitudes $\Delta\ell$ se eligen de manera que $B_\parallel$ sea en esencia constante a lo largo de cada segmento. La suma debe realizarse con base en la *trayectoria cerrada*; e I_{enc} es la corriente neta que pasa a través de la superficie acotada por esta trayectoria cerrada (anaranjado en la figura 28-8). En el límite $\Delta\ell \to 0$, esta relación se convierte en

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \;=\; \mu_0 I_{\text{enc}}, \qquad \textbf{(28–3)}$$

LEY DE AMPÈRE

donde $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es un vector de longitud infinitesimal y el producto punto vectorial garantiza que se tome la componente paralela de $\vec{\mathbf{B}}$. La ecuación 28-3 se conoce como **ley de Ampère**. El integrando en la ecuación 28-3 se lleva a través de una trayectoria cerrada, e I_{enc} es la corriente que pasa a través del espacio encerrado por la trayectoria o espira elegida.

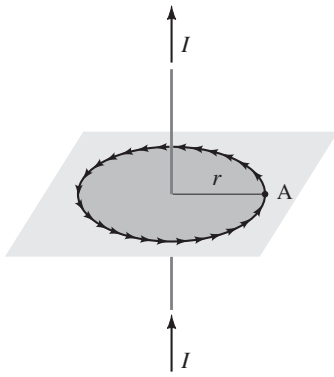


FIGURA 28–9 Trayectoria circular de radio *r*.

Para comprender mejor la ley de Ampère, apliquémosla al caso simple de un solo alambre recto y largo que conduce una corriente I que ya examinamos, y que sirvió de inspiración al mismo Ampère. Suponga que se quiere encontrar la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ en algún punto A que esté a una distancia r del alambre (figura 28-9). Se sabe que las líneas del campo magnético son círculos con el alambre en su centro. Para aplicar la ecuación 28-3, elija como trayectoria de integración un círculo de radio r. La elección de la trayectoria es personal, así que elija una que sea conveniente: en cualquier punto sobre esta trayectoria circular, $\vec{\mathbf{B}}$ será tangente al círculo. Más aún, dado que todos los puntos sobre la trayectoria están a la misma distancia del alambre, por simetría se espera que B tenga la misma magnitud en cada punto. Por lo tanto, para cualquier segmento corto del círculo (figura 28-9), $\vec{\mathbf{B}}$ será paralelo a ese segmento, y (al establecer que $I_{\text{enc}} = I$)

$$\mu_0 I = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \oint B\, d\ell = B \oint d\ell = B(2\pi r),$$

donde $\oint d\ell = 2\pi r$, la circunferencia del círculo. Al despejar B se obtiene

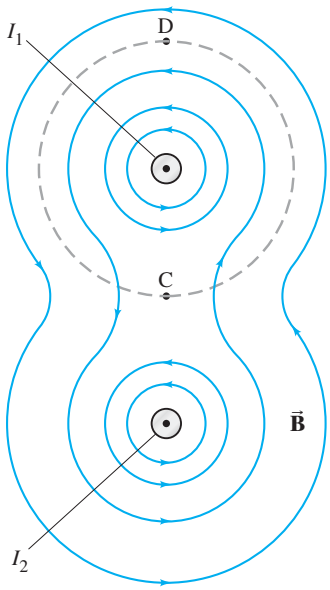
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Ésta es justo la ecuación 28-1 para el campo cerca de un largo alambre recto, que se estudió antes.

Por lo tanto, la ley de Ampère funciona para este caso simple. Un gran cúmulo de experimentos indican que la ley de Ampère es válida en general. Sin embargo, al igual que la ley de Gauss para el campo eléctrico, su valor práctico como medio para calcular el campo magnético está limitado principalmente a situaciones simples o simétricas. Su importancia reside en que relaciona el campo magnético con la corriente en una forma directa y matemáticamente elegante. En consecuencia, la ley de Ampère se considera una de las leyes básicas de la electricidad y el magnetismo. Es válida para cualquier situación donde las corrientes y los campos sean estacionarios y no cambien con el tiempo, y donde no estén presentes materiales magnéticos.

Ahora podemos ver por qué la constante en la ecuación 28-1 se escribe $\mu_0/2p$. Esto se hace para que, en la ecuación 28-3, sólo aparezca μ_0 en vez de $2\pi k$, por ejemplo, si se usó k en la ecuación 28-1. De esta forma, la ecuación más fundamental, la ley de Ampère, tiene la forma más simple.

FIGURA 28–10 Líneas de campo magnético en torno a dos largos alambres paralelos cuyas corrientes iguales, I_1 e I_2, van en la dirección del papel hacia el lector.



Cabe hacer notar que $\vec{\mathbf{B}}$ en la ley de Ampère no necesariamente se debe sólo a la corriente I_{enc}. La ley de Ampère, como la ley de Gauss para el campo eléctrico, es válida en general. $\vec{\mathbf{B}}$ es el campo en cada punto en el espacio a lo largo de la trayectoria elegida debido a todas las fuentes, incluida la corriente I encerrada por la trayectoria, pero también debida a cualquier otra fuente. Por ejemplo, el campo que rodea a los dos alambres paralelos portadores de corriente es la suma vectorial de los campos producidos por cada uno, y las líneas de campo se muestran en la figura 28-10. Si la trayectoria elegida para la integral (ecuación 28-3) es un círculo con centro en alguno de los alambres, con radio menor que la distancia entre los alambres (la línea punteada en la figura 28-10), sólo la corriente (I_1) en el alambre rodeado se incluye en el lado derecho de la ecuación 28-3 $\vec{\mathbf{B}}$ en el lado izquierdo de la ecuación debe ser el $\vec{\mathbf{B}}$ total en cada punto debido a ambos alambres. Advierta también que $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ para la trayectoria que se ilustra en la figura 28-10, es la misma ya sea que el segundo alambre esté o no presente (en ambos casos, es igual a $\mu_0 I_1$, de acuerdo con la ley de Ampère). ¿Cómo es posible esto? Es posible porque los campos debidos a los dos alambres se cancelan parcialmente uno a otro en algunos puntos entre ellos, como en el punto C en el diagrama ($\vec{\mathbf{B}} = 0$ en un punto a la mitad del camino entre los alambres, si $I_1 = I_2$); en otros puntos, como D en la figura 28-10, los campos se suman para producir un campo más grande. En la *suma*, $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$, estos efectos se equilibran de manera que $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_1$, ya sea que el segundo alambre esté o no presente. La integral $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ será la misma en cada caso, aun cuando $\vec{\mathbf{B}}$ no sea el mismo en cada punto para cada uno de los dos casos.

EJEMPLO 28–6 **Campo adentro y afuera de un alambre.** Un largo alambre conductor recto y cilíndrico, de radio R, transporta una corriente I con densidad de corriente uniforme en el conductor. Determine el campo magnético debido a esta corriente en *a*) puntos afuera del conductor ($r > R$), y *b*) puntos adentro del conductor ($r < R$). Véase la figura 28-11. Suponga que r, la distancia radial desde el eje, es mucho menor que la longitud del alambre. *c*) Si $R = 2.00$ mm e $I = 60$ A, ¿cuál es B en $r = 1.0$ mm, $r = 2.0$ mm y $r = 3.0$ mm?

PLANTEAMIENTO Podemos usar simetría: puesto que el alambre es largo, recto y cilíndrico, se espera, de acuerdo con la simetría, que el campo magnético deba ser el mismo en todos los puntos que estén a la misma distancia del centro del conductor. No hay razón por la que alguno de tales puntos deba tener preferencia sobre los demás a la misma distancia desde el alambre (son físicamente equivalentes). Así que B debe tener el mismo valor en todos los puntos a la misma distancia desde el centro. También se espera que $\vec{\mathbf{B}}$ sea tangente a los círculos alrededor del alambre (figura 28-1), así que se elige una trayectoria circular de integración como se hizo en la figura 28-9.

SOLUCIÓN *a*) Aplique la ley de Ampère e integre en torno a un círculo ($r > R$) con centro en el alambre (figura 28-11a) y luego $I_{\text{enc}} = I$:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

o

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \qquad [r > R]$$

que es el mismo resultado que para el alambre delgado.

b) Dentro del alambre ($r < R$), de nuevo elegimos una trayectoria circular concéntrica con el cilindro; se espera que $\vec{\mathbf{B}}$ sea tangencial a esa trayectoria y, de nuevo, debido a la simetría, tendrá la misma magnitud en todos los puntos del círculo. La corriente encerrada en este caso es menor que I por un factor del cociente de las áreas:

$$I_{\text{enc}} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Así que la ley de Ampère da

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \right)$$

de manera que

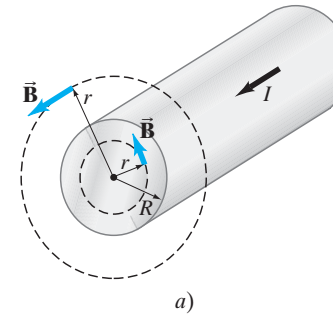
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}. \qquad [r < R]$$

El campo es cero en el centro del conductor y aumenta linealmente con r hasta $r = R$; más allá de $r = R$, B disminuye como $1/r$. Esto se ilustra en la figura 28-11b. Advierta que estos resultados sólo son válidos para puntos cerca del centro del conductor, en comparación con su longitud. Para que fluya una corriente, debe haber alambres conectores (por ejemplo, a una batería), y el campo debido a estos alambres conductores, si no están muy alejados, destruirá la simetría supuesta.

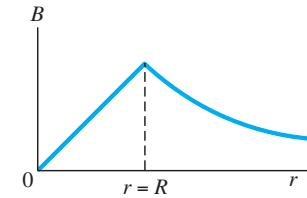
c) En $r = 2.0$ mm, la superficie del alambre, $r = R$, de manera que

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(60\,\text{A})}{(2\pi)(2.0 \times 10^{-3}\,\text{m})} = 6.0 \times 10^{-3}\,\text{T}.$$

En *b*) se vio que, dentro del alambre, B es lineal en r. Así que, en $r = 1.0$ mm, B será la mitad de lo que es con $r = 2.0$ mm, o 3.0×10^{-3} T. Afuera del alambre, B disminuye como $1/r$, de manera que, con $r = 3.0$ mm, será dos tercios de lo que es con $r = 2.0$ mm, o $B = 4.0 \times 10^{-3}$ T. Para comprobar, use el resultado de *a*), $B = \mu_0 I/2\pi r$, que da lo mismo.



a)



b)

FIGURA 28–11 Campo magnético dentro y fuera de un conductor cilíndrico (ejemplo 28-6).

⚠ CUIDADO

Los alambres de conexión pueden destruir la simetría supuesta

FÍSICA APLICADA

Cable coaxial (blindaje)

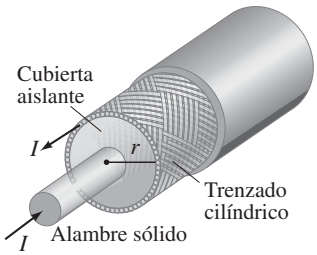


FIGURA 28–12 Cable coaxial. Ejemplo 28-7.

FIGURA 28–13 Ejercicio C.

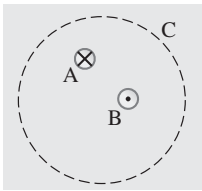
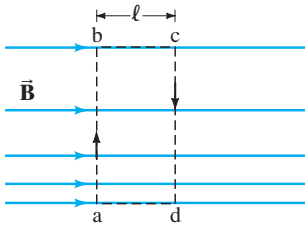
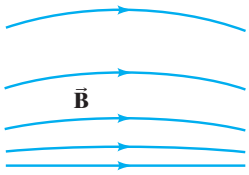


FIGURA 28–14 Ejemplo 28–8.



a) (imposible)



b) (posible)

EJEMPLO CONCEPTUAL 28–7 **Cable coaxial.** Un *cable coaxial* es un solo alambre rodeado por un trenzado metálico cilíndrico, como se ilustra en la figura 28-12. Los dos conductores están separados por un aislante. El alambre central conduce corriente al otro extremo del cable, y el trenzado exterior transporta la corriente de regreso y generalmente se considera como tierra. Describa el campo magnético *a*) en el espacio entre los conductores y *b*) afuera del cable.

RESPUESTA *a*) En el espacio entre los conductores, es posible aplicar la ley de Ampère para una trayectoria circular en torno al alambre central, tal como se hizo para el caso que se representa en las figuras 28-9 y 28-11. Las líneas del campo magnético serán círculos concéntricos centrados en el centro del alambre, y la magnitud está dada por la ecuación 28-1. La corriente en el conductor exterior no tiene relación con este resultado. (La ley de Ampère sólo usa la corriente encerrada *adentro* de la trayectoria; en tanto las corrientes afuera de la trayectoria no afecten la simetría del campo, no contribuyen en absoluto con el campo a lo largo de la trayectoria). *b*) Afuera del cable, se puede dibujar una trayectoria circular similar, por lo que se espera que el campo tenga la misma simetría cilíndrica. Sin embargo, ahora hay dos corrientes encerradas por la trayectoria, y suman cero. El campo afuera del cable es cero.

La característica agradable de los cables coaxiales es que están autoblindados: afuera del cable no existen campos magnéticos extraviados. El conductor cilíndrico exterior también evita que entren los campos eléctricos externos (véase también el ejemplo 21-14). Esto los hace ideales para conducir señales cerca de equipo sensible. Los amantes de la música usan cables coaxiales entre componentes de equipo estéreo e incluso hacia los altavoces.

EJERCICIO C En la figura 28-13, A y B son alambres que conducen, cada uno, una corriente de 3.0 A, pero en direcciones opuestas. En el círculo C, ¿cuál enunciado es verdadero? *a*) $B = 0$; *b*) $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 0$; *c*) $B = 3\mu_0$; *d*) $B = -3\mu_0$; *e*) $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 6\mu_0$.

EJEMPLO 28–8 **Un buen uso de la ley de Ampère.** Con base en la ley de Ampère, demuestre que, en cualquier región del espacio donde no hay corrientes, el campo magnético no puede ser tanto unidireccional como no uniforme, tal como se ilustra en la figura 28-14a.

PLANTEAMIENTO El espaciamiento más ancho de líneas cerca de la parte superior de la figura 28-14a indica que el campo $\vec{\mathbf{B}}$ tiene una magnitud menor en la parte superior que en la parte inferior. Aplique la ley de Ampère a la trayectoria rectangular *abcd* que se indica con líneas punteadas en la figura 28-14a.

SOLUCIÓN Puesto que ninguna corriente está encerrada en la trayectoria elegida, la ley de Ampère da

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 0.$$

La integral a lo largo de las secciones *ab* y *cd* es cero, pues $\vec{\mathbf{B}} \perp d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. Por lo tanto,

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = B_{\text{bc}}\ell - B_{\text{da}}\ell = (B_{\text{bc}} - B_{\text{da}})\ell,$$

que no es cero, pues el campo B_{bc} a lo largo de la trayectoria bc es menor que el campo B_{da} a lo largo de la trayectoria *da*. En consecuencia, se tiene una contradicción: $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ no puede ser tanto cero (pues $I = 0$) como distinto de cero. Por lo tanto, se demostró que un campo unidireccional no uniforme es incongruente con la ley de Ampère. Un campo no uniforme cuya dirección también cambia, como en la figura 28-14b, es congruente con la ley de Ampère (convénzase de que esto es así), además de posible. El borde del campo de un imán permanente (figura 27-7) tiene esta forma.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ley de Ampère

1. La ley de Ampère, como la ley de Gauss, siempre es un enunciado válido. Pero como herramienta de cálculo está limitada principalmente a sistemas con un alto grado de simetría. El primer paso para aplicar la ley de Ampère es identificar la simetría útil.
2. Elija una trayectoria de integración que refleje la simetría (véanse los ejemplos). Busque trayectorias donde B tenga magnitud constante a lo largo de toda la trayectoria o a lo largo de segmentos de la trayectoria. Asegúrese de que la trayectoria de integración pase a través del punto donde quiere evaluar el campo magnético.
3. Use simetría para determinar la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ a lo largo de la trayectoria de integración. Con una elección inteligente de trayectoria, $\vec{\mathbf{B}}$ será paralelo o perpendicular a la trayectoria.
4. Determine la corriente encerrada, I_{enc}. Tenga cuidado con los signos. Enrolle los dedos de su mano derecha a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ de manera que su pulgar indique la dirección de la corriente positiva. Si tiene un conductor sólido y su trayectoria de integración no encierra toda la corriente, puede usar la densidad de corriente (corriente por unidad de área) multiplicada por el área encerrada (como en el ejemplo 28-6).

28–5 Campo magnético de un solenoide y un toroide

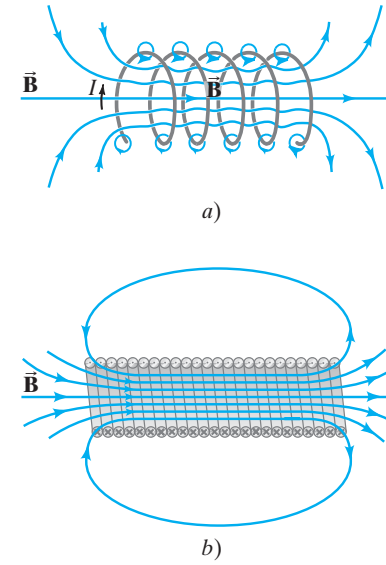


FIGURA 28–15 Campo magnético debido a un solenoide: *a*) espiras muy espaciadas, *b*) espiras muy juntas.

Una larga bobina de alambre que consiste en muchas espiras se llama **solenoide**. Cada espira produce un campo magnético, como se mostró en la figura 27-9. En la figura 28-15a se ve el campo generado por un solenoide cuando las espiras están separadas. Cerca de cada alambre, las líneas de campo son casi círculos, como para un alambre recto (esto es, a distancias que son pequeñas comparadas con la curvatura del alambre). Entre dos alambres cualesquiera, los campos debidos a cada espira tienden a cancelarse. Hacia el centro del solenoide, los campos se suman para dar un campo que puede ser bastante grande y muy uniforme. Para un solenoide largo con espiras muy juntas, el campo es casi uniforme y paralelo al eje del solenoide dentro de toda la sección transversal, como se observa en la figura 28-15b. El campo afuera del solenoide es muy pequeño en comparación con el campo interior, excepto cerca de los extremos. Advierta que el mismo número de líneas de campo que se concentran dentro del solenoide se dispersan hacia el amplio espacio abierto exterior.

Ahora, con base en la ley de Ampère, se determina el campo magnético dentro de un solenoide muy largo (idealmente, infinito) y con espiras muy apretadas. Elegimos la trayectoria *abcd* que se muestra en la figura 28-16, lejos de cualquier extremo, para aplicar la ley de Ampère. Aquí se considerará que esta trayectoria está constituida por cuatro segmentos, los lados del rectángulo: *ab*, *bc*, *cd*, *da*. Entonces el lado izquierdo de la ecuación 28-3, la ley de Ampère, se convierte en:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int_a^b \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} + \int_b^c \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} + \int_c^d \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} + \int_d^a \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}.$$

El campo afuera del solenoide es muy pequeño como para despreciarse en comparación con el campo interior. Por ende, el primer término en esta suma será cero. Más aún, $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a los segmentos *bc* y *da* dentro del solenoide, y es casi cero entre las espiras y afuera de ellas, así que estos términos también son cero. Por lo tanto, la integral se redujo al segmento *cd* donde $\vec{\mathbf{B}}$ es el campo casi uniforme dentro del solenoide, y es paralelo a $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$, de manera que

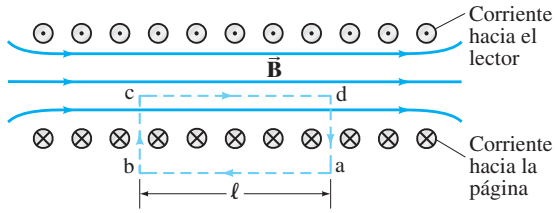


FIGURA 28–16 Vista transversal de un solenoide. El campo magnético interno es recto, excepto en los extremos. Las líneas punteadas indican la trayectoria elegida para usar en la ley de Ampère. ⊙ y ⊗ son direcciones de corriente eléctrica (en las espiras de alambre) hacia el lector y hacia la página.

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int_c^d \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = B\ell,$$

donde ℓ es el segmento *cd*. Ahora se determinará la corriente encerrada por esta espira para el lado derecho de la ley de Ampère, ecuación 28-3. Si una corriente *I* fluye en el alambre del solenoide, la corriente total encerrada por la trayectoria *abcd* es *NI*, donde *N* es el número de espiras que abarca la trayectoria (cinco en la figura 28-16). Por lo tanto, la ley de Ampère produce

$$B\ell = \mu_0 NI.$$

Si $n = N/\ell$ es el *número de espiras por unidad de longitud*, entonces

$$B = \mu_0 nI. \qquad \text{[solenoide]} \quad \textbf{(28–4)}$$

Ésta es la magnitud del campo magnético dentro de un solenoide. Advierta que *B* sólo depende del número de espiras por unidad de longitud, *n*, y la corriente *I*. El campo no depende de la posición dentro del solenoide, de manera que *B* es uniforme. Esto es estrictamente cierto sólo para un solenoide infinito, pero es una buena aproximación para puntos no cercanos a los extremos de uno real.

EJEMPLO 28–9 **Campo dentro de un solenoide.** Un delgado solenoide de 10 cm de largo, que se utiliza para rápida conmutación electromecánica, tiene un total de 400 espiras de alambre y conduce una corriente de 2.0 A. Calcule el campo interior cerca del centro.

PLANTEAMIENTO Se emplea la ecuación 28-4, donde el número de espiras por unidad de longitud es $n = 400/0.10\ \text{m} = 4.0 \times 10^3\ \text{m}^{-1}$.

SOLUCIÓN $B = \mu_0 nI = (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(4.0 \times 10^3\ \text{m}^{-1})(2.0\ \text{A}) = 1.0 \times 10^{-2}\ \text{T}.$

Una mirada de cerca a la figura 28-15 revela que el campo afuera de un solenoide es muy parecido a un imán en forma de barra (figura 27-4). De hecho, un solenoide actúa como un imán, con un extremo que actúa como polo norte y el otro como polo sur, dependiendo de la dirección de la corriente en las espiras. Puesto que las líneas del campo magnético salen del polo norte de un imán, los polos norte de los solenoides en la figura 28-15 están a la derecha.

Los solenoides tienen muchas aplicaciones prácticas, y algunas de ellas se estudiarán más adelante en el capítulo, en la sección 28-8.

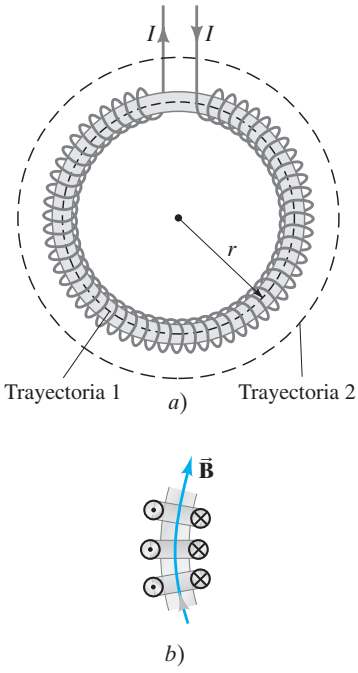


FIGURA 28–17 *a*) Un toroide. *b*) Una sección del toroide que indica la dirección de la corriente para tres espiras: ⊙ significa corriente hacia el lector, ⊗ significa corriente que se aleja del lector.

EJEMPLO 28–10 **Toroide.** Con base en la ley de Ampère, determine el campo magnético *a*) dentro y *b*) afuera de un toroide, que es un solenoide doblado en forma de círculo, como se muestra en la figura 28-17a.

PLANTEAMIENTO Las líneas del campo magnético dentro del toroide serán círculos concéntricos con el toroide. (Si considera al toroide como un solenoide doblado en círculo, las líneas de campo se doblan junto con el solenoide). La dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ es en sentido horario. Elija como trayectoria de integración una de estas líneas de campo, de radio r, dentro del toroide, como se muestra mediante la línea punteada marcada como "trayectoria 1" en la figura 28-17a. Se hace esta elección para aprovechar la simetría de la situación, de manera que B será tangente a la trayectoria y tendrá la misma magnitud en todos los puntos a lo largo de la trayectoria (aunque no necesariamente es la misma en toda la sección transversal del toroide). Esta elección de trayectoria encierra *todas* las espiras; si hay N espiras, y cada una conduce corriente I, entonces $I_{\text{enc}} = NI$.

SOLUCIÓN *a*) La ley de Ampère aplicada a lo largo de esta trayectoria da

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$
$$B(2\pi r) = \mu_0 NI,$$

donde N es el número total de espiras e I es la corriente en cada una de las espiras. Por lo tanto,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

El campo magnético B no es uniforme dentro del toroide: es más grande a lo largo del borde interior (donde r es menor) y más pequeño en el borde exterior. Sin embargo, si el toroide es grande, pero delgado (de manera que la diferencia entre los radios interior y exterior sea pequeña en comparación con el radio promedio), el campo será uniforme en esencia dentro del toroide. En este caso, la fórmula para B se reduce a la de un solenoide recto $B = \mu_0 nI$, donde $n = N/(2\pi r)$ es el número de espiras por unidad de longitud. *b*) Afuera del toroide, se elige como trayectoria de integración un círculo concéntrico con el toroide, la "trayectoria 2" en la figura 28-17a. Esta trayectoria encierra N espiras que conducen corriente I en un sentido y N espiras que transportan la misma corriente en el sentido opuesto. (La figura 28-17b indica las direcciones de la corriente para las partes de la espira en el interior y el exterior del toroide). Por lo tanto, la corriente neta encerrada por la trayectoria 2 es cero. Para un toroide con espiras muy apretadas, todos los puntos en la trayectoria 2 son equidistantes del toroide y equivalentes, así que se espera que B sea igual en todos los puntos a lo largo de la trayectoria. En consecuencia, la ley de Ampère da

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$
$$B(2\pi r) = 0$$

o

$$B = 0.$$

Lo mismo es cierto para una trayectoria que se toma con un radio menor que el del toroide. De manera que no hay campo exterior para un toroide con espiras muy apretadas. Todo está en el interior de las espiras.

28–6 Ley de Biot-Savart

La utilidad de la ley de Ampère para determinar el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ debido a corrientes eléctricas particulares está restringida a situaciones donde la simetría de las corrientes dadas permiten evaluar $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ con facilidad. Esto, desde luego, no invalida la ley de Ampère ni reduce su importancia fundamental. Recuerde el caso eléctrico, donde la ley de Gauss se considera fundamental, pero está limitada en su uso para calcular realmente $\vec{\mathbf{E}}$. Con frecuencia debemos determinar el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ mediante otro método que suma las aportaciones debidas a elementos de carga infinitesimales dq por medio de la ley de Coulomb $dE = (1/4\pi\epsilon_0)(dq/r^2)$. Un equivalente magnético a esta forma infinitesimal de la ley de Coulomb sería útil para corrientes que no tienen gran simetría. Tal ley la desarrollaron Jean Baptiste Biot (1774-1862) y Felix Savart (1791-1841), poco después del descubrimiento de Oersted en 1820 de que una corriente produce un campo magnético.

De acuerdo con Biot y Savart, una corriente I que fluye en cualquier trayectoria se puede considerar como muchos pequeños (infinitesimales) elementos de corriente, como en el alambre de la figura 28-18. Si $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ representa cualquier longitud infinitesimal a lo largo de la cual fluye la corriente, entonces el campo magnético, $d\vec{\mathbf{B}}$, en cualquier punto P en el espacio, debido a este elemento de corriente, está dado por

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \qquad \textbf{(28–5)}$$

Ley de Biot-Savart

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de desplazamiento desde el elemento $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ hasta el punto P, y $\hat{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}/r$ es el vector unitario (magnitud = 1) en la dirección de $\vec{\mathbf{r}}$ (véase la figura 28-18).

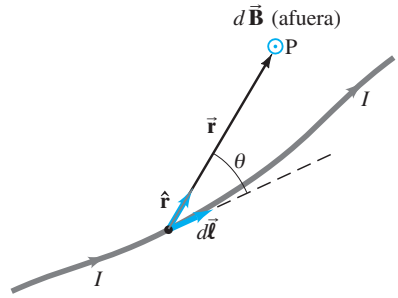


FIGURA 28–18 Ley de Biot-Savart: el campo en P debido al elemento de corriente $I\,d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es $d\vec{\mathbf{B}} = (\mu_0 I/4\pi)(d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{r}}/r^2)$.

La ecuación 28-5 se conoce como **ley de Biot-Savart**. La magnitud de $d\vec{\mathbf{B}}$ es

$$dB = \frac{\mu_0 I\, d\ell \,\operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}, \qquad \textbf{(28–6)}$$

donde θ es el ángulo entre $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$ (figura 28-18). El campo magnético total en el punto P se encuentra entonces al sumar (integrando) todos los elementos de corriente:

$$\vec{\mathbf{B}} = \int d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Advierta que esto es una suma *vectorial*. La ley de Biot-Savart es el equivalente magnético de la ley de Coulomb en su forma infinitesimal. Incluso es una ley de cuadrado inverso, como la ley de Coulomb.

Una importante diferencia entre la ley de Biot-Savart y la ley de Ampère (ecuación 28-3) es que en la ley de Ampère $\left[\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}}\right]$, $\vec{\mathbf{B}}$ no necesariamente se debe sólo a la corriente encerrada por la trayectoria de integración. Pero en la ley de Biot-Savart el campo $d\vec{\mathbf{B}}$ en la ecuación 28-5 se debe sólo, y por completo, al elemento de corriente $I\,d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. Para encontrar el $\vec{\mathbf{B}}$ total en cualquier punto del espacio, es necesario incluir *todas* las corrientes.

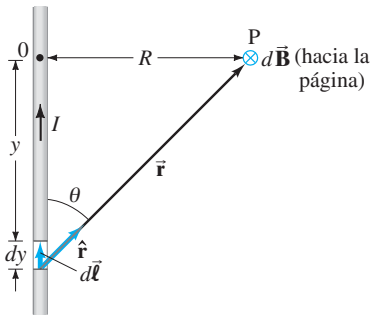


FIGURA 28–19 Determinación de $\vec{\mathbf{B}}$ debido a un largo alambre recto con base en la ley de Biot-Savart.

EJEMPLO 28–11 **$\vec{\mathbf{B}}$ debido a corriente *I* en un alambre recto.** Para el campo cerca de un largo alambre recto que conduce una corriente I, demuestre que la ley de Biot-Savart produce el mismo resultado que la ecuación 28-1, $B = \mu_0 I/2\pi r$.

PLANTEAMIENTO Calcule el campo magnético en la figura 28-19 en el punto P, que está a una distancia perpendicular R de un alambre infinitamente largo. La corriente se mueve hacia arriba, y tanto $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ como $\hat{\mathbf{r}}$, que aparece en el producto cruz de la ecuación 28-5, están en el plano de la página. En consecuencia, la dirección del campo $d\vec{\mathbf{B}}$ debido a cada elemento de corriente debe dirigirse hacia el plano de la página, como se indica (regla de la mano derecha para el producto cruz $d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{r}}$). Por lo tanto, todos los $d\vec{\mathbf{B}}$ tienen la misma dirección en el punto P, y se suman para dar a $\vec{\mathbf{B}}$ la misma dirección, en concordancia con los resultados anteriores (figuras 28-1 y 28-11).

SOLUCIÓN La magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ será

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{y=-\infty}^{+\infty}\frac{dy\,\operatorname{sen}\theta}{r^2},$$

donde $dy = d\ell$ y $r^2 = R^2 + y^2$. Note que se integra sobre y (la longitud del alambre), de manera que R se considera constante. Tanto y como θ son variables, pero no son independientes. De hecho, $y = -R/\tan\theta$. Advierta que y se mide como positivo hacia arriba desde el punto 0, así que para el elemento de corriente que se considera, $y < 0$. Entonces,

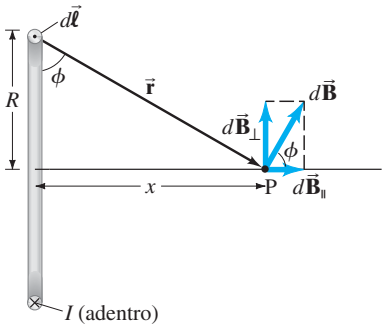
$$dy = +R\csc^2\theta\,d\theta = \frac{R\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{R\,d\theta}{(R/r)^2} = \frac{r^2\,d\theta}{R}.$$

A partir de la figura 28-19 se puede ver que $y = -\infty$ corresponde a $\theta = 0$ y que $y = +\infty$ corresponde a $\theta = \pi$ radianes. Así que la integral se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Ésta es justo la ecuación 28-1 para el campo cerca de un alambre largo, donde se usó R en vez de r.

FIGURA 28–20 Determinación de $\vec{\mathbf{B}}$ debido a una espira de corriente.



EJEMPLO 28–12 **Espira de corriente.** Determine $\vec{\mathbf{B}}$ para puntos sobre el eje de una espira de alambre circular, de radio R, que conduce una corriente I, figura 28-20.

PLANTEAMIENTO Para un elemento de corriente en la parte superior de la espira, el campo magnético $d\vec{\mathbf{B}}$ en el punto P sobre el eje es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$ como se muestra, y tiene magnitud (ecuación 28-5)

$$dB = \frac{\mu_0 I\,d\ell}{4\pi r^2}$$

pues $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$ de manera que $|d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{r}}| = d\ell$. Es posible descomponer $d\vec{\mathbf{B}}$ en componentes $dB_\parallel$ y $dB_\perp$, que son paralela y perpendicular al eje, como se observa.

SOLUCIÓN Cuando se suma sobre todos los elementos de la espira, la simetría indica que las componentes perpendiculares se cancelarán en lados opuestos, de manera que $B_\perp = 0$. En consecuencia, el $\vec{\mathbf{B}}$ total apuntará a lo largo del eje y tendrá magnitud

$$B = B_\parallel = \int dB\cos\phi = \int dB\,\frac{R}{r} = \int dB\,\frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

donde x es la distancia de P desde el centro del anillo, y $r^2 = R^2 + x^2$. Ahora ponga dB de la ecuación anterior e integre en torno a la espira de corriente, y note que todos los segmentos $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ de corriente están a la misma distancia, $(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, desde el punto P:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\int d\ell = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pues $\int d\ell = 2\pi R$, la circunferencia de la espira.

NOTA En el centro mismo de la espira (donde $x = 0$), el campo tiene su valor máximo

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \qquad \text{[en el centro de la espira de corriente]}$$

Recuerde a partir de la sección 27-5 que una espira de corriente, como la que acabamos de examinar (figura 28-20), se considera un **dipolo magnético**. Ahí se vio que una espira de corriente tiene un momento dipolar magnético

$$\mu = NIA,$$

donde A es el área de la espira y N el número de vueltas en la espira, y cada una conduce una corriente I. En el capítulo 27 también se vio que un dipolo magnético colocado en un campo magnético externo experimenta una torca (o torque) y posee energía potencial, tal como un dipolo eléctrico. En el ejemplo 28-12 se observó otro aspecto de un dipolo magnético: el campo magnético *producido por* un dipolo magnético tiene magnitud, a lo largo del eje del dipolo, de

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esto se puede expresar en términos del momento dipolar magnético $\mu = IA = I\pi R^2$ (para una sola espira $N = 1$):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad \text{[dipolo magnético]} \quad \textbf{(28–7a)}$$

(Tenga cuidado en distinguir μ para momento dipolar, de μ_0, la constante de permeabilidad magnética). Para distancias lejanas de la espira, $x \gg R$, esto se convierte en

$$B \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{x^3}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{sobre el eje,}\\ \text{dipolo magnético, } x \gg R\end{array}\right] \quad \textbf{(28–7b)}$$

El campo magnético sobre el eje de un dipolo magnético aumenta con el cubo de la distancia, tal como lo hace el campo eléctrico en el caso de un dipolo eléctrico. B disminuye como el cubo de la distancia, también para puntos que no están sobre el eje, aunque el factor multiplicador no es el mismo. El campo magnético debido a una espira de corriente se puede determinar en varios puntos con base en la ley de Biot-Savart y los resultados están en concordancia con los experimentos. En la figura 28-21 se muestran las líneas de campo en torno a una espira de corriente.

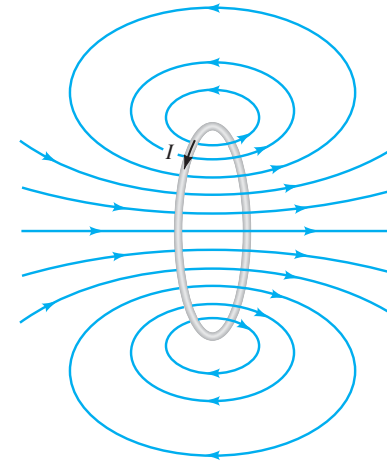


FIGURA 28–21 Campo magnético debido a una espira circular de alambre. (Igual que la figura 27-9.)

EJEMPLO 28–13 **$\vec{\mathbf{B}}$ debido a un segmento de alambre.** Un cuarto de una espira circular de alambre conduce una corriente I, como se muestra en la figura 28-22. La corriente I entra y sale sobre segmentos rectos de alambre, como se ilustra; los alambres rectos están a lo largo de la dirección radial desde el centro C de la porción circular. Determine el campo magnético en el punto C.

PLANTEAMIENTO La corriente en las secciones rectas no producen campo magnético en el punto C, porque $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$ en la ley de Biot-Savart (ecuación 28-5) son paralelos y, por lo tanto, $d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$. Cada pieza $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ de la sección curva del alambre produce un campo $d\vec{\mathbf{B}}$ que apunta hacia la página en C (regla de la mano derecha).

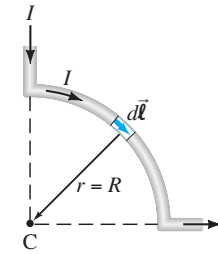
SOLUCIÓN La magnitud de cada $d\vec{\mathbf{B}}$ debido a cada $d\ell$ de la porción circular de alambre es (ecuación 28-6)

$$dB = \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi R^2}$$

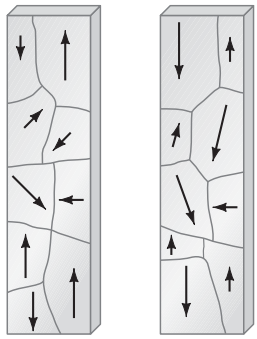
donde $r = R$ es el radio de la sección curva y sen q en la ecuación 28-6 es sen 90° = 1. Con $r = R$ para todos los segmentos $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$, se integra sobre un cuarto de círculo.

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\left(\frac{1}{4}2\pi R\right) = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

FIGURA 28–22 Eejemplo 28–13.



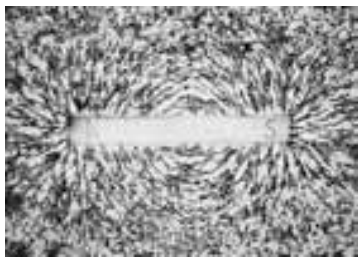
28–7 Materiales magnéticos: Ferromagnetismo



a) *b*)

FIGURA 28–23 *a*) Un trozo no magnetizado de hierro está formado por dominios que se disponen de manera aleatoria. Cada dominio es como un pequeño imán; las flechas representan la dirección de magnetización, donde la punta es el polo norte. *b*) En un imán los dominios se alinean preferentemente en una dirección (hacia abajo en este caso) y se pueden alterar en tamaño por el proceso de magnetización.

FIGURA 28–24 Limaduras de hierro se alinean a lo largo de las líneas de campo magnético debido a un imán permanente.



⚠ CUIDADO

$\vec{\mathbf{B}}$ *Las líneas de forman circuitos cerrados,* $\vec{\mathbf{E}}$ *comienza en* ⊕ *y termina en* ⊖

Los campos magnéticos se producen: **1.** por materiales magnéticos (imanes) y **2.** por corrientes eléctricas. Los materiales magnéticos comunes incluyen imanes ordinarios, núcleos de hierro en motores y electroimanes, cintas de grabación, discos duros de computadora y bandas magnéticas en las tarjetas de crédito. En la sección 27-1 vimos que el hierro (y algunos otros materiales) se pueden convertir en fuertes imanes. Se dice que estos materiales son **ferromagnéticos.** Ahora se estudiarán las fuentes del ferromagnetismo.

Un imán de barra, con sus dos polos opuestos cerca de cada extremo, recuerda un dipolo eléctrico (cargas positiva y negativa de igual magnitud separadas por una distancia). De hecho, a un imán de barra a veces se le conoce como "dipolo magnético". Hay "polos" opuestos separados por una distancia. Y las líneas de campo magnético de un imán de barra forman un patrón muy parecido al del campo eléctrico de un dipolo eléctrico: compare la figura 21-34a con la figura 27-4 (o 28-24).

Un examen microscópico revela que un trozo de hierro está formado por pequeñas regiones conocidas como **dominios**, con menos de 1 mm de longitud o ancho. Cada dominio se comporta como un pequeño imán con un polo norte y un polo sur. En un trozo no magnetizado de hierro, estos dominios se disponen al azar, como se observa en la figura 28-23a. Los efectos magnéticos de los dominios se cancelan mutuamente, de manera que este trozo de hierro no es un imán. En un imán, los dominios se alinean preferentemente en una dirección, como se ilustra en la figura 28-23b (hacia abajo en este caso). Es posible elaborar un imán a partir de un trozo no magnetizado de hierro que se coloca en un fuerte campo magnético. (Usted puede imantar una aguja, por ejemplo, al frotarla con un polo de un fuerte imán). La dirección de magnetización de los dominios en realidad puede girar ligeramente para estar más paralela al campo externo, y las fronteras de los dominios se pueden mover de manera que los dominios con orientación magnética paralela al campo externo crezcan un poco más (compare las figuras 28-23a y b).

Ahora es posible explicar cómo un imán es capaz de levantar trozos no magnetizados de hierro, como sujetapapeles. El campo del polo sur (por ejemplo) de un imán causa un ligero reordenamiento de los dominios en el objeto no magnetizado, que entonces se convierte en un imán temporal con su polo norte de frente al polo sur del imán permanente; en consecuencia, se produce atracción. De igual modo, limaduras de hierro alargadas en un campo magnético adquieren dominios alineados y se alinean para revelar la forma del campo magnético, figura 28-24.

Un imán de hierro puede permanecer magnetizado durante largo tiempo, por lo que se le conoce como "imán permanente". Pero si usted tira un imán al suelo o lo golpea con un martillo, puede sacudir los dominios al azar y el imán perderá parte o todo su magnetismo. Calentar un imán permanente también puede causar pérdida de magnetismo, pues elevar la temperatura aumenta el movimiento térmico aleatorio de los átomos, lo que tiende a disponer al azar los dominios. Por arriba de cierta temperatura, conocida como la **temperatura de Curie** (1043 K para el hierro), es imposible fabricar un imán. Hierro, níquel, cobalto, gadolinio y ciertas aleaciones son ferromagnéticos a temperatura ambiente; muchos otros elementos y aleaciones tienen temperatura de Curie baja y, por lo tanto, son ferromagnéticos sólo a bajas temperaturas. La mayoría de los otros metales, como el aluminio y el cobre, no manifiestan ningún efecto magnético apreciable (sin embargo, véase la sección 28-10).

La sorprendente similitud entre los campos producidos por un imán de barra y una espira de corriente eléctrica (figuras 27-4b y 28-21) ofrece un indicio de que tal vez los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas tienen algo que ver con el ferromagnetismo. De acuerdo con la teoría atómica moderna, los átomos se visualizan como poseedores de electrones que giran en órbita alrededor de un núcleo central. Los electrones tienen carga, de manera que constituyen una corriente eléctrica y, en consecuencia, producen un campo magnético; pero los campos debidos a electrones en órbita, por lo general, suman cero. Los electrones mismos producen un campo magnético adicional, como si ellos y su carga eléctrica giraran en torno a sus propios ejes. Se cree que el campo magnético debido al **espín**[†] del electrón es el que produce ferromagnetismo en la mayoría de los materiales ferromagnéticos.

En la actualidad se cree que *todos* los campos magnéticos son causados por corrientes eléctricas. Esto significa que las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas, a diferencia de las líneas de campo eléctrico, que comienzan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

[†]El nombre "espín" proviene de una antigua sugerencia de que este momento magnético intrínseco surge del "giro" (*spin*) del electrón sobre su eje (así como de "girar en órbita" alrededor del núcleo) para producir el campo adicional. Sin embargo, esta visión de un electrón que gira es muy simplista y carece de validez.

EJERCICIO D Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 733, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizá usted la respondió de manera diferente la primera vez.

*28–8 Electroimanes y solenoides: Aplicaciones

Una larga bobina de alambre que consiste en muchas espiras (o vueltas) de alambre, como se estudió en la sección 28-5, se llama solenoide. El campo magnético dentro de un solenoide puede ser bastante grande, pues será la suma de los campos debidos a la corriente en cada espira (véase la figura 28-25). El solenoide actúa como un imán; un extremo se considera el polo norte y el otro el polo sur, dependiendo de la dirección de la corriente en las espiras (use la regla de la mano derecha). Puesto que las líneas del campo magnético salen del polo norte de un imán, el polo norte del solenoide en la figura 28-25 está a la derecha.

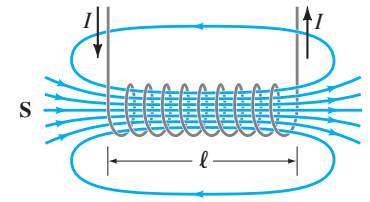


FIGURA 28–25 Campo magnético de un solenoide. El polo norte de este solenoide, considerado como un imán, está a la derecha, y el polo sur está a la izquierda.

Si una pieza de hierro se coloca dentro del solenoide, el campo magnético aumenta enormemente, pues el campo magnético producido por la corriente alinea los dominios del hierro. El campo magnético resultante es la suma de los campos magnéticos debidos a la corriente y al hierro, y puede ser cientos o miles de veces mayor que el campo debido sólo a la corriente (véase la sección 28-9). Este arreglo se llama **electroimán.** Las aleaciones de hierro que se usan en los electroimanes adquieren y pierden su magnetismo muy fácilmente cuando la corriente se enciende o se apaga, y se les conoce como "hierro blando" (es blando sólo en el sentido magnético) o "hierro dulce". El hierro que conserva su magnetismo incluso cuando no hay un campo aplicado externamente se llama "hierro duro". El hierro duro se emplea en imanes permanentes. El hierro blando o dulce por lo general se utiliza en electroimanes, de manera que el campo se pueda encender y apagar con facilidad. Si el hierro es duro o blando depende del tratamiento térmico, el tipo de aleación y otros factores.

FÍSICA APLICADA
Electroimanes y solenoides

Los electroimanes tienen muchas aplicaciones prácticas; se utilizan en motores y generadores, así como en la producción de grandes campos magnéticos para investigación. A veces no está presente un núcleo de hierro: el campo magnético proviene sólo de la corriente en las bobinas de alambre. Cuando la corriente fluye de manera continua en un electroimán normal, se produce una gran cantidad de calor de desecho (potencia I^2R). Se necesitan bobinas de enfriamiento, que son tubos que transportan agua, para absorber el calor en las grandes instalaciones.

FÍSICA APLICADA
Timbre, arranque de automóvil

Para algunas aplicaciones, los alambres portadores de corriente están hechos de material superconductor conservado por abajo de la temperatura de transición (sección 25-9). Es posible generar campos muy elevados utilizando alambre superconductor, sin un núcleo de hierro. No se necesita potencia eléctrica para mantener grandes corrientes en las bobinas superconductoras, lo que significa grandes ahorros de electricidad; tampoco se disiparán enormes cantidades de calor. Sin embargo, todo esto tiene un costo, porque se requiere energía para mantener las bobinas superconductoras a la temperatura baja necesaria.

Otro dispositivo útil consiste en un solenoide en el que se inserta parcialmente una varilla de hierro. Esta combinación también se conoce como solenoide. Un uso simple es como timbre doméstico de entrada (figura 28-26). Cuando el circuito se cierra al oprimir el botón, la bobina efectivamente se convierte en imán y ejerce una fuerza sobre la varilla de hierro. La varilla se ve atraída hacia la bobina y toca la campana. En los motores de arranque de los automóviles se utiliza un gran solenoide; cuando se pone en marcha un vehículo, se cierra un circuito que no sólo acciona el motor del arranque, sino que activa un solenoide que primero pone en contacto directo el arranque con los engranes en el volante del motor. Los solenoides se usan como interruptores en muchos dispositivos. Tienen la ventaja de mover partes mecánicas con rapidez y exactitud.

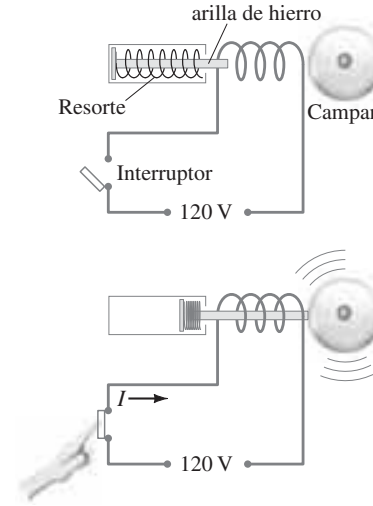


FIGURA 28–26 Solenoide usado como timbre.

*Interruptores de circuito magnético

Los interruptores de circuito magnético modernos, que protegen las casas y los edificios de sobrecargas e incendios, no sólo contienen partes "térmicas" (las tiras bimetálicas descritas en la sección 25-6, figura 25-19), sino también un sensor magnético. Si la corriente está por arriba de cierto nivel, el campo magnético producido tira de una placa de hierro que rompe los mismos puntos de contacto que en las figuras 25-19b y c. En los interruptores de circuito más avanzados, incluidos los interruptores de circuito de falla a tierra (GFCI, que se analizan en la sección 29-8), se emplea un solenoide. La varilla de hierro de la figura 28-26, en vez de tocar una campana, golpea un lado de un par de puntos para abrirlos y, así, abrir el circuito. Los interruptores de circuito magnético reaccionan rápidamente (< 10 ms) y en el caso de los edificios se diseñan para reaccionar a las altas corrientes de los cortos (sin que se apaguen para las sobrecargas de arranque de los motores).

FÍSICA APLICADA
Interruptores de circuito magnético

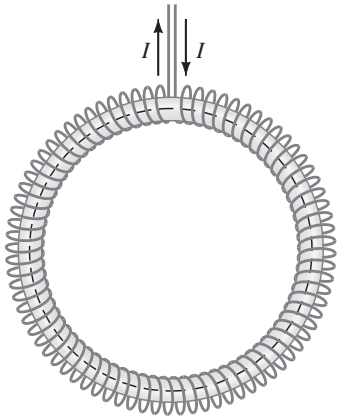


FIGURA 28–27 Toroide con núcleo de hierro.

FIGURA 28–28 Campo magnético total B en un toroide con núcleo de hierro como función del campo externo B_0 (la corriente I en la bobina produce B_0).

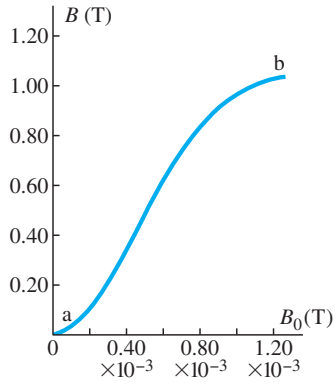
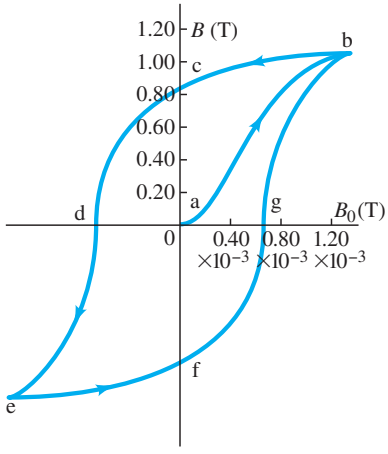


FIGURA 28–29 Curva de histéresis.



*28–9 Campos magnéticos en materiales magnéticos; histéresis

El campo de un solenoide largo es directamente proporcional a la corriente. De hecho, la ecuación 28-4 dice que el campo B_0 dentro de un solenoide está dado por

$$B_0 = \mu_0 nI.$$

Esto es válido si sólo existe aire dentro de la bobina. Si se coloca un trozo de hierro u otro material ferromagnético dentro del solenoide, el campo aumentará considerablemente, con frecuencia cientos o miles de veces. Esto ocurre porque los dominios en el hierro se alinean preferentemente con el campo externo. El campo magnético resultante es la suma del campo debido a la corriente y del campo debido al hierro. En ocasiones es conveniente expresar el campo total en este caso como una suma de dos términos:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}_M. \qquad \textbf{(28–8)}$$

Aquí, $\vec{\mathbf{B}}_0$ se refiere al campo debido sólo a la corriente en el alambre (el "campo externo"). Es el campo que estaría presente en ausencia de un material ferromagnético. Entonces $\vec{\mathbf{B}}_M$ representa el campo adicional debido al material ferromagnético en sí; con frecuencia, $\vec{\mathbf{B}}_M \gg \vec{\mathbf{B}}_0$.

El campo total dentro de un solenoide, en tal caso, también se puede representar sustituyendo la constante μ_0, en la ecuación 28-4, por otra constante, μ, característica del material dentro de la bobina:

$$B = \mu nI; \qquad \textbf{(28–9)}$$

μ se llama **permeabilidad magnética** del material (evite confundir este símbolo con $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ para el momento dipolar magnético). Para materiales ferromagnéticos, μ es mucho mayor que μ_0. Para todos los demás materiales, su valor está muy cerca de μ_0 (sección 28-10). Sin embargo, el valor de μ no es constante para materiales ferromagnéticos, pues depende del valor del campo externo B_0, como demuestra el siguiente experimento.

Las mediciones en los materiales magnéticos por lo general se realizan con un toroide, que, en esencia, es un largo solenoide doblado en forma de círculo (figura 28-27), de manera que prácticamente todas las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ permanecen dentro del toroide. Suponga que el toroide tiene un núcleo de hierro que inicialmente no está magnetizado, y que no hay corriente en las espiras del toroide. Luego, la corriente I aumenta lentamente y B_0 aumenta de manera lineal con I. El campo total B también aumenta, pero sigue la línea curva que se trazó para la gráfica de la figura 28-28. (Advierta las escalas diferentes: $B \gg B_0$.) Inicialmente (punto a), los dominios (sección 28-7) están orientados al azar. Conforme B_0 aumenta, los dominios se alinean cada vez más hasta que, en el punto b, casi todos están alineados. Se dice que el hierro se aproxima a la **saturación**. El punto b generalmente es el 70% de la saturación total. (Si B_0 aumenta aún más, la curva continúa elevándose muy lentamente, y alcanza el 98% de saturación sólo cuando B_0 alcanza un valor aproximado de 1000 veces arriba del que se presenta en el punto b; los últimos dominios son muy difíciles de alinear). A continuación, suponga que el campo externo B_0 se reduce al disminuir la corriente en las bobinas del toroide. Conforme la corriente se reduce a cero, como se observa en el punto c de la figura 28-29, los dominios no quedan completamente al azar. Persiste algo de magnetismo permanente. Si entonces se invierte la dirección de la corriente, suficientes dominios pueden dar la vuelta, de manera que $B = 0$ (punto d). Conforme la corriente invertida aumenta todavía más, el hierro se aproxima a la saturación en la dirección opuesta (punto e). Finalmente, si la corriente de nuevo se reduce a cero y luego aumenta en la dirección original, el campo total sigue la trayectoria $efgb$, y de nuevo se aproxima a la saturación en el punto b.

Advierta que, en este ciclo, el campo no pasó a través del origen (punto a). El hecho de que las curvas no vuelvan a trazar la misma trayectoria se llama **histéresis**. La curva $bcdefgb$ se llama **circuito de histéresis**. En tal ciclo, buena parte de la energía se transforma en energía térmica (fricción) a causa del realineamiento de los dominios. Es posible demostrar que la energía disipada de esta forma es proporcional al área del circuito de histéresis.

En los puntos *c* y *f*, el núcleo de hierro se magnetiza aun cuando no haya corriente en las bobinas. Estos puntos corresponden a un imán permanente. Para un imán permanente, es deseable que *ac* y *af* sean tan grandes como sea posible. Los materiales para los cuales esto es cierto tienen alta **retentividad**.

Se dice que los materiales con una amplia curva de histéresis, como en la figura 28-29, son magnéticamente "duros" y forman buenos imanes permanentes. Por otra parte, una curva de histéresis como la de la figura 28-30 se presenta para el hierro "blando", que se prefiere para construir electroimanes y transformadores (sección 29-6), pues el campo se puede apagar más fácilmente y se puede invertir con menos pérdida de energía.

Es posible desmagnetizar un material ferromagnético, es decir, volverlo no magnetizado. Esto se logra invirtiendo varias veces la corriente de magnetización mientras se reduce su magnitud. Esto da por resultado la curva de la figura 28-31. Las cabezas de una grabadora se desmagnetizan de esta forma. El campo magnético alternado que actúa en las cabezas debido a un desmagnetizador portátil es intenso cuando el desmagnetizador se coloca cerca de las cabezas y disminuye conforme se aleja lentamente. Las cintas de video y audio se pueden borrar y arruinar por la acción de un campo magnético, como los discos duros de computadora, otros dispositivos de almacenamiento magnético y las bandas magnéticas de las tarjetas de crédito.

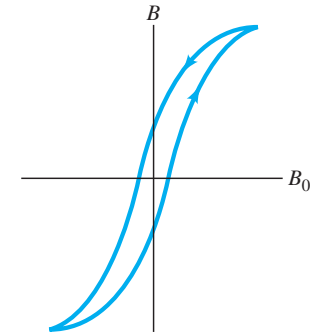


FIGURA 28–30 Curva de histéresis para hierro blando o dulce.

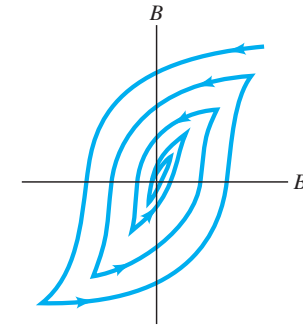


FIGURA 28–31 Circuitos de histéresis sucesivas durante la desmagnetización.

*28–10 Paramagnetismo y diamagnetismo

Todos los materiales son magnéticos, al menos en alguna medida. Los materiales no ferromagnéticos se clasifican en dos categorías principales: *paramagnéticos*, en los que la permeabilidad magnética μ es ligeramente mayor que μ_0; y *diamagnéticos*, en los que μ es ligeramente menor que μ_0. La razón entre μ y μ_0 para cualquier material se llama **permeabilidad relativa** K_m:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Otro parámetro útil es la **susceptibilidad magnética** χ_m, que se define como

$$\chi_m = K_m - 1.$$

Las sustancias paramagnéticas tienen $K_m > 1$ y $\chi_m > 0$, mientras que las sustancias diamagnéticas tienen $K_m < 1$ y $\chi_m < 0$. Véase la tabla 28-1 y note qué tan pequeño es el efecto

TABLA 28–1 Paramagnetismo y diamagnetismo: Susceptibilidades magnéticas

Sustancia paramagnética	χ_m	Sustancia diamagnética	χ_m
Aluminio	2.3×10^{-5}	Cobre	-9.8×10^{-6}
Calcio	1.9×10^{-5}	Diamante	-2.2×10^{-5}
Magnesio	1.2×10^{-5}	Oro	-3.6×10^{-5}
Oxígeno (TPE)	2.1×10^{-6}	Plomo	-1.7×10^{-5}
Platino	2.9×10^{-4}	Nitrógeno (TPE)	-5.0×10^{-9}
Tungsteno	6.8×10^{-5}	Silicio	-4.2×10^{-6}

La diferencia entre los materiales paramagnéticos y diamagnéticos se puede entender teóricamente a nivel molecular preguntándonos si las moléculas tienen o no un momento dipolar magnético permanente. Un tipo de **paramagnetismo** ocurre en los materiales cuyas moléculas (o iones) tienen un momento dipolar magnético permanente.[†] En ausencia de un campo externo, las moléculas se orientan aleatoriamente y no se observan efectos magnéticos. Sin embargo, cuando se aplica un campo magnético externo, por ejemplo, al colocar el material en un solenoide, el campo aplicado ejerce una torca sobre los dipolos magnéticos (sección 27-5), lo que tiende a alinearlos de forma paralela al campo. El campo magnético total (externo más el campo debido a dipolos magnéticos alineados) será ligeramente mayor que B_0. Sin embargo, el movimiento tér-

[†]También ocurren otros tipos de paramagnetismo cuyo origen es diferente del descrito aquí, como en metales donde pueden contribuir los electrones libres.

mico de las moléculas reduce el alineamiento. Una cantidad útil es el **vector de magnetización**, $\vec{\mathbf{M}}$, que se define como el momento dipolar magnético por unidad de volumen,

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{\vec{\boldsymbol{\mu}}}{V},$$

donde $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ es el momento dipolar magnético de la muestra y V su volumen. De manera experimental se ha determinado que M es directamente proporcional al campo magnético externo (que tiende a alinear los dipolos) e inversamente proporcional a la temperatura kelvin T (que tiende a disponer al azar las direcciones de dipolo). A esto se le llama *ley de Curie*, en honor de Pierre Curie (1859-1906), quien fue el primero en notarlo:

$$M = C\frac{B}{T},$$

donde C es una constante. Si la razón B/T es muy grande (B muy grande o T muy pequeña), la ley de Curie ya no es exacta; conforme B aumenta (o T disminuye), la magnetización se aproxima a algún valor máximo, $M_{\text{máx}}$. Desde luego, esto tiene sentido, pues $M_{\text{máx}}$ corresponde a la alineación completa de todos los dipolos magnéticos permanentes. Sin embargo, incluso para campos magnéticos muy grandes, ≈ 2.0 T, normalmente sólo se notan desviaciones de la ley de Curie a temperaturas muy bajas, en el orden de unos cuantos kelvin.

Los materiales ferromagnéticos, como se mencionó en la sección 28-7, ya no son ferromagnéticos por arriba de una temperatura característica llamada temperatura de Curie (1043 K para el hierro). Por lo general, arriba de esta temperatura de Curie, son paramagnéticos.

Los materiales **diamagnéticos** (para los que μ_m es ligeramente menor que μ_0) están hechos de moléculas que no tienen momento dipolar magnético permanente. Cuando se aplica un campo magnético externo, los dipolos magnéticos son inducidos, pero el momento dipolar magnético inducido está en la dirección opuesta a la del campo. En consecuencia, el campo total será ligeramente menor que el campo externo. El efecto del campo externo —en el modelo sencillo de electrones que giran en órbita alrededor de los núcleos— es aumentar la rapidez "orbital" de los electrones que dan vuelta en alguna dirección, y reducir la rapidez de los electrones que giran en la otra dirección; el resultado neto es un momento dipolar neto que se opone al campo externo. El diamagnetismo está presente en todos los materiales, pero es más débil incluso que el paramagnetismo y se ve rebasado por los efectos paramagnéticos y ferromagnéticos en materiales que presentan estas otras formas de magnetismo.

Resumen

El campo magnético B a una distancia r de un largo alambre recto es directamente proporcional a la corriente I en el alambre e inversamente proporcional a r:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}. \qquad \textbf{(28–1)}$$

Las líneas de campo magnético son círculos con centro en el alambre.

La fuerza que un largo alambre portador de corriente ejerce sobre un segundo alambre paralelo portador de corriente a 1 m de distancia permite definir la unidad ampere y también el coulomb.

La **ley de Ampère** afirma que la integral de línea del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en torno a cualquier circuito cerrado es igual a μ_0 por la corriente neta total I_{enc} encerrada por el circuito:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}}. \qquad \textbf{(28–3)}$$

El campo magnético dentro de un largo solenoide con espiras muy apretadas es

$$B = \mu_0 nI \qquad \textbf{(28–4)}$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud e I es la corriente en cada espira.

La **ley de Biot-Savart** es útil para determinar el campo magnético debido a un arreglo conocido de corrientes. Afirma que

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \qquad \textbf{(28–5)}$$

donde $d\vec{\mathbf{B}}$ es la aportación al campo total en algún punto P que se debe a una corriente I a lo largo de una longitud infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ de su trayectoria, y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario a lo largo de la dirección del vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{r}}$ de $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ a P. El campo total $\vec{\mathbf{B}}$ será la integral sobre todos los $d\vec{\mathbf{B}}$.

El hierro y algunos otros materiales se pueden convertir en fuertes imanes permanentes. Se dice que son **ferromagnéticos**. Los materiales ferromagnéticos están constituidos de pequeños **dominios** (cada uno de los cuales es un pequeño imán), que se alinean preferentemente en un imán permanente, pero de manera aleatoria en una muestra no magnetizada.

[*Cuando un material ferromagnético se coloca en un campo magnético B_0 debido a una corriente, por ejemplo, adentro de un solenoide o toroide, el material se magnetiza. Sin embargo, cuando la corriente se apaga, el material permanece magnetizado y, cuando la corriente se aumenta en el sentido opuesto (y luego se invierte de nuevo), una gráfica del campo total B contra B_0 es un **circuito de histéresis**; el hecho de que las curvas no se tracen de nuevo se llama **histéresis**].

[*Todos los materiales manifiestan algunos efectos magnéticos. Los materiales no ferromagnéticos tienen propiedades paramagnéticas o diamagnéticas mucho menores].

Preguntas

1. El campo magnético debido a la corriente en los alambres de las casas puede afectar una brújula. Discuta el problema en términos de corrientes, dependiendo de si son ca o cd, y su distancia de separación.
2. Compare el campo magnético debido a una larga corriente recta y el campo eléctrico debido a una larga línea recta de carga eléctrica en reposo (sección 21-7).
3. Dos largos alambres aislados que conducen iguales corrientes I se cruzan en ángulo recto. Describa la fuerza magnética que uno ejerce sobre el otro.
4. Un alambre horizontal conduce una gran corriente. Un segundo alambre que transporta una corriente en la misma dirección está suspendido por debajo del primero. ¿La corriente en el alambre de arriba podrá sostener el alambre de abajo en suspensión contra la gravedad? ¿En qué condiciones el alambre inferior estará en equilibrio?
5. Un alambre horizontal portador de corriente, libre para moverse en el campo gravitacional de la Tierra, está suspendido directamente arriba de un segundo alambre paralelo portador de corriente. *a*) ¿En qué sentido va la corriente en el alambre inferior? *b*) ¿El alambre superior puede mantenerse en equilibrio estable debido a la fuerza magnética del alambre inferior? Explique.
6. *a*) Escriba la ley de Ampère para una trayectoria que rodea a los dos conductores en la figura 28-10. *b*) Repita el inciso *a*), pero suponga que la corriente inferior, I_2, está en el sentido opuesto ($I_2 = -I_1$).
7. Suponga que el conductor cilíndrico de la figura 28-11a tiene una cavidad hueca cilíndrica concéntrica en su interior (de manera que parece una tubería). ¿Qué puede decir acerca de $\vec{\mathbf{B}}$ en la cavidad?
8. Explique por qué un campo como el que se representa en la figura 28-14b es congruente con la ley de Ampère. ¿Las líneas podrían curvarse hacia arriba y no hacia abajo?
9. ¿Cuál sería el efecto sobre B dentro de un largo solenoide si *a*) el diámetro de todas las espiras se duplica o *b*) el espacio entre espiras se duplica o *c*) la longitud del solenoide se duplica junto con una duplicación en el número total de espiras.
10. Con base en la ley de Biot-Savart, demuestre que el campo de la espira de corriente en la figura 28-21 es correcto, como se muestra para puntos afuera del eje.
11. ¿Cree que $\vec{\mathbf{B}}$ será igual para todos los puntos en el plano de la espira de corriente de la figura 28-21? Explique.
12. ¿Por qué torcer los alambres que entran a los dispositivos eléctricos reduce los efectos magnéticos de las conexiones?
13. Compare la ley de Biot-Savart con la ley de Coulomb. ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias?
14. ¿Cómo podría definir o determinar la intensidad del polo magnético (el equivalente magnético de una sola carga eléctrica) para *a*) un imán de barra y *b*) una espira de corriente?
15. ¿Cómo podría medirse el momento dipolar magnético de la Tierra?
16. Un tipo de interruptor magnético similar a un solenoide es un **relevador** (figura 28-32). Un relevador es un electroimán (la varilla de hierro dentro de la bobina no se mueve) que, cuando se activa, atrae un trozo de hierro sobre un pivote. Diseñe un relevador para cerrar un interruptor eléctrico. Un relevador se usa cuando es necesario encender un circuito que conduce una corriente muy grande, pero no se desea que esa gran corriente fluya a través del interruptor principal. Por ejemplo, el motor de arranque de un automóvil se conecta a un relevador, de manera que la gran corriente necesaria para el arranque no pase hacia el interruptor del tablero.

FIGURA 28–32
Pregunta 16.

17. Un gran imán atrae, desde el reposo, un pesado bloque de hierro. Antes de golpear el imán, el bloque adquiere considerable energía cinética. *a*) ¿Cuál es la fuente de esta energía cinética? *b*) Cuando el bloque golpea al imán, parte de los dominios de éste quedan dispuestos al azar; describa las transformaciones de energía.
18. ¿Un imán atraerá a cualquier objeto metálico, como los que están hechos de aluminio, o sólo a los objetos de hierro? (Inténtelo y observe.) ¿Por qué es así?
19. Una aguja sin magnetizar no atraerá un sujetapapeles que esté sin magnetizar. Sin embargo, si un extremo de la aguja está en contacto con un imán, el otro extremo *atraerá* al sujetapapeles. Explique.
20. ¿Una varilla de hierro logrará atraer un imán? ¿Un imán atrae una varilla de hierro? ¿Qué debe considerar para responder estas preguntas?
21. ¿Cómo supone que se formaron los primeros imanes encontrados en Magnesia?
22. ¿Por qué cualquier polo de un imán atrae un trozo de hierro sin magnetizar?
23. Suponga que tiene tres varillas de hierro, dos de las cuales están magnetizadas, pero la tercera no. ¿Cómo determinaría, sin emplear un objeto adicional, cuáles dos son los imanes?
24. Dos barras de hierro se atraen mutuamente sin importar cuáles extremos se coloquen juntos. ¿Ambos son imanes? Explique.

* 25. Describa la curva de magnetización para *a*) una sustancia paramagnética y *b*) una sustancia diamagnética, y compare con la curva de una sustancia ferromagnética (figura 28-29).

* 26. ¿Todos los materiales se pueden considerar *a*) diamagnéticos, *b*) paramagnéticos, *c*) ferromagnéticos? Explique.

Problemas

28–1 y 28–2 Alambres rectos, campo magnético y fuerza

1. (I) Los cables pasacorriente que se usan para poner en marcha vehículos que se quedaron sin batería a menudo conducen una corriente de 65 A. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético a 3.5 cm de un cable? Compare con el campo magnético de la Tierra (5.0×10^{-5} T).
2. (I) Si a un alambre eléctrico se le permite producir un campo magnético no mayor que el de la Tierra (0.50×10^{-4} T) a una distancia de 15 cm desde el alambre, ¿cuál es la corriente máxima que puede conducir el alambre?

3. (I) Determine la magnitud y dirección de la fuerza entre dos alambres paralelos, de 25 cm de largo y separados 4.0 cm, cada uno de los cuales conduce 35 A en el mismo sentido.

4. (I) Un alambre recto vertical, que conduce una corriente hacia arriba de 28 A, ejerce una fuerza de atracción por unidad de longitud de 7.8×10^{-4} N/m sobre un segundo alambre paralelo alejado 7.0 cm. ¿Qué corriente (magnitud y dirección) fluye en el segundo alambre?

5. (I) En la figura 28-33, un largo alambre recto conduce corriente I afuera de la página, hacia el lector. Indique, con flechas adecuadas, la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ en cada uno de los puntos C, D y E en el plano de la página.

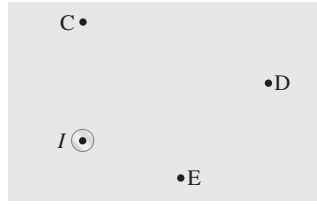


FIGURA 28–33
Problema 5.

6. (II) Un experimento acerca del campo magnético de la Tierra se realiza a 1.00 m de un cable eléctrico. ¿Cuál es la máxima corriente permisible en el cable, si el experimento debe ser exacto dentro de un margen de $\pm$ 2.0%?

7. (II) Dos largos alambres paralelos delgados, separados 13.0 cm, conducen corrientes de 35 A en el mismo sentido. Determine el vector de campo magnético en un punto a 10.0 cm de un alambre y 6.0 cm del otro (figura 28-34).

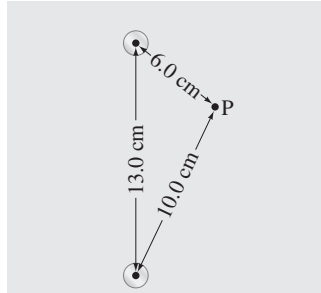


FIGURA 28–34
Problema 7.

8. (II) Una brújula horizontal se coloca 18 cm al sur de un alambre recto vertical que conduce una corriente de 43 A hacia abajo. ¿En qué dirección apunta la aguja de la brújula en esta posición? Suponga que la componente horizontal del campo de la Tierra en ese punto es 0.45×10^{-4} T y que la declinación magnética es 0°.

9. (II) Un largo alambre horizontal conduce 24.0 A de corriente hacia el norte. ¿Cuál es el campo magnético neto 20.0 cm al oeste del alambre, si ahí el campo de la Tierra apunta hacia abajo, 44° por debajo de la horizontal, y tiene 5.0×10^{-5} T de magnitud?

10. (II) Una corriente recta de protones pasa por un punto dado en el espacio a una tasa de 2.5×10^{9} protones/s. ¿Qué campo magnético producen a 2.0 m del haz?

11. (II) Determine el campo magnético en el punto medio entre dos largos alambres rectos separados 2.0 cm, en términos de la corriente I en uno de ellos, cuando el otro conduce 25 A. Suponga que estas corrientes están *a*) en el mismo sentido y *b*) en sentidos opuestos.

12. (II) Dos alambres rectos paralelos están separados 6.0 cm. En el primer alambre hay un flujo de corriente de 2.0 A. Si la intensidad del campo magnético es cero entre los dos alambres a una distancia de 2.2 cm del primer alambre, ¿cuál es la magnitud y dirección de la corriente en el segundo alambre?

13. (II) Dos largos alambres rectos conducen, cada uno, una corriente I afuera de la página, hacia el lector, figura 28-35. Señale, con flechas apropiadas, la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ en cada uno de los puntos 1 a 6 en el plano de la página. Establezca si el campo es cero en alguno de los puntos.

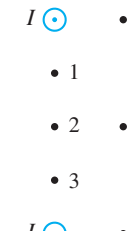


FIGURA 28–35
Problema 13.

14. (II) Un par de alambres largos y aislados sirven para conducir 28.0 A de corriente cd hacia y desde un instrumento. Si los alambres son de diámetro despreciable, pero están separados 2.8 mm, ¿cuál es el campo magnético a 10.0 cm de su punto medio, en su plano (figura 28-36)? Compare con el campo magnético de la Tierra.

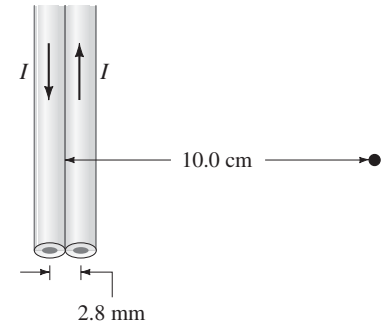


FIGURA 28–36 Problemas 14 y 15.

15. (II) Un tercer alambre se coloca en el plano de los dos alambres que se ilustran en la figura 28-36, paralelo y justo a la derecha. Si conduce 25.0 A hacia arriba, ¿qué fuerza por metro de longitud ejerce sobre cada uno de los otros dos alambres? Suponga que está a 2.8 mm del alambre más cercano, de centro a centro.

16. (II) Un tendido eléctrico conduce una corriente de 95 A en dirección oeste a lo largo de la parte superior de postes que miden 8.5 m de alto. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético producido por este alambre directamente abajo en el suelo? ¿Cómo se compara esto con el campo de la Tierra de aproximadamente $\frac{1}{2}$ G? *b*) ¿Dónde cancelará el campo de la línea al campo de la Tierra?

17. (II) La aguja de una brújula apunta a 28° E del N en el exterior. Sin embargo, cuando se coloca a 12.0 cm al este de un alambre vertical dentro de un edificio, apunta a 55° E del N. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la corriente en el alambre? El campo de la Tierra en ese lugar es 0.50×10^{-4} T y es horizontal.

18. (II) Una espira rectangular de alambre se coloca junto a un alambre recto, como se indica en la figura 28-37. En ambos alambres hay una corriente de 3.5 A. Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta sobre la espira.

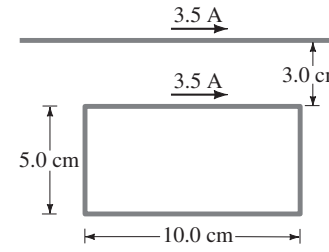


FIGURA 28–37
Problema 18.

19. (II) Se tienen dos largos alambres paralelos, separados una distancia d, que conducen igual corriente I en el mismo sentido. Un alambre está en $x = 0$, el otro en $x = d$, figura 28-38. Determine $\vec{\mathbf{B}}$ a lo largo del eje x, entre los alambres, como función de x.

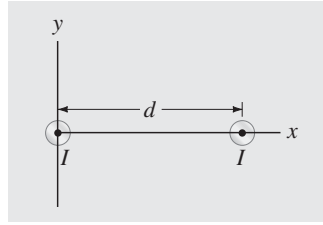


FIGURA 28–38
Problemas 19 y 20.

20. (II) Repita el problema 19 si el alambre en $x = 0$ conduce el doble de corriente ($2I$) que el otro alambre, y en el sentido opuesto.

21. (II) Dos largos alambres están orientados de manera que son perpendiculares entre sí. En su punto más cercano, están separados 20.0 cm (figura 28-39). ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en un punto a medio camino entre ellos, si el alambre superior conduce una corriente de 20.0 A y el inferior transporta 12.0 A?

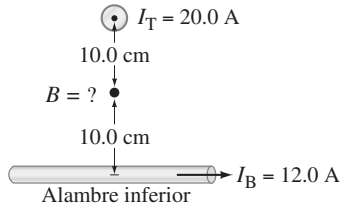


FIGURA 28–39
Problema 21.

22. (II) Dos largos alambres paralelos, separados 8.20 cm, conducen corrientes de 16.5 A en el mismo sentido. Determine el vector de campo magnético en un punto P, a 12.0 cm de un alambre y 13.0 cm del otro. Véase la figura 28-40. [*Sugerencia:* Utilice la ley de los cosenos].

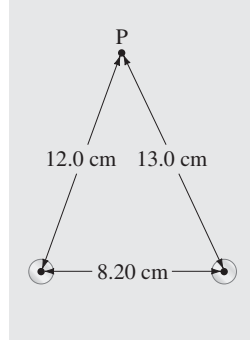


FIGURA 28–40
Problema 22.

23. (III) Una tira conductora plana muy larga, con ancho d y grosor despreciable, yace en un plano horizontal y conduce una corriente uniforme I a través de su sección transversal. *a*) Demuestre que, en puntos a una distancia y directamente arriba de su centro, el campo está dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \tan^{-1} \frac{d}{2y},$$

suponiendo que la tira es infinitamente larga. [*Sugerencia:* Divida la tira en muchos "alambres" delgados y sume (integre) sobre éstos]. *b*) ¿A qué valor se aproxima B para $y \gg d$? ¿Esto tiene sentido? Explique.

24. (III) Una espira triangular con longitud de lado a conduce una corriente I (figura 28-41). Si esta espira se coloca a una distancia d de un alambre recto muy largo que conduce una corriente I', determine la fuerza sobre la espira.

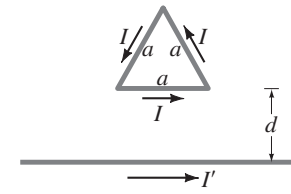


FIGURA 28–41
Problema 24.

28–4 y 28–5 Ley de Ampère, solenoides y toroides

25. (I) Un solenoide de 40.0 cm de largo y 1.35 cm de diámetro debe producir un campo de 0.385 mT en su centro. ¿Cuánta corriente debe conducir el solenoide si tiene 765 vueltas de alambre?

26. (I) Un solenoide, de 32 cm de largo y 1.8 cm de diámetro, debe producir un campo magnético de 0.30 T en su centro. Si la corriente máxima es 4.5 A, ¿cuántas vueltas debe tener el solenoide?

27. (I) Un alambre de cobre de 2.5 mm de diámetro conduce una corriente de 33 A (uniforme a través de su sección transversal). Determine el campo magnético: *a*) en la superficie del alambre; *b*) dentro del alambre, 0.50 mm debajo de la superficie; *c*) afuera del alambre, a 2.5 mm de la superficie.

28. (II) Un toroide (figura 28-17) tiene un diámetro interior de 50.0 cm y un diámetro exterior de 54.0 cm. Conduce una corriente de 25.0 A en sus 687 espiras. Determine el intervalo de valores para B dentro del toroide.

29. (II) Un largo alambre de cobre de 20.0 m y 2.00 mm de diámetro, incluido el aislamiento, se enrolla firmemente en una sola capa con espiras adyacentes en contacto para formar un solenoide de 2.50 cm de diámetro (borde exterior). ¿Cuál es *a*) la longitud del solenoide y *b*) el campo en el centro, cuando la corriente en el alambre es de 16.5 A?

30. (II) *a*) Con base en la ecuación 28-1 y la naturaleza vectorial de $\vec{\mathbf{B}}$, demuestre que las líneas de campo magnético en torno a dos largos alambres paralelos que conducen corrientes iguales, $I_1 = I_2$, son como se muestra en la figura 28-10. *b*) Dibuje las líneas equipotenciales en torno a dos cargas eléctricas positivas estacionarias. *c*) ¿Estos dos diagramas son similares? ¿Idénticos? ¿Por qué?

31. (II) Un cable coaxial consiste en un conductor interior sólido con radio R_1, rodeado por un tubo cilíndrico concéntrico con radio interior R_2 y radio exterior R_3 (figura 28-42). Los conductores transportan corrientes iguales y opuestas I_0 distribuidas de manera uniforme a través de sus secciones transversales. Determine el campo magnético a una distancia R del eje para: *a*) $R < R_1$; *b*) $R_1 < R < R_2$; *c*) $R_2 < R < R_3$; *d*) $R > R_3$. *e*) Sea $I_0 = 1.50$ A, $R_1 = 1.00$ cm, $R_2 = 2.00$ cm y $R_3 = 2.50$ cm. Grafique B desde $R = 0$ hasta $R = 3.00$ cm.

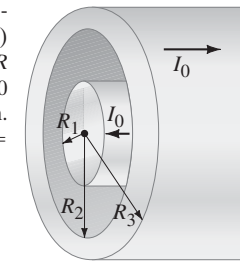


FIGURA 28–42
Problemas 31 y 32.

32. (III) Suponga que la corriente en el cable coaxial del problema 31, figura 28-42, no está distribuida de manera uniforme, sino que la densidad de corriente j varía linealmente con la distancia desde el centro: $j_1 = C_1 R$ para el conductor interno y $j_2 = C_2 R$ para el conductor externo. Cada conductor aún transporta la misma corriente total I_0, en sentidos opuestos. Determine el campo magnético en términos de I_0 en las mismas cuatro regiones del espacio que en el problema 31.

28–6 Ley de Biot-Savart

33. (I) En esencia, el campo magnético de la Tierra es el de un dipolo magnético. Si el campo cerca del polo norte es más o menos 1.0×10^{-4} T, ¿cuál será (aproximadamente) a 13,000 km arriba de la superficie en el polo norte?

34. (II) Un alambre, en un plano, tiene la forma que se ilustra en la figura 28-43: dos arcos de un círculo conectados mediante longitudes radiales de alambre. Determine $\vec{\mathbf{B}}$ en el punto C, en términos de R_1, R_2, θ y la corriente I.

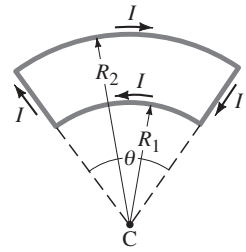


FIGURA 28–43
Problema 34.

35. (II) Un anillo conductor circular de radio R está conectado a dos alambres rectos exteriores en dos extremos de un diámetro (figura 28-44). La corriente I se divide en porciones desiguales (como se indica) mientras pasa a través del anillo. ¿Cuál es $\vec{\mathbf{B}}$ en el centro del anillo?

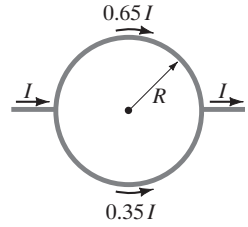


FIGURA 28–44
Problema 35.

36. (II) Una pequeña espira de alambre, de 1.8 cm de radio, se coloca en el centro de una espira de alambre con 25.0 cm de radio. Los planos de las espiras son perpendiculares entre sí, y en cada una fluye una corriente de 7.0 A. Estime la torca que ejerce la espira grande sobre la más pequeña. ¿Qué suposición simplificadora hizo?

37. (II) A un alambre se le da forma de dos medios círculos conectados mediante secciones rectas de igual longitud, como se ilustra en la figura 28-45. Una corriente I fluye en el circuito, en sentido horario, como se indica. Determine *a*) la magnitud y dirección del campo magnético en el centro, C, y *b*) el momento dipolar magnético del circuito.

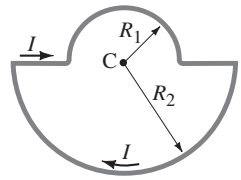


FIGURA 28–45
Problema 37.

38. (II) Una sola carga puntual q se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. Con base en la ley de Biot-Savart, demuestre que el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ que produce en un punto P, cuyo vector de posición relativo a la carga es $\vec{\mathbf{r}}$ está dado por

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3}.$$

(Suponga que v es mucho menor que la rapidez de la luz).

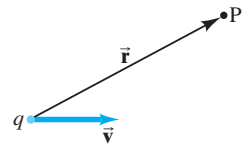


FIGURA 28–46
Problema 38.

39. (II) Un disco circular no conductor, con radio R, transporta una carga eléctrica Q uniformemente distribuida. La placa se hace girar con velocidad angular ω en torno a un eje perpendicular a la placa a través de su centro (figura 28-47). Determine *a*) su momento dipolar magnético y *b*) el campo magnético en puntos sobre su eje, a una distancia x de su centro; *c*) en ese caso, ¿se aplica la ecuación 28-7b para $x \gg R$?

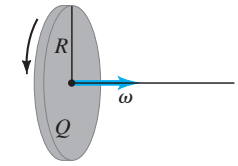


FIGURA 28–47
Problema 39.

40. (II) Considere una sección recta de alambre de longitud d, como en la figura 28-48, que conduce una corriente I. *a*) Demuestre que el campo magnético en un punto P a una distancia R del alambre, a lo largo de su bisectriz perpendicular, es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{d}{(d^2 + 4R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

b) Demuestre que esto es congruente con el ejemplo 28-11 para un alambre infinito.

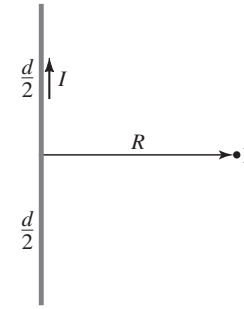


FIGURA 28–48
Problema 40.

41. (II) Un segmento de alambre de longitud d conduce una corriente I, como se indica en la figura 28-49. *a*) Demuestre que, para puntos a lo largo del eje positivo x (el eje del alambre), como el punto Q, el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ es cero. *b*) Determine una fórmula para el campo en puntos a lo largo del eje y, como el punto P.

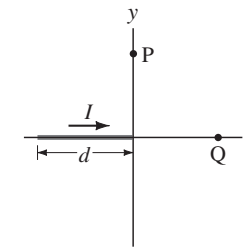


FIGURA 28–49
Problema 41.

42. (III) Use el resultado del problema 41 para encontrar el campo magnético en el punto P de la figura 28-50, debido a la corriente en la espira cuadrada.

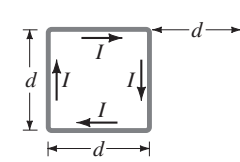


FIGURA 28–50
Problema 42.

43. (III) Un alambre se dobla en forma de un polígono regular con n lados, cuyos vértices están a una distancia R del centro. (Véase la figura 28-51, que ilustra el caso especial de $n = 6$). Si el alambre conduce una corriente I_0, *a*) determine el campo magnético en el centro, *b*) si n se hace muy grande ($n \to \infty$), demuestre que la fórmula en el inciso *a*) se reduce a la de una espira circular (ejemplo 28-12).

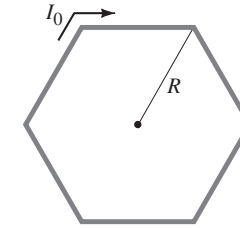


FIGURA 28–51
Problema 43.

44. (III) Utilice el resultado del ejemplo 28-12 para el campo magnético a lo largo del eje de una sola espira y determine el campo dentro de un solenoide muy largo con n vueltas por metro (ecuación 28-4) que se estira de $+\infty$ a $-\infty$.

45. (III) Una sola espira rectangular de alambre, con lados a y b, conduce una corriente I. Un sistema coordenado xy tiene su origen en la esquina inferior izquierda del rectángulo, con el eje x paralelo al lado b (figura 28-52). Determine el campo magnético B en todos los puntos (x, y) dentro de la espira.

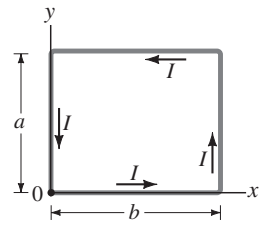


FIGURA 28–52
Problema 45.

46. (III) Una espira cuadrada de alambre, de lado d, conduce una corriente I. *a*) Determine el campo magnético B en puntos sobre una línea perpendicular al plano del cuadrado que pasa a través del centro del cuadrado (figura 28-53). Exprese B como función de x, la distancia a lo largo de la línea desde el centro del cuadrado. *b*) Para $x \gg d$, ¿el cuadrado parece ser un dipolo magnético? Si es así, ¿cuál es su momento dipolar?

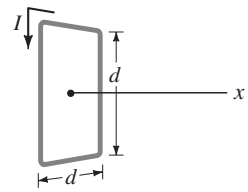


FIGURA 28–53
Problema 46.

28–7 Materiales magnéticos: Ferromagnetismo

47. (II) Un átomo de hierro tiene un momento dipolar magnético de aproximadamente 1.8×10^{-23} A·m^2. *a*) Determine el momento dipolar de una barra de hierro de 9.0 cm de largo, 1.2 cm de ancho y 1.0 cm de grosor, si está 100% saturada. *b*) ¿Qué torca se ejercerá sobre esta barra cuando se coloque un campo de 0.80 T que actúe en ángulos rectos con la barra?

*28–9 Materiales magnéticos; histéresis

***48.** (I) Los siguientes son algunos valores de B y B_0 para una pieza de hierro templado conforme se magnetiza:

$B_0(10^{-4}\,\text{T})$	0.0	0.13	0.25	0.50	0.63	0.78	1.0	1.3
B(T)	0.0	0.0042	0.010	0.028	0.043	0.095	0.45	0.67
$B_0(10^{-4}\,\text{T})$	1.9	2.5	6.3	13.0	130	1300	10,000	
B(T)	1.01	1.18	1.44	1.58	1.72	2.26	3.15	

Determine la permeabilidad magnética μ para cada valor y trace una gráfica de μ contra B_0.

***49.** (I) Un gran toroide delgado tiene 285 espiras de alambre por metro, y a través del alambre fluye una corriente de 3.0 A. Si la permeabilidad relativa del hierro es $\mu/\mu_0 = 2200$, ¿cuál es el campo total B dentro del toroide?

***50.** (II) Un solenoide con núcleo de hierro mide 38 cm de largo y 1.8 cm de diámetro, y tiene 640 vueltas de alambre. El campo magnético dentro del solenoide es de 2.2 T cuando 48 A fluyen en el alambre. ¿Cuál es la permeabilidad μ a esta alta intensidad de campo?

Problemas generales

51. Tres largos alambres paralelos están separados 3.5 cm uno de otro. (En una vista transversal, están en las tres esquinas de un triángulo equilátero). La corriente en cada alambre es de 8.00 A, pero su sentido en el alambre M es opuesto al de los alambres N y P (figura 28-54). Determine la fuerza magnética por unidad de longitud en cada alambre debido a los otros dos.

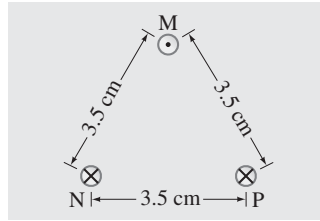


FIGURA 28–54
Problemas 51, 52 y 53.

52. En la figura 28-54, determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto medio entre los puntos M y N.

53. En la figura 28-54, el alambre superior es alambre de cobre de 1.00 mm de diámetro, y está suspendido en el aire debido a las dos fuerzas magnéticas de los dos alambres inferiores. La corriente es de 40.0 A en cada uno de los dos alambres inferiores. Calcule el flujo de corriente requerido en el alambre suspendido.

54. Un electrón entra a un gran solenoide a un ángulo de 7.0° con el eje. Si el campo es uniforme con una magnitud de 3.3×10^{-2} T, determine el radio y la separación (distancia entre vueltas) de la trayectoria helicoidal del electrón, si su rapidez es 1.3×10^7 m/s.

55. Dos largos alambres rectos paralelos están separados 15 cm. El alambre A conduce 2.0 A de corriente. La corriente del alambre B es de 4.0 A en el mismo sentido. *a*) Determine el campo magnético debido al alambre A en la posición del alambre B. *b*) Determine el campo magnético debido al alambre B en la posición del alambre A. *c*) ¿Estos dos campos magnéticos son iguales y opuestos? ¿Por qué? *d*) Determine la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre A debida al alambre B, y la del alambre B debida al alambre A. ¿Estas dos fuerzas son iguales y opuestas? ¿Por qué?

56. Una espira rectangular de alambre conduce una corriente de 2.0 A y se encuentra en un plano que también contiene un alambre recto y muy largo que conduce una corriente de 10.0 A, como se muestra en la figura 28-55. Determine *a*) la fuerza neta y *b*) la torca neta sobre la espira que se debe al alambre recto.

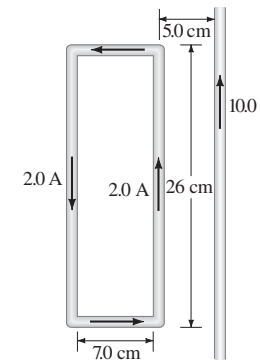


FIGURA 28–55
Problema 56.

57. Una hoja conductora plana muy larga de grosor t conduce una densidad de corriente uniforme $\vec{\mathbf{j}}$ a todo lo largo (figura 28-56). Determine el campo magnético (magnitud y dirección) a una distancia y arriba del plano. (Suponga que el plano es infinitamente largo y ancho).

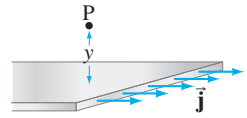


FIGURA 28–56
Problema 57.

58. Un largo alambre horizontal conduce una corriente de 48 A. Un segundo alambre, hecho de cobre de 1.00 mm de diámetro y paralelo al primero, se mantiene en suspensión magnética 5.0 cm abajo (figura 28-57). *a*) Determine la magnitud y dirección de la corriente en el alambre inferior. *b*) ¿El alambre inferior está en equilibrio estable? *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) si el segundo alambre está suspendido 5.0 cm *arriba* del primero debido al campo magnético del primero.

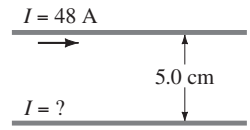


FIGURA 28–57
Problema 58.

59. Una espira cuadrada de alambre, de lado d, conduce una corriente I. Demuestre que el campo magnético en el centro del cuadrado es

$$B = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi d}.$$

[*Sugerencia:* Determine $\vec{\mathbf{B}}$ para cada segmento de longitud d].

60. En el problema 59, si se vuelve a dar forma de círculo a la espira cuadrada, ¿B aumentaría o se reduciría en el centro? Explique.

61. Las **bobinas de Helmholtz** son dos bobinas circulares idénticas que tienen el mismo radio R y el mismo número de vueltas N, separadas por una distancia igual al radio R y que conducen la misma corriente I en el mismo sentido. (Véase la figura 28-58). Se usan en instrumentos científicos para generar campos magnéticos casi uniformes. (Se pueden ver en la fotografía, figura 27-18.) *a*) Determine el campo magnético B en puntos x a lo largo de la línea que une sus centros. Sea $x = 0$ en el centro de una bobina, y $x = R$ en el centro de la otra. *b*) Demuestre que el campo a medio camino entre las bobinas es particularmente uniforme estableciendo que $\frac{dB}{dx} = 0$ y $\frac{d^2B}{dx^2} = 0$ en el punto medio entre las bobinas. *c*) Si $R = 10.0$ cm, $N = 250$ vueltas e $I = 2.0$ A, ¿cuál es el campo en el punto medio entre las bobinas, $x = R/2$?

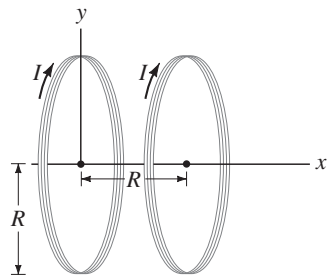


FIGURA 28–58
Problema 61.

62. Para dos largos alambres paralelos separados una distancia d, que conducen corrientes I_1 e I_2, como en la figura 28-10, demuestre directamente (ecuación 28-1) que la ley de Ampère es válida (pero no utilice la ley de Ampère) para una trayectoria circular de radio r ($r < d$) con centro en I_1:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_1.$$

63. Cerca de los polos de la Tierra, el campo magnético es aproximadamente 1 G (1×10^{-4} T). Imagine un modelo simple en el cual el campo de la Tierra se produce mediante una sola espira de corriente alrededor del ecuador. Estime aproximadamente la corriente que conduciría esa espira.

64. Un modelo de avión de 175 g, cargado a 18.0 mC y que viaja a 2.8 m/s, pasa a 8.6 cm de un alambre, casi paralelo a su trayectoria, que conduce una corriente de 25 A. ¿Qué aceleración (en g) proporciona esta interacción al avión?

65. Suponga que un electroimán usa una bobina de 2.0 m de diámetro hecha de alambre de cobre cuadrado de 2.0 mm por lado; la fuente de poder produce 35 V a una salida de potencia máxima de 1.0 kW. *a*) ¿Cuántas vueltas se necesitan para hacer funcionar la fuente de poder a potencia máxima? *b*) ¿Cuál es la intensidad del campo magnético en el centro de la bobina? *c*) Si se emplea un número mayor de vueltas y esa misma fuente de poder, ¿se producirá un campo magnético más grande? Explique.

66. Cuatro largos alambres paralelos rectos, ubicados en las esquinas de un cuadrado de lado d, conducen iguales corrientes I_0 perpendiculares a la página, como se ilustra en la figura 28-59. Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ en el centro C del cuadrado.

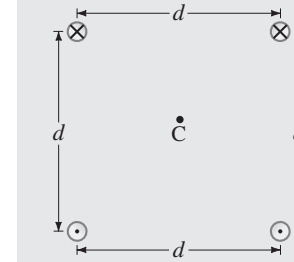


FIGURA 28–59
Problema 66.

67. Determine el campo magnético en el punto P debido a un alambre muy largo, con un doblez de forma cuadrada como se muestra en la figura 28-60. El punto P está a la mitad entre las dos esquinas. [*Sugerencia:* Puede usar los resultados de los problemas 40 y 41].

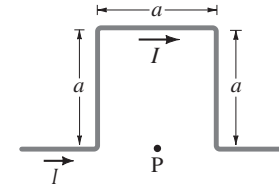


FIGURA 28–60
Problema 67.

68. Un solenoide de 12 cm de largo tiene un total de 420 vueltas de alambre y conduce una corriente de 2.0 A. Calcule el campo dentro del solenoide cerca del centro.

69. Un solenoide de 550 vueltas mide 15 cm de longitud. La corriente en él es de 33 A. Un alambre recto de 3.0 cm de longitud corta a través del centro del solenoide, a lo largo de un diámetro. Este alambre conduce hacia abajo una corriente de 22 A (y está conectado a otros alambres, los cuales no nos interesan). ¿Cuál es la fuerza sobre este alambre, suponiendo que el campo del solenoide apunta hacia el este?

70. Usted tiene 1.0 kg de cobre y quiere elaborar un solenoide práctico que produzca el mayor campo magnético posible para un voltaje dado. ¿Debe hacer su alambre de cobre largo y delgado, corto y ancho, o con alguna otra característica? Considere otras variables, como diámetro y longitud del solenoide.

71. Un pequeño solenoide (radio r_a) está dentro de un solenoide más grande (radio $r_b > r_a$). Son coaxiales con n_a y n_b vueltas por unidad de longitud, respectivamente. Los solenoides conducen la misma corriente, pero en sentidos opuestos. Sea r la distancia radial desde el eje común de los solenoides. Si el campo magnético dentro del solenoide interior ($r < r_a$) debe estar en la dirección opuesta al campo entre los solenoides ($r_a < r < r_b$), pero con la mitad de la magnitud, determine la proporción requerida n_b/n_a.

72. Determine B en el centro del semicírculo de 4.0 cm de radio en la figura 28-61. Los alambres rectos se extienden una gran distancia hacia fuera a la izquierda y conducen una corriente $I = 6.0$ A.

FIGURA 28–61
Problema 72.

73. El diseño de una trampa atómica magneto-óptica requiere un campo magnético B que sea directamente proporcional a la posición x a lo largo de un eje. Tal campo perturba la absorción de luz láser por parte de los átomos en la forma necesaria para confinar espacialmente átomos en la trampa. Demostremos que bobinas "anti-Helmholtz" proporcionarán el campo necesario $B = Cx$, donde C es una constante. Las bobinas anti-Helmholtz son dos bobinas de alambre circular idénticas, cada una con radio R y N vueltas, que conducen corriente I en direcciones opuestas (figura 28-62). Las bobinas comparten un eje común [definido como el eje x, con $x = 0$ en el punto medio (0) entre las bobinas]. Suponga que los centros de las bobinas están separados por una distancia igual al radio R de las bobinas. *a*) Demuestre que el campo magnético en la posición x a lo largo del eje x está dada por

$$B(x) = \frac{4\,\mu_0 NI}{R}\left\{\left[4+\left(1-\frac{2x}{R}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} - \left[4+\left(1+\frac{2x}{R}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

b) Para pequeñas excursiones desde el origen, donde $|x| << R$, demuestre que el campo magnético está dado por $B \approx Cx$, donde la constante $C = 48\,\mu_0 NI/25\sqrt{5}\,R^2$. *c*) Para una óptima captura de átomos, dB/dx debe ser aproximadamente 0.15 T/m. Suponga que una trampa de átomos usa bobinas anti-Helmholtz con $R = 4.0$ cm y $N = 150$. ¿Qué corriente debe fluir a través de las bobinas? [La separación de bobina igual al radio de bobina, como se supone en este problema, no es un requisito estricto para las bobinas anti-Helmholtz].

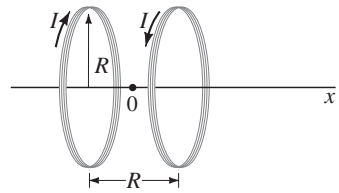


FIGURA 28–62
Problema 75.

74. Usted quiere tener una idea de la magnitud de los campos magnéticos producidos por las líneas eléctricas aéreas. Usted estima que un alambre de transmisión está aproximadamente a 12 m sobre el suelo. La compañía eléctrica local le dice que la línea opera a 15 kV y suministra un máximo de 45 MW al área local. Estime el campo magnético máximo que puede experimentar al caminar bajo tal línea eléctrica, y compare con el campo de la Tierra. [Para una corriente ca, los valores son rms, y el campo magnético será variable].

*Problemas numéricos/por computadora

***75.** (II) Una espira de corriente circular, de 15 cm de radio y 250 vueltas, conduce una corriente de 2.0 A. Su centro está en el origen y su eje yace a lo largo del eje x. Calcule el campo magnético B en un punto x sobre el eje x para $x = -40$ cm a +40 cm en incrementos de 2 cm y elabore una gráfica de B como función de x.

***76.** (III) Un conjunto de bobinas de Helmholtz (véase el problema 61, figura 28-58) tiene un radio $R = 10.0$ cm; las bobinas están separadas una distancia $R = 10.0$ cm. Cada bobina tiene 250 vueltas que conducen una corriente $I = 2.0$ A. *a*) Determine el campo magnético total B a lo largo del eje x (la línea central para las dos bobinas) en incrementos de 0.2 cm desde el centro de una bobina ($x = 0$) al centro de la otra ($x = R$). *b*) Grafique B como función de x. *c*) ¿En qué porcentaje varía B de $x = 5.0$ cm a $x = 6.0$ cm?

Respuesta a los ejercicios

A: 2×10^{-6} G; no a esta distancia, y luego sólo brevemente.
B: 0.8×10^{-5} T, arriba.
C: *b*).
D: *b*), *c*).

Una de las grandes leyes de la física es la ley de inducción de Faraday, que afirma que un flujo magnético variable produce una fem inducida. Esta fotografía muestra un imán de barra que se mueve dentro de una bobina de alambre, y el galvanómetro registra una corriente inducida. Este fenómeno de inducción electromagnética es la base para muchos dispositivos prácticos, incluidos generadores, alternadores, transformadores, grabadoras y memorias de computadora.

CAPÍTULO 29

Inducción electromagnética y ley de Faraday

CONTENIDO

29–1 Fem inducida
29–2 Ley de inducción de Faraday; ley de Lenz
29–3 Fem inducida en un conductor en movimiento
*29–4 Generadores eléctricos
29–5 Fuerza contraelectromotriz y contra torca; corrientes parásitas
29–6 Transformadores y transmisión de potencia
29–7 Un flujo magnético variable produce un campo eléctrico
*29–8 Aplicaciones de la inducción: Sistemas de sonido, memoria de computadoras, sismógrafos, GFCI

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
En la fotografía anterior el imán de barra se inserta en la bobina de alambre y se deja ahí durante 1 minuto; luego se retira de la bobina. ¿Qué vería en el galvanómetro un observador?

a) No hay cambio; sin una batería no hay corriente para detectar.
b) Una pequeña corriente fluye mientras el imán está dentro de la bobina de alambre.
c) Un pico de corriente conforme el imán entra a la bobina y luego nada.
d) Un pico de corriente conforme el imán entra a la bobina, y luego una pequeña corriente estable.
e) Un pico de corriente conforme el imán entra a la bobina, luego nada y luego un pico de corriente en la dirección opuesta conforme el imán sale de la bobina.

En el capítulo 27 se estudiaron dos formas en las que se relacionan la electricidad y el magnetismo: **1.** una corriente eléctrica produce un campo magnético; y **2.** un campo magnético ejerce una fuerza sobre una corriente eléctrica o carga eléctrica en movimiento. Estos descubrimientos se realizaron entre 1820 y 1821. A partir de entonces los científicos comenzaron a preguntarse: si las corrientes eléctricas producen un campo magnético, ¿es posible que un campo magnético produzca una corriente eléctrica? Diez años después, el estadounidense Joseph Henry (1797-1878) y el inglés Michael Faraday (1791-1867) encontraron, cada uno por su cuenta, que esto era posible. En realidad, Henry hizo el descubrimiento primero, pero Faraday publicó sus resultados antes e investigó el tema con más detalle. Ahora estudiaremos este fenómeno y algunas de sus aplicaciones que cambiaron al mundo, incluido el generador eléctrico.

29–1 Fem inducida

En su intento por generar una corriente eléctrica a partir de un campo magnético, Faraday utilizó un aparato como el que se ilustra en la figura 29-1. Conectó una bobina de alambre, X, a una batería. La corriente que fluyó a través de X produjo un campo magnético que se intensificó mediante el núcleo de hierro con forma de anillo alrededor del cual se enrrolló el alambre. Faraday esperaba que una fuerte corriente estable en X produjera un campo magnético suficientemente grande como para producir una corriente en una segunda bobina Y enrollada sobre el mismo anillo de hierro. Este segundo circuito, Y, contenía un galvanómetro para detectar cualquier corriente, pero no incluía batería. No tuvo éxito con corrientes constantes. Pero el efecto buscado se observó finalmente cuando Faraday notó que la aguja del galvanómetro en el circuito Y se movía notablemente en el momento en que cerraba el interruptor en el circuito X. Y la aguja del galvanómetro se movía notoriamente en la dirección opuesta cuando abría el interruptor en X. Una corriente constante en X producía un campo magnético constante que *no* producía corriente en Y. En Y se producía una corriente sólo cuando la corriente en X iniciaba o se detenía.

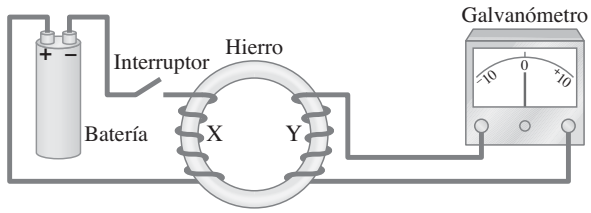


FIGURA 29–1 Experimento de Faraday para inducir una fem.

Faraday concluyó que, aunque un campo magnético constante no produce corriente en un conductor, un campo magnético *variable* puede generar una corriente eléctrica. Tal corriente se llama **corriente inducida**. Cuando cambia el campo magnético a través de la bobina Y, se induce en ella una corriente como si estuviera conectada a una fuente de fem. Así, se dice que

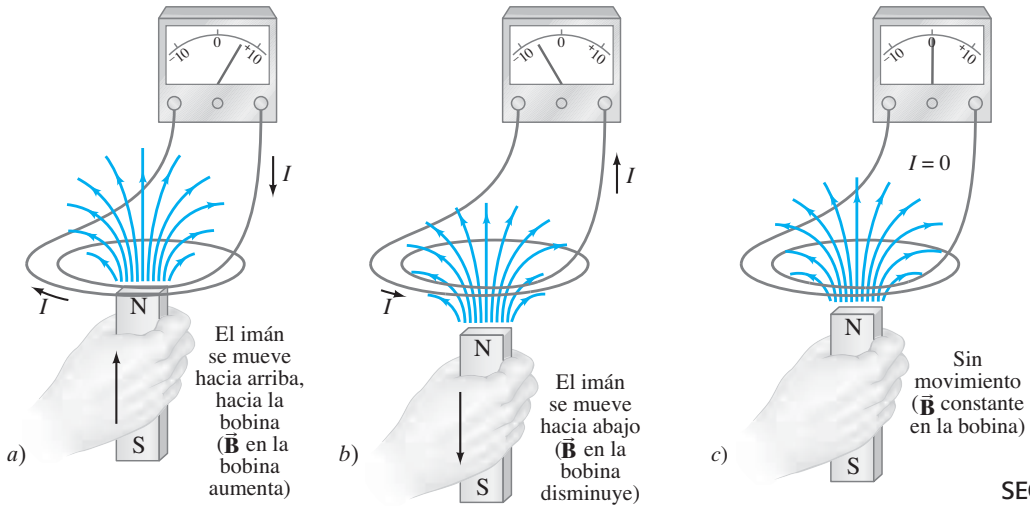
Un campo magnético variable induce una fem.

⚠ CUIDADO
El cambio en $\vec{\mathbf{B}}$, no $\vec{\mathbf{B}}$ en sí, induce corriente

Faraday realizó más experimentos acerca de la **inducción electromagnética**, como se llamó a este fenómeno. Por ejemplo, la figura 29-2 muestra que, si un imán se mueve rápidamente hacia el interior de una bobina de alambre, en éste se induce una corriente. Si el imán se retira rápidamente, se induce una corriente en la dirección opuesta (disminuye $\vec{\mathbf{B}}$ a través de la bobina). Más aún, si el imán se mantiene estable y la bobina de alambre se mueve hacia o desde el imán, de nuevo se induce una fem y fluye una corriente. Se requiere movimiento o cambio para inducir una fem. No importa si el imán o la bobina se mueven. Es su *movimiento relativo* el que cuenta.

⚠ CUIDADO
Movimiento relativo: un imán o una bobina en movimiento inducen corriente

FIGURA 29–2 *a*) Cuando un imán se mueve hacia una bobina, aumenta momentáneamente el campo magnético a través de ella y se induce una corriente. *b*) La corriente inducida es opuesta cuando el imán se aleja de la bobina ($\vec{\mathbf{B}}$ disminuye). Observe que el cero del galvanómetro está en el centro de la escala y la aguja se desvía a la izquierda o derecha, dependiendo de la dirección de la corriente. En *c*) no se induce corriente si el imán no se mueve en relación con la bobina. Aquí cuenta el movimiento relativo: el imán se puede mantener estable en tanto que la bobina se mueve, lo que también induce una fem.



EJERCICIO A Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 758, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizá usted la respondió de manera diferente la primera vez.

29–2 Ley de inducción de Faraday; ley de Lenz

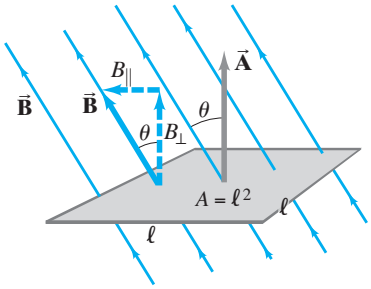


FIGURA 29–3 Determinación del flujo a través de una espira plana de alambre. Esta espira es cuadrada, de lado ℓ y área $A = \ell^2$.

FIGURA 29–4 El flujo magnético Φ_B es proporcional al número de líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ que pasan a través de la espira.

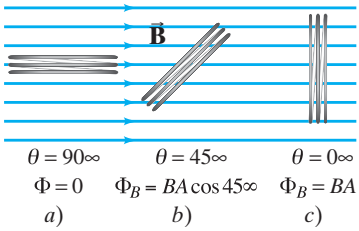
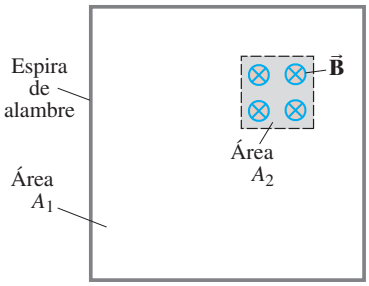


FIGURA 29–5 Ejemplo 29–1.



Faraday investigó cuantitativamente qué factores influyen en la magnitud de la fem inducida. Antes que todo encontró que cuanto más rápidamente cambia el campo magnético, mayor es la fem inducida. También encontró que la fem inducida depende del área de la espira del circuito. Por ende, se dice que la fem es proporcional a la tasa de cambio del **flujo magnético**, Φ_B, que pasa a través del circuito o de la espira de área A. El flujo magnético para un campo magnético uniforme se define de la misma forma que el flujo eléctrico en el capítulo 22, a saber, como

$$\Phi_B = B_\perp A = BA\cos\theta = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}. \qquad [\vec{\mathbf{B}} \text{ uniforme}] \quad \textbf{(29–1a)}$$

Aquí $B_\perp$ es la componente del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ perpendicular a la cara de la espira, y θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{B}}$ y el vector $\vec{\mathbf{A}}$ (que representa al área), cuya dirección es perpendicular a la cara de la espira. Estas cantidades se muestran en la figura 29-3 para una espira cuadrada de lado $\vec{\mathbf{B}}$ cuya área es $A = \ell^2$. Si el área tiene alguna otra forma, o si no es uniforme, el flujo magnético se puede expresar[†]

$$\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}. \qquad \textbf{(29–1b)}$$

Como se vio en el capítulo 27, las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ (al igual que las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$) se pueden dibujar de tal modo que el número de líneas por unidad de área sea proporcional a la intensidad del campo. Así, el flujo Φ_B se puede considerar como proporcional al *número total de líneas que pasan a través del área encerrada por la espira*. Esto se ilustra en la figura 29-4, donde la espira se ve desde el lado (o extremo). Para $\theta = 90°$, no pasan líneas de campo magnético a través de la espira y $\Phi_B = 0$, mientras que Φ_B es un máximo cuando $\theta = 0°$. La unidad de flujo magnético es el tesla-metro^2, que recibe el nombre de **weber**: 1 Wb = 1 T·m^2.

EJEMPLO CONCEPTUAL 29–1 **Determinación de flujo.** Una espira cuadrada de alambre encierra una área A_1, como se indica en la figura 29-5. Un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ perpendicular a la espira se extiende sobre el área A_2. ¿Cuál es el flujo magnético a través de la espira A_1?

RESPUESTA Suponga que el campo magnético es cero afuera del área A_2. El flujo magnético total a través del área A_1 es el flujo a través del área A_2, que, por la ecuación 29-1a para un campo uniforme, es BA_2, más el flujo a través del área restante ($= A_1 - A_2$), que es cero porque $B = 0$. De manera que el flujo total es $\Phi_B = B\,A_2 + 0(A_1 - A_2) = B\,A_2$. *No* es igual a BA_1 porque $\vec{\mathbf{B}}$ no es uniforme sobre A_1.

Con la definición de flujo, ecuaciones 29-1, ahora podemos escribir los resultados de las investigaciones de Faraday: La fem inducida en un circuito es igual a la tasa de cambio del flujo magnético a través del circuito:

LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad \textbf{(29–2a)}$$

Este resultado fundamental se conoce como **ley de inducción de Faraday**, y es una de las leyes básicas del electromagnetismo.

[†]La integral se toma sobre una superficie abierta; esto es, una superficie acotada por una curva cerrada, como un círculo o un cuadrado. En la discusión actual, el área es la que encierra la espira bajo estudio. El área no es una superficie cerrada, como se consideró en la ley de Gauss, capítulo 22.

Si el circuito contiene N espiras muy apretadas, de manera que el mismo flujo pasa a través de cada una, se suman las fem inducidas en cada espira y se obtiene la fem inducida total

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad [N \text{ espiras}] \quad \textbf{(29–2b)}$$

LEY DE INDUCCCIÓN DE FARADAY

EJEMPLO 29–2 **Una espira de alambre en un campo magnético.** Una espira cuadrada de alambre, de lado $\ell = 5.0$ cm, está en un campo magnético uniforme $B = 0.16$ T. ¿Cuál es el flujo magnético en la espira *a*) cuando $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a la cara de la espira y *b*) cuando $\vec{\mathbf{B}}$ está a un ángulo de 30° con el área $\vec{\mathbf{A}}$ de la espira? *c*) ¿Cuál es la magnitud de la corriente promedio en la espira si ésta tiene una resistencia de 0.012 Ω y se hace girar desde la posición *b*) a la posición *a*) en 0.14 s?

PLANTEAMIENTO Usamos la definición $\Phi_B = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$ para calcular el flujo magnético. Luego usamos la ley de inducción de Faraday para encontrar la fem inducida en la bobina y, a partir de ello, la corriente inducida ($I = \mathscr{E}/R$).

SOLUCIÓN El área de la bobina es $A = \ell^2 = (5.0 \times 10^{-2}\,\text{m})^2 = 2.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$, y la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a la cara de la espira (figura 29-3).

a) $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a la cara de la bobina y, por lo tanto, paralelo a $\vec{\mathbf{A}}$ (figura 29-3), de manera que

$$\Phi_B = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$$
$$= BA\cos 0° = (0.16\,\text{T})(2.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^2)(1) = 4.0 \times 10^{-4}\,\text{Wb}.$$

b) El ángulo entre $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{A}}$ de manera que

$$\Phi_B = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$$
$$= BA\cos\theta = (0.16\,\text{T})(2.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^2)\cos 30° = 3.5 \times 10^{-4}\,\text{Wb}.$$

c) La magnitud de la fem inducida es

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{(4.0 \times 10^{-4}\,\text{Wb}) - (3.5 \times 10^{-4}\,\text{Wb})}{0.14\,\text{s}} = 3.6 \times 10^{-4}\,\text{V}.$$

Así, la corriente es

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{3.6 \times 10^{-4}\,\text{V}}{0.012\,\Omega} = 0.030\,\text{A} = 30\,\text{mA}.$$

El signo menos en las ecuaciones 29-2a y b es para recordar en cuál dirección actúa la fem inducida. Los experimentos demuestran que

Una corriente producida por una fem inducida se mueve en una dirección de manera que el campo magnético creado por esa corriente se opone al cambio original en el flujo.

Este enunciado se conoce como **ley de Lenz**. Tenga presente que ahora se estudian dos campos magnéticos distintos: **1.** el campo magnético variable o flujo que induce la corriente, y **2.** el campo magnético producido por la corriente inducida (todas las corrientes producen un campo magnético). El segundo campo se opone al cambio en el primero.

⚠ **CUIDADO**
Distinción de dos diferentes campos magnéticos

La ley de Lenz se enuncia de otra forma, válida incluso si no puede fluir corriente (como cuando un circuito está incompleto).

Una fem inducida siempre está en una dirección que se opone al cambio original en el flujo que la produjo.

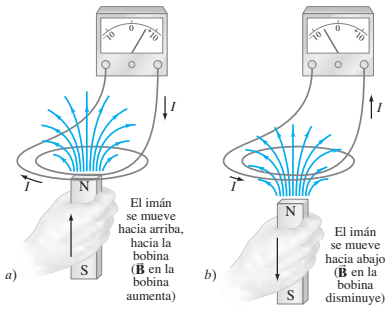


FIGURA 29–2 (repetida).

Ahora se aplicará la ley de Lenz al movimiento relativo entre un imán y una bobina, figura 29-2. El flujo variable a través de la bobina induce una fem en esta última, lo que produce una corriente. Esta corriente inducida crea su propio campo magnético. En la figura 29-2a, disminuye la distancia entre la bobina y el imán. El campo magnético del imán (y el número de líneas de campo) a través de la bobina aumenta y, por lo tanto, el flujo aumenta. El campo magnético del imán apunta hacia arriba. Para oponerse al aumento hacia arriba, el campo magnético producido por la corriente inducida en la bobina necesita apuntar *hacia abajo*. Así, la ley de Lenz dice que la corriente se mueve como se indica (use la regla de la mano derecha). En la figura 29-2b, el flujo *disminuye* (pues el imán se aleja y B disminuye), de manera que la corriente inducida en la bobina produce un campo magnético *hacia arriba* a través de la bobina que "intenta" mantener el estado inicial. En consecuencia, la corriente en la figura 29-2b va en la dirección opuesta de la figura 29-2a.

Es importante hacer notar que, siempre que existe un cambio en el *flujo* a través de la bobina, se induce una fem; ahora se considerarán algunas posibilidades.

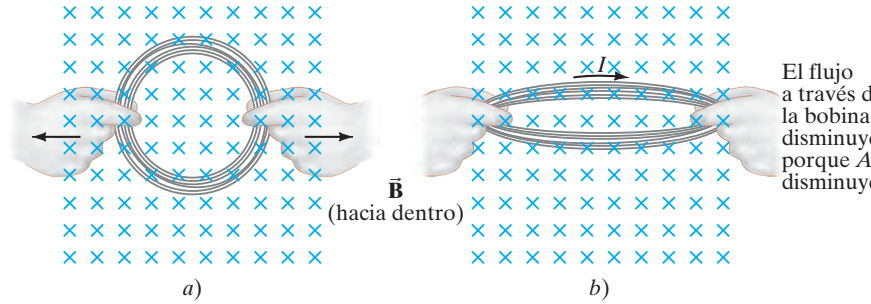


FIGURA 29–6 Es posible inducir una corriente al modificar el área de la bobina, aun cuando B no cambie. Aquí el área se reduce al estirar la bobina por sus lados: el *flujo* a través de la bobina se reduce conforme se va de *a*) a *b*). En este caso, la breve corriente inducida actúa en la dirección que se indica, de manera que intenta mantener el flujo original ($\Phi = BA$) al producir su propio campo magnético hacia la página. Esto es, conforme el área A disminuye, la corriente actúa para aumentar B en la dirección original (hacia dentro).

Puesto que el flujo magnético $\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int B \cos\theta \, dA$, vemos que es posible inducir una fem de tres formas: **1.** mediante un campo magnético variable B; **2.** al cambiar el área A de la espira en el campo; o **3.** al cambiar la orientación θ de la espira con respecto al campo. Las figuras 29-1 y 29-2 ilustran el caso 1. En las figuras 29-6 y 29-7 se ilustran, respectivamente, ejemplos de los casos 2 y 3.

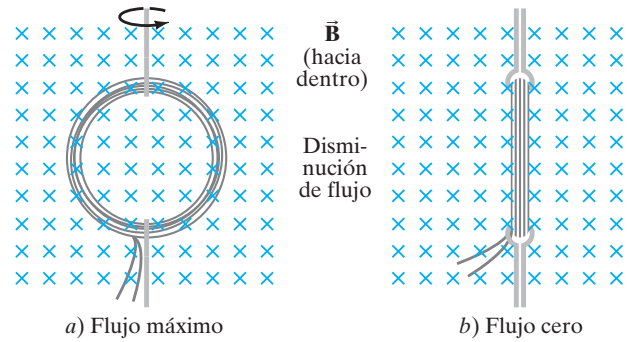


FIGURA 29–7 Se puede inducir una corriente al hacer girar una bobina en un campo magnético. El flujo a través de la bobina cambia de *a*) a *b*) porque θ (en la ecuación 29-1a, $\Phi = BA\cos\theta$) pasó de 0° ($\cos\theta = 1$) a 90° ($\cos\theta = 0$).

EJEMPLO CONCEPTUAL 29–3 **Estufa de inducción.** En una estufa de inducción (figura 29-8), una corriente alterna pasa por una bobina que es el "quemador" (un quemador que nunca se calienta). ¿Por qué calentará una sartén de metal pero no un contenedor de vidrio?

RESPUESTA La corriente alterna establece un campo magnético variable que pasa a través del fondo de la sartén. Este campo magnético variable induce una corriente en el fondo de la sartén y, puesto que la sartén ofrece resistencia, la energía eléctrica se transforma en energía térmica que calienta el recipiente y su contenido. Un contenedor de vidrio ofrece tan alta resistencia que se induce poca corriente y se transfiere poca energía ($P = V^2/R$).

FIGURA 29–8 Ejemplo 29-3: una estufa de inducción.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

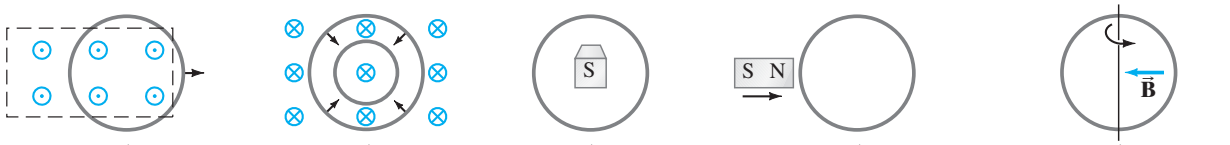
Ley de Lenz

La ley de Lenz permite determinar la dirección de la corriente eléctrica (convencional) inducida en una espira y debida a un cambio en el flujo magnético dentro de la espira. Para producir una corriente inducida se requiere

a) una espira conductora cerrada y
b) un flujo magnético externo a través de la espira que cambie con el tiempo.

1. Determine si el flujo magnético ($\Phi_B = BA\cos\theta$) dentro de la espira disminuye, aumenta o permanece igual.
2. El campo magnético debido a la corriente inducida: *a*) apunta en la misma dirección que el campo externo si el flujo disminuye; *b*) apunta en la dirección opuesta al campo externo si el flujo aumenta; o *c*) es cero si el flujo no cambia.
3. Una vez conocida la dirección del campo magnético inducido, utilice la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de la corriente inducida.
4. Siempre tenga en mente que existen dos campos magnéticos: **1.** un campo externo cuyo flujo debe cambiar para que se induzca una corriente eléctrica en otro circuito, y **2.** un campo magnético producido por la corriente inducida.

FIGURA 29–9 Ejemplo 29–4.



a) Llevar una espira circular hacia la derecha, afuera de un campo magnético que apunta hacia fuera de la página

b) Encoger una espira en un campo magnético que apunta hacia la página

c) Polo magnético S que se mueve desde abajo, hacia arriba en dirección de la espira

d) Polo magnético N que se mueve hacia la espira en el plano de la página

e) Rotación de la espira al tirar del lado izquierdo hacia el lector y empujar el derecho hacia la página; el campo magnético apunta de derecha a izquierda

EJEMPLO CONCEPTUAL 29–4 **Práctica con la ley de Lenz.** ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira circular para cada situación de la figura 29-9?

RESPUESTA *a*) Inicialmente, el campo magnético que apunta hacia fuera de la página pasa a través de la espira. Si se lleva la espira hacia fuera del campo, el flujo magnético a través de la espira disminuye; de manera que la corriente inducida estará en una dirección para mantener la disminución de flujo a través de la espira: la corriente estará en sentido antihorario para producir un campo magnético hacia fuera (hacia el lector).

b) El campo externo está hacia la página. El área de la bobina se reduce, así que el flujo disminuirá; en consecuencia, la corriente inducida será en sentido horario, creando su propio campo hacia la página para compensar la disminución del flujo.

c) Las líneas del campo magnético apuntan hacia el polo S de un imán, de manera que, conforme el imán se mueve hacia el lector y la espira, el campo del imán apunta hacia la página y se vuelve más intenso. La corriente en la espira será inducida en sentido antihorario, con la finalidad de producir un campo $\vec{\mathbf{B}}$ *hacia afuera* de la página.

d) El campo está en el plano de la espira, así que no pasan líneas de campo magnético a través de la espira, y el flujo a través de la espira es cero a lo largo de todo el proceso; por lo tanto, no existe cambio en el flujo magnético externo con el tiempo, y no habrá fem inducida o corriente en la espira.

e) Inicialmente no hay flujo a través de la espira. Cuando la espira comienza a girar, el campo externo a través de la espira comienza a aumentar hacia la izquierda. Para contrarrestar este cambio en el flujo, la espira tendrá corriente inducida en sentido antihorario, de manera que producirá su propio campo hacia la derecha.

⚠ **CUIDADO**

El campo magnético creado por corriente inducida se opone al cambio *en el flujo externo, no necesariamente se opone al campo externo*

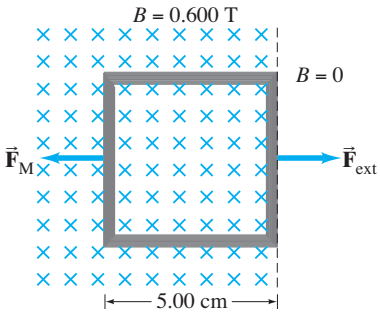


FIGURA 29–10 Ejemplo 29-5. Se tira abruptamente de la bobina cuadrada en un campo magnético $B = 0.600$ T hacia la derecha, hacia una región donde $B = 0$.

EJEMPLO 29–5 **Sacar una bobina de un campo magnético.** Una bobina cuadrada de alambre, con lado $\ell = 5.00$ cm y resistencia total de 100 Ω, contiene 100 espiras y se coloca perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.600 T, como se muestra en la figura 29-10. Rápidamente se tira de ella para sacarla del campo con rapidez constante (en movimiento perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$) hacia una región donde B cae abruptamente a cero. En $t = 0$, el borde derecho de la bobina está en el borde del campo. Para que toda la bobina alcance la región libre de campo transcurren 0.100 s. Encuentre *a*) la tasa de cambio en el flujo a través de la bobina y *b*) la fem y la corriente inducidas. *c*) ¿Cuánta energía se disipa en la bobina? *d*) ¿Cuál fue la fuerza promedio requerida (F_{ext})?

PLANTEAMIENTO Comience por encontrar cómo cambia el flujo magnético, $\Phi_B = BA$, durante el intervalo de tiempo $\Delta t = 0.100$ s. Entonces la ley de Faraday proporcionará la fem inducida y la ley de Ohm dará la corriente.

SOLUCIÓN *a*) El área de la bobina es $A = \ell^2 = (5.00 \times 10^{-2}\,\text{m})^2 = 2.50 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$. Inicialmente, el flujo a través de una espira es $\Phi_B = BA = (0.600\,\text{T})(2.50 \times 10^{-3}\,\text{m}^2) = 1.50 \times 10^{-3}\text{Wb}$. Después de 0.100 s, el flujo es cero. La tasa de cambio en el flujo es constante (porque la bobina es cuadrada) e igual a

$$\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{0 - (1.50 \times 10^{-3}\,\text{Wb})}{0.100\,\text{s}} = -1.50 \times 10^{-2}\,\text{Wb/s}.$$

b) La fem inducida (ecuación 29-2) en la bobina de 100 espiras durante este lapso de 0.100 s es

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -(100)(-1.50 \times 10^{-2}\,\text{Wb/s}) = 1.50\,\text{V}.$$

La corriente se encuentra al aplicar la ley de Ohm a la bobina de 100 Ω:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{1.50\,\text{V}}{100\,\Omega} = 1.50 \times 10^{-2}\,\text{A} = 15.0\,\text{mA}.$$

De acuerdo con la ley de Lenz, la corriente debe estar en sentido horario para producir más $\vec{\mathbf{B}}$ hacia la página y, por lo tanto, se opone a la disminución del flujo hacia la página. *c*) La energía total disipada en la bobina es el producto de la potencia ($= I^2R$) y el tiempo:

$$E = Pt = I^2Rt = (1.50 \times 10^{-2}\,\text{A})^2(100\,\Omega)(0.100\,\text{s}) = 2.25 \times 10^{-3}\,\text{J}.$$

d) Podemos usar el resultado del inciso *c*) y aplicar el principio trabajo-energía: la energía disipada E es igual al trabajo W necesario para sacar la bobina del campo (capítulos 7 y 8). Puesto que $W = \bar{F}d$ donde $d = 5.00$ cm, entonces

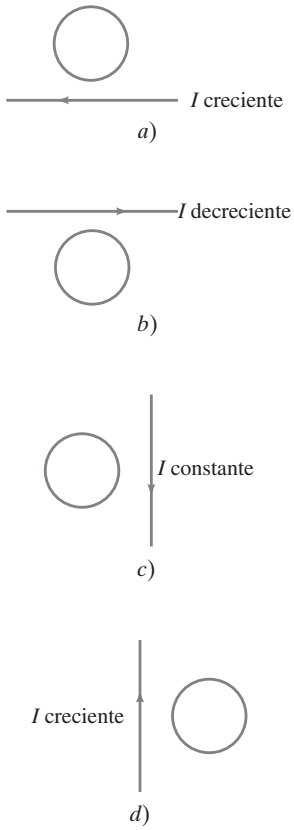
$$\bar{F} = \frac{W}{d} = \frac{2.25 \times 10^{-3}\,\text{J}}{5.00 \times 10^{-2}\,\text{m}} = 0.0450\,\text{N}.$$

Solución alternativa *d*) También es posible calcular la fuerza directamente a partir de $\vec{\mathbf{F}} = I\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}$, ecuación 27-3, que aquí, para constante, es $\vec{\mathbf{B}}$ Las fuerzas que el campo magnético ejerce sobre las secciones superior e inferior de la bobina cuadrada de la figura 29-10 están en direcciones opuestas y se cancelan mutuamente. La fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_{\text{M}}$ ejercida sobre la sección vertical izquierda de la bobina cuadrada actúa hacia la izquierda, como se indica, porque la corriente es hacia arriba (sentido horario). El lado derecho de la espira está en la región donde $\vec{\mathbf{B}} = 0$. En consecuencia, la fuerza externa, hacia la derecha, necesaria para apenas superar la fuerza magnética hacia la izquierda (sobre $N = 100$ espiras) es

$$F_{\text{ext}} = NI\ell B = (100)(0.0150\,\text{A})(0.0500\,\text{m})(0.600\,\text{T}) = 0.0450\,\text{N},$$

que es la misma respuesta, lo que confirma que anteriormente fue correcto el uso de la conservación de la energía.

FIGURA 29–11 Ejercicio B.



EJERCICIO B ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira circular que se debe a la corriente indicada en cada inciso de la figura 29-11?

29–3 Fem inducida en un conductor en movimiento

En la figura 29-12a se presenta otra forma de inducir una fem, y esta situación ayuda a revelar la naturaleza de la fem inducida. Suponga que un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al área acotada por el conductor con forma de U y la varilla móvil que descansa sobre él. Si se hace mover la varilla con una rapidez v, recorre una distancia $dx = v\,dt$ en un tiempo dt. Por lo tanto, el área de la espira aumenta por una cantidad $dA = \ell\,dx = \ell v\,dt$ en un tiempo dt. Por la ley de Faraday, existe una fem inducida $\mathscr{E}$ cuya magnitud está dada por

$$\mathscr{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{B\,dA}{dt} = \frac{B\ell v\,dt}{dt} = B\ell v. \qquad \textbf{(29–3)}$$

La ecuación 29-3 es válida en tanto B, ℓ y v sean perpendiculares entre sí. (Si no lo son, sólo se usan los componentes de cada uno que sean perpendiculares entre sí). A una fem inducida en un conductor que se mueve en un campo magnético a veces se le llama *fem de movimiento*.

También es posible obtener la ecuación 29-3 sin usar la ley de Faraday. En el capítulo 27 se vio que una partícula cargada que se mueve perpendicular a un campo magnético B con rapidez v experimenta una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (ecuación 27-5a). Cuando la varilla de la figura 29-12a se mueve hacia la derecha con rapidez v, los electrones en la varilla también se mueven con esta rapidez. Por lo tanto, dado que $\vec{\mathbf{v}} \perp \vec{\mathbf{B}}$, cada electrón experimenta una fuerza $F = qvB$, que actúa hacia arriba de la página, como se indica en la figura 29-12b. Si la varilla no estuviera en contacto con el conductor con forma de U, los electrones se reunirían en el extremo superior de la varilla, lo que dejaría positivo el extremo inferior (observe los signos en la figura 29-12b). En consecuencia, debe haber una fem inducida. Si la varilla está en contacto con el conductor en forma de U (figura 29-12a), los electrones fluirán hacia la U. Entonces en la espira habrá una corriente (convencional) en sentido horario. Para calcular la fem, determine el trabajo W necesario para mover una carga q desde un extremo de la varilla hasta el otro contra esta diferencia de potencial: W = fuerza × distancia = $(qvB)(\ell)$. La fem es igual al trabajo realizado por unidad de carga, de manera que $\mathscr{E} = W/q = qvB\ell/q = B\ell v$, el mismo resultado[†] que se obtuvo anteriormente a partir de la ley de Faraday, ecuación 29-3.

EJERCICIO ¿En qué dirección fluirán los electrones en la figura 29-12 si la varilla se mueve hacia la izquierda y se reduce el área de la espira de corriente?

EJEMPLO 29–6 ESTIMACIÓN ¿Un avión en movimiento desarrolla una gran fem? Un avión viaja a 1000 km/h en una región donde el campo magnético de la Tierra es de aproximadamente 5.0×10^{-5} T y es casi vertical (figura 29-13). ¿Cuál es la diferencia de potencial inducida entre las puntas de las alas, que están separadas 70 m?

PLANTEAMIENTO Considere a las alas como un conductor de 70 m de largo que se desplaza a través del campo magnético de la Tierra. Use la ecuación 29-3 para obtener la fem.

SOLUCIÓN Puesto que $v = 1000$ km/h $= 280$ m/s, y $\vec{\mathbf{v}} \perp \vec{\mathbf{B}}$, se tiene

$$\mathscr{E} = B\ell v = (5 \times 10^{-5}\,\text{T})(70\,\text{m})(280\,\text{m/s}) \approx 1\,\text{V}.$$

NOTA No hay mucho de qué preocuparse.

EJEMPLO 29–7 Medición electromagnética del flujo sanguíneo. El aparato que se ilustra en la figura 29-14 permite medir la tasa de flujo sanguíneo en los vasos del cuerpo humano, pues la sangre contiene iones con carga. Suponga que el vaso sanguíneo mide 2.0 mm de diámetro, que el campo magnético es de 0.080 T y que la fem medida es de 0.10 mV. ¿Cuál es la velocidad de flujo v de la sangre?

PLANTEAMIENTO El campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ apunta horizontalmente de izquierda a derecha (polo N hacia polo S). La fem inducida actúa sobre el ancho $\ell = 2.0$ mm del vaso sanguíneo, perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ (figura 29-14), tal como en la figura 29-12. Así, podemos usar la ecuación 29-3 para obtener v. ($\vec{\mathbf{v}}$ en la figura 29-14 corresponde a $\vec{\mathbf{v}}$ en la figura 29-12.)

SOLUCIÓN Se despeja v en la ecuación 29-3:

$$v = \frac{\mathscr{E}}{B\ell} = \frac{(1.0 \times 10^{-4}\,\text{V})}{(0.080\,\text{T})(2.0 \times 10^{-3}\,\text{m})} = 0.63\,\text{m/s}.$$

NOTA En la práctica real, se usa una corriente alterna para producir un campo magnético que alterna. Entonces la fem inducida es alterna.

[†]Este argumento de fuerza, que básicamente es el mismo que para el efecto Hall (sección 27-8), explica esta forma de inducir una fem. No explica el caso general de la inducción electromagnética.

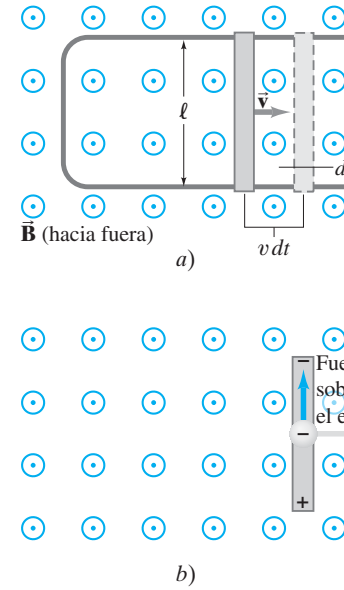
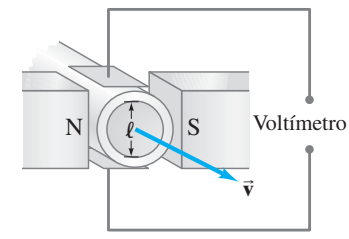


FIGURA 29–12 *a*) Una varilla conductora se desplaza hacia la derecha sobre un conductor con forma de U en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ que apunta hacia fuera de la página. La corriente inducida está en sentido horario. *b*) Fuerza ascendente sobre un electrón en la varilla metálica (que se desplaza hacia la derecha) y que se debe a $\vec{\mathbf{B}}$ que apunta hacia fuera de la página, así que los electrones se agrupan en la parte superior y el extremo inferior queda cargado positivamente.

FIGURA 29–13 Ejemplo 29–6.

FÍSICA APLICADA
Medición del flujo sanguíneo

FIGURA 29–14 Medición de la velocidad sanguínea a partir de la fem inducida. Ejemplo 29-7.



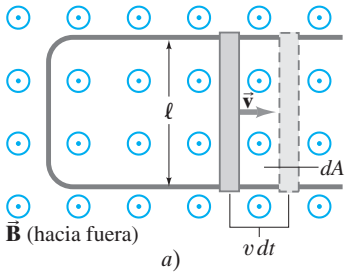


FIGURA 29–12 *a*) (repetida) Una varilla conductora se desplaza hacia la derecha sobre un conductor con forma de U, en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ que apunta fuera de la página. La corriente inducida es en sentido horario.

EJEMPLO 29–8 **Fuerza sobre la varilla.** Para hacer que la varilla de la figura 29-12a se desplace hacia la derecha con rapidez v, es necesario aplicar una fuerza externa sobre la varilla, hacia la derecha. *a*) Explique y determine la magnitud de la fuerza requerida. *b*) ¿Qué potencia externa se requiere para mover la varilla? (No confunda esta fuerza externa sobre la varilla con la fuerza ascendente sobre los electrones, que se ilustra en la figura 29-12b).

PLANTEAMIENTO Cuando la varilla se desplaza hacia la derecha, los electrones fluyen hacia arriba en la varilla, de acuerdo con la regla de la mano derecha. De manera que la corriente convencional está hacia abajo en la varilla. Esto también se puede ver a partir de la ley de Lenz: el flujo magnético hacia fuera a través de la espira aumenta, así que la corriente inducida debe oponerse al incremento. En consecuencia, la corriente es en sentido horario para producir un campo magnético hacia la página (regla de la mano derecha). La fuerza magnética sobre la varilla en movimiento es $\vec{\mathbf{F}} = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$ para un constante $\vec{\mathbf{B}}$ (ecuación 27-3). La regla de la mano derecha nos indica que esta fuerza magnética es hacia la izquierda y, por lo tanto, constituye una "fuerza de arrastre" que se opone al esfuerzo por desplazar la varilla hacia la derecha.

SOLUCIÓN *a*) La magnitud de la fuerza externa, hacia la derecha, necesita equilibrar la fuerza magnética $F = I\ell B$, hacia la izquierda. La corriente $I = \mathscr{E}/R = B\ell v/R$ (véase la ecuación 29-3) y la resistencia R es la de todo el circuito: la varilla y el conductor con forma de U. La fuerza F que se requiere para mover la varilla es, entonces,

$$F = I\ell B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)\ell B = \frac{B^2\ell^2}{R}v.$$

Si B, ℓ y R son constantes, entonces se produce una rapidez constante v mediante una fuerza externa constante. (R constante implica que los rieles paralelos tienen resistencia despreciable).

b) La potencia externa necesaria para mover la varilla con R constante es

$$P_{\text{ext}} = Fv = \frac{B^2\ell^2v^2}{R}.$$

La potencia disipada en la resistencia es $P = I^2R$. Con $I = \mathscr{E}/R = B\ell v/R$,

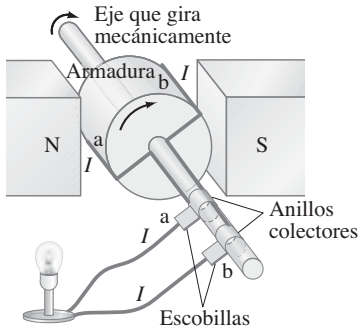
$$P_{\text{R}} = I^2R = \frac{B^2\ell^2v^2}{R},$$

de manera que la entrada de potencia es igual a la potencia disipada en la resistencia en cualquier momento.

29–4 Generadores eléctricos

En la sección 25-7 se estudiaron brevemente las corrientes alternas (ca). Ahora se examinará cómo se genera la ca: mediante un **generador eléctrico** o **dínamo**, uno de los resultados prácticos más importantes del gran descubrimiento de Faraday. Un generador transforma energía mecánica en energía eléctrica, justo lo opuesto de lo que hace un motor. En la figura 29-15 se presenta un diagrama simplificado de un **generador ca**. Un generador consiste en muchas espiras de alambre (sólo se ilustra una) devanadas sobre una *armadura* que puede girar en un campo magnético. El eje se activa mediante algún medio mecánico (caída de agua, turbina de vapor, banda de un motor de automóvil) y se induce una fem en la bobina giratoria. En consecuencia, la *salida* de un generador es una corriente eléctrica. Suponga que en la figura 29-15 la armadura gira en sentido horario; entonces $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ aplicada a partículas con carga en el alambre (o ley de Lenz) nos indica que la corriente (convencional) en el alambre marcado b en la armadura es hacia fuera; por ende, la corriente es hacia fuera en la escobilla b. (Cada escobilla está fija y presiona contra un anillo colector continuo que gira con la armadura). Después de media revolución, el alambre b estará donde se encuentra ahora el alambre a en el dibujo, y entonces la corriente en la escobilla b será hacia dentro. Por lo tanto, la corriente producida es alterna.

FIGURA 29–15 Un generador ca.



Suponga que la espira se pone a girar en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ con velocidad angular constante ω. A partir de la ley de Faraday (ecuación 29-2a), la fem inducida es

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = -\frac{d}{dt}[BA\cos\theta]$$

donde A es el área de la espira y θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{A}}$. Puesto que $\omega = d\theta/dt$, entonces $\theta = \theta_0 + \omega t$. Arbitrariamente se toma $\theta_0 = 0$, de manera que

$$\mathscr{E} = -BA\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = BA\omega \operatorname{sen}\omega t.$$

Si la bobina giratoria contiene N espiras,

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= NBA\omega \operatorname{sen}\omega t \\ &= \mathscr{E}_0 \operatorname{sen}\omega t.\end{aligned} \qquad \textbf{(29–4)}$$

Por ende, la fem de salida es sinusoidal (figura 29-16) con amplitud $\mathscr{E}_0 = NBA\omega$. Tal bobina giratoria en un campo magnético es el principio operativo básico de un generador ca.

La frecuencia $f\,(= \omega/2\pi)$ es de 60 Hz para uso general en Estados Unidos y Canadá, mientras que en muchos países se usa 50 Hz. La mayor parte de la potencia generada en Estados Unidos se obtiene en plantas de vapor, donde la quema de combustibles fósiles (carbón, petróleo, gas natural) pone en ebullición agua para producir vapor de alta presión, el cual, a la vez, hace girar una turbina conectada al eje del generador. También es común utilizar el agua que cae desde lo alto de una presa (hidroeléctrica; figura 29-17). En las plantas nucleoeléctricas, se libera energía nuclear para producir vapor que, a la vez, hace girar las turbinas. De hecho, una máquina térmica (capítulo 20) conectada a un generador es el principal medio de generación de energía eléctrica. La frecuencia de 60 Hz o 50 Hz se mantiene con mucha precisión por parte de las compañías eléctricas y, al resolver la sección problemas, supondremos que es al menos tan precisa como otros datos.

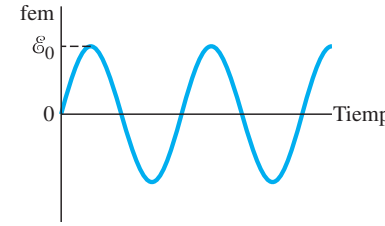


FIGURA 29–16 Un generador ca produce una corriente alterna. La fem de salida $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen}\omega t$, donde $\mathscr{E}_0 = NAB\omega$ (ecuación 29-4).

FÍSICA APLICADA
Plantas eléctricas

FIGURA 29–17 Generadores impulsados por agua en la base de la presa Bonneville, en Oregon.

EJEMPLO 29–9 **Un generador ca.** La armadura de un generador ca de 60 Hz gira en un campo magnético de 0.15 T. Si el área de la bobina es de $2.0 \times 10^{-2}\ \text{m}^2$, ¿cuántas espiras deberá contener la bobina si se desea que la salida pico sea $\mathscr{E}_0 = 170$ V?

PLANTEAMIENTO A partir de la ecuación 29-4, se ve que la fem máxima es $\mathscr{E}_0 = NBA\omega$.

SOLUCIÓN Se despeja N en la ecuación 29-4 con $\omega = 2\pi f = (6.28)(60\ \text{s}^{-1}) = 377\ \text{s}^{-1}$:

$$N = \frac{\mathscr{E}_0}{BA\omega} = \frac{170\ \text{V}}{(0.15\ \text{T})(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m}^2)(377\ \text{s}^{-1})} = 150\ \text{vueltas}.$$

Un **generador cd** es muy parecido a un generador ca, excepto que los anillos colectores se sustituyen por conmutadores de anillo partido, figura 29-18a, tal como en un motor cd (sección 27-6). La salida de tal generador es como se muestra y es posible suavizarla al colocar un capacitor en paralelo con la salida (sección 26-5). Lo más común es el uso de muchos devanados de armadura, como en la figura 29-18b, lo que produce una salida más suave.

FÍSICA APLICADA
Generador cd

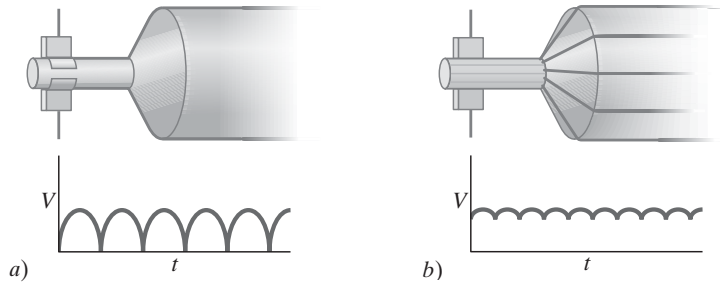
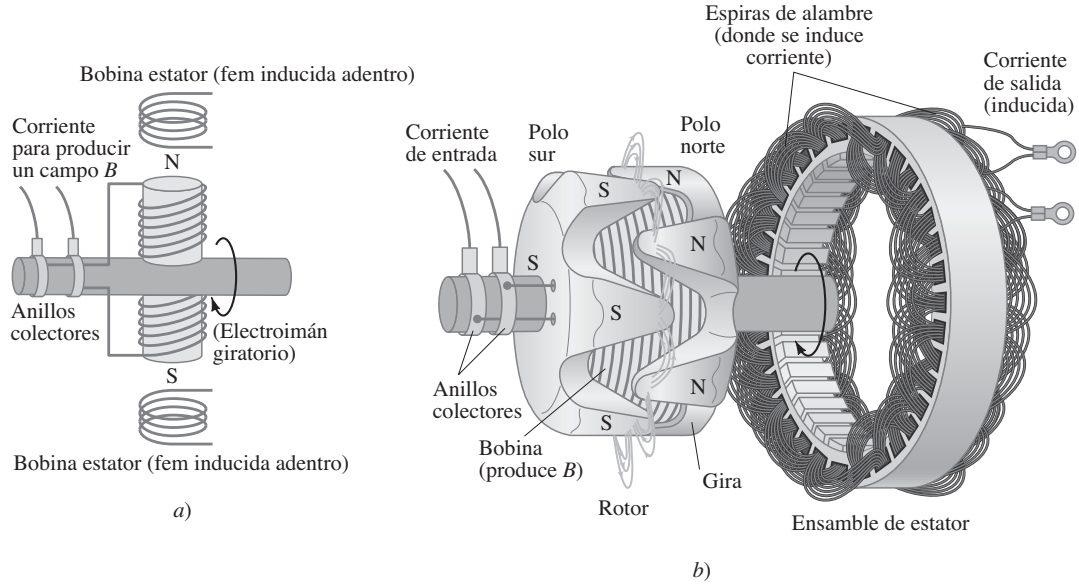


FIGURA 29–18 *a*) Un generador cd con un conjunto de conmutadores y *b*) un generador cd con muchos conjuntos de conmutadores y devanados.

FIGURA 29–19 *a*) Esquema simplificado de un alternador. La corriente de entrada al rotor, desde la batería, se conecta a través de anillos colectores continuos. A veces el electroimán del rotor se sustituye con un imán permanente. *b*) Forma real de un alternador. El rotor se pone a girar mediante una banda desde el motor. La corriente en la bobina de alambre del rotor produce un campo magnético en el interior sobre su eje, que apunta horizontalmente de izquierda a derecha, convirtiendo en polos norte y sur las placas unidas a cualquiera de los extremos. Estas placas tienen una forma dentada o de "dedos" triangulares que se doblan sobre la bobina, y en consecuencia existen polos N y S alternos muy cerca uno de otro, con líneas de campo magnético entre ellos, como indican las líneas azules. Conforme gira el rotor, estas líneas de campo pasan a través de las bobinas fijas, llamadas estator (que se muestran a la derecha para claridad, aunque, cuando el rotor está en operación, gira dentro del estator), las cuales inducen una corriente en ellas, que constituye la salida.



FÍSICA APLICADA
Alternadores

Los automóviles solían usar generadores cd. En la actualidad principalmente usan **alternadores**, que evitan los problemas de desgaste y las descargas eléctricas (arco eléctrico o chispas) a través de los conmutadores de anillo partido de los generadores cd. Los alternadores difieren de los generadores en que un electroimán, llamado *rotor*, se alimenta mediante corriente proveniente de la batería y gira mediante una banda desde el motor. El campo magnético del rotor giratorio pasa a través de un conjunto circundante de bobinas estacionarias, las cuales constituyen el *estator* (figura 29-19), lo que induce una corriente alterna en las bobinas del estator, que es la salida. Esta salida ca cambia a cd para cargar la batería mediante el uso de diodos semiconductores, lo que permite a la corriente fluir en una sola dirección.

*29–5 Fuerza contraelectromotriz y contra torca; corrientes parásitas

*Fuerza contraelectromotriz en un motor

Un motor da vueltas y produce energía mecánica cuando una corriente fluye en él. A partir de la descripción en la sección 27-6 de un motor cd simple, se esperaría que la armadura acelerara indefinidamente debido a la torca sobre ella. Sin embargo, conforme la armadura del motor da vueltas, el flujo magnético a través de la bobina cambia y se genera una fem. Esta fem inducida actúa para oponerse al movimiento (ley de Lenz) y se llama **fuerza contraelectromotriz** o **contra fem**. Cuanto mayor sea la rapidez del motor, mayor será la contra fem. Normalmente, un motor da vueltas y realiza trabajo sobre algo, pero si no existe carga mecánica, la rapidez del motor aumentaría hasta que la contra fem iguale el voltaje de entrada. Cuando existe carga mecánica, la rapidez del motor también puede estar limitada por ésta. Entonces la contra fem será menor que el voltaje externo aplicado. Cuanto mayor sea la carga mecánica, más lentamente girará el motor y más baja será la contra fem ($\mathscr{E} \propto \omega$, ecuación 29-4).

EJEMPLO 29–10 **Contra fem en un motor.** Los devanados de la armadura de un motor cd tienen una resistencia de 5.0 Ω. El motor está conectado a una línea de 120 V y, cuando el motor alcanza rapidez completa contra su carga mecánica normal, la contra fem es de 108 V. Calcule *a*) la corriente en el motor cuando apenas se pone en marcha y *b*) la corriente cuando el motor alcanza rapidez completa.

PLANTEAMIENTO Conforme el motor apenas se pone en marcha, da vueltas muy lentamente, así que no existe contra fem inducida. El único voltaje es la línea de 120 V. La corriente está dada por la ley de Ohm, con $R = 5.0\ \Omega$. A rapidez completa, debe incluir como fem tanto la fem aplicada de 120 V, como la contra fem opuesta.

SOLUCIÓN *a*) En el arranque, la corriente está controlada por los 120 V aplicados a la resistencia de 5.0 Ω de la bobina. Por la ley de Ohm,

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120\ \text{V}}{5.0\ \Omega} = 24\ \text{A}.$$

b) Cuando el motor funciona a plena rapidez, debe incluir la contra fem en el circuito equivalente que se muestra en la figura 29-20. En este caso, la ley de Ohm (o la regla de Kirchhoff) da

$$120\ \text{V} - 108\ \text{V} = I(5.0\ \Omega).$$

En consecuencia,

$$I = \frac{12\ \text{V}}{5.0\ \Omega} = 2.4\ \text{A}.$$

NOTA Este resultado demuestra que la corriente puede ser muy alta cuando se pone en marcha un motor. Por eso, las luces en su casa languidecen cuando el motor del refrigerador (u otro gran motor) se enciende. La gran corriente inicial provoca la caída del voltaje en las luces y los tomacorrientes, pues el cableado doméstico tiene resistencia y a través de él se registra cierta caída de voltaje cuando se extraen grandes corrientes.

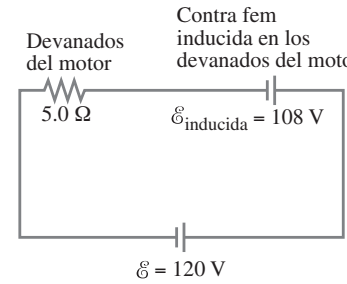


FIGURA 29–20 Circuito de un motor que muestra la contra fem inducida. Ejemplo 29-10.

EJEMPLO CONCEPTUAL 29–11 **Sobrecarga de un motor.** Cuando se usa un aparato electrodoméstico, como una licuadora, un taladro o una sierra eléctrica, si el aparato se sobrecarga o se traba de manera que el motor frene considerablemente o se detenga mientras la potencia todavía está conectada, el dispositivo se puede quemar y arruinar. Explique por qué ocurre esto.

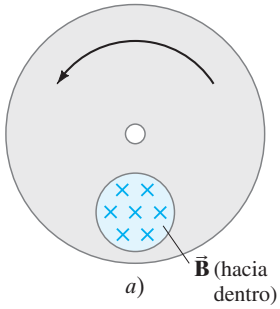
FÍSICA APLICADA
Quema de un motor

RESPUESTA Los motores se diseñan para operar a cierta rapidez para un determinado voltaje aplicado, y el diseñador debe tomar en cuenta la contra fem esperada. Si la rapidez de rotación se reduce, la contra fem no será tan alta como se esperaba ($\mathcal{E} \propto \omega$, ecuación 29-4), la corriente aumentará y podría volverse lo suficientemente grande como para que los devanados del motor se calienten hasta el punto de arruinarlo.

*Contra torca

En un generador la situación es la contraria a la de un motor. Como se vio, la rotación mecánica de la armadura induce una fem en las espiras, que es la salida. Si el generador no está conectado a un circuito externo, en las terminales existe fem, pero no hay corriente. En este caso, toma poco esfuerzo dar vuelta a la armadura. Pero si el generador *está* conectado a un dispositivo que extrae corriente, entonces en las bobinas de la armadura fluye una corriente. Como esta bobina portadora de corriente está en un campo magnético externo, sobre ella se ejercerá una torca (como en un motor) y esta torca se opondrá al movimiento (use la regla de la mano derecha para la fuerza sobre un alambre en la figura 29-15). A esto se le llama **contra torca**. Cuanto mayor sea la carga eléctrica (esto es, cuanto más corriente se extraiga), más grande será la contra torca. En consecuencia, la torca externa aplicada tendrá que ser mayor para mantener al generador dando vueltas. Esto tiene sentido a partir del principio de conservación de la energía. Se necesita más entrada de energía mecánica para producir más salida de energía eléctrica.

EJERCICIO D Un faro de bicicleta recibe potencia de un generador que gira mediante la rueda de la bicicleta. *a*) Si usted pedalea más rápido, ¿cómo cambia la potencia para la luz? *b*) ¿El generador se resiste a girar conforme aumenta la rapidez de la bicicleta, y si lo hace, cómo?



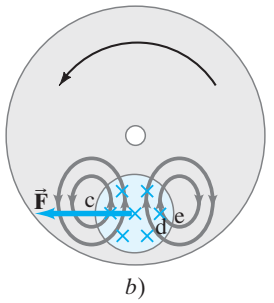


FIGURA 29–21 Producción de corrientes parásitas en una rueda giratoria. Las líneas grises en *b*) indican corriente inducida.

FIGURA 29–22 Detector de metales en un aeropuerto.

FÍSICA APLICADA

Detector de metales en un aeropuerto

FIGURA 29–23 Reparación de un transformador de bajada en un poste de transmisión de alto voltaje.

*Corrientes parásitas

Las corrientes inducidas no siempre están confinadas a trayectorias bien definidas como en los alambres. Considere, por ejemplo, la rueda metálica giratoria de la figura 29-21a. Un campo magnético externo se aplica a una área limitada de la rueda, como se ilustra, y apunta hacia la página. La sección de rueda en el campo magnético tiene sobre ella una fem inducida porque el conductor se mueve, y lleva consigo electrones. El flujo de corriente (convencional) inducida en la rueda es hacia arriba en la región del campo magnético (figura 29-21b) y la corriente sigue una trayectoria de regreso hacia abajo, afuera de esa región. ¿Por qué? De acuerdo con la ley de Lenz, las corrientes inducidas se oponen al cambio que las provoca. Considere la parte de la rueda marcada como *c* en la figura 29-21b, donde el campo magnético es cero pero está a punto de entrar a una región donde $\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia la página. Para oponerse a este aumento hacia dentro en el campo magnético, la corriente inducida es en el sentido antihorario para crear un campo que apunte hacia fuera de la página (regla de la mano derecha 1). De igual modo, la región *d* está a punto de moverse hacia *e*, donde $\vec{\mathbf{B}}$ es cero; por lo tanto, la corriente es en sentido horario para producir un campo hacia dentro opuesto a este flujo decreciente hacia dentro. Tales corrientes se conocen como **corrientes parásitas** y se pueden presentar en cualquier conductor que se desplace a través de un campo magnético o a través del cual cambie el campo magnético.

En la figura 29-21b, el campo magnético ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre las corrientes inducidas que creó, y esa fuerza se opone al movimiento rotacional. Las corrientes parásitas pueden usarse de esta forma como un dispositivo de frenado suave sobre un vehículo que transita rápidamente, por ejemplo. Con la intención de detener al vehículo, se activa un electroimán que aplica su campo a las ruedas o al riel de acero móvil en la parte inferior. Las corrientes parásitas también se usan para amortiguar (reducir) la oscilación de un sistema en vibración. Sin embargo, las corrientes parásitas en ocasiones constituyen un problema. Por ejemplo, las corrientes parásitas inducidas en la armadura de un motor o generador producen calor ($P = I^2\mathcal{R}$) y desperdician energía. Para reducir las corrientes parásitas, las armaduras son *laminadas*; es decir, se hacen con hojas de hierro muy delgadas que están bien aisladas unas de otras. La longitud total de la trayectoria de las corrientes parásitas se confina a cada lámina, lo que aumenta la resistencia total; de esta forma, la corriente es menor y hay menos desperdicio de energía.

Los detectores de metales por los que se atraviesa en los aeropuertos (figura 29-22) detectan objetos metálicos por medio de inducción electromagnética y de corrientes parásitas. Varias bobinas se sitúan en las paredes de los pasillos a diferentes alturas. En una técnica llamada "inducción de pulso", se aplican breves pulsos de corriente repetidos (del orden de microsegundos) a las bobinas, cientos o miles de veces por segundo. Cada pulso en una bobina produce un campo magnético durante un muy breve periodo de tiempo. Cuando un pasajero pasa a través del pasillo, cualquier objeto metálico que lleve consigo tendrá corrientes parásitas inducidas. Las corrientes parásitas persisten brevemente después de cada pulso de entrada, y es posible detectar el pequeño campo magnético producido por la corriente parásita persistente (antes del siguiente pulso externo), lo que activa una señal de alarma. Las tiendas y librerías a veces usan sistemas similares para desalentar los robos.

29–6 Transformadores y transmisión de potencia

Un transformador es un dispositivo para aumentar o disminuir un voltaje ca. Los transformadores se encuentran en todas partes: en los postes de las líneas de transmisión eléctrica (figura 29-23) para reducir el alto voltaje proveniente de la compañía eléctrica hacia un voltaje utilizable en los hogares (120 V o 240 V), en los cargadores para teléfonos celulares, en las computadoras portátiles y otros aparatos electrónicos, en los monitores CRT y en los automóviles para impartir el alto voltaje necesario (a las bujías), así como en muchas otras aplicaciones. Un **transformador** consiste en dos bobinas de alambre conocidas como bobinas **primaria** y **secundaria** (también llamadas simplemente primario y secundario). Las dos bobinas se pueden entrelazar (con alambre aislante), o bien, se pueden unir mediante un núcleo de hierro laminado para minimizar las pérdidas por corrientes parásitas (sección 29-5), como se muestra en la figura 29-24. Los transformadores se diseñan de manera que (casi) todo el flujo magnético producido por la corriente en la bobina primaria también pase a través de la bobina secundaria, y se supone que esto es cierto en lo que sigue. También se supone que es posible ignorar las pérdidas de energía (en resistencia e histéresis), una buena aproximación para los transformadores reales, que con frecuencia tienen una eficiencia mayor al 99%.

Cuando se aplica un voltaje ca a la bobina primaria, el campo magnético variable que produce inducirá un voltaje ca de la misma frecuencia en la bobina secundaria. Sin embargo, el voltaje será diferente de acuerdo con el número de espiras (vueltas) en cada bobina. Según la ley de Faraday, el voltaje o fem inducida en la bobina secundaria es

$$V_S = N_S \frac{d\Phi_B}{dt},$$

donde N_S es el número de vueltas en la bobina secundaria, y $d\Phi_B/dt$ es la tasa de cambio del flujo magnético.

El voltaje de entrada a la bobina primaria, V_P, se relaciona con la tasa a la que el flujo cambia a través de ella

$$V_P = N_P \frac{d\Phi_B}{dt},$$

donde N_P es el número de vueltas en la bobina primaria. Esto se deduce porque el flujo variable produce una contra fem, $N_P d\Phi_B/dt$, en el primario que equilibra exactamente el voltaje aplicado V_P si la resistencia del primario se puede ignorar (reglas de Kirchhoff). Estas dos ecuaciones se dividen, suponiendo que poco o nada de flujo se pierde, para obtener

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P}. \qquad \textbf{(29–5)}$$

Esta **ecuación para el transformador** dice cómo se relaciona el voltaje secundario (salida) con el voltaje primario (entrada); V_S y V_P en la ecuación 29-5 pueden ser valores rms (sección 25-7) para ambos, o valores pico para ambos. Los voltajes cd no funcionan en un transformador porque no habría flujo magnético variable.

Si la bobina secundaria contiene más espiras que la bobina primaria ($N_S > N_P$), se tiene un **transformador de subida**. El voltaje secundario es mayor que el voltaje primario. Por ejemplo, si la bobina secundaria tiene el doble de vueltas que la bobina primaria, entonces el voltaje secundario será el doble que el voltaje primario. Si N_S es menor que N_P se tiene un **transformador de bajada**.

Aunque con un transformador se puede aumentar (o disminuir) el voltaje ca, esto implica un costo. La conservación de energía establece que la potencia de salida no puede ser mayor que la potencia de entrada. Un transformador bien diseñado puede tener más de un 99% de eficiencia, así que poca energía se pierde en calor. Por lo tanto, la potencia de salida, en esencia, es igual a la potencia de entrada. Puesto que la potencia $P = IV$ (ecuación 25-6), se tiene

$$I_P V_P = I_S V_S,$$

o

$$\frac{I_S}{I_P} = \frac{N_P}{N_S}. \qquad \textbf{(29–6)}$$

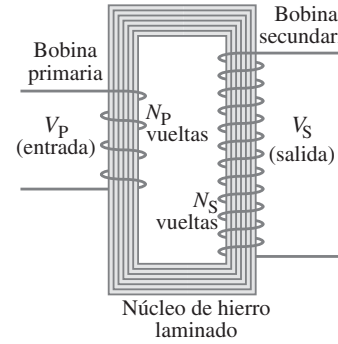


FIGURA 29–24 Transformador de subida ($N_P = 4$, $N_S = 12$).

EJEMPLO 29–12 **Cargador de teléfono celular.** El cargador de un teléfono celular contiene un transformador que reduce 120 V (o 240 V) ca a 5.0 V ca para cargar la batería de 3.7 V (sección 26-4). (También contiene diodos para transformar los 5.0 V ca en 5.0 V cd). Suponga que la bobina secundaria contiene 30 vueltas y que el cargador suministra 700 mA. Calcule *a*) el número de vueltas en la bobina primaria, *b*) la corriente en la bobina primaria y *c*) la potencia transformada.

PLANTEAMIENTO Suponemos que el transformador es ideal, sin pérdida de flujo, de manera que podemos usar la ecuación 29-5 y luego la ecuación 29-6.

SOLUCIÓN *a*) Éste es un transformador de bajada y, a partir de la ecuación 29-5, se tiene

$$N_P = N_S \frac{V_P}{V_S} = \frac{(30)(120\text{ V})}{(5.0\text{ V})} = 720 \text{ vueltas}.$$

b) De acuerdo con la ecuación 29-6,

$$I_P = I_S \frac{N_S}{N_P} = (0.70\text{ A})\left(\frac{30}{720}\right) = 29\text{ mA}.$$

c) La potencia transformada es

$$P = I_S V_S = (0.70\text{ A})(5.0\text{ V}) = 3.5\text{ W}.$$

NOTA La potencia en la bobina primaria, $P = (0.029\text{ A})(120\text{ V}) = 3.5\text{ W}$, es la misma que la potencia en la bobina secundaria. En el caso de un transformador ideal, existe una eficiencia del 100% en la transferencia de potencia.

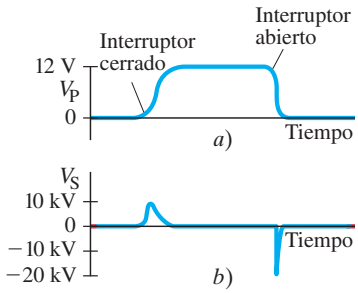


FIGURA 29–25 Un voltaje cd que se enciende y se apaga como se indica en *a*) produce pulsos de voltaje en el secundario (*b*). Las escalas de voltaje en *a*) y *b*) no son iguales.

FÍSICA APLICADA

Los transformadores ayudan en la transmisión de energía eléctrica

Un transformador sólo opera en ca. Una corriente cd en la bobina primaria no produce un flujo variable y, por lo tanto, no induce fem en la bobina secundaria. Sin embargo, si se aplica un voltaje cd a la bobina primaria a través de un interruptor, en el instante cuando el interruptor se abre o se cierra, habrá un voltaje inducido en la bobina secundaria. Por ejemplo, si la cd se enciende y se apaga como se muestra en la figura 29-25a, el voltaje inducido en el secundario es como se indica en la figura 29-25b. Observe que el voltaje secundario cae a cero cuando el voltaje cd es estable. Así es básicamente como se crea, en el **sistema de ignición** o **de encendido** de un automóvil, el alto voltaje para producir la chispa a través de la brecha de una bujía que enciende la mezcla de aire y gas. Al transformador se le conoce simplemente como "bobina de ignición" y transforma los 12 V de la batería (cuando se apaga en la bobina primaria) en un pico de hasta 30 kV en la bobina secundaria.

Los transformadores desempeñan un importante papel en la transmisión de electricidad. Con frecuencia, las plantas eléctricas se ubican a cierta distancia de las áreas metropolitanas, así que la electricidad se debe transmitir a través de grandes distancias (figura 29-26). Siempre hay cierta pérdida de potencia en las líneas de transmisión, y esta pérdida se puede minimizar si la potencia se transmite a alto voltaje, empleando transformadores, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

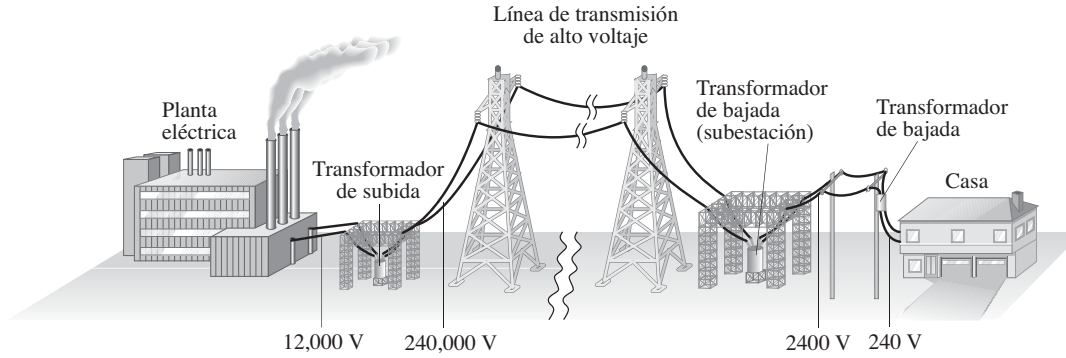


FIGURA 29–26 La transmisión de energía eléctrica desde las plantas generadoras hasta los hogares utiliza transformadores en varias etapas.

EJEMPLO 29–13 **Líneas de transmisión.** A una pequeña ciudad se envía un promedio de 120 kW de energía eléctrica desde una planta eléctrica ubicada a 10 km de distancia. Las líneas de transmisión tienen una resistencia total de 0.40 Ω. Calcule la pérdida de potencia si la energía se transmite a *a*) 240 V y *b*) 24,000 V.

PLANTEAMIENTO No se puede usar $P = V^2/R$ porque, si R es la resistencia de las líneas de transmisión, no se conoce la caída de voltaje a lo largo de ellas; los voltajes dados se aplican a través de las líneas más la carga (a la ciudad). Sin embargo, es posible determinar la corriente I en las líneas ($= P/V$) y luego encontrar la pérdida de potencia a partir de $P_L = I^2R$ para los casos *a*) y *b*).

SOLUCIÓN *a*) Si se envían 120 kW a 240 V, la corriente total será

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1.2 \times 10^5\,\text{W}}{2.4 \times 10^2\,\text{V}} = 500\,\text{A}.$$

La pérdida de potencia en las líneas, P_L, es entonces

$$P_L = I^2R = (500\,\text{A})^2(0.40\,\Omega) = 100\,\text{kW}.$$

Por lo tanto, ¡más del 80% de toda la potencia se desperdiciaría como calor en las líneas de transmisión!

b) Si se envían 120 kW a 24,000 V, la corriente total será

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1.2 \times 10^5\,\text{W}}{2.4 \times 10^4\,\text{V}} = 5.0\,\text{A}.$$

Entonces, la pérdida de potencia en las líneas es

$$P_\text{L} = I^2R = (5.0\,\text{A})^2(0.40\,\Omega) = 10\,\text{W},$$

que es menor que $\frac{1}{100}$ del 1%: ¡una eficiencia mucho mayor!

NOTA Se ve que el voltaje más alto da por resultado menos corriente y, por lo tanto, menos electricidad se desperdicia como calor en las líneas de transmisión. Por esta razón la electricidad generalmente se transmite a muy altos voltajes, tan altos como 700 kV.

La gran ventaja de la ca, y una razón principal por la que es de uso casi universal, es que el voltaje se puede subir o bajar fácilmente con un transformador. El voltaje de salida de una planta de generación de electricidad se sube antes de la transmisión. Antes de llegar a una ciudad, se baja en etapas en subestaciones eléctricas para después distribuirla. El voltaje en las líneas a lo largo de las calles de la ciudad por lo general es de 2400 V o 7200 V (pero a veces menor), y mediante transformadores se baja a 240 V o 120 V para uso doméstico (figuras 29-23 y 29-26).

Las lámparas fluorescentes requieren inicialmente un voltaje muy alto para ionizar el gas dentro de la bombilla. El alto voltaje se obtiene mediante un transformador de subida, llamado balastro, y se puede sustituir independientemente de la bombilla en muchas instalaciones de lámparas fluorescentes. Cuando el balastro comienza a fallar, el tubo tarda en encender. Sustituir la bombilla no resolverá el problema. En las bombillas fluorescentes compactas más recientes, diseñadas para sustituir las bombillas incandescentes, el balastro (transformador) es parte de la bombilla, y es muy pequeño.

FÍSICA APLICADA
Balastro de lámpara fluorescente

29–7 Un flujo magnético variable produce un campo eléctrico

En capítulos anteriores (en especial el capítulo 25, sección 25-8) vimos que, cuando fluye corriente eléctrica en un alambre, hay un campo eléctrico en el alambre que realiza el trabajo de hacer desplazar los electrones en el conductor. En este capítulo se vio que un flujo magnético variable induce una corriente en el alambre, lo que implica que hay un campo eléctrico en el alambre que es inducido por el flujo magnético variable. Así, se llega a la importante conclusión de que

Un flujo magnético variable produce un campo eléctrico.

Este resultado no sólo se aplica a alambres y otros conductores, sino que en realidad es un resultado general que se aplica a cualquier región en el espacio. De hecho, se producirá un campo eléctrico en cualquier punto del espacio donde haya un campo magnético variable.

Ley de Faraday: Forma general

Estas ideas se pueden expresar en forma matemática al generalizar la relación entre un campo eléctrico y la diferencia de potencial entre dos puntos *a* y *b*: $V_\text{ab} = \int_\text{a}^\text{b} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ (ecuación 23-4a) donde $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es un elemento de desplazamiento a lo largo de la trayectoria de integración. La fem $\mathscr{E}$ inducida en un circuito es igual al trabajo realizado por unidad de carga por parte del campo eléctrico, que es igual a la integral de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ alrededor de la trayectoria cerrada:

$$\mathscr{E} = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}. \qquad \textbf{(29–7)}$$

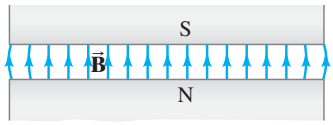
Esto se combina con la ecuación 29-2a para obtener una forma más elegante y general de la ley de Faraday

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(29–8)}$$

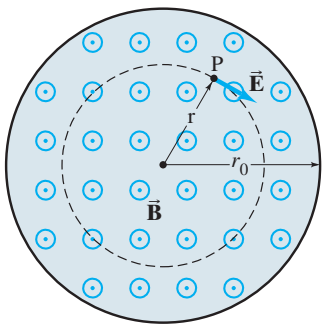
LEY DE FARADAY (forma general)

que relaciona el flujo magnético variable con el campo eléctrico que produce. La integral de la izquierda se toma alrededor de una trayectoria que encierra el área a través de la cual cambia el flujo magnético Φ_B. Este enunciado más elegante de la ley de Faraday (ecuación 29-8) no sólo es válido en conductores, sino en cualquier región del espacio. Para ilustrar esto, veamos un ejemplo.

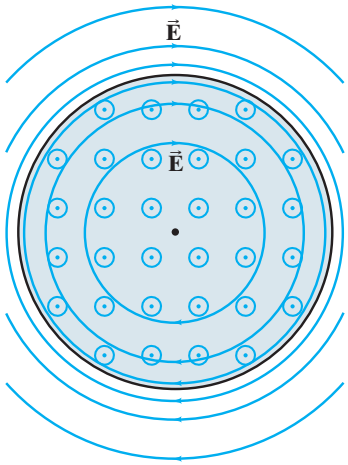
FIGURA 29–27 Ejemplo 29-14. *a*) Vista lateral de casi constante $\vec{\mathbf{B}}$. *b*) Vista superior para determinar el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en el punto P. *c*) Líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ producidas al aumentar $\vec{\mathbf{B}}$ (que apunta hacia fuera). *d*) Gráfica de E contra r.



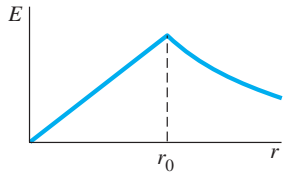
a)



b)



c)



d)

EJEMPLO 29–14 **$\vec{\mathbf{E}}$ producido por variable $\vec{\mathbf{B}}$.** Un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ entre los polos enfrentados de un electroimán es casi uniforme en cualquier instante sobre una área circular de radio r_0, como se muestra en las figuras 29-27a y b. La corriente en los devanados del electroimán aumenta en el tiempo de manera que $\vec{\mathbf{B}}$ cambia en el tiempo a una tasa constante $d\vec{\mathbf{B}}/dt$ en cada punto. Más allá de la región circular ($r > r_0$), se supone que $\vec{\mathbf{B}} = 0$ en todo momento. Determine el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en cualquier punto P a una distancia r del centro del área circular debido al $\vec{\mathbf{B}}$ variable.

PLANTEAMIENTO El flujo magnético variable a través de un círculo de radio r, que se muestra con línea punteada en la figura 29-27b, producirá una fem alrededor de este círculo. Puesto que todos los puntos sobre el círculo indicado con línea punteada son físicamente equivalentes, el campo eléctrico también mostrará esta simetría y estará en el plano perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$. Por lo tanto, se espera que $\vec{\mathbf{E}}$ sea perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ y tangente al círculo de radio r. La dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ será como se indica en las figuras 29-27b y c, pues, por la ley de Lenz, $\vec{\mathbf{E}}$ inducido necesita ser capaz de producir una corriente que genere un campo magnético que se oponga al cambio original en $\vec{\mathbf{B}}$. Por simetría, también se espera que $\vec{\mathbf{E}}$ tenga la misma magnitud en todos los puntos sobre el círculo de radio r.

SOLUCIÓN Tome el círculo que se ilustra en la figura 29-27b como la trayectoria de integración en la ecuación 29-8. Ignore el signo menos para que pueda concentrarse en la magnitud, pues ya se encontró la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de la ley de Lenz; así, se obtiene

$$E(2\pi r) = (\pi r^2)\frac{dB}{dt}, \qquad [r < r_0]$$

ya que $\Phi_B = BA = B(\pi r^2)$ en cualquier instante. Al despejar E se obtiene

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}. \qquad [r < r_0]$$

Esta expresión es válida hasta el borde del círculo ($r \leq r_0$), más allá del cual $\vec{\mathbf{B}} = 0$. Si ahora consideramos un punto donde $r > r_0$, el flujo a través de un círculo de radio r es $\Phi_B = \pi r_0^2 B$. Entonces, la ecuación 29-8 da

$$E(2\pi r) = \pi r_0^2 \frac{dB}{dt} \qquad [r > r_0]$$

o

$$E = \frac{r_0^2}{2r}\frac{dB}{dt}. \qquad [r > r_0]$$

En consecuencia, la magnitud del campo eléctrico inducido aumenta linealmente de cero en el centro del imán a $E = (dB/dt)(r_0/2)$ en el borde, y luego disminuye inversamente con la distancia en la región más allá del borde del campo magnético. Las líneas del campo eléctrico son círculos, como se observa en la figura 29-27c. En la figura 29-27d se presenta una gráfica de E contra r.

EJERCICIO E Considere el imán de la figura 29-27, con un radio $r_0 = 6.0$ cm. Si el campo magnético cambia de manera uniforme de 0.040 T a 0.090 T en 0.18 s, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico resultante en *a*) $r = 3.0$ cm y *b*) $r = 9.0$ cm?

Las fuerzas debidas a $\vec{\mathbf{B}}$ variable son no conservativas

* El ejemplo 29-14 ilustra una importante diferencia entre los campos eléctricos producidos por campos magnéticos variables y los campos eléctricos producidos por cargas eléctricas en reposo (campos electrostáticos). Las líneas de campo eléctrico producidas en el caso electrostático (capítulos 21 a 24) comienzan y terminan en cargas eléctricas. Pero las líneas de campo eléctrico producido por un campo magnético variable son continuas; forman espiras cerradas. Esta distinción incluso va más allá y es importante. En el caso electrostático, la diferencia de potencial entre dos puntos está dada por (ecuación 23-4a)

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}.$$

Si la integral es alrededor de una espira cerrada, de manera que los puntos a y b sean los mismos, entonces $V_{ba} = 0$. Por lo tanto, la integral de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ en torno a una trayectoria cerrada es cero:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 0. \qquad \text{[campo electrostático]}$$

Esto se sigue del hecho de que la fuerza electrostática (ley de Coulomb) es una fuerza conservativa, y por lo tanto se podría definir una función de energía potencial. De hecho, la relación anterior, $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 0$, indica que el trabajo realizado por unidad de carga alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero (o el trabajo realizado entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria; véase el capítulo 8), lo cual es una propiedad sólo de una fuerza conservativa. Pero en el caso no electrostático, cuando el campo eléctrico se produce por un campo magnético variable, la integral alrededor de una trayectoria cerrada *no* es cero, sino que está dada por la ecuación 29-8:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Por lo tanto, se llega a la conclusión de que las fuerzas debidas a campos magnéticos variables son *no conservativas*. Por lo tanto, no es posible definir una energía potencial, o un potencial eléctrico, en un punto dado del espacio para el caso no electrostático. Aunque los campos eléctricos estáticos son *campos conservativos*, el campo eléctrico producido por un campo magnético variable es un **campo no conservativo**.

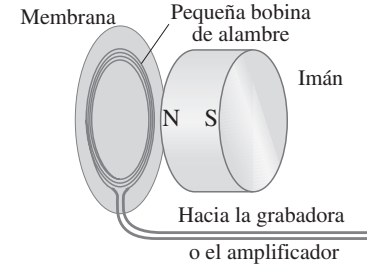


FIGURA 29–28 Diagrama de un micrófono que funciona por inducción.

*29–8 Aplicaciones de la inducción: Sistemas de sonido, memoria de computadoras, sismógrafos, GFCI

*Micrófono

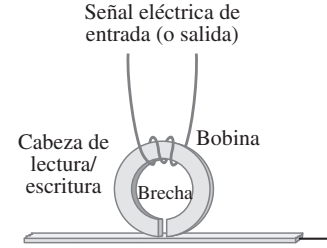
Existen varios tipos de *micrófonos*, y muchos operan mediante el principio de inducción. En cierto sentido, un micrófono sólo es el inverso de un altavoz (sección 27-6). Una pequeña bobina conectada a una membrana está suspendida cerca de un pequeño imán permanente, como se ilustra en la figura 29-28. La bobina se mueve en el campo magnético cuando las ondas sonoras golpean la membrana, y este movimiento induce una fem. La frecuencia de la fem inducida será justo la de las ondas sonoras incidentes, y esta fem es la "señal" que se puede amplificar y enviar a los altavoces o a una grabadora.

*Leer y escribir en cinta y discos

La grabación y reproducción en cinta o disco se realiza mediante *cabezas* magnéticas. Las cintas grabadas para su uso en grabadoras de audio y video contienen una delgada capa de óxido magnético sobre una delgada cinta plástica. Durante la grabación, el voltaje de la señal de audio y/o video se envía a la cabeza grabadora, la cual actúa como un pequeño electroimán (figura 29-29) que magnetiza la pequeña sección de cinta que pasa sobre la estrecha brecha en la cabeza en cada instante. En la reproducción, el magnetismo variable de la cinta en movimiento en la brecha provoca cambios correspondientes en el campo magnético dentro de la cabeza de hierro suave, que a la vez induce una fem en la bobina (ley de Faraday). Esta fem inducida es la señal de salida que se puede amplificar y enviar a un altavoz (audio) o al tubo de imagen (video). En las grabadoras de audio y video, las señales pueden ser *analógicas*: varían continuamente en amplitud a lo largo del tiempo. La variación en el grado de magnetización de la cinta en cualquier punto refleja la variación en amplitud y frecuencia de la señal de audio o video.

La información *digital*, como la que se usa en los discos duros de computadora o en una cinta magnética de computadora y ciertos tipos de grabadoras digitales, se lee y escribe utilizando cabezas que básicamente son iguales que las recién descritas (figura 29-29). La diferencia esencial está en las señales, que no son analógicas, sino digitales, y binarias en particular, lo que significa que sólo dos valores son posibles para cada uno del extremadamente grande número de espacios predeterminados en la cinta o el disco. Los dos posibles valores generalmente se conocen como 1 y 0. El voltaje de señal no varía de manera continua, sino más bien toma sólo dos valores, +5 V y 0 V, por ejemplo, que corresponden a 1 o 0. De esta forma, la información se lleva como una serie de **bits**, cada uno de los cuales sólo puede tener uno de dos valores, 1 o 0.

FIGURA 29–29 *a*) Cabeza de lectura/escritura (reproducción/grabación) para cinta o disco. En la escritura o grabación, la señal eléctrica de entrada hacia la cabeza, que actúa como un electroimán, magnetiza la cinta o el disco que pasa. En la lectura o reproducción, el campo magnético variable de la cinta el o disco que pasa induce un campo magnético variable en la cabeza, que a la vez induce una fem en la bobina, que es la señal de salida. *b*) Fotografía de un disco duro que muestra varias placas y cabezas de lectura/escritura que se pueden mover rápidamente del borde del disco hacia el centro.



a)

b)

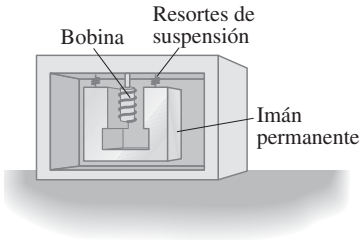


FIGURA 29–30 Un tipo de sismógrafo en el que la bobina está fija a la caja y se mueve con la Tierra. El imán, suspendido mediante resortes, tiene inercia y no se mueve instantáneamente con la bobina (y la caja), de manera que entre el imán y la bobina hay movimiento relativo.

*Lector de tarjetas de crédito

Cuando usted paga con su tarjeta de crédito en una tienda o estación de servicio, la banda magnética en la parte trasera de la tarjeta pasa por una cabeza lectora tal como en una grabadora o computadora. La banda magnética contiene información personal acerca de la cuenta y se conecta por línea telefónica para obtener aprobación si la cuenta está en orden.

*Sismógrafo

En geofísica, un **sismógrafo** mide la intensidad de las ondas sísmicas mediante un imán y una bobina de alambre. El imán o la bobina se encuentra en posición fija con respecto a la caja, mientras que el otro elemento es inercial (suspendido mediante resortes; figura 29-30). El movimiento relativo entre el imán y la bobina cuando la Tierra se sacude induce una fem de salida.

*Interruptor de circuito de falla a tierra (GFCI)

Los fusibles e interruptores de circuito (secciones 25-6 y 28-8) protegen a los edificios de incendios, y a los aparatos de daños que podrían generar las altas corrientes indeseadas. Pero no apagan la corriente sino hasta que es mucho mayor que la que provoca daño permanente o la muerte a los humanos ($\approx$100 mA). Si son lo suficientemente rápidos, pueden proteger en caso de corto. Un *interruptor de circuito de falla a tierra* (GFCI, por las siglas de *ground fault circuit interrupter*) tiene la finalidad de proteger a los humanos; los GFCI pueden reaccionar a corrientes tan pequeñas como 5 mA.

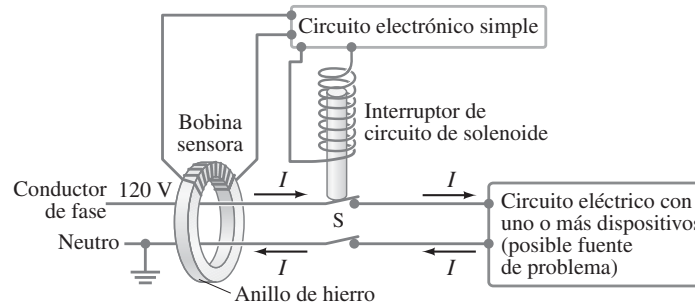


FIGURA 29–31 Interruptor de circuito de falla a tierra (GFCI).

La inducción electromagnética es la base física de un GFCI. Como se muestra en la figura 29-31, los dos conductores de una línea eléctrica que conducen a un dispositivo o circuito eléctrico pasan a través de un pequeño anillo de hierro. Alrededor del anillo hay muchas espiras de alambre delgado que sirven como bobina sensora. En condiciones normales (cuando no hay falla a tierra), la corriente que pasa por el conductor de fase se equilibra exactamente mediante la corriente de regreso en el alambre neutro. Si algo sale mal y el conductor de fase toca la caja metálica no conectada a tierra del dispositivo o electrodoméstico, parte de la corriente de entrada puede pasar a través de una persona que toque la caja y luego a tierra (una *falla a tierra*). Entonces la corriente de regreso en el alambre neutro será menor que la corriente de entrada en el conductor de fase, de manera que hay una *corriente neta* que pasa a través del anillo de hierro del GFCI. Puesto que la corriente es ca, cambia, y la diferencia de corriente produce un campo magnético variable en el hierro, que, por lo tanto, induce una fem en la bobina sensora enrollada alrededor del hierro. Por ejemplo, si un dispositivo extrae 8.0 A, y a través de una persona existe una falla a tierra de 100 mA (= 0.1 A), entonces en el alambre neutro aparecerán 7.9 A. La fem inducida en la bobina sensora por esta diferencia de 100 mA se amplifica mediante un circuito transistor simple y se envía a su propio interruptor de circuito de solenoide que abre el circuito en el interruptor S, lo que protege la vida de la persona.

Si la caja del dispositivo defectuoso está conectada a tierra, la diferencia de corriente es todavía mayor cuando hay una falla, y el GFCI se activa de inmediato.

Los GFCI pueden detectar corrientes tan bajas como 5 mA y reaccionar en 1 ms, con lo que salvan vidas. Pueden ser lo suficientemente pequeños como para encajar como tomacorriente de pared (figura 29-32a) o como unidades de enchufe donde se puede conectar una secadora de cabello o un tostador (figura 29-32b). Es especialmente importante tener GFCI instalados en cocinas, baños, exteriores y cerca de albercas, donde la gente está en más peligro de tocar tierra. Los GFCI siempre tienen un botón "test" (de prueba, para asegurarse de que funcionan) y un botón "reset" (de restablecimiento, después de que se apagan).

FIGURA 29–32 *a*) Tomacorriente de pared GFCI. Los GFCI se reconocen porque tienen botones "test" y "reset". *b*) Adaptador GFCI que se enchufa al tomacorriente.

a)

b)

Resumen

El **flujo magnético** que pasa a través de una espira es igual al producto del área de la espira por la componente perpendicular del campo magnético (uniforme): $\Phi_B = B_\perp A = BA\cos\theta$. Si no es uniforme, entonces $\vec{\mathbf{B}}$

$$\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}. \qquad \textbf{(29–1b)}$$

Si el flujo magnético a través de una bobina de alambre cambia con el tiempo, se induce una fem en la bobina. La magnitud de la fem inducida es igual a la tasa de cambio en el tiempo del flujo magnético a través de la espira por el número N de espiras en la bobina:

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad \textbf{(29–2b)}$$

Ésta es la **ley de inducción de Faraday**.

La fem inducida puede producir una corriente cuyo campo magnético se opone al cambio original en el flujo (**ley de Lenz**).

A partir de la ley de Faraday también se puede ver que un alambre recto de longitud ℓ, que se desplaza con rapidez v perpendicular a un campo magnético de intensidad B, tiene una fem inducida entre sus extremos igual a

$$\mathscr{E} = B\ell v. \qquad \textbf{(29–3)}$$

La ley de Faraday también establece que *un campo magnético variable produce un campo eléctrico*. La relación matemática es

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(29–8)}$$

y es la forma general de la ley de Faraday. La integral a la izquierda se toma alrededor de la espira a través de la cual el flujo magnético Φ_B está cambiando.

Un **generador** eléctrico cambia energía mecánica en energía eléctrica. Su operación se basa en la ley de Faraday: se hace girar uniformemente una bobina de alambre por medios mecánicos en un campo magnético, y el flujo variable a través de la bobina induce una corriente sinusoidal, que es la salida del generador.

[*Un motor, que opera a la inversa de un generador, actúa como un generador en el sentido de que induce una **fuerza contraelectromotriz** o **contra fem** en su bobina giratoria; puesto que esta contra fem se opone al voltaje de entrada, puede actuar para limitar la corriente en la bobina de un motor. De manera similar, un generador actúa un poco como un motor en el sentido de que una **contra torca** actúa sobre su bobina giratoria].

Un **transformador**, que es un dispositivo para cambiar la magnitud de un voltaje ca, consiste en una bobina primaria y una bobina secundaria. El flujo variable debido a un voltaje ca en la bobina primaria induce un voltaje ca en la bobina secundaria. En un transformador 100% eficiente, la razón entre los voltajes de salida y los de entrada (V_S/V_P) es igual a la razón entre el número de vueltas N_S en el secundario y el número N_P en el primario:

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P}. \qquad \textbf{(29–5)}$$

La razón entre corriente secundaria y corriente primaria es el inverso de la razón entre las vueltas:

$$\frac{I_S}{I_P} = \frac{N_P}{N_S}. \qquad \textbf{(29–6)}$$

[*Los micrófonos, los interruptores de circuito de falla a tierra, los sismógrafos y las cabezas lectura/escritura para discos de computadora y grabadoras de cinta son aplicaciones de la inducción electromagnética].

Preguntas

1. ¿Cuál sería la ventaja, en los experimentos de Faraday (figura 29-1), de usar bobinas con muchas vueltas?
2. ¿Cuál es la diferencia entre flujo magnético y campo magnético?
3. Suponga que usted sostiene un anillo circular de alambre y súbitamente empuja un imán, el polo sur primero, alejándolo de usted hacia el centro del círculo. ¿Se induce una corriente en el alambre? ¿Se induce una corriente cuando el imán se mantiene estable dentro del anillo? ¿Se induce una corriente cuando usted retira el imán? En cada caso, si su respuesta es sí, especifique la dirección.
4. Dos espiras circulares de alambre se mueven en la vecindad de un alambre recto muy largo que conduce una corriente estable, como se muestra en la figura 29-33. Determine la dirección de la corriente inducida en cada espira.

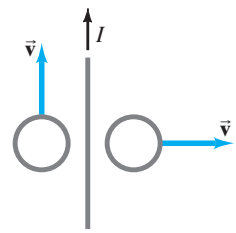


FIGURA 29–33
Preguntas 4 y 5.

5. ¿Existe alguna fuerza entre las dos espiras examinadas en la pregunta 4? Si es así, ¿en qué dirección?
6. Suponga que usted observa a lo largo de una línea que pasa a través de los centros de dos espiras circulares de alambre (pero separadas), una detrás de la otra. Súbitamente se conecta una batería a la espira frontal, lo que establece una corriente en sentido horario. *a*) ¿Se inducirá una corriente en la segunda espira? *b*) Si es así, ¿cuándo comienza esta corriente? *c*) ¿Cuándo se detiene? *d*) ¿En qué dirección va esa corriente? *e*) ¿Existe una fuerza entre las dos espiras? *f*) Si es así, ¿en qué dirección?
7. Se desconecta la batería mencionada en la pregunta 6. ¿Se inducirá una corriente en la segunda espira? Si es así, ¿cuándo inicia y cuándo se detiene? ¿En qué dirección va esa corriente?
8. ¿En qué dirección fluirá la corriente en la figura 29-12a, si la varilla se desplaza hacia la izquierda, de forma que disminuye el área de la espira a la izquierda?
9. En la figura 29-34, determine la dirección de la corriente inducida en el resistor R_A cuando *a*) la bobina B se mueve hacia la bobina A, *b*) cuando la bobina B se mueve alejándose de A, *c*) cuando aumenta la resistencia R_B.

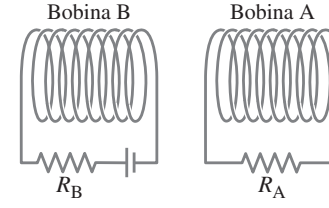


FIGURA 29–34
Pregunta 9.

10. En situaciones donde una pequeña señal debe recorrer una distancia, se usa un *cable blindado* en el que el alambre de señal está rodeado por un aislante y luego va encerrado dentro de un conductor cilíndrico que conduce la corriente de regreso (figura 28-12). ¿Por qué es necesario un "blindaje"?

11. ¿Cuál es la ventaja de colocar los dos alambres eléctricos aislados portadores de ca juntos o incluso enlazados uno alrededor del otro?

12. ¿Cuál objeto caerá más rápido en un campo magnético no uniforme, una espira conductora con radio ℓ o un alambre recto de longitud $\ell/2$?

13. Una región, donde no se desea campo magnético, se rodea con una hoja de metal de baja resistividad. *a*) ¿Esta hoja blindará el interior frente a un campo magnético de rápida variación en el exterior? Explique. *b*) ¿Actuará como blindaje para un campo magnético estático? *c*) ¿Y si la hoja es superconductora (resistividad = 0)?

14. El cargador de un teléfono celular contiene un transformador. ¿Por qué no puede comprar un solo cargador para cargar su antiguo teléfono celular, su nuevo celular, su taladro y un tren eléctrico de juguete?

15. Un transformador encerrado tiene cuatro alambres guía que salen de él. ¿Cómo podría determinar la razón de vueltas en las dos bobinas, sin abrir el transformador? ¿Cómo sabría cuáles alambres están apareados con cuáles?

16. El uso de líneas de alto voltaje en los hogares (por ejemplo, 600 V o 1 200 V) reduciría el desperdicio de energía. ¿Por qué no se usan?

17. Un transformador diseñado para una entrada ca de 120 V seguramente "se quemará" si se conecta a una fuente cd de 120 V. Explique. [*Sugerencia:* La resistencia de la bobina primaria generalmente es muy baja].

***18.** Explique por qué, exactamente, las luces languidecen durante breves momentos cuando se enciende el motor de un refrigerador. Cuando un calefactor eléctrico se enciende, las luces languidecen mientras el calefactor esté encendido. Explique la diferencia.

***19.** Con base en la figura 29-15 y en las reglas de la mano derecha, demuestre por qué la contra torca en un generador se *opone* al movimiento.

***20.** ¿Un freno de corriente parásita (figura 29-21) funcionará en una rueda de cobre o aluminio, o la rueda debe ser ferromagnética? Explique.

***21.** Se ha propuesto el uso de corrientes parásitas para ayudar a clasificar residuos sólidos para reciclado. Primero, el residuo se muele en pequeños segmentos y el hierro se remueve con un imán cd. Luego el residuo se desliza por un plano inclinado sobre imanes permanentes. ¿Cómo ayudaría esto en la separación de metales no ferrosos (Al, Cu, Pb, latón) de materiales no metálicos?

***22.** La barra de metal pivotada con rendijas en la figura 29-35 cae mucho más rápidamente a través de un campo magnético que una barra sólida. Explique.

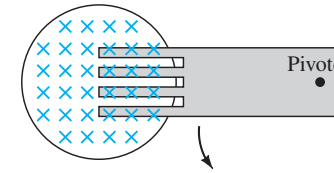


FIGURA 29–35
Pregunta 22.

***23.** Si una hoja de aluminio se mantiene entre los polos de un gran imán de barra, se requiere cierta fuerza para retirarlo del campo magnético, aun cuando la hoja no sea ferromagnética y no toque las caras de los polos. Explique.

***24.** Un imán de barra que cae dentro de un tubo metálico vertical alcanza una velocidad terminal incluso si el tubo está al vacío, de manera que no existe resistencia del aire. Explique.

***25.** Una barra metálica, pivotada en un extremo, oscila libremente en ausencia de un campo magnético; pero en un campo magnético, sus oscilaciones se amortiguan rápidamente. Explique. (Este *amortiguamiento magnético* se utiliza en varios dispositivos prácticos).

***26.** Como un micrófono magnético básicamente es como un altavoz, ¿un altavoz (sección 27-6) en realidad podría funcionar como micrófono? Esto es, ¿podría usted hablar en el altavoz y obtener una señal de salida que pudiera amplificarse? Explique. Discuta, a la luz de su respuesta, cómo difieren en construcción un micrófono y un altavoz.

Problemas

29–1 y 29–2 Ley de inducción de Faraday

1. (I) El flujo magnético a través de una bobina de alambre que contiene dos espiras cambia a una tasa constante de −58 Wb a +38 Wb en 0.42 s. ¿Cuál es la fem inducida en la bobina?

2. (I) El polo norte del imán en la figura 29-36 se insertará en la bobina. ¿En qué dirección fluye la corriente inducida a través del resistor R?

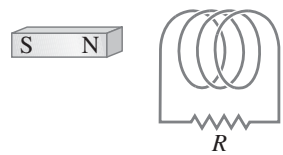


FIGURA 29–36
Problema 2.

3. (I) La espira rectangular que se ilustra en la figura 29-37 se empuja hacia el campo magnético que apunta hacia dentro. ¿En qué dirección va la corriente inducida?

FIGURA 29–37
Problema 3.

4. (I) Una espira de alambre, de 22.0 cm de diámetro, inicialmente se orienta perpendicular a un campo magnético de 1.5 T. La espira gira de tal forma que en 0.20 s su plano queda paralelo a la dirección del campo. ¿Cuál es la fem inducida promedio en la espira?

5. (II) Una espira circular de alambre, de radio $r = 12$ cm, se introduce en un campo magnético uniforme $B = 0.500$ T, con su plano normal a la dirección del campo. Si después la magnitud del campo disminuye a una tasa constante de −0.010 T/s, ¿a qué tasa deberá aumentar r de manera que la fem inducida dentro de la espira sea cero?

6. (II) Una bobina de alambre, de 10.8 cm de diámetro, se orienta inicialmente, de manera que su plano es perpendicular a un campo magnético de 0.68 T, que apunta hacia arriba. Durante el curso de 0.16 s, el campo cambia a uno de 0.25 T que apunta hacia abajo. ¿Cuál es la fem inducida promedio en la bobina?

7. (II) Una espira circular de alambre, de 16 cm de diámetro, se coloca en un campo magnético de 0.50 T. *a*) Cuando el plano de la espira es perpendicular a las líneas de campo, ¿cuál es el flujo magnético a través de la espira? *b*) El plano de la espira se hace girar hasta que forma un ángulo de 35° con las líneas de campo. ¿Cuál es el ángulo θ en la ecuación 29-1a para esta situación? *c*) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la espira a este ángulo?

8. (II) *a*) Si la resistencia del resistor en la figura 29-38 disminuye lentamente, ¿cuál es la dirección de la corriente inducida en la pequeña espira circular en el interior de la espira más grande? *b*) ¿Cuál sería si la espira pequeña se colocara afuera de la más grande, hacia la izquierda?

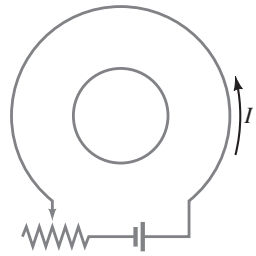


FIGURA 29–38
Problema 8.

9. (II) Si el solenoide en la figura 29-39 se retira alejándolo de la espira que se muestra, ¿en qué dirección está la corriente inducida en la espira?

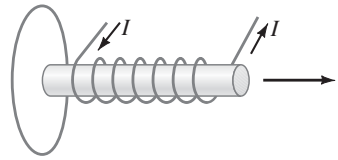


FIGURA 29–39
Problema 9.

10. (II) El campo magnético perpendicular a una espira de alambre circular, de 8.0 cm de diámetro, cambia de +0.52 T a −0.45 T en 180 ms, donde + significa que el campo apunta alejándose de un observador y − significa que apunta hacia el observador. *a*) Calcule la fem inducida. *b*) ¿En qué dirección fluye la corriente inducida?

11. (II) Una espira circular en el plano del papel se encuentra en un campo magnético de 0.75 T y apunta hacia el papel. Si el diámetro de la espira cambia de 20.0 cm a 6.0 cm en 0.50 s, *a*) ¿cuál es la dirección de la corriente inducida?, *b*) ¿cuál es la magnitud de la fem inducida promedio? y *c*) si la resistencia de la bobina es de 2.5 Ω, ¿cuál es la corriente inducida promedio?

12. (II) Parte de una espira de alambre rectangular sencilla, con las dimensiones que se indican en la figura 29-40, se coloca dentro de una región de campo magnético uniforme de 0.650 T. La resistencia total de la espira es de 0.280 Ω. Calcule la fuerza que se requiere para retirar la espira del campo (hacia la derecha) con una velocidad constante de 3.40 m/s. Desprecie la gravedad.

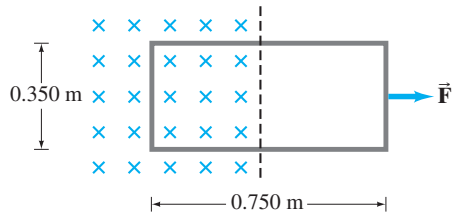


FIGURA 29–40 Problema 12.

13. (II) Una profesora de física, mientras demostraba la ley de Faraday a su clase, inadvertidamente movió el anillo de oro de su dedo desde una posición donde un campo magnético de 0.80 T apunta a lo largo de su dedo, hasta una posición de campo cero en 45 ms. El anillo, de 1.5 cm de diámetro, tiene resistencia y masa de 55 μΩ y 15 g, respectivamente. *a*) Estime la energía térmica producida en el anillo que se debe al flujo de corriente inducida. *b*) Calcule el aumento de temperatura del anillo, suponiendo que toda la energía térmica producida se usa para aumentar la temperatura del anillo. El calor específico del oro es 129 J/kg·°C.

14. (II) Un solenoide, de 420 vueltas y 25 cm de largo, tiene un diámetro de 2.5 cm. Una bobina de 15 vueltas se devana apretadamente alrededor del centro del solenoide. Si la corriente en el solenoide aumenta de manera uniforme de 0 a 5.0 A en 0.60 s, ¿cuál será la fem inducida en la bobina corta durante ese tiempo?

15. (II) Una bobina de 22.0 cm de diámetro consiste en 28 vueltas de alambre de cobre circular de 2.6 mm de diámetro. Un campo magnético uniforme, perpendicular al plano de la bobina, cambia a una tasa de 8.65×10^{-3} T/s. Determine *a*) la corriente en la espira y *b*) la tasa a la que se produce energía térmica.

16. (II) Una línea de transmisión, que transporta una corriente variable sinusoidal con frecuencia $f = 60$ Hz y valor pico $I_0 = 55$ kA, corre a una altura de 7.0 m a través de la tierra de un granjero (figura 29-41). El granjero construye una bobina de alambre rectangular de 10 vueltas y 2.0 m de alto, orientada verticalmente debajo de la línea de transmisión. El granjero espera usar el voltaje inducido en esta bobina para impulsar equipo eléctrico de 120 V, que requiere un voltaje variable sinusoidal con frecuencia $f = 60$ Hz y valor pico $V_0 = 170$ V. ¿Cuál debe ser la longitud ℓ de la bobina? ¿Esto sería poco ético?

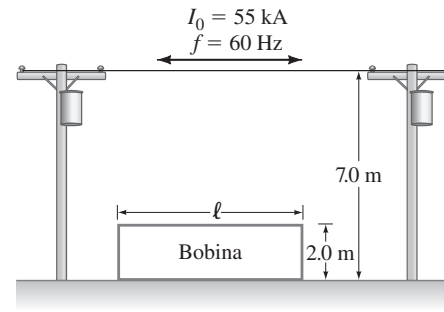


FIGURA 29–41 Problema 16.

17. (II) El campo magnético perpendicular a una sencilla espira circular de alambre de cobre, de 18.2 cm de diámetro, disminuye de manera uniforme desde 0.750 T hasta cero. Si el alambre tiene 2.35 mm de diámetro, ¿cuánta carga pasa por un punto en la bobina durante esta operación?

18. (II) El flujo magnético a través de cada espira de una bobina de 75 vueltas está dado por $(8.8t - 0.51t^3) \times 10^{-2}\ \text{T}\cdot\text{m}^2$, donde el tiempo t está en segundos. *a*) Determine la fem $\mathscr{E}$ como función del tiempo. *b*) ¿Cuál es $\mathscr{E}$ en $t = 1.0$ s y en $t = 4.0$ s?

19. (II) Una espira circular de alambre, de 25 cm de diámetro, tiene una resistencia de 150 Ω. Inicialmente está en un campo magnético de 0.40 T, con su plano perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, pero se retira del campo en 120 ms. Calcule la energía eléctrica disipada en este proceso.

20. (II) El área de una espira circular elástica disminuye a una tasa constante, $dA/dt = -3.50 \times 10^{-2}\ \text{m}^2/\text{s}$. La espira está en un campo magnético $B = 0.28$ T, cuya dirección es perpendicular al plano de la espira. En $t = 0$, la espira tiene área $A = 0.285\ \text{m}^2$. Determine la fem inducida en $t = 0$ y en $t = 2.00$ s.

21. (II) Suponga que el radio de la espira elástica en el problema 20 aumenta a una tasa constante, $dr/dt = 4.30$ cm/s. Determine la fem inducida en la espira en $t = 0$ y en $t = 1.00$ s.

22. (II) Una sola espira circular de alambre se coloca dentro de un largo solenoide, con su plano perpendicular al eje de este último. El área de la espira es A_1 y la del solenoide, que tiene n vueltas por unidad de longitud, es A_2. Una corriente $I = I_0 \cos \omega t$ fluye en las vueltas del solenoide. ¿Cuál es la fem inducida en la espira pequeña?

23. (II) Usted mira hacia abajo una espira conductora elástica, con resistencia $R = 2.0\ \Omega$, que yace en un campo magnético. La magnitud del campo es uniforme en el espacio, pero varía con el tiempo t de acuerdo con $B(t) = \alpha t$, donde $\alpha = 0.60$ T/s. El área A de la espira también aumenta a una tasa constante, de acuerdo con $A(t) = A_0 + \beta t$, donde $A_0 = 0.50\ \text{m}^2$ y $\beta = 0.70\ \text{m}^2/\text{s}$. Encuentre la magnitud y dirección (en sentido horario o antihorario, cuando se ve desde arriba de la página) de la corriente inducida dentro de la espira, en el tiempo $t = 2.0$ s, si el campo magnético *a*) es paralelo al plano de la espira a la derecha; *b*) es perpendicular al plano de la espira, abajo.

24. (II) Los cargadores de batería inductiva, que permiten la transferencia de energía eléctrica sin la necesidad de contactos eléctricos expuestos, se usan comúnmente en electrodomésticos que requieren sumergirse con seguridad en el agua, como los cepillos dentales eléctricos. Considere el siguiente modelo simple para la transferencia de energía en un cargador inductivo (figura 29-42). Dentro de la base plástica del cargador, una bobina primaria, con diámetro d y n_P vueltas por unidad de longitud, se conecta al receptáculo de pared ca de la casa, de manera que una corriente dependiente del tiempo $I = I_0 \operatorname{sen}(2\pi ft)$ fluye dentro de ella. Cuando el cepillo se coloca en la base, una bobina secundaria de N vueltas adentro del cepillo tiene un diámetro sólo ligeramente mayor que d y se centra sobre la bobina primaria. Encuentre una expresión para la fem inducida en la bobina secundaria. [Esta fem inducida activa circuitos dentro del cepillo que recargan su batería].

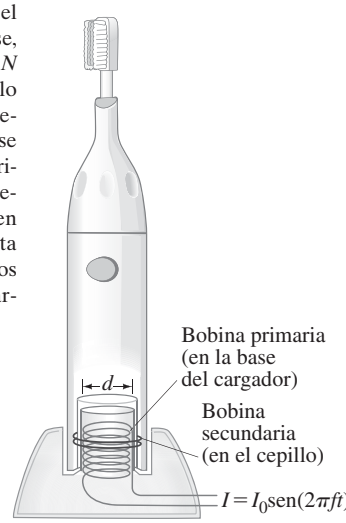


FIGURA 29–42
Problema 24.

25. (III) *a*) Determine el flujo magnético a través de una espira cuadrada de lado a (figura 29-43), si un lado es paralelo a un alambre recto (y se encuentra a una distancia b de ese alambre) que conduce una corriente I. *b*) Si la espira se aleja del alambre con una rapidez v, ¿qué fem se induce en él? *c*) ¿La corriente inducida fluye en sentido horario o antihorario? *d*) Determine la fuerza F requerida para alejar la espira.

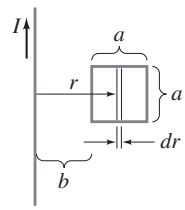


FIGURA 29–43
Problemas 25 y 26.

26. (III) Determine la fem inducida en la espira cuadrada de la figura 29-43, si la espira permanece en reposo y la corriente en el alambre recto está dada por $I(t) = (15.0\ \text{A}) \operatorname{sen}(2500t)$, donde t está en segundos. La distancia a es 12.0 cm y b es 15.0 cm.

29–3 Fem de movimiento

27. (I) La varilla móvil de la figura 29-12b tiene 13.2 cm de largo y genera una fem de 12 mV mientras se mueve en un campo magnético de 0.90 T. ¿Cuál es su rapidez?

28. (I) La varilla móvil de la figura 29-12b tiene 12.0 cm de largo y se tira de ella con una rapidez de 15.0 cm/s. Si el campo magnético es 0.800 T, calcule la fem que se desarrolla.

29. (II) En la figura 29-12a, la varilla se mueve hacia la derecha con una rapidez de 1.3 m/s y tiene una resistencia de 2.5 Ω. La separación de riel es $\ell = 25.0$ cm. El campo magnético es 0.35 T y la resistencia del conductor con forma de U es 25.0 Ω en un instante dado. Calcule *a*) la fem inducida, *b*) la corriente en el conductor con forma de U y *c*) la fuerza externa necesaria para mantener constante la velocidad de la varilla en ese instante.

30. (II) Si el conductor con forma de U en la figura 29-12a tiene resistividad ρ, mientras que la de la varilla móvil es despreciable, deduzca una fórmula para la corriente I como función del tiempo. Suponga que la varilla parte del fondo de la U en $t = 0$, y se desplaza con rapidez uniforme v en el campo magnético B. El área transversal de la varilla y de todas las partes de la U es A.

31. (II) Suponga que el conductor con forma de U y la varilla de conexión en la figura 29-12a se orientan verticalmente (pero todavía en contacto), de manera que la varilla cae por acción de la fuerza gravitacional. Determine la rapidez terminal de la varilla si tiene una masa $m = 3.6$ gramos, longitud $\ell = 18$ cm y resistencia $R = 0.0013\ \Omega$. Cae en un campo horizontal uniforme $B = 0.060$ T. Desprecie la resistencia del conductor con forma de U.

32. (II) Cuando se conduce un automóvil a través del campo magnético de la Tierra, se induce una fem en su antena vertical de radio de 75.0 cm de largo. Si el campo de la Tierra (5.0×10^{-5} T) apunta al norte con un ángulo de inclinación de 45°, ¿cuál es la máxima fem inducida en la antena y en cuál dirección se desplazará el vehículo para producir este valor máximo? La rapidez del automóvil es 30.0 m/s sobre una camino horizontal.

33. (II) Una varilla conductora yace sobre dos largos rieles paralelos sin fricción en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ ($\perp$ a los rieles y la varilla) como en la figura 29-44. *a*) Si los rieles son horizontales y se da un empujón inicial a la varilla, ¿esta última viajará con rapidez constante aun cuando esté presente un campo magnético? *b*) Suponga que, en $t = 0$, cuando la varilla tiene rapidez $v = v_0$, los dos rieles se conectan eléctricamente mediante un alambre desde el punto a hasta el punto b. Suponiendo que la varilla tiene resistencia R y los rieles tienen resistencia despreciable, determine la rapidez de la varilla como función del tiempo. Discuta su respuesta.

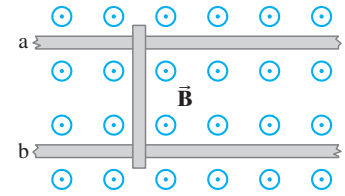


FIGURA 29–44 Problemas 33 y 34.

34. (III) Suponga que una varilla conductora (masa m, resistencia R) yace sobre dos rieles paralelos sin fricción ni resistencia, separados una distancia ℓ en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ ($\perp$ a los rieles y a la varilla), como en la figura 29-44. En $t = 0$, la varilla está en reposo y una fuente de fem se conecta a los puntos a y b. Determine la rapidez de la varilla como función del tiempo si a) la fuente da una corriente constante I, b) la fuente da una fem constante $\mathscr{E}_0$. c) ¿La varilla alcanza una rapidez terminal en cualquier caso? Si es así, ¿cuál es?

35. (III) Una sección corta de alambre, de longitud a, se desplaza con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, paralela a una alambre muy largo que conduce una corriente I, como se indica en la figura 29-45. El extremo proximal de la sección de alambre está a una distancia b del alambre largo. Suponiendo que el alambre vertical es muy largo en comparación con $a + b$, determine la fem entre los extremos de la sección corta. Suponga que $\vec{\mathbf{v}}$ está a) en la misma dirección que I, b) en dirección opuesta a I.

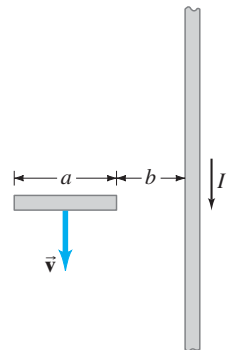


FIGURA 29–45
Problema 35.

29–4 Generadores

36. (I) El generador de un automóvil que está en marcha sin acelerar a 875 rpm produce 12.4 V. ¿Cuál será la salida a una rapidez de rotación de 1550 rpm, suponiendo que nada más cambia?

37. (I) Un generador simple genera un voltaje de salida pico de 24.0 V. La armadura cuadrada consiste en devanados que tienen 5.15 cm de lado y gira en un campo de 0.420 T a una tasa de 60.0 rev/s. ¿Cuántas espiras de alambre se deben devanar en la armadura cuadrada?

38. (II) Un generador simple tiene una bobina cuadrada de 480 espiras y 22.0 cm de lado. ¿Con qué rapidez debe girar en un campo de 0.550 T para producir una salida pico de 120 V?

39. (II) Demuestre que la salida rms de un generador ca es $V_{\text{rms}} = NAB\omega/\sqrt{2}$ donde $\omega = 2\pi f$.

40. (II) Una bobina de armadura circular de 250 espiras, con un diámetro de 10.0 cm, gira a 120 rev/s en un campo magnético uniforme de 0.45 T de intensidad. a) ¿Cuál es la salida de voltaje rms del generador? b) ¿Qué haría usted a la frecuencia de rotación para duplicar la salida de voltaje rms?

*29–5 Contra fem, contra torca; corrientes parásitas

***41.** (I) La contra fem en un motor es de 72 V cuando opera a 1200 rpm. ¿Cuál sería la contra fem a 2500 rpm si el campo magnético no cambia?

***42.** (I) Un motor tiene una resistencia de armadura de 3.05 Ω. Si extrae 7.20 A cuando corre a toda rapidez y se conecta a una línea de 120 V, ¿cuál será la contra fem?

***43.** (II) ¿Cuál será la corriente en el motor del ejemplo 29-10, si la carga hace que corra a la mitad de la rapidez?

***44.** (II) La contra fem en un motor es de 85 V cuando el motor opera a 1100 rpm. ¿Cómo cambiaría usted el campo magnético del motor si quiere reducir la contra fem a 75 V cuando el motor corre a 2300 rpm?

***45.** (II) Un generador cd tiene nominación a 16 kW, 250 V y 64 A cuando gira a 1000 rpm. La resistencia de los devanados de la armadura es 0.40 Ω. a) Calcule el voltaje "sin carga" mecánica a 1000 rpm (cuando no hay circuito conectado al generador, por lo que la corriente es cero). b) Calcule el voltaje de carga mecánica completa (es decir, a 64 A) cuando el generador opera a 750 rpm. Suponga que la magnitud del campo magnético permanece constante.

29–6 Transformadores

[Suponga 100% de eficiencia, a menos que se indique otra condición].

46. (I) Un transformador tiene 620 vueltas en la bobina primaria y 85 en la bobina secundaria. ¿Qué tipo de transformador es éste y en qué factor cambia el voltaje? ¿En qué factor cambia la corriente?

47. (I) Los letreros de neón requieren 12 kV para su operación. Para operar desde una línea de 240 V, ¿cuál debe ser la razón entre las vueltas de la bobina secundaria y las de la bobina primaria del transformador? ¿Cuál será la salida de voltaje si el transformador se conecta a la inversa?

48. (II) Un transformador de tren a escala se conecta en 120 V ca y extrae 0.35 A mientras suministra 7.5 A al tren. a) ¿Qué voltaje está presente a través de las vías? b) ¿El transformador es de subida o de bajada?

49. (II) El voltaje de salida de un transformador de 75 W es 12 V y la corriente de entrada es 22 A. a) ¿Se trata de un transformador de subida o de bajada? b) ¿En qué factor se multiplica el voltaje?

50. (II) Si 65 MW de potencia a 45 kV (rms) llegan a una ciudad desde un generador mediante líneas de transmisión de 3.0 Ω, calcule a) la fem en el extremo generador de las líneas y b) la fracción de la potencia generada que se desperdicia en las líneas.

51. (II) Suponga que una fuente de voltaje suministra un voltaje ca con amplitud V_0 entre sus terminales de salida. Si las terminales de salida se conectan a un circuito externo, y una corriente ca con amplitud I_0 sale de las terminales, entonces la resistencia equivalente del circuito externo es $R_{\text{eq}} = V_0/I_0$. a) Si un resistor R se conecta directamente a las terminales de salida, ¿cuál es R_{eq}? b) Si un transformador con N_{P} y N_{S} vueltas en sus primario y secundario, respectivamente, se coloca entre la fuente y el resistor, como se ilustra en la figura 29-46, ¿cuál es R_{eq}? [Los transformadores se pueden usar en circuitos de ca para alterar la resistencia aparente de elementos de circuito, como altavoces, con la finalidad de maximizar la transferencia de potencia].

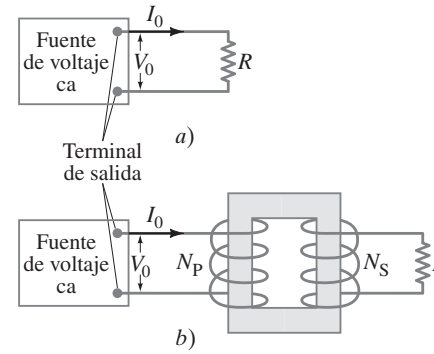


FIGURA 29–46 Problema 51.

52. (III) Diseñe una línea de transmisión cd que pueda transmitir 225 MW de electricidad 185 km con tan sólo una pérdida del 2.0%. Los alambres se harán de aluminio y el voltaje es de 660 kV.

53. (III) Suponga que 85 kW se transmitirán por dos líneas de 0.100 Ω. Estime cuánta potencia se ahorra si el voltaje se sube de 120 a 1200 V y luego se baja de nuevo, en vez de simplemente transmitir a 120 V. Suponga que cada uno de los transformadores es 99% eficiente.

29–7 Φ_B variable produce $\vec{E}$

54. (II) En una región circular, hay un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ que apunta hacia la página (figura 29-47). Un sistema coordenado xy tiene su origen en el centro de la región circular. Una carga puntual positiva libre $+Q = 1.0\ \mu C$ inicialmente está en reposo en una posición $x = +10$ cm sobre el eje x. Si la magnitud del campo magnético ahora disminuye a una tasa de -0.10 T/s, ¿qué fuerza (magnitud y dirección) actuará sobre $+Q$?

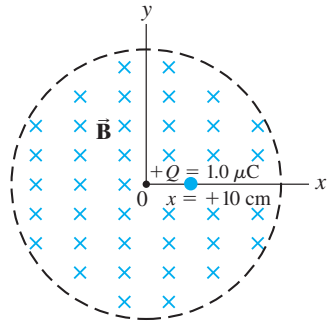


FIGURA 29–47
Problema 54.

55. (II) El **betatrón**, un dispositivo que se utiliza para acelerar electrones a alta energía, consiste en un tubo vacío circular colocado en un campo magnético (figura 29-48), en el que se inyectan los electrones. El electroimán produce un campo que **1.** mantiene a los electrones en su órbita circular dentro del tubo y **2.** aumenta la rapidez de los electrones cuando cambia B. *a*) Explique cómo se aceleran los electrones. (Véase la figura 29-48). *b*) ¿En qué dirección se desplazan los electrones en la figura 29-48 (indique las direcciones como si viera desde arriba hacia abajo)? *c*) ¿B debe aumentar o disminuir para acelerar los electrones? *d*) En realidad, el campo magnético es 60 Hz ca; demuestre que los electrones se pueden acelerar sólo durante $\frac{1}{4}$ de ciclo(s) $(\frac{1}{240}\text{s})$. (Durante ese tiempo hacen cientos de miles de revoluciones y adquieren muy alta energía).

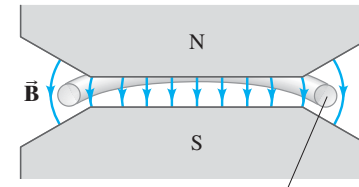


FIGURA 29–48
Problemas 55 y 56.

56. (III) Demuestre que los electrones en el betatrón, problema 55 y figura 29-48, se aceleran en un radio constante si el campo magnético B_0 en la posición de la órbita del electrón en el tubo es igual a la mitad del valor promedio del campo magnético (B_{prom}) sobre el área de la órbita circular en cada momento: $B_0 = \frac{1}{2} B_{\text{prom}}$. (Ésta es la razón por la que las caras del polo tienen una forma más bien extraña, como se observa en la figura 29-48).

57. (III) Encuentre una fórmula para el campo eléctrico neto en la varilla móvil del problema 34, como función del tiempo, para cada caso, *a*) y *b*).

Problemas generales

58. Suponga que se observan las dos espiras de corriente en el plano de la página, como se muestra en la figura 29-49. Cuando se cierra el interruptor S en la bobina de la izquierda, *a*) ¿cuál es la dirección de la corriente inducida en la otra espira? *b*) ¿Cuál es la situación después de un "largo" tiempo? *c*) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira de la derecha, si se tira de esa espira rápidamente en dirección horizontal hacia la derecha? (S estuvo cerrado durante mucho tiempo).

FIGURA 29–49
Problema 58.

59. Una espira cuadrada de 27.0 cm por lado tiene una resistencia de 7.50 Ω. Inicialmente está en un campo magnético de 0.755 T, con su plano perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, pero se retira del campo en 40.0 ms. Calcule la energía eléctrica disipada en este proceso.

60. En una planta generadora de electricidad, ubicada a 85 km de una ciudad que requiere 65 MW de potencia a 12 kV, se generan 24 kV. Dos líneas de transmisión desde la planta hasta la ciudad tienen, cada una, una resistencia de 0.10 Ω/km. ¿Cuál deberá ser el voltaje de salida del transformador en la planta generadora para una eficiencia global de transmisión del 98.5%, suponiendo que el transformador es perfecto?

61. Una espira circular, con 12 m^2 de área, encierra un campo magnético perpendicular al plano de la espira; su magnitud es $B(t) = (10\ \text{T/s})t$. La espira se conecta a un resistor de 7.5 Ω y un capacitor de 5.0 pF en serie. Cuando está completamente cargado, ¿cuánta carga se almacena en el capacitor?

62. Los devanados primarios de un transformador, que tiene una eficiencia del 85%, se conectan a 110 V ca. Los devanados secundarios se conectan a una bombilla de 75 W y 2.4 Ω. *a*) Calcule la corriente a través de los devanados primarios del transformador. *b*) Calcule la razón entre el número de devanados primarios y el número de devanados secundarios del transformador.

63. Un par de líneas de transmisión de potencia tienen, cada una, una resistencia de 0.80 Ω y conducen 740 A a lo largo de 9.0 km. Si el voltaje rms de entrada es de 42 kV, calcule *a*) el voltaje en el otro extremo, *b*) la entrada de potencia, *c*) la pérdida de potencia en las líneas y *d*) la salida de potencia.

64. Demuestre que la pérdida de potencia en las líneas de transmisión, P_L, está dada por $P_L = (P_T)^2 R_L / V^2$, donde P_T es la potencia transmitida al usuario, V es el voltaje entregado y R_L es la resistencia de las líneas de potencia.

65. Una lámpara de escritorio de alta intensidad tiene nominación de 35 W, pero sólo requiere 12 V. Contiene un transformador que convierte los 120 V de voltaje doméstico al voltaje requerido. *a*) ¿El transformador es de subida o de bajada? *b*) ¿Cuál es la corriente en la bobina secundaria cuando la lámpara está encendida? *c*) ¿Cuál es la corriente en la bobina primaria? *d*) ¿Cuál es la resistencia de la bombilla cuando está encendida?

66. Dos rieles sin resistencia yacen separados 32 cm en una rampa de 6.0°. Se unen en el fondo mediante un resistor de 0.60 Ω. En la parte superior, una barra de cobre de 0.040 kg de masa (ignore su resistencia) yace a través de los rieles. Todo el aparato está dentro de un campo magnético vertical de 0.55 T. ¿Cuál es la velocidad terminal (estable) de la barra conforme se desliza sin fricción a lo largo de los rieles?

67. Un bobina con 150 vueltas, 5.0 cm de radio y 12 Ω de resistencia rodea un solenoide que tiene 230 vueltas/cm y 4.5 cm de radio; véase la figura 29-50. La corriente en el solenoide cambia a una tasa constante de 0 a 2.0 A en 0.10 s. Calcule la magnitud y dirección de la corriente inducida en la bobina de 150 vueltas.

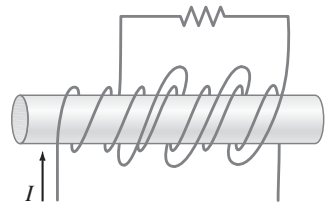


FIGURA 29–50
Problema 67.

68. Una **bobina de exploración** para medir B es una pequeña bobina con N espiras, cada una con área transversal A. Se conecta a un llamado **galvanómetro balístico**, que es un dispositivo para medir la carga total Q que pasa a través de ella en un corto tiempo. La bobina de exploración se coloca en el campo magnético a medir, con su cara perpendicular al campo. Entonces se gira rápidamente 180° en torno a un diámetro. Demuestre que la carga total Q que fluye en la corriente inducida durante este corto tiempo de "vuelta" es proporcional al campo magnético B. En particular, demuestre que B está dado por

$$B = \frac{QR}{2NA}$$

donde R es la resistencia total del circuito, incluida la de la bobina y la del galvanómetro balístico que mide la carga Q.

69. Un anillo, con un radio de 3.0 cm y una resistencia de 0.025 Ω, se hace girar 90° en torno a un eje a través de su diámetro, en un campo magnético de 0.23 T, perpendicular a tal eje. ¿Cuál es el mayor número de electrones que fluiría a través de un punto fijo en el anillo conforme se completa este proceso?

70. Una linterna se puede activar mediante la corriente inducida de un imán que se mueve a través de una bobina de alambre. La bobina y el imán están dentro de un tubo plástico que se puede agitar, lo que hace que el imán se mueva de ida y vuelta a través de la bobina. Suponga que el imán tiene una intensidad de campo máxima de 0.05 T. Haga suposiciones razonables y especifique el tamaño de la bobina y el número de vueltas necesarias para encender una bombilla estándar de 1 watt y 3 V.

***71.** Un pequeño vehículo eléctrico supera una fuerza de fricción de 250 N cuando viaja a 35 km/h. El motor eléctrico recibe impulso mediante 10 baterías de 12 V conectadas en serie y se acopla directamente a las ruedas, cuyos diámetros son de 58 cm. Las 270 bobinas de armadura son rectangulares, de 12 cm por 15 cm, y giran en un campo magnético de 0.60 T. *a*) ¿Cuánta corriente extrae el motor para producir la torca requerida? *b*) ¿Cuál es la contra fem? *c*) ¿Cuánta potencia se disipa en las bobinas? *d*) ¿Qué porcentaje de la potencia de entrada se usa para impulsar al automóvil?

72. ¿Cuál es la energía disipada, como función del tiempo, en una espira circular de 18 vueltas de alambre, que tiene un radio de 10.0 cm y una resistencia de 2.0 Ω, si el plano de la espira es perpendicular a un campo magnético dado por

$$B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$$

con $B_0 = 0.50$ T y $t = 0.10$ s?

73. Una delgada varilla metálica de longitud ℓ gira con velocidad angular ω en torno a un eje a través de un extremo (figura 29-51). El eje de rotación es perpendicular a la varilla y es paralelo a un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Determine la fem que se desarrolla entre los extremos de la varilla.

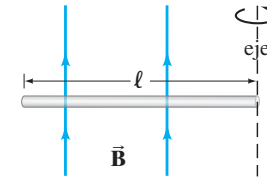


FIGURA 29–51
Problema 73.

***74.** El campo magnético de un motor cd con "devanado en derivación" se produce mediante bobinas de campo colocadas en paralelo con las bobinas de armadura. Suponga que las bobinas de campo tienen una resistencia de 36.0 Ω y las bobinas de la armadura 3.00 Ω. La contra fem a plena rapidez es de 105 V cuando el motor se conecta a 115 V cd. *a*) Dibuje el circuito equivalente para las situaciones cuando el motor apenas arranca y cuando corre a rapidez plena. *b*) ¿Cuál es la corriente total que extrae el motor al arrancar? *c*) ¿Cuál es la corriente total que extrae el motor cuando corre a plena rapidez?

75. Aplique la ley de Faraday, en la forma de la ecuación 29-8, para demostrar que el campo eléctrico estático entre las placas de un capacitor de placas paralelas no puede caer de manera abrupta a cero en los bordes, sino que, de hecho, presenta efecto de borde. Use la trayectoria que se indica con líneas punteadas en la figura 29-52.

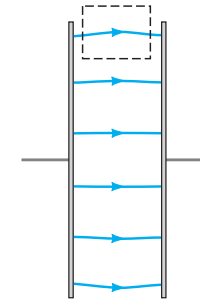


FIGURA 29–52
Problema 75.

76. Un disco metálico circular, de radio R, gira con velocidad angular ω en torno a un eje que pasa a través de su centro, perpendicular a su cara. El disco gira en un campo magnético uniforme B cuya dirección es paralela al eje de rotación. Determine la fem inducida entre el centro y los bordes.

77. ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico en cada punto en el disco giratorio del problema 76?

78. Un circuito con forma circular, de radio r, que contiene una resistencia R y una capacitancia C, se coloca con su plano perpendicular a un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ uniforme en el espacio, que se dirige hacia la página (figura 29-53). Al comenzar en el instante $t = 0$, se observa que la diferencia de voltaje $V_{ba} = V_b - V_a$ a través de las placas del capacitor aumenta con el tiempo t de acuerdo con $V_{ba} = V_0(1 - e^{-t/\tau})$, donde V_0 y τ son constantes positivas. Determine dB/dt, la tasa de cambio en el tiempo de la magnitud del campo magnético. Conforme el tiempo pasa, ¿B aumenta o se reduce?

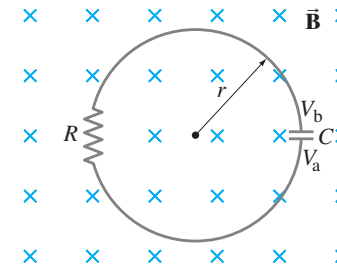


FIGURA 29–53
Problema 78.

79. En cierta región del espacio cerca de la superficie de la Tierra, existe un campo magnético horizontal uniforme, de magnitud B, arriba de un nivel definido como $y = 0$. Por abajo de $y = 0$, el campo abruptamente se vuelve cero (figura 29-54). Una espira de alambre cuadrada vertical tiene resistividad ρ, densidad de masa ρ_m, diámetro d y longitud de lado ℓ. Inicialmente está en reposo con su lado inferior horizontal en $y = 0$ y luego se le permite caer por acción de la gravedad, con su plano perpendicular a la dirección del campo magnético. *a*) Mientras la espira todavía está parcialmente inmersa en el campo magnético (conforme cae en la región de campo cero), determine la fuerza de "arrastre" magnético que actúa sobre ella en el momento en que su rapidez es v. *b*) Suponga que la espira logra una velocidad terminal v_T antes de que su lado horizontal superior salga del campo. Determine v_T. *c*) Si la espira está hecha de cobre y $B = 0.80$ T, encuentre v_T (m/s).

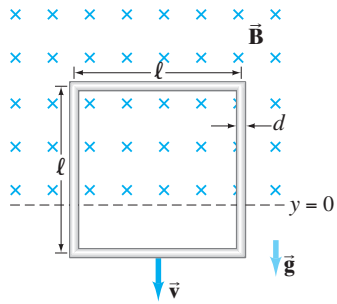


FIGURA 29–54
Problema 79.

* Problema numérico/por computadora

***80.** (III) En un experimento, una bobina se montó sobre un carro de baja fricción que se desplazó a través del campo magnético B de un imán permanente. La rapidez del carro v y el voltaje inducido V se midieron simultáneamente, conforme el carro se desplazaba a través del campo magnético, con un sensor de movimiento con interfaz a computadora y un voltímetro. La siguiente tabla presenta los datos recopilados:

Rapidez, v (m/s)	0.367	0.379	0.465	0.623	0.630
Voltaje inducido, V (V)	0.128	0.135	0.164	0.221	0.222

a) Elabore una gráfica del voltaje inducido, V, contra la rapidez, v. Determine una ecuación lineal de mejor ajuste para los datos. Teóricamente, la relación entre V y v está dada por $V = BN\ell v$, donde N es el número de espiras de la bobina, B es el campo magnético y ℓ es el promedio de los anchos interior y exterior de la bobina. En el experimento, $B = 0.126$ T, $N = 50$ y $\ell = 0.056\,1$ m. *b*) Encuentre el error porcentual entre la pendiente de la gráfica experimental y el valor teórico para la pendiente. *C*) Para cada uno de los valores de la rapidez medida v, determine el valor teórico de V y encuentre el error porcentual de cada uno.

Respuestas a los ejercicios

A: *e*).

B: *a*) En sentido antihorario; *b*) en sentido horario; *c*) cero; *d*) en sentido antihorario.

C: Los electrones fluyen en sentido horario (corriente convencional en sentido antihorario).

D: *a*) aumenta; *b*) sí; aumenta (contra torca).

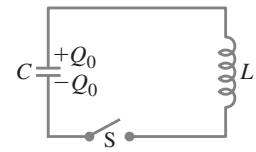
E: *a*) 4.2×10^{-3} V/m; (*b*) 5.6×10^{-3} V/m.

Una bujía en un automóvil recibe un alto voltaje, el cual produce un campo eléctrico suficientemente alto a través de su abertura como para sacar electrones de los átomos en la mezcla aire-gasolina y producir una chispa. El alto voltaje se produce, a partir de los 12 V de la batería del automóvil, mediante una bobina de inducción que básicamente es un transformador, el cual opera de acuerdo con el concepto de inductancia mutua. Cualquier espira de alambre tiene autoinductancia, y una corriente variable en ella induce una fem. Tales inductores son útiles en muchos circuitos.

CAPÍTULO 30

Inductancia, oscilaciones electromagnéticas y circuitos de ca

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Considere un circuito sólo con un capacitor C y una bobina de muchas espiras de alambre (llamada inductor, L), como se ilustra. Si inicialmente el capacitor está cargado ($Q = Q_0$), ¿qué ocurrirá cuando se cierre el interruptor S?



a) Nada ocurrirá: el capacitor permanecerá cargado con carga $Q = Q_0$.
b) El capacitor se descargará rápidamente y permanecerá descargado ($Q = 0$).
c) Fluirá corriente hasta que la carga positiva esté en la placa opuesta del capacitor ($Q = +Q_0$), y luego se invertirá, de ida y vuelta.
d) La energía que está inicialmente en el capacitor $\left(U_E = \frac{1}{2}Q_0^2/C\right)$ se transferirá por completo a la bobina y luego permanecerá de esa forma.
e) El sistema transferirá rápidamente la mitad de la energía del capacitor a la bobina y luego permanecerá de esa forma.

En el último capítulo se estudió cómo el flujo magnético variable a través de un circuito induce una fem en ese circuito. Antes de ello vimos que una corriente eléctrica produce un campo magnético. Al combinar estas dos ideas, se predice que una corriente variable en un circuito debe inducir una fem y una corriente en un segundo circuito cercano, e incluso que induce una fem en sí mismo. En el capítulo anterior vimos un ejemplo (los transformadores), pero ahora se tratará este efecto en una forma más general, en términos de lo que se llamará inductancia mutua y autoinductancia. El concepto de inductancia también constituye un trampolín para tratar el almacenamiento de energía en un campo magnético. Este capítulo concluye con un análisis de los circuitos que contienen inductancia, así como resistencia y/o capacitancia.

CONTENIDO

30–1 Inductancia mutua
30–2 Autoinductancia
30–3 Energía almacenada en un campo magnético
30–4 Circuitos *LR*
30–5 Circuitos *LC* y oscilaciones electromagnéticas
30–6 Oscilaciones *LC* con resistencia (circuito *LRC*)
30–7 Circuitos de ca con fuente de ca
30–8 Circuitos de ca *LRC* en serie
30–9 Resonancia en circuitos de ca
*30–10 Adaptación de impedancia
*30–11 CA trifásica

30–1 Inductancia mutua

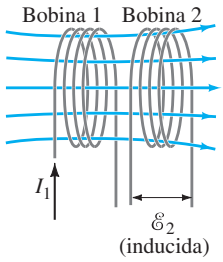


FIGURA 30–1 Una corriente variable en una bobina inducirá una corriente en la segunda bobina.

Si dos bobinas de alambre se colocan una cerca de la otra, como en la figura 30-1, una corriente variable en una de ellas inducirá una fem en la otra. De acuerdo con la ley de Faraday, la fem $\mathscr{E}_2$ inducida en la bobina 2 es proporcional a la razón de cambio del flujo magnético que pasa a través de ella. Este flujo se debe a la corriente I_1 en la bobina 1, y con frecuencia es conveniente expresar la fem en la bobina 2 en términos de la corriente en la bobina 1.

Sea Φ_{21} el flujo magnético en cada espira de la bobina 2 creado por la corriente en la bobina 1. Si la bobina 2 contiene N_2 espiras muy apretadas, entonces $N_2\Phi_{21}$ es el flujo total que pasa a través de la bobina 2. Si las dos bobinas están fijas en el espacio, $N_2\Phi_{21}$ es proporcional a la corriente I_1 en la bobina 1; la constante de proporcionalidad se llama **inductancia mutua**, M_{21}, que se define como

$$M_{21} = \frac{N_2\,\Phi_{21}}{I_1}. \qquad \textbf{(30–1)}$$

La fem inducida $\mathscr{E}_2$ en la bobina 2 debida a una corriente variable en la bobina 1 es, por la ley de Faraday,

$$\mathscr{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

Al combinar esto con la ecuación 30-1 rescrita como $\Phi_{21} = M_{21}\,I_1/N_2$ (y tomar su derivada), se obtiene

$$\mathscr{E}_2 = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}. \qquad \textbf{(30–2)}$$

Esto relaciona el cambio en la corriente en la bobina 1 con la fem que induce en la bobina 2. La inductancia mutua de la bobina 2 con respecto a la bobina 1, M_{21}, es una "constante" en tanto que no depende de I_1; M_{21} depende de factores "geométricos" como tamaño, forma, número de vueltas y posiciones relativas de las dos bobinas, y también de la presencia de hierro (o algún otro material ferromagnético). Por ejemplo, si las dos bobinas en la figura 30-1 están muy separadas, pocas líneas de flujo pueden pasar a través de la bobina 2, de manera que M_{21} será menor. Para algunos arreglos, puede calcularse la inductancia mutua (véase el ejemplo 30-1). Con más frecuencia se determina de manera experimental.

Considere ahora la situación inversa: cuando una corriente variable en la bobina 2 induce una fem en la bobina 1. En este caso,

$$\mathscr{E}_1 = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

donde M_{12} es la inductancia mutua de la bobina 1 con respecto a la bobina 2. Es posible demostrar, aunque no se probará aquí, que $M_{12} = M_{21}$. Por lo tanto, para un arreglo dado no se necesitan los subíndices y se puede establecer que

$$M = M_{12} = M_{21},$$

de manera que

$$\mathscr{E}_1 = -M\frac{dI_2}{dt} \qquad \textbf{(30–3a)}$$

y

$$\mathscr{E}_2 = -M\frac{dI_1}{dt}. \qquad \textbf{(30–3b)}$$

La unidad del SI para la inductancia mutua es el henry (H), donde 1 H = 1 V·s/A = 1 Ω·s.

EJERCICIO A Dos bobinas, que están cercanas, tienen una inductancia mutua de 330 mH. *a*) Si la fem en la bobina 1 es 120 V, ¿cuál es la razón de cambio de la corriente en la bobina 2? *b*) Si la razón de cambio de la corriente en la bobina 1 es 36 A/s, ¿cuál es la fem en la bobina 2?

EJEMPLO 30–1 **Solenoide y bobina.** Un solenoide largo y delgado, de longitud ℓ y área transversal A contiene N_1 espiras de alambre muy apretadas. En torno a él hay una bobina aislada de N_2 vueltas, figura 30-2. Suponga que todo el flujo de la bobina 1 (el solenoide) pasa a través de la bobina 2; calcule la inductancia mutua.

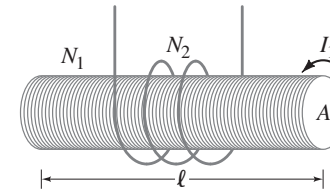


FIGURA 30–2 Ejemplo 30–1.

PLANTEAMIENTO Determine primero el flujo producido por el solenoide, todo el cual pasa uniformemente a través de la bobina N_2, a partir de la ecuación 28-4 para el campo magnético dentro del solenoide:

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1,$$

donde $n = N_1/\ell$ es el número de espiras en el solenoide por unidad de longitud, e I_1 es la corriente en el solenoide.

SOLUCIÓN El solenoide tiene espiras muy apretadas, por lo que se presume que todo el flujo en el solenoide permanece dentro de la bobina secundaria. Así, el flujo Φ_{21} a través de la bobina 2 es

$$\Phi_{21} = BA = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1 A.$$

Por lo tanto, la inductancia mutua es

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell}.$$

NOTA Se calculó M_{21}; si hubiéramos intentado calcular M_{12}, habría sido difícil. Dado $M_{12} = M_{21} = M$, se hicieron cálculos más simples para obtener M. Advierta de nuevo que M sólo depende de factores geométricos y no de las corrientes.

EJEMPLO CONCEPTUAL 30–2 **Inversión de bobinas.** ¿Cómo cambiaría el ejemplo 30-1 si la bobina con N_2 vueltas estuviera adentro del solenoide, y no afuera del solenoide?

RESPUESTA El campo magnético dentro del solenoide no cambiaría. El flujo a través de la bobina sería BA, donde A es el área de la bobina, no del solenoide, como en el ejemplo 30-1. Despejar M daría la misma ecuación, excepto que A se referiría a la bobina y sería menor.

EJERCICIO B ¿Cuál combinación de solenoide y bobina de las que se ilustran en la figura 30-3 tiene la mayor inductancia mutua? Suponga que los solenoides son iguales.

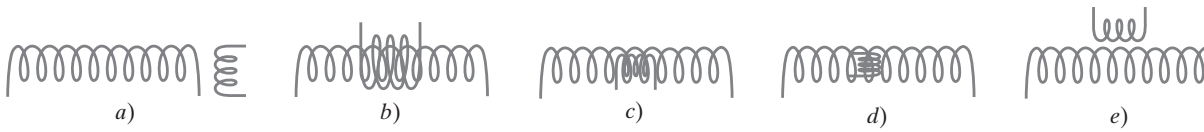


FIGURA 30–3 Ejercicio B.

Un transformador es un ejemplo de inductancia mutua en el que el acoplamiento se maximiza de manera que casi todas las líneas de flujo pasan a través de ambas bobinas. La inductancia mutua también tiene otros usos, incluidos algunos tipos de *marcapasos* que se utilizan para mantener el flujo sanguíneo en pacientes con problemas cardiacos (sección 26-5). La potencia en una bobina externa se transmite mediante inductancia mutua a una segunda bobina en el marcapasos en el corazón. Este tipo de marcapasos tiene la ventaja, sobre los marcapasos operados con baterías, de que no se requiere cirugía para sustituir una batería cuando se agota.

FÍSICA APLICADA
Marcapaso

Sin embargo, en ocasiones la inductancia mutua constituye un problema. Cualquier corriente variable en un circuito puede inducir una fem en otra parte del mismo circuito o en un circuito diferente, aun cuando los conductores no tengan forma de bobina. La inductancia mutua M por lo general es pequeña, a menos que intervengan bobinas con muchas vueltas y/o núcleos de hierro. No obstante, en situaciones donde se usan pequeños voltajes, con frecuencia surgen problemas a causa de la inductancia mutua. Para resolver el problema, con frecuencia se usan cables blindados, en los que un conductor interno está rodeado por un conductor cilíndrico conectado a tierra (figura 28-12).

30–2 Autoinductancia

El concepto de inductancia se aplica también a una sola bobina aislada de N vueltas. Cuando una corriente variable pasa a través de una bobina (o solenoide), dentro de la bobina se produce un flujo magnético variable, y éste, a la vez, induce una fem en esa misma bobina. Esta fem inducida se opone al cambio en el flujo (ley de Lenz). Por ejemplo, si la corriente a través de la bobina aumenta, el flujo magnético creciente induce una fem que se opone a la corriente original y tiende a retardar su aumento. Si la corriente disminuye en la bobina, el flujo decreciente induce una fem en la misma dirección que la corriente, lo que, de esta forma, tiende a mantener la corriente original.

El flujo magnético Φ_B que pasa a través de N espiras de una bobina es proporcional a la corriente I en la bobina, así que la **autoinductancia** L (en analogía con la inductancia mutua, ecuación 30-1) se define como

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}. \qquad \textbf{(30–4)}$$

Así, la fem $\mathscr{E}$ inducida en una bobina de autoinductancia L es, de acuerdo con la ley de Faraday,

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad \textbf{(30–5)}$$

Al igual que la inductancia mutua, la autoinductancia se mide en henrys. La magnitud de L depende de la geometría y de la presencia de un material ferromagnético. La autoinductancia (inductancia, para abreviar) se puede definir, como anteriormente, para cualquier circuito o parte de un circuito.

Los circuitos siempre contienen algo de inductancia, pero con frecuencia ésta es muy pequeña a menos que el circuito contenga una bobina de muchas espiras. Una bobina que tenga autoinductancia L significativa se llama **inductor**. La inductancia se representa en los diagramas de circuitos mediante el símbolo

; [símbolo de inductor]

Cualquier resistencia que pueda tener un inductor también se debe mostrar por separado. La inductancia tiene un propósito útil en ciertos circuitos. Sin embargo, con frecuencia, la inductancia se debe evitar en un circuito. Los resistores de precisión por lo general consisten en alambre devanado y, por lo tanto, tendrían inductancia así como resistencia. La inductancia se puede minimizar al enrollar el alambre aislado de vuelta sobre sí mismo en el sentido opuesto, de manera que la corriente en direcciones opuestas produzca poco flujo magnético neto; a esto se le llama **devanado no inductivo**.

Si un inductor tiene resistencia despreciable, es la inductancia (o fem inducida) la que controla una corriente variable. Si a la bobina se aplica una fuente de voltaje variable o alterno, este voltaje aplicado apenas se equilibrará por la fem inducida de la bobina (ecuación 30-5). En consecuencia, es posible ver a partir de la ecuación 30-5 que, para una $\mathscr{E}$ dada, si la inductancia L es grande, el cambio en la corriente será pequeño y por ende la corriente misma, si es ca, será pequeña. Cuanto mayor sea la inductancia, menor será la ca. Así, una inductancia actúa un tanto como una resistencia para impedir el flujo de corriente alterna. Para esta cualidad de un inductor se usa el término *reactancia* o *impedancia*. En las secciones 30-7 y 30-8 se analizarán con más detalle la reactancia y la impedancia. Se verá que la reactancia depende no sólo de la inductancia L, sino también de la frecuencia. Aquí se menciona un ejemplo de su importancia. La resistencia del primario en el transformador por lo general es muy pequeña, acaso menor a 1 Ω. Si la resistencia sola limitara la corriente en un transformador, una enorme corriente fluiría al aplicar un alto voltaje. De hecho, un voltaje de cd aplicado a un transformador puede quemarlo. Es la fem inducida (o reactancia) de la bobina la que limita la corriente a un valor razonable.

Los inductores comunes tienen inductancias que van de aproximadamente 1 μH a 1 H (donde 1 H = 1 henry = 1 Ω·s).

EJEMPLO 30–3 **Inductancia de un solenoide.** *a*) Determine una fórmula para la autoinductancia L de un largo solenoide firmemente devanado que contiene N espiras de alambre en su longitud ℓ y cuya área transversal es A. *b*) Calcule el valor de L, si $N = 100$, $\ell = 5.0$ cm, $A = 0.30$ cm^2 y el solenoide está lleno con aire.

PLANTEAMIENTO Para determinar la inductancia L, por lo general es más sencillo comenzar con la ecuación 30-4, así que primero necesitamos determinar el flujo.

SOLUCIÓN *a*) De acuerdo con la ecuación 28-4, el campo magnético dentro de un solenoide (si se ignoran los efectos de los bordes) es constante: $B = \mu_0 nI$, donde $n = N/\ell$. El flujo es $\Phi_B = BA = \mu_0 NIA/\ell$, de manera que

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}.$$

b) Puesto que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A}$, entonces

$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(100)^2(3.0 \times 10^{-5}\,\text{m}^2)}{(5.0 \times 10^{-2}\,\text{m})} = 7.5\,\mu\text{H}.$$

NOTA Las líneas de flujo magnético se "desvían" fuera del solenoide (véase la figura 28-15), en especial cerca de los extremos, de manera que la fórmula sólo es una aproximación.

EJEMPLO CONCEPTUAL 30–4 **Dirección de la fem en un inductor.** A través de la bobina en la figura 30-4, pasa una corriente de izquierda a derecha, como se indica. *a*) Si la corriente aumenta con el tiempo, ¿en qué dirección está la fem inducida? *b*) Si la corriente disminuye con el tiempo, ¿en qué dirección está la fem inducida?

RESPUESTA *a*) A partir de la ley de Lenz se sabe que la fem inducida se debe oponer al cambio en el flujo magnético. Si la corriente aumenta, de igual modo lo hace el flujo magnético. La fem inducida actúa para oponerse al flujo creciente, lo que significa que actúa como una fuente de fem que se opone a la fuente externa de fem que impulsa la corriente. De manera que la fem inducida en la bobina actúa para oponerse a I en la figura 30-4a. En otras palabras, el inductor se puede considerar como una batería con una terminal positiva en el punto A (que tiende a bloquear la corriente que entra a A), y negativa en el punto B. *b*) Si la corriente disminuye, entonces, de acuerdo con la ley de Lenz, la fem inducida actúa para reforzar el flujo, como una fuente de fem que refuerza la fem externa. La fem inducida actúa para aumentar I en la figura 30-4b, de manera que, en esta situación, podemos pensar en la fem inducida como en una batería con su terminal negativa en el punto A que atrae más corriente(+) que se desplaza hacia la derecha.

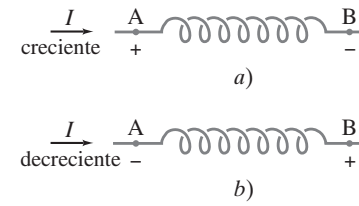


FIGURA 30–4 Ejemplo 30-4. Los signos + y – se refieren a la fem inducida debida a la corriente variable, como si los puntos A y B fueran las terminales de una batería (y las espiras fueran el interior de la batería).

Inductancia de un cable coaxial. Determine la inductancia por unidad de longitud de un cable coaxial cuyo conductor interno tiene radio r_1 y el conductor externo tiene un radio r_2, figura 30-5. Suponga que los conductores son delgados tubos huecos, de manera que dentro del conductor interno no hay campo magnético, y que el campo magnético dentro de ambos conductores delgados se puede despreciar. Los conductores transportan corrientes iguales I en direcciones opuestas.

PLANTEAMIENTO Es necesario encontrar el flujo magnético, $\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$, entre los conductores. Las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ son círculos que rodean al conductor interno (en la figura 30-5a sólo se ilustra uno). De acuerdo con la ley de Ampère, $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$, la magnitud del campo a lo largo del círculo a una distancia r del centro, cuando el conductor interno transporta una corriente I, es (ejemplo 28-6):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

El flujo magnético a través de un rectángulo de ancho dr y longitud ℓ (a lo largo del cable, figura 30-5b), a una distancia r del centro, es

$$d\Phi_B = B(\ell\, dr) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell\, dr.$$

SOLUCIÓN El flujo total en una longitud ℓ de cable es

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Como toda la corriente I fluye en un sentido en el conductor interno, y la misma corriente I fluye en sentido opuesto en el conductor externo, sólo se tiene una espira, de manera que $N = 1$ en la ecuación 30-4. En consecuencia, la autoinductancia para una longitud ℓ es

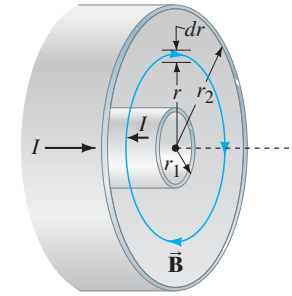
$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0\ell}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

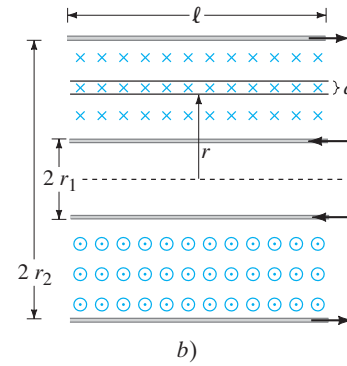
La inductancia por unidad de longitud es

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Advierta que L sólo depende de factores geométricos y no de la corriente I.

FIGURA 30–5 Ejemplo 30-5. Cable coaxial: *a*) vista de un extremo, *b*) vista lateral (sección transversal).





30–3 Energía almacenada en un campo magnético

Cuando un inductor de inductancia L conduce una corriente I que cambia a una razón dI/dt, la energía se suministra al inductor a una razón

$$P = I\mathscr{E} = LI\frac{dI}{dt}$$

donde P representa la potencia y se usa[†] la ecuación 30-5. Calculemos ahora el trabajo necesario para aumentar la corriente en un inductor, de cero a algún valor I. De acuerdo con la última ecuación, el trabajo dW realizado en un tiempo dt es

$$dW = P\,dt = LI\,dI.$$

Por lo tanto, el trabajo total realizado para aumentar la corriente de cero a I es

$$W = \int dW = \int_0^I LI\,dI = \tfrac{1}{2}LI^2.$$

Este trabajo realizado es igual a la energía U almacenada en el inductor cuando conduce una corriente I (y se toma $U = 0$ cuando $I = 0$):

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2. \qquad \textbf{(30–6)}$$

Esto se puede comparar con la energía almacenada en un capacitor, C, cuando la diferencia de potencial a través de él es V (véase la sección 24-4):

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2.$$

EJERCICIO C ¿Cuál es la inductancia de un inductor si tiene una energía almacenada de 1.5 J cuando en él hay una corriente de 2.5 A? *a*) 0.48 H, *b*) 1.2 H, *c*) 2.1 H, *d*) 4.7 H, *e*) 19 H.

Así como se puede considerar que la energía almacenada en un capacitor reside en el campo eléctrico entre sus placas, del mismo modo se puede considerar que la energía en un inductor está almacenada en su campo magnético. Para expresar la energía en términos del campo magnético, usemos el resultado del ejemplo 30-3, de que la inductancia de un solenoide ideal (se ignoran los efectos de borde) es $L = \mu_0 N^2 A/\ell$. Puesto que el campo magnético B en un solenoide se relaciona con la corriente I mediante $B = \mu_0 NI/\ell$, se tiene

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}\right)\left(\frac{B\ell}{\mu_0 N}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}A\ell.$$

Podemos considerar que esta energía reside en el volumen encerrado por los devanados, que es $A\ell$. Así, la energía por unidad de volumen o **densidad de energía** es

$$u = \text{densidad de energía} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}. \qquad \textbf{(30–7)}$$

Es posible demostrar que esta fórmula, la cual se dedujo para el caso especial de un solenoide, es válida para cualquier región del espacio donde exista un campo magnético. Si está presente un material ferromagnético, μ_0 se sustituye por μ. Esta ecuación es análoga a la de un campo eléctrico, $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, ecuación 24-6.

30–4 Circuitos *LR*

Cualquier inductor tendrá cierta resistencia. Esta situación se representa ilustrando su inductancia L y su resistencia R por separado, como en la figura 30-6a. La resistencia R también podría incluir cualquier otra resistencia presente en el circuito. Ahora preguntamos: ¿Qué ocurre cuando una batería u otra fuente de voltaje de cd V_0 se conecta en serie a tal circuito LR? En el instante en que se cierra el interruptor que conecta la ba-

[†]Aquí no va un signo menos, porque se suministra potencia para oponerse a la fem del inductor.

tería, la corriente comienza a fluir. Se le opone la fem inducida en el inductor, lo que significa que el punto B en la figura 30-6a es positivo en relación con el punto C. Sin embargo, tan pronto como la corriente comienza a fluir, a través de la resistencia también hay una caída de voltaje de magnitud IR. Por lo tanto, se reduce el voltaje aplicado a través de la inductancia, y la corriente aumenta con menos rapidez. En consecuencia, la corriente se eleva gradualmente, como se indica en la figura 30-6b, y tiende al valor estable $I_{máx} = V_0/R_0$, para el cual toda la caída de voltaje es a través de la resistencia.

Esto se demuestra analíticamente al aplicar la regla de Kirchhoff de las espiras al circuito de la figura 30-6a. Las fem en el circuito son el voltaje de batería V_0 y la fem $\mathscr{E} = -L(dI/dt)$ en el inductor, que se opone a la corriente creciente. Por lo tanto, la suma de los cambios de potencial alrededor de la espira es

$$V_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0,$$

donde I es la corriente en el circuito en cualquier instante. Esto se reordena para obtener

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0. \qquad \textbf{(30–8)}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal y se puede integrar de la misma forma que se hizo en la sección 26-5 para un circuito RC. Rescribimos la ecuación 30-8 y después integramos:

$$\int_{I=0}^{I} \frac{dI}{V_0 - IR} = \int_0^t \frac{dt}{L}.$$

Luego,

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{V_0 - IR}{V_0}\right) = \frac{t}{L}$$

o

$$I = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \textbf{(30–9)}$$

donde

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \textbf{(30–10)}$$

es la **constante de tiempo** del circuito LR. El símbolo τ representa el tiempo requerido para que la corriente I alcance $(1 - 1/e) = 0.63$ o 63% de su valor máximo (V_0/R). En la figura 30-6b se grafica la ecuación 30-9. (Compare con el circuito RC, sección 26-5).

EJERCICIO D Demuestre que L/R tiene dimensiones de tiempo. (Véase la sección 1-7).

Ahora accionemos el interruptor de la figura 30-6a, de manera que se elimine la batería del circuito, y los puntos A y C se conecten como se indica en la figura 30-7 en el momento en que ocurre la conmutación (llámese $t = 0$) y la corriente es I_0. Así, la ecuación diferencial (ecuación 30-8) se convierte en (puesto que $V_0 = 0$):

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0.$$

Reordenamos esta ecuación e integramos:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt$$

donde $I = I_0$ en $t = 0$ e $I = I$ en el tiempo t.

La última ecuación se integra para obtener

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t$$

o

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \qquad \textbf{(30–11)}$$

donde, de nuevo, la constante de tiempo es $\tau = L/R$. Por lo tanto, la corriente decae exponencialmente a cero, como se observa en la figura 30-8.

Este análisis demuestra que siempre hay cierto "tiempo de reacción" cuando un electroimán, por ejemplo, se enciende o se apaga. También se ve que un circuito LR tiene propiedades similares a las de un circuito RC (sección 26-5). Sin embargo, a diferencia del caso del capacitor, aquí la constante de tiempo es *inversamente* proporcional a R.

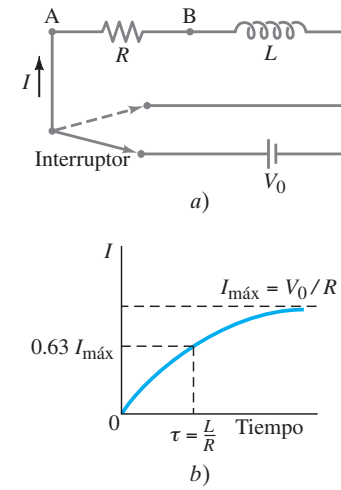


FIGURA 30–6 *a*) Circuito LR; *b*) crecimiento de corriente cuando se hace una conexión a la batería.

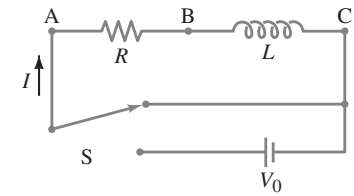
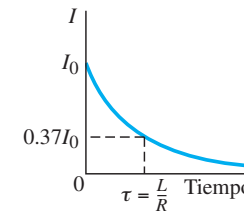


FIGURA 30–7 El interruptor se acciona rápidamente, de manera que la batería se elimina pero todavía se tiene un circuito. La corriente en este momento (llámese $t = 0$) es I_0.

FIGURA 30–8 Decaimiento de la corriente en la figura 30-7 en el momento después de que la batería se elimina del circuito.



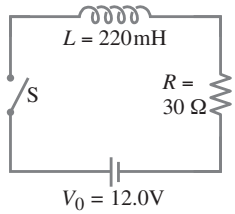


FIGURA 30–9 Ejemplo 30–6.

EJEMPLO 30–6 **Un circuito *LR*.** En $t = 0$, una batería de 12.0 V se conecta en serie con un inductor de 220 mH y una resistencia total de 30 Ω, como se ilustra en la figura 30-9. *a*) ¿Cuál es la corriente en $t = 0$? *b*) ¿Cuál es la constante de tiempo? *c*) ¿Cuál es la corriente máxima? *d*) ¿Cuánto tardará la corriente en alcanzar la mitad de su máximo valor posible? *e*) En ese instante, ¿a qué razón entrega energía la batería y *f*) a qué razón se almacena energía en el campo magnético del inductor?

PLANTEAMIENTO Se tiene la situación que se representa en las figuras 30-6a y b, y se puede aplicar la ecuación recién desarrollada.

SOLUCIÓN *a*) La corriente no puede brincar instantáneamente de cero a algún otro valor cuando se cierra el interruptor, porque el inductor se opone al cambio $\mathcal{E}_L = -L(dI/dt)$. Por lo tanto, justo después de que se cierra el interruptor, I todavía es cero en $t = 0$ y luego comienza a aumentar.

b) La constante de tiempo es, a partir de la ecuación 30-10, $\tau = L/R = (0.22\ \text{H})/(30\ \Omega) = 7.3\ \text{ms}$.

c) La corriente alcanza su máximo valor estable después de mucho tiempo, cuando $dI/dt = 0$, de manera que $I_{\text{máx}} = V_0/R = 12.0\ \text{V}/30\ \Omega = 0.40\ \text{A}$.

d) En la ecuación 30-9, se establece que $I = \frac{1}{2} I_{\text{máx}} = V_0/2R$ lo que produce

$$1 - e^{-t/\tau} = \tfrac{1}{2}$$

o

$$e^{-t/\tau} = \tfrac{1}{2}.$$

Al despejar t:

$$t = \tau \ln 2 = (7.3 \times 10^{-3}\ \text{s})(0.69) = 5.0\ \text{ms}.$$

e) En ese instante, $I = I_{\text{máx}}/2 = 200\ \text{mA}$, de manera que la potencia entregada por la batería es

$$P = IV = (0.20\ \text{A})(12\ \text{V}) = 2.4\ \text{W}.$$

f) A partir de la ecuación 30-6, la energía almacenada en un inductor L en cualquier instante es

$$U = \tfrac{1}{2} LI^2$$

donde I es la corriente en el inductor en ese instante. La *razón* a la que cambia la energía es

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}.$$

Se puede diferenciar la ecuación 30-9 para obtener dI/dt, o usar directamente la ecuación diferencial, ecuación 30-8:

$$\frac{dU}{dt} = I\left(L\frac{dI}{dt}\right) = I(V_0 - RI)$$
$$= (0.20\ \text{A})[12\ \text{V} - (30\ \Omega)(0.20\ \text{A})] = 1.2\ \text{W}.$$

Puesto que sólo parte de la potencia de la batería alimenta al inductor en ese instante, ¿a dónde va el resto?

EJERCICIO E Un resistor en serie con un inductor tiene una constante de tiempo de 10 ms. Cuando el mismo resistor se coloca en serie con un capacitor de 5 μF, la constante de tiempo es 5×10^{-6} s. ¿Cuál es el valor del inductor? *a*) 5 μH; *b*) 10 μH; *c*) 5 mH; *d*) 10 mH; *e*) no hay suficiente información para determinarlo.

FÍSICA APLICADA
Protector de sobretensión

Un inductor puede actuar como "protector de sobretensión o sobrevoltaje" para equipo electrónico sensible que puede dañarse a causa de altas corrientes. Si el equipo se conecta a un tomacorriente de pared estándar, una súbita "sobretensión" o aumento en el voltaje por lo general causará un considerable cambio en la corriente y dañará el equipo. Sin embargo, si hay un inductor en serie con el voltaje al dispositivo, el cambio súbito en la corriente producirá una fem opuesta que evitará que la corriente llegue a niveles peligrosos.

30–5 Circuitos *LC* y oscilaciones electromagnéticas

En cualquier circuito eléctrico, puede haber tres componentes básicos: resistencia, capacitancia e inductancia, además de una fuente de fem. (También puede haber componentes más complejos, como diodos o transistores). Anteriormente se estudiaron los circuitos *RC* y *LR*. Ahora se estudiarán los circuitos *LC*, los cuales sólo contienen una capacitancia C y una inductancia L, figura 30-10. Éste es un circuito idealizado en el que se supone que no hay resistencia; en la siguiente sección se incluirá la resistencia. Suponga que el capacitor en la figura 30-10 inicialmente está cargado, de manera que una placa tiene carga Q_0 y la otra placa tiene carga $-Q_0$, y la diferencia de potencial a través de él es $V = Q/C$ (ecuación 24-1). Suponga que, en $t = 0$, se cierra el interruptor. El capacitor comienza a descargarse inmediatamente. Conforme lo hace, la corriente I a través del inductor aumenta. Ahora aplique la regla de Kirchhoff de las espiras (la suma de los cambios de potencial alrededor de la espira es cero):

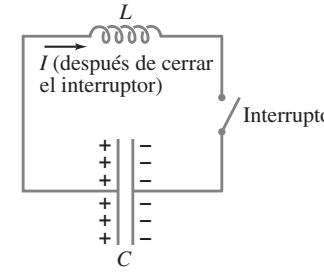


FIGURA 30–10 Un circuito *LC*.

$$-L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Puesto que la carga sale de la placa positiva del capacitor para generar la corriente I, como se muestra en la figura 30-10, la carga Q en la placa (positiva) del capacitor disminuye, de manera que $I = -dQ/dt$. Por consiguiente, la ecuación anterior se puede rescribir como

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0. \qquad \textbf{(30–12)}$$

Ésta es una ecuación diferencial familiar. Tiene la misma forma que la ecuación para movimiento armónico simple (capítulo 14, ecuación 14-3). La solución de la ecuación 30-12 se puede escribir como

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(30–13)}$$

donde Q_0 y ϕ son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Insertamos la ecuación 30-13 en la ecuación 30-12 y advertimos que $d^2Q/dt^2 = -\omega^2 Q_0 \cos(\omega t + \phi)$; por lo tanto,

$$-\omega^2 Q_0 \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{LC} Q_0 \cos(\omega t + \phi) = 0$$

o

$$\left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right)\cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Esta relación es verdadera para todo tiempo t sólo si $\left(-\omega^2 + 1/LC\right) = 0$, lo que indica que

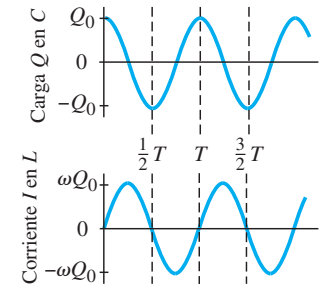
$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad \textbf{(30–14)}$$

La ecuación 30-13 indica que la carga en el capacitor en un circuito *LC* oscila sinusoidalmente. La corriente en el inductor es

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$
$$= I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi); \qquad \textbf{(30–15)}$$

de manera que la corriente también es sinusoidal. El valor máximo de I es $I_0 = \omega Q_0 = Q_0/\sqrt{LC}$. En la figura 30-11 se grafican las ecuaciones 30-13 y 30-15 para Q e I cuando $\phi = 0$.

FIGURA 30–11 Carga Q y corriente I en un circuito *LC*. El periodo $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$.



Ahora se observarán las oscilaciones LC desde un punto de vista energético. La energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor en cualquier instante t es (véase la ecuación 24-5):

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi).$$

La energía almacenada en el campo magnético del inductor en el mismo instante es (ecuación 30-6)

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2}\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) = \frac{Q_0^2}{2C}\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$$

donde se usó la ecuación 30-14. Si se establece que $\phi = 0$, entonces, en los instantes $t = 0$, $t = \frac{1}{2}T$, $t = T$, etcétera (donde T es el periodo $= 1/f = 2\pi/\omega$), se tiene $U_E = Q_0^2/2C$ y $U_B = 0$. Esto es, toda la energía se almacena en el campo eléctrico del capacitor. Pero, en $t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T$, etcétera, $U_E = 0$ y $U_B = Q_0^2/2C$, y de este modo toda la energía se almacena en el campo magnético del inductor. En cualquier instante t, la energía total es

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$$
$$= \frac{Q_0^2}{2C}\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{Q_0^2}{2C}. \quad \textbf{(30–16)}$$

En consecuencia, la energía total es constante, y la energía se conserva.

Lo que se tiene en este circuito LC es un **oscilador *LC*** o una **oscilación electromagnética**. La carga Q oscila de ida y vuelta, desde una placa del capacitor a la otra, y esto se repite de manera continua. Asimismo, la corriente oscila de ida y vuelta. También hay oscilaciones de energía: cuando Q tiene un valor máximo, toda la energía se almacena en el campo eléctrico del capacitor; pero cuando Q llega a cero, la corriente I alcanza un máximo y toda la energía se almacena en el campo magnético del inductor. Por lo tanto, la energía se almacena en el campo eléctrico del capacitor, o bien, en el campo magnético del inductor. Véase la figura 30-12.

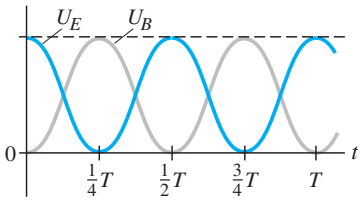


FIGURA 30–12 Energías U_E (línea naranja) y U_B (línea gris) almacenadas en el capacitor y el inductor como función del tiempo. Observe cómo oscila la energía entre eléctrica y magnética. La línea punteada en la parte superior es la energía total (constante) $U = U_E + U_B$.

EJERCICIO F Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 785, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar porqué quizás la respondió de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO 30–7 **Circuito *LC*.** Un capacitor de 1200 pF se carga por completo mediante una fuente de poder de cd de 500 V. Se desconecta de la fuente de poder y se conecta, en $t = 0$, a un inductor de 75 mH. Determine: *a*) la carga inicial en el capacitor; *b*) la corriente máxima; *c*) la frecuencia f y el periodo T de oscilación; y *d*) la energía total que oscila en el sistema.

PLANTEAMIENTO Tome en cuenta el análisis anterior y la definición de capacitancia $Q = CV$ (capítulo 24).

SOLUCIÓN *a*) La fuente de poder de 500 V, antes de desconectarse, cargó el capacitor a una carga de

$$Q_0 = CV = (1.2 \times 10^{-9}\,\text{F})(500\,\text{V}) = 6.0 \times 10^{-7}\,\text{C}.$$

b) La corriente máxima, $I_{\text{máx}}$, es (véase las ecuaciones 30-14 y 30-15)

$$I_{\text{máx}} = \omega Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} = \frac{(6.0 \times 10^{-7}\,\text{C})}{\sqrt{(0.075\,\text{H})(1.2 \times 10^{-9}\,\text{F})}} = 63\,\text{mA}.$$

c) La ecuación 30-14 da la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{LC})} = 17\,\text{kHz},$$

y el periodo T es

$$T = \frac{1}{f} = 6.0 \times 10^{-5}\,\text{s}.$$

d) Finalmente, la energía total (ecuación 30-16) es

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{(6.0 \times 10^{-7}\,\text{C})^2}{2(1.2 \times 10^{-9}\,\text{F})} = 1.5 \times 10^{-4}\,\text{J}.$$

30–6 Oscilaciones *LC* con resistencia (circuito *LRC*)

El circuito *LC* que se estudió en la sección anterior es una idealización. Siempre hay cierta resistencia *R* en cualquier circuito, y por eso ahora se estudiará un circuito *LRC* simple, figura 30-13.

Suponga de nuevo que el capacitor inicialmente tiene una carga Q_0 y que luego la batería u otra fuente se eliminan del circuito. El interruptor se cierra en $t = 0$. Puesto que ahora hay una resistencia en el circuito, se espera que parte de la energía se convierta en energía térmica, y en consecuencia no se esperan oscilaciones no amortiguadas, como en un circuito *LC* puro. De hecho, si se usa la regla de Kirchhoff de las espiras alrededor de este circuito, se obtiene

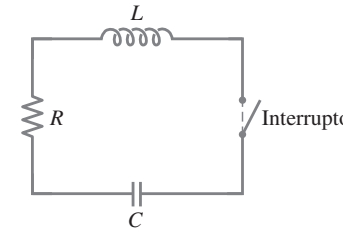


FIGURA 30–13 Un circuito *LRC*.

$$-L\frac{dI}{dt} - IR + \frac{Q}{C} = 0,$$

que es la misma ecuación que se tenía en la sección 30-5, con la adición de la caída de voltaje *IR* a través del resistor. Puesto que $I = -dQ/dt$, como se vio en la sección 30-5, esta ecuación se convierte en

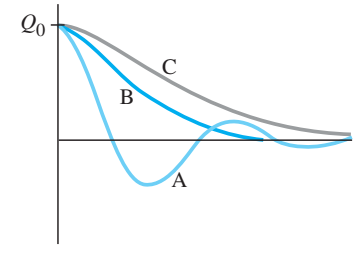
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0. \qquad \textbf{(30–17)}$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden en la variable *Q* tiene precisamente la misma forma que la del oscilador armónico amortiguado, ecuación 14-15:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Por lo tanto, es posible analizar el circuito *LRC* de la misma forma que para el movimiento armónico amortiguado, sección 14-7. El sistema podría experimentar oscilaciones amortiguadas, curva A en la figura 30-14 (sistema subamortiguado), o estar críticamente amortiguado (curva B), o sobreamortiguado (curva C), dependiendo de los valores relativos de *R*, *L* y *C*. Con los resultados de la sección 14-7, con *L* en lugar de *m*, *R* en vez de *b*, y C^{-1} en lugar de *k*, se encuentra que el sistema estará subamortiguado cuando

FIGURA 30–14 Carga *Q* en el capacitor en un circuito *LRC* como función del tiempo: la curva A es para oscilación subamortiguada ($R^2 < 4L/C$), la curva B es para oscilación críticamente amortiguada ($R^2 = 4L/C$) y la curva C es para oscilación sobreamortiguada ($R^2 > 4L/C$).



$$R^2 < \frac{4L}{C},$$

y sobreamortiguado para $R^2 > 4L/C$. El amortiguamiento crítico (curva B en la figura 30-14) ocurre cuando $R^2 = 4L/C$. Si *R* es menor que $\sqrt{4L/C}$, la frecuencia angular, ω', será

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \textbf{(30–18)}$$

(compare con la ecuación 14-18). Y la carga *Q* como función del tiempo será

$$Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega' t + \phi) \qquad \textbf{(30–19)}$$

donde ϕ es una constante de fase (compare con la ecuación 14-19).

Los osciladores son un elemento importante en muchos dispositivos electrónicos: radios y televisores los usan para sintonía, y las grabadoras los usan (la "frecuencia de polarización") cuando graban. Como siempre existe cierta resistencia, los osciladores eléctricos por lo general necesitan una entrada periódica de potencia para compensar la energía convertida en energía térmica en la resistencia.

EJEMPLO 30–8 **Oscilaciones amortiguadas.** En $t = 0$, un inductor de 40 mH se coloca en serie con una resistencia $R = 3.0\ \Omega$ y un capacitor cargado $C = 4.8\ \mu$F. *a*) Demuestre que este circuito oscilará. *b*) Determine la frecuencia. *c*) ¿Cuál es el tiempo requerido para que la amplitud de carga disminuya a la mitad de su valor inicial? *d*) ¿Qué valor de R hará al circuito no oscilatorio?

PLANTEAMIENTO Primero coteje R^2 contra $4L/C$; luego use las ecuaciones 30-18 y 30-19.

SOLUCIÓN *a*) Para oscilar, el circuito debe estar subamortiguado, de manera que se debe tener $R^2 < 4L/C$. Como $R^2 = 9.0\ \Omega^2$ y $4L/C = 4(0.040\ \text{H})/(4.8 \times 10^{-6}\text{F}) = 3.3 \times 10^4\ \Omega^2$, esta relación se satisface, de manera que el circuito oscilará.

b) Empleamos la ecuación 30-18:

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 3.6 \times 10^2\ \text{Hz}.$$

c) De acuerdo con la ecuación 30-19, la amplitud será la mitad cuando

$$e^{-\frac{R}{2L}t} = \tfrac{1}{2}$$

o

$$t = \frac{2L}{R}\ln 2 = 18\ \text{ms}.$$

d) Para hacer que el circuito sea críticamente amortiguado o sobreamortiguado, debemos usar el criterio $R^2 \geq 4L/C = 3.3 \times 10^4\ \Omega^2$. En consecuencia, se debe tener $R \geq 180\ \Omega$.

30–7 Circuitos de ca con fuente de ca

Anteriormente se estudiaron circuitos que contenían combinaciones de resistor, capacitor e inductor, pero sólo cuando se conectaban a una fuente de cd o fem o a ninguna fuente. Ahora se estudiarán estos elementos de circuito cuando se conectan a una fuente de voltaje alterno que produce una corriente alterna (ca).

Primero examine, cómo se comporta un resistor, un capacitor y un inductor, uno a la vez, cuando se conectan a una fuente de voltaje alterno, el cual se representa mediante el símbolo

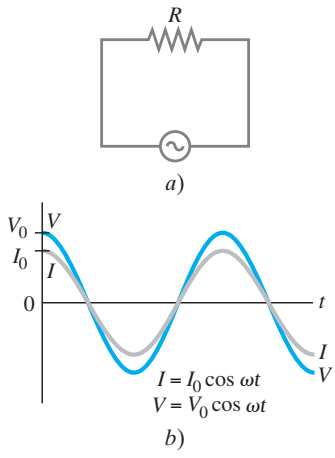
[voltaje alterno]

que produce un voltaje sinusoidal de frecuencia f. Suponga en cada caso que la fem da lugar a una corriente

$$I = I_0 \cos 2\pi f t = I_0 \cos \omega t \qquad \textbf{(30–20)}$$

donde t es el tiempo e I_0 es la corriente pico. Recuerde (sección 25-7) que $V_{\text{rms}} = V_0/\sqrt{2}$ y $I_{\text{rms}} = I_0/\sqrt{2}$ (ecuaciones 25-9).

FIGURA 30–15 *a*) Resistor conectado a una fuente de ca. *b*) La corriente (línea gris) está en fase con el voltaje (naranja) a través de un resistor.



Resistor

Cuando una fuente de ca se conecta a un resistor, como en la figura 30-15a, la corriente aumenta y disminuye con el voltaje alterno de acuerdo con la ley de Ohm

$$V = IR = I_0 R \cos \omega t = V_0 \cos \omega t$$

donde $V_0 = I_0 R$ es el voltaje pico como función del tiempo. La figura 30-15b muestra el voltaje (curva naranja) y la corriente (curva gris). Puesto que la corriente es cero cuando el voltaje es cero y la corriente alcanza un pico cuando el voltaje lo hace, se dice que la corriente y el voltaje están **en fase**. La energía se transforma en calor (sección 25-7) a una razón promedio

$$\overline{P} = \overline{IV} = I_{\text{rms}}^2 R = V_{\text{rms}}^2/R.$$

Inductor

En la figura 30-16a, un inductor de inductancia L (símbolo) se conecta a la fuente de ca. Se ignora cualquier resistencia que pueda tener (por lo general, pequeña). El voltaje aplicado al inductor será igual a la fuerza "contraelectromotriz" generada en el inductor por la corriente variable, de acuerdo con la ecuación 30-5. Esto es porque la suma de los cambios de potencial eléctrico alrededor de cualquier circuito cerrado debe ser cero, de acuerdo con la regla de Kirchhoff.

Por lo tanto,

$$V - L\frac{dI}{dt} = 0$$

o (al insertar la ecuación 30-20)

$$V = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_0 \operatorname{sen} \omega t. \qquad \textbf{(30–21)}$$

Al usar la identidad $\operatorname{sen}\theta = -\cos(\theta + 90°)$ se escribe

$$V = \omega L I_0 \cos(\omega t + 90°) = V_0 \cos(\omega t + 90°) \qquad \textbf{(30–22a)}$$

donde

$$V_0 = I_0 \omega L \qquad \textbf{(30–22b)}$$

es el voltaje pico. En la figura 30-16b se grafican la corriente I y el voltaje V, como función del tiempo, para el inductor. De acuerdo con esta gráfica y con las ecuaciones 30-22, es claro que la corriente y el voltaje están fuera de fase por un cuarto de ciclo, lo que es equivalente a $\pi/2$ radianes o 90°. A partir de la gráfica se ve que

en un inductor, la corriente se retrasa con respecto al voltaje por 90°.

Esto es, la corriente en un inductor alcanza su pico un cuarto de ciclo después que el voltaje. De manera alternativa, se puede decir que el voltaje se adelanta a la corriente en 90°.

Puesto que la corriente y el voltaje en un inductor están fuera de fase por 90°, el producto IV (= potencia) es positivo tan a menudo como lo es negativo (figura 30-16b). De manera que, en promedio, en un inductor no se transforma energía, y tampoco se disipa energía como energía térmica.

Tal como un resistor impide el flujo de carga, de igual forma un inductor impide el flujo de carga en una corriente alterna debido a la contra fem producida. Para un resistor R, la corriente pico y el voltaje pico se relacionan mediante $V_0 = I_0 R$. Es posible escribir una relación similar para un inductor:

$$V_0 = I_0 X_L \qquad \left[\begin{array}{l}\text{valores máximos o rms,}\\ \text{no en cualquier instante}\end{array}\right] \qquad \textbf{(30–23a)}$$

donde, de acuerdo con la ecuación 30-22b (y con $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de la ca),

$$X_L = \omega L = 2\pi f L. \qquad \textbf{(30–23b)}$$

El término X_L se llama **reactancia inductiva** del inductor y tiene unidades de ohms. Cuanto mayor sea X_L, más se impide el flujo de carga y menor será la corriente. X_L es mayor para frecuencias f ($= \omega/2\pi$) más altas y mayor inductancia, L.

La ecuación 30-23a es válida para valores pico I_0 y V_0; también es válida para valores rms, $V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} X_L$. Puesto que los valores pico de corriente y voltaje no se alcanzan al mismo tiempo, la ecuación 30-23a *no es válida en un instante particular*, como es el caso para un resistor ($V = IR$).

Advierta en la ecuación 30-23b que si $\omega = 2\pi f = 0$ (de manera que la corriente es cd), no hay contra fem y no existe impedancia para el flujo de carga.

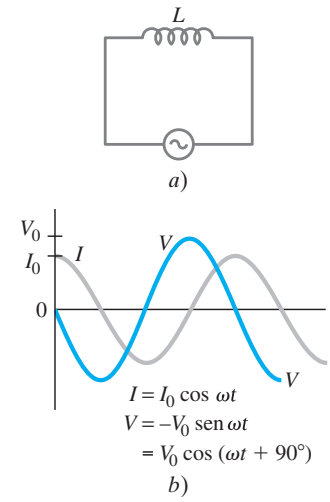


FIGURA 30–16 *a*) Inductor conectado a una fuente de ca. *b*) La corriente (curva gris) se retrasa con respecto al voltaje (curva naranja) por un cuarto de ciclo o 90°.

EJEMPLO 30–9 **Reactancia de una bobina.** Una bobina tiene una resistencia $R = 1.00\ \Omega$ y una inductancia de 0.300 H. Determine la corriente en la bobina si *a*) se aplican 120 V de cd, *b*) se aplican 120 V de ca (rms) a 60.0 Hz.

PLANTEAMIENTO Cuando el voltaje es cd, no hay reactancia inductiva ($X_L = 2\pi f L = 0$ pues $f = 0$), así que se aplica la ley de Ohm para la resistencia. Cuando el voltaje es ca, se calcula la reactancia X_L y luego se emplea la ecuación 30-23a.

SOLUCIÓN *a*) Con cd, no se tiene X_L, así que simplemente se aplica la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120\ \text{V}}{1.00\ \Omega} = 120\ \text{A}.$$

b) La reactancia inductiva es

$$X_L = 2\pi f L = (6.283)(60.0\ \text{s}^{-1})(0.300\ \text{H}) = 113\ \Omega.$$

En comparación con esto, la resistencia se puede ignorar. Por consiguiente,

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{X_L} = \frac{120\ \text{V}}{113\ \Omega} = 1.06\ \text{A}.$$

NOTA Tal vez sea tentador decir que la impedancia total es $113\ \Omega + 1\ \Omega = 114\ \Omega$. Esto implicaría que aproximadamente el 1% de la caída de voltaje es a través del resistor (o alrededor de 1 V) y que a través de la inductancia es de 119 V. Aunque el 1 V a través del resistor es correcto, los otros enunciados no son verdaderos a causa de la alteración en fase en un inductor. Esto se estudiará en la siguiente sección.

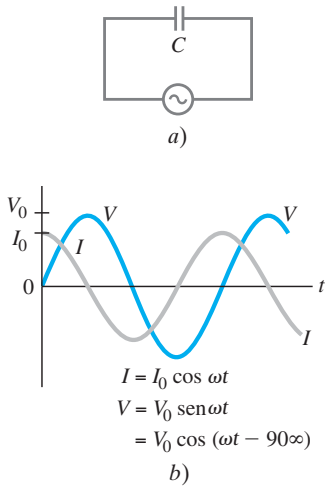


FIGURA 30–17 *a*) Capacitor conectado a una fuente de ca. *b*) La corriente se adelanta al voltaje por un cuarto de ciclo, o 90°.

Capacitor

Cuando un capacitor se conecta a una batería, las placas del capacitor rápidamente adquieren cargas iguales y opuestas; pero no fluye corriente estable en el circuito. Un capacitor evita el flujo de una corriente cd. Pero si un capacitor se conecta a una fuente alterna de voltaje, como en la figura 30-17a, una corriente alterna fluirá de manera continua. Esto puede ocurrir porque, cuando el voltaje de ca se enciende por primera vez, la carga comienza a fluir y una placa adquiere una carga negativa y la otra una carga positiva. Pero, cuando el voltaje se invierte a sí mismo, las cargas fluyen en el sentido opuesto. Por ende, para un voltaje alterno aplicado, en el circuito está presente una corriente ca de manera continua.

Observe esto con más detalle. Por la regla de Kirchhoff de las espiras, la fuente de voltaje aplicada debe ser igual al voltaje V a través del capacitor en cualquier momento:

$$V = \frac{Q}{C}$$

donde C es la capacitancia y Q es la carga en las placas del capacitor. La corriente I en cualquier instante (dado como $I = I_0 \cos \omega t$, ecuación 30-20) es

$$I = \frac{dQ}{dt} = I_0 \cos \omega t.$$

Por lo tanto, la carga Q sobre las placas en cualquier instante está dada por

$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t I_0 \cos \omega t \, dt = \frac{I_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

De esta forma, el voltaje a través del capacitor es

$$V = \frac{Q}{C} = I_0 \left(\frac{1}{\omega C} \right) \operatorname{sen} \omega t.$$

Al usar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} \theta = \cos(90° - \theta) = \cos(\theta - 90°)$, esto se rescribe como

$$V = I_0 \left(\frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t - 90°) = V_0 \cos(\omega t - 90°) \qquad \textbf{(30–24a)}$$

donde

$$V_0 = I_0 \left(\frac{1}{\omega C} \right) \qquad \textbf{(30–24b)}$$

es el pico en el voltaje. La corriente I ($= I_0 \cos \omega t$) y el voltaje V (ecuación 30-24a) a través del capacitor se grafican en la figura 30-17b. A partir de esta gráfica y de una comparación entre la ecuación 30-24a y la ecuación 30-20, es claro que la corriente y el voltaje están fuera de fase por un cuarto de ciclo o 90° ($\pi/2$ radianes):

La corriente se adelanta al voltaje a través del capacitor por 90°.

De manera alternativa, se dice que el voltaje se retrasa con respecto a la corriente en 90°. Esto es lo opuesto de lo que ocurre en el caso de un inductor.

Puesto que la corriente y el voltaje están fuera de fase por 90°, la potencia promedio disipada es cero, tal como para un inductor. La energía de la fuente se alimenta al capacitor, donde se almacena en el campo eléctrico entre sus placas. Conforme el campo disminuye, la energía regresa a la fuente. Por lo tanto, *sólo una resistencia disipará energía* como energía térmica en un circuito de ca.

Tal como para una inductancia, se puede expresar una relación entre el voltaje aplicado y la corriente en un capacitor:

$$V_0 = I_0 X_C \qquad \left[\begin{array}{l} \text{valores máximos o rms,} \\ \text{no en cualquier instante} \end{array} \right] \qquad \textbf{(30–25a)}$$

donde X_C es la **reactancia capacitiva** del capacitor y tiene unidades de ohms; X_C está dada por (véase la ecuación 30-24b):

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}. \qquad \textbf{(30–25b)}$$

Cuando la frecuencia f ($= \omega/2\pi$) y/o la capacitancia C son menores, X_C es mayor y, por lo tanto, impide más el flujo de carga. Esto es, cuando X_C es grande, la corriente es pequeña (ecuación 30-25a). En la siguiente sección se usará el término **impedancia** para representar reactancias y resistencia.

La ecuación 30-25a relaciona los valores pico de V e I, o los valores rms ($V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} X_C$). Pero no es válida en un instante particular, porque I y V no están en fase.

Note, a partir de la ecuación 30-25b, que, para condiciones de cd, $\omega = 2\pi f = 0$ y X_C se vuelve infinito. Así es como debe ser, pues un capacitor puro no pasa corriente cd. Además, advierta que la reactancia de un inductor aumenta con la frecuencia, pero la de un capacitor disminuye con la frecuencia.

EJEMPLO 30–10 **Reactancia capacitiva.** ¿Cuál es la corriente rms en el circuito de la figura 30-17a, si $C = 1.0\ \mu\text{F}$ y $V_{\text{rms}} = 120$ V? Calcule *a*) para $f = 60$ Hz y luego *b*) para $f = 6.0 \times 10^5$ Hz.

PLANTEAMIENTO La reactancia se encuentra a partir de la ecuación 30-25b, y la corriente se despeja en la forma equivalente de la ley de Ohm, ecuación 30-25a.

SOLUCIÓN *a*) $X_C = 1/2\pi fC = 1/(6.28)(60\ \text{s}^{-1})(1.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 2.7\ \text{k}\Omega$. La corriente rms es (ecuación 30-25a):

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{X_C} = \frac{120\ \text{V}}{2.7 \times 10^3\ \Omega} = 44\ \text{mA}.$$

b) Para $f = 6.0 \times 10^5$ Hz, X_C será 0.27 Ω e $I_{\text{rms}} = 440$ A, ¡considerablemente más grande!

NOTA La dependencia de f es notable. Para altas frecuencias, la reactancia capacitiva es muy pequeña, y la corriente puede ser grande.

En las figuras 30-18a y b se ilustran dos aplicaciones comunes de los capacitores. En la figura 30-18a, se dice que el circuito A está capacitivamente acoplado con el circuito B. El propósito del capacitor es evitar que un voltaje de cd pase de A a B, pero permitiendo que una señal de ca pase relativamente sin impedimento (si C es suficientemente grande, ecuación 30-25b). El capacitor en la figura 30-18a se llama **filtro de paso alto** porque permite el paso con facilidad de ca de alta frecuencia, pero no de cd.

En la figura 30-18b, el capacitor pasa ca a tierra. En este caso, un voltaje de cd puede mantenerse entre los circuitos A y B, pero una señal de ca que salga de A pasa a tierra y no a B. Por lo tanto, el capacitor en la figura 30-18b actúa como un **filtro de paso bajo** cuando se requiere un voltaje de cd constante; cualquier variación de alta frecuencia en el voltaje pasará a tierra y no al circuito B. (La ca de muy baja frecuencia también podrá llegar al circuito B, al menos en parte).

Los altavoces que tienen *woofer* (altavoz de baja frecuencia o de graves) y *tweeter* (altavoz de alta frecuencia o de agudos) separados pueden usar un "cruce" simple que consiste en un capacitor en el circuito *tweeter* para impedir señales de baja frecuencia, y un inductor en el circuito *woofer* para impedir señales de alta frecuencia ($X_L = 2\pi fL$). En consecuencia, principalmente sonidos de baja frecuencia llegan al *woofer* y se emiten desde éste. Véase la figura 30-18c.

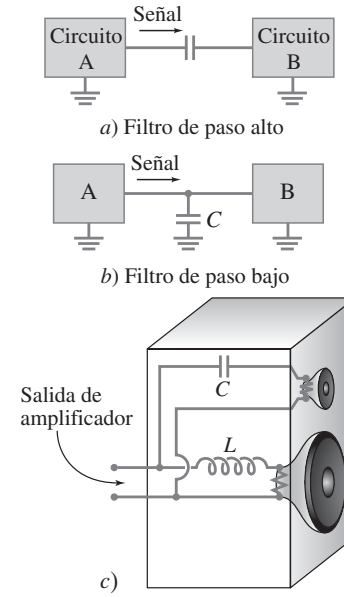


FIGURA 30–18 *a*) y *b*) Dos usos comunes para un capacitor. *c*) Cruce simple de altavoces.

FÍSICA APLICADA
Capacitores como filtros

FÍSICA APLICADA
Cruce de altavoces

EJERCICIO G ¿A qué frecuencia la reactancia de un capacitor de 1.0 μF es igual a 500 Ω? *a*) 320 Hz, *b*) 500 Hz, *c*) 640 Hz, *d*) 2000 Hz, *e*) 4000 Hz.

EJERCICIO H ¿A qué frecuencia la reactancia de un inductor de 1.0 μH es igual a 500 Ω? *a*) 80 Hz, *b*) 500 Hz, *c*) 80 MHz, *d*) 160 MHz, *e*) 500 MHz.

30–8 Circuitos de ca *LRC* en serie

Examinemos un circuito que contiene los tres elementos en serie: un resistor R, un inductor L y un capacitor C, figura 30-19. Si un circuito dado contiene sólo dos de estos elementos, todavía se pueden usar los resultados de esta sección estableciendo que $R = 0$, $X_L = 0$ o $X_C = 0$, según se requiera. Sean V_R, V_L y V_C las representaciones del voltaje a través de cada elemento en un *instante dado* en el tiempo; y V_{R0}, V_{L0} y V_{C0} las representaciones de los valores *máximos* (pico) de estos voltajes. El voltaje a través de cada uno de los elementos seguirá las relaciones de fase estudiadas en la sección previa. En cualquier instante, el voltaje V suministrado por la fuente será, por la regla de Kirchhoff de las espiras,

$$V = V_R + V_L + V_C. \qquad \textbf{(30–26)}$$

Puesto que los diversos voltajes no están en fase, no alcanzan sus valores pico al mismo tiempo, de manera que el voltaje pico de la fuente V_0 *no* será igual a $V_{R0} + V_{L0} + V_{C0}$.

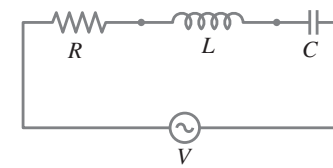


FIGURA 30–19 Circuito *LRC*.

CUIDADO
Los voltajes pico no se suman para dar el voltaje fuente

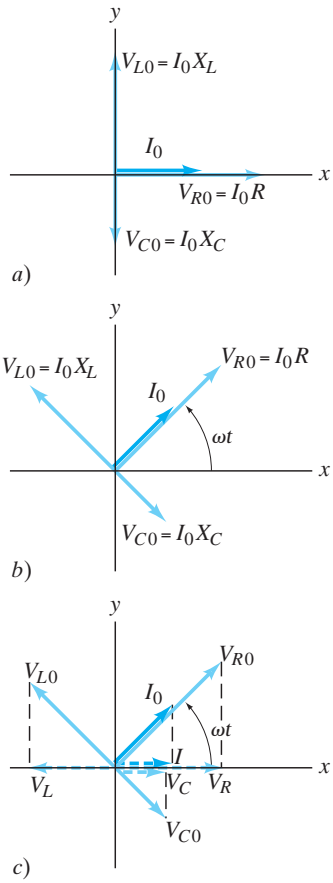
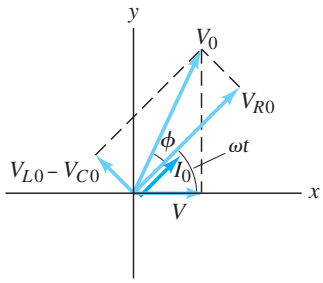


FIGURA 30–20 Diagrama de fasores para un circuito *LRC* en serie en *a*) $t = 0$, *b*) un instante *t* posterior. *c*) Las proyecciones sobre el eje *x* reflejan las ecuaciones 30-20, 30-22a y 30-24a.

FIGURA 30–21 Diagrama de fasores para un circuito LRC en serie que muestra el vector de suma, V_0.



Ahora se encontrará la impedancia del circuito como un todo (el efecto de R, X_C y X_L), la corriente pico I_0 y la relación de fase entre V e I. La corriente en cualquier instante debe ser la misma en todos los puntos del circuito. Por ende, las *corrientes en cada elemento están en fase mutua, aun cuando los voltajes no lo estén*. Se elige el origen en el instante ($t = 0$), de manera que la corriente I en cualquier instante t es (como en la ecuación 30-20)

$$I = I_0 \cos \omega t.$$

A continuación se analiza un circuito *LRC* con un **diagrama de fasores.**[†] En un sistema coordenado *xy* se dibujan flechas (tratadas como vectores) para representar cada voltaje. La *longitud de cada flecha representa la magnitud del voltaje pico a través de cada elemento*:

$$V_{R0} = I_0 R, \qquad V_{L0} = I_0 X_L \qquad \text{y} \qquad V_{C0} = I_0 X_C.$$

V_{R0} está en fase con la corriente e inicialmente ($t = 0$) se dibuja a lo largo del eje *x* positivo, como la corriente (figura 30-20a). V_{L0} se adelanta a la corriente por 90°, de manera que se adelanta a V_{R0} por 90° e inicialmente se dibuja a lo largo del eje *y* positivo. V_{C0} se retrasa con respecto a la corriente por 90°, de manera que V_{C0} inicialmente se dibuja a lo largo del eje *y* negativo, figura 30-20a.

Si el diagrama vectorial se hace girar en sentido antihorario a la frecuencia f, se obtiene el diagrama que se ilustra en la figura 30-20b; después de un tiempo t, cada flecha habrá girado a través de un ángulo ωt. Así, *las proyecciones de cada flecha sobre el eje x representan los voltajes a través de cada elemento* en el instante t (figura 30-20c). Por ejemplo, $I = I_0 \cos \omega t$. Compare las ecuaciones 30-22a y 30-24a con la figura 30-20c para confirmar la validez del diagrama de fasores.

La suma de las proyecciones de los tres vectores de voltaje representa el voltaje instantáneo a través de todo el circuito, V. Por lo tanto, la suma vectorial de estos vectores será el vector que representa el voltaje fuente pico, V_0, como se muestra en la figura 30-21, donde se observa que V_0 forma un ángulo ϕ con I_0 y V_{R0}. Conforme pasa el tiempo, V_0 gira con los otros vectores, de manera que el voltaje instantáneo V (proyección de V_0 sobre el eje *x*) es (véase la figura 30-21)

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi).$$

El voltaje V a través de todo el circuito debe ser igual al voltaje fuente (figura 30-19). Por consiguiente, el voltaje de la fuente está fuera de fase[‡] con la corriente por un ángulo ϕ.

A partir de este análisis, ahora se puede determinar la **impedancia** total Z del circuito, que se define en analogía con la resistencia y la reactancia como

$$V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} Z, \qquad \text{o} \qquad V_0 = I_0 Z. \qquad \textbf{(30–27)}$$

A partir de la figura 30-21 y de acuerdo con el teorema de Pitágoras (V_0 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo), se ve que

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, según la ecuación 30-27, la impedancia total Z es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \textbf{(30–28a)}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad \textbf{(30–28b)}$$

También a partir la figura 30-21, se puede encontrar el ángulo de fase ϕ entre el voltaje y la corriente:

$$\tan \phi = \frac{V_{L0} - V_{C0}}{V_{R0}} = \frac{I_0 (X_L - X_C)}{I_0 R} = \frac{X_L - X_C}{R}. \qquad \textbf{(30–29a)}$$

[†]En vez de ello, el análisis se puede realizar rescribiendo la ecuación 30-26 como una ecuación diferencial (al establecer que $V_C = Q/C$, $V_R = IR = (dQ/dt)R$, y $V_L = L\, dI/dt$) y tratando de resolver la ecuación diferencial. La ecuación diferencial que se obtendría se parecería a la ecuación 14-21 de la sección 14-8 (acerca de vibraciones forzadas) y se resolvería de la misma forma. Los diagramas de fasores son más sencillos y al mismo tiempo facilitan la comprensión física.

[‡]Como comprobación, advierta que, si $R = X_C = 0$, entonces $\phi = 90°$ y V_0 se adelantaría a la corriente por 90°, como debe suceder en el caso de un inductor solo. De igual modo, si $R = L = 0$, $\phi = -90°$ y V_0 se retrasaría a la corriente por 90°, como debe suceder en el caso de un capacitor solo.

También se puede escribir

$$\cos\phi = \frac{V_{R0}}{V_0} = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{Z}. \qquad \textbf{(30–29b)}$$

La figura 30-21 se dibujó para el caso $X_L > X_C$, y la corriente se retrasa con respecto al voltaje fuente por ϕ. Cuando lo contrario es cierto, $X_L < X_C$, entonces ϕ en las ecuaciones 30-29 es menor que cero, y la corriente se adelanta al voltaje fuente.

Anteriormente se vio que la potencia se disipa sólo mediante una resistencia; ninguna se disipa por inductancia o capacitancia. Por lo tanto, la potencia promedio $\overline{P} = I_{\text{rms}}^2 R$. Pero, a partir de la ecuación 30-29b, $R = Z\cos\phi$. En consecuencia,

$$\overline{P} = I_{\text{rms}}^2 Z\cos\phi = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}}\cos\phi. \qquad \textbf{(30–30)}$$

Al factor $\cos\phi$ se le conoce como **factor de potencia** del circuito. Para un resistor puro, $\cos\phi = 1$ y $\overline{P} = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}}$. Para un capacitor o inductor solo, $\phi = -90°$ o $+90°$, respectivamente, de manera que $\cos\phi = 0$ y no se disipa potencia.

EJEMPLO 30–11 **Circuito *LRC*.** Suponga que, en la figura 30-19, $R = 25.0\ \Omega$, $L = 30.0$ mH y $C = 12.0\ \mu$F, y que se conectan en serie a una fuente de ca de 90.0 V (rms) y 500 Hz. Calcule *a*) la corriente en el circuito, *b*) las lecturas del voltímetro (rms) a través de cada elemento, *c*) el ángulo de fase ϕ y *d*) la potencia disipada en el circuito.

PLANTEAMIENTO Para obtener la corriente es necesario determinar la impedancia (ecuación 30-28 más ecuaciones 30-23b y 30-25b) y luego usar $I_{\text{rms}} = V_{\text{rms}}/Z$. Las caídas de voltaje a través de cada elemento se encuentran mediante la ley de Ohm o el equivalente para cada elemento: $V_R = IR$, $V_L = IX_L$ y $V_C = IX_C$.

SOLUCIÓN *a*) Primero, encuentre la reactancia del inductor y el capacitor en $f = 500$ Hz $= 500\ \text{s}^{-1}$.

$$X_L = 2\pi f L = 94.2\ \Omega, \qquad X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 26.5\ \Omega.$$

Por lo tanto, la impedancia total es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(25.0\ \Omega)^2 + (94.2\ \Omega - 26.5\ \Omega)^2} = 72.2\ \Omega.$$

A partir de la versión para impedancia de la ley de Ohm, ecuación 30-27,

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{Z} = \frac{90.0\ \text{V}}{72.2\ \Omega} = 1.25\ \text{A}.$$

b) El voltaje rms a través de cada elemento es

$$(V_R)_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} R = (1.25\ \text{A})(25.0\ \Omega) = 31.2\ \text{V}$$
$$(V_L)_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} X_L = (1.25\ \text{A})(94.2\ \Omega) = 118\ \text{V}$$
$$(V_C)_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} X_C = (1.25\ \text{A})(26.5\ \Omega) = 33.1\ \text{V}.$$

NOTA Estos voltajes *no* se suman al voltaje fuente, 90.0 V (rms). En vez de ello, el voltaje rms a través de la inductancia *excede* al voltaje fuente. Esto puede ocurrir porque los diferentes voltajes están fuera de fase unos con otros, y en cualquier instante un voltaje puede ser negativo, para compensar un gran voltaje positivo de otro. Sin embargo, los voltajes rms siempre son positivos por definición. Aunque los voltajes rms no necesitan sumarse al voltaje fuente, los voltajes instantáneos en cualquier momento se deben sumar al voltaje fuente en ese instante.

⚠ **CUIDADO**
Los voltajes pico o rms individuales NO se suman al voltaje fuente (debido a diferencias de fase)

c) El ángulo de fase ϕ está dado por la ecuación 30-29b,

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{25.0\ \Omega}{72.2\ \Omega} = 0.346,$$

de manera que $\phi = 69.7°$. Advierta que ϕ es positivo porque $X_L > X_C$ en este caso, de manera que $V_{L0} > V_{C0}$ en la figura 30-21.

d) $\overline{P} = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}}\cos\phi = (1.25\ \text{A})(90.0\ \text{V})(25.0\ \Omega/72.2\ \Omega) = 39.0\ \text{W}$.

30–9 Resonancia en circuitos de ca

La corriente rms en un circuito *LRC* en serie está dada por (véase las ecuaciones 30-28 y 30-28b):

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{Z} = \frac{V_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad \textbf{(30–31)}$$

Puesto que la reactancia de inductores y capacitores depende de la frecuencia f ($= \omega/2\pi$) de la fuente, la corriente en un circuito *LRC* dependerá de la frecuencia. A partir de la ecuación 30-31 se puede ver que la corriente será el máximo a una frecuencia que satisface

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Al despejar ω y llamar ω_0 a la solución:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad \text{[resonancia]} \quad \textbf{(30–32)}$$

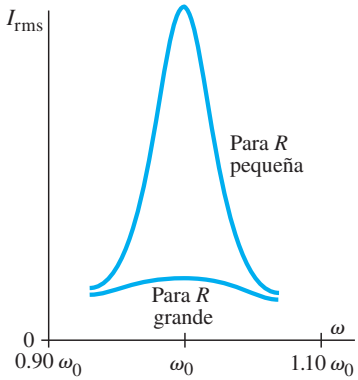


FIGURA 30–22 Corriente en un circuito *LRC* como función de frecuencia angular, ω, que presenta un pico de resonancia en $\omega = \omega_0 = \sqrt{1/LC}$.

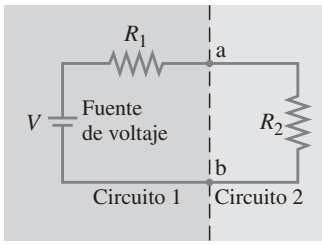
Cuando $\omega = \omega_0$, el circuito está en **resonancia** y $f_0 = \omega_0/2\pi$ es la **frecuencia de resonancia** del circuito. A esta frecuencia, $X_C = X_L$, de manera que la impedancia es meramente resistiva y cos $\phi = 1$. En la figura 30-22 se presenta una gráfica de I_{rms} contra ω para valores particulares de R, L y C. Para R pequeña en comparación con X_L y X_C, el pico de resonancia será más alto y más agudo. Cuando R es un valor muy pequeño, el circuito tiende al circuito *LC* puro que se estudió en la sección 30-5. Cuando R es grande en comparación con X_L y X_C, la curva de resonancia es relativamente plana: hay poca dependencia de la frecuencia.

Esta resonancia eléctrica es análoga a la resonancia mecánica, que se estudió en el capítulo 14. La energía transferida al sistema por la fuente es un máximo en el caso de resonancia, ya sea que se trate de resonancia eléctrica, la oscilación de un resorte o de cuando se empuja a un niño en un columpio (sección 14-8). El hecho de que esto sea cierto en el caso eléctrico se puede ver a partir de la ecuación 30-30; en resonancia, cos $\phi = 1$, y la potencia $\overline{P}$ es un máximo. Una gráfica de potencia contra frecuencia tiene picos como en el caso de la corriente, figura 30-22.

La resonancia eléctrica se emplea en muchos circuitos. Los radios y televisores, por ejemplo, usan circuitos de resonancia para sintonizar una estación. Muchas frecuencias llegan al circuito, pero una corriente significativa fluye sólo para las que están en la frecuencia resonante o cerca de ella. L o C es variable, de manera que es posible sintonizar diferentes estaciones.

*30–10 Adaptación de impedancia

FIGURA 30–23 La salida del circuito de la izquierda es la entrada al circuito de la derecha.



Es común conectar un circuito eléctrico a un segundo circuito. Por ejemplo, una antena de televisión se conecta a un receptor de televisión, un amplificador se conecta a un altavoz; los electrodos que se emplean para realizar un electrocardiograma se conectan a una grabadora. La potencia máxima de transfiere de uno al otro, con un mínimo de pérdida, cuando la impedancia de salida de un dispositivo coincide con la impedancia de entrada del segundo.

Para mostrar por qué, considere circuitos simples que contengan sólo resistencia. En la figura 30-23 la fuente en el circuito 1 podría representar la señal de una antena o una sonda de laboratorio, y R_1 representa su resistencia, incluida la resistencia interna de la fuente. R_1 se llama impedancia de salida (o resistencia) del circuito 1. La salida del circuito 1 es a través de las terminales a y b, que se conectan a la entrada del circuito 2, lo cual podría ser muy complicado. Sea R_2 la "resistencia de entrada" equivalente del circuito 2.

La potencia entregada al circuito 2 es $P = I^2R_2$, donde $I = V/(R_1 + R_2)$. Por lo tanto,

$$P = I^2R_2 = \frac{V^2R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Si la resistencia de la fuente es R_1, ¿qué valor deberá tener R_2 de manera que se transfiera potencia máxima al circuito 2? Para determinar esto, tome la derivada de P con respecto a R_2 e iguale a cero, lo que produce

$$V^2\left[\frac{1}{(R_1 + R_2)^2} - \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)^3}\right] = 0$$

o

$$R_2 = R_1.$$

Por consiguiente, la potencia máxima se transmite cuando la *impedancia de salida* de un dispositivo *es igual a la impedancia de entrada* del segundo. A esto se le llama **adaptación de impedancia**.

En un circuito de ca que contiene capacitores e inductores, las diferentes fases son importantes y el análisis es más complicado. Sin embargo, se sostiene el mismo resultado: para maximizar la transferencia de potencia es importante acoplar las impedancias ($Z_2 = Z_1$).

Además, es posible distorsionar seriamente una señal si las impedancias no se acoplan, y esto podría conducir a resultados experimentales sin significado o erróneos.

⚠ CUIDADO

Si las impedancias no se acoplan, pueden surgir resultados erróneos

*30–11 CA trifásica

Las líneas de transmisión por lo general consisten en cuatro alambres, en lugar de dos. Uno de estos alambres es la tierra; los tres restantes se usan para transmitir potencia ca trifásica, que es una superposición de tres voltajes de ca que se encuentran 120° fuera de fase entre sí:

$$V_1 = V_0 \operatorname{sen} \omega t$$
$$V_2 = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + 2\pi/3)$$
$$V_3 = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + 4\pi/3).$$

(Véase la figura 30-24). ¿Por qué se usa la potencia trifásica? En la figura 25-22 se vio que la ca monofásica (es decir, el voltaje V_1 por sí mismo) entrega potencia a la carga en pulsos. Con la potencia trifásica es posible entregar un flujo de potencia mucho más suave. Suponga que cada uno de los tres voltajes que constituyen la fuente trifásica se transmite a un resistor R. Entonces la potencia entregada es:

$$P = \frac{1}{R}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2).$$

Usted puede demostrar que esta potencia es una constante igual a $3V_0^2/2R$, que es tres veces la potencia rms entregada por una fuente monofásica. Este suave flujo de potencia hace funcionar con más suavidad el equipo eléctrico. Aunque las casas usan potencia de ca monofásica, la mayoría de la maquinaria de tipo industrial se cablea para potencia trifásica.

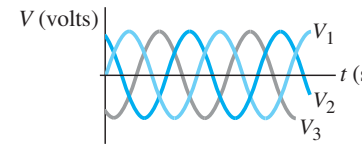


FIGURA 30–24 Los tres voltajes, fuera de fase por 120° (=$\frac{2}{3}\pi$ radianes), en una línea de transmisión trifásica.

EJEMPLO 30–12 **Circuito trifásico.** En un circuito trifásico, existen 266 V rms entre la línea 1 y tierra. ¿Cuál es el voltaje rms entre las líneas 2 y 3?

SOLUCIÓN Se sabe que $V_{\text{rms}} = V_0/\sqrt{2} = 266\text{ V}$. Por lo tanto, $V_0 = 376\text{ V}$. Ahora,

$$V_3 - V_2 = V_0[\operatorname{sen}(\omega t + 4\pi/3) - \operatorname{sen}(\omega t + 2\pi/3)] = 2V_0 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\tfrac{2\pi}{3}) \cos\tfrac{1}{2}(2\omega t)$$

donde se usó la identidad: $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)\cos\frac{1}{2}(A + B)$. El voltaje rms es

$$(V_3 - V_2)_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2V_0 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}(376\text{ V})(0.866) = 460\text{ V (rms)}.$$

Resumen

Una corriente variable en una bobina de alambre inducirá una fem en una segunda bobina colocada cerca de aquélla. La **inductancia mutua**, M, se define como la constante de proporcionalidad entre la fem inducida $\mathscr{E}_2$ en la segunda bobina y la razón de cambio en el tiempo de la corriente en la primera:

$$\mathscr{E}_2 = -M\, dI_1/dt. \qquad \textbf{(30–3b)}$$

También podemos escribir M como

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1} \qquad \textbf{(30–1)}$$

donde Φ_{21} es el flujo magnético a través de la bobina 2 con N_2 espiras, producido por la corriente I_1 en otra bobina (bobina 1).

Dentro de una bobina individual, una corriente variable induce una fem opuesta, $\mathscr{E}$, de manera que una bobina tiene una **autoinductancia** L definida por

$$\mathscr{E} = -L\, dI/dt. \qquad \textbf{(30–5)}$$

Esta fem inducida actúa como una *impedancia* al flujo de una corriente alterna. También podemos escribir L como

$$L = N\frac{\Phi_B}{I} \qquad \textbf{(30–4)}$$

donde Φ_B es el flujo a través de la inductancia cuando una corriente I fluye en sus N espiras.

Cuando la corriente en una inductancia L es I, la energía almacenada en la inductancia está dada por

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2. \qquad \textbf{(30–6)}$$

Esta energía se puede considerar como almacenada en el campo magnético del inductor. La densidad de energía u en cualquier campo magnético B está dada por

$$u = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}, \qquad \textbf{(30–7)}$$

donde μ_0 se sustituye por μ si está presente un material ferromagnético.

Cuando una inductancia L y el resistor R se conectan en serie a una fuente constante de fem, V_0, la corriente se eleva de acuerdo con una exponencial de la forma

$$I = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad \textbf{(30–9)}$$

donde

$$\tau = L/R \qquad \textbf{(30–10)}$$

es la **constante de tiempo**. A la larga, la corriente se nivela en $I = V_0/R$. Si súbitamente la batería se desconecta del **circuito *LR***, y el circuito permanece completo, la corriente cae exponencialmente, $I = I_0 e^{-t/\tau}$, con la misma constante de tiempo τ.

La corriente en un **circuito *LR*** puro (o carga en el capacitor) oscilaría de manera sinusoidal. La energía también oscilaría de ida y vuelta entre eléctrico y magnético, del capacitor al inductor, y nuevamente de regreso. Si tal circuito tiene resistencia (LRC), y el capacitor en algún instante está cargado, puede experimentar oscilaciones amortiguadas o mostrar comportamiento críticamente amortiguado o sobreamortiguado.

Capacitancia e inductancia ofrecen *impedancia* al flujo de corriente alterna, tal como la resistencia. A esta impedancia se le conoce como **reactancia**, X, y se define (al igual que en el caso de los resistores) como la constante de proporcionalidad entre voltaje y corriente (valores rms o pico). A través de un inductor,

$$V_0 = I_0 X_L, \qquad \textbf{(30–23a)}$$

y a través de un capacitor,

$$V_0 = I_0 X_C. \qquad \textbf{(30–25a)}$$

La reactancia de un inductor aumenta con la frecuencia:

$$X_L = \omega L. \qquad \textbf{(30–23b)}$$

donde $\omega = 2\pi f$ y f es la frecuencia de la ca. La reactancia de un capacitor disminuye con la frecuencia:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \qquad \textbf{(30–25b)}$$

Mientras que la corriente a través de un resistor siempre está en fase con el voltaje a través de él, esto no es cierto para inductores y capacitores: en un inductor, la corriente se retrasa con respecto al voltaje por 90°, y en un capacitor la corriente se adelanta al voltaje por 90°.

En un **circuito de ca *LRC* en serie**, la **impedancia** total Z se define mediante el equivalente de $V = IR$ para resistencia, a saber, $V_0 = I_0 Z$ o $V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} Z$. La impedancia Z se relaciona con R, C y L mediante

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \qquad \textbf{(30–28a)}$$

La corriente en el circuito se atrasa (o se adelanta) con respecto al voltaje fuente por un ángulo ϕ dado por $\cos\phi = R/Z$. Sólo el resistor en un circuito de ca LRC disipa energía, y a una razón

$$\overline{P} = I_{\text{rms}}^2 Z\cos\phi \qquad \textbf{(30–30)}$$

donde al factor $\cos\phi$ se le conoce como **factor de potencia**.

Un circuito LRC en serie **resuena** a una frecuencia dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad \textbf{(30–32)}$$

La corriente rms en el circuito es mayor cuando el voltaje aplicado tiene una frecuencia igual a $f_0 = \omega_0/2\pi$. Cuanto menor sea la resistencia R, más alto y más agudo será el pico de resonancia.

Preguntas

1. ¿Cómo ordenaría dos bobinas circulares planas de manera que su inductancia mutua fuera *a*) mayor, *b*) menor (sin separarlas una gran distancia)?
2. Suponga que la segunda bobina de N_2 espiras en la figura 30-2 se mueve de manera que queda cerca del extremo del solenoide. ¿Cómo afecta esto a la inductancia mutua?
3. ¿Dos bobinas con inductancia mutua también tendrían autoinductancia? Explique este hecho.
4. ¿La densidad de energía dentro de un solenoide es mayor cerca de los extremos del solenoide o cerca de su centro?
5. Si se le da un tramo de alambre de longitud fija, ¿qué forma le daría para obtener la mayor autoinductancia? ¿La menor?
6. ¿La fem de la batería en la figura 30-6a afecta el tiempo necesario para que el circuito LR alcance *a*) una fracción dada de su máxima corriente posible, *b*) un valor dado de corriente?

7. Un circuito con gran constante de tiempo inductiva conduce una corriente estable. Si se abre un interruptor, puede generarse una chispa muy grande o "arco" (lo que en ocasiones resulta peligroso). Explique.
8. En el instante cuando la batería se conecta al circuito *LR* de la figura 30-6a, la fem en el inductor tiene su valor máximo aun cuando la corriente sea cero. Explique.
9. ¿Qué mantiene en oscilación a un circuito *LC*, incluso después de que el capacitor se ha descargado por completo?
10. ¿La corriente en el inductor siempre es la misma que la corriente en el resistor del circuito *LRC* de la figura 30-13?
11. Cuando un generador de ca se conecta a un circuito *LRC*, ¿a final de cuentas de dónde proviene la energía? ¿A dónde se va? ¿Cómo es que los valores de L, R y C afectan la energía suministrada por el generador?
12. En un circuito de ca *LRC*, si $X_L > X_C$, se dice que el circuito es predominantemente "inductivo". Y si $X_C > X_L$, se dice que el circuito es predominantemente "capacitivo". Discuta las razones para usar estos términos. En particular, ¿dicen algo acerca de los valores relativos de L y C a una frecuencia dada?
13. ¿Los resultados de la sección 30-8 tienden a los resultados esperados adecuados cuando ω tiende a cero? ¿Cuáles son los resultados esperados?
14. ¿En qué condiciones la impedancia en un circuito *LRC* tiene un valor mínimo?
15. ¿Es posible que la salida de potencia instantánea de un generador ca, conectado a un circuito *LRC*, alguna vez sea negativa? Explique.
16. En un circuito *LRC*, ¿el factor de potencia, cos ϕ, depende de la frecuencia? ¿La potencia disipada depende de la frecuencia?
17. Describa brevemente cómo la frecuencia de la fem fuente afecta la impedancia de *a*) una resistencia pura, *b*) una capacitancia pura, *c*) una inductancia pura, *d*) un circuito *LRC* cerca de la resonancia (R pequeña), *e*) un circuito *LRC* lejos de la resonancia (R pequeña).
18. Analice la respuesta de un circuito *LRC* conforme $R \to 0$ cuando la frecuencia está *a*) en resonancia, *b*) cerca de la resonancia, *c*) lejos de la resonancia. ¿En cada caso existe disipación de energía? Discuta las transformaciones de energía que ocurren en cada caso.
19. Un circuito *LRC* resonante a menudo se llama circuito *oscilador*. ¿Qué es lo que oscila?
20. Compare las oscilaciones de un circuito *LRC* con la vibración de una masa m en un resorte. ¿A qué corresponden L y C en el sistema mecánico?

Problemas

30–1 Inductancia mutua

1. (II) Una bobina de 2.44 m de largo, que contiene 225 espiras, se devana sobre un núcleo de hierro (μ promedio = 1850 μ_0) junto con una segunda bobina de 115 espiras. Las espiras de cada bobina tienen un radio de 2.00 cm. Si la corriente en la primera bobina cae de manera uniforme de 12.0 A a cero en 98.0 ms, determine: *a*) la inductancia mutua M; *b*) la fem inducida en la segunda bobina.
2. (II) Determine la inductancia mutua por unidad de longitud entre dos largos solenoides, uno dentro del otro, cuyos radios son r_1 y r_2 ($r_2 < r_1$) y cuyas vueltas por unidad de longitud son n_1 y n_2.
3. (II) Una pequeña bobina delgada, con N_2 espiras, cada una con área A_2, se coloca dentro de un largo solenoide, cerca de su centro. El solenoide tiene N_1 espiras en su longitud ℓ y tiene área A_1. Determine la inductancia mutua como función de θ, el ángulo entre el plano de la bobina pequeña y el eje del solenoide.
4. (III) Un largo alambre recto y una pequeña espira rectangular de alambre yacen en el mismo plano, figura 30-25. Determine la inductancia mutua en términos de ℓ_1, ℓ_2 y w. Suponga que el alambre es muy largo en comparación con ℓ_1, ℓ_2 y w, y que el resto de su circuito está muy lejos en comparación con ℓ_1, ℓ_2 y w.

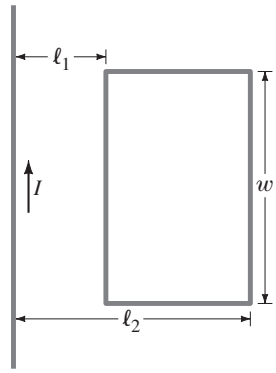


FIGURA 30–25
Problema 4.

30–2 Autoinductancia

5. (I) Si la corriente en una bobina de 280 mH cambia regularmente de 25.0 A a 10.0 A en 360 ms, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida?
6. (I) ¿Cuántas vueltas de alambre se requerirían para obtener una inductancia de 130 mH a partir de una bobina llena de aire que mide 30.0 cm de largo, con un diámetro de 4.2 cm?
7. (I) ¿Cuál es la inductancia de una bobina, si la bobina produce una fem de 2.50 V cuando la corriente en ella cambia de −28.0 mA a +25.0 mA en 12.0 ms?
8. (II) Un inductor cilíndrico lleno con aire tiene 2800 vueltas y mide 2.5 cm de diámetro y 21.7 cm de largo. *a*) ¿Cuál es su inductancia? *b*) ¿Cuántas vueltas se necesitarían para generar la misma inductancia si el núcleo estuviera lleno con hierro cuya permeabilidad magnética es 1200 veces la del espacio libre?
9. (II) Una bobina tiene 3.25 Ω de resistencia y 440 mH de inductancia. Si la corriente es de 3.00 A y aumenta a una razón de 3.60 A/s, ¿cuál es la diferencia de potencial a través de la bobina en este momento?
10. (II) Si el conductor externo de un cable coaxial tiene 3.00 mm de radio, ¿cuál sería el radio del conductor interno de manera que la inductancia por unidad de longitud no supere los 55 nH por metro?
11. (II) Para demostrar la gran dimensión de la unidad henry, un profesor de física quiere enrollar un solenoide lleno con aire, con una inductancia de 1.0 H, en el exterior de un tubo hueco de plástico de 12 cm de diámetro, usando alambre de cobre con un diámetro de 0.81 mm. El solenoide se devana apretadamente y cada vuelta toca a la que se encuentra junto (el alambre tiene una delgada capa aislante en su superficie, de manera que las vueltas contiguas no están en contacto eléctrico). ¿De qué longitud debe ser el tubo de plástico y cuántos kilómetros de alambre de cobre se requerirán? ¿Cuál será la resistencia de este solenoide?

12. (II) El alambre de un solenoide firmemente devanado se desenrolla y se utiliza para elaborar otro solenoide, también firmemente devanado, de 2.5 veces el diámetro. ¿En qué factor cambia la inductancia?

13. (II) Un toroide tiene una sección transversal rectangular, como se ilustra en la figura 30-26. Demuestre que la autoinductancia es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

donde N es el número total de vueltas y r_1, r_2 y h son las dimensiones que se muestran en la figura 30-26. [*Sugerencia:* Use la ley de Ampère para obtener B como función de r dentro del toroide e integre].

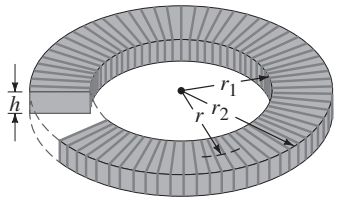


FIGURA 30–26
Problemas 13 y 19. Un toroide de sección transversal rectangular, con N vueltas que conducen una corriente I.

14. (II) Si se ignora cualquier inductancia mutua, ¿cuál es la inductancia equivalente de dos inductores conectados *a*) en serie, *b*) en paralelo?

30–3 Almacenamiento de energía magnética

15. (I) El campo magnético dentro de un solenoide lleno con aire, de 38.0 cm de largo y 2.10 cm de diámetro, es de 0.600 T. ¿Aproximadamente cuánta energía se almacena en ese campo?

16. (I) Grandes valores típicos para campos eléctricos y magnéticos logrados en laboratorios son de aproximadamente 1.0×10^4 V/m y 2.0 T. *a*) Determine la densidad de energía para cada campo y compare. *b*) ¿Qué magnitud de campo eléctrico se necesitaría para producir la misma densidad de energía que el campo magnético de 2.0 T?

17. (II) ¿Cuál es la densidad de energía en el centro de una espira circular de alambre que conduce una corriente de 23.0 A, si el radio de la espira es de 28.0 cm?

18. (II) Calcule las densidades de energía magnética y eléctrica en la superficie de un alambre de cobre de 3.0 mm de diámetro, que conduce una corriente de 15 A.

19. (II) Para el toroide de la figura 30-26, determine la densidad de energía en el campo magnético como función de r ($r_1 < r < r_2$) e integre esto sobre el volumen para obtener la energía total almacenada en el toroide, que transporta una corriente I en cada una de sus N espiras.

20. (II) Determine la energía total almacenada por unidad de longitud en el campo magnético entre los cilindros coaxiales de una cable coaxial (figura 30-5), utilizando la ecuación 30-7 para la densidad de energía e integrando sobre el volumen.

21. (II) Un largo alambre recto de radio R conduce corriente I uniformemente distribuida a través de su área transversal. Encuentre la energía magnética almacenada por unidad de longitud en el interior de este alambre.

30–4 Circuitos *LR*

22. (II) ¿Después de cuántas constantes de tiempo la corriente en la figura 30-6 queda dentro del *a*) 5%, *b*) 1.0% y *c*) 0.10% de su valor máximo?

23. (II) ¿Cuántas constantes de tiempo tarda en caer al 3.0% de su valor original la diferencia de potencial a través del resistor en un circuito LR como el de la figura 30-7?

24. (II) Para que la corriente en un circuito LR aumente de cero a 0.75 de su valor máximo, transcurren 2.56 ms. Determine *a*) la constante de tiempo del circuito, *b*) la resistencia del circuito si $L = 31.0$ mH.

25. (II) *a*) Determine la energía almacenada en el inductor L como función del tiempo para el circuito LR de la figura 30-6a. *b*) ¿Después de cuántas constantes de tiempo la energía almacenada alcanza el 99.9% de su valor máximo?

26. (II) En el circuito de la figura 30-27, determine la corriente en cada resistor (I_1, I_2, I_3) en el momento *a*) cuando se cierra el interruptor, *b*) mucho tiempo después de cerrar el interruptor. Después de que el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo, y luego se vuelve a abrir, ¿cuál es cada corriente *c*) justo después de que se abre, *d*) después de mucho tiempo?

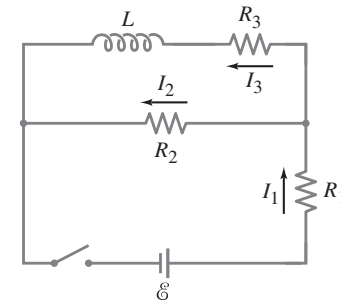


FIGURA 30–27
Problema 26.

27. (II) *a*) En la figura 30-28a, suponga que el interruptor S estuvo en la posición A el tiempo suficiente como para que una corriente constante $I_0 = V_0/R$ fluya a través del resistor R. En el instante $t = 0$, el interruptor se conmuta rápidamente a la posición B y la corriente a través de R decae de acuerdo con $I = I_0 e^{-t/\tau}$. Demuestre que la máxima fem $\mathscr{E}_{máx}$ inducida en el inductor durante ese periodo es igual al voltaje V_0 de la batería. *b*) En la figura 30-28b, suponga que el interruptor estuvo en la posición A durante tiempo suficiente como para que una corriente constante $I_0 = V_0/R$ fluyera a través del resistor R. En el instante $t = 0$, el interruptor se conmuta rápidamente a la posición B y la corriente decae a través del resistor R' (que es mucho mayor que R), de acuerdo con $I = I_0 e^{-t/\tau}$. Demuestre que la máxima fem $\mathscr{E}_{máx}$ inducida en el inductor durante ese periodo es $(R'/R)V_0$. Si $R' = 55R$ y $V_0 = 120$ V, determine $\mathscr{E}_{máx}$. [Cuando se abre un interruptor mecánico, se crea una brecha de aire de alta resistencia, que aquí se modela como R'. Este problema ilustra por qué se generan chispas de alto voltaje si un inductor portador de corriente se desconecta súbitamente de su fuente de poder].

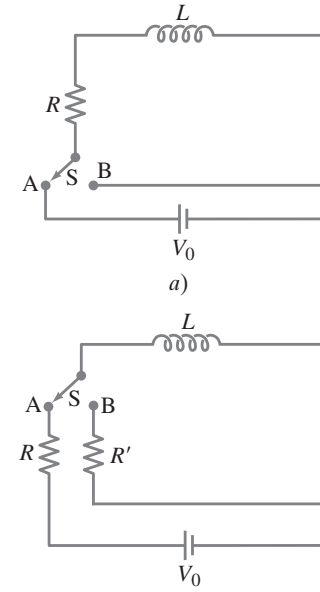


FIGURA 30–28
Problema 27.

28. (II) Usted quiere activar la corriente a través de una bobina de autoinductancia L en una forma controlada, así que la coloca en serie con un resistor $R = 2200\ \Omega$, un interruptor y una fuente de voltaje de cd $V_0 = 240$ V. Después de cerrar el interruptor, encuentra que la corriente a través de la bobina se acumula a su valor de estado estable con una constante de tiempo τ. Está contento con el valor de estado estable de la corriente, pero quiere que τ se reduzca a la mitad. ¿Qué nuevos valores debe usar para R y V_0?

29. (II) Una batería de 12 V se conecta a un circuito LR durante tiempo suficiente como para que una corriente constante fluya a través del resistor $R = 2.2$ kΩ y el inductor $L = 18$ mH. En $t = 0$, la batería se retira del circuito y la corriente decae exponencialmente a través de R. Determine la fem $\mathscr{E}$ a través del inductor conforme aumenta el tiempo t. ¿En cuánto tiempo $\mathscr{E}$ alcanza su valor máximo y a cuánto asciende este valor máximo (V)?

30. (III) Dos solenoides con espiras muy apretadas tienen la misma longitud y área de sección transversal. Pero el solenoide 1 usa alambre que tiene 1.5 veces el grosor del solenoide 2. *a*) ¿Cuál es la razón de sus inductancias? *b*) ¿Cuál es la razón de sus constantes de tiempo inductivas (si se supone que no hay otra resistencia en los circuitos)?

30–5 Circuitos *LC* y oscilaciones

31. (I) El capacitor variable en el sintonizador de un radio AM tiene una capacitancia de 1350 pF cuando el radio se sintoniza en una estación a 550 kHz. *a*) ¿Cuál debe ser la capacitancia para una estación a 1600 kHz? *b*) ¿Cuál es la inductancia (que se supone constante)? Ignore la resistencia.

32. (I) *a*) Si las condiciones iniciales de un circuito LC fueron $I = I_0$ y $Q = 0$ en $t = 0$, exprese Q como función del tiempo. *b*) De manera práctica, ¿cómo podría configurar esas condiciones iniciales?

33. (II) En algunos experimentos, distancias cortas se miden mediante la capacitancia. Considere formar un circuito LC con un capacitor de placas paralelas, con área de placa A, y una inductancia conocida L. *a*) Si se encuentra que la carga oscila en este circuito a la frecuencia $f = \omega/2\pi$ cuando las placas del capacitor están separadas una distancia x, demuestre que $x = 4\pi^2 A\epsilon_0 f^2 L$. *b*) Cuando la separación de placas cambia en Δx, la frecuencia de oscilación del circuito cambiará por Δf. Demuestre que $\Delta x/x \approx 2(\Delta f/f)$. *c*) Si f está en el orden de 1 MHz y se puede medir con una precisión de $\Delta f = 1$ Hz, ¿con qué exactitud porcentual se puede determinar x? Suponga que se pueden despreciar los efectos de borde en los extremos del capacitor.

34. (II) Un capacitor de 425 pF se carga a 135 V y luego se conecta rápidamente a un inductor de 175 mH. Determine *a*) la frecuencia de oscilación, *b*) el valor pico de la corriente y *c*) la energía máxima almacenada en el campo magnético del inductor.

35. (II) En $t = 0$, sea $Q = Q_0$ e $I = 0$ en un circuito LC. *a*) En el primer momento, cuando la energía se comparte por igual entre el inductor y el capacitor, ¿cuál es la carga en el capacitor? *b*) ¿Cuánto tiempo transcurrió (en términos del periodo T)?

30–6 Oscilaciones *LC* con resistencia

36. (II) Un circuito LC amortiguado pierde el 3.5% de su energía electromagnética por ciclo en energía térmica. Si $L = 65$ mH y $C = 1.00\ \mu$F, ¿cuál es el valor de R?

37. (II) En un circuito LRC oscilatorio, ¿cuánto tiempo tarda en caer al 75% del valor inicial la energía almacenada en los campos del capacitor y el inductor? (Véase la figura 30-13; suponga que $R \ll \sqrt{4L/C}$).

38. (III) ¿Cuánta resistencia se debe agregar a un circuito LC puro ($L = 350$ mH, $C = 1800$ pF) para cambiar la frecuencia del oscilador en 0.25%? ¿Aumentará o disminuirá?

30–7 Circuitos CA; reactancia

39. (I) ¿A qué frecuencia un inductor de 32.0 mH tendrá una reactancia de 660 Ω?

40. (I) ¿Cuál es la reactancia de un capacitor de 9.2 μF a una frecuencia de *a*) 60.0 Hz, *b*) 1.00 MHz?

41. (I) Elabore una gráfica de la reactancia de un capacitor de 1.0 μF como función de la frecuencia, de 10 Hz a 1000 Hz.

42. (I) Calcule la reactancia y la corriente rms en una bobina de radio de 36.0 mH conectada a una línea de ca de 250 V (rms) y 33.3 kHz. Ignore la resistencia.

43. (II) Un resistor R está en paralelo con un capacitor C, y esta combinación en paralelo está en serie con un resistor R'. Si se conecta a una fuente de voltaje de ca con frecuencia ω, ¿cuál es la impedancia equivalente de este circuito en los dos extremos de frecuencia *a*) $\omega = 0$ y *b*) $\omega = \infty$?

44. (II) ¿Cuál es la inductancia L del primario de un transformador cuya entrada es 110 V a 60 Hz, y la corriente extraída es de 3.1 A? Suponga que en el secundario no hay corriente.

45. (II) *a*) ¿Cuál es la reactancia de un capacitor de 0.086 μF conectado a una línea de 22 kV (rms) y 660 Hz? *b*) Determine la frecuencia y el valor pico de la corriente.

46. (II) Un capacitor se coloca en paralelo con algún dispositivo, B, como en la figura 30-18b, para filtrar señales perdidas de alta frecuencia, pero permitiendo el paso de ca ordinaria de 60 Hz con poca pérdida. Suponga que el circuito B en la figura 30-18b es una resistencia $R = 490\ \Omega$ conectada a tierra, y que $C = 0.35$ μF. ¿Qué porcentaje de la corriente entrante pasará a través de C y no de R, si es *a*) 60 Hz, *b*) 60,000 Hz?

47. (II) Una corriente $I = 1.80 \cos 377t$ (I en amperes, t en segundos y el "ángulo" en radianes) fluye en un circuito LR en serie en el que $L = 3.85$ mH y $R = 1.35$ kΩ. ¿Cuál es la disipación de potencia promedio?

30–8 Circuitos de ca *LRC* en serie

48. (I) Un resistor de 10.0 kΩ está en serie con un inductor de 26.0 mH y una fuente ca. Calcule la impedancia del circuito si la frecuencia de fuente es *a*) 55.0 Hz, *b*) 55,000 Hz.

49. (I) Un resistor de 75 Ω y un capacitor de 6.8 μF se conectan en serie a una fuente ca. Calcule la impedancia del circuito si la frecuencia de la fuente es *a*) 60 Hz; *b*) 6.0 MHz.

50. (I) Para un voltaje de 120 V, 60 Hz, una corriente de 70 mA que pasa a través del cuerpo durante 1.0 s podría ser mortal. ¿Cuál debe ser la impedancia del cuerpo para que esto ocurra?

51. (II) Un resistor de 2.5 kΩ en serie con un inductor de 420 mH se activa mediante una fuente de poder ca. ¿A qué frecuencia la impedancia es el doble que la impedancia a 60 Hz?

52. (II) *a*) ¿Cuál es la corriente rms en un circuito RC en serie, si $R = 3.8$ kΩ, $C = 0.80\ \mu$F y el voltaje rms aplicado es 120 V a 60.0 Hz? *b*) ¿Cuál es el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente? *c*) ¿Cuál es la potencia disipada por el circuito? *d*) ¿Cuáles son las lecturas del voltímetro a través de R y C?

53. (II) Una fuente de voltaje de ca se conecta en serie con un capacitor de 1.0 μF y un resistor de 750 Ω. Con un voltímetro digital de ca, la amplitud de la fuente de voltaje se mide en 4.0 V rms, mientras que los voltajes a través del resistor y el capacitor son de 3.0 V rms y 2.7 V rms, respectivamente. Determine la frecuencia de la fuente de voltaje de ca. ¿Por qué el voltaje medido a través de la fuente de voltaje no es igual a la suma de los voltajes medidos a través del resistor y a través del capacitor?

54. (II) Determine la impedancia total, el ángulo de fase y la corriente rms en un circuito LRC conectado a una fuente de 10.0 kHz y 725 V (rms), si $L = 32.0$ mH, $R = 8.70$ kΩ y $C = 6250$ pF.

55. (II) *a*) ¿Cuál es la corriente rms en un circuito LR en serie cuando se aplica un voltaje de ca de 120 V rms y 60.0 Hz, donde $R = 965\ \Omega$ y $L = 225$ mH? *b*) ¿Cuál es el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente? *c*) ¿Cuánta potencia se disipa? *d*) ¿Cuáles son las lecturas de voltaje rms a través de R y L?

56. (II) Un inductor de 35 mH, con 2.0 Ω de resistencia, se conecta en serie a un capacitor de 26 μF y una fuente de 45 V (rms) y 60 Hz. Calcule *a*) la corriente rms, *b*) el ángulo de fase y *c*) la potencia disipada en este circuito.

57. (II) Una bobina de 25 mH, cuya resistencia es de 0.80 Ω, se conecta a un capacitor C y una fuente de voltaje de 360 Hz. Si la corriente y el voltaje deben estar en fase, ¿qué valor debe tener C?

58. (II) Una bombilla de 75 W se diseña para operar con un voltaje de ca aplicado de 120 V rms. La bombilla se coloca en serie con un inductor L, y luego esta combinación en serie se conecta a una fuente de voltaje de 240 V rms y 60 Hz. Para que la bombilla opere de manera adecuada, determine el valor requerido para L. Suponga que la bombilla tiene resistencia R e inductancia despreciable.

59. (II) En el circuito LRC de la figura 30-19, suponga que $I = I_0$ sen ωt y $V = V_0$ sen$(\omega t + \phi)$. Determine la potencia instantánea disipada en el circuito a partir de $P = IV$ usando estas ecuaciones y demuestre que, en promedio, $\overline{P} = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\phi$, lo que confirma la ecuación 30-30.

60. (II) Un circuito LRC en serie con $R = 150\ \Omega$, $L = 25$ mH y $C = 2.0\ \mu$F, se activa mediante una fuente de voltaje de ca con voltaje pico $V_0 = 340$ V y frecuencia $f = 660$ Hz. *a*) Determine la corriente pico que fluye en este circuito. *b*) Determine el ángulo de fase del voltaje fuente en relación con la corriente. *c*) Determine el voltaje pico a través de R y su ángulo de fase en relación con el voltaje fuente. *d*) Determine el voltaje pico a través de L y su ángulo de fase en relación con el voltaje fuente. *e*) Determine el voltaje pico a través de C y su ángulo de fase en relación con el voltaje fuente.

61. (II) Un circuito LR se puede usar como un "cambiador de fase". Suponga que un voltaje fuente "de entrada" $V = V_0$ sen$(2\pi ft + \phi)$ se conecta a través de una combinación en serie de un inductor $L = 55$ mH y un resistor R. La "salida" de este circuito se toma a través del resistor. Si $V_0 = 24$ V y $f = 175$ Hz, determine el valor de R de manera que el voltaje de salida V_R se retrase con respecto al voltaje de entrada V en 25°. Compare (como razón) el voltaje pico de salida con V_0.

30–9 Resonancia en circuitos CA

62. (I) Un capacitor de 3800 pF se conecta en serie a una bobina de 26.0 μH y 2.00 Ω de resistencia. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia de este circuito?

63. (I) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito LRC del ejemplo 30-11? ¿A qué razón se toma la energía del generador, en promedio, a esta frecuencia?

64. (II) Un circuito LRC tiene $L = 4.15$ mH y $R = 3.80$ kΩ. *a*) ¿Qué valor debe tener C para producir resonancia a 33.0 kHz? *b*) ¿Cuál será la corriente máxima en resonancia si el voltaje pico externo es de 136 V?

65. (II) La frecuencia de la fuente de voltaje de ca (voltaje pico V_0) en un circuito LRC se sintoniza a la frecuencia de resonancia del circuito $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$. *a*) Demuestre que el voltaje pico a través del capacitor es $V_{C0} = V_0 T_0/2\pi\tau$), donde T_0 (= $1/f_0$) es el periodo de la frecuencia de resonancia y $\tau = RC$ es la constante de tiempo para cargar el capacitor C a través de un resistor R. *b*) Defina $\beta = T_0/(2\pi\tau)$ de manera que $V_{C0} = \beta V_0$. Entonces β es la "amplificación" del voltaje fuente a través del capacitor. Si un circuito LRC particular contiene un capacitor de 2.0 nF y tiene una frecuencia de resonancia de 5.0 kHz, ¿qué valor de R producirá $\beta = 125$?

66. (II) Los capacitores hechos de materiales piezoeléctricos se usan comúnmente como transductores sonoros ("altavoces"). A menudo requieren un gran voltaje de operación. Un método para suministrar el voltaje requerido es incluir el altavoz como parte de un circuito LRC, como se ilustra en la figura 30-29, donde el altavoz se modela eléctricamente como la capacitancia $C = 1.0$ nF. Tome $R = 35\ \Omega$ y $L = 55$ mH. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia f_0 para este circuito? *b*) Si la fuente de voltaje tiene amplitud pico $V_0 = 2.0$ V a la frecuencia $f = f_0$, determine el voltaje pico V_{C0} a través del altavoz (es decir, el capacitor C). *d*) Determine la razón V_{C0}/V_0.

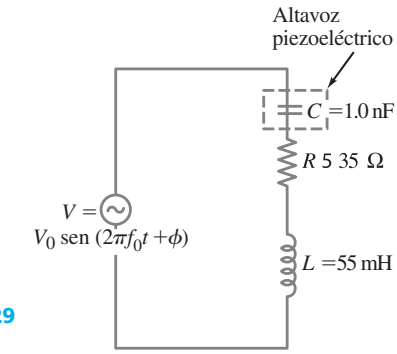


FIGURA 30–29
Problema 66.

67. (II) *a*) Determine una ecuación para la potencia promedio $\overline{P}$ disipada en un circuito LRC en términos de L, R, C, ω y V_0. *b*) ¿A qué frecuencia la potencia es máxima? *c*) Encuentre una ecuación aproximada para el ancho del pico de resonancia en la potencia promedio, $\Delta\omega$, que es la diferencia en las dos frecuencias (angulares), donde $\overline{P}$ tiene la mitad de su valor máximo. Suponga un pico agudo.

68. (II) *a*) Demuestre que la oscilación de la carga Q en el capacitor de un circuito LRC tiene amplitud

$$Q_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega R)^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}}.$$

b) ¿A qué frecuencia angular, ω', Q_0 tendrá un valor máximo? *c*) Compare con un oscilador armónico amortiguado y forzado (capítulo 14) y discuta. (Véase también la pregunta 20 de este capítulo.)

69. (II) Un circuito resonante, que usa un capacitor de 220 nF, debe resonar a 18.0 kHz. El inductor con núcleo de aire será un solenoide con espiras muy apretadas hechas de 12.0 m de alambre aislado de 1.1 mm de diámetro. ¿Cuántas espiras contendrá en inductor?

*30–10 Adaptación de impedancia

***70.** (II) La salida de un amplificador de electrocardiograma tiene una impedancia de 45 kΩ. Se conectará a un altavoz mediante un transformador. ¿Cuál debe ser la razón de vueltas del transformador?

Problemas generales

71. Un capacitor de 2200 pF se carga a 120 V y luego se conecta rápidamente a un inductor. Se observa que la frecuencia de oscilación es de 17 kHz. Determine *a*) la inductancia, *b*) el valor pico de la corriente y *c*) la máxima energía almacenada en el campo magnético del inductor.

72. En $t = 0$, la corriente a través de un inductor de 60.0 mH es 50.0 mA y aumenta a una razón de 78.0 mA/s. ¿Cuál es la energía inicial almacenada en el inductor y cuánto tiempo transcurre para que la energía aumente en un factor de 5.0 desde el valor inicial?

73. En el tiempo $t = 0$, se cierra el interruptor en el circuito que se representa en la figura 30-30. Después de un tiempo suficientemente largo, corrientes constantes I_1, I_2 e I_3 fluyen a través de los resistores R_1, R_2 y R_3, respectivamente. Determine estas tres corrientes.

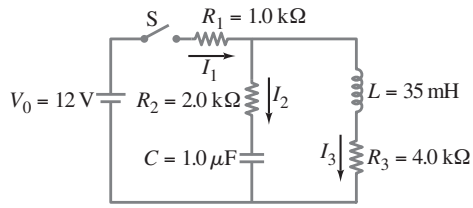


FIGURA 30–30 Problema 73.

74. *a*) Demuestre que la autoinductancia L de un toroide (figura 30-31) de radio r_0, que contiene N espiras, cada una de diámetro d, es

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 d^2}{8 r_0}$$

si $r_0 \gg d$. Suponga que el campo es uniforme dentro del toroide; ¿en realidad esto es cierto? ¿El resultado es consistente con L para un solenoide? ¿Debe serlo? *b*) Calcule la inductancia L de un gran toroide si el diámetro de las bobinas es de 2.0 cm y el diámetro de todo el anillo es de 66 cm. Suponga que el campo dentro del toroide es uniforme. Hay un total de 550 espiras de alambre.

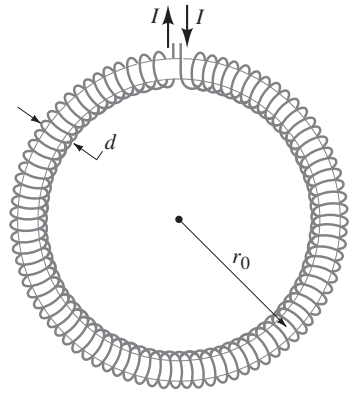


FIGURA 30–31
Un toroide.
Problema 74.

75. Un par de delgados alambres paralelos rectos, como un cordón de lámpara, cada uno de radio r, están separados una distancia ℓ y conducen corriente a un circuito alejado cierta distancia. Si se ignora el campo dentro de cada alambre, demuestre que la inductancia por unidad de longitud es $(\mu_0/\pi)\ln[(\ell - r)/r]$.

76. Suponiendo que el campo de la Tierra promedia aproximadamente 0.50×10^{-4} T cerca de la superficie de la Tierra, estime la energía total almacenada en este campo, en los primeros 5.0 km sobre de la superficie terrestre.

77. *a*) Para un circuito *LRC* subamortiguado, determine una fórmula para la energía $U = U_E + U_B$ almacenada en los campos eléctrico y magnético, como función del tiempo. Dé la respuesta en términos de la carga inicial Q_0 en el capacitor. *b*) Demuestre cómo se relaciona dU/dt con la razón de cambio de energía transformada en el resistor, I^2R.

78. Un dispositivo electrónico necesita protegerse contra aumentos súbitos en la corriente. En particular, después de que la potencia se enciende, la corriente debe elevarse a no más de 7.5 mA en los primeros 75 μs. El dispositivo tiene 150 Ω de resistencia y está diseñado para operar a 33 mA. ¿Cómo protegería este dispositivo?

79. El circuito que se ilustra en la figura 30-32a puede integrar (en el sentido de cálculo) el voltaje de entrada V_{ent}, si la constante de tiempo L/R es grande comparada con el tiempo durante el cual varía V_{ent}. Explique cómo funciona este integrador y bosqueje su salida para la señal de entrada de onda cuadrada que se muestra en la figura 30-32b. [*Sugerencia:* Escriba la regla de Kirchhoff de las espiras para el circuito. Multiplique cada término en esta ecuación diferencial (en I) por un factor $e^{Rt/L}$ para hacerla más fácil de integrar].

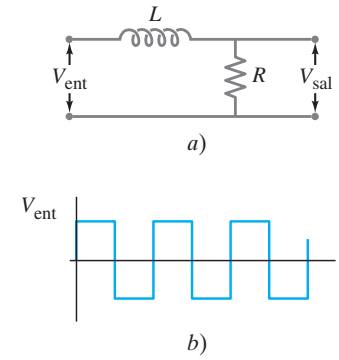


FIGURA 30–32
Problema 79.

80. Suponga que el circuito B en la figura 30-18a consiste en una resistencia $R = 550\ \Omega$. El capacitor filtro tiene capacitancia $C = 1.2\ \mu$F. ¿Este capacitor actuará para eliminar 6.0 Hz ca, pero pasará una señal de alta frecuencia de 6.0 kHz? Para comprobar esto, determine la caída de voltaje a través de R para una señal de 130 mV y frecuencia *a*) 60 Hz, *b*) 6.0 kHz.

81. Una fuente de voltaje de ca $V = V_0\ \text{sen}(\omega t + 90°)$ se conecta a través de un inductor L, y en este circuito fluye corriente $I = I_0\ \text{sen}(\omega t)$. Advierta que la corriente y el voltaje fuente están 90° fuera de fase. *a*) Calcule directamente la potencia promedio entregada por la fuente durante un periodo T de su ciclo sinusoidal mediante la integral $\overline{P} = \int_0^T VI\,dt/T$. *b*) Aplique la relación $\overline{P} = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}} \cos\phi$ a este circuito y demuestre que la respuesta que obtenga es congruente con la que encontró en el inciso *a*). Comente sus resultados.

82. Un circuito contiene dos elementos, pero no se sabe si son L, R o C. La corriente en este circuito, cuando se conecta a una fuente de 120 V 60 Hz, es 5.6 A y se retrasa 65° con respecto al voltaje. ¿Cuáles son los dos elementos y cuáles son sus valores?

83. Un resistor de 3.5 kΩ en serie con un inductor de 440 mH se activa mediante un suministro de potencia ca. ¿A qué frecuencia la impedancia es el doble de la impedancia a 60 Hz?

84. *a*) ¿Cuál es la corriente rms en un circuito *RC* si $R = 5.70\ \text{k}\Omega$, $C = 1.80\ \mu\text{F}$ y el voltaje rms aplicado es 120 V a 60.0 Hz? *b*) ¿Cuál es el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente? *c*) ¿Cuál es la potencia disipada por el circuito? *d*) ¿Cuáles son las lecturas de voltímetro a través de *R* y *C*?

85. Una bobina de inductancia extrae 2.5 A de cd cuando se conecta a una batería de 45 V. Cuando se conecta a una fuente de 60 Hz 120 V (rms), la corriente extraída es de 3.8 A (rms). Determine la inductancia y la resistencia de la bobina.

86. El **valor *Q*** de un circuito en resonancia se puede definir como la razón entre el voltaje a través del capacitor (o inductor) y el voltaje a través del resistor, en resonancia. Cuanto mayor sea el factor *Q*, más aguda será la curva de resonancia y más fina la sintonía. *a*) Demuestre que el factor *Q* está dado por la ecuación $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$. *b*) A una frecuencia de resonancia $f_0 = 1.0$ MHz, ¿cuál debe ser el valor de *L* y *R* para producir un factor *Q* de 350? Suponga que $C = 0.010\ \mu\text{F}$.

87. Demuestre que la fracción de la energía electromagnética perdida (en energía térmica) por ciclo en un circuito *LRC* ligeramente amortiguado ($R^2 \ll 4L/C$) es aproximadamente

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{2\pi R}{L\omega} = \frac{2\pi}{Q}.$$

La cantidad *Q*, que se define como $Q = L\omega/R$, se llama *valor Q* o *factor de calidad* del circuito y es una medida del amortiguamiento presente. Un valor *Q* alto significa menor amortiguamiento y menos entrada de energía requerida para mantener oscilaciones.

88. En un circuito *LRC* en serie, la inductancia es 33 mH, la capacitancia es 55 nF y la resistencia es 1.50 kΩ. ¿A qué frecuencias el factor de potencia es igual a 0.17?

89. En el análisis de un circuito *LRC* en serie, figura 30-19, suponga que se elige $V = V_0 \operatorname{sen} \omega t$. *a*) Construya un diagrama de fasores, como el de la figura 30-21, para este caso. *b*) Escriba una fórmula para la corriente *I* y defina todos los términos.

90. Un voltaje $V = 0.95 \operatorname{sen} 754t$ se aplica a un circuito *LRC* (*I* está en amperes, *t* en segundos, *V* en volts y el "ángulo" en radianes) que tiene $L = 22.0$ mH, $R = 23.2\ \text{k}\Omega$ y $C = 0.42\ \mu\text{F}$. *a*) ¿Cuál es la impedancia y el ángulo de fase? *b*) ¿Cuánta potencia se disipa en el circuito? *c*) ¿Cuál es la corriente y el voltaje rms a través de cada elemento?

91. *Circuito filtro*. La figura 30-33 ilustra un circuito filtro simple diseñado para pasar voltajes de cd con mínima atenuación y eliminar, tanto como sea posible, cualquier componente de ca (como el voltaje de línea de 60 Hz que podría causar zumbidos en un receptor estéreo, por ejemplo). Suponga que $V_{\text{ent}} = V_1 + V_2$, donde V_1 es cd y $V_2 = V_{20} \operatorname{sen} \omega t$, y que cualquier resistencia es muy pequeña. *a*) Determine la corriente a través del capacitor: indique amplitud y fase (suponga que $R = 0$ y $X_L > X_C$). *b*) Demuestre que el componente de ca del voltaje de salida, $V_{2\text{sal}}$, es igual a $(Q/C) - V_1$, donde *Q* es la carga en el capacitor en cualquier instante, y determine la amplitud y fase de $V_{2\text{sal}}$. *c*) Demuestre que la atenuación del voltaje de ca es mayor cuando $X_C \ll X_L$, y calcule la razón entre el voltaje de ca de salida y el de entrada en este caso. *d*) Compare el voltaje de salida de cd con el voltaje de entrada.

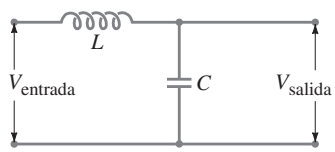


FIGURA 30–33
Problemas 91 y 92.

92. Demuestre que, si el inductor *L* en el circuito filtro de la figura 30-33 (problema 91) se sustituye con un gran resistor *R*, todavía habrá atenuación significativa del voltaje de ca y poca atenuación del voltaje de cd, si la entrada de voltaje es alta y la corriente (y la potencia) es baja.

93. Un resistor *R*, un capacitor *C* y un inductor *L* se conectan en paralelo a través de un generador de ca, como se muestra en la figura 30-34. La fem fuente es $V = V_0 \operatorname{sen} \omega t$. Determine la corriente como función del tiempo (incluyendo amplitud y fase): *a*) en el resistor, *b*) en el inductor, *c*) en el capacitor. *d*) ¿Cuál es la corriente total que sale de la fuente? (Indique la amplitud I_0 y la fase.) *e*) Determine la impedancia *Z* definida como $Z = V_0/I_0$. *f*) ¿Cuál es el factor de potencia?

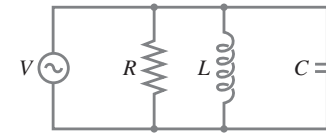


FIGURA 30–34
Problema 93.

94. Suponga que un circuito *LRC* en serie tiene dos resistores, R_1 y R_2, dos capacitores, C_1 y C_2, y dos inductores, L_1 y L_2, todos en serie. Calcule la impedancia total del circuito.

95. Determine la inductancia *L* de la bobina primaria de un transformador cuya entrada es 220 V a 60 Hz cuando la corriente extraída es 4.3 A. Suponga que no hay corriente en la bobina secundaria.

96. En un *globo de plasma*, una esfera de vidrio hueca se llena con gas a baja presión y un pequeño electrodo metálico esférico se coloca en su centro. Suponga que una fuente de voltaje ca, con voltaje pico V_0 y frecuencia *f*, se aplica entre la esfera metálica y tierra, y que una persona toca la superficie exterior del globo con la punta de un dedo, cuya área aproximada es de 1.0 cm^2. El circuito equivalente para esta situación se representa en la figura 30-35, donde R_G y R_P son las resistencias del gas y la persona, respectivamente, y *C* es la capacitancia formada por gas, vidrio y el dedo. *a*) Determine *C* suponiendo que es un capacitor de placas paralelas. El gas conductor y la punta del dedo de la persona forman las placas opuestas de área $A = 1.0\ \text{cm}^2$. Las placas están separadas por vidrio (constante dieléctrica $K = 5.0$) con grosor $d = 2.0$ mm. *b*) En un globo de plasma típico, $f = 12$ kHz. Determine la reactancia X_C de *C* a esta frecuencia, en MΩ. *c*) El voltaje puede ser $V_0 = 2500$ V. Con este alto voltaje, se supera la resistencia dieléctrica del gas y este último se ioniza. En tal estado "plasmático", el gas emite luz ("chispas") y es sumamente conductivo, de manera que $R_G \ll X_C$. Suponiendo también que $R_P \ll X_C$, estime la corriente pico que fluye en el circuito dado. ¿Es peligroso este nivel de corriente? *d*) Si el globo de plasma opera a $f = 1.0$ MHz, estime la corriente pico que fluye en el circuito dado. ¿Es peligroso este nivel de corriente?

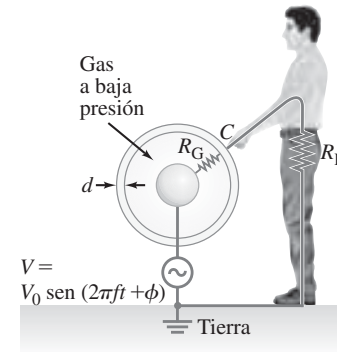


FIGURA 30–35
Problema 96.

97. Usted tiene un pequeño electroimán que consume 350 W de un circuito residencial que opera a 120 V y 60 Hz. Con su multímetro ca, determina que la unidad extrae 4.0 A rms. ¿Cuáles son los valores de la inductancia y la resistencia interna?

98. Un inductor L, en serie con un resistor R, activado mediante una fuente de voltaje sinusoidal, responde como se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$V_0 \operatorname{sen} \omega t = L\frac{dI}{dt} + RI.$$

Demuestre que una corriente de la forma $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$ fluye a través del circuito, mediante sustitución directa en la ecuación diferencial. Determine la amplitud de la corriente (I_0) y la diferencia de fase ϕ entre la corriente y la fuente de voltaje.

99. En cierto circuito LRC en serie, cuando la fuente de voltaje de ca tiene una frecuencia particular f, el voltaje pico a través del inductor es 6.0 veces mayor que el voltaje pico a través del capacitor. Determine f en términos de la frecuencia de resonancia f_0 de este circuito.

100. Para el circuito que se representa en la figura 30-36, $V = V_0 \operatorname{sen} \omega t$. Calcule la corriente en cada elemento del circuito, así como la impedancia total. [*Sugerencia:* Intente una solución de ensayo de la forma $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ para la corriente que sale de la fuente].

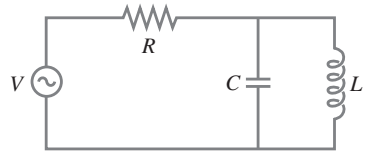


FIGURA 30–36
Problema 100.

101. Para detectar vehículos en los semáforos, bajo las autopistas a menudo se entierran horizontalmente espiras de alambre con dimensiones en el orden de 2 m. Suponga que la autoinductancia de tal espira es $L = 5.0$ mH y que es parte de un circuito LRC, como se muestra en la figura 30-37, con $C = 0.10\ \mu$F y $R = 45\ \Omega$. El voltaje de ca tiene frecuencia f y voltaje rms V_{rms}. *a*) La frecuencia f se elige para adaptarse a la frecuencia de resonancia f_0 del circuito. Encuentre f_0 y determine cuál será el voltaje rms $(V_R)_{\text{rms}}$ a través del resistor cuando $f = f_0$. *b*) Suponga que f, C y R nunca cambian, pero que, cuando un automóvil se ubica arriba de la espira enterrada, la autoinductancia de la espira disminuye un 10% (debido a corrientes parásitas inducidas en las partes metálicas del automóvil). Determine en qué factor disminuye el voltaje $(V_R)_{\text{rms}}$ en esta situación, en comparación con aquélla en la que no hay automóvil sobre la espira. [Monitorear $(V_R)_{\text{rms}}$ permite detectar la presencia de un automóvil].

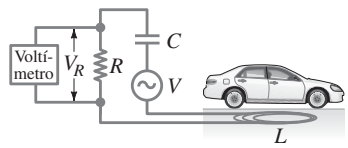


FIGURA 30–37
Problema 101.

102. Para el circuito de la figura 30-38, demuestre que, si se satisface la condición $R_1R_2 = L/C$, entonces la diferencia de potencial entre los puntos a y b es cero para todas las frecuencias.

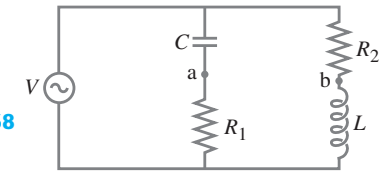


FIGURA 30–38
Problema 102.

*Problemas numéricos/por computadora

***103.** (II) El circuito RC que se representa en la figura 30-39 se llama **filtro de paso bajo** porque pasa señales de ca de baja frecuencia con menos atenuación que las señales de ca de alta frecuencia. *a*) Demuestre que la ganancia de voltaje es $A = V_{\text{sal}}/V_{\text{ent}} = 1/(4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. *b*) Discuta el comportamiento de la ganancia A para $f \to 0$ y $f \to \infty$. *c*) Elija $R = 850\ \Omega$ y $C = 1.0 \times 10^{-6}$ F, y grafique log A contra log f, con escalas adecuadas, para mostrar el comportamiento del circuito a baja y alta frecuencias.

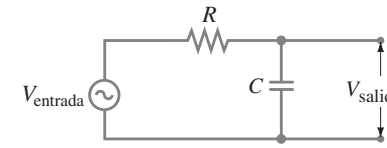


FIGURA 30–39
Problema 103.

***104.** (II) El circuito RC de la figura 30-40 se llama **filtro de paso alto** porque pasa señales de ca de alta frecuencia con menos atenuación que las señales ca de baja frecuencia. *a*) Demuestre que la ganancia de voltaje es $A = V_{\text{sal}}/V_{\text{ent}} = 2\pi f RC/(4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. *b*) Analice el comportamiento de la ganancia A para $f \to 0$ y $f \to \infty$. *c*) Elija $R = 850\ \Omega$ y $C = 1.0 \times 10^{-6}$ F, y luego grafique log A contra log f, con escalas adecuadas, para mostrar el comportamiento del circuito a alta y baja frecuencias.

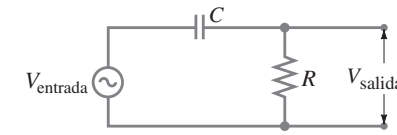


FIGURA 30–40
Problema 104.

***105.** (III) Escriba un programa de computadora o use un programa de hoja de cálculo para graficar I_{rms} para un circuito de ca LRC con una fuente de voltaje sinusoidal (figura 30-19) con $V_{\text{rms}} = 0.100$ V. Para $L = 50\ \mu$H y $C = 50\ \mu$F, trace la gráfica de I_{rms} para *a*) $R = 0.10\ \Omega$ y *b*) $R = 1.0\ \Omega$, desde $\omega = 0.1\omega_0$ hasta $\omega = 3.0\omega_0$ en la misma gráfica.

Respuestas a los ejercicios

A: *a*) *a*) 360 A/s; *b*) 12 V.

B: *b*).

C: *a*).

D: De acuerdo con la ecuación 30-5, L tiene dimensiones VT/A, de manera que (L/R) tiene dimensiones $(VT/A)/(V/A) = T$.

E: *d*).

F: *c*).

G: *a*).

H: *c*).

La tecnología inalámbrica está en todas partes: en esta fotografía se ve un auricular Bluetooth para comunicación telefónica inalámbrica y una computadora wi-fi. La antena wi-fi apenas es visible en la esquina inferior izquierda. Todos estos dispositivos operan mediante ondas electromagnéticas que viajan por el espacio, con base en el gran trabajo de Maxwell que se investigará en este capítulo. Los dispositivos inalámbricos modernos son aplicaciones del desarrollo de Marconi sobre la transmisión de información a larga distancia, desarrollada hace un siglo.
En este capítulo se verá que Maxwell predijo la existencia de ondas EM a partir de sus famosas ecuaciones, las cuales, en sí son un magnífico resumen del electromagnetismo. También se examinará cómo las ondas EM transportan energía y cantidad de movimiento.

CAPÍTULO 31

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

CONTENIDO

31–1 Los campos eléctricos variables producen campos magnéticos; ley de Ampère y corriente de desplazamiento
31–2 Ley de Gauss para magnetismo
31–3 Ecuaciones de Maxwell
31–4 Producción de ondas electromagnéticas
31–5 Ondas electromagnéticas y su rapidez, deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell
31–6 La luz como onda electromagnética y el espectro electromagnético
31–7 Medición de la rapidez de la luz
31–8 Energía en las ondas EM; el vector de Poynting
31–9 Presión de radiación
31–10 Radio y televisión; comunicación inalámbrica

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
¿Cuál de los siguientes enunciados describe mejor la diferencia entre las ondas de radio y los rayos X?

a) Los rayos X son radiación, mientras que las ondas de radio son ondas electromagnéticas.
b) Ambas se pueden considerar como ondas electromagnéticas. Sólo difieren en longitud de onda y frecuencia.
c) Los rayos X son energía pura. Las ondas de radio están hechas de campos, no de energía.
d) Las ondas de radio provienen de corrientes eléctricas en una antena. Los rayos X no se relacionan con la carga eléctrica.
e) El hecho de que los rayos X pueden velar una película, y las ondas de radio no, significa que son diferentes en esencia.

La culminación de la teoría electromagnética en el siglo XIX fue la predicción y la verificación experimental de que las ondas de los campos electromagnéticos podían viajar a través del espacio. Este logro abrió todo un mundo nuevo de comunicación: primero la telegrafía inalámbrica, luego la radio y la televisión, y más recientemente los teléfonos celulares, los dispositivos de control remoto, la tecnología wi-fi y Bluetooth. Más importante fue la espectacular predicción de que la luz visible es una onda electromagnética.

La predicción teórica de las ondas electromagnéticas fue obra del físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879; figura 31-1), quien unificó, en una magnífica teoría, todos los fenómenos de electricidad y magnetismo.

El desarrollo de la teoría electromagnética a principios del siglo XIX que corrió a cargo de Oersted, Ampère y otros científicos, en realidad no se hizo en términos de campos eléctricos y magnéticos. Fue Faraday quien, tiempo después, introdujo la idea de campo, y no fue de uso general sino hasta que Maxwell demostró que todos los fenómenos eléctricos y magnéticos se podían describir utilizando sólo cuatro ecuaciones que implican campos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones, conocidas como **ecuaciones de Maxwell**, son las ecuaciones básicas para todo el electromagnetismo. Son fundamentales en el mismo sentido que las tres leyes de movimiento y la ley de gravitación universal de Newton lo son para la mecánica. En un sentido, incluso son más fundamentales, pues son congruentes con la teoría de la relatividad (capítulo 36), mientras que las leyes de Newton no lo son. Puesto que todo el electromagnetismo está contenido en este conjunto de cuatro ecuaciones, las ecuaciones de Maxwell se consideran uno de los grandes triunfos del intelecto humano.

Antes de estudiar las ecuaciones de Maxwell y el electromagnetismo, primero es necesario estudiar una nueva gran predicción de Maxwell y, además, la ley de Gauss para el magnetismo.

FIGURA 31–1 James Clerk Maxwell (1831–1879).

31–1 Los campos eléctricos variables producen campos magnéticos; ley de Ampère y corriente de desplazamiento

Ley de Ampère

Oersted descubrió que una corriente eléctrica produce un campo magnético, y la relación matemática está dada por la ley de Ampère (ecuación 28-3):

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

¿Es posible que los campos magnéticos se produzcan también de otra manera? Porque, si un campo magnético variable produce un campo eléctrico, como se estudió en la sección 29-7, entonces tal vez lo contrario sea cierto también: que *un campo eléctrico variable producirá un campo magnético*. Si esto fuera cierto, ello significaría una hermosa simetría en la naturaleza.

Para respaldar esta idea de que un campo eléctrico variable puede generar un campo magnético, se usa un argumento indirecto que se plantea de la siguiente manera. De acuerdo con la ley de Ampère, cualquier trayectoria cerrada elegida se divide en segmentos cortos $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$, se toma el producto punto de cada $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ con el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en ese segmento y se suman (se integran) todos estos productos sobre la trayectoria cerrada elegida. Esta suma será igual a μ_0 veces la corriente total I que pasa a través de una superficie acotada por la trayectoria de la integral de línea. Cuando se aplica la ley de Ampère al campo alrededor de un alambre recto (sección 28-4), uno imagina la corriente que pasa a través del área circular encerrada por la espira circular, y que el área es la superficie plana 1 que se muestra en la figura 31-2. Sin embargo, también se podría usar la superficie 2 con forma de saco en la figura 31-2 como la superficie de la ley de Ampère, pues la misma corriente I pasa a través de ella.

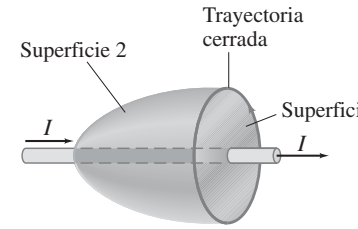
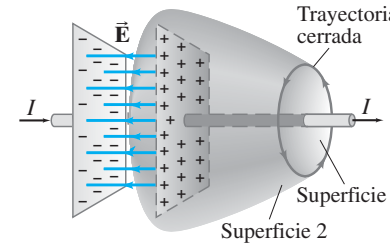


FIGURA 31–2 Ley de Ampère aplicada a dos superficies diferentes acotadas por la misma trayectoria cerrada.

FIGURA 31–3 Un capacitor que se descarga. Una corriente eléctrica pasa a través de la superficie 1, pero no a través de la superficie 2 En la ley de Ampère se requiere un término adicional.

Considere ahora la trayectoria circular cerrada para la situación de la figura 31-3, donde se descarga un capacitor. La ley de Ampère funciona para la superficie 1 (la corriente I pasa a través de la superficie 1), pero no funciona para la superficie 2, pues no pasa corriente a través de la superficie 2. Alrededor del alambre hay un campo magnético, de manera que el lado izquierdo de la ley de Ampère ($\int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$) no es cero; aunque a través de la superficie 2 no fluye corriente, de manera que el lado derecho de la ley de Ampère *es* cero. Parece que existe una contradicción en la ley de Ampère.

Sin embargo, en la figura 31-3 hay un campo magnético presente sólo si fluye carga hacia o desde las placas del capacitor. La carga variable en las placas significa que el campo eléctrico entre las placas cambia con el tiempo. Maxwell resolvió el problema de ausencia de corriente a través de la superficie 2 en la figura 31-3 al proponer que se necesita un término adicional a la derecha de la ley de Ampère, que implique el campo eléctrico variable.



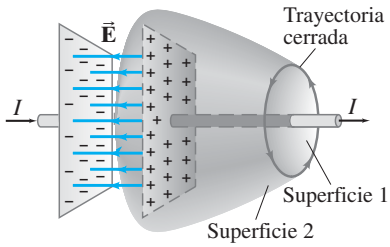


FIGURA 31–3 (repetida) Véase el texto.

A continuación se verá cuál debe ser este término al determinarlo para el campo eléctrico variable entre las placas del capacitor en la figura 31-3. La carga Q en un capacitor de capacitancia C es $Q = CV$, donde V es la diferencia de potencial entre las placas (ecuación 24-1). Recuerde también que $V = Ed$ (ecuación 23-4), donde d es la (pequeña) separación entre las placas y E es la intensidad (uniforme) del campo eléctrico entre ellas, si se ignora cualquier efecto de borde del campo. Además, para un capacitor de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, donde A es el área de cada placa (ecuación 24-2). Esto se combina para obtener:

$$Q = CV = \left(\epsilon_0 \frac{A}{d}\right)(Ed) = \epsilon_0 AE.$$

Si la razón de cambio de la carga en cada placa es dQ/dt, el campo eléctrico cambia a una razón proporcional. Esto es, al diferenciar esta expresión para Q, se tiene:

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}.$$

Ahora dQ/dt también es la corriente I que entra al capacitor o que sale de él:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

donde $\Phi_E = EA$ es el **flujo del campo eléctrico** a través de la trayectoria cerrada (superficie 2 en la figura 31-3). Por lo tanto, para que la ley de Ampère funcione para la superficie 2 en la figura 31-3, así como para la superficie 1 (donde fluye la corriente I), se escribe:

Ley de Ampère (forma general)

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad \textbf{(31–1)}$$

Esta ecuación representa la forma general de la **ley de Ampère**† e incopora la idea de Maxwell de que un campo magnético no sólo se puede generar por una corriente eléctrica ordinaria, sino también por un campo eléctrico variable o un flujo eléctrico variable. Aunque se llegó a la ecuación 31-1 para un caso especial, es válida en general. El último término a la derecha de la ecuación 31-1 por lo general es muy pequeño y no es fácil de medir experimentalmente.

EJEMPLO 31–1 **Carga de capacitor.** Un capacitor de 30 pF tiene placas circulares de área $A = 100\ \text{cm}^2$ y separadas por aire. Se carga mediante una batería de 70 V a través de un resistor de 2.0 Ω. En el instante en el que se conecta la batería, el campo eléctrico entre las placas cambia muy rápidamente. Para ese instante, calcule *a*) la corriente en las placas y *b*) la razón de cambio del campo eléctrico entre las placas. *c*) Determine el campo magnético inducido entre las placas. Suponga que $\vec{\mathbf{E}}$ es uniforme entre las placas en cualquier instante y es cero en todos los puntos más allá de los bordes de las placas.

PLANTEAMIENTO En la sección 26-5 se estudiaron los circuitos RC y se vio que la carga en un capacitor que se carga, como función del tiempo, es

$$Q = CV_0(1 - e^{-t/RC}),$$

donde V_0 es el voltaje de la batería. Para encontrar la corriente en $t = 0$, se obtiene la derivada de esto con respecto al tiempo y se sustituyen los valores $V_0 = 70$ V, $C = 30$ pF, $R = 2.0\ \Omega$.

SOLUCIÓN *a*) Tome la derivada de Q y evalúela en $t = 0$:

$$\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{CV_0}{RC} e^{-t/RC}\right|_{t=0} = \frac{V_0}{R} = \frac{70\ \text{V}}{2.0\ \Omega} = 35\ \text{A}.$$

Ésta es la razón a la que la carga se acumula en el capacitor y es igual a la corriente que fluye en el circuito en $t = 0$.

b) El campo eléctrico entre dos conductores muy cercanos está dado por (ecuación 21-8)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

como se vio en el capítulo 21 (véase el ejemplo 21-13).

†En realidad, hay un tercer término a la derecha para el caso en que se produce un campo magnético mediante materiales magnetizados. Esto se explica al cambiar μ_0 a μ, pero principalmente estamos interesados en casos en los que no hay materiales magnéticos presentes. En la presencia de un dieléctrico, ϵ_0 se sustituye por $\epsilon = K\epsilon_0$ (véase la sección 24-5).

En consecuencia,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ/dt}{\epsilon_0 A} = \frac{35\ \text{A}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1.0 \times 10^{-2}\ \text{m}^2)} = 4.0 \times 10^{14}\ \text{V/m}\cdot\text{s}.$$

c) Aunque no se probará, podemos esperar que las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$, por simetría, sean círculos, y que sean perpendiculares a $\vec{\mathbf{E}}$, como se ilustra en la figura 31-4; ésta es la misma simetría que se vio para la situación inversa de un campo magnético variable que produce un campo eléctrico (sección 29-7, véase la figura 29-27). Para determinar la magnitud de B entre las placas, aplicamos la ley de Ampère, ecuación 31-1, con la corriente $I_{\text{enc}} = 0$:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Aquí la trayectoria se eligió como un círculo de radio r, centrado en el centro de la placa, y por ende sigue una línea de campo magnético como la que se muestra en la figura 31-4. Para $r \leq r_0$ (el radio de la placa), el flujo a través de un círculo de radio r es $E(\pi r^2)$, pues E se supone uniforme entre las placas en cualquier momento. De manera que, a partir de la ley de Ampère, se tiene

$$\begin{aligned} B(2\pi r) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi r^2 E) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}. \qquad [r \leq r_0]$$

Suponemos que $\vec{\mathbf{E}} = 0$ para $r > r_0$, de manera que, para puntos más allá del borde de las placas, todo el flujo está contenido dentro de las placas (área $= \pi r_0^2$) y $\Phi_E = E\pi r_0^2$. Así, la ley de Ampère produce

$$\begin{aligned} B(2\pi r) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi r_0^2 E) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \pi r_0^2 \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

o

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r_0^2}{2r} \frac{dE}{dt}. \qquad [r \geq r_0]$$

B tiene su valor máximo en $r = r_0$, que, a partir de cualquier relación anterior (empleando $r_0 = \sqrt{A/\pi} = 5.6$ cm), es

$$\begin{aligned} B_{\text{máx}} &= \frac{\mu_0 \epsilon_0 r_0}{2} \frac{dE}{dt} \\ &= \tfrac{1}{2}(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(5.6 \times 10^{-2}\ \text{m})(4.0 \times 10^{14}\ \text{V/m}\cdot\text{s}) \\ &= 1.2 \times 10^{-4}\ \text{T}. \end{aligned}$$

Éste es un campo muy pequeño y dura sólo brevemente (la constante de tiempo $RC = 6.0 \times 10^{-11}$ s) y sería muy difícil de medir.

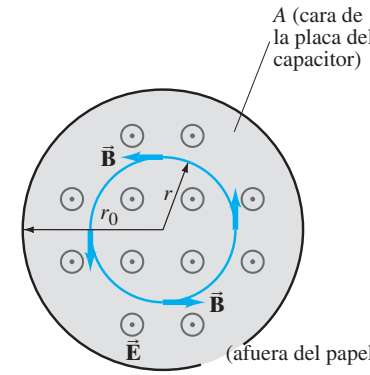


FIGURA 31–4 Vista frontal de la placa circular de un capacitor de placas paralelas. $\vec{\mathbf{E}}$ entre las placas apunta hacia el observador; las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ son círculos. (Ejemplo 31-1.)

Ahora se expresará el campo magnético B afuera de las placas del capacitor del ejemplo 31-1 en términos de la corriente I que sale de las placas. El campo eléctrico entre las placas es $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0 A)$, como se vio en el inciso *b*, de manera que $dE/dt = I/(\epsilon_0 A)$. Por lo tanto, B para $r > r_0$ es

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r_0^2}{2r} \frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r_0^2}{2r} \frac{I}{\epsilon_0 \pi r_0^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Ésta es la misma fórmula para el campo que rodea un alambre (ecuación 28-1). Por lo tanto, el campo B afuera del capacitor es el mismo que en el exterior del alambre. En otras palabras, el campo magnético producido por el campo eléctrico variable entre las placas es el mismo que el producido por la corriente en el alambre. ¡Hermoso!

Corriente de desplazamiento

Maxwell interpretó el segundo término a la derecha de la ecuación 31-1 como *equivalente* a una corriente eléctrica. Lo llamó **corriente de desplazamiento**, I_D. Entonces una corriente ordinaria I se llama **corriente de conducción**. En consecuencia, la ley de Ampère se puede escribir

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 (I + I_D)_{\text{enc}} \qquad \textbf{(31–2)}$$

donde

Corriente de desplazamiento

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad \textbf{(31–3)}$$

El término "corriente de desplazamiento" se basó en una antigua teoría desechada. Pero no se confunda: I_D no representa un flujo de carga eléctrica,[†] ni hay un desplazamiento.

31–2 Ley de Gauss para magnetismo

Casi estamos en condiciones de enunciar las ecuaciones de Maxwell, pero primero es necesario discutir el equivalente magnético de la ley de Gauss. Como vimos en el capítulo 29, para un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ el *flujo magnético* Φ_B a través de una superficie se define como

$$\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

donde la integral está sobre el área de una superficie, ya sea abierta o cerrada. El flujo magnético a través de una superficie cerrada (esto es, una superficie que encierra por completo un volumen) se expresa como

$$\Phi_B = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

En el caso eléctrico, en la sección 22-2 se vio que el flujo eléctrico Φ_E a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta total Q encerrada por la superficie, dividida entre ϵ_0 (ecuación 22-4):

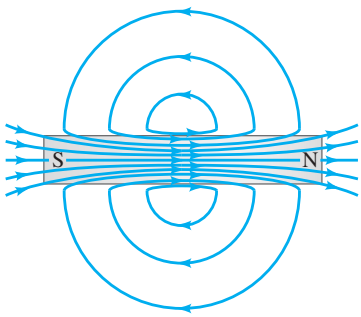
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Esta relación es la ley de Gauss para electricidad.

Es posible escribir una relación similar para el flujo magnético. Sin embargo, vimos que, a pesar de búsquedas intensas, jamás se han observado polos magnéticos aislados (monopolos), el equivalente magnético de cargas eléctricas solas. Por lo tanto, la **ley de Gauss para el magnetismo** es

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0. \qquad \textbf{(31–4)}$$

FIGURA 31–5 Líneas de campo magnético para un imán de barra.



En términos de líneas de campo magnético, esta relación dice que tantas líneas entran al volumen encerrado como las que salen de él. Si de hecho no existen los monopolos magnéticos, entonces no hay "fuentes" o "sumideros" de donde partan o donde se detengan las líneas de campo magnético, el correspondiente a las líneas de campo eléctrico que parten de cargas positivas y terminan en cargas negativas. Así, las líneas de campo magnético deben ser continuas. Incluso para un imán de barra, un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ existe tanto adentro como afuera del material magnético, y las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ son espiras cerradas, como se muestra en la figura 31-5.

[†]La interpretación del campo eléctrico variable como una corriente encaja bien con la discusión del capítulo 30, donde se vio que es posible decir que una corriente alterna pasa a través de un capacitor (aunque la carga no). También significa que la regla de Kirchhoff de los nodos será válida incluso en una placa de capacitor: la corriente de conducción fluye hacia la placa, pero ninguna corriente de conducción sale de la placa; en vez de ello, una "corriente de desplazamiento" fluye hacia fuera de una placa (hacia la otra placa).

31–3 Ecuaciones de Maxwell

Con la extensión de la ley de Ampère dada por la ecuación 31-1, más la ley de Gauss para magnetismo (ecuación 31-4), ahora estamos en condiciones de enunciar las cuatro ecuaciones de Maxwell. Todas se vieron en los pasados diez capítulos. En ausencia de materiales dieléctricos o magnéticos, las **ecuaciones de Maxwell** son:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(31–5a)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad \textbf{(31–5b)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(31–5c)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad \textbf{(31–5d)}$$

ECUACIONES DE MAXWELL

Las primeras dos ecuaciones de Maxwell son las mismas que la ley de Gauss para la electricidad (capítulo 22, ecuación 22-4) y la ley de Gauss para el magnetismo (sección 31-2, ecuación 31-4). La tercera es la ley de Faraday (capítulo 29, ecuación 29-8) y la cuarta es la ley de Ampère modificada por Maxwell (ecuación 31-1). (En aras de la simplicidad, se eliminaron los subíndices en Q_{enc} e I_{enc}.)

Las ecuaciones se pueden resumir en palabras: **1.** Una forma generalizada de la ley de Coulomb que relaciona el campo eléctrico con sus fuentes, las cargas eléctricas; **2.** lo mismo para el campo magnético, excepto que, si no existen los monopolos magnéticos, las líneas de campo magnético son continuas: no tienen principio ni fin (como sucede en el caso de las líneas de campo eléctrico con las cargas); **3.** un campo eléctrico se produce por un campo magnético variable; **4.** un campo magnético se produce por una corriente eléctrica o por un campo eléctrico variable.

Las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones básicas para todo el electromagnetismo, y son tan fundamentales como las tres leyes del movimiento y la ley de gravitación universal de Newton. Las ecuaciones de Maxwell también se pueden escribir en forma diferencial; véase el Apéndice E.

En capítulos anteriores se vio que es posible tratar los campos eléctricos y magnéticos por separado, como si no variaran en el tiempo. Pero no se les puede tratar independientemente si cambian en el tiempo, pues un campo magnético variable produce un campo eléctrico; y un campo eléctrico variable produce un campo magnético. Un resultado importante de estas relaciones es la producción de ondas electromagnéticas.

31–4 Producción de ondas electromagnéticas

En el espacio vacío se producirá un campo magnético si existe un campo eléctrico variable. Un campo magnético variable produce un campo eléctrico que, en sí mismo, es variable. A la vez, este campo eléctrico variable producirá un campo magnético, que será variable y, por lo tanto, también producirá un campo eléctrico variable; y así sucesivamente. Maxwell encontró que el resultado neto de estos campos variables en interacción, ¡era una *onda* de campos eléctricos y magnéticos que pueden propagarse (viajar) a través del espacio! Ahora examinaremos, en una forma simplificada, cómo se producen tales **ondas electromagnéticas**.

Considere dos varillas conductoras que servirán como "antena" (figura 31-6a). Suponga que estas dos varillas se conectan mediante un interruptor a las terminales opuestas de una batería. Cuando se cierra el interruptor, la varilla superior rápidamente se carga de manera positiva y la inferior se carga negativamente. Las líneas de campo eléctrico se forman como se indica mediante las líneas en la figura 31-6b. Mientras las cargas fluyen, existe una corriente cuya dirección se indica mediante las flechas negras. Así, se produce un campo magnético cerca de la antena. Las líneas de campo magnético rodean la antena con forma de varilla y, en consecuencia, en la figura 31-6, $\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia la página ($\otimes$) a la derecha y afuera de la página ($\odot$) a la izquierda. ¿Cuánto se extienden estos campos eléctrico y magnético? En el caso estático, los campos se extienden hacia fuera indefinidamente lejos. Sin embargo, cuando se cierra el interruptor en la figura 31-6, los campos aparecen en las cercanías rápidamente, pero tardan algo de tiempo en llegar a puntos distantes. Tanto los campos eléctricos como magnéticos almacenan energía, y esta energía no se puede transferir a puntos distantes con rapidez infinita.

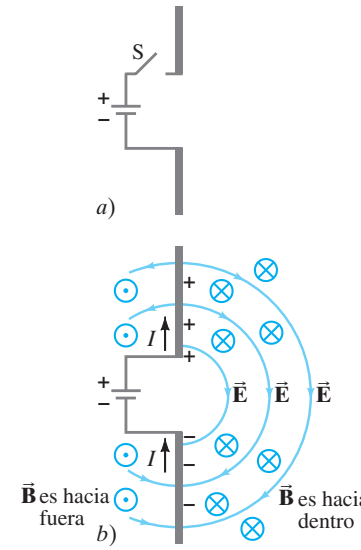


FIGURA 31–6 Campos producidos por cargas que fluyen en los conductores. Tarda cierto tiempo para que los campos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ viajen hacia fuera a puntos distantes. Los campos se muestran a la derecha de la antena, pero se mueven hacia fuera en todas direcciones, simétricamente en torno a la antena (vertical).

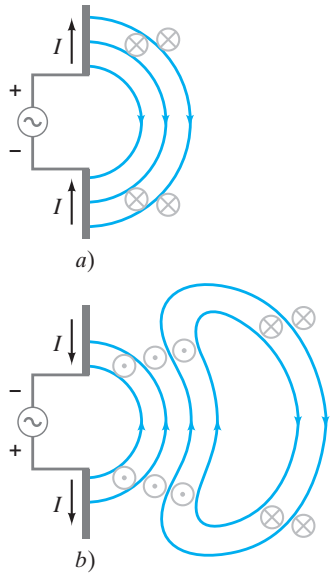


FIGURA 31–7 Secuencia que muestra los campos eléctrico y magnético que se dispersan hacia fuera desde cargas oscilatorias en dos conductores (la antena) conectados a una fuente de ca (véase el texto).

Ahora observe la situación de la figura 31-7, donde la antena está conectada a un generador ca. En la figura 31-7a, la conexión recién se completó. La carga comienza a acumularse y los campos se forman tal como en la figura 31-6. Los signos + y − en la figura 31-7a indican la carga neta sobre cada varilla en un instante dado. Las flechas negras indican la dirección de la corriente. El campo eléctrico se representa mediante las líneas color naranja en el plano de la página; y el campo magnético, de acuerdo con la regla de la mano derecha, es hacia (⊗) la página o desde ella (⊙) en gris. En la figura 31-7b, el voltaje del generador de ca ha invertido su sentido; la corriente se invierte y el nuevo campo magnético está en el sentido opuesto. Como los nuevos campos cambiaron de sentido, las antiguas líneas se pliegan de nuevo para conectarse a algunas de las nuevas líneas y formar espiras cerradas como se muestra.[†] Sin embargo, los campos antiguos no desaparecen súbitamente; están en su camino hacia puntos distantes. De hecho, puesto que un campo magnético variable produce un campo eléctrico, y un campo eléctrico variable produce un campo magnético, esta combinación de campos eléctrico y magnético variables que se mueven hacia fuera es autosuficiente, y no depende más de las cargas de la antena.

Los campos no lejanos de la antena, a los que se les conoce como *campo cercano*, se vuelven muy complicados, pero no se tiene interés en ellos. Más bien, aquí el interés principal reside en los campos lejos de la antena (que por lo general son los que se detectan), a los que se les llamará **campo de radiación** o *campo lejano*. Las líneas de campo eléctrico forman espiras, como se ilustra en la figura 31-8, y continúan moviéndose hacia fuera. Las líneas de campo magnético también forman espiras cerradas, pero no se ilustran porque son perpendiculares a la página. Aunque las líneas se presentan sólo a la derecha de la fuente, los campos también viajan en otras direcciones. Las intensidades de campo son mayores en direcciones perpendiculares a las oscilaciones de las cargas, y caen a cero a lo largo de la dirección de oscilación, por arriba y abajo de la antena en la figura 31-8.

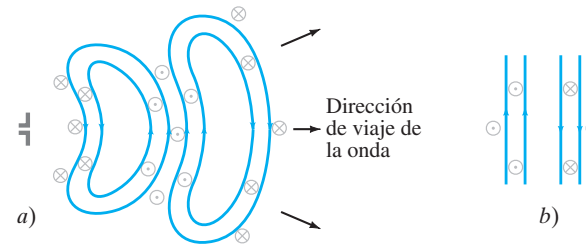


FIGURA 31–8 *a*) Los campos de radiación (lejos de la antena) producidos por una señal sinusoidal en la antena. Las espiras cerradas color naranja representan líneas de campo eléctrico. Las líneas de campo magnético, perpendiculares a la página y representadas mediante ⊗ y ⊙, en gris, también forman espiras cerradas. *b*) Muy lejos de la antena, los frentes de onda (líneas de campo) en esencia son planas sobre una área bastante grande, y se les conoce como *ondas planas*.

Las magnitudes de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en el campo de radiación disminuyen con la distancia como $1/r$. (Compare esto con el campo eléctrico estático dado por la ley de Coulomb, donde $\vec{\mathbf{E}}$ disminuye como $1/r^2$). La energía transportada por la onda electromagnética es proporcional (como para cualquier onda, capítulo 15) al cuadrado de la amplitud, E^2 o B^2, como se verá más adelante en la sección 31-8, de manera que la intensidad de la onda disminuye como $1/r^2$.

En la figura 31-8 se aprecian muchas cosas acerca del campo de radiación. Primero, *los campos eléctrico y magnético en cualquier punto son perpendiculares entre sí, y a la dirección de viaje de la onda.* Segundo, se puede ver que los campos alternan en su sentido ($\vec{\mathbf{B}}$ es hacia la página en algunos puntos y hacia fuera de la página en otros; $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia arriba en algunos puntos y hacia abajo en otros). Así, las intensidades de campo varían de un máximo en una dirección, a cero, a un máximo en la otra dirección. Los campos eléctrico y magnético están "en fase": esto es, tienen un valor de cero en los mismos puntos y alcanzan sus máximos en los mismos puntos en el espacio. Finalmente, muy lejos de la antena (figura 31-8b) las líneas de campo son bastante planas sobre una área razonablemente grande, y por ello las ondas se denominan **ondas planas**.

Si el voltaje fuente varía sinusoidalmente, entonces las intensidades de los campos eléctrico y magnético en el campo de radiación también variarán en forma sinusoidal. El carácter sinusoidal de las ondas se muestra en un diagrama en la figura 31-9, que presenta las direcciones y magnitudes de campo graficadas como función de la posición. Advierta que $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$ son perpendiculares entre sí y a la dirección de viaje (= la dirección de la velocidad de onda $\vec{\mathbf{v}}$). La dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ se obtiene a partir de la regla de la mano derecha con $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$: los dedos a lo largo de $\vec{\mathbf{E}}$, y luego a lo largo de $\vec{\mathbf{B}}$, dan a lo largo del pulgar $\vec{\mathbf{v}}$.

[†]Se consideran ondas que viajan a través del espacio vacío. No hay cargas para que las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ inicien o finalicen, así que forman espiras cerradas. Las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas.

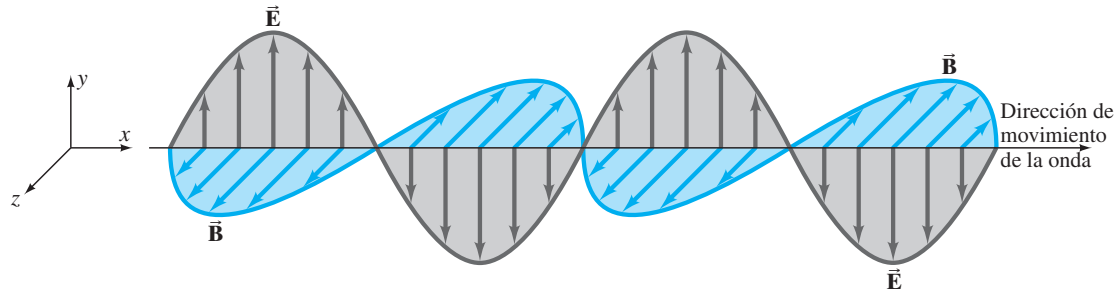


FIGURA 31–9 Intensidades de campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética. $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son perpendiculares entre sí. Todo el patrón se mueve en una dirección perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{E}}$ como a $\vec{\mathbf{B}}$.

A estas ondas se les llama ondas electromagnéticas (EM). Son ondas *transversales* porque la amplitud es perpendicular a la dirección de viaje de la onda. Sin embargo, las ondas EM siempre son ondas de *campos*, no de materia (como las ondas en el agua o en una soga). Puesto que son campos, las ondas EM se pueden propagar en el espacio vacío.

Como se vio, las ondas EM se producen mediante cargas eléctricas que oscilan y, en consecuencia, experimentan aceleración. De hecho, en general se dice que

Las cargas eléctricas aceleradas producen ondas electromagnéticas.

Las ondas electromagnéticas también se generan de otras formas, las cuales requieren descripción en los niveles atómico y nuclear, como se estudiará más adelante.

EJERCICIO A En un instante particular, el campo eléctrico de una onda apunta hacia el norte y su campo magnético apunta hacia arriba. ¿En qué dirección viaja la onda? *a*) Hacia el sur, *b*) oeste, *c*) este, *d*) hacia abajo, *e*) no hay suficiente información para determinarlo.

31–5 Ondas electromagnéticas y su rapidez, deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell

Ahora examinemos cómo se deduce la existencia de ondas EM a partir de las ecuaciones de Maxwell. Se verá que la predicción de Maxwell de la existencia de las ondas EM fue asombrosa. Igualmente asombrosa fue la rapidez a la que se predijo que viajarían.

Comencemos por considerar una región de espacio libre, donde *no hay cargas ni corrientes de conducción*, esto es, lejos de la fuente, de manera que los frentes de onda (las líneas de campo en la figura 31-8) son en esencia planos en una área razonable. Se les llamó **ondas planas**, como vimos, porque en cualquier instante $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son uniformes sobre un plano razonablemente grande perpendicular a la dirección de propagación. Elegimos un sistema coordenado, de manera que la onda viaje en la dirección x con velocidad $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{i}}$, con $\vec{\mathbf{E}}$ paralelo al eje y y $\vec{\mathbf{B}}$ paralelo al eje z, como en la figura 31-9.

Las ecuaciones de Maxwell se convierten en

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad \textbf{(31–6a)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad \textbf{(31–6b)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(31–6c)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad \textbf{(31–6d)}$$

Advierta la hermosa simetría de estas ecuaciones. El término a la derecha en la última ecuación, concebida por Maxwell, es esencial para esta simetría. También es esencial para la producción de las ondas electromagnéticas, como se verá a continuación.

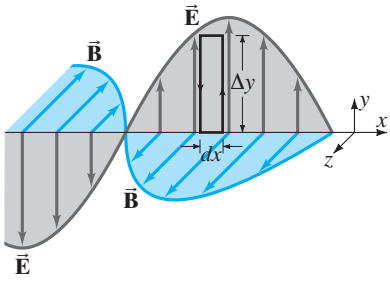


FIGURA 31–10 Aplicación de la ley de Faraday al rectángulo $(\Delta y)(dx)$.

Si la onda es sinusoidal con longitud de onda λ y frecuencia f, entonces, como se vio en el capítulo 15, sección 15-4, tal onda viajera se puede representar como

$$\begin{aligned} E &= E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \\ B &= B_z = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \end{aligned} \qquad \textbf{(31–7)}$$

donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = 2\pi f \qquad \text{y} \qquad f\lambda = \frac{\omega}{k} = v, \qquad \textbf{(31–8)}$$

donde v es la rapidez de la onda. Aunque visualizar la onda como sinusoidal es útil, no tendremos que suponerlo en la mayor parte de lo que sigue.

Ahora considere un pequeño rectángulo en el plano del campo eléctrico, como se muestra en la figura 31-10. Este rectángulo tiene una altura finita Δy y una anchura muy delgada que se considera como la distancia infinitesimal dx. Primero se demuestra que $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ están en la orientación que se indica, aplicando la ley de Lenz a esta espira rectangular. El flujo magnético variable a través de esta espira se relaciona con el campo eléctrico alrededor de la espira mediante la ley de Faraday (tercera ecuación de Maxwell, ecuación 31-6c). Para el caso que se ilustra, B disminuye en el tiempo a través de la espira (la onda se desplaza hacia la derecha). De manera que el campo eléctrico debe estar en una dirección que se opone a este cambio, lo que significa que E debe ser mayor en el lado derecho de la espira que en el izquierdo, como se observa (de este modo puede generar una corriente en sentido antihorario cuyo campo magnético actuaría para oponerse al cambio en Φ_B; pero, desde luego, no hay corriente). Este breve argumento revela que las orientaciones de $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ están en la relación correcta, como se ilustra. Esto es, $\vec{\mathbf{v}}$ está en la dirección de $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Ahora se aplica la ley de Faraday, que es la tercera ecuación de Maxwell (ecuación 31-6c),

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

al rectángulo de altura Δy y ancho dx que se muestra en la figura 31-10. Primero considere $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. A lo largo de las cortas secciones superior e inferior, de longitud dx, $\vec{\mathbf{E}}$ es perpendicular a $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$, de manera que $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 0$. Para los lados verticales, sea E el campo eléctrico a lo largo del lado izquierdo, y en el lado derecho, donde debe ser ligeramente mayor, es $E + dE$. Por lo tanto, si se toma la espira en sentido antihorario,

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = (E + dE)\,\Delta y - E\,\Delta y = dE\,\Delta y.$$

Para el lado derecho de la ley de Faraday, el flujo magnético a través de la espira cambia como

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt}\,dx\,\Delta y,$$

puesto que el área de la espira, $(dx)(\Delta y)$, no cambia. En consecuencia, la ley de Faraday produce

$$dE\,\Delta y = -\frac{dB}{dt}\,dx\,\Delta y$$

o

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}.$$

En realidad, tanto E como B son funciones de la posición x y el tiempo t. Por ende, se deben usar derivadas parciales:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \textbf{(31–9)}$$

donde $\partial E/\partial x$ significa la derivada de E con respecto a x mientras t se mantiene constante, y $\partial B/\partial t$ es la derivada de B con respecto a t mientras x se mantiene constante.

Además de la ecuación 31-9, es posible obtener otra importante relación entre E y B. Para hacerlo, considere ahora un pequeño rectángulo en el plano de $\vec{\mathbf{B}}$, cuya longitud y ancho son Δz y dx, como se muestra en la figura 31-11. A esta espira rectangular se aplica la cuarta ecuación de Maxwell (la extensión de la ley de Ampère), ecuación 31-6d:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

donde se toma $I = 0$, pues se supone la ausencia de corrientes de conducción. A lo lar-

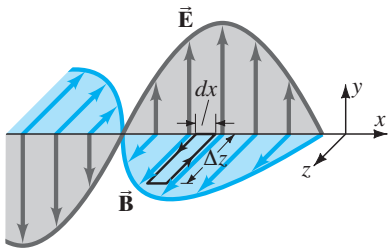


FIGURA 31–11 Aplicación de la cuarta ecuación de Maxwell al rectángulo $(\Delta z)(dx)$.

go de los lados cortos (dx), $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es cero, pues $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. A lo largo de los lados más largos (Δz), sea B el campo magnético a lo largo del lado izquierdo de longitud Δz, y $B + dB$ el campo a lo largo del lado derecho. De nuevo se integra en sentido antihorario, de manera que

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = B\,\Delta z - (B + dB)\,\Delta z = -dB\,\Delta z.$$

El lado derecho de la cuarta ecuación de Maxwell es

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}\,dx\,\Delta z.$$

Al igualar las dos expresiones se obtiene

$$-dB\,\Delta z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}\,dx\,\Delta z$$

o

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \textbf{(31–10)}$$

donde se sustituyeron dB/dx y dE/dt por las derivadas parciales adecuadas, como antes.

Podemos usar las ecuaciones 31-9 y 31-10 para obtener una relación entre las magnitudes de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y la rapidez v. E y B están dadas por las ecuaciones 31-7 como función de x y t. Cuando se aplica la ecuación 31-9, tomando las derivadas de E y B dadas por las ecuaciones 31-7, se obtiene

$$kE_0 \cos(kx - \omega t) = \omega B_0 \cos(kx - \omega t)$$

o

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = v,$$

puesto que $v = \omega/k$ (véase la ecuación 31-8 o la 15-12). Como E y B están en fase, se ve que E y B se relacionan mediante

$$\frac{E}{B} = v \qquad \textbf{(31–11)}$$

en cualquier punto del espacio, donde v es la velocidad de la onda.

Ahora se aplica la ecuación 31-10 a los campos sinusoidales (ecuaciones 31-7) para obtener

$$kB_0 \cos(kx - \omega t) = \mu_0 \epsilon_0 \omega E_0 \cos(kx - \omega t)$$

o

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{k} = \mu_0 \epsilon_0 v.$$

Se acaba de ver que $B_0/E_0 = 1/v$, de manera que

$$\mu_0 \epsilon_0 v = \frac{1}{v}.$$

Al despejar v se encuentra

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \qquad \textbf{(31–12)}$$

donde c es el símbolo especial para la rapidez de las ondas electromagnéticas en el espacio libre. Se ve que c es una constante, independiente de la longitud de onda o la frecuencia. Si se ponen valores para ϵ_0 y μ_0 se encuentra que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A})}}$$
$$= 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}.$$

Éste es un resultado notable, ¡porque es precisamente igual a la rapidez medida de la luz!

EJEMPLO 31–2 **Determinación de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en ondas EM.** Suponga que una onda EM de 60.0 Hz es una onda sinusoidal que se propaga en la dirección z con $\vec{\mathbf{E}}$ en la dirección x, y $E_0 = 2.00$ V/m. Escriba expresiones vectoriales para $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ como funciones de posición y tiempo.

PLANTEAMIENTO Encuentre λ a partir de $\lambda f = v = c$. Luego use la ecuación 31-9 y las ecuaciones 31-7 y 31-8 para la forma matemática de los campos eléctrico y magnético viajeros de una onda EM.

SOLUCIÓN La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{60.0 \text{ s}^{-1}} = 5.00 \times 10^6 \text{ m}.$$

De acuerdo con la ecuación 31-8, se tiene

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5.00 \times 10^6 \text{ m}} = 1.26 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0 \text{ Hz}) = 377 \text{ rad/s}.$$

A partir de la ecuación 31-11 con $v = c$, se encuentra que

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{2.00 \text{ V/m}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 6.67 \times 10^{-9} \text{ T}.$$

La dirección de propagación es la de $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$, como en la figura 31-9. Con $\vec{\mathbf{E}}$ que apunta en la dirección x, y la onda que se propaga en la dirección z, $\vec{\mathbf{B}}$ debe apuntar en la dirección y. Al utilizar las ecuaciones 31-7 se encuentra:

$$\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}}(2.00 \text{ V/m}) \operatorname{sen}\left[(1.26 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1})z - (377 \text{ rad/s})t\right]$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{j}}(6.67 \times 10^{-9} \text{ T}) \operatorname{sen}\left[(1.26 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1})z - (377 \text{ rad/s})t\right]$$

* Derivación de la rapidez de la luz (general)

Se puede derivar la rapidez de las ondas EM sin tener que suponer ondas sinusoidales, al combinar las ecuaciones 31-9 y 31-10 del modo siguiente. Se toma la derivada, con respecto a t, de la ecuación 31-10

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t\, \partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

A continuación se toma la derivada de la ecuación 31-9 con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t\, \partial x}.$$

Como $\partial^2 B/\partial t$ aparece en ambas relaciones, se obtiene

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(31–13a)}$$

Al tomar otras derivadas de las ecuaciones 31-9 y 31-10 se obtiene la misma relación para B:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(31–13b)}$$

Ambas ecuaciones 31-13 tienen la forma de la **ecuación de onda** para una onda plana que viaja en la dirección x, como se explicó en la sección 15-5 (ecuación 15-16):

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2},$$

donde D representa cualquier tipo de desplazamiento. Se ve que la velocidad v para las ecuaciones 31-13 está dada por

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

en concordancia con la ecuación 31-12. Por consiguiente, se ve que un resultado natural de las ecuaciones de Maxwell es que E y B obedecen la ecuación de onda para ondas que viajan con rapidez $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Fue sobre esta base que Maxwell predijo la existencia de ondas electromagnéticas y su rapidez.

31–6 La luz como onda electromagnética y el espectro electromagnético

Los cálculos en la sección 31-5 dieron el resultado que Maxwell mismo determinó: que la rapidez de las ondas EM en el espacio vacío está dada por

$$c = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s},$$

la misma que la rapidez de la luz medida en el vacío.

Aproximadamente 60 años antes se demostró que la luz se comportaba como onda (esto se estudiará en el capítulo 34). Pero nadie sabía qué tipo de onda era. ¿Qué es lo que oscila en una onda de luz? Maxwell, sobre la base de la rapidez calculada de las ondas EM, argumentó que la luz debía ser una onda electromagnética. Esta idea pronto fue de aceptación general entre los científicos, pero no por completo sino hasta después de que las ondas EM se detectaron experimentalmente. Heinrich Hertz (1857-1894) en 1887 fue el primero en generar y detectar experimentalmente las ondas EM, ocho años después de la muerte de Maxwell. Hertz usó un aparato explosor en el que la carga corría de ida y vuelta durante breve tiempo, lo que generaba ondas cuya frecuencia era aproximadamente de 10^9 Hz. Las detectó a cierta distancia con una espira de alambre donde se producía una fem cuando pasaba un campo magnético variable a través de ella. Más tarde se demostró que estas ondas viajaban a la rapidez de la luz, 3.00×10^8 m/s, y que presentaban todas las características de la luz, como reflexión, refracción e interferencia. La única diferencia fue que no eran visibles. El experimento de Hertz fue una contundente confirmación de la teoría de Maxwell.

Las longitudes de onda de la luz visible se midieron en la primera década del siglo XIX, mucho antes de que alguien imaginara que la luz era una onda electromagnética. Se encontró que las longitudes de onda median entre 4.0×10^{-7} m y 7.5×10^{-7} m, o 400 nm a 750 nm (1 nm = 10^{-9} m). Las frecuencias de la luz visible se pueden encontrar con las ecuaciones 15-1 o 31-8, que se rescriben aquí:

$$c = \lambda f, \qquad \textbf{(31–14)}$$

donde f y λ son la frecuencia y longitud de onda, respectivamente, de la onda. Aquí, c es la rapidez de la luz, 3.00×10^8 m/s; adopta el símbolo especial c por su universalidad para todas las ondas EM en el espacio libre. La ecuación 31-14 dice que las frecuencias de la luz visible están entre 4.0×10^{14} Hz y 7.5×10^{14} Hz. (Recuerde que 1 Hz = 1 ciclo por segundo = 1 s^{-1}).

Pero la luz visible sólo es un tipo de onda EM. Como se vio, Hertz produjo ondas EM de frecuencia mucho menor, de alrededor de 10^9 Hz. Ahora se les conoce como **ondas de radio**, porque las frecuencias en este intervalo se usan para transmitir señales de radio y televisión. Las ondas electromagnéticas, o radiación EM como a veces se les llama, se produjeron o detectaron dentro de un amplio rango de frecuencias. Por lo general se clasifican como se indica en la figura 31-12, lo que se conoce como **espectro electromagnético**.

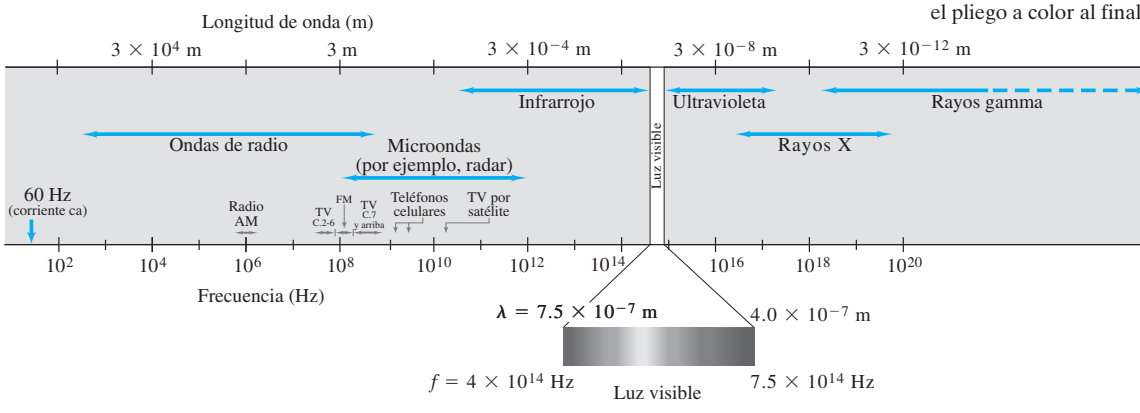


FIGURA 31–12
Espectro electromagnético. (Véase el pliego a color al final del libro).

Es posible generar ondas de radio y microondas en el laboratorio empleando equipo electrónico (figura 31-7). Las ondas de frecuencia superior son muy difíciles de producir electrónicamente. Éstas y otros tipos de ondas EM se generan en procesos naturales, como en la emisión de los átomos, moléculas y núcleos (más adelante se tratará esto). Las ondas EM se pueden generar mediante la aceleración de electrones u otras partículas cargadas, como los electrones en la antena de figura 31-7. Otro ejemplo es el de los rayos X, que se producen (capítulo 35) cuando electrones que se mueven rápidamente se desaceleran con brusquedad al golpear un blanco metálico. Incluso la luz visible emitida por una bombilla incandescente ordinaria se debe a electrones que experimentan aceleración dentro del filamento.

Más adelante se mencionarán varios tipos de ondas EM. Sin embargo, vale la pena mencionar que la radiación infrarroja (IR) (ondas EM cuya frecuencia es apenas menor que la de la luz visible) es la principal responsable por el efecto de calentamiento de los rayos solares. El Sol no sólo emite luz visible, sino también grandes cantidades de radiación IR y UV (ultravioleta). Las moléculas de la piel tienden a "resonar" a frecuencias infrarrojas, de manera que éstas son las que se absorben preferentemente y por eso nos calientan. Los humanos experimentamos las ondas EM de manera diferente, dependiendo de las longitudes de onda de éstas: nuestros ojos detectan longitudes de onda entre aproximadamente 4×10^{-7} m y 7.5×10^{-7} m (luz visible), mientras que nuestra piel detecta longitudes de onda más largas (IR). Por otra parte, no detectamos directamente muchas longitudes de onda EM.

EJERCICIO B Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 812, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizás la respondió de manera diferente la primera vez.

⚠ **CUIDADO**
Las ondas sonoras y las EM son diferentes

La luz y otras ondas electromagnéticas viajan con una rapidez de 3×10^8 m/s. Compare esto con el sonido, que viaja (véase el capítulo 16) con una rapidez aproximada de 300 m/s en el aire, un millón de veces más lento; o con la rapidez típica de un automóvil en la autopista, de 30 m/s (100 km/h), 10 millones de veces más lento que la luz. Las ondas EM difieren de las ondas sonoras en otra gran forma: las ondas sonoras viajan en un medio como el aire, e implican el movimiento de las moléculas del aire; las ondas EM no implican material alguno, sólo campos, y pueden viajar en el espacio vacío.

EJEMPLO 31–3 **Longitud de onda de las ondas EM.** Calcule la longitud de onda *a*) de una onda EM de 60 Hz, *b*) de una onda de radio FM de 93.9 MHz y *c*) de un haz de luz visible roja proveniente de un láser a una frecuencia de 4.74×10^{14} Hz.

PLANTEAMIENTO Todas estas ondas son electromagnéticas, así que su rapidez es $c = 3.00 \times 10^8$ m/s. Se despeja λ en la ecuación 31-14: $\lambda = c/f$.

SOLUCIÓN *a*) $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{60 \text{ s}^{-1}} = 5.0 \times 10^6 \text{ m},$

o 5000 km. 60 Hz es la frecuencia de la corriente ca en Estados Unidos y, como se ve aquí, una longitud de onda se extiende a través de todo el territorio continental de EUA.

b) $\lambda = \dfrac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{93.3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}} = 3.22 \text{ m}.$

La longitud de una antena de FM es de alrededor de la mitad de esto $\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$ o $1\frac{1}{2}$ m.

c) $\lambda = \dfrac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{4.74 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6.33 \times 10^{-7} \text{ m} \ (= 633 \text{ nm}).$

EJERCICIO C ¿Cuáles son las frecuencias de *a*) una onda de radio de 80 m de longitud de onda y *b*) un rayo X de 5.5×10^{-11} m de longitud de onda?

EJEMPLO 31–4 **ESTIMACIÓN** **Antena de teléfono celular.** La antena de un teléfono celular a menudo tiene $\frac{1}{4}$ de longitud de onda de largo. Un teléfono celular particular tiene como antena una varilla recta de 8.5 cm de largo. Estime la frecuencia de operación de este teléfono.

PLANTEAMIENTO La ecuación básica que relaciona rapidez de onda, longitud de onda y frecuencia es $c = \lambda f$; la longitud de onda λ es igual a cuatro veces la longitud de la antena.

SOLUCIÓN La antena mide $\frac{1}{4}\lambda$ de largo, así que $\lambda = 4(8.5 \text{ cm}) = 34 \text{ cm} = 0.34$ m. Entonces,

$f = c/\lambda = (3.0 \times 10^8 \text{ m/s})/(0.34 \text{ m}) = 8.8 \times 10^8 \text{ Hz} = 880 \text{ MHz}.$

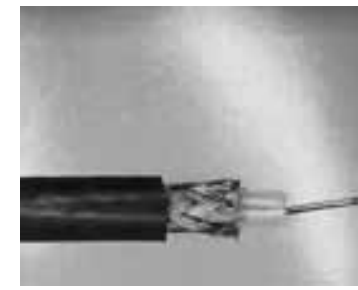
NOTA Las antenas de radio no siempre son conductores rectos. El conductor puede ser una espira circular para ahorrar espacio. Véase la figura 31-21b.

EJERCICIO D ¿De qué longitud debe ser una antena de $\frac{1}{4}\lambda$ para el radio de una aeronave que opera a 165 MHz?

Las ondas electromagnéticas pueden viajar a lo largo de líneas de transmisión así como en el espacio vacío. Cuando una fuente de fem se conecta a una línea de transmisión, ya sean dos alambres paralelos o un cable coaxial (figura 31-13), el campo eléctrico dentro del alambre no se establece de inmediato en todos los puntos a lo largo de los alambres. Esto se basa en el mismo argumento que se usó en la sección 31-4 en relación con la figura 31-7. De hecho, es posible demostrar que, si los alambres están separados por espacio vacío o aire, la señal eléctrica viaja a lo largo de los alambres con la rapidez $c = 3.0 \times 10^8$ m/s. Por ejemplo, cuando se activa un interruptor de luz, en realidad la luz sale una pequeña fracción de segundo más tarde. Si los alambres están en un medio cuya permitividad eléctrica es ϵ y la permeabilidad magnética es μ (secciones 24-5 y 28-9, respectivamente), la rapidez no está dada por la ecuación 31-12, sino por

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

FIGURA 31–13 Cable coaxial.



EJEMPLO 31–5 ESTIMACIÓN Demora en la señal de una llamada telefónica. Usted realiza una llamada telefónica de Nueva York a un amigo en Londres. Estime cuánto tardará la señal eléctrica generada por su voz en llegar a Londres, suponiendo que la señal *a*) se transporta en un cable telefónico bajo el Océano Atlántico y *b*) se envía mediante un satélite a 36,000 km sobre el océano. ¿Esto causará una demora apreciable en cualquier caso?

PLANTEAMIENTO La señal viaja por un alambre de teléfono o en el aire vía satélite. En cualquier caso, es una onda electromagnética. La electrónica, así como el alambre o el cable, frenan las cosas, pero como estimación se considera que la rapidez es $c = 3.0 \times 10^8$ m/s.

SOLUCIÓN La distancia de Nueva York a Londres es de aproximadamente de 5000 km.
a) La demora de tiempo vía el cable es $t = d/c \approx (5 \times 10^6\,\text{m})/(3.0 \times 10^8\,\text{m/s}) = 0.017\,\text{s}$.
b) Mediante el satélite, el tiempo sería más largo porque los satélites de comunicación, que por lo general son geosincrónicos (ejemplo 6-6), siguen a la Tierra a una altura de 36,000 km. La señal tendría que subir al satélite y bajar de nuevo, lo que implica un recorrido de 72,000 km. La distancia real que viajaría la señal sería un poco más que esto, pues la señal subiría y bajaría en diagonal. Por lo tanto, $t = d/c \approx 7.2 \times 10^7\,\text{m}/(3 \times 10^8\,\text{m/s}) = 0.24\,\text{s}$.

NOTA Cuando la señal viaja a través del cable submarino, sólo hay un indicio de una demora y las conversaciones son bastante normales. Cuando la señal se transmite vía satélite, la demora *es* apreciable. El lapso que transcurre entre que usted termina una frase y su amigo lo escucha y responde, y luego usted escucha la respuesta, es de aproximadamente medio segundo más allá del tiempo normal en una conversación. Esto es suficiente para notarse, y usted tiene que ajustarse a ello para no comenzar a hablar mientras la respuesta de su amigo está en camino hacia usted.

EJERCICIO E Si usted está al teléfono vía satélite con alguien a sólo 100 km de distancia, ¿percibirá el mismo efecto?

EJERCICIO F Si su voz viajara como una onda sonora, ¿cuánto tardaría en ir de Nueva York a Londres?

31–7 Medición de la rapidez de la luz

Galileo intentó medir la rapidez de la luz al tratar de medir el tiempo requerido para que la luz recorriera una distancia conocida entre dos colinas. Colocó a uno de sus asistentes en una colina y él mismo se ubicó en otra, y ordenó a su asistente levantar la tapa de una lámpara en el instante en el que viera un destello de la lámpara de Galileo. Galileo midió el tiempo entre el destello de su lámpara y el momento en que recibió la luz de la lámpara de su asistente. El tiempo fue tan corto que Galileo concluyó que simplemente representaba el tiempo de reacción humano, y que la rapidez de la luz debía ser extremadamente elevada.

La primera determinación exitosa de que la rapidez de la luz es finita la realizó el astrónomo danés Ole Roemer (1644-1710). Roemer notó que la medición cuidadosa del periodo orbital de Io, una luna de Júpiter con un periodo promedio de 42.5 h, variaba ligeramente dependiendo de la posición relativa de la Tierra y Júpiter. Él atribuyó esta variación en el periodo aparente al cambio en la distancia entre la Tierra y Júpiter durante uno de los periodos de Io, y el tiempo que tardaba la luz en recorrer la distancia adicional. Roemer concluyó que la rapidez de la luz, aunque grande, es finita.

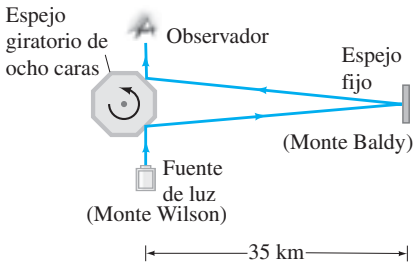


FIGURA 31–14 Aparato de Michelson para medir la rapidez de la luz (no está a escala).

Desde entonces se han usado varias técnicas para medir la rapidez de la luz. Entre las más importantes se encuentra la que ideó el estadounidense Albert A. Michelson (1852-1931). Michelson utilizó el aparato de espejos giratorios, cuyo diagrama se presenta en la figura 31-14, para una serie de experimentos de alta precisión que se llevaron a cabo entre 1880 y la década de 1920. La luz proveniente de una fuente incidiría sobre una cara de un espejo giratorio de ocho caras. La luz reflejada viajaba hacia un espejo fijo a una gran distancia y regresaba de nuevo como se muestra. Si el espejo giratorio daba vueltas justo con la rapidez correcta, el haz luminoso de regreso se reflejaría en uno de los ocho espejos hacia un pequeño telescopio a través del cual miraba el observador. Si la rapidez de rotación sólo fuera ligeramente diferente, el haz se desviaría hacia un lado y el observador no lo vería. A partir de la rapidez requerida por el espejo giratorio y la distancia conocida al espejo fijo, se podría calcular la rapidez de la luz. En la década de 1920 Michelson estableció el espejo giratorio en la cima del monte Wilson, en el sur de California, y el espejo fijo en el monte Baldy (monte San Antonio), a 35 km de distancia. Más tarde midió la rapidez de la luz en el vacío con un largo tubo al vacío.

En la actualidad se considera que la rapidez de la luz, c, en el vacío es

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s},$$

y se define como este valor. Esto significa que el estándar para longitud, el metro, ya no se define por separado. En vez de ello, como se mencionó en la sección 1-4, el metro ahora se define formalmente como la distancia que la luz recorre en el vacío en 1/299,792,450 de segundo. Generalmente, c se redondea a

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

cuando no se requieren resultados extremadamente precisos. En el aire, la rapidez sólo es ligeramente menor.

31–8 Energía en ondas EM; el vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas conducen energía de una región del espacio a otra. Esta energía se asocia con los campos eléctricos y magnéticos en movimiento. En la sección 24-4 se vio que la densidad de energía u_E = (J/m^3) almacenada en un campo eléctrico E es $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ (ecuación 24-6). La densidad de energía almacenada en un campo magnético B, como se analizó en la sección 30-3, está dada por $u_B = \frac{1}{2}B^2/\mu_0$ (ecuación 30-7). En consecuencia, la energía total almacenada por unidad de volumen en una región del espacio donde exista una onda electromagnética es

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}. \qquad \textbf{(31–15)}$$

En esta ecuación, E y B representan las intensidades de los campos eléctrico y magnético de la onda en cualquier instante en una pequeña región del espacio. Podemos escribir la ecuación 31-15 en términos del campo E solo, con las ecuaciones 31-11 ($B = E/c$) y 31-12 $\left(c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\right)$ para obtener

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\mu_0 E^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2. \qquad \textbf{(31–16a)}$$

Advierta aquí que la densidad de energía asociada con el campo B es igual a la debida al campo E, y cada uno aporta la mitad de la energía total. La densidad de energía también se puede expresar sólo en términos del campo B:

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 c^2 B^2 = \frac{B^2}{\mu_0}, \qquad \textbf{(31–16b)}$$

o en un término que contenga tanto a E como a B

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 EcB = \frac{\epsilon_0 EB}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,EB. \qquad \textbf{(31–16c)}$$

Las ecuaciones 31-16 dan la densidad de energía en cualquier región del espacio en cualquier instante.

Ahora se determinará la energía que transporta la onda por unidad de tiempo por unidad de área. Esta energía está dada por un vector $\vec{\mathbf{S}}$, que se llama **vector de Poynting**.[†] Las unidades de $\vec{\mathbf{S}}$ son W/m^2. La dirección de $\vec{\mathbf{S}}$ es la dirección en la que se transporta la energía, que es la dirección en la que se desplaza la onda. Imagine que la onda

[†]En honor de H. Poynting (1852-1914).

pasa a través de una área A perpendicular al eje x, como se muestra en la figura 31-15. En un tiempo corto dt, la onda se desplaza hacia la derecha una distancia $dx = c\,dt$, donde c es la rapidez de la onda. La energía que pasa a través de A en el tiempo dt es la energía que ocupa el volumen $dV = A\,dx = Ac\,dt$. La densidad de energía u es $u = \epsilon_0 E^2$, donde E es el campo eléctrico en este volumen en el instante dado. De manera que la energía total dU contenida en este volumen dV es la densidad de energía u por el volumen: $dU = u\,dV = (\epsilon_0 E^2)(Ac\,dt)$. Por lo tanto, la energía que cruza el área A por el tiempo dt es

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 cE^2. \qquad \textbf{(31–17)}$$

Puesto que $E = cB$ y $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, esto también se puede escribir como:

$$S = \epsilon_0 cE^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}.$$

La dirección de $\vec{\mathbf{S}}$ es a lo largo de $\vec{\mathbf{v}}$, perpendicular a $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, de manera que el vector de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$ se expresa como

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}). \qquad \textbf{(31–18)}$$

La ecuación 31-17 o la 31-18 dan la energía transportada por unidad de área por unidad de tiempo en cualquier *instante*. A menudo se desea conocer el *promedio* en un periodo prolongado de tiempo, pues las frecuencias por lo general son tan altas que no se detecta la rápida variación temporal. Si E y B son sinusoidales, entonces $\overline{E^2} = E_0^2/2$, tal como para corrientes eléctricas y voltajes (sección 25-7), donde E_0 es el valor *máximo* de E. En consecuencia, para la magnitud del vector de Poynting, en promedio, se puede escribir

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\epsilon_0 cE_0^2 = \frac{1}{2}\frac{c}{\mu_0}B_0^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}, \qquad \textbf{(31–19a)}$$

donde B_0 es el valor máximo de B. Este valor promediado en el tiempo de $\vec{\mathbf{S}}$ es la **intensidad**, que se define como la potencia promedio transferida a través del área unitaria (sección 15-3). También se puede calcular el valor promedio de S:

$$\overline{S} = \frac{E_{\text{rms}} B_{\text{rms}}}{\mu_0} \qquad \textbf{(31–19b)}$$

donde E_{rms} y B_{rms} son los valores rms $(E_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{E^2}}, B_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{B^2}})$.

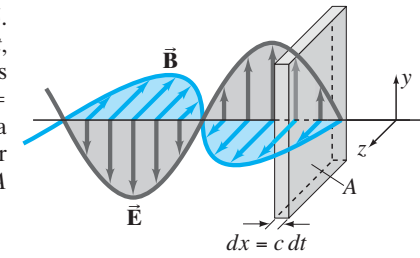


FIGURA 31–15 Onda electromagnética que transporta energía a través del área A.

EJEMPLO 31–6 ***E* y *B* provenientes del Sol.** La radiación proveniente del Sol llega a la Tierra (en la parte alta de la atmósfera) a una razón aproximada a 1350 J/s·m^2 (= 1350 W/m^2). Suponga que ésta es una sola onda EM y calcule los valores máximos de E y B.

PLANTEAMIENTO En la ecuación 31-19a $(\overline{S} = \frac{1}{2}\epsilon_0 cE_0^2)$ despeje E_0 en términos de $\overline{S}$ con $\overline{S} = 1350\ \text{J/s}\cdot\text{m}^2$.

SOLUCIÓN

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\overline{S}}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(1350\ \text{J/s}\cdot\text{m}^2)}{(8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.00\times10^8\ \text{m/s})}}$$

$$= 1.01\times10^3\ \text{V/m}.$$

De acuerdo con la ecuación 31-11, $B = E/c$, de manera que

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1.01\times10^3\ \text{V/m}}{3.00\times10^8\ \text{m/s}} = 3.37\times10^{-6}\ \text{T}.$$

NOTA Aunque B tiene un valor numérico pequeño en comparación con E (debido a la forma en que se definen las diferentes unidades de E y B), B aporta a la onda la misma energía que E, como se vio anteriormente (ecuaciones 31-15 y 16).

31–9 Presión de radiación

Si las ondas electromagnéticas conducen energía, entonces se puede esperar que también transporten cantidad de movimiento lineal. Cuando una onda electromagnética encuentra la superficie de un objeto, sobre la superficie se ejercerá una fuerza como resultado de la transferencia de cantidad de movimiento ($F = dp/dt$), tal como cuando un objeto en movimiento golpea una superficie. La fuerza por unidad de área que ejercen las ondas se denomina **presión de radiación** y fue Maxwell quien predijo su existencia. Él demostró que si un objeto absorbe por completo un haz de radiación EM (luz, por ejemplo), entonces la cantidad de movimiento transferida es

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \qquad \begin{bmatrix}\text{radiación}\\ \text{completamente}\\ \text{absorbida}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(31–20a)}$$

donde ΔU es la energía absorbida por el objeto en un tiempo Δt y c es la rapidez de la luz.[†] Si, en vez de ello, la radiación se refleja por completo (suponga que el objeto es un espejo), entonces la cantidad de movimiento transferida es el doble, tal como cuando una pelota rebota elásticamente sobre una superficie:

$$\Delta p = \frac{2\,\Delta U}{c}. \qquad \begin{bmatrix}\text{radiación}\\ \text{completamente}\\ \text{reflejada}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(31–20b)}$$

Si una superficie absorbe parte de la energía y refleja otra parte, entonces $\Delta p = a\,\Delta U/c$, donde a es un factor entre 1 y 2.

Al usar la segunda ley de Newton se pueden calcular la fuerza y la presión ejercidas por la radiación sobre un objeto. La fuerza F está dada por

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

La tasa promedio a la que se entrega energía al objeto se relaciona con el vector de Poynting mediante

$$\frac{dU}{dt} = \overline{S}A,$$

donde A es el área transversal del objeto que intercepta la radiación. La presión de radiación P (suponiendo absorción completa) está dada por (véase la ecuación 31-20a)

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{Ac}\frac{dU}{dt} = \frac{\overline{S}}{c}. \qquad \begin{bmatrix}\text{completamente}\\ \text{absorbida}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(31–21a)}$$

Si la luz se refleja por completo, la presión es el doble (ecuación 31-20b):

$$P = \frac{2\overline{S}}{c}. \qquad \begin{bmatrix}\text{completamente}\\ \text{reflejada}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(31–21b)}$$

EJEMPLO 31–7 ESTIMACIÓN **Presión solar.** La radiación proveniente del Sol que llega a la superficie de la Tierra (luego de pasar a través de la atmósfera) transporta energía a una razón aproximada de 1000 W/m^2. Estime la presión y la fuerza ejercidas por el Sol sobre su mano estirada.

PLANTEAMIENTO La radiación se refleja parcialmente y se absorbe parcialmente, así que simplemente estime $P = \overline{S}/c$.

SOLUCIÓN $$P \approx \frac{\overline{S}}{c} = \frac{1000\ \text{W/m}^2}{3\times10^8\ \text{m/s}} \approx 3\times10^{-6}\ \text{N/m}^2.$$

Una estimación del área de su mano estirada puede ser de alrededor de 10 cm por 20 cm, de manera que $A = 0.02\ \text{m}^2$. De esta forma, la fuerza es

$$F = PA \approx (3\times10^{-6}\ \text{N/m}^2)(0.02\ \text{m}^2) \approx 6\times10^{-8}\ \text{N}.$$

NOTA Estos números son pequeños. Para comparar, la fuerza de gravedad sobre su mano es quizás de media libra, o con $m = 0.2\ \text{kg}$, $mg \approx (0.2\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) \approx 2\ \text{N}$. La presión de radiación sobre su mano es imperceptible comparada con la gravedad.

[†]De manera muy aproximada, si pensamos en la luz como partículas (como de hecho lo hacemos; véase el capítulo 37), la fuerza que necesitaría para llevar a tal partícula en movimiento con rapidez c al "reposo" (es decir, absorción) es $F = \Delta p/\Delta t$. Pero F también se relaciona con la energía mediante la ecuación 8-7, $F = \Delta U/\Delta x$, de manera que $\Delta p = F\,\Delta t = \Delta U/(\Delta x/\Delta t) = \Delta U/c$ donde se identifica $(\Delta x)(\Delta t)$ con la rapidez de la luz c.

EJEMPLO 31–8 **ESTIMACIÓN** **Una vela solar.** Se ha propuesto usar la presión de radiación del Sol para ayudar a impulsar naves espaciales alrededor del Sistema Solar. *a*) ¿Aproximadamente cuánta fuerza se aplicaría sobre una vela enormemente reflectante de 1 km × 1 km y *b*) cuánto aumentaría esto la rapidez de una nave de 5000 kg en un año? *c*) Si la nave parte del reposo, ¿aproximadamente cuánto recorrería en un año?

PLANTEAMIENTO La presión P es fuerza por unidad de área, de manera que $F = PA$. Tome la estimación del ejemplo 31-7 y duplíquela para una superficie reflectante $P = 2\bar{S}/c$. Encuentre la aceleración a partir de la segunda ley de Newton y suponga que es constante, y luego determine la rapidez a partir de $v = v_0 + at$. La distancia recorrida está dada por $x = \frac{1}{2}at^2$.

SOLUCIÓN *a*) Al duplicar el resultado del ejemplo 31-7, la presión solar es $2\bar{S}/c = 6 \times 10^{-6}\,\text{N/m}^2$. Entonces la fuerza es $F \approx PA = (6 \times 10^{-6}\,\text{N/m}^2)(10^6\,\text{m}^2) \approx 6\,\text{N}$. *b*) La aceleración es $a \approx F/m \approx (6\,\text{N})/(5000\,\text{kg}) \approx 1.2 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2$. El aumento de rapidez es La aceleración es $- v_0 = at = (1.2 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2)(365\ \text{días})(24\ \text{h/día})(3\,600$ s/h) ≈ 4 × 104 m/s (≈ ¡150,000 km/h!). *c*) Si se parte del reposo, esta aceleración daría por resultado una distancia de aproximadamente $\frac{1}{2}at^2 \approx 6 \times 10^{11}$ m en un año, casi cuatro veces la distancia entre el Sol y la Tierra. El punto de partida debe estar lejos de la Tierra, de manera que la fuerza gravitacional de la Tierra sea pequeña comparada con 6 N.

NOTA Una vela grande, que imparte una fuerza pequeña durante largo tiempo, puede dar por resultado un movimiento considerable.

FÍSICA APLICADA
Pinzas ópticas

Aunque los efectos de la presión de radiación no se sienten directamente, el fenómeno es bastante notable cuando se aplica a átomos irradiados por un rayo láser finamente enfocado. Un átomo tiene una masa del orden de 10^{-27} kg, y un rayo láser puede entregar energía a una razón de 1000 W/m^2. Ésta es la misma intensidad que se consideró en el ejemplo 31-7, pero aquí una presión de radiación de 10^{-6} N/m^2 sería muy significativa sobre una molécula cuya masa está entre 10^{-23} y 10^{-26} kg. Es posible mover átomos y moléculas al dirigirlas con un rayo láser, en un dispositivo llamado "pinzas ópticas". Las pinzas ópticas tienen algunas aplicaciones sobresalientes. Son de gran interés para los biólogos, en especial porque las pinzas ópticas permiten manipular microorganismos vivos y componentes de una célula sin dañarlos. Se han usado pinzas ópticas para medir las propiedades elásticas del ADN al tirar de cada extremo de la molécula con tales "pinzas" láser.

31–10 Radio y televisión: comunicación inalámbrica

FÍSICA APLICADA
Transmisión inalámbrica

Las ondas electromagnéticas ofrecen la posibilidad de transmitir información a través de largas distancias. Uno de los primeros en darse cuenta de esto y ponerlo en práctica fue Guglielmo Marconi (1874-1937), quien, en la década de 1890, inventó la radio y desarrolló la comunicación inalámbrica. Gracias a ello es posible enviar mensajes a la rapidez de la luz sin utilizar alambres. Las primeras señales fueron simplemente pulsos largos y cortos que se podían traducir en palabras mediante un código, como los "puntos" y "rayas" del código Morse: eran inalámbricos digitales, créalo o no. En 1895 Marconi envió señales inalámbricas a un kilómetro o dos en Italia. Hacia 1901, envió señales de prueba a 3000 km a través del océano, desde Newfoundland, Canadá, hasta Cornwall, Inglaterra. En 1903 envió el primer mensaje comercial práctico desde Cabo Cod, Massachusetts, hasta Inglaterra: el *Times* de Londres imprimió las noticias que le envió su corresponsal en Nueva York. 1903 también fue el año del primer vuelo en aeroplano de motor realizado por los hermanos Wright. Los hitos de la era moderna, la comunicación inalámbrica y la aviación, datan del mismo año. El mundo moderno de la comunicación inalámbrica, incluidos la radio, la televisión, los teléfonos inalámbricos, los teléfonos celulares, la tecnología Bluetooth y wi-fi, así como la comunicación satelital, son simples aplicaciones modernas del trabajo pionero de Marconi.

La década siguiente presenció el desarrollo de los tubos al vacío. A partir de estos trabajos primigenios nacieron la radio y la televisión. Ahora se discutirá brevemente **1.** cómo se transmiten las señales de radio y televisión, y **2.** cómo se reciben en el hogar.

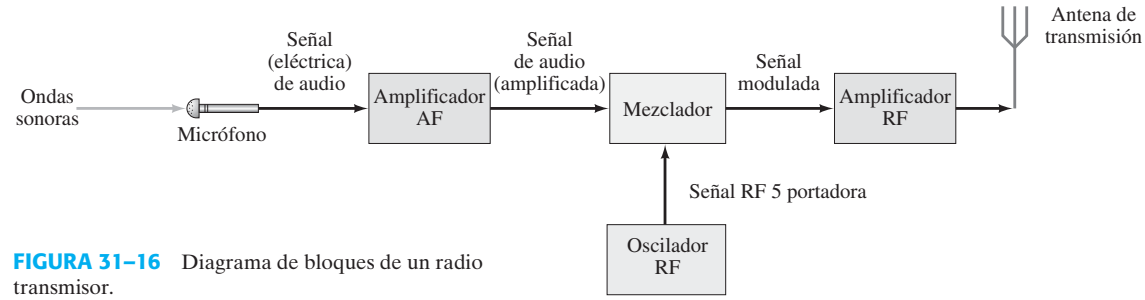


FIGURA 31–16 Diagrama de bloques de un radio transmisor.

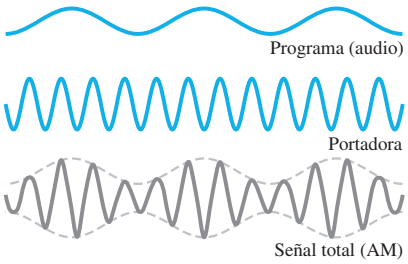
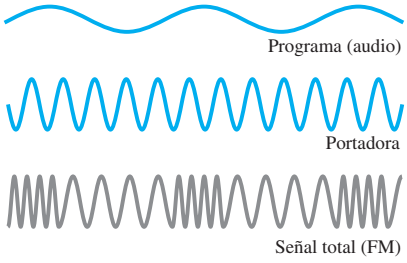


FIGURA 31–17 En amplitud modulada (AM), la amplitud de la señal portadora varía en proporción a la amplitud de la señal de audio.

FÍSICA APLICADA
AM y FM

FIGURA 31–18 En frecuencia modulada (FM), la frecuencia de la señal portadora se hace variar en proporción con la amplitud de la señal de audio. Este método lo usan la radio FM y la televisión.



FÍSICA APLICADA
Receptores de radio y TV

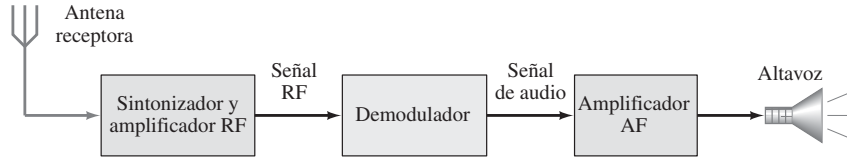
El proceso mediante el cual una estación de radio transmite información (palabras y música) se resume en la figura 31-16. La señal de audio (sonido) cambia a señal eléctrica de las mismas frecuencias mediante un micrófono o una cabeza magnética para lectura y escritura. Esta señal eléctrica se llama señal de audiofrecuencia (AF), pues las frecuencias están en el rango de audio (de 20 a 20,000 Hz). La señal se amplifica electrónicamente y luego se mezcla con una señal de radiofrecuencia (RF) llamada **frecuencia portadora**, que representa a esa estación. Las estaciones de radio AM tienen frecuencias portadoras de aproximadamente 530 kHz hasta 1700 kHz. Por ejemplo, 710 en la banda de radio significa una estación cuya frecuencia portadora es de 710 kHz. Las estaciones de radio FM tienen frecuencias portadoras mucho más altas, entre 88 y 108 MHz. Las frecuencias portadoras para la transmisión de estaciones de TV en Estados Unidos se encuentran entre 54 y 88 MHz, entre 174 y 216 MHz, y entre 470 y 890 MHz.

La mezcla de las frecuencias de audio y de la onda portadora se realiza de dos formas. En **amplitud modulada** (AM), la amplitud de la onda portadora de alta frecuencia se varía en proporción a la amplitud de la señal de audio, como se muestra en la figura 31-17. Se llama "amplitud modulada" porque la *amplitud* de la onda portadora se altera ("modular" significa variar o alterar). En **frecuencia modulada** (FM), la *frecuencia* de la onda portadora se modifica en proporción con la amplitud de la señal de audio, como se muestra en la figura 31-18. La señal mezclada se amplifica aún más y se envía a la antena transmisora, donde la mezcla compleja de frecuencias se envía en la forma de ondas EM. En la comunicación digital, la señal se pone en una forma digital (sección 29-8) que modula la onda portadora.

Un transmisor de televisión funciona de forma similar, utilizando FM para audio y AM para video; ambas señales, audio y video (véase la sección 23-9), se mezclan con las frecuencias portadoras.

Ahora se observará el otro lado del proceso, la recepción en casa de programas de radio y TV. En la figura 31-19 se presenta el diagrama de un receptor de radio simple. Las ondas EM enviadas por todas las estaciones se reciben en la antena. Las señales que detecta la antena y envía al receptor son muy pequeñas y contienen frecuencias provenientes de muchas estaciones diferentes. El receptor selecciona una frecuencia RF particular (en realidad, un estrecho intervalo de frecuencias) que corresponde a una estación particular, mediante un circuito *LC* resonante (secciones 30-6 y 30-9). En la figura 31-20 se ilustra una forma simple de sintonizar una estación. Una estación particular se "sintoniza" al ajustar *C* y/o *L*, de manera que la frecuencia de resonancia del circuito iguale a la frecuencia portadora de la estación. La señal, que contiene frecuencias tanto de audio como de la onda portadora, pasa a continuación al *demodula-*

FIGURA 31–19 Diagrama de bloques de un receptor de radio simple.



dor o *detector* (figura 31-19), donde ocurre la "desmodulación"; esto es, la frecuencia portadora RF se separa de la señal de audio. La señal de audio se amplifica y se envía a un altavoz o audífonos.

Los receptores modernos tienen más etapas que las que se muestran. Se usan varios medios para aumentar la sensibilidad y la selectividad (es decir, la capacidad para detectar señales débiles y distinguirlas de otras estaciones), y para minimizar la distorsión de la señal original.†

Un receptor de televisión hace cosas similares tanto a las señales de audio como a las de video. La señal de audio pasa finalmente al altavoz, y la señal de video al monitor, que puede ser un *tubo de rayos catódicos* (TRC o CRT) o una pantalla LCD (secciones 23-9 y 35-12).

Un tipo de antena consiste en una o más varillas conductoras; el campo eléctrico en las ondas EM ejerce una fuerza sobre los electrones en el conductor, lo que los hace moverse de ida y vuelta a las frecuencias de las ondas (figura 31-21a). Un segundo tipo de antena consiste en una bobina tubular de alambre que detecta el campo magnético de la onda: el campo B variable induce una fem en la bobina (figura 31-21b).

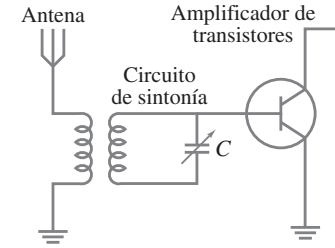


FIGURA 31–20 Sintonización simple de una estación de radio.

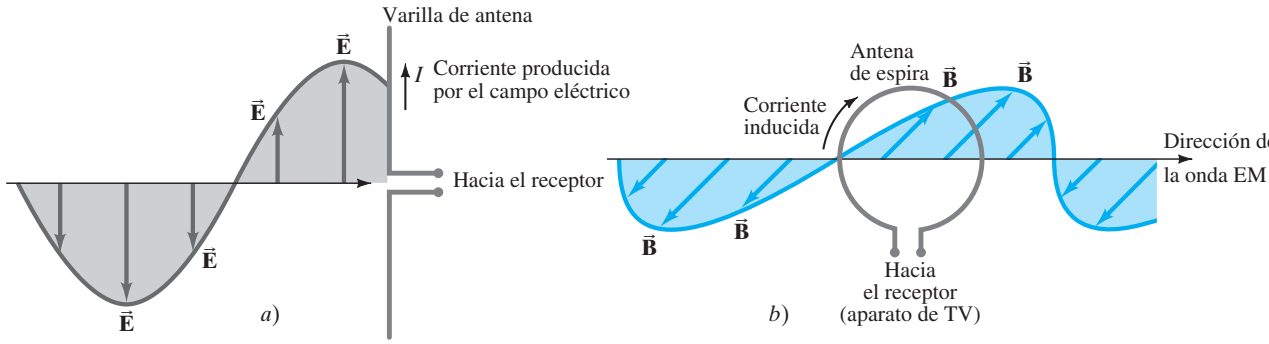


FIGURA 31–21 Antenas. *a*) El campo eléctrico de una onda EM produce una corriente en una antena que consiste en alambre recto o varillas. *b*) El campo magnético variable induce una fem y corriente en una antena de espira.

Un plato satelital (figura 31-22) consiste en un reflector parabólico que enfoca las ondas EM en un "cuerno", similar a un telescopio de espejo cóncavo (figura 33-38).

FIGURA 31–22 Una antena satelital.

EJEMPLO 31–9 Sintonizar una estación. Calcule la longitud de onda de transmisión de una estación de radio FM que transmite a 100 MHz.

PLANTEAMIENTO La radio se transmite como una onda EM, de manera que la rapidez es $c = 3.0 \times 10^8$ m/s. La longitud de onda se encuentra a partir de la ecuación 31-14, $\lambda = c/f$.

SOLUCIÓN La frecuencia portadora es $f = 100\text{ MHz} = 1.0 \times 10^8\text{ s}^{-1}$, de manera que

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{(3.0 \times 10^8\text{ m/s})}{(1.0 \times 10^8\text{ s}^{-1})} = 3.0\text{ m}.$$

NOTA Las longitudes de onda de otras señales FM (de 88 MHz a 108 MHz) están cerca de la longitud de onda de 3.0 m de esta estación. Las antenas de FM por lo general miden 1.5 m de largo, o aproximadamente media longitud de onda. Esta longitud se elige de manera que la antena reaccione de forma resonante y, por ende, es más sensible a frecuencias FM. Las antenas de radio AM tendrían que ser mucho más largas, ya sea $\frac{1}{2}\lambda$ o $\frac{1}{4}\lambda$.

†Para la *transmisión de FM estéreo*, la onda portadora transporta dos señales. Una señal contiene frecuencias de hasta aproximadamente 15 kHz, que incluyen la mayoría de las frecuencias de audio. La otra señal incluye el mismo rango de frecuencias, pero a ella se suman 19 kHz. Un receptor estéreo resta esta señal de 19,000 Hz y distribuye las dos señales a los canales izquierdo y derecho. La primera señal consiste en la suma de los canales izquierdo y derecho (I + D), de manera que los radios monoaurales detectan todo el sonido. La segunda señal es la diferencia entre izquierdo y derecho (I – D). En consecuencia, el receptor debe sumar y restar las dos señales para obtener señales puras izquierda y derecha para cada canal.

Otras comunicaciones mediante onda EM

FÍSICA APLICADA
Teléfonos celulares, radiocontrol, control remoto, TV por cable, TV y radio satelitales

Las diversas regiones del espectro de onda de radio las asignan las agencias gubernamentales para varios propósitos. Además de las mencionadas anteriormente, existen "bandas" asignadas para uso de barcos, aviones, la policía, el ejército, los aficionados, los satélites y las comunicaciones espaciales, así como los radares. Los teléfonos celulares, por ejemplo, son completos transmisores y receptores de radio que, en EU, funcionan en dos bandas diferentes: 800 MHz y 1900 MHz (= 1.9 GHz), mientras que en Europa y Asia las bandas de 900 MHz y 1800 MHz se usan en el estándar internacional denominado GSM (*Global System for Mobile Communication*, esto es, Sistema Global para Comunicación Móvil). Los juguetes de radiocontrol (carros, botes, animales robóticos, etcétera) pueden usar varias frecuencias, desde 27 hasta 75 MHz. La alimentación remota (sin llave) de los automóviles puede operar alrededor de 300 o 400 MHz.

Los canales de la TV por cable se transportan como ondas electromagnéticas a lo largo de un cable coaxial (véase la figura 31-13) en vez de transmitirse y recibirse a través del "aire". Los canales están en la misma parte del espectro EM, cientos de MHz, pero algunos están en frecuencias no disponibles para la transmisión de TV. La TV y la radio digitales satelitales se transportan en la porción de microondas del espectro (12 a 14 GHz y 2.3 GHz, respectivamente).

Resumen

James Clerk Maxwell sintetizó una elegante teoría en la que todos los fenómenos eléctricos y magnéticos se podían describir mediante cuatro ecuaciones, ahora llamadas **ecuaciones de Maxwell**. Éstas se basan en ideas anteriores, pero Maxwell agregó una más: que un campo eléctrico variable produce un campo magnético. Las ecuaciones de Maxwell son

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(31–5a)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad \textbf{(31–5b)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(31–5c)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad \textbf{(31–5d)}$$

Las primeras dos son las leyes de Gauss para la electricidad y el magnetismo; las otras dos son la ley de Faraday y la ley de Ampère (ampliada por Maxwell), respectivamente.

La teoría de Maxwell predijo que, al acelerar cargas eléctricas, se producirían **ondas electromagnéticas (EM)** transversales, y que esas ondas se propagarían a través del espacio con la rapidez de la luz c, dada por la

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}. \qquad \textbf{(31–12)}$$

La longitud de onda λ y la frecuencia f de las ondas EM se relacionan con su rapidez c mediante

$$c = \lambda f, \qquad \textbf{(31–14)}$$

tal como para las otras ondas.

Los campos eléctrico y magnético oscilatorios en una onda EM son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Las ondas EM son ondas de campos, no de materia, y se pueden propagar en el espacio vacío.

Después de que las ondas EM se detectaron experimentalmente a finales del siglo XIX, la idea de que la luz es una onda EM (aunque de frecuencia mucho más alta que la de las ondas detectadas de manera directa) se aceptó ampliamente. El **espectro electromagnético** incluye ondas EM de una amplia variedad de longitudes de onda, desde microondas y ondas de radio hasta luz visible y rayos X y rayos gamma, todas las cuales viajan a través del espacio con la rapidez $c = 3.0 \times 10^8$ m/s.

La energía transportada por las ondas EM se puede describir mediante el **vector de Poynting**

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad \textbf{(31–18)}$$

que da por resultado la razón de energía que se transporta a través del área unitaria por unidad de tiempo cuando los campos eléctrico y magnético en una onda EM en el espacio libre son $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

Las ondas EM portan cantidad de movimiento y ejercen una **presión de radiación** proporcional a la intensidad S de la onda.

Preguntas

1. Un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ apunta alejándose de usted, y su magnitud aumenta. ¿El campo magnético inducido estará en sentido horario o en sentido antihorario? ¿Y si $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia usted y disminuye?
2. ¿Cuál es la dirección de la corriente de desplazamiento en la figura 31-3? (*Nota:* El capacitor se descarga).
3. ¿Por qué el campo magnético de una corriente de desplazamiento en un capacitor es mucho más difícil de detectar que el campo magnético de una corriente de inducción?
4. ¿Existen buenas razones para llamar al término $\mu_0 \epsilon_0 \, d\Phi_E/dt$ en la ecuación 31-1 una "corriente"? Explique.
5. El campo eléctrico en una onda EM que viaja al norte oscila en el plano este-oeste. Describa la dirección del vector de campo magnético en esta onda.
6. ¿El sonido es una onda electromagnética? Si no lo es, ¿qué tipo de onda es?
7. ¿Las ondas EM pueden viajar a través de un vacío perfecto? ¿Pueden hacerlo las ondas sonoras?
8. Cuando enciende un interruptor de luz, ¿la luz se enciende de inmediato? Explique.
9. ¿Las longitudes de onda de las señales de radio y televisión son más largas o más cortas que las detectables por el ojo humano?

10. ¿Qué le dice la longitud de onda calculada en el ejemplo 31-2 acerca de la fase de una corriente ca de 60 Hz que comienza en una planta de electricidad, en comparación con su fase en una casa a 200 km de distancia?

11. Cuando usted conecta dos altavoces a la salida de un amplificador estéreo, ¿debe asegurarse de que los alambres guía tengan igual longitud, de manera que no exista una diferencia de tiempo entre las señales de los altavoces? Explique.

12. En el espectro electromagnético, ¿qué tipo de onda EM tendría una longitud de onda de 10^3 km; 1 km; 1 m; 1 cm; 1 mm; 1 μm?

13. ¿Las ondas de radio pueden tener las mismas frecuencias que las ondas sonoras (de 20 Hz a 20,000 Hz)?

14. Analice cómo los teléfonos inalámbricos usan las ondas EM. ¿Y qué hay de los teléfonos celulares?

15. ¿Dos estaciones de radio o TV puede transmitir en la misma frecuencia portadora? Explique.

16. Si un transmisor de radio tiene una antena vertical, ¿una antena del receptor (tipo varilla) debe ser vertical u horizontal para obtener mejor recepción?

17. Las frecuencias portadoras de las transmisiones de FM son mucho más altas que las de las transmisiones de AM. Sobre la base de lo que aprendió acerca de la difracción en el capítulo 15, explique por qué las señales AM se pueden detectar con mayor facilidad que las señales FM detrás de colinas o edificios bajos.

18. Una persona perdida puede hacer señales mediante el destello de una lámpara que enciende y apaga usando código Morse. En realidad, ésta es una onda EM modulada. ¿Es AM o FM? ¿Cuál es la frecuencia de la onda portadora, aproximadamente?

Problemas

31–1 producido por $\vec{B}$ variable $\vec{E}$

1. (I) Determine la razón a la que el campo eléctrico cambia entre las placas circulares de un capacitor, 6.0 cm de diámetro, si las placas están separadas 1.1 mm y el voltaje a través de ellos cambia a una razón de 120 V/s.

2. (I) Calcule la corriente de desplazamiento I_D entre las placas cuadradas, de 5.8 cm de lado, de un capacitor, si el campo eléctrico cambia a una razón de 2.0×10^6 V/m·s.

3. (II) En un instante dado, una corriente de 2.8 A fluye en los alambres conectados a un capacitor de placas paralelas. ¿Cuál es la razón a la que varía el campo eléctrico entre las placas, si las placas cuadradas tienen 1.60 cm por lado?

4. (II) Un capacitor de 1500 nF, con placas paralelas circulares de 2.0 cm de diámetro, acumula carga a una razón de 38.0 mC/s en cierto instante de tiempo. ¿Cuál será la magnitud del campo magnético inducido a 10.0 cm radialmente hacia fuera desde el centro de las placas? ¿Cuál será el valor de la intensidad del campo después de que el capacitor esté completamente descargado?

5. (II) Demuestre que la corriente de desplazamiento a través de un capacitor de placas paralelas se puede expresar como $I_D = C\,dV/dt$, donde V es el voltaje a través del capacitor en cualquier instante.

6. (II) Suponga que un capacitor con aire entre sus placas circulares de radio $R = 2.5$ cm y separación $d = 1.6$ mm. Una fem de 76.0 Hz, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$, se aplica al capacitor. La máxima corriente de desplazamiento es 35 μA. Determine *a*) la corriente de conducción máxima I, *b*) el valor de $\mathscr{E}_0$, *c*) el valor máximo de $d\Phi_E/dt$ entre las placas. Ignore los efectos de borde.

7. (III) Suponga que un capacitor de placas paralelas tiene radio $R_0 = 3.0$ cm y separación de placas $d = 5.0$ mm. Una diferencia de potencial sinusoidal $V = V_0 \operatorname{sen}(2\pi f t)$ se aplica a través de las placas, donde $V_0 = 150$ V y $f = 60$ Hz. *a*) En la región entre las placas, demuestre que la magnitud del campo magnético inducido está dado por $B = B_0(R)\cos(2\pi f t)$, donde R es la distancia radial desde el eje central del capacitor. *b*) Determine la expresión para la amplitud $B_0(R)$ de este campo dependiente del tiempo (sinusoidal) cuando $R \leq R_0$, y cuando $R > R_0$. *c*) Grafique $B_0(R)$ en unidades de teslas para el intervalo $0 \leq R \leq 10$ cm.

31–5 Ondas EM

8. (I) Si el campo eléctrico en una onda EM tiene una magnitud pico de 0.57×10^{-4} V/m, ¿cuál es la magnitud pico de la intensidad del campo magnético?

9. (I) Si el campo magnético en una onda EM viajera tiene una magnitud pico de 12.5 nT, ¿cuál es la magnitud pico del campo eléctrico?

10. (I) En una onda EM que viaja hacia el oeste, el campo B oscila verticalmente y tiene una frecuencia de 80.0 kHz y una intensidad rms de 7.75×10^{-9} T. Determine la frecuencia y la intensidad rms del campo eléctrico. ¿Cuál es su dirección?

11. (II) El campo eléctrico de una onda EM plana está dado por $E_x = E_0 \cos(kz + \omega t)$, $E_y = E_z = 0$. Determine *a*) la dirección de propagación y *b*) la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{B}}$.

12. (III) Considere dos posibles candidatos $E(x, t)$ como soluciones de la ecuación de onda para el campo eléctrico de una onda EM. Sean A y α constantes. Demuestre que *a*) $E(x, t) = Ae^{-\alpha(x-vt)^2}$ satisface la ecuación de onda y que *b*) $E(x, t) = Ae^{-(\alpha x^2 - vt)}$ no satisface la ecuación de onda.

31–6 Espectro electromagnético

13. (I) ¿Cuál es la frecuencia de una microonda cuya longitud de onda es de 1.50 cm?

14. (I) *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de una señal de radar de 25.75×10^9 Hz? *b*) ¿Cuál es la frecuencia de un rayo X con longitud de onda de 0.12 nm?

15. (I) ¿Cuánto tarda la luz en llegar del Sol a la Tierra, a 1.50×10^8 km de distancia?

16. (I) Una onda EM tiene una frecuencia de 8.56×10^{14} Hz. ¿Cuál es su longitud de onda y cómo se le clasificaría?

17. (I) Las ondas electromagnéticas y las ondas sonoras pueden tener la misma frecuencia. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de una onda electromagnética de 1.00 kHz? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de una onda sonora de 1.00 kHz? (La rapidez del sonido en el aire es 341 m/s.) *c*) ¿Puede usted escuchar una onda electromagnética de 1.00 kHz?

18. (II) Los láseres de pulsos que se usan en ciencia y medicina producen ráfagas muy breves de energía electromagnética. Si la longitud de onda de la luz láser es 1062 nm (láser neodimio-YAG), y el pulso dura 38 picosegundos, ¿cuántas longitudes de onda se encuentran dentro del pulso del láser? ¿Cuán breve necesitaría ser el pulso para contener sólo una longitud de onda?

19. (II) ¿Cuánto tardaría en llegar a Marte un mensaje enviado como ondas de radio desde la Tierra, *a*) cuando Marte está en su punto más cercano a la Tierra, *b*) cuando Marte está en su punto más lejano de la Tierra?

20. (II) Una onda electromagnética tiene un campo eléctrico dado por

$$\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}}(225\ \text{V/m})\operatorname{sen}\left[(0.077\ \text{m}^{-1})z - (2.3 \times 10^7\ \text{rad/s})t\right].$$

a) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de la onda? *b*) Escriba una expresión para el campo magnético.

31–7 Rapidez de la luz

21. (II) ¿Cuál es la rapidez angular mínima a la que tendría que girar el espejo de ocho caras de Michelson para reflejar la luz en el ojo de un observador mediante caras sucesivas del espejo (1/8 de revolución, figura 31-14)?

31–8 Energía en ondas EM; vector de Poynting

22. (I) El campo $\vec{\mathbf{E}}$ en una onda EM tiene un pico de 26.5 mV/m. ¿Cuál es la razón promedio a la que esta onda transporta energía a través de una unidad de área por unidad de tiempo?

23. (II) El campo magnético en una onda EM viajera tiene una intensidad rms de 22.5 nT. ¿Cuánto tarda en entregar 335 J de energía a 1.00 cm^2 de una pared con la que incide perpendicularmente?

24. (II) ¿Cuánta energía se transporta por hora a través de una área de 1.00 cm^2 mediante una onda EM cuyo campo E tiene una intensidad rms de 32.8 mV/m?

25. (II) Una onda EM, que se dispersa esféricamente, proviene de una fuente de 1500 W. A una distancia de 5.0 m, ¿cuál es la intensidad y cuál es el valor rms del campo eléctrico?

26. (II) Si la amplitud del campo B de una onda EM es 2.5×10^{-7} T, *a*) ¿cuál es la amplitud del campo E? *b*) ¿Cuál es la potencia promedio, por unidad de área, de la onda EM?

27. (II) ¿Cuál es la energía contenida en un volumen de 1.00 m^3 cerca de la superficie de la Tierra debida a energía radiante del Sol? Véase el ejemplo 31-6.

28. (II) Un láser de 15.8 mW emite un estrecho haz de 2.00 mm de diámetro. ¿Cuáles son los valores rms de E y B en el haz?

29. (II) Estime la salida de potencia promedio del Sol, si aproximadamente 1350 W/m^2 alcanzan la atmósfera superior de la Tierra.

30. (II) Un láser de pulsos de alta energía emite un pulso de 1.0 ns de largo y 1.8×10^{11} W de potencia promedio. El haz tiene 2.2×10^{-3} m de radio. Determine *a*) la energía entregada en cada pulso y *b*) el valor rms del campo eléctrico.

31. (II) ¿Cuán práctica es la potencia solar para varios dispositivos? Suponga que, en un día soleado, la luz solar tiene una intensidad de 1000 W/m^2 en la superficie de la Tierra y que, cuando un panel de celdas solares se ilumina por esa luz solar, puede convertir el 10% de la energía de la luz solar en potencia eléctrica. Para cada dispositivo dado a continuación, calcule el área A del panel solar necesario para activarlo. *a*) Una calculadora consume 50 mW. Encuentre A en cm^2. ¿A es suficientemente pequeña para que el panel solar se pueda montar directamente en la calculadora que activa? *b*) Una secadora de cabello consume 1500 W. Encuentre A en m^2. Si se supone que ningún otro dispositivo electrónico opera dentro de una casa al mismo tiempo, ¿A es suficientemente pequeña para que la secadora de cabello se pueda activar mediante un panel solar montado en el techo de la casa? *c*) Un automóvil requiere 20 hp para avanzar por la autopista con velocidad constante (este automóvil se desempeñaría de manera deficiente en situaciones que requieran aceleración). Encuentre A en m^2. ¿A es suficientemente pequeña de manera que este panel solar se pueda montar directamente sobre el automóvil y lo active en "tiempo real"?

32. (III) *a*) Demuestre que el vector de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$ apunta radialmente hacia dentro, hacia el centro de un capacitor de placas paralelas circulares, cuando se carga como en el ejemplo 31-1. *b*) Integre $\vec{\mathbf{S}}$ sobre la frontera cilíndrica de la brecha del capacitor para demostrar que la razón a la que entra energía al capacitor es igual a la razón a la que se almacena energía electrostática en el campo eléctrico del capacitor (sección 24-4). Ignore efectos de borde de $\vec{\mathbf{E}}$.

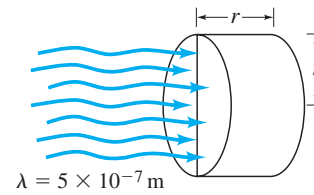
33. (III) El radiotelescopio de Arecibo, en Puerto Rico, es capaz de detectar una onda de radio con una intensidad tan baja como 1×10^{-23} W/m^2. Como un escenario de "caso excepcional" para comunicación con extraterrestres, considere lo siguiente: suponga que una civilización avanzada ubicada en el punto A, a una distancia x de la Tierra, de algún modo es capaz de aprovechar toda la salida de potencia de una estrella parecida al Sol, y convierte esa potencia por completo en una señal de onda de radio que se transmite de manera uniforme en todas direcciones desde A. *a*) Para que Arecibo detecte esta señal de radio, ¿cuál es el valor máximo para x, en años luz (1 año luz $\approx 10^{16}$ m)? *b*) ¿Cómo se compara este valor máximo con el tamaño de 100,000 años luz de la galaxia Vía Láctea? La intensidad de la luz solar a la distancia orbital de la Tierra desde el Sol es de 1350 W/m^2.

31–9 Presión de radiación

34. (II) Estime la presión de radiación debida a una bombilla eléctrica de 75 W a un distancia de 8.0 cm del centro de la bombilla. Estime la fuerza ejercida sobre la punta de su dedo si lo coloca en ese punto.

35. (II) La luz láser se puede enfocar (cuando mucho) en un punto con un radio r igual a su longitud de onda λ. Suponga que un haz de 1.0 W de luz láser verde ($\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m) se utiliza para formar tal punto y que una partícula cilíndrica de aproximadamente ese tamaño (radio y altura igual a r) se ilumina con el láser, como se ilustra en la figura 31-23. Estime la aceleración de la partícula, si su densidad es igual a la del agua y absorbe la radiación. [Este cálculo de orden de magnitud convenció a los investigadores de la factibilidad de las "pinzas ópticas", p. 829].

FIGURA 31–23
Problema 35.



36. (II) El poderoso láser utilizado en un espectáculo de luz láser produce un haz de luz verde de 3 mm de diámetro con una potencia de 3 W. Cuando un astronauta en una caminata espacial está afuera del transbordador espacial, su colega adentro del transbordador apunta juguetonamente tal rayo láser al traje espacial del astronauta. Las masas del astronauta con traje y del transbordador espacial son 120 kg y 103,000 kg, respectivamente. a) Suponiendo que el traje es perfectamente reflector, determine la fuerza debida a la "presión de radiación" que el rayo láser ejerce sobre el astronauta. b) Suponiendo que el astronauta está separado 20 m del centro de masa del transbordador, modele el transbordador como una esfera con la finalidad de estimar la fuerza de gravitación que ejerce sobre el astronauta. c) ¿Cuál de las dos fuerzas es mayor y en qué factor?

37. (II) ¿Qué tamaño debe tener el panel solar en un satélite en órbita alrededor de Júpiter para recolectar la misma cantidad de radiación del Sol que un panel solar de 1.0 m^2 en un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra?

31–10 Radio, TV, comunicación inalámbrica

38. (I) ¿Cuál es el rango de longitudes de onda para *a*) radio FM (de 88 MHz a 108 MHz) y *b*) radio AM (de 535 kHz a 1 700 kHz)?

39. (I) Estime la longitud de onda para la recepción de un teléfono celular de 1.9 GHz.

40. (I) El capacitor variable en el sintonizador de un radio AM tiene una capacitancia de 2200 pF cuando la radio se sintoniza en una estación a 550 kHz. ¿Cuál debe ser la capacitancia para una estación cerca del otro extremo del cuadrante, correspondiente a 1610 kHz?

41. (II) Cierto circuito sintonizador de radio FM tiene un capacitor fijo $C = 620$ pF. La sintonización se realiza mediante una inductancia variable. ¿Qué intervalo de valores debe tener la inductancia para sintonizar estaciones desde 88 MHz hasta 108 MHz?

42. (II) Un satélite emite un haz de radiación de microondas con una potencia de 12 kW hacia la superficie de la Tierra, a 550 km de distancia. Cuando el haz incide sobre la Tierra, su diámetro circular es de aproximadamente 1500 m. Encuentre la intensidad rms del campo eléctrico del haz en la superficie de la Tierra.

Problemas generales

43. Una antena FM de 1.60 m de largo se orienta paralela al campo eléctrico de una onda EM. ¿Qué dimensiones debe tener el campo eléctrico para producir un voltaje (rms) de 1.00 mV entre los extremos de la antena? ¿Cuál es la tasa de transporte de energía por metro cuadrado?

44. ¿Quién escuchará primero la voz de una cantante: una persona en el palco a 50.0 m de distancia del escenario (véase la figura 31-24) o una persona en casa a 1500 km de distancia, cuyo oído está junto al radio escuchando una transmisión en vivo? ¿Aproximadamente cuánto más rápido? Suponga que el micrófono está a unos cuantos centímetros de la cantante y que la temperatura es de 20ºC.

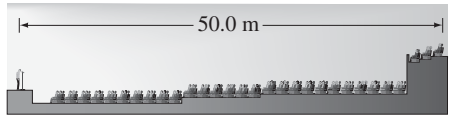


FIGURA 31–24 Problema 44.

45. El filamento de una bombilla ordinaria emite luz en una ráfaga de tren de ondas de aproximadamente 10^{-8} s de duración. ¿Cuál es la longitud en el espacio de tales trenes de ondas?

46. Los relojes controlados por radio a lo largo de Estados Unidos reciben una señal de radio de un transmisor en Fort Collins, Colorado, que marca con exactitud (dentro de un microsegundo) el inicio de cada minuto. Sin embargo, se introduce una ligera demora porque esta señal debe viajar desde el transmisor hasta los relojes. Suponiendo que Fort Collins no está a más de 3000 km de cualquier punto de EU, ¿cuál es la demora más larga en el tiempo de viaje?

47. Una señal de voz de radio proveniente de la tripulación del *Apolo* en la Luna (figura 31-25) se envió a una multitud que escuchaba en los altavoces de los radios. Si usted se encontraba de pie a 25 m del altavoz, ¿cuál fue el tiempo total de retraso entre que usted escuchó el sonido y el instante en que el sonido entró a un micrófono en la Luna y viajó hacia la Tierra?

FIGURA 31–25 Problema 47.

48. La radiación de fondo de microondas cósmicas llena todo el espacio con una densidad de energía promedio de 4×10^{-14} J/m^3. *a*) Encuentre el valor rms del campo eléctrico asociado con esta radiación. *b*) ¿A qué distancia de un transmisor de radio de 7.5 kW, que emite uniformemente en todas direcciones, encontraría un valor comparable?

49. ¿Cuáles son E_0 y B_0 a 2.00 m de una fuente de luz de 75 W? Suponga que la bombilla emite radiación de una sola frecuencia uniformemente en todas direcciones.

50. Estime el campo eléctrico rms en la luz solar que llega a Marte, si se sabe que la Tierra recibe aproximadamente 1350 W/m^2 y que Marte está 1.52 veces más lejos del Sol (en promedio) que la Tierra.

51. En un instante determinado, una onda EM viajera tiene su máximo campo magnético apuntando al oeste y su máximo campo eléctrico apuntando al sur. ¿En qué dirección viaja la onda? Si la razón de flujo de energía es de 560 W/m^2, ¿cuáles son los valores máximos para los dos campos?

52. ¿Cuán grande será la fem (rms) generada en una antena que consiste en una bobina circular de alambre de 2.2 cm de diámetro y 380 vueltas, cuando una onda EM de 810 kHz de frecuencia, que transporta energía a una razón promedio de 1.0×10^{-4} W/m^2, pasa a través de ella? [*Sugerencia:* Puede usar la ecuación 29-4 para un generador, pues se le podría aplicar a un observador que se mueve con la bobina, de manera que el campo magnético oscile con la frecuencia $f = \omega/2\pi$].

53. La intensidad promedio de la señal de una estación de TV particular es de 1.0×10^{-13} W/m^2 cuando llega a una antena de TV satelital de 33 cm de diámetro. *a*) Calcule la energía total recibida por la antena durante 6.0 horas de transmisión de los programas de esta estación. *b*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos E y B de la onda EM?

54. A una estación de radio se le permite transmitir a una potencia promedio que no supera 25 kW. Si se considera que un campo eléctrico de 0.020 V/m de amplitud es aceptable para recibir la transmisión de radio, estime a cuántos kilómetros de distancia usted podrá escuchar esa estación.

55. Una fuente puntual emite energía luminosa uniformemente en todas direcciones a una razón promedio P_0 con una sola frecuencia f. Demuestre que el campo eléctrico pico en la onda está dado por

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi r^2}}.$$

56. Suponga que una estación de radio de 35 kW emite ondas EM uniformemente en todas direcciones. *a*) ¿Cuánta energía por segundo cruza una área de 1.0 m^2 a 1.0 km de la antena transmisora? *b*) ¿Cuál es la magnitud rms del campo $\vec{\mathbf{E}}$ en ese punto, suponiendo que la estación opera a toda potencia? ¿Cuál es el voltaje rms inducido en una antena vertical de automóvil de 1.0 m de largo a *c*) 1.0 km de distancia, *d*) 50 km de distancia?

57. ¿Cuál es el máximo nivel de potencia de una estación de radio para que evite el rompimiento eléctrico del aire a una distancia de 0.50 m de la antena transmisora? Suponga que la antena es una fuente puntual. El aire se rompe con una intensidad del campo eléctrico de aproximadamente 3×10^6 V/m.

58. En el espacio libre ("vacío"), donde la carga total y el flujo de corriente es cero, la rapidez de una onda EM está dada por $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Si, en vez de ello, una onda EM viaja en un material no conductor ("dieléctrico") con constante dieléctrica K, entonces $v = 1/\sqrt{K\epsilon_0 \mu_0}$. Para frecuencias que corresponden al espectro visible (cerca de 5×10^{14} Hz), la constante dieléctrica del agua es 1.77. Indique la rapidez de la luz en el agua y compare este valor (como porcentaje) con la rapidez de la luz en un vacío.

59. Las paredes metálicas de un horno de microondas forman una cavidad de 37 cm × 37 cm × 20 cm. Cuando en esta cavidad se introducen de manera continua microondas de 2.45 GHz, la reflexión de ondas incidentes de las paredes establecen ondas estacionarias con nodos en las paredes. A lo largo de la dimensión de 37 cm del horno, ¿cuántos nodos existen (excluyendo los nodos en las paredes) y cuál es la distancia entre nodos adyacentes? [Puesto que no ocurre calentamiento en estos nodos, la mayoría de los hornos de microondas hacen girar la comida mientras operan].

60. Imagine que una corriente estable I fluye en un alambre cilíndrico recto de radio R_0 y resistividad ρ. *a*) Si entonces la corriente cambia a una razón dI/dt, demuestre que en el alambre existe una corriente de desplazamiento I_D con magnitud $\epsilon_0 \rho (dI/dt)$. *b*) Si la corriente en un alambre de cobre cambia a la razón de 1.0 A/ms, determine la magnitud de I_D. *c*) Determine la magnitud del campo magnético B_D (T) que crea I_D en la superficie de un alambre de cobre con $R_0 = 1.0$ mm. Compare (como razón) B_D con el campo creado en la superficie del alambre por la corriente estable de 1.0 A.

61. El campo eléctrico de un pulso de onda EM que viaja a lo largo del eje x en el vacío está dado por $E_y = E_0 \exp[-\alpha^2 x^2 - \beta^2 t^2 + 2\alpha\beta xt]$, donde E_0, α y β son constantes positivas. *a*) ¿El pulso se mueve en la dirección $+x$ o $-x$? *b*) Exprese β en términos de α y c (la rapidez de la luz en el vacío). *c*) Determine la expresión para el campo magnético de esta onda EM.

62. Suponga que una onda EM que se desplaza hacia la derecha se traslapa con una onda EM que se desplaza hacia la izquierda de manera que, en cierta región del espacio, el campo eléctrico total en la dirección y y el campo magnético en la dirección z están dados por $E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + E_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$ y $B_z = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) - B_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. *a*) Encuentre la expresión matemática que representa las ondas eléctrica y magnética estacionarias en las direcciones y y z, respectivamente. *b*) Determine el vector de Poynting y encuentre la posición x en la que es cero en todo momento.

63. Los campos eléctrico y magnético de cierta onda EM en el vacío están dadas por $\vec{\mathbf{E}} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{j}} + E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = B_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{j}} - B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{k}}$. *a*) Demuestre que $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son perpendiculares entre sí en todo momento. *b*) Para esta onda, $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están en un plano paralelo al plano yz. Demuestre que la onda se mueve en una dirección perpendicular a $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. *c*) En una elección arbitraria de posición x y tiempo t, demuestre que las magnitudes de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ siempre son iguales a E_0 y B_0, respectivamente. *d*) En $x = 0$, dibuje la orientación de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en el plano yz en $t = 0$. Luego describa cualitativamente el movimiento de estos vectores en el plano yz conforme el tiempo pasa. [Nota: La onda EM en este problema está "polarizada circularmente"].

Respuestas a los ejercicios

A: *c*).

B: *b*).

C: *a*) 3.8×10^6 Hz; (*b*) 5.5×10^{18} Hz.

D: 45 cm.

E: Sí; la señal todavía viaja 72,000 km.

F: Durante 4 horas.

La reflexión en el agua tranquila, al igual que la de un espejo de vidrio, se puede analizar con el modelo de rayos de luz.

¿Esta fotografía está derecha o invertida? ¿Cómo lo sabe? ¿Cuáles son los indicios? Observe a las personas y la posición del Sol. Los diagramas de rayos, que aprenderá a dibujar en este capítulo, nos ayudarán a encontrar la respuesta. Véase el ejemplo 32-3.

En este primer capítulo acerca de la luz y la óptica, usaremos el modelo de rayos de luz para comprender la formación de imágenes en los espejos, tanto planos como curvos (esféricos). También comenzaremos el estudio de la refracción (cómo se desvían los rayos de luz cuando pasan de un medio a otro), lo que nos prepara para estudiar las lentes en el siguiente capítulo, las cuales son la parte crucial de muchos instrumentos ópticos. (Véase el pliego a color al final del libro).

CAPÍTULO 32

Luz: Reflexión y refracción

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Una persona de 2.0 m de alto está de pie a 2.0 m de un espejo vertical plano viendo su imagen. ¿Qué altura mínima debe tener el espejo si la persona debe ver su cuerpo entero, desde la coronilla hasta sus pies?

a) 0.50 m.
b) 1.0 m.
c) 1.5 m.
d) 2.0 m.
e) 2.5 m.

El sentido de la vista es extremadamente importante para nosotros, pues nos brinda gran parte de la información acerca del mundo. ¿Cómo vemos? ¿Qué es eso llamado *luz* que entra a los ojos y provoca la sensación de visión? ¿Cómo se comporta la luz de manera que nos permite ver todo lo que uno hace? En el capítulo 31 se mencionó que la luz se considera una forma de radiación electromagnética. Ahora el tema de la luz se examinará con detalle en los próximos cuatro capítulos.

Los objetos se ven en una de dos formas: **1.** el objeto puede ser una *fuente* de luz, como una bombilla eléctrica, una flama o una estrella, en cuyo caso se ve la luz emitida directamente de la fuente; o, más comúnmente, **2.** el objeto se ve gracias a la luz que *se refleja* en él. En el último caso, la luz pudo originarse en el Sol, luces artificiales o una fogata. No fue sino hasta la década de 1920 que se logró una comprensión de cómo los cuerpos *emiten* luz, lo que se explicará en el capítulo 37. La comprensión de cómo *se refleja* la luz en los objetos se logró mucho antes, y esto se explicará aquí, en la sección 32-2.

CONTENIDO

32–1 El modelo de rayos de luz
32–2 Reflexión; formación de imágenes mediante espejos planos
32–3 Formación de imágenes mediante espejos esféricos
32–4 Índice de refracción
32–5 Refracción: Ley de Snell
32–6 Espectro visible y dispersión
32–7 Reflexión total interna; fibras ópticas
*32–8 Refracción en una superficie esférica

32–1 El modelo de rayos de luz

Un gran cúmulo de evidencia sugiere que *la luz viaja en líneas rectas* en una amplia variedad de circunstancias. Por ejemplo, una fuente de luz como el Sol forma distintas sombras, y la luz proveniente de un puntero láser parece estar en línea recta. De hecho, uno infiere las posiciones de los objetos en el ambiente suponiendo que la luz se desplaza desde el objeto hasta nuestros ojos en trayectorias de línea recta. Nuestra orientación al mundo físico se basa en esta suposición.

Tal suposición razonable es la base del **modelo de rayos** de luz. Este modelo supone que la luz viaja en trayectorias de líneas rectas llamadas **rayos de luz**. En realidad, un rayo es una idealización; tiene la intención de representar un haz de luz extremadamente estrecho. Cuando vemos un objeto, de acuerdo con el modelo de rayos, la luz alcanza nuestros ojos desde cada punto del objeto. Aunque los rayos de luz abandonan cada punto en muchas direcciones diferentes, por lo general sólo un pequeño puñado de esos rayos pueden entrar al ojo de un observador, como se ilustra en la figura 32-1. Si la cabeza de la persona se mueve hacia un lado, desde cada punto entrará al ojo un haz de rayos diferente.

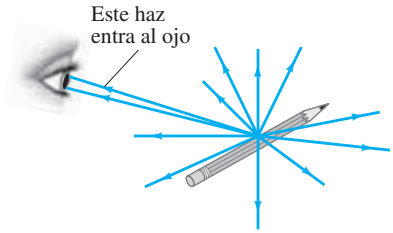


FIGURA 32–1 Los rayos de luz provienen de cada punto individual de un objeto. Se observa cómo un pequeño haz de rayos que salen de un punto entra al ojo de una persona.

En el capítulo 31 se dijo que la luz se considera una onda electromagnética. Aunque el modelo de rayos de luz no trata con este aspecto de la luz (en los capítulos 34 y 35 se estudiará la naturaleza ondulatoria de la luz), ha sido muy conveniente para describir muchos aspectos de la luz, como la reflexión, la refracción y la formación de imágenes en espejos y lentes.[†] Puesto que estas explicaciones implican rayos en línea recta en varios ángulos, a esta materia se le conoce como **óptica geométrica**.

32–2 Reflexión; formación de imágenes mediante espejos planos

Cuando la luz incide sobre la superficie de un objeto, parte de la luz se refleja. El resto puede ser absorbido por el objeto (y transformarse en energía térmica) o, si el objeto es transparente como el vidrio o el agua, una parte se transmite a través de él. En el caso de un objeto muy liso y brillante, como un espejo plateado, se refleja más del 95% de la luz.

Cuando un estrecho haz de luz incide sobre una superficie plana (figura 32-2), se define el **ángulo de incidencia,** θ_i, como el ángulo que un rayo incidente forma con la normal (perpendicular) a la superficie, y el **ángulo de reflexión**, θ_r, como el ángulo que el rayo reflejado forma con la normal. Se encuentra que *los rayos incidente y reflejado están en el mismo plano con la normal a la superficie* y que

el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, $\theta_r = \theta_i$

Ésta es la **ley de reflexión** y se bosqueja en la figura 32-2. Los antiguos griegos la conocían y es posible confirmarla al hacer incidir un estrecho haz de una linterna o un puntero láser sobre un espejo dentro de una habitación oscura.

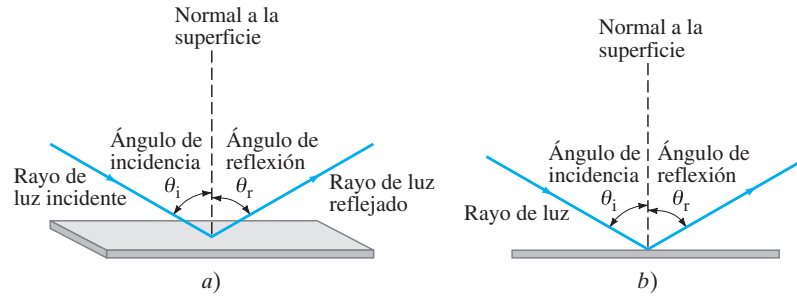


FIGURA 32–2 Ley de reflexión: *a*) Vista tridimensional de un rayo incidente reflejado en lo alto de una superficie plana; *b*) vista lateral o "desde el extremo", que se usará normalmente en virtud de su claridad.

[†]Al ignorar las propiedades ondulatorias de la luz se debe tener cuidado de que, cuando los rayos de luz pasen por los objetos o a través de aberturas, éstas sean grandes en comparación con la longitud de onda de la luz (de manera que los fenómenos ondulatorios de interferencia y difracción, que se estudiaron en el capítulo 15, se puedan ignorar); se ignorará lo que ocurre a la luz en los bordes de los objetos hasta llegar a los capítulos 34 y 35.

Cuando la luz incide sobre una superficie rugosa, incluso microscópicamente rugosa como esta página, la luz se refleja en muchas direcciones, como se muestra en la figura 32-3. A esto se le llama **reflexión difusa**. Sin embargo, aún se sostiene la ley de reflexión en cada pequeña sección de la superficie. Gracias a la reflexión difusa en todas direcciones, un objeto ordinario se puede ver en muchos ángulos diferentes por la luz que se refleja en él. Cuando uno mueve la cabeza hacia un lado, diferentes rayos reflejados alcanzan nuestros ojos desde cada punto del objeto (como esta página), figura 32-4a. Comparemos la reflexión difusa con la reflexión en un espejo, lo que se conoce como **reflexión especular**. ("Speculum" en latín significa espejo.) Cuando un estrecho haz de luz brilla en un espejo, la luz no llegará a nuestros ojos a menos que éstos se ubiquen justo en el lugar correcto donde se satisfaga la ley de reflexión, como se ilustra en la figura 32-4b. Esto es lo que da origen a las propiedades especiales de formación de imágenes en los espejos.

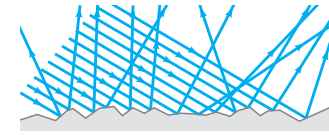


FIGURA 32–3 Reflexión difusa sobre una superficie rugosa.

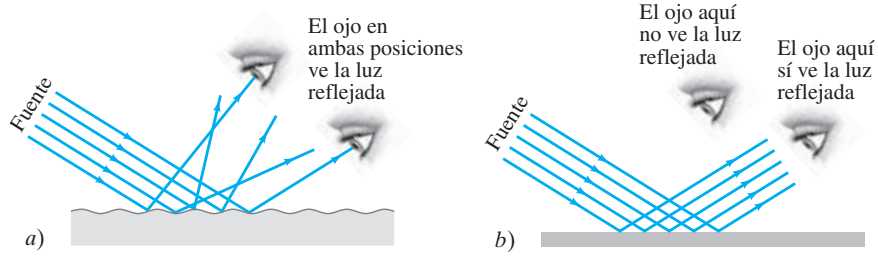
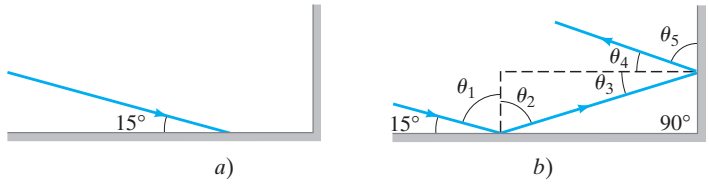


FIGURA 32–4 Un estrecho haz de luz brilla sobre *a*) papel blanco y *b*) un espejo. En el inciso *a*) usted puede ver con su ojo la luz blanca reflejada en varias posiciones debido a la reflexión difusa. Pero en el inciso *b*) usted ve la luz reflejada sólo cuando sus ojos se ubican en el lugar correcto ($\theta_r = \theta_i$); la reflexión en los espejos también se conoce como reflexión especular. (Galileo, con argumentos similares, demostró que la Luna debía tener una superficie rugosa y no una superficie sumamente pulida como si fuera un espejo, como algunos creían).

EJEMPLO 32–1 **Reflexión en espejos planos.** Dos espejos planos son perpendiculares entre sí. Un haz de luz entrante forma un ángulo de 15° con el primer espejo, como se muestra en la figura 32-5a. ¿Qué ángulo formará el haz saliente con el segundo espejo?

PLANTEAMIENTO Bosqueje la trayectoria del haz conforme se refleja en los dos espejos y dibuje las dos normales a los espejos para las dos reflexiones. Use geometría y la ley de reflexión para encontrar los diversos ángulos.

FIGURA 32–5 Ejemplo 32–1.



SOLUCIÓN $\theta_1 + 15° = 90°$, de manera que $\theta_1 = 75°$; por la ley de reflexión, $\theta_2 = \theta_1 = 75°$ también. Las dos normales a los dos espejos son perpendiculares entre sí, de manera que $\theta_2 + \theta_3 + 90° = 180°$ como sucede con cualquier triángulo. Por ende, $\theta_3 = 180° - 90° - 75° = 15°$. Por la ley de reflexión, $\theta_4 = \theta_3 = 15°$, así que $\theta_5 = 75°$ es el ángulo que el rayo reflejado forma con la superficie del segundo espejo. Véase la figura 32-5b.

NOTA El rayo saliente es paralelo al rayo entrante. Los reflectores rojos de las bicicletas y de los automóviles se basan en este principio.

Cuando uno mira directamente hacia un espejo, se ve lo que parece ser uno mismo, así como varios objetos alrededor y detrás de uno, figura 32-6. La cara y los otros objetos parecen como si estuvieran enfrente de uno, más allá del espejo. Pero lo que se ve en el espejo es una **imagen** de los objetos, incluido uno mismo, que están enfrente del espejo.

FIGURA 32–6 Cuando alguien se mira en un espejo, ve una imagen de sí mismo y de los objetos que le rodean. La persona no se ve a sí misma como la ven los demás, porque los lados izquierdo y derecho aparecen invertidos en la imagen.

Un espejo "plano" es aquél con una suave superficie reflectora plana. La figura 32-7 ilustra cómo se forma una imagen en un espejo plano de acuerdo con el modelo de rayos. En el diagrama de la figura 32-7 se ve el espejo desde el extremo, y están representados los rayos que se reflejan en la superficie frontal. (Los buenos espejos por lo general se fabrican colocando un recubrimiento metálico sumamente reflectante sobre una superficie de una pieza de vidrio muy plana). Se muestran los rayos provenientes de dos puntos diferentes de un objeto (la botella a la izquierda en la figura 32-7): se ilustran dos rayos que salen de un punto en la parte superior de la botella, y dos más desde un punto en la parte inferior. Los rayos que salen de cada punto en el objeto van en muchas direcciones, pero sólo se muestran aquellos que encierra el haz de rayos que entra al ojo y que provienen de cada uno de los dos puntos. Cada conjunto de rayos divergentes que se reflejan en el espejo y entran al ojo *parecen* provenir de un solo punto (llamado punto de imagen) detrás del espejo, como se indica mediante las líneas punteadas. Esto es, los ojos y el cerebro interpretan que cualquier rayo que entra al ojo viajó en trayectoria de línea recta. El punto desde donde parece provenir cada haz de rayos es un punto en la imagen. Para cada punto en el objeto, existe un punto de imagen correspondiente.

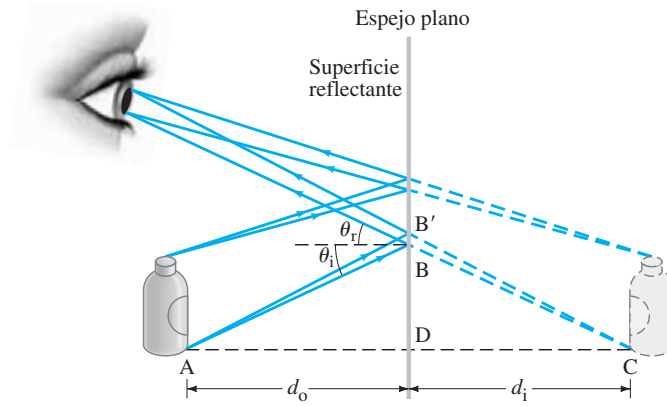


FIGURA 32–7 Formación de una imagen virtual mediante un espejo plano.

Concéntrese ahora en los dos rayos que salen del punto A en el objeto de la figura 32-7, y que inciden sobre el espejo en los puntos B y B′. Para los rayos en B se usa geometría. Los ángulos ADB y CDB son ángulos rectos; y en virtud de la ley de reflexión, $\theta_i = \theta_r$ en el punto B. Por lo tanto, los ángulos ABD y CBD también son iguales. En consecuencia, los dos triángulos ABD y CBD son congruentes, y la longitud AD = CD. Esto es, la imagen aparece a la misma distancia detrás del espejo que la que existe entre el espejo y el objeto que está enfrente. La **distancia de la imagen**, d_i (distancia perpendicular desde el espejo a la imagen, figura 32-7), es igual a la **distancia del objeto**, d_o (distancia perpendicular desde el objeto hasta el espejo). A partir de la geometría, también se ve que la altura de la imagen es la misma que la del objeto.

En realidad, en la figura 32-7 los rayos de luz no pasan a través de la ubicación de la imagen en sí. (Observe dónde las líneas rojas son punteadas para indicar que se trata de proyecciones y no de rayos). La imagen no aparecería sobre papel o película colocados en la ubicación de la imagen. Por eso se le llama **imagen virtual**. Esto es para distinguirla de una **imagen real** en la que la luz sí pasa a través de la imagen y que, por lo tanto, podría aparecer en película o en un sensor electrónico, e incluso en una hoja de papel blanco o en una pantalla colocada en la posición de la imagen. Nuestros ojos pueden ver imágenes tanto reales como virtuales, siempre que los rayos divergentes entren a las pupilas. Como veremos, los espejos y las lentes curvos pueden formar imágenes reales así como virtuales. El lente proyector de una película, por ejemplo, produce una imagen real que es visible sobre la pantalla.

FÍSICA APLICADA

¿De qué altura debe ser un espejo para que usted pueda ver un reflejo de todo su cuerpo?

EJEMPLO 32–2 ¿De qué altura debe ser un espejo de cuerpo completo? Una mujer de 1.60 m de altura está de pie frente a un espejo plano vertical. ¿Cuál es la altura mínima del espejo, y qué tan cerca del suelo debe estar su borde inferior, si ella desea ver todo su cuerpo? Suponga que los ojos de la mujer están situados 10 cm por debajo de la parte superior de su cabeza.

PLANTEAMIENTO Para que ella vea todo su cuerpo, los rayos de luz provenientes de la parte superior de su cabeza y de la punta de sus pies deben reflejarse en el espejo y entrar a sus ojos; véase la figura 32-8. No se muestran dos rayos divergentes desde cada punto como se hizo en la figura 32-7, donde se quería encontrar dónde estaba la imagen. Ahora que se sabe que la imagen está a la misma distancia detrás de un espejo plano como lo está el objeto enfrente de él, sólo se necesita dibujar un rayo que salga del punto G (parte superior de la cabeza) y un rayo que salga del punto A (los dedos de sus pies) y luego usar geometría simple.

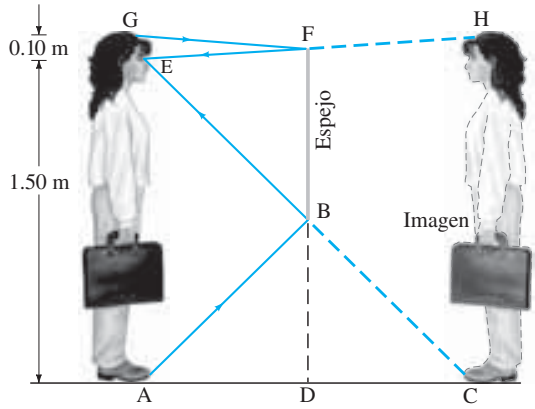


FIGURA 32–8 Vista de uno mismo en un espejo. Ejemplo 32-2.

SOLUCIÓN Primero considere el rayo que sale de los pies de la mujer en A, se refleja en B y entra al ojo en E. El espejo no necesita extenderse más abajo de B. Puesto que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, la altura BD es la mitad de la altura AE. Dado que AE = 1.60 m − 0.10 m = 1.50 m, entonces BD = 0.75 m. De igual modo, si la mujer debe ver la parte superior de su cabeza, el borde superior del espejo sólo necesita alcanzar el punto F, que está 5 cm abajo de la parte superior de su cabeza (la mitad de GE = 10 cm). Por lo tanto, DF = 1.55 m y el espejo necesita tener una altura vertical de sólo (1.55 m − 0.75 m) = 0.80 m. El borde inferior del espejo debe estar a 0.75 m sobre el suelo.

NOTA Se concluye que un espejo, si se coloca bien, sólo necesita medir la mitad de la altura de una persona para que ésta se vea por completo.

EJERCICIO A ¿El resultado del ejemplo 32-2 depende de la distancia de la persona al espejo? (Inténtelo).

EJERCICIO B Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 837, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO C Suponga que está de pie a 3 m enfrente de un espejo en una estética. Puede verse usted mismo desde su cabeza hasta la cintura, pues el borde inferior del espejo corta el resto de su imagen. Si se acerca más al espejo *a*) no podrá ver más de su imagen; *b*) podrá ver más de su imagen, abajo de su cintura; *c*) verá menos de su imagen, y el corte se elevará para estar arriba de su cintura.

EJEMPLO CONCEPTUAL 32–3 **¿La fotografía está de cabeza?** Un examen minucioso de la fotografía de la primera página de este capítulo revela que, en la porción superior, la imagen del Sol se ve claramente, mientras que en la porción inferior la imagen del Sol está parcialmente bloqueada por las ramas de los árboles. Muestre por qué la reflexión no es la misma que la escena real al dibujar un bosquejo de esta situación donde estén representados el Sol, la cámara, la rama y dos rayos que vayan del Sol a la cámara (uno directo y uno reflejado). ¿La fotografía está derecha?

RESPUESTA Es necesario dibujar dos diagramas, uno donde suponga que la fotografía está derecha, y otro que suponga que está de cabeza. La figura 32-9 se dibuja suponiendo que la fotografía está de cabeza. En este caso, el Sol bloqueado por el árbol sería la vista directa, y la vista completa del Sol, el reflejo: el rayo que se refleja en el agua y entra a la cámara viaja en un ángulo por abajo de la rama, mientras que el rayo que viaja directamente hacia la cámara pasa a través de las ramas. Esto funciona. Intente dibujar un diagrama donde suponga que la fotografía está derecha (y suponga en consecuencia que la imagen del Sol en el reflejo está más alto sobre el horizonte de lo que está como se ve directamente). No funcionará. La fotografía de la página 837 está de cabeza.

Además, ¿qué ocurre con las personas en la fotografía? Intente dibujar un diagrama donde muestre por qué no aparecen en el reflejo. [*Sugerencia:* Suponga que los individuos no están sentados en el borde del estanque, sino un poco atrás de la orilla]. Luego intente dibujar un diagrama a la inversa (es decir, suponga que la fotografía está derecha, de manera que las personas sólo son visibles en el reflejo). Las imágenes reflejadas no son réplicas perfectas cuando implican diferentes planos (distancias).

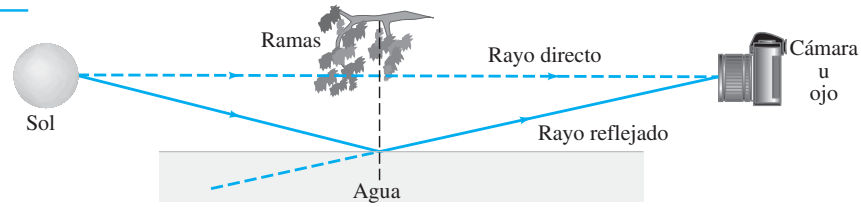


FIGURA 32–9 Ejemplo 32–3.

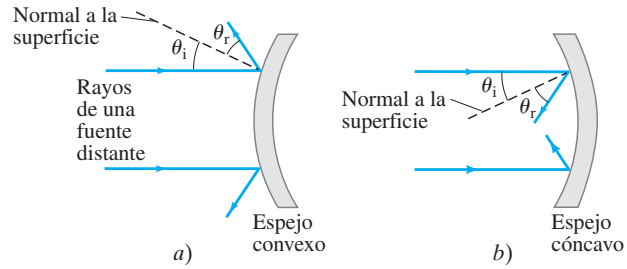


FIGURA 32–10 Espejos con superficies esféricas convexa y cóncava. Note que $\theta_r = \theta_i$ para cada rayo.

32–3 Formación de imágenes mediante espejos esféricos

Las superficies reflectantes no tienen que ser planas. Los espejos *curvos* más comunes son *esféricos*, lo que significa que forman una sección de una esfera. Un espejo esférico se llama **convexo** si la reflexión tiene lugar en la superficie exterior de la forma esférica, de manera que el centro de la superficie del espejo sobresale hacia el observador (figura 32-10a). Un espejo se llama **cóncavo** si la superficie reflectante está en la superficie interior de la esfera, de manera que el centro del espejo se aleja del observador (como una "cueva"), figura 32-10b. Los espejos cóncavos se usan como espejos de afeitado o con fines cosméticos (figura 32-11a) porque amplifican, y los espejos convexos a veces se usan en los autos y camiones (espejos retrovisores) y en las tiendas (para observar a los posibles ladrones), pues tienen un amplio campo de visión (figura 32-11b).

FIGURA 32–11 *a*) Un espejo cosmético cóncavo brinda una imagen amplificada. *b*) Un espejo convexo en una tienda reduce el tamaño de la imagen y así incluye un amplio campo de visión.

Punto focal y distancia focal

Para ver cómo forman imágenes los espejos esféricos, considere primero un objeto que está muy lejos de un espejo cóncavo. En el caso de un objeto distante, como se ilustra en la figura 32-12, los rayos provenientes de cada punto del objeto, que inciden sobre el espejo, serán casi paralelos. *En el caso de un objeto infinitamente distante* (el Sol y

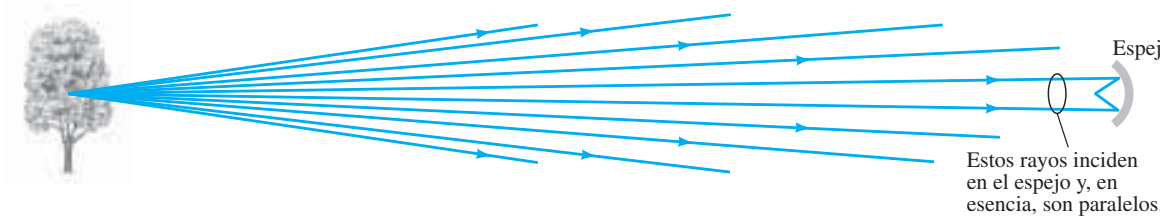


FIGURA 32–12 Si la distancia del objeto es grande en comparación con el tamaño del espejo (o de la lente), los rayos son casi paralelos. Son paralelos para un objeto en el infinito (∞).

las estrellas se aproximan a esto), *los rayos serían precisamente paralelos*. Considere ahora tales rayos paralelos que inciden sobre un espejo cóncavo, como en la figura 32-13. La ley de reflexión se sostiene para cada uno de estos rayos en el punto donde cada uno incide sobre el espejo. Como se observa, no todos llegan a un solo punto. Para formar una imagen clara, los rayos deben llegar a un punto. En consecuencia, un espejo esférico no formará una imagen tan clara como la de un espejo plano. Sin embargo, como se muestra a continuación, si el espejo es pequeño comparado con su radio de curvatura, de manera que un rayo reflejado forme sólo un *ángulo pequeño* con el rayo incidente (2θ en la figura 32-14), entonces los rayos se cruzarán unos a otros muy aproximadamente en un solo punto, o **foco**. En el caso que se ilustra en la figura 32-14, los rayos incidentes son paralelos al **eje principal**, que se define como la línea recta perpendicular a la superficie curva en su centro (línea CA en la figura 32-14). El punto F, donde los rayos paralelos incidentes llegan a un foco después de la reflexión, se llama **punto focal** del espejo. La distancia entre F y el centro del espejo, longitud FA, se llama **distancia focal** o **longitud focal**, f, del espejo. El punto focal también es el *punto de la imagen para un objeto infinitamente alejado* a lo largo del eje principal. La imagen del Sol, por ejemplo, estaría en F.

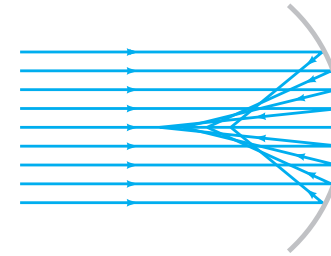


FIGURA 32–13 Los rayos paralelos que inciden sobre un espejo esférico cóncavo no se intersecan (o se enfocan) precisamente en un solo punto. (A este "defecto" se le conoce como "aberración esférica").

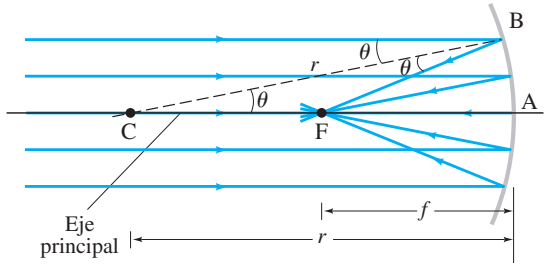


FIGURA 32–14 Los rayos paralelos al eje principal de un espejo esférico cóncavo llegan a un foco en F, el punto focal, en tanto el espejo sea pequeño en ancho comparado con su radio de curvatura, r, de manera que los rayos son "paraxiales"; esto es, sólo forman ángulos pequeños con el eje horizontal.

Ahora se demostrará, para un espejo cuya superficie reflectante es pequeña en comparación con su radio de curvatura, que los rayos casi se encuentran en un punto común, F, y también se calculará la distancia focal f. En esta aproximación, sólo se consideran los rayos que forman un ángulo pequeño con el eje principal; tales rayos se llaman **rayos paraxiales** y sus ángulos están exagerados en la figura 32-14 para tener mayor claridad. Primero considere un rayo que incide sobre el espejo en el punto B de la figura 32-14. El punto C es el centro de curvatura del espejo (el centro de la esfera de la cual el espejo es una parte). Así que la línea rayada CB es igual a r, el radio de curvatura, y CB es normal a la superficie del espejo en B. El rayo entrante que incide en el espejo en B forma un ángulo θ con esta normal y, por consiguiente, el rayo reflejado, BF, también forma un ángulo θ con la normal (ley de reflexión). Observe que el ángulo BCF también es θ, como se muestra. El triángulo CBF es isósceles porque dos de sus ángulos son iguales. Por lo tanto, se tiene la longitud CF = BF. Se supone que la superficie del espejo es pequeña comparada con el radio de curvatura del espejo, así que los ángulos son pequeños y la longitud FB casi es igual a la longitud FA. En esta aproximación, FA = FC. Pero FA = f, la distancia focal, y CA = 2 × FA = r. En consecuencia, la distancia focal es la mitad del radio de curvatura:

$$f = \frac{r}{2}. \qquad \text{[espejo esférico]} \quad \textbf{(32–1)}$$

Sólo se supuso que el ángulo θ era pequeño, así que este resultado se aplica a todos los otros rayos paraxiales incidentes. Por lo tanto, todos los rayos paraxiales pasan a través del mismo punto F, el punto focal.

Como sólo es aproximadamente cierto que los rayos llegan a un foco perfecto en F, cuanto más curvo sea el espejo, peor será la aproximación (figura 32-13) y más borrosa será la imagen. Este "defecto" de los espejos esféricos se conoce como **aberración esférica**, que se discutirá más en relación con las lentes en el capítulo 33. Por otra parte, un **reflector parabólico** reflejará los rayos a un foco perfecto. Sin embargo, como las formas parabólicas son mucho más difíciles de hacer y, en consecuencia, mucho más costosas, los espejos esféricos se usan para la mayoría de los propósitos. (Muchos telescopios astronómicos utilizan reflectores parabólicos). Aquí sólo se considerarán espejos esféricos y se supondrá que son pequeños comparados con sus radios de curvatura, de manera que la imagen es clara y se sostiene la ecuación 32-1.

Formación de imágenes; diagramas de rayos

Se vio que, para un objeto en el infinito, la imagen se ubica en el punto focal de un espejo esférico cóncavo, donde $f = r/2$. Pero, ¿dónde se encuentra la imagen para un objeto que no está en el infinito? Primero considere el objeto que se representa como una flecha en la figura 32-15a, que está entre F y C en el punto O (O por objeto). Ahora se determinará dónde estará la imagen para un punto dado O′ en la parte superior del objeto.

a) El rayo 1 sale de O′ paralelo al eje y se refleja a través de F.

b) El rayo 2 pasa a través de F y luego se refleja de regreso en forma paralela al eje.

c) El rayo 3 se elige perpendicular al espejo y, por lo tanto, se debe reflejar de regreso sobre sí mismo y pasar a través de C (centro de curvatura).

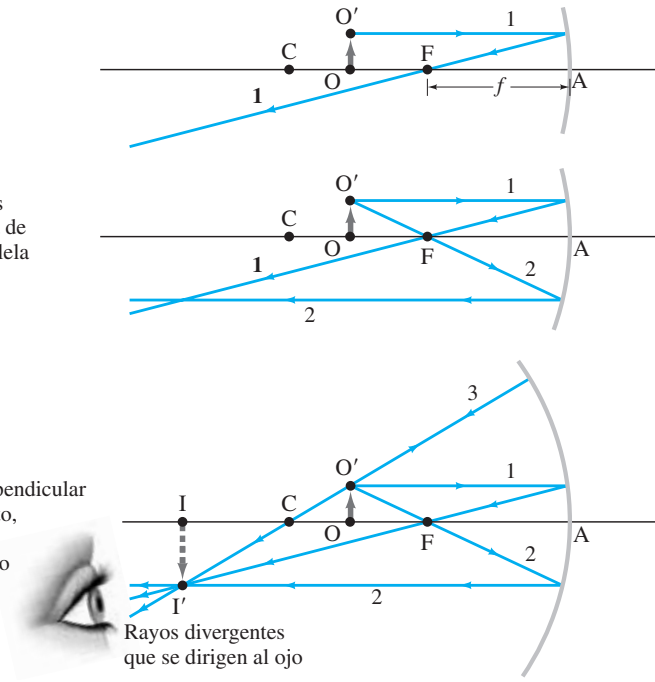


FIGURA 32–15 Rayos que salen del punto O′ en el objeto (una flecha). Se ilustran los tres rayos más útiles para determinar dónde se forma la imagen I′. [Advierta que el espejo no es pequeño comparado con f, así que el diagrama no dará la posición precisa de la imagen].

Para hacer esto, se pueden dibujar varios rayos y asegurarse de que se reflejan en el espejo de tal modo que el ángulo de reflexión sea igual al ángulo de incidencia. Se podrían dibujar muchos rayos que salen de cualquier punto del objeto, pero la determinación de la posición de la imagen se simplifica si se trata con tres rayos particularmente simples. Éstos son los rayos marcados como 1, 2 y 3 en la figura 32-15 y se les dibuja saliendo del punto O′ del objeto del modo siguiente:

DIAGRAMAS DE RAYOS
Cómo encontrar la posición de la imagen en un espejo curvo

El rayo 1 se dibuja paralelo al eje; por lo tanto, después de la reflexión, debe pasar a lo largo de una línea a través de F (figura 32-15a).

El rayo 2 sale de O′ y pasa a través de F (figura 32-15b); por lo tanto, se debe reflejar de manera que sea paralelo al eje.

El rayo 3 pasa a través de C, el centro de curvatura (figura 32-15c); está a lo largo de un radio de la superficie esférica y es perpendicular al espejo, así que se refleja de regreso sobre sí mismo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
El punto de la imagen es donde se intersecan los rayos reflejados

Los tres rayos salen de un solo punto O′ en el objeto. Después de la reflexión en un espejo (pequeño), el punto donde se cruzan estos rayos es el punto de imagen I′. Todos los demás rayos provenientes del mismo punto del objeto también pasarán a través de este punto de imagen. Para encontrar el punto de imagen para cualquier punto de objeto, sólo es necesario dibujar estos tres tipos de rayos; en realidad, sólo se necesitan dos, pero el tercero sirve como comprobación.

En la figura 32-15 se mostró el punto de imagen sólo para un solo punto en el objeto. Otros puntos en el objeto se visualizan cerca, así que se forma una imagen completa del objeto, como se indica mediante las flechas punteadas en la figura 32-15c. Puesto que la luz en realidad pasa a través de la imagen misma, ésta es una **imagen real** que aparecerá en un trozo de papel o de película colocado ahí. Esto se puede comparar con la imagen virtual que forma un espejo plano (la luz en realidad no pasa a través de esa imagen, figura 32-7).

La imagen en la figura 32-15 es visible al ojo cuando éste se coloca a la izquierda de la imagen, de manera que parte de los rayos que divergen desde cada punto de la imagen (como el punto I′) pueden entrar al ojo como se muestra en la figura 32-15c. (Véanse también las figuras 32-1 y 32-7).

Ecuación del espejo y amplificación

Los puntos de imagen se pueden determinar, aproximadamente, al dibujar los tres rayos como se acaba de describir, figura 32-15. Pero es difícil dibujar ángulos pequeños para los rayos "paraxiales" como se supuso. Para resultados más precisos, ahora se deducirá una ecuación que da la distancia de la imagen si se conocen la distancia del objeto y el radio de curvatura del espejo. Para hacer esto, consulte la figura 32-16. La **distancia del objeto**, d_o, es la distancia del objeto (punto O) desde el centro del espejo. La **distancia de la imagen**, d_i, es la distancia de la imagen (punto I) desde el centro del espejo. La altura del objeto OO′ se llama h_o y la altura de la imagen, I′I, es h_i.

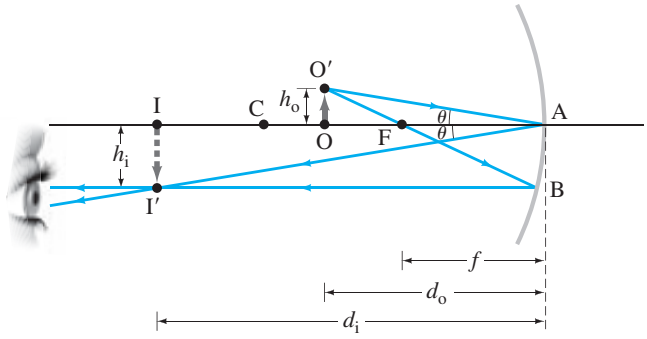


FIGURA 32–16 Diagrama para deducir la ecuación del espejo. Para la deducción, se supone que el tamaño del espejo es pequeño comparado con su radio de curvatura.

Se representan los dos rayos que salen de O′: O′FBI′ (igual que el rayo 2 en la figura 32-15) y O′AI′, que es un cuarto tipo de rayo que se refleja en el centro del espejo y que también sirve para encontrar un punto de imagen. El rayo O′AI′ obedece la ley de reflexión, de manera que los dos triángulos rectos O′AO e I′AI son similares. En consecuencia, se tiene

$$\frac{h_o}{h_i} = \frac{d_o}{d_i}.$$

Para el otro rayo que se ilustra, O′FBI′ los triángulos O′FO y ABF también son similares porque los ángulos son iguales y se usa la aproximación AB = h_i (espejo pequeño comparado con su radio). Más aún, FA = f, la distancia focal del espejo, de manera que

$$\frac{h_o}{h_i} = \frac{\text{OF}}{\text{FA}} = \frac{d_o - f}{f}.$$

Los lados izquierdos de las dos expresiones precedentes son iguales, así que es válido igualar los lados derechos:

$$\frac{d_o}{d_i} = \frac{d_o - f}{f}.$$

Ahora se dividen ambos lados entre d_o y se reordenan para obtener

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}. \qquad \textbf{(32–2)}$$

Ecuación del espejo

Ésta es la ecuación que se buscaba. Se llama **ecuación del espejo** y relaciona las distancias del objeto y de la imagen con la distancia focal f (donde $f = r/2$).

La **amplificación lateral**, m, de un espejo se define como la altura de la imagen dividida entre la altura del objeto. A partir del primer conjunto de triángulos similares anteriores, o la primera ecuación de esta página, se escribe:

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}. \qquad \textbf{(32–3)}$$

El signo menos en la ecuación 32-4 se inserta como convención. De hecho, se debe tener cuidado con los signos de todas las cantidades en las ecuaciones 32-2 y 32-3. Las convenciones de signos se eligen de manera que indiquen las ubicaciones y orientaciones correctas de las imágenes, como predicen los diagramas de rayos. Las convenciones de signos que se usan son: la altura de la imagen h_i es positiva si la imagen está derecha

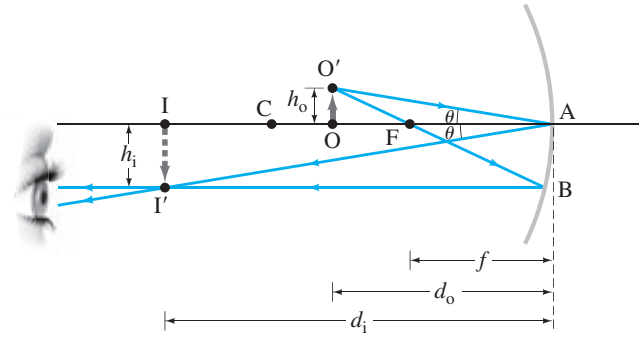


FIGURA 32–16 (Repetida de la página anterior).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Convenciones de signos

y negativa si está invertida en relación con el objeto (se supone que h_o se toma como positiva); d_i o d_o es positiva si la imagen u objeto están enfrente del espejo (como en la figura 32-16); si la imagen o el objeto están detrás del espejo, la distancia correspondiente es negativa (se puede ver un ejemplo en la figura 32-18, ejemplo 32-6). Por lo tanto, la amplificación (ecuación 32-3) es positiva para una imagen derecha y negativa para una imagen invertida (de cabeza). Las convenciones de signos se resumirán de manera más completa en la estrategia para Resolución de problemas después de analizar los espejos convexos, más adelante en esta sección.

Ejemplos de espejos cóncavos

EJEMPLO 32–4 **Imagen en un espejo cóncavo.** Un anillo de diamantes de 1.50 cm de alto se coloca a 20.0 cm de un espejo cóncavo con 30.0 cm de radio de curvatura. Determine *a*) la posición de la imagen y *b*) su tamaño.

PLANTEAMIENTO Determine la distancia focal a partir del radio de curvatura (ecuación 32-1), $f = r/2 = 15.0$ cm. El diagrama de rayos es básicamente como el que se aprecia en la figura 32-16 (que se repite en esta página), pues el objeto está entre F y C. La posición y el tamaño de la imagen se encuentran a partir de las ecuaciones 32-2 y 32-3.

SOLUCIÓN Al hacer referencia a la figura 32-16, se tiene CA $= r = 30.0$ cm, FA $= f = 15.0$ cm y OA $= d_o = 20.0$ cm.

a) De acuerdo con la ecuación 32-2,

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d}$$

$$= \frac{1}{15.0\text{ cm}} - \frac{1}{20.0\text{ cm}} = 0.0167\text{ cm}^{-1}.$$

CUIDADO
Recuerde tomar el recíproco

De manera que $d_i = 1/(0.0167\text{ cm}^{-1}) = 60.0$ cm. Puesto que d_i es positiva, la imagen está a 60.0 cm enfrente del espejo, en el mismo lado que el objeto.

b) A partir de la ecuación 32-3, la amplificación es

$$m = -\frac{d_i}{d_o}$$

$$= -\frac{60.0\text{ cm}}{20.0\text{ cm}} = -3.00.$$

La imagen es 3.0 veces mayor que el objeto, y su altura es

$$h_i = mh_o = (-3.00)(1.5\text{ cm}) = -4.5\text{ cm}.$$

El signo menos nos recuerda que la imagen está invertida, como en la figura 32-16.

NOTA Cuando un objeto está más lejos de un espejo cóncavo que el punto focal, se puede ver a partir de las figuras 32-15 o 32-16 que la imagen siempre está invertida y es real.

EJEMPLO CONCEPTUAL 32–5 **Rayos reversibles.** Si el objeto en el ejemplo 32-4 se coloca donde está la imagen (véase la figura 32-16), ¿dónde estará la nueva imagen?

RESPUESTA La ecuación del espejo es simétrica en d_o y d_i. Por lo tanto, la nueva imagen estará donde se encontraba el antiguo objeto. De hecho, en la figura 32.16 sólo se necesita invertir la dirección de los rayos para obtener la nueva situación.

EJEMPLO 32–6 **Objeto más cerca de un espejo cóncavo.** Un objeto de 1.00 cm de alto se coloca a 10.0 cm de un espejo cóncavo cuyo radio de curvatura es de 30.0 cm. *a*) Dibuje un diagrama de rayos para ubicar (aproximadamente) la posición de la imagen. *b*) Determine analíticamente la posición de la imagen y la amplificación.

PLANTEAMIENTO Dibuje el diagrama de rayos con los rayos de la figura 32-15, página 844. Una solución analítica emplea las ecuaciones 32-1, 32-2 y 32-3.

SOLUCIÓN *a*) Puesto que $f = r/2 = 15.0$ cm, el objeto está entre el espejo y el punto focal. Dibuje los tres rayos como se describió anteriormente (figura 32-15); se ilustran saliendo de la punta del objeto en la figura 32-17. El rayo 1 deja la punta del objeto, se dirige al espejo paralelo al eje y se refleja a través de F. El rayo 2 no se puede dirigir hacia F porque no incidiría sobre el espejo; así que el rayo 2 debe apuntar como si partiera de F (línea punteada) y se dirigiera al espejo, y luego se refleja paralelo al eje principal. El rayo 3 es perpendicular al espejo, como antes. Los rayos reflejados en el espejo divergen y, por ende, nunca coinciden en un punto. Sin embargo, parecen provenir de un punto detrás del espejo. Este punto ubica la imagen de la punta de la flecha. En consecuencia, la imagen está detrás del espejo y es *virtual*. (¿Por qué?)
b) Con base en la ecuación 32-2, encuentre d_i cuando $d_o = 10.0$ cm:

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{15.0\text{ cm}} - \frac{1}{10.0\text{ cm}} = \frac{2-3}{30.0\text{ cm}} = -\frac{1}{30.0\text{ cm}}.$$

Por lo tanto, $d_i = -30.0$ cm. El signo menos significa que la imagen está detrás del espejo, lo que también indicó el diagrama. La amplificación es $m = -d_i/d_o = -(-30.0\text{ cm})/(10.0\text{ cm}) = +3.00$. De manera que la imagen es 3.00 veces más grande que el objeto. El signo más indica que la imagen es derecha (igual que el objeto), lo que coincide con el diagrama de rayos, figura 32-17.

NOTA La distancia de la imagen no se puede obtener con precisión al medir en la figura 32-17, porque el diagrama viola la suposición de rayo paraxial (los rayos se dibujan con ángulos más pronunciados para hacerlos claramente visibles).

NOTA Cuando el objeto se ubica dentro del punto focal de un espejo cóncavo ($d_o < f$), la imagen siempre es derecha y vertical. Y si el objeto O en la figura 32-17 es uno mismo, uno se ve con claridad, porque los rayos reflejados en el punto O son divergentes. La imagen es derecha y alargada.

FÍSICA APLICADA
Cómo verse uno mismo en una imagen derecha y amplificada en un espejo cóncavo

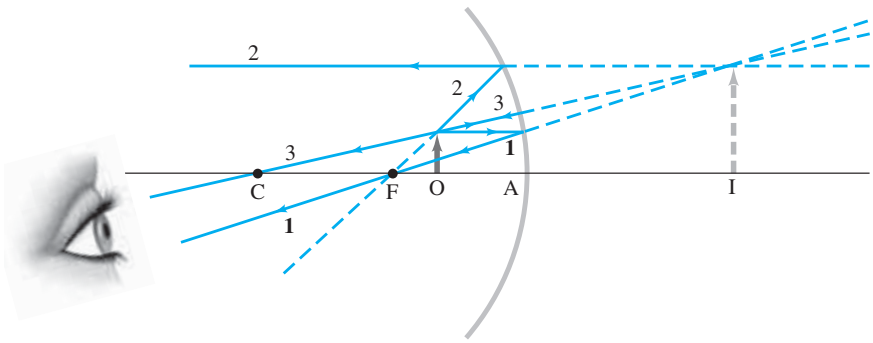


FIGURA 32–17 Objeto colocado dentro del punto focal F. La imagen está *detrás* del espejo y es *virtual*, ejemplo 32-6. [Note que la escala vertical (altura del objeto = 1.0 cm) es diferente de la horizontal (OA = 10.0 cm) para facilitar el dibujo, y reduce la precisión del dibujo].

FÍSICA APLICADA
Espejo amplificador (para afeitar o con fines cosméticos)

Es útil comparar las figuras 32-15 y 32-17. Se puede ver que, si el objeto está dentro del punto focal ($d_o < f$), como en la figura 32-17, la imagen es virtual, derecha y amplificada. Así es como se usa un espejo para afeitarse o con fines cosméticos: el individuo debe colocar la cabeza más cerca del espejo que el punto focal si se quiere ver derecho (figura 32-11a). Si el objeto está *más allá* del punto focal, como en la figura 32-15, la imagen es real e invertida (de cabeza, ¡y difícil de usar!). Si la amplificación tiene magnitud mayor o menor que 1.0 en el último caso depende de la posición del objeto en relación con el centro de curvatura, punto C. Practique la elaboración de diagramas de rayos con diversas distancias objeto.

La ecuación del espejo también se sostiene para un espejo plano: la distancia focal es $f = r/2 = \infty$ y la ecuación 32-2 produce $d_i = -d_O$.

Cómo ver la imagen

Para que el ojo de una persona vea una imagen clara, el ojo debe estar en un lugar donde intercepte los rayos divergentes provenientes de puntos en la imagen, como es el caso para la posición del ojo en las figuras 32-15 y 32-16. Nuestros ojos están hechos para ver objetos normales, lo que siempre significa que los rayos divergen hacia el ojo como se muestra en la figura 32-1. (O, para objetos muy distantes como las estrellas, los rayos en esencia se vuelven paralelos; véase la figura 32-12). Si usted colocara su ojo entre los puntos O e I de la figura 32-16, por ejemplo, los rayos *convergentes* que provienen del objeto OO′ entrarían a su ojo y el cristalino de su ojo no podría enfocarlos; vería una imagen borrosa. [En el capítulo 33 se estudiará más el ojo].

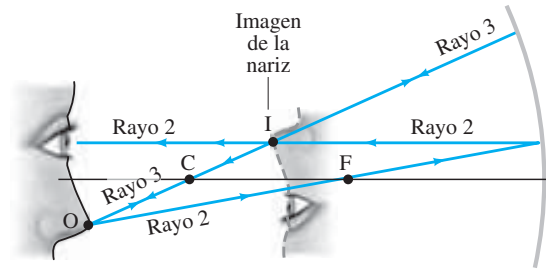


FIGURA 32–18 Usted observa una clara imagen invertida de su rostro cuando está más allá de C($d_o > 2f$), porque los rayos que llegan a su ojo son divergentes. Los rayos estándar 2 y 3 se muestran saliendo del punto O en su nariz. El rayo 2 (al igual que otros rayos cercanos) entra a su ojo. Note que los rayos son divergentes y que se dirigen hacia la izquierda del punto de imagen I.

Si *usted* es el objeto OO′ en la figura 32-16, situado entre F y C, e intenta verse usted mismo en el espejo, vería una mancha; pero la persona cuyo ojo se muestra en la figura 32-16 puede verlo con claridad. Uno podrá verse a sí mismo claramente, pero de cabeza, si está a la izquierda de C en la figura 32-16, donde $d_o > 2f$. ¿Por qué? Porque los rayos reflejados de la imagen serán *divergentes* en su posición, como se demuestra en la figura 32-18, y su ojo podrá enfocarlos. También puede verse usted mismo claramente, y en posición derecha, si está más cerca del espejo que su punto focal ($d_o < f$), como se vio en el ejemplo 32-6, figura 32-17.

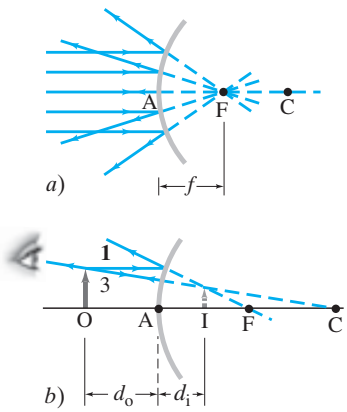


FIGURA 32–19 Espejo convexo: *a*) El punto focal está en F, detrás del espejo; *b*) la imagen I del objeto en O es virtual, derecha y más pequeña que el objeto. [No está a escala para el ejemplo 32-7].

Espejos convexos

El análisis usado para espejos cóncavos es aplicable a espejos **convexos**. Incluso la ecuación del espejo (ecuación 32-2) se sostiene para un espejo convexo, aunque las cantidades implicadas deben definirse cuidadosamente. La figura 32-19a ilustra rayos paralelos que inciden sobre un espejo convexo. De nuevo, la aberración esférica será significativa (figura 32-13), a menos que se suponga que el tamaño del espejo es muy pequeño comparado con su radio de curvatura. Los rayos reflejados divergen, pero parecen provenir del punto F detrás del espejo. Éste es el **punto focal**, y su distancia desde el centro del espejo (punto A) es la distancia **focal**, f. Es fácil demostrar que, de nuevo, $f = r/2$. Se ve que un objeto en el infinito produce una imagen virtual en un espejo convexo. De hecho, sin importar dónde se coloque el objeto en el lado reflectante de un espejo convexo, la imagen será virtual y derecha, como se indica en la figura 32-19b. Para encontrar la imagen, dibuje los rayos 1 y 3 de acuerdo con las reglas usadas antes en el espejo cóncavo, como se muestra en la figura 32-19b. Note que, aunque los rayos

1 y 3 en realidad no pasan a través de los puntos F y C, la línea a lo largo de la cual se dibuja cada uno sí lo hace (se representa punteada).

La ecuación del espejo, ecuación 32-2, se cumple para espejos convexos; sin embargo, la distancia focal f es negativa al igual que el radio de curvatura. La prueba se deja como problema. Además, se deja como problema mostar que la ecuación 32-3 para la amplificación también es válida.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Espejos esféricos

1. Siempre **dibuje un diagrama de rayos**, aun cuando vaya a realizar un cálculo analítico: el diagrama sirve como comprobación, incluso si no es preciso. Desde un punto en el objeto, dibuje al menos dos, de preferencia tres, de los rayos más fáciles de dibujar, con las reglas descritas en la figura 32-15. El punto de imagen es donde los rayos reflejados se intersecan o parecen intersecar.
2. Aplique la **ecuación del espejo**, ecuación 32-2, y la **ecuación de amplificación**, ecuación 32-3. Es muy importante seguir las convenciones de signos (véase el siguiente punto).
3. **Convenciones de signos**
   a) Cuando el objeto, la imagen o el punto focal esté sobre el lado reflectante del espejo (a la izquierda en los dibujos), la distancia correspondiente es positiva. Si alguno de estos puntos está detrás del espejo (a la derecha), la distancia correspondiente es negativa.[†]
   b) La altura de la imagen h_i es positiva si la imagen está derecha, y negativa si está invertida en relación con el objeto (h_o siempre se considera positiva).
4. **Compruebe** que la solución analítica es congruente con el diagrama de rayos.

[†]Las distancias del objeto son positivas para los objetos materiales, pero pueden ser negativas en sistemas con más de un espejo o más de una lente; véase la sección 33-3.

EJEMPLO 32–7 **Espejo retrovisor convexo.** Un espejo retrovisor externo en un automóvil es convexo, con un radio de curvatura de 16.0 m (figura 32-20). Determine la ubicación de la imagen y su amplificación para un objeto a 10.0 m del espejo.

FÍSICA APLICADA
Espejo retrovisor convexo

PLANTEAMIENTO Se siguen explícitamente los pasos de la estrategia de Resolución de problemas.

SOLUCIÓN

1. **Dibuje un diagrama de rayos.** El diagrama de rayos será como el de la figura 32-19b, pero la gran distancia del objeto ($d_0 = 10.0$ m) hace difícil un dibujo preciso. Se tiene un espejo convexo, de manera que r es negativo por convención.
2. **Ecuaciones de espejo y amplificación.** El centro de curvatura de un espejo convexo está detrás del espejo, como lo está su punto focal, así que se establece que $r = -16.0$ m, de manera que la distancia focal es $f = r/2 = -8.0$ m. El objeto está enfrente del espejo, $d_o = 10.0$ m. Al despejar $1/d_i$ en la ecuación del espejo, ecuación 32-2, se obtiene

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{-8.0\text{ m}} - \frac{1}{10.0\text{ m}} = \frac{-10.0 - 8.0}{80.0\text{ m}} = -\frac{18}{80.0\text{ m}}.$$

Por lo tanto, $d_i = -80.0\text{ m}/18 = -4.4$ m. La ecuación 32-3 da la amplificación

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{(-4.4\text{ m})}{(10.0\text{ m})} = +0.44.$$

3. **Convenciones de signos.** La distancia de la imagen es negativa, −4.4 m, así que la imagen está *detrás* del espejo. La amplificación es $m = +0.44$, así que la imagen está *derecha* (misma orientación que el objeto) y tiene menos de la mitad de la altura que el objeto.
4. **Comprobación.** Los resultados son congruentes con la figura 32-19b.

FIGURA 32–20 Ejemplo 32–7.

Los espejos retrovisores convexos de los vehículos a veces vienen con una advertencia de que los objetos están más cerca de lo que parecen en el espejo. El hecho de que d_i pueda ser menor que d_o (como en el ejemplo 32-7) parece contradecir esta observación. La verdadera razón por la que los objetos parecen más alejados es que su imagen en el espejo convexo es *más pequeña* de lo que sería en un espejo plano, y la distancia de los objetos ordinarios, como la de los otros automóviles, se juzga principalmente por su tamaño.

TABLA 32–1 Índices de refracción†

Material	$n = \frac{c}{v}$
Vacío	1.0000
Aire (a TPE)	1.0003
Agua	1.33
Alcohol etílico	1.36
Vidrio	
Cuarzo fundido	1.46
Cristal corona	1.52
Vidrio de plomo (o vidrio flint) ligero	1.58
Lucita o plexiglás	1.51
Cloruro de sodio	1.53
Diamante	2.42

† $\lambda = 589$ nm.

32–4 Índice de refracción

En el capítulo 31 se vio que la rapidez de la luz en el vacío es

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s},$$

que generalmente se redondea a

$$3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

cuando no se requieren resultados extremadamente exactos.

En el aire la rapidez de la luz sólo es ligeramente menor. En otros materiales transparentes, como vidrio o agua, la rapidez siempre es menor que en el vacío. Por ejemplo, en el agua, la luz viaja a aproximadamente $\frac{3}{4}c$. El cociente entre la rapidez de la luz en el vacío y la rapidez v en un material dado se llama **índice de refracción**, n, de ese material:

$$n = \frac{c}{v}. \qquad \textbf{(32–4)}$$

El índice de refracción nunca es menor que 1, y en la tabla 32-1 se incluyen los valores para varios materiales. Por ejemplo, como $n = 2.42$ para el diamante, la rapidez de la luz en el diamante es

$$v = \frac{c}{n} = \frac{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{2.42} = 1.24 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Como se verá más tarde, n varía un poco con la longitud de onda de la luz, excepto en el vacío, de manera que en la tabla 32-1 se especifica una longitud de onda particular, la de la luz amarilla con longitud de onda $\lambda = 589$ nm.

El hecho de que la luz viaje más lentamente en la materia que en el vacío se explica a nivel atómico en virtud de la absorción y reemisión de la luz por los átomos y las moléculas del material.

32–5 Refracción: Ley de Snell

Cuando la luz pasa de un medio transparente a otro con un índice de refracción diferente, parte de la luz incidente se refleja en la frontera. El resto pasa hacia el nuevo medio. Si un rayo de luz incide en un ángulo con la superficie (de manera que no sean perpendiculares), el rayo cambia de dirección conforme entra al nuevo medio. Este cambio en dirección, o desviación, se llama **refracción**.

La figura 32-21a representa un rayo que pasa del aire al agua. El ángulo θ_1 es el ángulo que el rayo incidente forma con la normal (perpendicular) a la superficie y se llama **ángulo de incidencia**. El ángulo θ_2 es el **ángulo de refracción**, el ángulo que el rayo refractado forma con la normal a la superficie. Observe que el rayo se desvía hacia la normal cuando entra al agua. Éste siempre es el caso cuando el rayo entra a un medio donde la rapidez de la luz es *menor* (y el índice de refracción es mayor, ecuación 32-4). Si la luz viaja de un medio a otro donde su rapidez es *mayor*, el rayo se desvía alejándose de la normal; esto se ilustra en la figura 32-21b para un rayo que viaja del agua al aire.

⚠ CUIDADO

Los ángulos θ_1 y θ_2 se miden desde la perpendicular, no desde la superficie

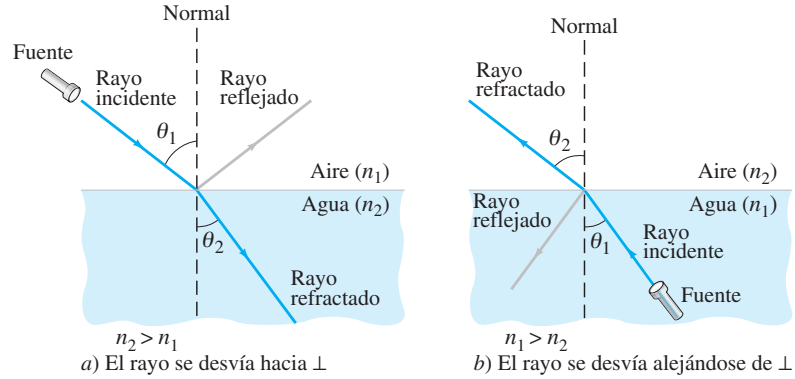


FIGURA 32–21 Refracción. *a*) Luz refractada cuando pasa del aire (n_1) al agua (n_2): $n_2 > n_1$. *b*) Luz refractada cuando pasa del agua (n_1) al aire (n_2): $n_1 > n_2$.

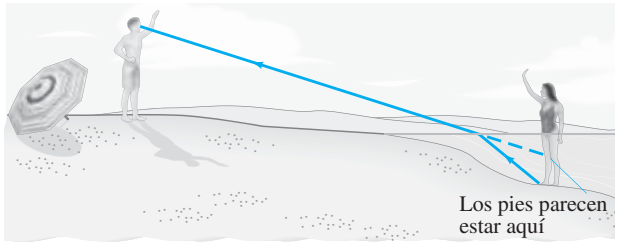


FIGURA 32–22 Diagrama de rayos que revela por qué las piernas de una persona parecen más cortas cuando está de pie mientras se encuentra sumergida en el agua hasta la cintura: la trayectoria de la luz que viaja desde los pies del bañista hasta el ojo del observador se desvía en la superficie del agua, y el cerebro interpreta que la luz viajó en línea recta desde más arriba (línea punteada).

La refracción es responsable de muchas ilusiones ópticas comunes. Por ejemplo, una persona que se encuentra de pie, sumergida en el agua hasta la cintura, parece tener piernas acortadas. Como se aprecia en la figura 32-22, los rayos que salen de los pies de la persona se desvían en la superficie. El cerebro del observador supone que los rayos viajaron en una trayectoria en línea recta (línea punteada) y así los pies parecen estar más arriba de lo que en realidad están. De manera similar, cuando se coloca una pajilla en agua, parece que estuviera doblada (figura 32-23).

FIGURA 32–23 Una pajilla en agua parece doblada aun cuando no lo está.

Ley de Snell

El ángulo de refracción depende de la rapidez de la luz en los dos medios y del ángulo de incidencia. Hacia 1621, Willebrord Snell (1591-1626) llegó experimentalmente a la relación analítica entre θ_1 y θ_2 que se representa en la figura 32-21. Se le conoce como **ley de Snell** y se escribe

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2. \qquad \textbf{(32–5)}$$

LEY DE SNELL (LEY DE REFRACCIÓN)

θ_1 es el ángulo de incidencia y θ_2 es el ángulo de refracción; n_1 y n_2 son los respectivos índices de refracción en los materiales. Véase la figura 32-21. Los rayos incidente y refractado se encuentran en el mismo plano, que también incluye la perpendicular a la superficie. La ley de Snell es la **ley de refracción**. (La ley de Snell se dedujo en la sección 15-10, donde la ecuación 15-19 sólo es una combinación de las ecuaciones 32-5 y 32-4. También se le deducirá en el capítulo 34 con la teoría ondulatoria de la luz).

A partir de la ley de Snell es claro que, si $n_2 > n_1$, entonces $\theta_2 < \theta_1$. Esto es, si la luz entra a un medio donde n es mayor (y su rapidez es menor), entonces el rayo se desvía hacia la normal. Y si $n_2 < n_1$, entonces $\theta_2 > \theta_1$, así que el rayo se desvía alejándose de la normal. Esto es lo que se vio en la figura 32-21.

EJERCICIO D La luz pasa de un medio con $n = 1.3$ hacia un medio con $n = 1.5$. ¿La luz se desvía acercándose hacia la perpendicular a la interfaz o alejándose de ella?

EJEMPLO 32–8 **Refracción a través de vidrio plano.** Luz que viaja en el aire incide sobre una pieza plana de vidrio uniformemente grueso en un ángulo incidente de 60°, como se muestra en la figura 32-24. Si el índice de refracción del vidrio es 1.50, *a*) ¿cuál es el ángulo de refracción θ_A en el vidrio?; *b*) ¿cuál es el ángulo θ_B con el que el rayo sale del vidrio?

PLANTEAMIENTO Aplique la ley de Snell a la primera superficie, donde la luz entra al vidrio, y de nuevo en la segunda superficie, donde sale del vidrio y entra al aire.

SOLUCIÓN *a*) El rayo incidente está en el aire, así que $n_1 = 1.00$ y $n_2 = 1.50$. Al aplicar la ley de Snell donde la luz entra al vidrio ($\theta_1 = 60°$) se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta_A = \frac{1.00}{1.50}\operatorname{sen} 60° = 0.5774,$$

de manera que $\theta_A = 35.3°$.

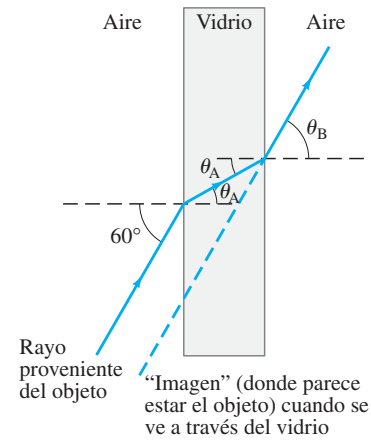
b) Puesto que las caras del vidrio son paralelas, el ángulo incidente en la segunda superficie es justo θ_A (geometría simple), de manera que $\operatorname{sen}\theta_A = 0.577$. En esta segunda interfaz, $n_1 = 1.50$ y $n_2 = 1.00$. Por lo tanto, el rayo reingresa al aire en un ángulo θ_B ($= \theta_2$) dado por

$$\operatorname{sen}\theta_B = \frac{1.50}{1.00}\operatorname{sen}\theta_A = 0.866,$$

y $\theta_B = 60°$. Por consiguiente, la dirección de un rayo de luz no cambia al pasar a través de un trozo plano de vidrio de grosor uniforme.

NOTA Este resultado es válido para cualquier ángulo de incidencia. Sin embargo, el rayo se desplaza ligeramente hacia un lado. Esto se puede observar al mirar un objeto a través de un trozo de vidrio (cerca de su borde) y luego mover ligeramente la cabeza hacia un lado, de manera que se vea el objeto directamente. El objeto "salta".

FIGURA 32–24 Luz que pasa a través de un trozo de vidrio (ejemplo 32-8).



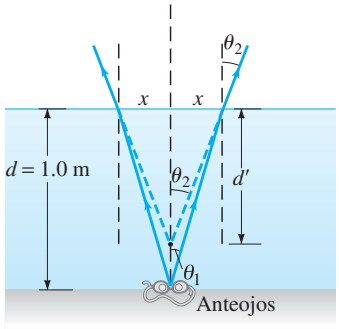


FIGURA 32–25 Ejemplo 32–9.

EJEMPLO 32–9 **Profundidad aparente de una alberca.** Un nadador soltó sus anteojos protectores en el fondo de una alberca en la zona poco profunda, marcada con 1.0 m de profundidad. Pero los anteojos no parecen estar a esa profundidad. ¿Por qué? ¿A qué profundidad parecen estar los anteojos cuando se observa en línea recta hacia el fondo del agua?

PLANTEAMIENTO Dibuje un diagrama de rayos que muestre dos rayos que se dirigen hacia arriba en un pequeño ángulo desde un punto en los anteojos y que se refractan en la superficie (plana) del agua, figura 32-25. Los dos rayos que viajan hacia arriba desde los anteojos se refractan *alejándose* de la normal conforme salen del agua, y así, parecen divergir desde un punto por encima de los anteojos (líneas punteadas), por lo que el agua parece menos profunda de lo que en realidad es.

SOLUCIÓN Para calcular la profundidad aparente d' (figura 32-25), dada una profundidad real $d = 1.0$ m, se usa la ley de Snell con $n_1 = 1.33$ para el agua y $n_2 = 1$ para el aire:

$$\operatorname{sen}\theta_2 = n_1 \operatorname{sen}\theta_1 .$$

Sólo se consideran ángulos pequeños, así que sen $\theta \approx \tan\theta \approx \theta$, con θ en radianes. Así que la ley de Snell se convierte en

$$\theta_2 \approx n_1\theta_1 .$$

A partir de la figura 32-25 se ve que

$$\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{x}{d'} \quad \text{y} \quad \theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{x}{d}.$$

Al poner esto en la ley de Snell, $\theta_2 \approx n_1\,\theta_1$, se obtiene

$$\frac{x}{d'} \approx n_1\frac{x}{d}$$

o

$$d' \approx \frac{d}{n_1} = \frac{1.0\text{ m}}{1.33} = 0.75\text{ m}.$$

La alberca parece tener sólo tres cuartos de la profundidad que en realidad tiene.

32–6 Espectro visible y dispersión

Una propiedad obvia de la luz visible es su color. El color se relaciona con las longitudes de onda o frecuencias de la luz. (En el capítulo 34 se explicará cómo se descubrió esto). La luz visible, aquélla a la que nuestros ojos son sensibles, tiene longitudes de onda en el aire en el intervalo que va aproximadamente de 400 nm a 750 nm.[†] Esto se conoce como **espectro visible**, y dentro de él se encuentran los diferentes colores, del violeta al rojo, como se ilustra en la figura 32-26. La luz con longitud de onda más corta que 400 nm (= violeta) se llama **ultravioleta** (UV), y la luz con longitud de onda mayor que 750 nm (= rojo) se llama **infrarroja** (IR).[‡] Aunque los ojos humanos no son sensibles a la luz UV o IR, algunos tipos de película fotográfica y cámaras digitales responden a ellas.

Un prisma permite separar la luz blanca en un arcoíris de colores, como se ilustra en la figura 32-27. Esto sucede porque el índice de refracción de un material depende de la longitud de onda, como se muestra para varios materiales en la figura 32-28. La luz blanca es una mezcla de todas las longitudes de onda visibles, y cuando incide sobre

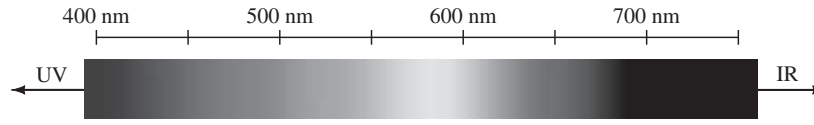


FIGURA 32–26 Espectro de luz visible que indica el intervalo de longitudes de onda para los diversos colores como se ven en el aire. Muchos colores, como el café, no aparecen en el espectro; están hechos de una mezcla de longitudes de onda. (Véase el pliego a color al final del libro).

[†]A veces se usa la unidad angstrom (Å) cuando nos referimos a la luz: 1 Å = 1×10^{-10} m. Así, la luz visible cae en el intervalo de longitud de onda de 4000 Å a 7500 Å.

[‡]El espectro electromagnético completo se ilustra en la figura 31-12.

FIGURA 32–27 La luz blanca que pasa a través de un prisma se descompone en sus colores constituyentes. (Véase el pliego a color al final del libro).

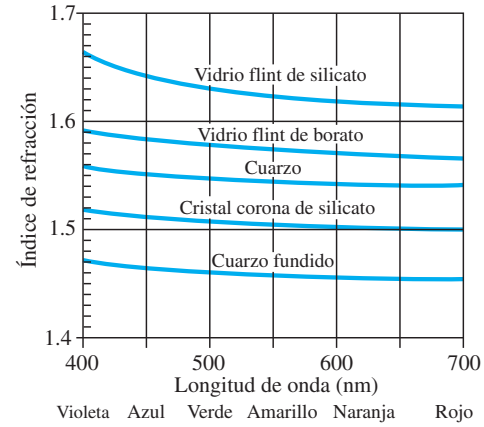


FIGURA 32–28 Índice de refracción como función de la longitud de onda para varios sólidos transparentes.

un prisma, como en la figura 32-29, las diferentes longitudes de onda se desvían en grados variables. Puesto que el índice de refracción es mayor para las longitudes de onda más cortas, la luz violeta se desvía más y la roja menos, como se indica. Este despliegue de la luz blanca en el espectro completo se llama **dispersión**.

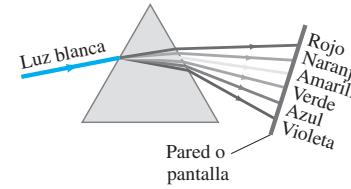
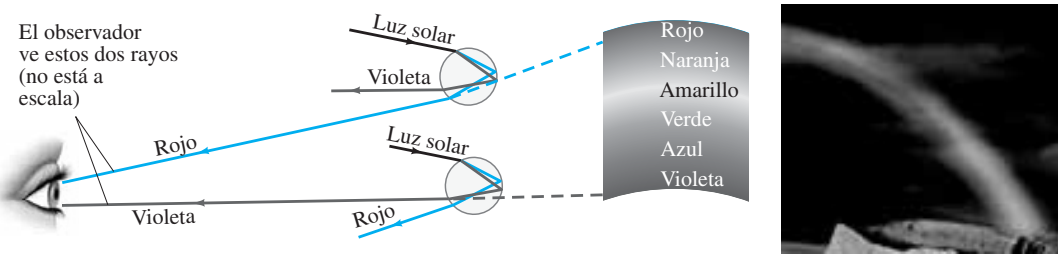


FIGURA 32–29 Luz blanca dispersada por un prisma en el espectro visible. (Véase el pliego a color al final del libro).

Los arcoíris son un ejemplo espectacular de dispersión: mediante gotas de agua. Los arcoíris aparecen cuando se observan gotas de agua caer mientras el Sol se encuentra detrás del observador. La figura 32-30 muestra cómo los rayos rojo y violeta se desvían mediante gotas de agua esféricas y se reflejan en la superficie posterior de la gota. El rojo se desvía menos y así llega a los ojos del observador desde las gotas que se encuentran a mayor altura en el cielo, como se indica en el diagrama. Por eso, la parte superior del arcoíris es roja.

FÍSICA APLICADA
Arcoíris

FIGURA 32–30 *a*) Diagrama de rayos que explica cómo se forma *b*) un arcoíris. (Véase el pliego a color al final del libro).



a) *b*)

El espectro visible, figura 32-26, no incluye todos los colores vistos en la naturaleza. Por ejemplo, en la figura 32-26 no hay café. Muchos de los colores que se ven son una mezcla de longitudes de onda. Para fines prácticos, la mayoría de los colores naturales se pueden reproducir utilizando tres colores primarios. Se trata del rojo, el verde y el azul para fuentes directas de visión como monitores de TV y de computadora. Para las tintas que se usan en impresión, los colores primarios son cian, amarillo y magenta.

Para cualquier onda, su velocidad v se relaciona con su longitud de onda λ y su frecuencia f mediante $v = f\lambda$ (ecuación 15-1 o 31-14). Cuando una onda viaja de un material a otro, la frecuencia de la onda no cambia a través de la frontera, pues un punto (un átomo) en la frontera oscila a esa frecuencia. De esta forma, si la luz pasa del aire a un material con índice de refracción n, la longitud de onda se convierte en (recuerde la ecuación 32-4):

$$\lambda_n = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda}{n} \qquad \textbf{(32–6)}$$

donde λ es la longitud de onda en el vacío o en el aire, y λ_n es la longitud de onda en el material con índice de refracción n.

EJEMPLO CONCEPTUAL 32–10 **Color de la luz observado bajo el agua.** Dijimos que el color depende de la longitud de onda. Por ejemplo, un objeto que emite 650 nm de luz en aire, se ve rojo. Pero esto sólo es cierto en aire. Si este mismo objeto se observa cuando está bajo el agua, sigue pareciendo rojo. Pero la longitud de onda en el agua λ_n es (ecuación 32-6) 650 nm/1.33 = 489 nm. La luz con longitud de onda de 489 nm parecería azul en el aire. ¿Puede explicar por qué la luz parece roja en vez de azul cuando se observa bajo el agua?

RESPUESTA Debe ser porque el ojo no responde a la longitud de onda, sino más bien a la frecuencia. Por ejemplo, la frecuencia de luz roja de 650 nm en aire es $f = c/\lambda = (3.0 \times 10^8\ \text{m/s})/(650 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 4.6 \times 10^{14}$ Hz, y no cambia cuando la luz viaja de un medio a otro. Sólo cambia λ.

NOTA Si los colores se clasifican por frecuencia, las asignaciones de color serían válidas para cualquier material. Por lo general, los colores se especifican por *longitud de onda* en el aire (incluso si es menos general), no sólo porque generalmente los objetos se ven en el aire, sino porque la longitud de onda es lo que comúnmente se mide (es más fácil de medir que la frecuencia).

32–7 Reflexión total interna; fibras ópticas

Cuando la luz pasa de un material a otro donde el índice de refracción es menor (por ejemplo, del agua al aire), la luz se desvía alejándose de la normal, como sucede con los rayos I y J en la figura 32-31. A un ángulo de incidencia particular, el ángulo de refracción será de 90°, y el rayo refractado pasaría rozando la superficie (rayo K) en este caso. El ángulo incidente al que esto ocurre se llama **ángulo crítico**, θ_C. A partir de la ley de Snell, θ_C está dado por

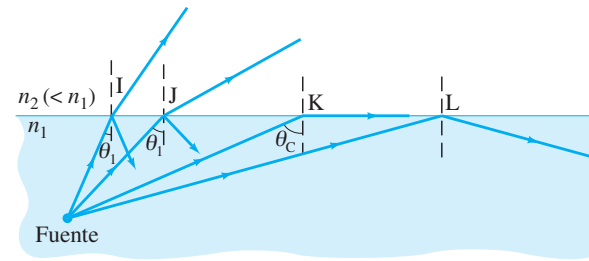


FIGURA 32–31 Puesto que $n_2 < n_1$, los rayos de luz se reflejan totalmente de manera interna si el ángulo de incidencia $\theta_1 > \theta_C$, como sucede con el rayo L. Si $\theta_1 < \theta_C$, como ocurre con los rayos I y J, sólo una parte de la luz se refleja y el resto se refracta.

$$\text{sen}\,\theta_C = \frac{n_2}{n_1}\,\text{sen}\,90^\circ = \frac{n_2}{n_1}. \qquad \textbf{(32–7)}$$

Para cualquier ángulo incidente menor que θ_C existirá un rayo refractado, aunque parte de la luz también se reflejará en la frontera. Sin embargo, en el caso de ángulos incidentes mayores que θ_C, la ley de Snell diría que sen θ_2 es mayor que 1.00. Sin embargo, el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que 1.00. En este caso no existe rayo refractado en absoluto y *toda la luz se refleja*, como sucede con el rayo L en la figura 32-31. Este efecto se llama **reflexión total interna**. La reflexión total interna sólo ocurre cuando la luz incide sobre una frontera donde el medio que se encuentra más allá de ésta tiene un menor índice de refracción.

⚠ **CUIDADO**
Reflexión total interna (ocurre sólo si el índice de refracción es menor más allá de la frontera)

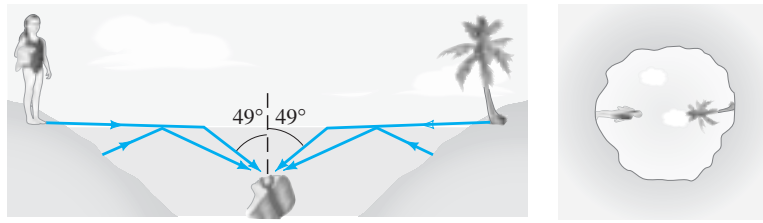
EJERCICIO E Llene un vertedero con agua. Coloque un reloj a prueba de agua justo bajo la superficie de manera que el cristal plano del reloj quede paralelo a la superficie del agua. Desde arriba todavía es posible ver la hora en el reloj. Cuando mueve su cabeza a un lado suficientemente lejos, ¿qué ve y por qué?

EJEMPLO CONCEPTUAL 32–11 **Ver en forma ascendente desde el agua.** Describa qué vería una persona que mirara hacia arriba mientras está debajo de la superficie perfectamente tranquila de un lago o una alberca.

RESPUESTA Para una interfaz aire-agua, el ángulo crítico está dado por

$$\operatorname{sen}\theta_C = \frac{1.00}{1.33} = 0.750.$$

Por lo tanto, $\theta_C = 49°$. En consecuencia, la persona vería el mundo exterior comprimido en un círculo cuyos bordes forman un ángulo de 49° con la vertical. Más allá de este ángulo, la persona vería reflejos de los lados y el fondo del lago o de la alberca (figura 32-32).



a) *b*)

FIGURA 32–32 *a*) Rayos de luz y *b*) vista hacia arriba desde el fondo del agua (la superficie del agua debe ser muy tranquila). Ejemplo 32-11.

Los diamantes logran su brillo a partir de una combinación de dispersión y reflexión total interna. Puesto que los diamantes tienen un índice de refracción muy alto, de aproximadamente 2.4, el ángulo crítico para la reflexión total interna es de sólo 25º. Por lo tanto, la luz dispersada en un espectro dentro del diamante incide sobre muchas de las superficies internas del diamante antes de que incida sobre una a menos de 25º y salga.

Después de muchas de esas reflexiones, la luz viajó bastante como para que los colores se separen lo suficiente para que nuestros ojos los capten de manera individual y con intenso brillo después de dejar al diamante.

Muchos instrumentos ópticos, como los binoculares, usan reflexión total interna dentro de un prisma para reflejar la luz. La ventaja es que casi el 100% de la luz se refleja, mientras que incluso los mejores espejos reflejan un poco menos del 100%. Por esa razón, la imagen es más brillante, en especial después de varias reflexiones. Para vidrio con $n = 1.50$, $\theta_C = 41.8°$. En consecuencia, los prismas de 45° reflejarán internamente toda la luz, si se orientan como los binoculares de la figura 32-33.

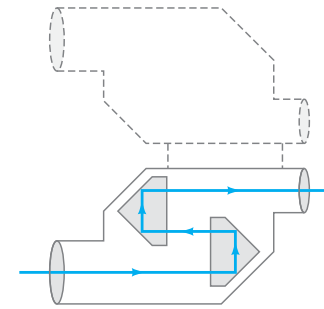


FIGURA 32–33 Reflexión total interna de la luz mediante prismas en unos binoculares.

EJERCICIO F Si en los binoculares se usaran lentes plásticos de 45°, ¿qué índice de refracción mínimo deberá tener el plástico?

Fibras ópticas

La reflexión total interna es el principio detrás de las **fibras ópticas**. Son comunes fibras de vidrio y de plástico tan delgadas como unos cuantos micrómetros de diámetro. A un haz de tales fibras delgadas se le llama **tubo de luz**, y la luz[†] se puede transmitir a lo largo de éste casi sin pérdida gracias a la reflexión total interna. La figura 32-34 muestra cómo la luz que viaja por una fibra delgada sólo realiza colisiones oblicuas con las paredes, por lo que ocurre reflexión total interna. Incluso si el tubo de luz se dobla en una forma complicada, el ángulo crítico no se superará, de manera que la luz se transmite prácticamente sin disminución hasta el otro extremo. Sí ocurren pérdidas muy pequeñas, principalmente por reflexión en los extremos y absorción dentro de la fibra.

En la medicina y las comunicaciones hay importantes aplicaciones de los cables de fibra óptica. Se usan en vez de alambre para transmitir llamadas telefónicas, señales de video y datos de computadora. La señal es un haz de luz modulado (un haz de luz cuya intensidad se puede variar) y los datos se transmiten a una tasa mucho mayor y con menos pérdida y menos interferencia que una señal eléctrica en un alambre de cobre. Se han desarrollado fibras capaces de transportar más de cien longitudes de onda separadas, cada una modulada para llevar hasta 10 gigabits (10^{10} bits) de información por segundo. Eso representa un terabit (10^{12} bits) por segundo para las cien longitudes de onda.

FIGURA 32–34 Luz reflejada totalmente en la superficie interior de una fibra de vidrio o plástico transparente.

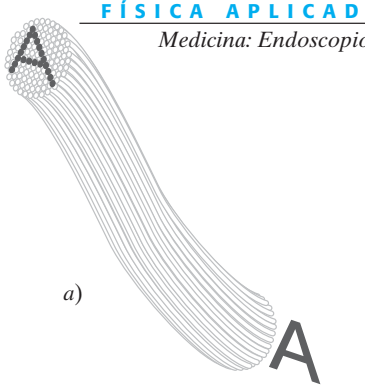
FÍSICA APLICADA

Fibras ópticas en comunicaciones

[†]Las fibras ópticas se usan no sólo con luz visible, sino también con luz infrarroja, luz ultravioleta y microondas.

FÍSICA APLICADA

Medicina: Endoscopios



a)

b)

FIGURA 32–35 *a*) Cómo se forma una imagen de fibra óptica. *b*) Ejemplo de dispositivo de fibra óptica insertado a través de la boca para examinar el tracto gastrointestinal; la imagen se forma sobre una pantalla.

El uso de las fibras ópticas para transmitir una imagen clara es particularmente útil en medicina, figura 32-35. Por ejemplo, los pulmones de un paciente se pueden examinar al insertar un tubo de luz conocido como broncoscopio a través de la boca y por los bronquios. La luz se envía por un conjunto externo de fibras para iluminar los pulmones. La luz reflejada regresa por un conjunto de fibras en el núcleo central. La luz directamente enfrente de cada fibra viaja por esa fibra. En el extremo opuesto, un observador mira una serie de manchas brillantes y oscuras, muy parecidas a una pantalla de TV; esto es, una imagen de lo que se encuentra en el extremo opuesto. En cada extremo se usan lentes. La imagen se puede ver directamente o en la pantalla de un monitor o en una película. Las fibras deben aislarse ópticamente unas de otras, por lo general mediante un delgado recubrimiento de material con índice de refracción menor que el de la fibra. Cuanto mayor sea el número de fibras que haya y más pequeñas sean, más detallada será la imagen. Tales instrumentos, que incluyen broncoscopios, colonoscopios (para observar el colon) y endoscopios (para observar el estómago u otro órganos), son extremadamente útiles para examinar lugares difíciles de alcanzar.

*32–8 Refracción en una superficie esférica

Ahora se examinará la refracción de rayos en la superficie esférica de un material transparente. Tal superficie puede ser una cara del cristalino o la córnea del ojo. Para ser generales, considere un objeto que se ubica en un medio cuyo índice de refracción es n_1, y que rayos desde cada punto del objeto pueden entrar a un medio cuyo índice de refracción es n_2. El radio de curvatura de la frontera esférica es R, y su centro de curvatura está en el punto C, figura 32-36. Ahora se demostrará que todos los rayos que salen de un punto O en el objeto se enfocarán en un solo punto I, el punto de imagen, si sólo se consideran rayos paraxiales: los rayos que forman un ángulo pequeño

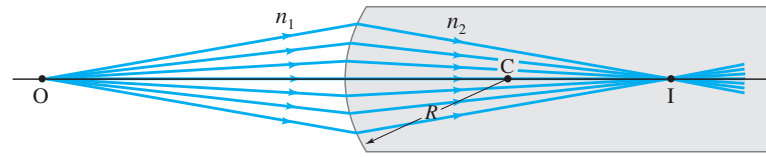


FIGURA 32–36 Los rayos provenientes del punto O sobre un objeto se enfocarán en un solo punto de imagen I mediante una frontera esférica entre dos materiales transparentes ($n_2 > n_1$), en tanto los rayos formen pequeños ángulos con el eje.

con el eje. Para hacerlo, considere un solo rayo que sale del punto O, como se indica en la figura 32-37. A partir de la ley de Snell, ecuación 32-5, se tiene

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 .$$

Se supone que los ángulos θ_1, θ_2, α, β y γ son pequeños, de manera que sen $\theta \approx \theta$ (en radianes), y la ley de Snell se convierte, aproximadamente, en

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 .$$

Además, $\beta + \phi = 180°$ y $\theta_2 + \gamma + \phi = 180°$, de manera que

$$\beta = \gamma + \theta_2 .$$

De igual modo, para el triángulo OPC,

$$\theta_1 = \alpha + \beta .$$

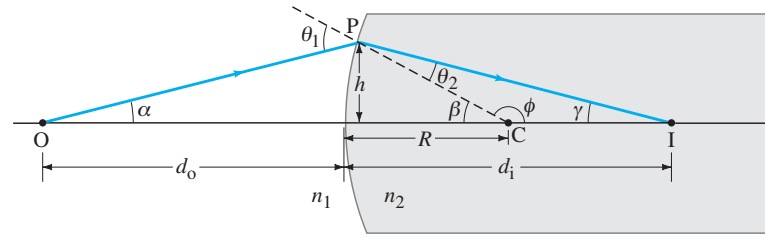


FIGURA 32–37 Diagrama para mostrar que todos los rayos paraxiales provenientes de O se enfocan en el mismo punto I ($n_2 > n_1$).

Estas tres relaciones se pueden combinar para producir

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta.$$

Puesto que sólo se considera el caso de ángulos pequeños, se puede escribir, aproximadamente,

$$\alpha = \frac{h}{d_o}, \qquad \beta = \frac{h}{R}, \qquad \gamma = \frac{h}{d_i},$$

donde d_O y d_i son las distancias del objeto y de la imagen, y h es la altura, como se muestra en la figura 32-37. Esto se sustituye en la ecuación anterior, se divide entre h y se obtiene

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \qquad \textbf{(32–8)}$$

Para una distancia de objeto dada d_o, esta ecuación indica que d_i, la distancia de la imagen, no depende del ángulo de un rayo. Por lo tanto, todos los rayos paraxiales se encuentran en el mismo punto I. Esto sólo es cierto para rayos que forman ángulos pequeños con el eje y entre sí, y es equivalente a suponer que el ancho de la superficie esférica refractante es pequeña comparada con su radio de curvatura. Si esta suposición no es verdadera, los rayos no convergirán en un punto; habrá aberración esférica, tal como para un espejo (véase la figura 32-13) y la imagen será borrosa. (La aberración esférica se estudiará con más detalle en la sección 33-10).

La ecuación 32-8 se deducirá usando la figura 32-37, para la cual la superficie esférica es convexa (vista por el rayo entrante). También es válida para una superficie cóncava, como se observa a partir de la figura 32-38, si se emplean las siguientes convenciones:

1. Si la superficie es convexa (de manera que el centro de curvatura C está en el lado de la superficie opuesto a aquél del cual proviene la luz), R es positivo; si la superficie es cóncava (C está en el mismo lado desde donde proviene la luz) R es negativo.
2. La distancia de la imagen, d_i, sigue la misma convención: positiva si está en el lado opuesto de donde proviene la luz, negativa si está en el mismo lado.
3. La distancia del objeto es positiva si está en el mismo lado de donde proviene la luz (éste es el caso normal, aunque cuando muchas superficies desvían la luz tal vez no lo sea), de otro modo es negativa.

Para el caso que se ilustra en la figura 32-38 con una superficie cóncava, tanto R como d_i son negativas cuando se usan en la ecuación 32-8. En este caso, advierta que la imagen es virtual.

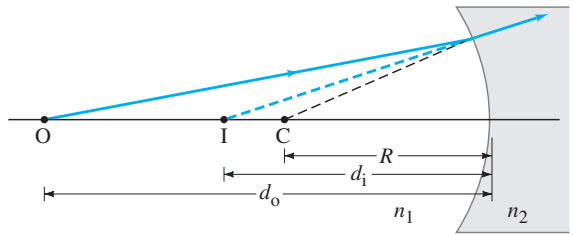


FIGURA 32–38 Los rayos provenientes de O refractados por una superficie cóncava forman una imagen virtual ($n_2 > n_1$). De acuerdo con las convenciones, $R < 0$, $d_i < 0$, $d_o > 0$.

EJEMPLO 32–12 **Profundidad aparente II.** Una persona mira verticalmente hacia abajo una alberca de 1.0 m de profundidad. ¿Qué profundidad parece tener el agua?

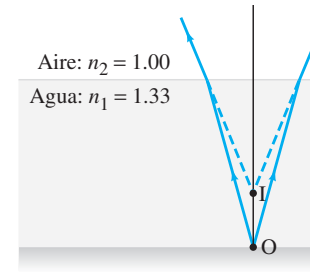
PLANTEAMIENTO En el ejemplo 32-9 se resolvió este problema con la ley de Snell. Aquí se empleará la ecuación 32-8.

SOLUCIÓN En la figura 32-39 se presenta un diagrama de rayos. El punto O representa un punto en el fondo de la alberca. Los rayos divergen y parecen provenir del punto I, la imagen. Se tiene $d_O = 1.0$ m y, para una superficie plana, $R = \infty$. Entonces la ecuación 32-8 se convierte en

$$\frac{1.33}{1.0\text{ m}} + \frac{1.00}{d_i} = \frac{(1.00 - 1.33)}{\infty} = 0.$$

En consecuencia, $d_i = -(1.0\text{ m})/(1.33) = -0.75$ m. De manera que la alberca parece tener sólo tres cuartos de profundidad de lo que realmente tiene; éste es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 32-9. El signo menos indica que el punto de imagen I está en el mismo lado de la superficie que O, y la imagen es virtual. Para ángulos que se alejan de la vertical, esta conclusión se debe modificar.

FIGURA 32–39 Ejemplo 32–12.



EJEMPLO 32–13 **Una "lente" esférica.** Una fuente puntual de luz se coloca a una distancia de 25.0 cm del centro de una esfera de vidrio ($n = 1.5$) de 10.0 cm de radio, figura 32-40. Encuentre la imagen de la fuente.

PLANTEAMIENTO Como se aprecia en la figura 32-40, hay dos refracciones, y se les trata sucesivamente, una a la vez. Los rayos de luz provenientes de la luz primero se refractan en la superficie de vidrio convexa que da frente a la fuente. Analice esta primera refracción, trátela como en la figura 32-36 e ignore el lado posterior de la esfera.

SOLUCIÓN Al usar la ecuación 32-8 (suponiendo rayos paraxiales) con $n_1 = 1.0$, $n_2 = 1.5$, $R = 10.0$ y $d_o = 25.0\text{ cm} - 10{,}0\text{ cm} = 15.0\text{ cm}$, despeje la distancia de la imagen que se forma en la superficie 1, d_{i1}:

$$\frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{n_2}\left(\frac{(n_2 - n_1)}{R} - \frac{n_1}{d_o}\right) = \frac{1}{1.5}\left(\frac{1.5 - 1.0}{10.0\text{ cm}} - \frac{1.0}{15.0\text{ cm}}\right) = -\frac{1}{90.0\text{ cm}}.$$

Por lo tanto, la imagen de la primera refracción se ubica a 90.0 cm *a la izquierda* de la superficie frontal. Esta imagen (I_1) ahora sirve como el objeto para la refracción que ocurre en la superficie posterior (superficie 2) de la esfera. Esta superficie es cóncava, de manera que $R = -10.0$ cm y se considera un rayo cerca del eje. Así, la distancia del objeto es $d_{o2} = 90.0\text{ cm} + 2(10.0\text{ cm}) = 110.0\text{ cm}$, y la ecuación 32-8 da, con $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.0$,

$$\frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{1.0}\left(\frac{1.0 - 1.5}{-10.0\text{ cm}} - \frac{1.5}{110.0\text{ cm}}\right) = \frac{4.0}{110.0\text{ cm}}$$

así que $d_{i2} = 28$ cm. En consecuencia, la imagen final se ubica a una distancia de 28 cm del lado posterior de la esfera.

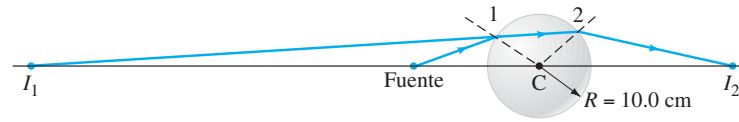


FIGURA 32–40 Ejemplo 32–13.

Resumen

La luz parece viajar en trayectorias en línea recta, llamadas **rayos**, con una rapidez v que depende del **índice de refracción**, n, del material; esto es

$$v = \frac{c}{n}, \qquad \textbf{(32–4)}$$

donde c es la rapidez de la luz en el vacío.

Cuando la luz se refleja en una superficie plana, el *ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia*. Esta **ley de reflexión** explica por qué los espejos pueden formar **imágenes**.

En un **espejo plano**, la imagen es virtual, derecha, del mismo tamaño que el objeto y aparece a la misma distancia detrás del espejo que la que existe entre el espejo y el objeto que está enfrente.

Un **espejo esférico** puede ser cóncavo o convexo. Un espejo esférico **cóncavo** enfoca rayos paralelos de luz (luz proveniente de un objeto muy distante) hasta un punto llamado **punto focal**. La distancia de este punto desde el espejo es la **distancia focal** o **longitud focal** f del espejo y

$$f = \frac{r}{2} \qquad \textbf{(32–1)}$$

donde r es el radio de curvatura del espejo.

Los rayos paralelos que inciden en un **espejo convexo** se reflejan en el espejo como si divergieran de un punto común detrás del espejo. La distancia de este punto desde el espejo es la distancia focal y se considera negativa para un espejo convexo.

Para un objeto dado, la posición y el tamaño aproximados de la imagen formada por un espejo se determinan mediante un trazado de rayos. Algebraicamente, la relación entre las distancias de imagen y de objeto, d_i y d_o, y la distancia focal f, está dada por la **ecuación del espejo**:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}. \qquad \textbf{(32–2)}$$

La razón entre la altura de la imagen h_i y la altura del objeto h_o, lo que se llama la amplificación m de un espejo, es

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}. \qquad \textbf{(32–3)}$$

Si los rayos que convergen para formar una imagen en realidad pasan a través de la imagen, de manera que ésta aparecería sobre una película o una pantalla colocada ahí, se dice que es una **imagen real**. Si los rayos en realidad no pasan a través de la imagen, ese trata de una **virtual**.

Cuando la luz pasa de un medio transparente a otro, los rayos se desvían o se refractan. La **ley de refracción** (**ley de Snell**) establece que

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2, \qquad \textbf{(32–5)}$$

donde n_1 y θ_1 son el índice de refracción y el ángulo con la normal a la superficie para el rayo incidente, y n_2 y θ_2 son el índice y el ángulo respectivos para el rayo refractado.

Cuando luz con longitud de onda λ entra a un medio con índice de refracción n, la longitud de onda se reduce a

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}. \qquad \textbf{(32–6)}$$

La frecuencia no cambia.

La frecuencia de la luz determina su color. El **espectro visible** en el aire se extiende, en términos de la longitud de onda correspondiente, de aproximadamente 400 nm (violeta) a alrededor de 750 nm (rojo).

Prismas de vidrio descomponen la luz blanca en sus colores constituyentes porque el índice de refracción varía con la longitud de onda, un fenómeno conocido como **dispersión**.

Cuando los rayos de luz alcanzan la frontera de un material donde el índice de refracción disminuye, los rayos se **reflejarán totalmente de manera interna** si el ángulo incidente, θ_1, es tal que la ley de Snell implica que $\operatorname{sen}\theta_2 > 1$. Esto ocurre si θ_1 supera el ángulo crítico θ_C dado por

$$\operatorname{sen}\theta_C = \frac{n_2}{n_1}. \qquad \textbf{(32–7)}$$

Preguntas

1. ¿Cuál sería la apariencia de la Luna si tuviera *a*) una superficie rugosa; *b*) una superficie pulida como espejo?
2. Se dice que Arquímedes quemó toda la flota romana en el puerto de Siracusa al enfocar los rayos del Sol con un enorme espejo esférico. ¿Es esto[†] razonable?
3. ¿Cuál es la distancia focal de un espejo plano? ¿Cuál es la amplificación de un espejo plano?
4. Un objeto se coloca a lo largo del eje principal de un espejo esférico. La amplificación del objeto es −3.0. ¿La imagen es real o virtual, invertida o derecha? ¿El espejo es cóncavo o convexo? ¿En qué lado del espejo se ubica la imagen?
5. Con las reglas para los tres rayos discutidas con referencia a la figura 32-15, dibuje el rayo 2 para la figura 32-19b.
6. ¿La ecuación del espejo, ecuación 32-2, se sostiene para un espejo plano? Explique.
7. Si un espejo cóncavo produce una imagen real, ¿la imagen necesariamente está invertida?
8. ¿Cómo puede determinarse la rapidez de la luz en un objeto transparente, sólido y rectangular?
9. Cuando mira el reflejo de la Luna en un mar con ondulaciones, ésta parece alargada (figura 32-41). Explique por qué.

FIGURA 32–41
Pregunta 9. (Véase el pliego a color al final del libro).

10. ¿Cómo es posible que un espejo esférico tenga una distancia de objeto negativa?
11. ¿Cuál es el ángulo de refracción cuando un rayo de luz incide perpendicularmente sobre la frontera entre dos materiales transparentes?
12. Cuando usted mira una alberca o un lago hacia abajo, ¿es probable que subestime o sobrestime su profundidad? Explique. ¿Cómo varía la profundidad aparente con el ángulo de visión? (Use diagramas de rayos).
13. Dibuje un diagrama de rayos para demostrar por qué una vara parece doblarse cuando parte de ella está bajo el agua (figura 32-23).
14. Cuando un ancho haz de luz paralela entra al agua a un ángulo, el haz se ensancha. Explique este hecho.
15. Usted mira un acuario y observa un pez en su interior. En la figura 32-42 se ilustra un rayo de luz proveniente del pez conforme sale del tanque. También se muestra la posición aparente del pez. En el dibujo, indique la posición aproximada del pez real. Justifique brevemente su respuesta.

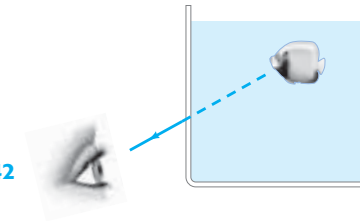


FIGURA 32–42
Pregunta 15.

16. ¿Cómo puede "ver" una gota redonda de agua sobre una mesa aun cuando el agua es transparente e incolora?
17. Un rayo de luz se refracta a través de tres materiales diferentes (figura 32-43). Clasifique los materiales de acuerdo con sus índices de refracción, de menor a mayor.

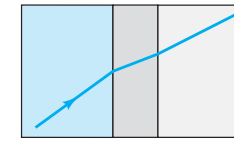


FIGURA 32–43
Pregunta 17.

18. Un rayo de luz que viaja en aire, ¿se puede reflejar totalmente cuando incide sobre una superficie de agua lisa, si el ángulo incidente se elige de manera correcta? Explique.
19. Cuando usted observa un objeto que está en el aire y usted se encuentra debajo de la superficie de una alberca, ¿el objeto parece tener el mismo tamaño que cuando lo ve directamente en el aire? Explique.
20. ¿Qué tipo de espejo se ilustra en la figura 32-44?

FIGURA 32–44
Pregunta 20.

21. Los rayos de luz de las estrellas (incluido el Sol) siempre se desvían hacia la dirección vertical conforme pasan a través de la atmósfera de la Tierra. *a*) ¿Por qué esto tiene sentido? *b*) ¿Qué se concluye acerca de las posiciones aparentes de las estrellas, según se ven desde la Tierra?

[†]Estudiantes del MIT hicieron un estudio de factibilidad. Véase www.mit.edu.

Problemas

32–2 Reflexión; espejos planos

1. (I) Cuando una persona se mira en un espejo plano de 60 cm de alto, ve la misma cantidad de su cuerpo si está cerca del espejo que si está alejada. (Inténtelo y compruébelo.) Use diagramas de rayos para demostrar por qué esto es cierto.
2. (I) Suponga que quiere tomar una fotografía de usted mismo mientras observa su imagen en un espejo plano a 2.8 m de distancia. ¿Para qué distancia se debe enfocar la lente de la cámara?
3. (II) Dos espejos planos se encuentran en un ángulo de 135°, figura 32-45. Si los rayos de luz inciden sobre un espejo a 38° como se muestra, ¿a qué ángulo ϕ salen del segundo espejo?

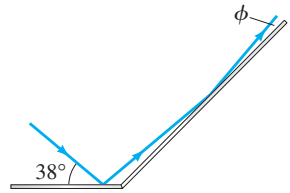


FIGURA 32–45
Problema 3.

4. (II) Una persona, cuyos ojos están a 1.64 m sobre el suelo, está de pie a 2.30 m enfrente de un espejo plano vertical cuyo extremo inferior está a 38 cm por encima del suelo, figura 32-46. ¿Cuál es la distancia horizontal x a la base de la pared que sostiene el espejo desde el punto más cercano sobre el suelo que se puede ver reflejado en el espejo?

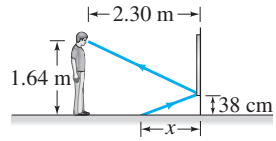


FIGURA 32–46
Problema 4.

5. (II) Demuestre que, si dos espejos planos se encuentran en un ángulo ϕ, un solo rayo que se refleja sucesivamente en ambos espejos se desvía en un ángulo de 2ϕ independiente del ángulo incidente. Suponga que $\phi < 90°$ y que sólo tienen lugar dos reflexiones, una en cada espejo.
6. (II) Suponga que está a 88 cm de un espejo plano. ¿Qué área del espejo se usa para reflejar los rayos que entran en un ojo provenientes de un punto sobre la punta de su nariz, si el diámetro de su pupila es de 4.5 mm?
7. (II) Coloque dos espejos planos de manera que formen un ángulo de 90.0º, como en la figura 32-47. Cuando una persona se observa en este espejo doble, se ve como otros lo ven, y no con los lados invertidos como cuando se ve en un solo espejo. Elabore un diagrama de rayos para mostrar cómo ocurre esto.

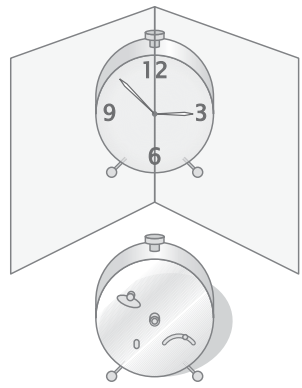


FIGURA 32–47
Problemas 7 y 8.

8. (III) Suponga que se coloca un tercer espejo abajo de los dos que se ilustran en la figura 32-47, de manera que los tres son perpendiculares entre sí. *a*) Demuestre que, para tal "reflector en esquina", cualquier rayo incidente regresará en su dirección original después de tres reflexiones. *b*) ¿Qué ocurre si sólo realiza dos reflexiones?

32–3 Espejos esféricos

9. (I) Una estufa solar, en realidad un espejo cóncavo que apunta al Sol, enfoca los rayos solares 18.8 cm enfrente del espejo. ¿Cuál es el radio de la superficie esférica de la que se hizo el espejo?
10. (I) ¿A qué distancia de un espejo cóncavo (24.0 cm de radio) debe colocarse un objeto si su imagen debe estar en el infinito?
11. (I) Cuando usted camina hacia un espejo cóncavo, nota que la imagen se voltea a una distancia de 0.50 cm. ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?
12. (II) Una pequeña vela está a 35 cm de un espejo cóncavo que tiene un radio de curvatura de 24 cm. *a*) ¿Cuál es la distancia focal del espejo? *b*) ¿Dónde se ubicará la imagen de la vela? *c*) ¿La imagen estará derecha o invertida?
13. (II) Una persona se mira en una brillante esfera de arbolito de Navidad, que tiene un diámetro de 9.2 cm. Si su cara está a 25.0 cm de la superficie frontal de la esfera, ¿dónde está su imagen? ¿Es real o virtual? ¿Está derecha o invertida?
14. (II) Un espejo en un parque de diversiones muestra una imagen derecha de cualquier persona que esté de pie a 1.7 m enfrente de él. Si la imagen es tres veces la altura de la persona, ¿cuál es el radio de curvatura del espejo? (Véase la figura 32-44).
15. (II) Un dentista quiere un pequeño espejo que, cuando esté a 2.00 cm de una pieza dental, produzca una imagen derecha 4.0×. ¿Qué tipo de espejo debe usar y cuál debe ser su radio de curvatura?
16. (II) Algunos espejos retrovisores producen imágenes de los automóviles que vienen detrás, las cuales son más pequeñas de lo que serían si el espejo fuera plano. ¿Los espejos son cóncavos o convexos? ¿Cuál es el radio de curvatura de un espejo si los automóviles a 18.0 m de distancia se ven como si tuvieran 0.33 de su tamaño normal?
17. (II) Una persona está de pie a 3.0 m de un espejo convexo de seguridad en una tienda. Usted estima que la altura de la imagen es la mitad de su altura real. Estime el radio de curvatura del espejo.
18. (II) Un objeto de 3.0 mm de alto se coloca a 18.0 cm de un espejo convexo de 18 cm de radio de curvatura. *a*) Demuestre, mediante trazado de rayos, que la imagen es virtual, y estime la distancia de la imagen. *b*) Demuestre que la distancia de la imagen (negativa) se puede calcular a partir de la ecuación 32-2, considerando una distancia focal de −9.0 cm. *c*) Calcule el tamaño de la imagen con la ecuación 32-3.
19. (II) La imagen de un árbol distante es virtual y muy pequeña cuando se ve en un espejo curvo. La imagen parece estar a 16.0 cm detrás del espejo. ¿Qué tipo de espejo es y cuál es su radio de curvatura?
20. (II) Use dos técnicas, *a*) un diagrama de rayos y *b*) la ecuación del espejo, para demostrar que la magnitud de la amplificación de un espejo cóncavo es menor que 1 si el objeto está más allá del centro de curvatura C ($d_o > r$), y es mayor que 1 si el objeto está dentro de C ($d_o < r$).
21. (II) Demuestre, con un diagrama de rayos, que la amplificación m de un espejo convexo es $m = -d_i/d_o$, tal como para un espejo cóncavo. [*Sugerencia:* Considere un rayo proveniente de la parte superior del objeto que se refleja en el centro del espejo].
22. (II) Utilice diagramas de rayos para demostrar que la ecuación del espejo, ecuación 32-2, es válida para un espejo convexo, en tanto f se considere negativa.
23. (II) La amplificación de un espejo convexo es +0.55× para objetos a 3.2 m del espejo. ¿Cuál es la distancia focal de este espejo?

24. (II) *a*) ¿Dónde se debe colocar un objeto, enfrente de un espejo cóncavo, de manera que éste produzca una imagen en la misma posición que el objeto? *b*) ¿La imagen es real o virtual? *c*) ¿La imagen es invertida o derecha? *d*) ¿Cuál es la amplificación de la imagen?

25. (II) Un objeto de 4.5 cm de alto se coloca a 26 cm enfrente de un espejo esférico. Se desea producir una imagen virtual derecha de 3.5 cm de alto. *a*) ¿Qué tipo de espejo se debe usar? *b*) ¿Dónde se ubica la imagen? *c*) ¿Cuál es la distancia focal del espejo? *d*) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?

26. (II) Un espejo de afeitar o para maquillaje se diseña para amplificar el rostro en un factor de 1.35 cuando el rostro se coloca a 20.0 cm enfrente de él. *a*) ¿Qué tipo de espejo es? *b*) Describa el tipo de imagen de su rostro que forma. *c*) Calcule el radio de curvatura requerido para el espejo.

27. (II) Un espejo cóncavo tiene distancia focal f. Cuando un objeto se coloca a una distancia $d_o > f$ de este espejo, se forma una imagen real con amplificación m. *a*) Demuestre que $m = f/(f - d_o)$. *b*) Bosqueje m contra d_o en el intervalo $f < d_o < +\infty$, donde $f = 0.45$ m. *c*) ¿Para qué valor de d_o la imagen real tendrá el mismo tamaño (lateral) que el objeto? *d*) Para obtener una imagen real que sea mucho mayor que el objeto, ¿en qué región general se debe colocar el objeto en relación con el espejo?

28. (II) Sea $f = -|f|$ la distancia focal de un espejo convexo. Demuestre que la amplificación m de un objeto a una distancia d_o de este espejo está dada por $m = |f|/(d_o + |f|)$. Con base en esta relación, explique por qué su nariz se ve más grande que el resto de su cara cuando se mira en un espejo convexo.

29. (II) Un espejo esférico con distancia focal f produce una imagen de un objeto con amplificación m. *a*) Demuestre que el objeto está a una distancia $d_o = f\left(1 - \frac{1}{m}\right)$ del lado reflectante del espejo. *b*) Use la relación del inciso *a*) para demostrar que, sin importar dónde se coloque el objeto enfrente de un espejo convexo, su imagen tendrá una amplificación en el intervalo $0 \leq m \leq +1$.

30. (III) Se coloca un objeto a una distancia r frente a una pared, donde r es exactamente igual al radio de curvatura de un espejo cóncavo. ¿A qué distancia de la pared debería colocarse este espejo de manera que en la pared se forme una imagen real del objeto? ¿Cuál es la amplificación de la imagen?

31. (III) Un objeto pequeño y delgado (como un pequeño trozo de alambre), con longitud ℓ, se coloca a lo largo del eje de un espejo esférico (perpendicular a la superficie de vidrio). Demuestre que su imagen tiene longitud $\ell' = m^2\ell$, de manera que la *amplificación longitudinal* es igual a $-m^2$, donde m es la amplificación "lateral" normal, ecuación 32-3. ¿Por qué el signo menos? [*Sugerencia:* Encuentre las posiciones de la imagen para ambos extremos del alambre y suponga que ℓ es muy pequeña].

32–4 Índice de refracción

32. (I) La rapidez de la luz en el hielo es de 2.29×10^8 m/s. ¿Cuál es el índice de refracción del hielo?

33. (I) ¿Cuál es la rapidez de la luz en *a*) alcohol etílico, *b*) lucita, *c*) cristal corona?

34. (I) La estrella más cercana a la tierra (distinta al Sol) está a 4.2 años luz de distancia. Esto es, su luz tarda 4.2 años en llegar a la Tierra. ¿A qué distancia está, en metros?

35. (I) ¿Cuánto tarda la luz en llegar desde el Sol, a 1.50×10^8 km de distancia?

36. (II) La rapidez de la luz en cierta sustancia es el 88% de su valor en agua. ¿Cuál es el índice de refracción de esta sustancia?

37. (II) Desde el filamento de una bombilla ordinaria se emite luz en ráfagas de trenes de onda de aproximadamente 10^{-8} s de duración. ¿Cuál es la longitud en el espacio de tales trenes de onda?

32–5 Ley de Snell

38. (I) Un buzo hace brillar una linterna hacia arriba desde abajo del agua en un ángulo de 38.5° con la vertical. ¿En qué ángulo sale la luz del agua?

39. (I) El haz de una linterna incide sobre la superficie de un panel de vidrio ($n = 1.56$) en un ángulo de 63° con la normal. ¿Cuál es el ángulo de refracción?

40. (I) Se observa que los rayos del Sol forman un ángulo de 33.0° con la vertical debajo del agua. ¿En qué ángulo sobre el horizonte está el Sol?

41. (I) Un haz de luz proveniente de una luminaria submarina sale del agua en un ángulo de 56.0° con la vertical. ¿En qué ángulo de incidencia llegó a la interfaz aire-agua desde abajo de la superficie?

42. (II) Un haz de luz en aire incide sobre una losa de vidrio ($n = 1.56$), se refleja parcialmente y se refracta parcialmente. Determine el ángulo de incidencia si el ángulo de reflexión es el doble del ángulo de refracción.

43. (II) Un haz de luz incide a 45º sobre un trozo de plástico de 2.0 cm de grosor y 1.62 de índice de refracción. El plástico está en la parte superior de un trozo de vidrio de 3.0 cm de grosor para el que $n = 1.47$. ¿Cuál es la distancia D en la figura 32-48?

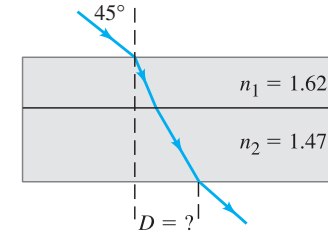


FIGURA 32–48
Problema 43.

44. (II) Un acuario lleno de agua tiene lados de vidrio plano cuyo índice de refracción es 1.56. Un haz de luz desde el exterior del acuario incide sobre el vidrio en un ángulo de 43.5° con la perpendicular (figura 32-49). ¿Cuál es el ángulo de este rayo de luz cuando entra *a*) al vidrio y luego *b*) al agua? *c*) ¿Cuál sería el ángulo refractado si el rayo entra directamente al agua?

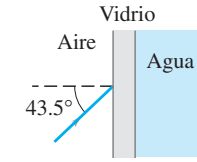


FIGURA 32–49
Problema 44.

45. (II) Al buscar en el fondo de una alberca en la noche, un vigilante hace brillar un estrecho haz de luz de su linterna, a 1.3 m sobre el nivel del agua, hacia la superficie del agua a un punto a 2.5 m del borde la alberca (figura 32-50). ¿Dónde incide el punto de luz en el fondo de la alberca, medido desde el fondo de la pared bajo sus pies, si la alberca tiene 2.1 m de profundidad?

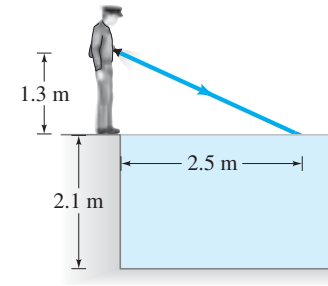


FIGURA 32–50
Problema 45.

46. (II) El bloque de vidrio ($n = 1.5$), que se ilustra en sección transversal en la figura 32-51, está rodeado por aire. Un rayo de luz entra al bloque por su cara izquierda, con un ángulo incidente θ_1 y vuelve a salir al aire por la cara derecha con dirección paralela a la base del bloque. Determine θ_1.

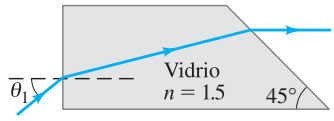


FIGURA 32–51
Problema 46.

47. (II) Un haz láser, con diámetro $d_1 = 3.0$ mm, en aire tiene un ángulo incidente $\theta_1 = 25°$ en una superficie plana aire-vidrio. Si el índice de refracción del vidrio es $n = 1.5$, determine el diámetro d_2 del haz después de que entra al vidrio.

48. (II) Sobre un prisma de vidrio equilátero incide luz en un ángulo de 45.0° con una cara, figura 32-52. Calcule el ángulo al que sale la luz por la cara opuesta. Suponga que $n = 1.54$.

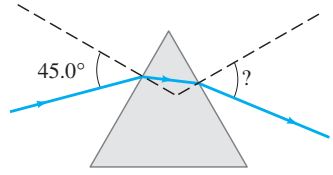


FIGURA 32–52
Problemas 48 y 65.

49. (II) Un prisma triangular hecho de cristal corona ($n = 1.52$), con ángulos en la base de 30.0°, está rodeado de aire. Si los rayos paralelos inciden de manera normal sobre su base, como se muestra en la figura 32-53, ¿cuál es el ángulo ϕ entre los dos rayos emergentes?

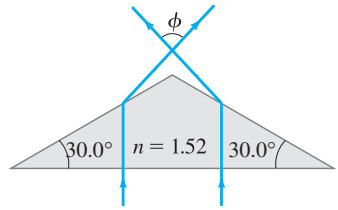


FIGURA 32–53
Problema 49.

50. (II) Demuestre en general que, para un haz de luz incidente sobre una capa uniforme de material transparente, como en la figura 32-24, la dirección del haz emergente es paralela al haz incidente, independiente del ángulo incidente θ. Suponga que el aire en ambos lados del material transparente es el mismo.

51. (III) Un rayo de luz incide sobre una pieza plana de vidrio con índice de refracción n, como en la figura 32-24. Demuestre que, si el ángulo incidente θ es pequeño, el rayo emergente se desplaza una distancia $d = t\theta(n - 1)/n$, donde t es el grosor del vidrio, θ está en radianes y d es la distancia perpendicular entre el rayo incidente y la línea (punteada) del rayo emergente (figura 32-24).

32–6 Espectro visible; dispersión

52. (I) ¿En qué porcentaje la rapidez de la luz azul (450 nm) es menor que la rapidez de la luz roja (680 nm), en vidrio flint de silicato (véase la figura 32-28)?

53. (I) Un haz de luz incide sobre un trozo de vidrio a un ángulo incidente de 60.0°. El haz contiene dos longitudes de onda, 450.0 nm y 700.0 nm, para las cuales el índice de refracción del vidrio es 1.4831 y 1.4544, respectivamente. ¿Cuál es el ángulo entre los dos haces refractados?

54. (II) Un haz de luz paralelo que contiene dos longitudes de onda, $\lambda_1 = 465$ nm y $\lambda_2 = 652$ nm, entra al vidrio flint de silicato de un prisma equilátero, como se indica en la figura 32-54. ¿A qué ángulo sale cada haz del prisma (dé el ángulo con la normal de la cara)? Véase la figura 32-28.

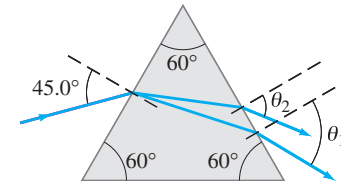


FIGURA 32–54
Problema 54.

55. (III) Un rayo de luz con longitud de onda λ incide desde el aire a 60° ($= \theta$) exactamente sobre una gota de agua esférica de radio R e índice de refracción n (que depende de λ). Cuando el rayo vuelve a salir al aire desde el lado lejano de la gota, se desvió un ángulo ϕ de su dirección original, como se muestra en la figura 32-55. ¿Cuánto difiere el valor de ϕ para la luz violeta ($n = 1.341$), del valor para la luz roja ($n = 1.330$)?

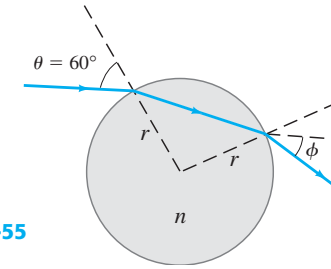


FIGURA 32–55
Problema 55.

56. (III) Para luz visible, el índice de refracción n del vidrio es aproximadamente 1.5, aunque este valor varía en aproximadamente 1% a través del rango visible. Considere un rayo de luz blanca incidente desde aire a un ángulo θ_1 en una pieza plana de vidrio. *a*) Demuestre que, al entrar al vidrio, los colores visibles contenidos en este rayo incidente se dispersarán sobre un rango $\Delta\theta_2$ de ángulos refractados dados aproximadamente por

$$\Delta\theta_2 \approx \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\theta_1}}\frac{\Delta n}{n}.$$

[*Sugerencia:* Para x en radianes, $(d/dx)(\operatorname{sen}^{-1}x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.] *b*) Si $\theta_1 = 0°$, ¿cuál es $\Delta\theta_2$ en grados? *c*) Si $\theta_1 = 90°$, ¿cuál es $\Delta\theta_2$ en grados?

32–7 Reflexión total interna

57. (I) ¿Cuál es el ángulo crítico para la interfaz entre agua y diamante? Para reflejarse de manera interna, ¿de qué material debe partir la luz?

58. (I) El ángulo crítico para cierta superficie líquido-aire es de 49.6°. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

59. (II) Un haz de luz se emite en una alberca de agua desde una profundidad de 72.0 cm. ¿Dónde debe incidir sobre la interfaz aire-agua, en relación con el punto directamente sobre él, con la finalidad de que la luz *no* salga del agua?

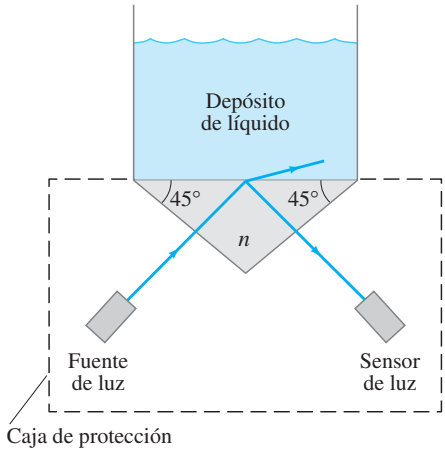
60. (II) Un rayo de luz, después de entrar a una fibra óptica, se refleja a un ángulo de 14.5° con el eje largo de la fibra, como en la figura 32-56. Calcule la distancia a lo largo del eje de la fibra que recorre el rayo de luz entre reflexiones sucesivas en los lados de la fibra. Suponga que la fibra tiene un índice de refracción de 1.55 y mide 1.40×10^{-4} m de diámetro.

FIGURA 32–56 Problema 60.

61. (II) Un haz de luz se emite 8.0 cm por debajo de la superficie de un líquido e incide sobre la superficie a 7.6 cm del punto directamente sobre la superficie. Si ocurre reflexión total interna, ¿qué se puede decir acerca del índice de refracción del líquido?

62. (II) La figura 32-57 muestra un dispositivo de prisma detector de líquido que se puede usar dentro de una lavadora u otro electrodoméstico que contenga líquido. Si el líquido no cubre la hipotenusa del prisma, la reflexión total interna del haz proveniente de la fuente de luz produce una gran señal en el sensor de luz. Si el líquido cubre la hipotenusa, algo de luz escapa del prisma hacia el líquido y la señal del sensor de luz disminuye. De esta forma, una gran señal proveniente del sensor del líquido indica la ausencia de líquido en el depósito. Si este dispositivo está diseñado para detectar la presencia de agua, determine el intervalo disponible para el índice de refracción n del prisma. ¿El dispositivo funcionará adecuadamente si el prisma se construye con lucita (un material de bajo costo)? Para la lucita, $n = 1.5$.

FIGURA 32–57 Problema 62.



63. (II) Dos rayos, A y B, viajan por una fibra óptica cilíndrica con diámetro $d = 75.0\ \mu$m, longitud $\ell = 1.0$ km e índice de refracción $n_1 = 1.465$. El rayo A viaja en una trayectoria recta por el eje de la fibra, mientras que el rayo B se propaga por la fibra en reflexiones repetidas en el ángulo crítico cada vez que choca con la frontera de la fibra. Determine el tiempo adicional Δt que el rayo B tarda en viajar por toda la fibra en comparación con el rayo A (figura 32-58), suponiendo que *a*) la fibra está rodeada por aire, *b*) la fibra está rodeada por un "blindaje" cilíndrico de vidrio con índice de refracción $n_2 = 1.460$.

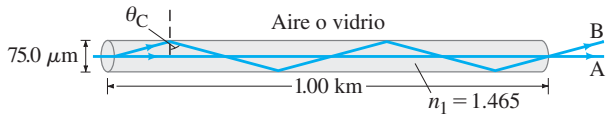


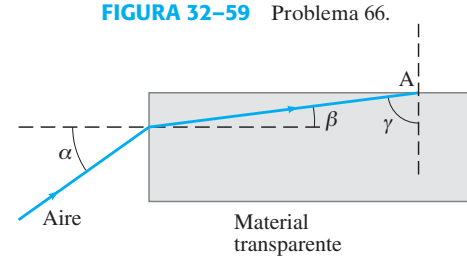
FIGURA 32–58 Problema 63.

64. (II) *a*) ¿Cuál es el índice de refracción mínimo para un prisma de vidrio o plástico que se usará en binoculares (figura 32-33), de manera que la reflexión total interna ocurra a 45°? *b*) ¿Los binoculares funcionarán si sus prismas (suponga $n = 1.58$) se sumergen en agua? *c*) ¿Qué n mínimo se necesita si los prismas se sumergen en agua?

65. (III) Suponga que un rayo incide sobre la cara izquierda del prisma en la figura 32-52 a 45.0° como se muestra, pero se refleja totalmente de manera interna en el lado opuesto. Si el ángulo del vértice del prisma (en la parte superior) es $\phi = 60.0°$, ¿qué se concluye acerca del índice de refracción del prisma?

66. (III) Un haz de luz entra en el extremo de una fibra óptica como se ilustra en la figura 32-59. Demuestre que se puede garantizar reflexión total interna en la superficie lateral del material (en el punto A), si el índice de refracción es mayor que aproximadamente 1.42. En otras palabras, sin importar el ángulo α, el haz de luz se reflejará de regreso hacia el material en el punto A, suponiendo que hay aire en el exterior.

FIGURA 32–59 Problema 66.



*32–8 Refracción en una superficie esférica

***67.** (II) Un trozo plano de vidrio, de 13.0 cm de grosor ($n = 1.58$), yace sobre la superficie de un estanque de agua de 12.0 cm de profundidad. ¿A qué distancia, bajo la parte superior del vidrio, parece estar el fondo del estanque, según se ve directamente desde arriba?

***68.** (II) Un pez nada en agua dentro de un tazón esférico de vidrio delgado con grosor uniforme. Suponiendo que el radio de curvatura del tazón es de 28.0 cm, localice la imagen del pez si éste se ubica: *a*) en el centro del tazón; *b*) a 20.0 cm del lado del tazón entre el observador y el centro del tazón. Suponga que el pez es pequeño.

***69.** (III) En la sección 32-8 se dedujo la ecuación 32-8 para una superficie esférica convexa, con $n_2 > n_1$. Con las mismas convenciones y con diagramas similares a la figura 32-37, demuestre que la ecuación 32-8 es válida también para *a*) una superficie esférica convexa con $n_2 < n_1$, *b*) una superficie esférica cóncava con $n_2 > n_1$, y *c*) una superficie esférica cóncava con $n_2 < n_1$.

***70.** (III) Una moneda yace en el fondo de una alberca de 0.75 m de profundidad. Si un observador ve en un ángulo de 45º, ¿dónde está la imagen de la moneda, en relación con ella? [*Sugerencia:* La imagen se encuentra en la intersección de dos rayos que son trazados de regreso].

Problemas generales

71. Dos espejos cóncavos idénticos se ponen frente a frente separados 1.0 m. A la mitad entre los espejos se coloca una bombilla pequeña. Un pequeño trozo de papel, justo a la izquierda de la bombilla, evita que la luz brille directamente en el espejo izquierdo, pero la luz que se refleja en el espejo derecho todavía llega al espejo izquierdo. En el lado izquierdo del trozo de papel aparece una buena imagen de la bombilla. ¿Cuál es la distancia focal de los espejos?

72. Una losa con grosor D, cuyas dos caras son paralelas, tiene índice de refracción n. Un rayo de luz proveniente del aire incide sobre una cara de la losa con un ángulo incidente θ_1 y se divide en dos rayos, A y B. El rayo A se refleja directamente de regreso al aire, mientras que B recorre una distancia total ℓ dentro de la losa antes de salir de la cara de la losa a una distancia d de su punto de entrada (figura 32-60). *a*) Deduzca expresiones para ℓ y d en términos de D, n y θ_1. *b*) Para incidencia normal (es decir, $\theta_1 = 0°$), demuestre que sus expresiones producen los valores esperados para ℓ y d.

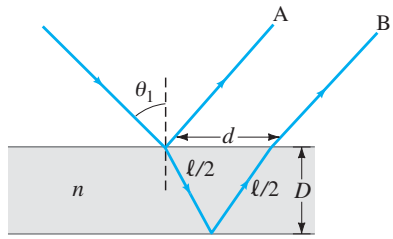


FIGURA 32–60
Problema 72.

73. Dos espejos planos están frente a frente, separados 2.2 m como en la figura 32-61. Usted está de pie a 1.5 m de uno de esos espejos y se mira en él. Verá imágenes múltiples de usted mismo. *a*) ¿A qué distancia de usted están sus tres primeras imágenes en el espejo enfrente suyo? *b*) ¿Estas tres primeras imágenes se enfrentan hacia usted o se alejan de usted?

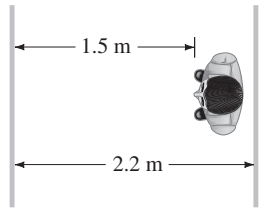


FIGURA 32–61
Problema 73.

74. Se quiere determinar la profundidad de una alberca llena de agua, midiendo el ancho (x = 5.50 m) y luego observando que el borde inferior de la alberca apenas es visible a un ángulo de 13.0° sobre la horizontal, como se muestra en la figura 32-62. Calcule la profundidad de la alberca.

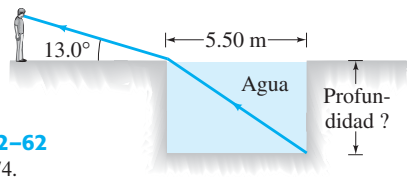


FIGURA 32–62
Problema 74.

75. Una persona de 1.80 m de alto está de pie a 3.80 m de un espejo convexo y nota que se ve de una altura que es exactamente la mitad de la que se ve en un espejo plano colocado a la misma distancia. ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo convexo? (Suponga que sen $\theta \approx \theta$). [*Sugerencia:* Considere que el *ángulo* de visión mide la mitad].

76. El ángulo crítico de cierta pieza de plástico en el aire es θ_C = 39.3°. ¿Cuál es el ángulo crítico del mismo plástico si se sumerge en agua?

77. A cada estudiante en un laboratorio de física se le asigna encontrar la ubicación donde se puede colocar un objeto brillante para que un espejo cóncavo, con radio de curvatura r = 46 cm, produzca una imagen que es tres veces el tamaño del objeto. Dos estudiantes completan la tarea en diferentes momentos usando equipo idéntico pero, cuando más tarde comparan sus notas, descubren que sus respuestas para la distancia del objeto no son iguales. Explique por qué no necesariamente deben repetir el ejercicio del laboratorio y justifique su respuesta con algunos cálculos.

78. Un caleidoscopio construye patrones simétricos con dos espejos planos que tienen un ángulo de 60º entre sí, como se ilustra en la figura 32-63. Dibuje la ubicación de las imágenes (algunas de ellas, imágenes de imágenes) del objeto colocado entre los espejos.

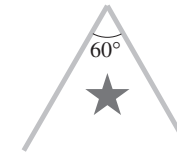


FIGURA 32–63
Problema 78.

79. Cuando a través de un prisma pasa luz, el ángulo que el rayo refractado forma en relación con el rayo incidente se llama ángulo de desviación, δ, figura 32-64. Demuestre que este ángulo es un mínimo cuando el rayo pasa simétricamente a través del prisma, perpendicular a la bisectriz del ángulo del vértice ϕ y demuestre que el ángulo de desviación mínimo, δ_m, se relaciona con el índice de refracción n del prisma mediante

$$n = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\phi + \delta_m)}{\operatorname{sen} \phi/2}.$$

[*Sugerencia:* Para θ en radianes, $(d/d\theta)(\operatorname{sen}^{-1}\theta) = 1/\sqrt{1-\theta^2}$].

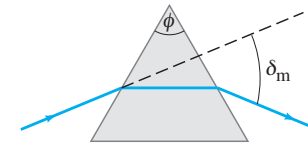


FIGURA 32–64
Problemas 79 y 80.

80. Si el ángulo del vértice de un prisma es $\phi = 72°$ (véase la figura 32-64), ¿cuál es el ángulo incidente mínimo para un rayo, si debe salir del lado opuesto (es decir, no reflejarse totalmente de manera interna), dado n = 1.58?

81. El **principio de Fermat** afirma que "la luz viaja entre dos puntos a lo largo de la trayectoria que requiere menos tiempo, en comparación con otras trayectorias vecinas". A partir del principio de Fermat, deduzca *a*) la ley de reflexión ($\theta_i = \theta_r$) y *b*) la ley de refracción (ley de Snell). [*Sugerencia:* Elija dos puntos adecuados de manera que un rayo entre ellos pueda experimentar reflexión o refracción. Dibuje una trayectoria aproximada para un rayo entre estos puntos y escriba una expresión del tiempo requerido para que la luz recorra la trayectoria arbitraria elegida. Luego tome la derivada para encontrar el mínimo].

***82.** Suponga que la figura 32-36 muestra una varilla cilíndrica cuyo extremo tiene un radio de curvatura R = 2.0 cm, y que la varilla se sumerge en agua con índice de refracción de 1.33. La varilla tiene índice de refracción 1.53. Determine la ubicación y altura de la imagen de un objeto de 2.0 mm de alto ubicado a 23 cm de distancia de la varilla.

83. Una fibra óptica es un largo cilindro transparente de diámetro d e índice de refracción n. Si la fibra se dobla en ángulo agudo, parte de la luz que llega al lado del cilindro puede escapar en vez de reflejarse de nuevo en la fibra (figura 32-65). ¿Cuál es el menor radio r en una corta sección doblada para la cual se asegurará la reflexión total interna para la luz que inicialmente viaja paralela al eje de la fibra?

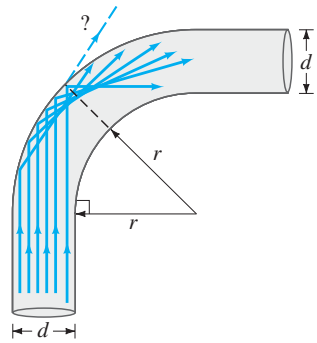


FIGURA 32–65
Problema 83.

84. Un objeto se coloca a 15 cm de cierto espejo. La imagen tiene la mitad de altura que el objeto, es invertida y real. ¿A qué distancia está la imagen del espejo y cuál es el radio de curvatura del espejo?

85. Las caras de los extremos de una varilla cilíndrica de vidrio ($n = 1.51$) son perpendiculares a los lados. Demuestre que un rayo de luz que entra en una cara del extremo, en cualquier ángulo, se reflejará totalmente de manera interna dentro de la varilla cuando incida sobre los lados. Suponga que la varilla está en aire. ¿Y si estuviera en agua?

86. La pintura que se usa en las señales de las autopistas contiene pequeñas esferas transparentes que suministran iluminación nocturna de los letreros en las señales al reflejar hacia atrás los haces de luz de los faros de los vehículos. Considere un rayo de luz proveniente del aire que incide sobre una de tales esferas de radio r e índice de refracción n. Sea θ su ángulo incidente y suponga que el rayo sigue la trayectoria que se indica en la figura 32-66, de manera que el rayo sale de la esfera en la dirección exactamente antiparalela a su dirección de entrada. Si sólo se consideran rayos para los cuales sen θ se puede aproximar como θ, determine el valor requerido para n.

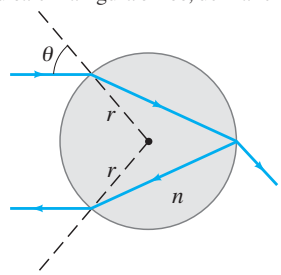


FIGURA 32–66
Problema 86.

*Problemas numéricos/por computadora

***87.** (II) En la siguiente tabla se especifica el índice de refracción, n, del vidrio flint corona a diferentes longitudes de onda (λ) de luz.

λ (nm)	1060	546.1	365.0	312.5
n	1.50586	1.51978	1.54251	1.5600

Elabore una gráfica de n contra λ. La variación en el índice de refracción con la longitud de onda está dada por la ecuación de Cauchy $n = A + B/\lambda^2$. Elabore otra gráfica de n contra $1/\lambda^2$ y determine las constantes A y B para el vidrio al ajustar los datos con una línea recta.

***88.** (III) Considere un rayo de luz solar proveniente del aire que incide sobre una gota de lluvia esférica de radio r e índice de refracción n. Al definir θ como su ángulo incidente, el rayo sigue entonces la trayectoria que se indica en la figura 32-67, y sale de la gota en un "ángulo de dispersión" ϕ comparado con su dirección de entrada original. *a*) Demuestre que $\phi = 180^\circ + 2\theta - 4\,\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\theta/n)$. *b*) Los rayos paralelos de luz solar iluminan una gota de lluvia con rayos de todos los ángulos incidentes posibles, desde 0° hasta 90°. Grafique ϕ contra θ en el intervalo $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$, en incrementos de 0.5°, suponiendo $n = 1.33$ como apropiado para agua a longitudes de onda de luz visible. *c*) A partir de su gráfica, debe encontrar que una fracción bastante grande de los ángulos incidentes tienen casi el mismo ángulo de dispersión. ¿Aproximadamente qué fracción de los posibles ángulos incidentes están dentro de aproximadamente 1° de $\phi = 139^\circ$? [Este subconjunto de rayos incidentes es lo que crea el arcoíris. Las variaciones dependientes de la longitud de onda en n hacen que la lluvia forme un ϕ ligeramente diferente para los diversos colores visibles].

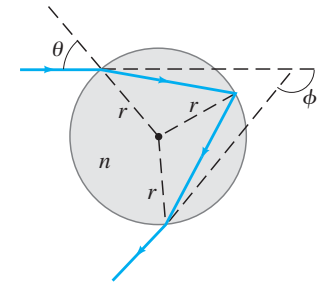


FIGURA 32–67
Problema 88.

Respuestas a los ejercicios

A: No.
B: *b*).
C: *a*).
D: Hacia.
E: Las caras se vuelven brillantes: reflexión total interna.
F: 1.414.

De los muchos dispositivos ópticos que se estudian en este capítulo, la lupa es el más simple. Aquí se presenta una parte amplificada de la página 886 de este capítulo, que describe cómo funciona la lente de aumento o lupa de acuerdo con el modelo de rayos. En este capítulo se estudian con detalle las lentes delgadas, se ve cómo determinar la posición de la imagen como función de la posición del objeto y la distancia focal de la lente, con base en el modelo de rayos de luz. Luego se estudian dispositivos ópticos, incluidos las cámaras de película y las digitales, el ojo humano, los anteojos, telescopios y microscopios.

Una comparación del inciso *a*) de la figura 33-33 con el inciso *b*), en la que el mismo objeto se ve en el punto cercano con el ojo sin ayuda, revela que el ángulo que subtiende el objeto en el ojo es mucho más grande cuando se usa el amplificador. La **amplificación angular** o **potencia de amplificación**, M, de la lente se define como la razón entre el ángulo subtendido por un objeto cuando se usa la lente y el ángulo subtendido con el ojo solo, con el objeto en el punto cercano N del ojo ($N = 25$ cm para un ojo normal):

$$M = \frac{\theta'}{\theta}, \qquad \textbf{(33–5)}$$

donde θ y θ' se muestran en la figura 33-33. M se puede escribir en términos de la distancia focal al notar que $\theta = h/N$ (figura 33-33b) y $\theta' = h/d_o$ (figura 33-33a), donde h es la altura del objeto y se supone que los ángulos son pequeños de manera que θ y θ' igualan sus funciones seno y tangente. Si el ojo está relajado (con la menor tensión posible en el ojo), la imagen estará en el infinito y el objeto estará precisamente en el punto focal; véase la figura 33-34. En tal caso, $d_o = f$ y $\theta' = h/f$, mientras que $\theta = h/N$, como antes (figura 33-33b). Por lo tanto,

CAPÍTULO 33

Lentes e instrumentos ópticos

CONTENIDO

33–1 Lentes delgadas; trazado de rayos
33–2 Ecuación de lentes delgadas; amplificación
*33–3 Combinaciones de lentes
33–4 Ecuación del fabricante de lentes
33–5 Cámaras: De película y digitales
33–6 El ojo humano; lentes correctivas
*33–7 Lente de aumento
*33–8 Telescopios
33–9 Microscopio compuesto
33–10 Aberraciones de lentes y espejos

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Una lente convergente, como el tipo que se usa en las lentes de aumento,

a) siempre produce una imagen amplificada (la imagen es más alta que el objeto).
b) también puede producir una imagen más pequeña que el objeto.
c) siempre produce una imagen derecha.
d) también puede producir una imagen invertida (de cabeza).
e) Ninguno de estos enunciados es verdadero.

Las leyes de reflexión y refracción, en particular esta última, son la base para explicar la operación de muchos instrumentos ópticos. En este capítulo se estudian y analizan lentes simples mediante el modelo de la óptica de los rayos que se explicó en el capítulo anterior. Luego se analizan algunos instrumentos ópticos, desde la lente de aumento o lupa y el ojo humano, hasta telescopios y microscopios. La importancia de las lentes es que forman imágenes de objetos, como se muestra en la figura 33-1.

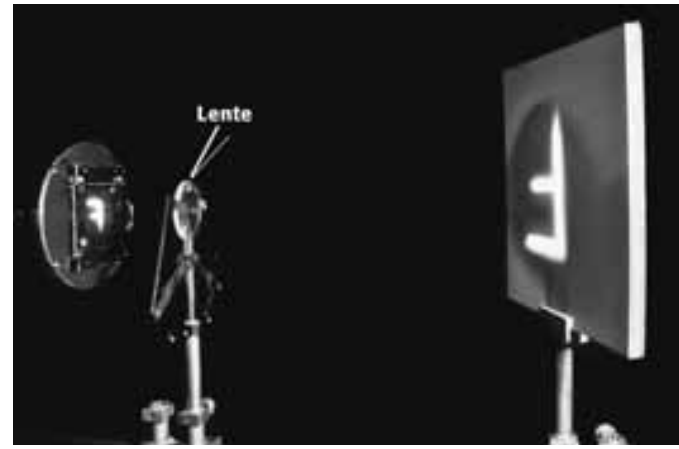


FIGURA 33–1 La lente convergente (en el soporte) forma una imagen ("F" grande en la pantalla a la derecha) de un objeto brillante ("F" iluminada a la izquierda).

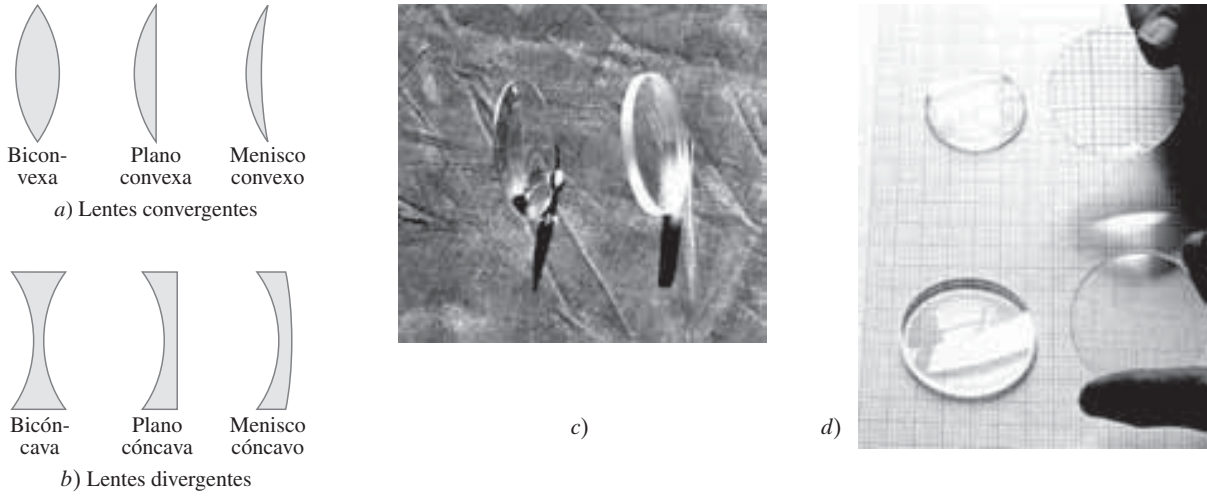


FIGURA 33–2 *a*) Lentes convergentes y *b*) lentes divergentes mostradas en sección transversal. Las lentes convergentes son más gruesas en el centro, mientras que las lentes divergentes son más delgadas en el centro. *c*) Fotografía de una lente convergente (a la izquierda) y una lente divergente (derecha). *d*) Lentes convergentes (arriba) y lentes divergentes (abajo), planas y elevadas del papel para formar imágenes.

33–1 Lentes delgadas; trazado de rayos

Sin duda, el más importante dispositivo óptico simple es la lente delgada. El desarrollo de los dispositivos ópticos con base en lentes data de los siglos XVI y XVII, aunque el registro más antiguo del uso de anteojos data de finales del siglo XIII. En la actualidad se encuentran lentes en anteojos, cámaras, lupas, telescopios, binoculares, microscopios e instrumentos médicos. Una lente delgada generalmente es circular y sus dos caras son porciones de una esfera. (Aunque también son posibles superficies cilíndricas, pero el texto se concentrará en las esféricas). Las dos caras pueden ser cóncavas, convexas o planas. En las figuras 33-2 a y b se presentan varios tipos, en sección transversal.

Considere los rayos paralelos que inciden sobre la lente biconvexa que se reproduce en sección transversal en la figura 33-3a. Se supone que la lente está hecha de un material como vidrio o plástico transparente, con índice de refracción mayor que el del aire exterior. El **eje** de una lente es una línea recta que pasa a través del centro de la lente y es perpendicular a sus dos superficies (figura 33-3). A partir de la ley de Snell, se puede ver que cada rayo en la figura 33-3a se dobla hacia el eje cuando entra a la lente y de nuevo cuando sale de la lente en la superficie posterior. (Advierta las líneas punteadas que indican las normales a cada superficie para el rayo superior). Si los rayos paralelos al eje inciden sobre una lente delgada, se enfocarán en un punto llamado **punto focal**, F. Esto no será precisamente cierto para una lente con superficies esféricas. Pero casi será cierto (esto es, los rayos paralelos se enfocarán sobre una pequeña región que es casi un punto) si el diámetro de la lente es pequeño en comparación con los radios de curvatura de las dos superficies de la lente. Este criterio lo satisface una **lente delgada**, que es muy delgada en comparación con su diámetro, y aquí sólo se considerarán lentes delgadas.

Los rayos provenientes de un punto de un objeto distante, en esencia, son paralelos; véase la figura 33-12. Por lo tanto, se puede decir que *el punto focal es el punto de imagen para un objeto en el infinito sobre el eje de la lente*. En consecuencia, el punto focal de una lente se encuentra al ubicar el punto donde los rayos de Sol (o los de algún otro objeto distante) se llevan a una imagen nítida, figura 33-4. La distancia del punto focal desde el centro de la lente se llama **distancia focal** o **longitud focal**, f. Es posible hacer girar una lente de manera que la luz pueda pasar a través de ella desde el lado opuesto. La distancia focal es *la misma* en ambos lados, como se verá más adelante, incluso si las curvaturas de las dos superficies de la lente son diferentes. Si los rayos paralelos inciden sobre una lente en un ángulo, como en la figura 33-3b, se enfocan en un punto F_a. El plano que contiene todos los puntos focales, como F y F_a en la figura 33-3b, se llama **plano focal** de la lente.

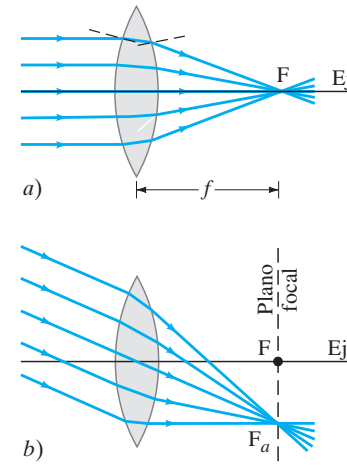


FIGURA 33–3 Rayos paralelos llegan a un foco por medio de una lente delgada convergente.

FIGURA 33–4 Imagen del Sol capaz de quemar madera.

Cualquier lente (en aire) que sea más gruesa en el centro que en los bordes hará que los rayos paralelos converjan en un punto, y se llama **lente convergente** (véase la figura 33-2a). Las lentes que son más delgadas en el centro que en los bordes (figura 33-2b) se llaman **lentes divergentes** porque hacen que la luz paralela diverja, como se muestra en la figura 33-5. El punto focal, F, de una lente divergente se define como aquel punto desde el cual los rayos refractados, que se originan de los rayos incidentes paralelos, parecen surgir como se observa en la figura 33-5. Y la distancia desde F hasta la lente se llama **distancia focal**, f, tal como para una lente convergente.

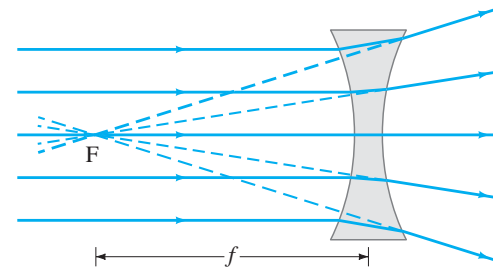


FIGURA 33–5 Lente divergente.

Los optometristas y oftalmólogos, en vez de usar la distancia focal, usan el recíproco de la distancia focal para especificar la intensidad de los anteojos (o los lentes de contacto). A esto se le llama **potencia**, P, de una lente:

$$P = \frac{1}{f}. \qquad \textbf{(33–1)}$$

La unidad para la potencia de una lente es la **dioptría** (D), que es un metro inverso: $1\ \text{D} = 1\ \text{m}^{-1}$. Por ejemplo, una lente con una distancia focal de 20 cm tiene una potencia $P = 1/(0.20\ \text{m}) = 5.0\ \text{D}$. En el texto principalmente se usará la distancia focal, pero de nuevo se hará referencia a la potencia de una lente cuando se examinen las lentes de los anteojos en la sección 33-6.

El parámetro más importante de una lente es su distancia focal f. Para una lente convergente, f se mide fácilmente al encontrar el punto de imagen para el Sol u otro objeto distante. Una vez conocida f, la posición de la imagen se puede calcular para cualquier objeto. Encontrar el punto de imagen dibujando rayos sería difícil si se tienen que determinar los ángulos de refracción en la superficie frontal de la lente y de nuevo en la superficie posterior de donde salen los rayos. Se puede ahorrar mucho esfuerzo al recurrir a ciertos hechos ya conocidos, como el que un rayo paralelo al eje de la lente pasa (después de la refracción) a través del punto focal. Para determinar un punto de imagen, se pueden considerar sólo los tres rayos indicados en la figura 33-6, la cual representa al objeto como una flecha (a la izquierda), e incluye una lente convergente que forma una imagen a la derecha (flecha punteada). Tales rayos, que emanan de un solo punto en el objeto, se dibujan como si la lente fuera infinitamente delgada, y en la figura sólo se muestra una sola desviación clara en la línea central de la lente, en vez de las refracciones en cada superficie. Estos tres rayos se dibujan del modo siguiente:

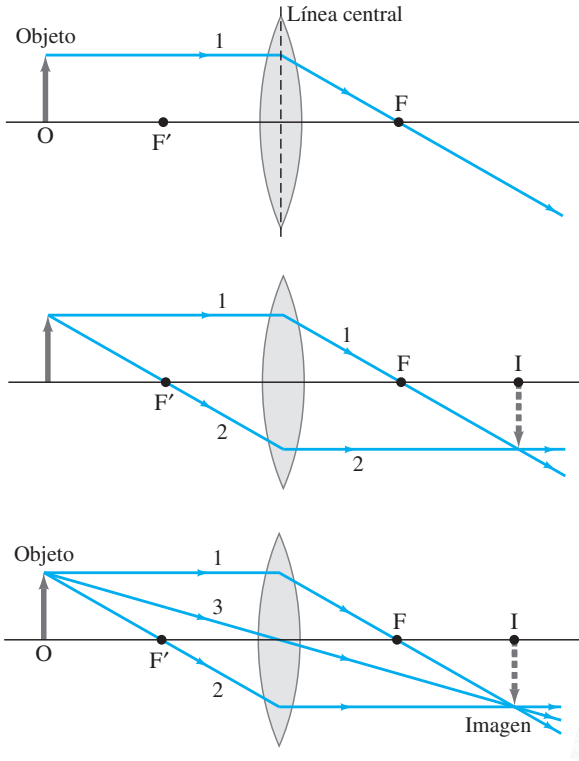
DIAGRAMA DE RAYOS
Cómo encontrar la posición de la imagen formada por una lente delgada

El rayo 1 se dibuja paralelo al eje, figura 33.6a; por lo tanto, la lente lo refracta de manera que pasa a lo largo de una línea a través del punto focal F detrás de la lente. (Véase también la figura 33-3a).

El rayo 2 se dibuja sobre una línea que pasa a través del otro punto focal F′ (lado frontal de la lente en la figura 33-6) y sale de la lente paralelo al eje, figura 33-6b.

El rayo 3 se dirige hacia el centro mismo de la lente, donde las dos superficies en esencia son paralelas entre sí, figura 33-6c; en consecuencia, este rayo surge de la lente en el mismo ángulo en el que entró; el rayo se desplazaría ligeramente hacia un lado, como se vio en el ejemplo 32-8, pero, como se supone que la lente es delgada, el rayo 3 se dibujó recto, como se aprecia.

El punto donde se cruzan estos tres rayos es el punto de imagen para ese punto de objeto. En realidad, cualesquiera dos de estos rayos serán suficientes para ubicar el punto de imagen, pero dibujar el tercer rayo servirá como comprobación.



a) El rayo 1 sale de un punto en el objeto y va paralelo al eje, luego se refracta a través del punto focal detrás.

b) El rayo 2 pasa a través de F′ enfrente de la lente; por consiguiente, es paralelo al eje detrás de la lente.

c) El rayo 3 pasa recto a través del centro de la lente (que se supone muy delgada).

FIGURA 33–6 Cómo encontrar la imagen mediante trazado de rayos para una lente convergente. Los rayos se ilustran saliendo de un punto en el objeto (una flecha). Se representan los tres rayos más útiles, que salen de la punta del objeto, para determinar dónde se forma la imagen de ese punto.

Al usar estos tres rayos para un punto del objeto, se puede encontrar el punto de imagen para ese punto del objeto (la parte superior de la flecha en la figura 33-6). Los puntos imagen para todos los demás puntos en el objeto se pueden encontrar de igual modo con la finalidad de determinar la imagen completa del objeto. Puesto que los rayos en realidad pasan a través de la imagen para el caso que se ilustra en la figura 33-6, se trata de una **imagen real** (véase la página 840). La imagen se podría detectar mediante una película o un sensor electrónico, o en realidad verse sobre una superficie blanca o una pantalla colocada en la posición de la imagen (figura 33-7a).

EJEMPLO CONCEPTUAL 33–1 **Lente semibloqueada.** ¿Qué sucede a la imagen de un objeto si la mitad superior de una lente está cubierta con un trozo de cartón?

RESPUESTA Veamos los rayos de la figura 33-6. Si la mitad superior (o cualquier otra mitad de la lente) está bloqueada, usted podría pensar que la mitad de la imagen también está bloqueada. Pero en la figura 33-6c, se observa cómo los rayos que se emplean para crear la "parte superior" de la imagen pasan a través tanto de la parte superior como inferior de la lente. Sólo se ilustran tres de los muchos rayos (muchos otros pasan a través de la lente y pueden formar la imagen). Cubrir parte de la lente reduce la luz total recibida y, por lo tanto, el brillo de la imagen.

NOTA Si la lente está parcialmente bloqueada por su dedo pulgar, usted notará una imagen fuera de foco de ese pulgar.

Cómo ver la imagen

La imagen también se puede ver directamente por el ojo cuando éste se coloca detrás de la imagen, como se ilustra en la figura 33-6c, de manera que algunos de los rayos que divergen desde cada punto en la imagen pueden entrar al ojo. Una imagen nítida sólo se puede ver con rayos *que divergen* de cada punto en la imagen, porque los objetos normales se ven cuando los rayos divergentes de cada punto entran al ojo como se muestra en la figura 32-1. El ojo no logra enfocar los rayos que convergen en él; si el ojo se coloca entre los puntos F e I de la figura 33-6c, no vería una imagen nítida. (En la sección 33-6 se tratará más acerca de los ojos). La figura 33-7 presenta una imagen vista *a*) en una pantalla y *b*) directamente por el ojo (y una cámara) colocada detrás de la imagen. El ojo puede ver imágenes reales y virtuales (véase la siguiente página) en tanto el ojo se coloque de manera que los rayos que divergen de la imagen entren en él.

FIGURA 33–7 *a*) Una lente convergente forma una imagen real (aquí de un edificio distante, de cabeza) en una pantalla. *b*) Esa misma imagen real también es directamente visible por el ojo. [La figura 33-2d presenta imágenes (papel gráfico) vistas por el ojo, formadas tanto por lentes divergentes como por convergentes].

a)

b)

Lentes divergentes

Al dibujar los mismos tres rayos que salen de un solo punto del objeto, es posible determinar la posición de la imagen formada por una lente divergente, como se muestra en la figura 33-8. Observe que el rayo 1 se dibuja paralelo al eje, pero no pasa a través del punto focal F′ detrás de la lente. En vez de ello, parece provenir desde el punto focal F enfrente de la lente (línea punteada). El rayo 2 se dirige hacia F′ y la lente lo refracta paralelo al eje de la lente. El rayo 3 pasa directamente a través del centro de la lente. Los tres rayos refractados parecen surgir de un punto a la izquierda de la lente. Éste es el punto de imagen, I. Puesto que los rayos no pasan a través de la imagen, es una **imagen virtual**. Advierta que el ojo no distingue entre imágenes reales y virtuales: ambas son visibles.

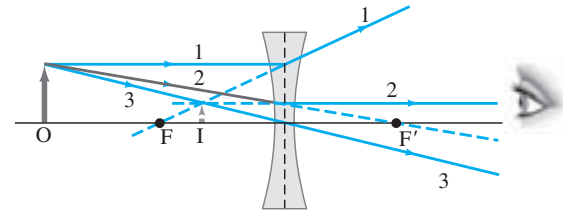


FIGURA 33–8 Cómo encontrar la imagen mediante trazado de rayos para una lente divergente.

33–2 Ecuación de lentes delgadas; amplificación

Ahora se deducirá una ecuación que relaciona la distancia de la imagen con la distancia del objeto y la distancia focal de una lente delgada. Esta ecuación hará más rápida y exacta la determinación de la posición de la imagen que el trazado de rayos. Sea d_o la distancia del objeto, la distancia del objeto desde el centro de la lente, y d_i la distancia de la imagen, la distancia de la imagen desde el centro de la lente.

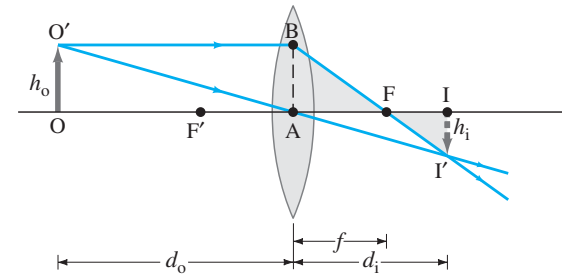


FIGURA 33–9 Deducción de la ecuación de lentes para una lente convergente.

Sean h_o y h_i las alturas del objeto y la imagen. Considere los dos rayos que se ilustran en la figura 33-9 para una lente convergente que se supone es muy delgada. Los triángulos rectos FI′I y FBA (resaltados en amarillo) son similares porque el ángulo AFB es igual al ángulo IFI′; de manera que

$$\frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i - f}{f},$$

dado que la longitud AB = h_o. Los triángulos OAO′ e IAI′ también son similares. Por lo tanto,

$$\frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}.$$

Al igualar los lados derechos de estas dos ecuaciones (los lados izquierdos son iguales), y dividir entre d_i se obtiene

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} = \frac{1}{d_o}$$

o

ECUACIÓN DE LENTES DELGADAS

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}. \qquad \textbf{(33–2)}$$

A esto se le llama **ecuación de la lente delgada**. Relaciona la distancia de la imagen d_i con la distancia del objeto d_o y la distancia focal f. Es la ecuación más útil en óptica

geométrica. (Es interesante que sea exactamente la misma que la ecuación del espejo, ecuación 32-2). Si el objeto está en el infinito, entonces $1/d_o = 0$, de manera que $d_i = f$. Por lo tanto, la distancia focal es la distancia de la imagen para un objeto en el infinito, como se mencionó anteriormente.

Es posible deducir la ecuación de lente para una lente divergente a partir de la figura 33-10. Los triángulos IAI′ y OAO′ son similares; y los triángulos IFI′ y AFB son similares. En consecuencia (advirtiendo que la longitud AB $= h_o$)

$$\frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o} \qquad \text{y} \qquad \frac{h_i}{h_o} = \frac{f - d_i}{f}.$$

Cuando se igualan los lados derechos de estas dos ecuaciones y se simplifica, se obtiene

$$\frac{1}{d_o} - \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{f}.$$

Esta ecuación se convierte en la ecuación 33-2 si f y d_i se hacen negativas. Esto es, f se hace *negativa para una lente divergente* y d_i es negativa cuando la imagen está en el mismo lado de la lente de donde procede la luz. Por ende, la ecuación 33-2 será válida tanto para lentes convergentes como para divergentes, y para *todas* las situaciones, si se usan las siguientes **convenciones de signos**:

1. La distancia focal es positiva para lentes convergentes y negativa para lentes divergentes.
2. La distancia del objeto es positiva si el objeto está en el lado de la lente de donde proviene la luz (generalmente éste es el caso, aunque, cuando las lentes se usan en combinación, puede no serlo); de otro modo, es negativa.
3. La distancia de la imagen es positiva si la imagen está en el lado opuesto de la lente desde donde proviene la luz; si está en el mismo lado, d_i es negativa. De manera equivalente, la distancia de la imagen es positiva para una imagen real, y negativa para una imagen virtual.
4. La altura de la imagen, h_i, es positiva si la imagen está derecha, y negativa si la imagen está invertida en relación con el objeto. (h_o siempre se toma como derecha y positiva).

La **amplificación lateral**, m, de una lente se define como la razón entre la altura de la imagen y la altura del objeto, $m = h_i/h_o$. A partir de las figuras 33-9 y 33-10, y de las convenciones recién establecidas (por las cuales se necesitará un signo menos abajo), se tiene

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}. \qquad \textbf{(33–3)}$$

Para una imagen derecha la amplificación es positiva ($h_i > 0$ y $d_i < 0$), y para una imagen invertida la amplificación es negativa ($h_i < 0$ y $d_i > 0$).

A partir de la convención de signos 1, se deduce que la potencia (ecuación 33-1) de una lente convergente, en dioptrías, es positiva, mientras que la potencia de una lente divergente es negativa. A una lente convergente en ocasiones se le llama **lente positiva**, y a una lente divergente, **lente negativa**.

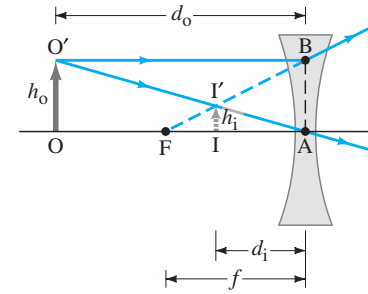


FIGURA 33–10 Deducción de la ecuación de lentes para una lente divergente.

CUIDADO

La distancia focal es negativa para lentes divergentes

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CONVENCIONES DE SIGNOS para lentes

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lentes delgadas

1. Dibuje un **diagrama de rayos**, tan preciso como sea posible, pero incluso un bosquejo puede servir como confirmación de los resultados analíticos. Elija un punto en el objeto y dibuje al menos dos, de preferencia tres, de los rayos fáciles de dibujar descritos en las figuras 33-6 y 33-8. El punto de imagen está donde los rayos se intersecan.
2. Para soluciones analíticas, despeje las incógnitas en la **ecuación de lentes delgadas** (ecuación 33-2) y la **ecuación de amplificación** (ecuación 33-3). La ecuación de lentes delgadas implica recíprocos: no olvide tomar el recíproco.
3. Siga las **convenciones de signos** anteriores.
4. Compruebe que sus respuestas analíticas son **congruentes** con el diagrama de rayos.

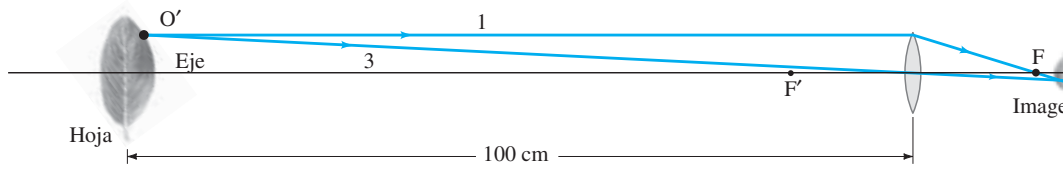


FIGURA 33–11 Ejemplo 33-2. (No a escala).

EJEMPLO 33–2 **Imagen formada por lentes convergentes.** ¿Cuál es *a*) la posición y *b*) el tamaño de la imagen de una hoja de 7.6 cm de alto colocada a 1.00 m de la lente de una cámara con distancia focal de +50.0 mm?

PLANTEAMIENTO Siga explícitamente los pasos de la estrategia descrita en el recuadro Resolución de problemas.

SOLUCIÓN

1. **Diagrama de rayos.** La figura 33-11 es un diagrama de rayos aproximado, que sólo muestra los rayos 1 y 3 para un solo punto en la hoja. Se ve que la imagen debe estar un poco detrás del punto focal F, hacia la derecha de la lente.
2. **Ecuaciones de lente delgada y de amplificación.** *a*) La posición de la imagen se encuentra analíticamente mediante la ecuación de la lente delgada, ecuación 33-2. La lente de la cámara es convergente, con $f = +5.00$ cm y $d_o = 100$ cm, y por ende la ecuación de la lente delgada da

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{5.00\text{ cm}} - \frac{1}{100\text{ cm}}$$

$$= \frac{20.0 - 1.0}{100\text{ cm}} = \frac{19.0}{100\text{ cm}}.$$

De esta forma, al tomar el recíproco,

$$d_i = \frac{100\text{ cm}}{19.0} = 5.26\text{ cm},$$

o 52.6 mm detrás de la lente.

b) La amplificación es

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{5.26\text{ cm}}{100\text{ cm}} = -0.0526,$$

de manera que

$$h_i = mh_o = (-0.0526)(7.6\text{ cm}) = -0.40\text{ cm}.$$

La imagen mide 4.0 mm de alto.

3. **Convenciones de signos.** La distancia de la imagen d_i resultó positiva, así que la imagen está detrás de la lente. La altura de la imagen es $h_i = -0.40$ cm; el signo menos significa que la imagen está invertida.
4. **Consistencia.** Los resultados analíticos de los pasos 2 y 3 son congruentes con el diagrama de rayos, figura 33-11: la imagen se encuentra detrás de la lente y es invertida.

NOTA El inciso *a*) dice que la imagen está 2.6 mm más lejos de la lente que la imagen para un objeto en el infinito, que sería igual a la distancia focal, 50.0 mm. De hecho, cuando se enfoca la lente de una cámara, cuanto más cerca de la cámara esté el objeto, más lejos de la lente debe estar el sensor o la película.

EJERCICIO A Si la hoja (el objeto) del ejemplo 33-2 se aleja más de la lente, ¿la imagen se acercará o se alejará más de la lente? (¡No calcule!)

EJEMPLO 33–3 **Objeto cerca de una lente convergente.** Un objeto se coloca a 10 cm de una lente convergente con 15 cm de distancia focal. Determine la posición y el tamaño de la imagen *a*) analíticamente y *b*) mediante un diagrama de rayos.

PLANTEAMIENTO Use primero las ecuaciones 33-2 y 33-3 para obtener una solución analítica, y luego confirme con un diagrama de rayos con los rayos especiales 1, 2 y 3 para un solo punto del objeto.

SOLUCIÓN *a*) Dados $f = 15$ cm y $d_o = 10$ cm, se tiene

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{15\text{ cm}} - \frac{1}{10\text{ cm}} = -\frac{1}{30\text{ cm}},$$

y $d_i = -30$ cm. (¡Recuerde tomar el recíproco!) Puesto que d_i es negativa, la imagen debe ser virtual y localizarse en el mismo lado de la lente que el objeto. La amplificación es

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{-30\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 3.0.$$

La imagen es tres veces más grande que el objeto y está derecha. Esta lente se usa como una lupa simple, que se analiza con más detalle en la sección 33-7.

b) El diagrama de rayos se presenta en la figura 33-12 y confirma el resultado del inciso *a*). Se elige el punto O′ en la parte superior del objeto y se dibuja el rayo 1, que es sencillo. Pero el rayo 2 puede requerir cierto razonamiento: si se le dibuja en dirección hacia F′, va en el camino equivocado, así que se dibuja como si viniera de F′ (y por tanto se utiliza línea punteada), incide sobre la lente y luego viaja en forma paralela al eje de la lente. Se le proyecta hacia atrás, en forma paralela, con una línea punteada, como también se debe hacer para el rayo 1, con la finalidad de encontrar dónde se cruzan. El rayo 3 se dibuja a través del centro de la lente y cruza a los otros dos rayos en el punto de imagen, I′.

NOTA A partir de la figura 33-12 se ve que, siempre que un objeto se coloca entre una lente convergente y su punto focal, la imagen es virtual.

⚠ CUIDADO
No olvide tomar el recíproco

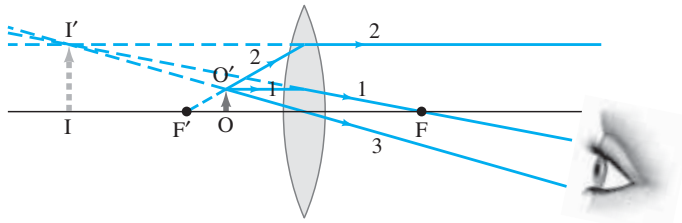


FIGURA 33–12 Un objeto colocado dentro del punto focal de una lente convergente produce una imagen virtual. Ejemplo 33-3.

EJEMPLO 33–4 **Lente divergente.** ¿Dónde debe colocarse un pequeño insecto si una lente divergente con 25 cm de distancia focal debe formar una imagen virtual a 20 cm de la lente, en el mismo lado que el objeto?

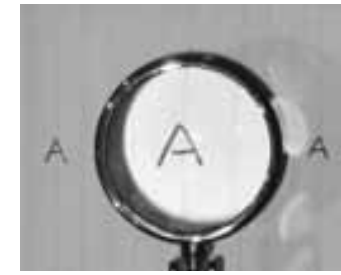
PLANTEAMIENTO El diagrama de rayos es básicamente el de la figura 33-10, porque aquí la lente es divergente y la imagen está enfrente de la lente dentro de la distancia focal. (Ahora, precisamente, sería un valioso ejercicio dibujar el diagrama de rayos a escala). La distancia del insecto, d_o, se puede calcular con la ecuación de la lente delgada.

SOLUCIÓN La lente es divergente, así que f es negativa: $f = -25$ cm. La distancia de la imagen también debe ser negativa, pues la imagen está enfrente de la lente (convenciones de signo), de manera que $d_i = -20$ cm. La ecuación 33-2 da

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{25\text{ cm}} + \frac{1}{20\text{ cm}} = \frac{-4+5}{100\text{ cm}} = \frac{1}{100\text{ cm}}.$$

Así que el objeto debe estar a 100 cm enfrente de la lente.

FIGURA 33–13 Ejercicio C.



a)

b)

EJERCICIO B Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 866, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO C La figura 33-13 ilustra una lente convergente sostenida sobre tres letras A de igual tamaño. En *a*) la lente está a 5 cm del papel, y en *b*) la lente está a 15 cm del papel. Estime la distancia focal de la lente. ¿Cuál es la posición de la imagen para cada caso?

33–3 Combinaciones de lentes

Los instrumentos ópticos por lo general usan lentes en combinación. Cuando la luz pasa a través de más de una lente, la imagen formada por la primera lente se encuentra como si estuviera sola. Esta imagen se convierte en el *objeto* para la segunda lente, y entonces se encuentra la imagen formada por esta segunda lente, que es la imagen final si sólo existen dos lentes. La amplificación total será el producto de las amplificaciones separadas de cada lente, como se verá. Incluso si la segunda lente intercepta la luz proveniente de la primera lente antes de que se forme una imagen, esta técnica funciona.

EJEMPLO 33–5 **Un sistema de dos lentes.** Dos lentes convergentes, A y B, con distancias focales $f_A = 20.0$ cm y $f_B = 25.0$ cm, se colocan separadas 80.0 cm, como se ilustra en la figura 33-14a. Un objeto se coloca a 60.0 cm enfrente de la primera lente, como se observa en la figura 33-14b. Determine *a*) la posición y *b*) la amplificación de la imagen final formada por la combinación de las dos lentes.

PLANTEAMIENTO Comience en la punta del objeto O, y dibuje los rayos 1, 2 y 3 para la primera lente, A, y también un rayo 4 que, después de pasar a través de la lente A, actúe como "rayo 3" (a través del centro) para la segunda lente, B. El rayo 2 para la lente A sale paralelo y es el rayo 1 para la lente B. Para determinar la posición de la imagen I_A formada por la lente A, se emplea la ecuación 33-2 con $f_A = 20.0$ cm y $d_{oA} = 60.0$ cm. La distancia de I_A (imagen de la lente A) desde la lente B es la distancia del objeto d_{oB} para la lente B. La imagen final se encuentra empleando la ecuación de la lente delgada, esta vez con todas las distancias relativas a la lente B. Para *b*), las amplificaciones se encuentran a partir de la ecuación 33-3 para cada lente a la vez.

SOLUCIÓN *a*) El objeto está a una distancia $d_{oA} = +60.0$ cm de la primera lente, A, y esta lente forma una imagen cuya posición se calcula con la ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{d_{iA}} = \frac{1}{f_A} - \frac{1}{d_{oA}} = \frac{1}{20.0\text{ cm}} - \frac{1}{60.0\text{ cm}} = \frac{3-1}{60.0\text{ cm}} = \frac{1}{30.0\text{ cm}}.$$

⚠ **CUIDADO**
La distancia del objeto para una segunda lente **no** *es igual a la distancia de la imagen para la primera lente*

Así que la primera imagen I_A está a $d_{iA} = 30.0$ cm detrás de la primera lente. Esta imagen se convierte en el objeto para la segunda lente, B. Está a un distancia $d_{oB} = 80.0\text{ cm} - 30.0\text{ cm} = 50.0$ cm enfrente de la lente B, como se observa en la figura 33-14b. La imagen formada por la lente B, de nuevo con la ecuación de la lente delgada, está a una distancia d_{iB} de la lente B:

$$\frac{1}{d_{iB}} = \frac{1}{f_B} - \frac{1}{d_{oB}} = \frac{1}{25.0\text{ cm}} - \frac{1}{50.0\text{ cm}} = \frac{2-1}{50.0\text{ cm}} = \frac{1}{50.0\text{ cm}}.$$

Por lo tanto, $d_{iB} = 50.0$ cm detrás de la lente B. Ésta es la imagen final; véase la figura 33-14b.

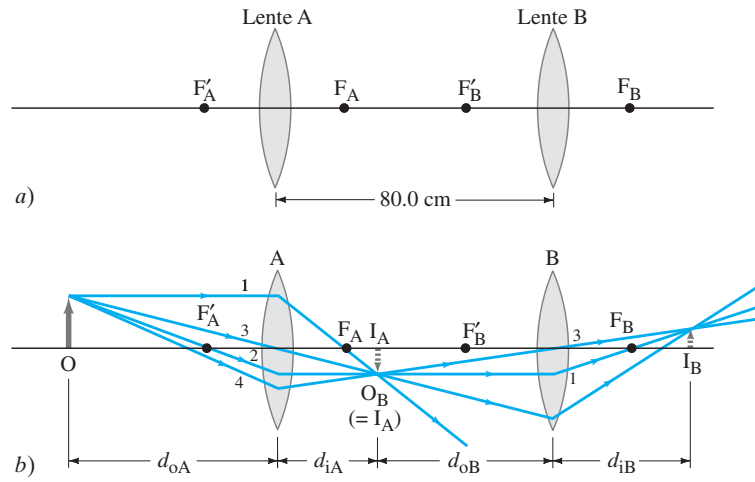


FIGURA 33–14 Dos lentes, A y B, en combinación. Ejemplo 33-5. Los números pequeños se refieren a los rayos dibujados con facilidad.

b) La lente A tiene una amplificación (ecuación 33-3)

$$m_A = -\frac{d_{iA}}{d_{oA}} = -\frac{30.0\text{ cm}}{60.0\text{ cm}} = -0.500.$$

Por lo tanto, la primera imagen está invertida y tiene la mitad de la altura que el objeto (de nuevo, ecuación 33-3):

$$h_{iA} = m_A h_{oA} = -0.500 h_{oA}.$$

La lente B toma esta imagen como objeto y cambia su altura en un factor

$$m_B = -\frac{d_{iB}}{d_{oB}} = -\frac{50.0\text{ cm}}{50.0\text{ cm}} = -1.000.$$

La segunda lente reinvierte la imagen (el signo menos), pero no modifica su tamaño. La altura de la imagen final es (recuerde que h_{oB} es igual que h_{iA})

$$h_{iB} = m_B h_{oB} = m_B h_{iA} = m_B m_A h_{oA} = (m_{total}) h_{oA}.$$

La amplificación total es el producto de m_A y m_B, que aquí es igual a $m_{total} = m_A m_B = (-1.000)(-0.500) = +0.500$, o la mitad de la altura original, y la imagen final está derecha.

EJEMPLO 33–6 **Medición de f para una lente divergente.** Para medir la distancia focal de una lente divergente, se coloca una lente divergente en contacto con ella, como se ilustra en la figura 33-15. Los rayos del Sol se enfocan con esta combinación en un punto a 28.5 cm detrás de las lentes, como se muestra. Si la lente convergente tiene una distancia focal f_C de 16.0 cm, ¿cuál es la distancia focal f_D de la lente divergente? Suponga que ambas lentes son delgadas y que el espacio entre ellas es despreciable.

PLANTEAMIENTO La distancia de la imagen para la primera lente es igual a su distancia focal (16.0 cm), pues la distancia del objeto es infinita (∞). La posición de esta imagen, aun cuando en realidad nunca se forma, actúa como el objeto para la segunda lente (divergente). Aplicamos la ecuación de la lente delgada a la lente divergente para determinar su distancia focal, puesto que la imagen final está a $d_i = 28.5$ cm.

SOLUCIÓN Si la lente divergente no existiera, la lente convergente formaría la imagen en su punto focal; esto es, a una distancia $f_C = 16.0$ cm detrás de ella (líneas punteadas en la figura 33-15). Cuando la lente divergente se coloca junto a la lente convergente, la imagen formada por la primera lente se trata como el *objeto* para la segunda lente. Puesto que este objeto se encuentra a la derecha de la lente divergente, ésta es una situación donde d_o es negativa (véanse las convenciones de signos, página 871). En consecuencia, para la lente divergente, el objeto es virtual y $d_o = -16.0$ cm. La lente divergente forma la imagen de este objeto virtual a una distancia $d_i = 28.5$ cm (dada). Por lo tanto,

$$\frac{1}{f_D} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{-16.0\text{ cm}} + \frac{1}{28.5\text{ cm}} = -0.0274\text{ cm}^{-1}.$$

Tomamos el recíproco para encontrar $f_D = -1/(0.0274\text{ cm}^{-1}) = -36.5$ cm.

NOTA Si esta técnica debe funcionar, la lente convergente debe ser "más fuerte" que la lente divergente; esto es, debe tener una distancia focal cuya magnitud sea menor que la de la lente divergente. (Los rayos del Sol se enfocan 28.5 cm detrás de la combinación, de manera que la distancia focal de la combinación total es $f_T = 28.5$ cm).

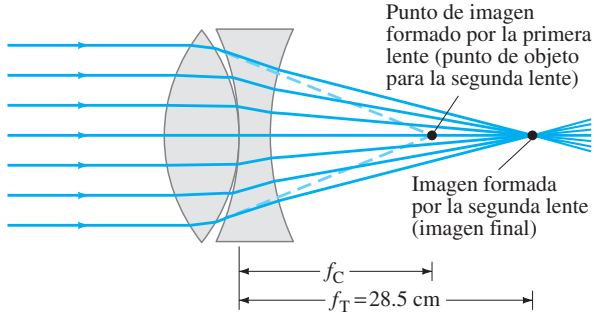


FIGURA 33–15 Determinación de la distancia focal de una lente divergente. Ejemplo 33-6.

*33–4 Ecuación del fabricante de lentes

En esta sección se demostrará que los rayos paralelos se llevan a un foco en un punto único para una lente delgada. Al mismo tiempo, también se deducirá una ecuación que relaciona la distancia focal de una lente con los radios de curvatura de sus dos superficies y su índice de refracción, la cual se conoce como la ecuación del fabricante de lentes.

En la figura 33-16, un rayo paralelo al eje de una lente se refracta en la superficie frontal de la lente en el punto A_1 y se refracta en la superficie posterior en el punto A_2. Luego, este rayo pasa a través del punto F, que se llama punto focal para este rayo. El punto A_1 está a una altura h_1 sobre el eje, y el punto A_2 está a una altura h_2 sobre el eje. C_1 y C_2 son los centros de curvatura de las dos superficies de la lente; de manera que la longitud $C_1A_1 = R_1$, el radio de curvatura de la superficie frontal, y $C_2A_2 = R_2$ es el radio de la segunda superficie. Considere una lente biconvexa y, por convención, elija los radios de ambas superficies de la lente como positivas. El grosor de la lente se exageró enormemente de manera que se distinguieran los diversos ángulos. Pero se supondrá que la lente en realidad es muy delgada y que los ángulos entre los rayos y el eje son pequeños. En esta aproximación, los senos y tangentes de todos los ángulos serán iguales a los ángulos mismos en radianes. Por ejemplo, sen $\theta_1 \approx \tan \theta_1 \approx \theta_1$ (radianes).

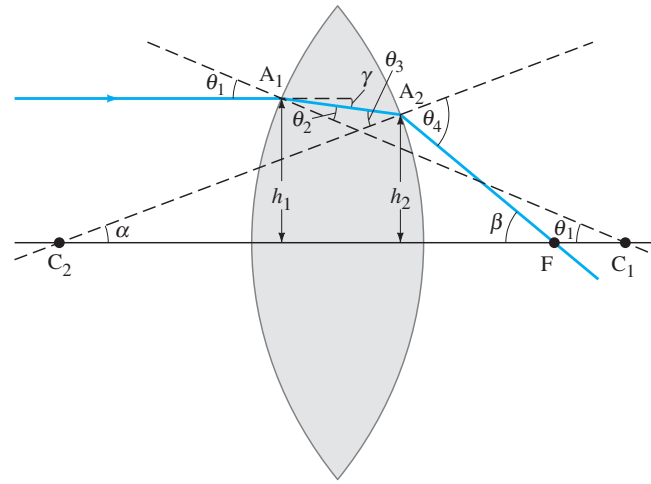


FIGURA 33–16 Diagrama de un rayo que pasa a través de una lente para la deducción de la ecuación del fabricante de lentes.

Así, en esta aproximación la ley de Snell dice que

$$\theta_1 = n\theta_2$$
$$\theta_4 = n\theta_3$$

donde n es el índice de refracción del vidrio, y se supone que la lente está rodeada por aire ($n = 1$). Advierta también, en la figura 33-16, que

$$\theta_1 \approx \text{sen}\,\theta_1 = \frac{h_1}{R_1}$$
$$\alpha \approx \frac{h_2}{R_2}$$
$$\beta \approx \frac{h_2}{f}.$$

Esto último se deduce porque la distancia de F a la lente (que se supone muy delgada) es f. A partir del diagrama, el ángulo γ es

$$\gamma = \theta_1 - \theta_2.$$

Un examen cuidadoso de la figura 33-16 también indica que

$$\alpha = \theta_3 - \gamma.$$

Esto se constata al dibujar una línea horizontal a la izquierda del punto A_2, que divida al ángulo θ_3 en dos partes. La parte superior es igual a γ y la parte inferior es igual a α. (Los ángulos opuestos entre una línea oblicua y dos líneas paralelas son iguales). Por lo tanto, $\theta_3 = \gamma + \alpha$. Más aún, al dibujar una línea horizontal a la derecha del punto A_2, θ_4 se divide en dos partes. La parte superior es α y la inferior es β.

En consecuencia,

$$\theta_4 = \alpha + \beta.$$

Ahora se combinan todas estas ecuaciones:

$$\alpha = \theta_3 - \gamma = \frac{\theta_4}{n} - (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n} - \theta_1 + \theta_2,$$

o

$$\frac{h_2}{R_2} = \frac{h_2}{nR_2} + \frac{h_2}{nf} - \frac{h_1}{R_1} + \frac{h_1}{nR_1}.$$

Puesto que la lente es delgada, $h_1 \approx h_2$, y todas las h se cancelan en todos los numeradores. Luego se multiplica por n y se reordena para encontrar que

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad \textbf{(33–4)}$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación del fabricante de lentes**. Relaciona la distancia focal de una lente delgada con los radios de curvatura de sus dos superficies y su índice de refracción. Advierta que f para una lente delgada no depende de h_1 o h_2. Por lo tanto, la posición del punto F no depende de dónde incida el rayo sobre la lente. Por consiguiente, todos los rayos paralelos al eje de una lente delgada pasarán a través del mismo punto F, que es lo que se desea probar.

En la deducción, ambas superficies son convexas, y R_1 y R_2 se consideran positivas.[†] La ecuación 33-4 también funciona para lentes con una o ambas superficies cóncavas; pero, para una superficie cóncava, el radio se debe considerar *negativo*.

Advierta en la ecuación 33-4 que la ecuación es simétrica en R_1 y R_2. Por lo tanto, si una lente se voltea de manera que la luz incida sobre la otra superficie, la distancia focal es la misma incluso si las dos superficies de la lente son diferentes.

⚠ CUIDADO
Convenciones de signos

EJEMPLO 33–7 **Cálculo de f para una lente convergente.** Una lente menisco convexa (figuras 33-2a y 33-17) está hecha de vidrio con $n = 1.50$. El radio de curvatura de la superficie convexa es de 22.4 cm y el de la superficie cóncava es de 46.2 cm. *a*) ¿Cuál es la distancia focal? *b*) ¿Dónde estará la imagen para un objeto a 2.00 m de distancia?

PLANTEAMIENTO Utilice la ecuación 33-4 y advierta que R_2 es negativo porque se refiere a la superficie cóncava.

SOLUCIÓN *a*) $R_1 = 22.4$ cm y $R_2 = -46.2$ cm.
Luego,

$$\frac{1}{f} = (1.50 - 1.00)\left(\frac{1}{22.4\text{ cm}} - \frac{1}{46.2\text{ cm}}\right)$$

$$= 0.0115\text{ cm}^{-1}.$$

De manera que

$$f = \frac{1}{0.0115\text{ cm}^{-1}} = 87.0\text{ cm}$$

y la lente es convergente. Note que, si la lente se voltea de manera que $R_1 = -46.2$ cm y $R_2 = +22.4$ cm, se obtiene el mismo resultado.

b) A partir de la ecuación de lente, con $f = 0.870$ m y $d_o = 2.00$ m, se tiene

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{0.870\text{ m}} - \frac{1}{2.00\text{ m}}$$

$$= 0.649\text{ m}^{-1},$$

así que $d_i = 1/0.649\text{ m}^{-1} = 1.54$ m.

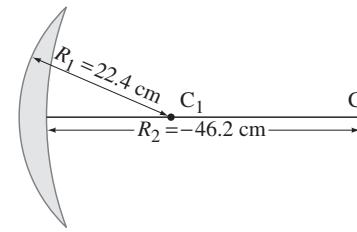


FIGURA 33–17 Ejemplo 33–7.

EJERCICIO D Una lente plano-cóncava de lucita (véase la figura 33-2b) tiene una superficie plana y la otra tiene $R = -18.4$ cm. ¿Cuál es la distancia focal? ¿La lente es convergente o divergente?

[†]Algunos libros emplean una convención diferente. Por ejemplo, R_1 y R_2 se consideran positivos si sus centros de curvatura están a la derecha de las lentes; en tal caso, aparece un signo menos en el equivalente de la ecuación 33-4.

FÍSICA APLICADA

La cámara

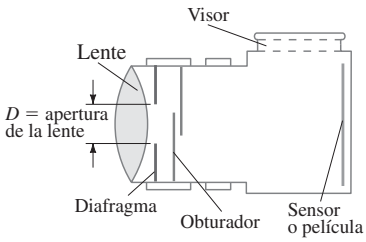


FIGURA 33–18 Una cámara simple.

FÍSICA APLICADA

Cámaras digitales

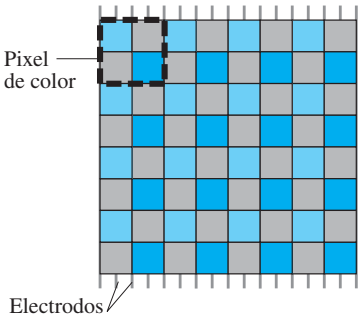
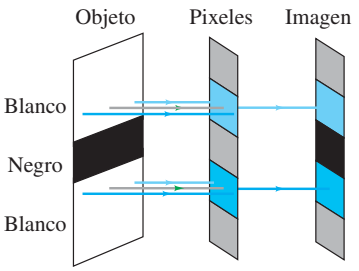


FIGURA 33–19 Porción de un sensor CCD típico. Un grupo cuadrado de cuatro pixeles $\frac{RG}{GB}$ a veces se llama "pixel de color". (Véase el pliego a color al final libro).

FIGURA 33–20 Suponga que se toma una fotografía que incluye una delgada línea negra (el objeto) sobre un fondo blanco. La *imagen* de esta línea negra tiene un halo coloreado (rojo arriba, azul abajo) debido al ordenamiento en mosaico de los pixeles de filtro de color, como lo muestran los colores transmitidos. La computadora, al promediar, puede minimizar los problemas de color como éste (el verde en la parte superior e inferior de la imagen se promedia con pixeles cercanos para dar blanco o casi blanco) pero, en consecuencia, la imagen se "suaviza" o se vuelve borrosa. Los pixeles de color en capa descritos en el texto evitarían este artificio. (Véase el pliego a color al final libro).



33–5 Cámaras: De película y digitales

Los elementos básicos de una **cámara** son una lente, una cámara oscura, un obturador que permite el paso de la luz a través de la lente sólo brevemente, y, en una cámara digital, un sensor electrónico o, en una cámara tradicional, un rollo de película (figura 33-18). Cuando se abre el obturador para una breve "exposición", la lente enfoca la luz proveniente de los objetos externos en el campo de visión como una imagen sobre la película o el sensor. La película contiene sustancias químicas fotosensibles que cambian cuando la luz incide sobre ellas. En el proceso de revelado, las reacciones químicas hacen que las áreas modificadas se vuelvan opacas, de manera que la imagen se registre sobre la película.[†]

Usted puede ver la imagen si remueve la parte trasera de una cámara convencional y ve a través de un trozo de papel de seda (sobre el cual se puede formar una imagen), colocado donde debería estar la película, con el obturador abierto.

Cámaras digitales, sensores electrónicos (CCD, CMOS)

En una **cámara digital** la película se sustituye con un sensor semiconductor. Dos tipos son de uso común: **CCD** (por las siglas de *charge-coupled device*, *dispositivo de carga acoplada*) y **CMOS** (por las siglas de *complementary metal oxide semiconductor*, es decir, *semiconductor complementario de óxido metálico*). Un sensor CCD está hecho de millones de pequeños **pixeles** ("elementos de imagen"); véanse las figuras 35-42 y 33-19. Un sensor[‡] de 6 MP (6 megapixeles) contendría aproximadamente 2000 pixeles verticalmente por 3000 pixeles horizontalmente sobre una área de quizá 4×6 mm o incluso 24×36 mm. La luz que alcanza cualquier pixel libera electrones del semiconductor. Cuanto más intensa sea la luz, más carga se acumula durante el breve tiempo de exposición. Electrodos conductores llevan la carga de cada pixel (en serie en el tiempo, hilera por hilera, de ahí el nombre de "carga acoplada") a un procesador central que almacena el brillo relativo de los pixeles y permite la reformación de la imagen más tarde en una pantalla de computadora o impresora. Un CCD es completamente reutilizable. Una vez que las cargas del pixel se transfieren a la memoria, se puede tomar una nueva imagen.

Un sensor CMOS también usa un semiconductor de silicio, e incorpora algo de electrónica dentro de cada pixel, lo que permite una lectura paralela.

El color se logra mediante filtros rojo, verde y azul sobre pixeles alternados, como se muestra en la figura 33-19, similar a un TRC o una pantalla LCD a color. El tipo de sensor que se representa en la figura 33-19 contiene el doble de pixeles verdes que de rojos o azules (pues se afirma que el verde tiene mayor influencia sobre la sensación de claridad). El color analizado por computadora en cada pixel es la intensidad de ese pixel promediada con las intensidades de los colores vecinos más cercanos.

Con la finalidad de reducir la cantidad de memoria para cada fotografía, los programas de compresión promedian los pixeles, pero con una consecuente pérdida de claridad o "resolución".

*Artificios digitales

Las cámaras digitales son capaces de producir artificios de imagen (efectos artificiales en la imagen no presentes en el original) que son resultado del proceso de la formación de imagen. Un ejemplo que usa el "mosaico" de pixeles (figura 33-19) se describe en la figura 33-20. Una tecnología alternativa utiliza un sistema de capa de silicio semiconductor semitransparente, donde diferentes longitudes de onda de la luz penetran el silicio a diferentes profundidades: cada pixel es un emparedado de capas parcialmente transparentes, uno para cada color. La capa superior puede absorber luz azul, lo que permite el paso de las luces verde y roja. La segunda capa absorbe verde y la capa del fondo detecta la roja. Cada pixel detecta los tres colores, lo que da por resultado una mejor resolución de color y menos artificios.

[†]A esto se le llama *negativo*, porque las áreas oscuras corresponden a objetos brillantes y viceversa. El mismo proceso ocurre durante la impresión para generar una imagen "positiva" en blanco y negro a partir del negativo. La película de color tiene tres capas de emulsión (o tintes) que corresponden a los tres colores primarios.

[‡]Cada diferente color de pixel en un CCD se cuenta como un pixel separado. En contraste, en una pantalla LCD (sección 35-12), un grupo de tres subpixeles se cuenta como un pixel, un conteo más conservador.

Ajustes de cámara

Existen tres ajustes principales en las cámaras de buena calidad: rapidez del obturador, abertura del diafragma (números *f*) y enfoque. Aunque la mayoría de las cámaras actuales realizan estos ajustes automáticamente, es valioso comprender estos ajustes para usar una cámara de manera efectiva. Para trabajos especiales o de alta calidad, es indispensable una cámara manual (figura 33-21).

Tiempo de exposición o **rapidez del obturador** Esto se refiere ya sea a la rapidez con que el sensor digital puede hacer una lectura precisa, o a cuánto tiempo está abierto el obturador de una cámara de película y está expuesta la película o el sensor. Esto varía desde un segundo o más ("tiempos de exposición") hasta $\frac{1}{1000}$ s o menos. Para evitar imágenes borrosas por el movimiento de la cámara, normalmente se necesitan tiempos de exposición menores a $\frac{1}{100}$ s. Si el objeto está en movimiento, se requieren tiempos de exposición incluso más cortos para "congelar" la acción. Si el tiempo de exposición (o muestreo) no es lo suficientemente rápido, la imagen será borrosa por el sacudimiento de la cámara, sin importar cuántos pixeles tenga en el caso de una cámara digital. Las imágenes borrosas en condiciones de baja iluminación constituyen un problema en las cámaras de los teléfonos celulares, cuyos sensores, por lo general, no son de la mejor calidad. Las cámaras digitales para imágenes fijas o los teléfonos celulares que toman videos cortos deben tener un tiempo de "muestreo" suficientemente rápido y un tiempo de "liberación" (de la carga) rápido para tomar imágenes al menos a 15 cuadros por segundo, y de preferencia, 30 por segundo.

FIGURA 33–21 En esta cámara, los números *f* y el anillo de enfoque se encuentran en la lente de la cámara. La rapidez del obturador se selecciona en la pequeña rueda sobre la parte superior del cuerpo de la cámara.

Números *f* La cantidad de luz que llega a la película se debe controlar cuidadosamente para evitar **subexposición** (muy poca luz, de manera que la imagen resulta oscura y sólo se distinguen los objetos más brillantes) o **sobreexposición** (demasiada luz, de manera que todos los objetos brillantes parecen iguales, con la consecuente falta de contraste y una apariencia "deslavada"). Por fortuna, la mayoría de las cámaras de la actualidad realizan ajustes automáticos de los números *f* y de la rapidez del obturador. Una cámara de gran calidad controla la exposición con un diafragma de "stop" o iris, cuya abertura es de diámetro variable, colocado detrás de la lente (figura 33-18). El tamaño de la abertura se controla (de preferencia manualmente) para compensar las condiciones de iluminación brillantes u oscuras, la sensibilidad del sensor o la película,[†] y la diferente rapidez del obturador. El tamaño de la abertura se especifica con los **números *f***, que se definen como

$$\text{números } f \;=\; \frac{f}{D},$$

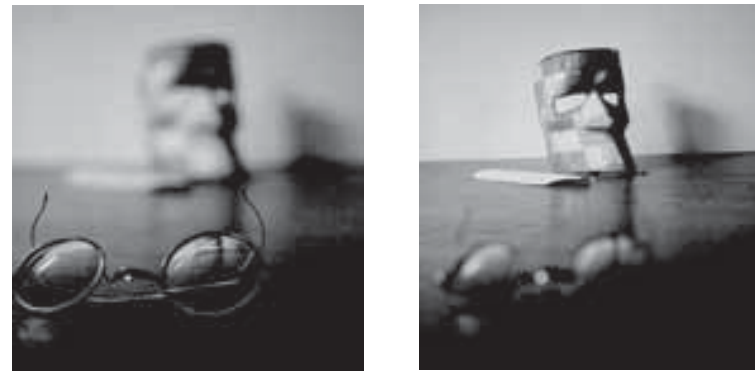
donde f es la distancia focal de la lente y D es el diámetro de la abertura de la lente (figura 33-18). Por ejemplo, cuando una lente con distancia focal de 50 mm tiene una abertura $D = 25$ mm, se dice que está ajustada a $f/2$. Cuando esta lente se pone en $f/8$, la abertura sólo es de $6\frac{1}{4}$ mm $(50/6\frac{1}{4} = 8)$. Para una mayor rapidez del obturador, o condiciones de poca luz, se debe usar una mayor abertura de lente para obtener una exposición adecuada, lo que corresponde a un número *f* más pequeño. Cuanto menor sea el número *f*, mayor será la abertura y más luz pasará a través de la lente al sensor o la película. El número *f* más pequeño de una lente (mayor abertura) se conoce como la *rapidez* de la lente. Las mejores lentes pueden tener una rapidez de $f/2.0$, o incluso mayor. La ventaja de una lente rápida es que permite que las fotografías se tomen en precarias condiciones de iluminación. Las lentes de buena calidad consisten en varios elementos para reducir los defectos presentes en las lentes delgadas simples (sección 33-10). Los números *f* estándar son

$$1.0,\;\; 1.4,\;\; 2.0,\;\; 2.8,\;\; 4.0,\;\; 5.6,\;\; 8,\;\; 11,\;\; 16,\;\; 22 \;\; \text{y} \;\; 32$$

(figura 33-21). Cada una de estas aberturas de diafragma corresponde a una reducción de diámetro por un factor de aproximadamente $\sqrt{2} \approx 1.4$. Como la cantidad de luz que llega a la película es proporcional al *área* de la abertura, y, en consecuencia, proporcional al diámetro al cuadrado, cada número *f* estándar corresponde a un factor de 2 en la intensidad de luz que llega a la película.

Enfoque Enfoque es la operación de colocar la lente en la posición correcta con respecto al sensor o la película para obtener la imagen más nítida posible. La distancia de la imagen es la menor para objetos en el infinito (el símbolo ∞ se usa para infinito) y es igual a la distancia focal. Para objetos más cercanos, la distancia de la imagen es mayor que la distancia focal, como se ve a partir de la ecuación de lentes, $1/f = 1/d_o + 1/d_i$ (ecuación 33-2). Por lo tanto, para enfocar objetos cercanos, la lente se debe mover lejos del sensor o la película, y en una cámara manual esto generalmente se logra al hacer girar un anillo que hay alrededor de la lente.

[†]Diferentes películas tienen diferentes sensibilidades a la luz, conocidas como "rapidez de la película"; se especifican como un "número ISO (o ASA)". Una película "más rápida" es más sensible y necesita menos luz para producir una buena imagen. Las películas más rápidas son más granulosas, así que ofrecen menos nitidez (resolución) cuando se amplifican. Las cámaras digitales pueden tener un ajuste de "ganancia" o "ISO" para la sensibilidad. Ajustar un CCD para que sea "más rápido" en condiciones de baja iluminación da por resultado "ruido", el equivalente digital de granulosidad.



a) *b*)

FIGURA 33–22 Fotografías tomadas con una cámara *a*) enfocada en un objeto cercano con un objeto distante borroso, y *b*) enfocada en un objeto más distante con un objeto cercano borroso.

Si la lente se enfoca en un objeto cercano, se formará una imagen nítida de éste, pero la imagen de los objetos distantes será borrosa (figura 33-22). Los rayos provenientes de un punto en el objeto distante estarán fuera de foco: formarán un círculo sobre el sensor o la película, como se muestra (exagerado) en la figura 33-23. Por ende, el objeto distante producirá una imagen que consiste en círculos traslapados y que resultará borrosa. Estos círculos se denominan **círculos de confusión**. Para incluir objetos cercanos y distantes en la misma fotografía, usted (o la cámara) puede intentar establecer el foco de la lente en una posición intermedia. Para una configuración de distancia dada, existe un intervalo de distancias en el cual los círculos de confusión serán suficientemente pequeños como para que las imágenes sean razonablemente nítidas. A esto se le llama **profundidad de campo**. La profundidad de campo varía con la abertura de la lente. Si la abertura de la lente es más pequeña, sólo aceptará rayos a través de la parte central de la lente, y éstos formarán círculos de confusión más pequeños para una distancia de objeto dada. En consecuencia, a mayor abertura de la lente, un mayor rango de distancias de objeto encajarán dentro del criterio de círculo de confusión, de manera que la profundidad de campo es más grande. Para un sensor o ancho de película de 36 mm (incluidas las cámaras de película de 35 mm), la profundidad de campo por lo general se basa en un diámetro máximo de círculo de confusión de 0.003 mm.

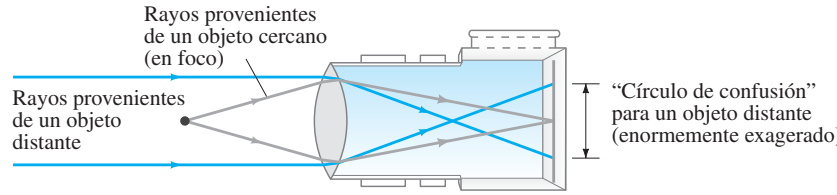


FIGURA 33–23 Cuando la lente se coloca para enfocar un objeto cercano, los puntos en un objeto distante producen círculos y, por lo tanto, son borrosos. (El efecto se muestra enormemente exagerado).

EJEMPLO 33–8 **Foco de cámara.** ¿A qué distancia de su configuración en infinito se debe mover la lente de una cámara de 50.0 mm de distancia focal para enfocar claramente un objeto a 3.00 m de distancia?

PLANTEAMIENTO Para un objeto en el infinito, la imagen está en el punto focal, por definición. Para una distancia de objeto de 3.00 m, se usa la ecuación de la lente delgada, ecuación 33-2, con la finalidad de encontrar la distancia de la imagen (distancia de la lente a la película o el sensor).

SOLUCIÓN Cuando se enfoca al infinito, la lente está a 50.0 mm de la película. Cuando se enfoca a d_o = 3.00 m, la distancia de la imagen está dada por la ecuación de la lente,

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{50.0\,\text{mm}} - \frac{1}{3000\,\text{mm}} = \frac{3000 - 50}{(3000)(50.0)\,\text{mm}} = \frac{2950}{150{,}000\,\text{mm}}.$$

Se despeja d_i y se encuentra d_i = 50.8 mm, de manera que la lente necesita alejarse 0.8 mm de la película o sensor digital.

EJEMPLO CONCEPTUAL 33–9 **Rapidez del obturador.** Para mejorar la profundidad de campo, "baje" la lente de su cámara dos números *f*, de *f*/4 a *f*/8. ¿Qué debe hacerse con la rapidez del obturador para mantener la misma exposición?

RESPUESTA La cantidad de luz admitida por la lente es proporcional al área de la abertura de la lente. Reducir la abertura de la lente en dos números *f* reduce el diámetro en un factor de 2, y el área en un factor de 4. Para mantener la misma exposición, el obturador se debe abrir cuatro veces más. Si la rapidez del obturador era de $\frac{1}{500}$ s, tendría que aumentarlo a $\frac{1}{125}$ s.

*Claridad de la imagen

La claridad o nitidez de una imagen depende no sólo del enfoque preciso y de tiempos de exposición cortos, sino también de la granulosidad de la película o del número de pixeles de una cámara digital. Las películas de grano fino son "más lentas", lo que significa que requieren exposiciones más largas para un nivel de luz dado. Las cámaras digitales tienen programas de promediado (o "compresión"), como JPEG, que reducen el tamaño en memoria al promediar los pixeles donde se detecta poco contraste. Por eso, rara vez se utilizan todos los pixeles disponibles. También promedian los pixeles en condiciones de baja luminosidad, las cuales darían por resultado una fotografía menos nítida.

La calidad de la lente afecta enormemente la calidad de la imagen, y en las secciones 33-10 y 35-4 se estudiarán la resolución de la lente y los efectos de difracción. La claridad, o *resolución*, de una lente con frecuencia está dada como tantas líneas por milímetro, medidas mediante la fotografía de un conjunto estándar de líneas paralelas sobre película de grano fino, o como tantos puntos por pulgada (dpi, por las siglas de *dots per inch*). El espaciamiento mínimo de líneas o puntos distinguibles da la resolución; 50 líneas/mm es razonable, 100 líneas/mm es muy bueno (= 100 puntos/mm ≈ 2500 dpi en el sensor).

EJEMPLO 33–10 **Pixeles y resolución.** Una cámara digital de 6 MP (6 megapixeles) ofrece una resolución máxima de 2000 × 3000 pixeles en un sensor CCD de 16 mm × 24 mm. ¿Qué tanta definición debe tener la lente para usar esta resolución?

PLANTEAMIENTO Encuentre el número de pixeles por milímetro; la lente debe ser al menos tan buena.

SOLUCIÓN Puede tomar la altura de la imagen (2000 pixeles en 16 mm) o el ancho (3000 pixeles en 24 mm):

$$\frac{3000 \text{ pixeles}}{24 \text{ mm}} = 125 \text{ pixeles/mm}.$$

Se desea que la lente también sea capaz de resolver al menos 125 líneas o puntos por mm, lo que sería una lente muy buena. Si la lente no es tan buena, se podrían usar menos pixeles y menos memoria.

NOTA Aumentar la resolución de la lente es un problema más serio en la actualidad que obtener más pixeles en un CCD o CMOS. El sensor para cámaras de un gran número de MP también debe ser físicamente más grande para mayores sensibilidades de luz (condiciones de luz baja).

EJEMPLO 33–11 **Fotografía amplificada.** Una fotografía amplificada se ve con claridad a distancias de visualización normales si los puntos o líneas están resueltos a aproximadamente 10 puntos/mm. ¿Una ampliación de 8 × 10 pulgadas de una fotografía tomada por la cámara del ejemplo 33-10 parecerá nítida? ¿A qué tamaño máximo se podría ampliar esta imagen de 2000 × 3000 pixeles?

PLANTEAMIENTO Suponga que la imagen tiene 2000 × 3000 pixeles en un CCD de 16 × 24 mm, como en el ejemplo 33-10, o 125 pixeles/mm. Se hace una fotografía ampliada de 8 × 10 pulgadas = 20 cm × 25 cm.

SOLUCIÓN El lado corto del CCD mide 16 mm = 1.6 cm de largo, y ese lado de la fotografía tiene 8 pulgadas o 20 cm. Por ende, el tamaño aumenta en un factor de 20 cm/1.6 cm = 12.5× (o 25 cm/2.4 cm ≈ 10×). Para llenar el papel de 8 × 10 pulgadas, suponga que la ampliación es de 12.5×. Por lo tanto, los pixeles se expanden 12.5×; así que la cuenta de pixeles de 125/mm en el CCD se vuelve 10 por mm en la impresión. En consecuencia, una impresión de 8 × 10 pulgadas es apenas el máximo posible para una fotografía nítida con 6 megapixeles. Si siente que 7 puntos por mm es suficientemente bueno, puede ampliarla a tal vez 11 × 14 pulgadas.

*Telefotos y gran angular

Las lentes de las cámaras se clasifican como normal, telefoto y gran angular, de acuerdo con la distancia focal y el tamaño de la película. Una **lente normal** cubre el sensor o la película con un campo de visión que corresponde aproximadamente al de la visión normal. Una lente normal para película de 35 mm tiene una distancia focal cercana a 50 mm. Las mejores cámaras digitales manifiestan un sensor del mismo tamaño[†] (24 mm × 36 mm). (Si el sensor es más pequeño, en ocasiones las cámaras digitales especifican distancias focales que corresponden a las cámaras clásicas de 35 mm). La **lente telefoto** actúa como telescopio para amplificar las imágenes. Tienen distancias focales más largas que una lente normal: como se vio en las sección 33-2 (ecuación 33-3), la altura de la imagen para una distancia del objeto dada es proporcional a la distancia de la imagen, y la distancia de la imagen será mayor para una lente con distancia focal más grande. Para objetos distantes, la altura de la imagen es casi proporcional a la distancia focal. Por ende, una lente telefoto de 200 mm que se utiliza con una cámara de 35 mm da una amplificación de 4× sobre la lente normal de 50 mm. Una **lente gran angular** tiene una distancia focal más corta que la normal: incluye un campo de visión más ancho, y los objetos parecen más pequeños. Una **lente zoom** es aquella cuya distancia focal se puede modificar de manera que parece que se acerca al sujeto, o se aleja de él, conforme cambia la distancia focal.

Las cámaras digitales pueden tener un **zoom óptico**, lo cual significa que la lente es capaz de cambiar la distancia focal y mantener la resolución. Pero un **zoom digital** o "electrónico" sólo agranda los puntos (pixeles) con pérdida de claridad.

En las cámaras se usan diferentes tipos de sistemas de visualización. En algunas cámaras se ve a través de una pequeña ventana justo arriba de la lente, como en la figura 33-18. En una cámara **réflex de una sola lente** (SLR, por las siglas de *single-lens reflex*), en realidad se ve a través de la lente con la ayuda de prismas y espejos (figura 33-24). Un espejo cuelga en un ángulo de 45° detrás de la lente y se quita del camino justo antes de que se abra el obturador. Las SLR tienen la ventaja de que se puede ver casi exactamente lo que se retratará. Las cámaras digitales usan pantallas LCD y también pueden mostrar lo que se obtendrá en la fotografía, si se planean con cuidado.

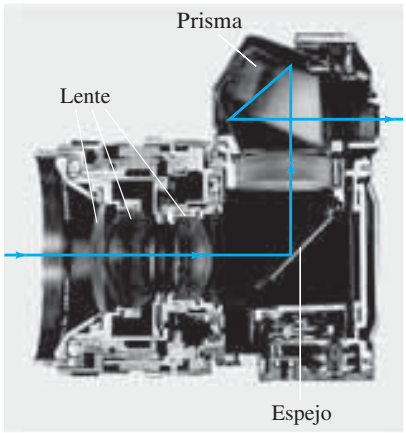


FIGURA 33–24 Cámara réflex de una sola lente (SLR), que muestra cómo se ve la imagen a través de la lente con la ayuda de un espejo móvil y un prisma.

33–6 El ojo humano; lentes correctivas

FÍSICA APLICADA
El ojo

El ojo humano recuerda una cámara en su estructura básica (figura 33-25), pero es mucho más complejo. El interior del ojo está lleno de una sustancia gelatinosa transparente llamada *humor vítreo*, con índice de refracción $n = 1.337$. La luz entra a este volumen cerrado a través de la córnea y el cristalino. Entre la córnea y el cristalino hay un fluido acuoso, el humor acuoso, con $n = 1.336$. Un diafragma, llamado **iris** (la parte colorida del ojo) se ajusta automáticamente para controlar la cantidad de luz que entra al ojo, de manera similar al diafragma de una cámara. El orificio en el iris por donde pasa la luz (la **pupila**) es negra porque no refleja luz (es un orificio) y muy poca luz se refleja hacia fuera desde el interior del ojo. La **retina**, que desempeña el papel de la película o el sensor en una cámara, está en la superficie trasera curva del ojo. La retina consiste en un complejo arreglo de nervios y receptores conocidos como *bastones* y *conos*, los cuales actúan para convertir la energía luminosa en señales eléctricas que viajan a lo largo de los nervios. La reconstrucción de la imagen a partir de todos estos pequeños receptores se realiza principalmente en el cerebro, aunque también es posible efectuar algunos análisis en la compleja red de nervios interconectados en la retina misma. En el centro de la retina hay una pequeña área llamada **fóvea**, de aproximadamente 0.25 mm de diámetro, donde los conos están empacados muy juntos y donde se encuentran la mejor imagen y la mejor discriminación de color.

A diferencia de una cámara, el ojo no contiene obturador. La operación equivalente la realiza el sistema nervioso, que analiza las señales para formar imágenes a la tasa de aproximadamente 30 por segundo. Esto es comparable con las cámaras de cine o televisión, que operan al tomar una serie de imágenes fijas a una tasa de 24 (en el caso del cine) o 30 (en el caso de la televisión estadounidense) por segundo; su rápida proyección en la pantalla brinda la apariencia de movimiento.

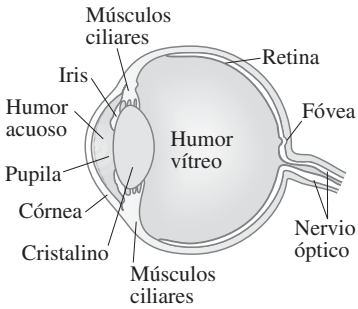


FIGURA 33–25 Diagrama de un ojo humano.

[†]Una "cámara de 35 mm" usa película que físicamente tiene 35 mm de ancho; estos 35 mm no se deben confundir con una distancia focal. La película de 35 mm tiene agujeros de arrastre, de manera que sólo 24 mm de su altura se utilizan para la fotografía; el ancho por lo general es de 36 mm para fotos fijas. Así, un cuadro tiene 24 mm × 36 mm. Los cuadros de película miden 18 mm × 24 mm.

El cristalino del ojo (n = 1.386 a 1.406) realiza una pequeña parte de la labor de desvío de los rayos de luz. La mayor parte de la refracción se realiza en la superficie frontal de la **córnea** (n = 1.376), en su interfaz con el aire (n = 1.0). El cristalino actúa como un mecanismo de ajuste fino para enfocar a diferentes distancias. Esto se logra mediante los músculos ciliares (figura 33-25), que modifican la curvatura del cristalino y, por consiguiente, su distancia focal. Para enfocar un objeto distante, los músculos ciliares del ojo se relajan y el cristalino se adelgaza, como se muestra en la figura 33-26a, y los rayos paralelos se enfocan en el punto focal (sobre la retina). Para enfocar un objeto cercano, los músculos se contraen, lo cual hace que el centro del cristalino se engruese, figura 33-26b, y que se acorte la distancia focal de manera que las imágenes de los objetos cercanos se puedan enfocar sobre la retina, detrás del nuevo punto focal. Este ajuste en el enfoque se llama **acomodación**.

La distancia más cercana a la que el ojo puede enfocar con claridad se llama **punto cercano** del ojo. Para los adultos jóvenes por lo general es de 25 cm, aunque los niños pequeños a menudo enfocan objetos tan cercanos como a 10 cm. Conforme las personas envejecen, la habilidad para la acomodación se reduce y el punto cercano aumenta. El **punto lejano** es la distancia más lejana a la que una persona puede ver un objeto con claridad. Para algunos propósitos es útil hablar de un **ojo normal** (una especie de promedio de la población), que se define como un ojo que tiene un punto cercano de 25 cm y un punto lejano de infinito. Para comprobar su propio punto cercano, coloque este libro cerca de sus ojos y lentamente aléjelo hasta que las letras se distingan con claridad.

El ojo "normal" es una especie de ideal. Muchas personas tienen ojos que no se acomodan dentro del rango "normal" de 25 cm a infinito, o tienen algún otro defecto. Dos defectos comunes son la miopía y la hipermetropía. Ambas se pueden corregir en gran medida con lentes, ya sea anteojos o lentes de contacto.

En la **miopía** el ojo sólo puede enfocar objetos cercanos. El punto lejano no es el infinito, sino alguna otra distancia más corta, de manera que los objetos distantes no se ven con claridad. Generalmente, es el resultado de un globo ocular muy largo, aunque a veces la curvatura de la córnea es demasiado grande. En cualquier caso, las imágenes de los objetos distantes se enfocan enfrente de la retina. Una lente divergente, al hacer que los rayos paralelos diverjan, permite que los rayos se enfoquen en la retina (figura 33-27a) y así corrigen este defecto.

En la **hipermetropía**, o *hiperopia*, el ojo no logra enfocar los objetos cercanos. Aunque los objetos distantes generalmente se ven con claridad, el punto cercano es un poco mayor que los 25 cm "normales", lo que hace difícil la lectura. Este defecto es causado por un globo ocular que es muy corto o (con menos frecuencia) por una córnea que no está suficientemente curva. Se corrige con una lente convergente, figura 33-27b. Similar a la hipermetropía es la *presbicia*, que se refiere a la pérdida de habilidad del ojo para acomodar el cristalino conforme la persona envejece, y el punto cercano se aleja. Las lentes convergentes también compensan este problema.

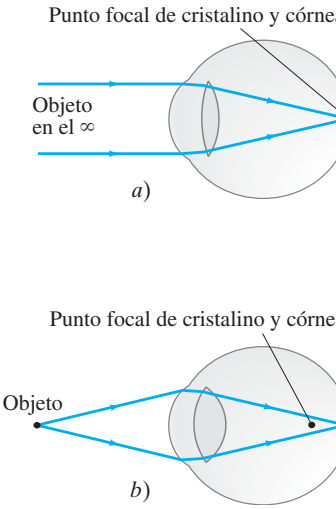


FIGURA 33–26 Acomodación de un ojo normal: *a*) cristalino relajado, enfoca al infinito; *b*) cristalino engrosado, enfoca un objeto cercano.

FÍSICA APLICADA

Lentes correctivas

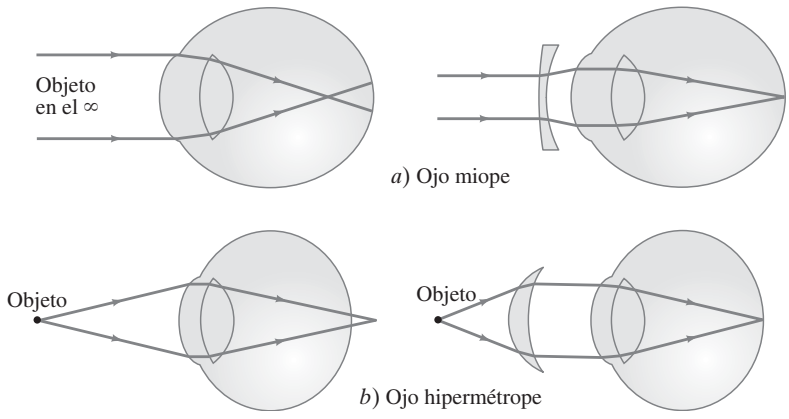


FIGURA 33–27 Corrección de los defectos de los ojos con lentes: *a*) un ojo miope, incapaz de enfocar claramente los objetos distantes, se corrige utilizando una lente divergente; *b*) un ojo hipermétrope, incapaz de enfocar con claridad los objetos cercanos, se corrige mediante una lente convergente.

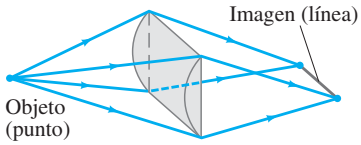


FIGURA 33–28 Una lente cilíndrica forma una imagen lineal de un objeto puntual porque es convergente sólo en un plano.

El **astigmatismo** generalmente es provocado por una córnea o un cristalino que carece de redondez, de manera que los objetos puntuales se enfocan como líneas cortas, lo que hace borrosa la imagen. Es como si la córnea fuera esférica con una sección cilíndrica sobrepuesta. Como se muestra en la figura 33-28, una lente cilíndrica enfoca un punto en una línea paralela a su eje. Un ojo astigmático puede enfocar rayos en un plano, como el plano vertical, a una distancia más corta de lo que lo hace para rayos en un plano horizontal. El astigmatismo se corrige mediante una lente cilíndrica compensadora. Las lentes para los ojos miopes o hipermétropes, así como para los astigmáticos, se pulen con superficies esféricas y cilíndricas sobrepuestas, de manera que el radio de curvatura de la lente correctiva es diferente en distintos planos.

EJEMPLO 33–12 **Ojo hipermétrope.** Susana es hipermétrope con un punto cercano de 100 cm. ¿Qué potencia deben tener los lentes de lectura para que ella pueda leer un periódico a una distancia de 25 cm? Suponga que la lente está muy cerca del ojo.

PLANTEAMIENTO Cuando el objeto se coloca a 25 cm de la lente, se quiere que la imagen esté a 100 cm de distancia en el *mismo* lado de la lente (de manera que el ojo pueda enfocarla), y por lo tanto la imagen es virtual, como se muestra en la figura 33-29, y $d_i = -100$ cm será negativa. Se emplea la ecuación de la lente delgada (ecuación 33-2) para determinar la distancia focal necesaria. Las prescripciones de los optometristas especifican la potencia ($P = 1/f$, ecuación 33-1) en dioptrías ($1\ \text{D} = 1\ \text{m}^{-1}$).

SOLUCIÓN Puesto que $d_o = 25$ cm y $d_i = -100$ cm, la ecuación de la lente delgada da

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{25\ \text{cm}} + \frac{1}{-100\ \text{cm}} = \frac{4-1}{100\ \text{cm}} = \frac{1}{33\ \text{cm}}.$$

De manera que $f = 33$ cm $= 0.33$ m. La potencia P de la lente es $P = 1/f = +3.0$ D. El signo más indica que es una lente convergente.

NOTA La posición de la imagen se eligió donde el ojo realmente puede enfocarla. La lente necesita colocar la imagen ahí, dada la ubicación deseada del objeto (el periódico).

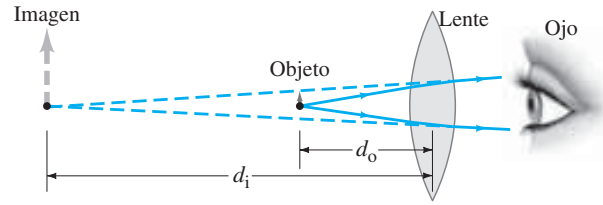
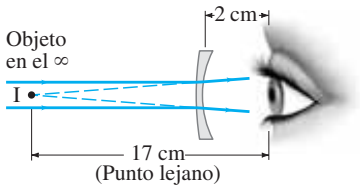
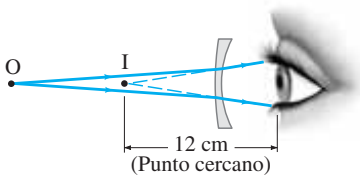


FIGURA 33–29 Lente de anteojos de lectura (ejemplo 33-12).

FIGURA 33–30 Ejemplo 33–13.



a)



b)

EJEMPLO 33–13 **Ojo miope.** Un ojo miope tiene puntos cercano y lejano de 12 cm y 17 cm, respectivamente. *a*) ¿Qué potencia de lente se necesita para que una persona miope vea objetos distantes con claridad y *b*) cuál será entonces el punto cercano? Suponga que la lente está a 2.0 cm del ojo (una distancia común para los anteojos).

PLANTEAMIENTO Para un objeto distante ($d_o = \infty$), la lente debe poner la imagen en el punto lejano del ojo, como se muestra en la figura 33-30a, 17 cm enfrente del ojo. Podemos usar la ecuación de la lente delgada para determinar la distancia focal de la lente y, a partir de esto, su potencia. El nuevo punto cercano (como se indica en la figura 33-30b) se calcula empleando de nuevo la ecuación de la lente delgada.

SOLUCIÓN *a*) Para un objeto en el infinito ($d_o = \infty$), la imagen debe estar enfrente de la lente, a 17 cm del ojo o (17 cm − 2 cm) = 15 cm de la lente; por lo tanto, $d_i = -15$ cm. Se utiliza la ecuación de la lente delgada para despejar la distancia focal de la lente necesaria:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-15\ \text{cm}} = -\frac{1}{15\ \text{cm}}.$$

De manera que $f = -15$ cm $= -0.15$ m o $P = 1/f = -6.7$ D. El signo menos indica que debe ser una lente divergente para el ojo miope.

b) Cuando se usan lentes el punto cercano es donde se coloca un objeto (d_o), de manera que la lente forma una imagen en el "punto cercano del ojo desnudo", a saber, a 12 cm del ojo. Tal punto de imagen está a (12 cm − 2 cm) = 10 cm enfrente de la lente, de manera que $d_i = -0.10$ m y la ecuación de la lente delgada da por resultado

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{0.15\text{ m}} + \frac{1}{0.10\text{ m}} = \frac{-2+3}{0.30\text{ m}} = \frac{1}{0.30\text{ m}}.$$

Así que $d_o = 30$ cm, lo que significa que el punto cercano, cuando la persona usa los anteojos, está a 30 cm enfrente de la lente, o 32 cm del ojo.

Suponga que, para corregir la visión del ojo del ejemplo 33-13, se emplean lentes de contacto. Puesto que los lentes de contacto se colocan directamente sobre la córnea, no se restarían los 2.0 cm de las distancias de imagen. Esto es, para objetos distantes, $d_i = f = -17$ cm, de manera que $P = 1/f = -5.9$ D. El nuevo punto cercano sería 41 cm. Por lo tanto, se ve que un lente de contacto y una lente de anteojos requerirán potencias, o distancias focales, ligeramente diferentes para el mismo ojo debido a sus distintas ubicaciones relativas al ojo. También se ve que los anteojos, en este caso, dan un mejor punto cercano que los de contacto.

FÍSICA APLICADA
Lentes de contacto

EJERCICIO E ¿Qué potencia de lentes de contacto se necesita para que un ojo vea objetos distantes, si su punto lejano es de 25 cm?

Cuando los ojos están bajo el agua, los objetos submarinos distantes parecen borrosos porque, en la interfaz agua-córnea, la diferencia en índices de refracción es muy pequeña: $n = 1.33$ para el agua, 1.376 para la córnea. Por ende, los rayos de luz se desvían muy poco y se enfocan muy atrás en la retina, figura 33-31a. El uso de anteojos protectores o de una mascarilla puede restaurar una interfaz aire-córnea ($n = 1.0$ y 1.376, respectivamente), lo que permite enfocar los rayos, figura 33-31b.

FÍSICA APLICADA
Visión submarina

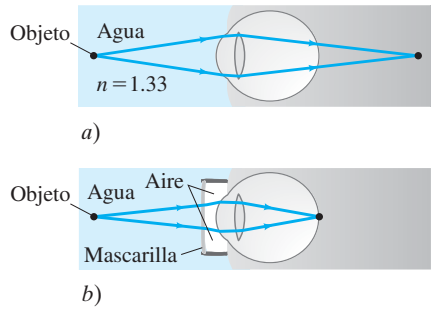


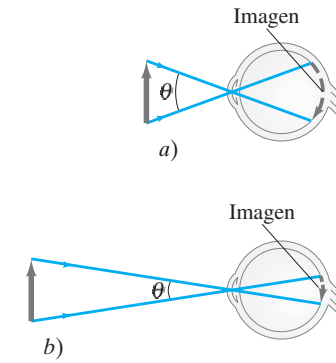
FIGURA 33–31 *a*) Bajo el agua se ve una imagen borrosa porque los rayos de luz se desvían mucho menos que en el aire. *b*) Si se usan anteojos protectores, de nuevo se tiene una interfaz aire-córnea y se puede ver con claridad.

33–7 Lente de aumento

Gran parte del resto de este capítulo tratará con dispositivos ópticos que se usan para generar imágenes amplificadas de los objetos. Primero se estudiará el **amplificador simple**, la **lente de aumento** o **lupa**, que simplemente es una lente convergente (véase la fotografía de apertura del capítulo).

El tamaño aparente de un objeto y el detalle que se puede ver en él dependen del tamaño de la imagen que se forma en la retina. Esto, a la vez, depende del ángulo subtendido por el objeto en el ojo. Por ejemplo, una moneda sostenida a 30 cm del ojo parece el doble de alta que una que se sostiene a 60 cm de distancia, porque el ángulo que subtiende es el doble de grande (figura 33-32). Cuando queremos examinar detalles de un objeto, lo acercamos a los ojos de manera que subtienda un ángulo mayor. Sin embargo, los ojos se pueden acomodar sólo hasta cierto punto (el punto cercano), y de ahora en adelante se supondrá una distancia estándar de $N = 25$ cm como el punto cercano.

FIGURA 33–32 Cuando el mismo objeto se ve a una distancia más corta, la imagen sobre la retina es mayor, de manera que el objeto parece más grande y se pueden ver más detalles. El ángulo θ que el objeto subtiende en *a*) es más grande que el de *b*). *Nota:* Éste no es un diagrama de rayos normal, porque sólo se representa un rayo desde cada punto.



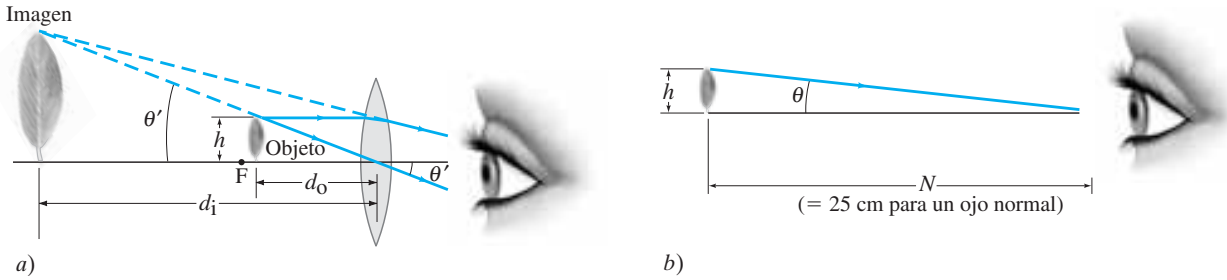


FIGURA 33–33 Hoja vista *a*) a través de una lente de aumento o lupa y *b*) con el ojo sin ayuda. En ambos casos el ojo se enfoca en su punto cercano.

Una lente de aumento o lupa permite colocar el objeto más cerca del ojo, de manera que subtiende un ángulo más grande. Como se aprecia en la figura 33-33a, el objeto se coloca en el punto focal o precisamente dentro de él . Entonces la lente convergente produce una imagen virtual, que debe estar al menos a 25 cm del ojo si el ojo debe enfocarse en él. Si el ojo está relajado, la imagen estará en el infinito, y en este caso el objeto está exactamente en el punto focal. (Usted mismo hace este ligero ajuste cuando "enfoca" el objeto moviendo la lente de aumento).

Una comparación del inciso *a*) de la figura 33-33 con el inciso *b*), en la que el mismo objeto se ve en el punto cercano con el ojo sin ayuda, revela que el ángulo que subtiende el objeto en el ojo es mucho más grande cuando se usa el amplificador. La **amplificación angular** o **potencia de amplificación**, M, de la lente se define como la razón entre el ángulo subtendido por un objeto cuando se usa la lente y el ángulo subtendido con el ojo solo, con el objeto en el punto cercano N del ojo ($N = 25$ cm para un ojo normal):

$$M = \frac{\theta'}{\theta}, \qquad \textbf{(33–5)}$$

donde θ y θ' se muestran en la figura 33-33. M se puede escribir en términos de la distancia focal al notar que $\theta = h/N$ (figura 33-33b) y $\theta' = h/d_o$ (figura 33-33a), donde h es la altura del objeto y se supone que los ángulos son pequeños de manera que θ y θ' igualan sus funciones seno y tangente. Si el ojo está relajado (con la menor tensión posible en el ojo), la imagen estará en el infinito y el objeto estará precisamente en el punto focal; véase la figura 33-34. En tal caso, $d_o = f$ y $\theta' = h/f$, mientras que $\theta = h/N$, como antes (figura 33-33b). Por lo tanto,

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{h/f}{h/N} = \frac{N}{f}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{ojo enfocado en el } \infty; \\ N = 25 \text{ cm para el ojo normal}\end{array}\right] \qquad \textbf{(33–6a)}$$

Se advierte que, cuanto menor sea la distancia focal de la lente, mayor será la amplificación.†

La amplificación de una lente dada puede aumentar un poco al mover la lente y ajustar el ojo de manera que se enfoque en la imagen en el punto cercano del ojo. En este caso, $d_i = -N$ (véase la figura 33-33a) si el ojo está muy cerca del amplificador.

†Los amplificadores simples de una sola lente están limitados a aproximadamente 2 o 3× a causa de la distorsión producida por la aberración esférica (sección 33-10).

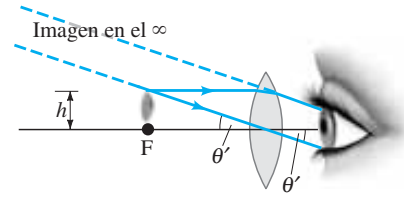


FIGURA 33–34 Con el ojo relajado, el objeto se coloca en el punto focal, y la imagen se localiza en el infinito. Compare con la figura 33-33a, donde la imagen está en el punto cercano del ojo.

Así, la distancia del objeto d_o está dada por

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} + \frac{1}{N}.$$

A partir de esta ecuación se ve que $d_o = fN/(f + N) < f$, como se muestra en la figura 33-33a, puesto que $N/(f + N)$ debe ser menor que 1. Con $\theta' = h/d_o$, la amplificación es

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{h/d_o}{h/N} = \frac{N}{d_o} = N\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{N}\right)$$

o

$$M = \frac{N}{f} + 1. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{ojo enfocado en el punto cercano, } N;\\ N = 25\text{ cm para el ojo normal}\end{array}\right] \quad \textbf{(33–6b)}$$

Se ve que la amplificación es ligeramente mayor cuando el ojo se enfoca en su punto cercano, en comparación con la situación en que está relajado.

EJEMPLO 33–14 **ESTIMACIÓN** **Lupa de joyero.** Una lente convergente de 8 cm de distancia focal se usa como "lupa de joyero", que es una lente de aumento. Estime *a*) la amplificación cuando el ojo está relajado, y *b*) la amplificación si el ojo se enfoca en su punto cercano $N = 25$ cm.

PLANTEAMIENTO La amplificación cuando el ojo está relajado está dada por la ecuación 33-6a. Cuando el ojo se enfoca en su punto cercano, se usa la ecuación 33-6b y se supone que la lente está cerca del ojo.

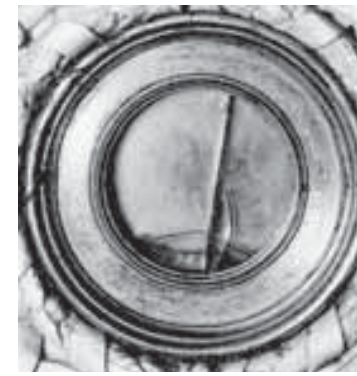
SOLUCIÓN *a*) Con el ojo relajado enfocado en el infinito,

$$M = \frac{N}{f} = \frac{25\text{ cm}}{8\text{ cm}} \approx 3\times.$$

b) La amplificación cuando el ojo se enfoca en su punto cercano ($N = 25$ cm), y la lente está cerca del ojo, es

$$M = 1 + \frac{N}{f} = 1 + \frac{25}{8} \approx 4\times.$$

FIGURA 33–35 *a*) Lente objetivo (montada ahora en un marco de marfil) del telescopio con el que Galileo realizó sus descubrimientos que conmocionaron al mundo, entre ellos, el de las lunas de Júpiter. *a*) Últimos telescopios que elaboró Galileo.



a)

b)

33–8 Telescopios

Un telescopio se usa para amplificar objetos que están muy lejos. En la mayoría de los casos, el objeto se considera en el infinito.

Galileo, aunque no inventó el telescopio,[†] lo desarrolló como un instrumento útil e importante. Fue el primero en examinar los cielos con el telescopio (figura 33-35) y realizó descubrimientos que conmocionaron al mundo: las lunas de Júpiter, las fases de Venus, las manchas solares, la estructura de la superficie lunar y que la Vía Láctea está formada por un gran número de estrellas individuales.

[†]Galileo construyó su primer telescopio en 1609, después de escuchar que tal instrumento existía en Holanda. Los primeros telescopios sólo amplificaban tres o cuatro veces, pero Galileo pronto fabricó un instrumento de potencia 30. El primer telescopio holandés parece datar de 1604, pero existe una referencia que sugiere que se pudo haber copiado de un telescopio italiano construido tan temprano como 1590. Kepler (véase el capítulo 6) dio una descripción en rayos (en 1611) del telescopio kepleriano, que se llama así en su honor porque él fue el primero en describirlo, aunque no lo construyó.

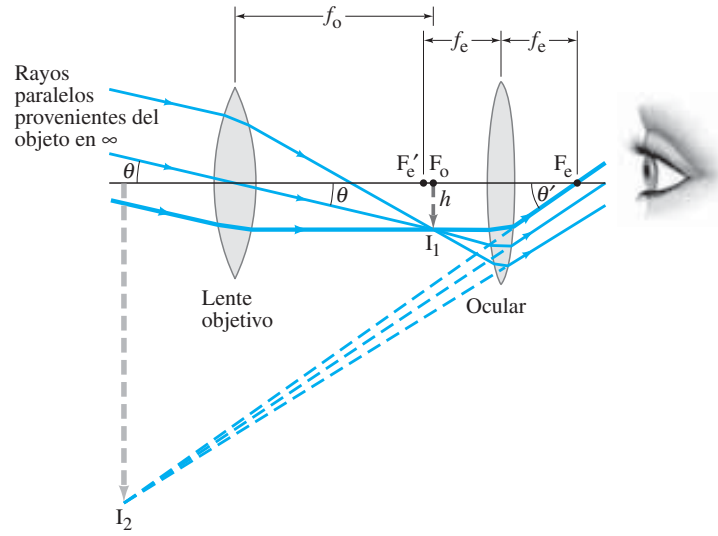


FIGURA 33–36 Telescopio astronómico (refractor). La luz paralela proveniente de un punto de un objeto distante ($d_o = \infty$) se lleva a un foco gracias a la lente objetivo en su plano focal. Esta imagen (I_1) se amplifica en el ocular para formar la imagen final I_2. Sólo dos de los rayos mostrados que entran al objetivo son rayos estándar (2 y 3), como se describió en la figura 33-6.

Existen varios tipos de **telescopios astronómicos**. El tipo **refractor** común, a veces llamado **kepleriano**, contiene dos lentes convergentes ubicadas en lados opuestos de un tubo largo, como se ilustra en la figura 33-36. La lente más cercana al objeto se llama **lente objetivo** (distancia focal f_o) y forma una imagen real I_1 del objeto distante en el plano de su punto focal F_o (o cerca de éste si el objeto no está en el infinito). La segunda lente, llamada **ocular** (distancia focal f_e), actúa como amplificador. Esto es, el ocular amplifica la imagen I_1 formada por la lente objetivo para producir una segunda imagen, enormemente amplificada, I_2, que es virtual e invertida. Si el ojo observador está relajado, el ocular se ajusta de manera que la imagen I_2 esté en el infinito. Entonces la imagen real I_1 está en el punto focal F'_e del ocular, y la distancia entre las lentes es $f_o + f_e$ para un objeto en el infinito.

Para encontrar la amplificación angular total de este telescopio, advierta que el ángulo que subtiende un objeto, según lo ve el ojo sin ayuda, es justo el ángulo θ subtendido en el objetivo del telescopio. A partir de la figura 33-36 se puede ver que $\theta \approx h/f_o$, donde h es la altura de la imagen I_1 y se supone que θ es pequeño, de manera que tan $\theta \approx \theta$. Note también que el más grueso de los rayos dibujados en la figura 33-36 es paralelo al eje antes de incidir sobre el ocular y, por lo tanto, se refracta a través del punto focal ocular F_e en el lado lejano. En consecuencia, $\theta' \approx h/f_e$ y la **potencia de amplificación total** (esto es, la amplificación angular, que es lo que siempre se cita) de este telescopio es

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{(h/f_e)}{(h/f_o)} = -\frac{f_o}{f_e}, \qquad \text{[telescopio]} \quad \textbf{(33–7)}$$

donde se incluyó un signo menos para indicar que la imagen está invertida. Para lograr una mayor amplificación, la lente objetivo debe tener una distancia focal grande, y el ocular una distancia focal corta.

FIGURA 33–37 Este gran telescopio refractor se construyó en 1897 y se alberga en el Observatorio Yerkes, en Wisconsin. La lente del objetivo mide 102 cm (40 pulgadas) de diámetro y el tubo del telescopio mide aproximadamente 19 m de largo. Ejemplo 33-15.

EJEMPLO 33–15 **Amplificación de un telescopio.** El mayor telescopio óptico refractor del mundo se encuentra en el Observatorio Yerkes, en Wisconsin, figura 33-37. Se le refiere como un telescopio de "40 pulgadas", lo cual significa que el diámetro del objetivo mide 40 pulgadas, o 102 cm. El objetivo tiene una distancia focal de 19 m, y el ocular una distancia focal de 10 cm. *a*) Calcule la potencia de amplificación total de este telescopio. *b*) Estime la longitud del telescopio.

PLANTEAMIENTO La ecuación 33-7 da la amplificación. La longitud del telescopio es la distancia entre las dos lentes.

SOLUCIÓN *a*) A partir de la ecuación 33-7 se obtiene

$$M = -\frac{f_o}{f_e} = -\frac{19\text{ m}}{0.10\text{ m}} = -190\times.$$

b) Para un ojo relajado, la imagen I_1 está en el punto focal tanto del ocular como del objetivo. Por lo tanto, la distancia entre las dos lentes es $f_o + f_e \approx 19$ m, que en esencia es la longitud del telescopio.

EJERCICIO F Un telescopio de 40× tiene un ocular con distancia focal de 1.2 cm. ¿Cuál es la distancia focal de la lente objetivo?

Para que un telescopio astronómico produzca imágenes brillantes de estrellas apenas perceptibles, la lente objetivo debe ser grande para permitir que entre tanta luz como sea posible. De hecho, el diámetro de la lente objetivo (y, por lo tanto, su "potencia de recolección de luz") es un importante parámetro para un telescopio astronómico, por lo que los más grandes se especifican mediante el diámetro del objetivo (como el telescopio Keck de 10 metros en Hawai). La construcción y el pulido de lentes grandes son muy difíciles. Por eso, los telescopios de mayores dimensiones son **telescopios reflectores** que usan un espejo curvo como objetivo, figura 33-38. Un espejo sólo tiene una superficie para pulir y se puede sostener a lo largo de toda su superficie[†] (una lente grande, sostenida en sus extremos, se hundiría con su propio peso). Con frecuencia, la lente del ocular o espejo (véase la figura 33-38) se remueve de manera que la imagen real formada por el espejo objetivo se pueda registrar directamente en película o en un sensor electrónico (CCD o CMOS, sección 33-5).

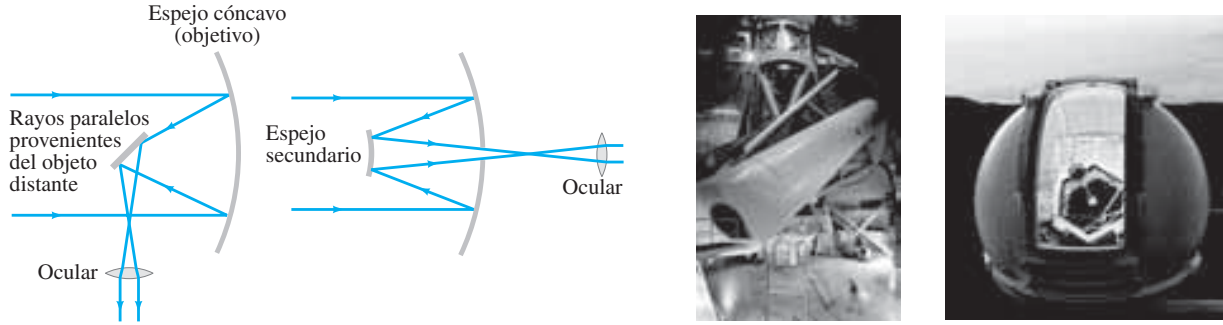


FIGURA 33–38 Es posible usar un espejo cóncavo como el objetivo de un telescopio astronómico. El arreglo *a*) se llama foco newtoniano y el arreglo *b*), foco Cassegrain. También son posibles otros arreglos. *c*) El telescopio Hale de 200 pulgadas (diámetro del espejo), en monte Palomar, California. *d*) El telescopio Keck en Mauna Kea, Hawai. El Keck combina 36 espejos hexagonales de 1.8 metros en el equivalente de un solo reflector muy grande, de 10 m de diámetro.

Un **telescopio terrestre**, para examinar objetos en la Tierra, debe ofrecer una imagen derecha: ver los objetos normales de cabeza sería difícil (algo mucho menos importante para ver las estrellas). En la figura 33-39 se presentan dos diseños. El tipo **galileano**, que usó Galileo para sus grandes descubrimientos astronómicos, tiene una lente divergente como ocular, que intercepta los rayos convergentes del objetivo antes de llegar a un foco, y actúa para formar una imagen virtual derecha, figura 33-39a. Este diseño todavía se usa en los gemelos de teatro. El tubo es razonablemente corto, pero el campo de visión es pequeño. El segundo tipo, que se representa en la figura 33-39b, con frecuencia se llama **catalejo** y usa una tercera lente convexa que actúa para hacer que la imagen sea derecha, como se muestra. Un catalejo debe ser bastante largo. El diseño más práctico en la actualidad corresponde al de los **prismáticos** que se ilustran en la figura 32-33. El objetivo y el ocular son lentes convergentes. Los prismas reflejan los rayos mediante reflexión total interna y acortan el tamaño físico del dispositivo, y también actúan para producir una imagen derecha. Un prisma reinvierte la imagen en el plano vertical, el otro en el plano horizontal.

[†]Otra ventaja de los espejos es que no presentan aberración cromática porque la luz no pasa a través de ellos; y se pueden pulir en forma parabólica para corregir la aberración esférica (sección 33-10). Newton fue pionero en proponer el telescopio reflector.

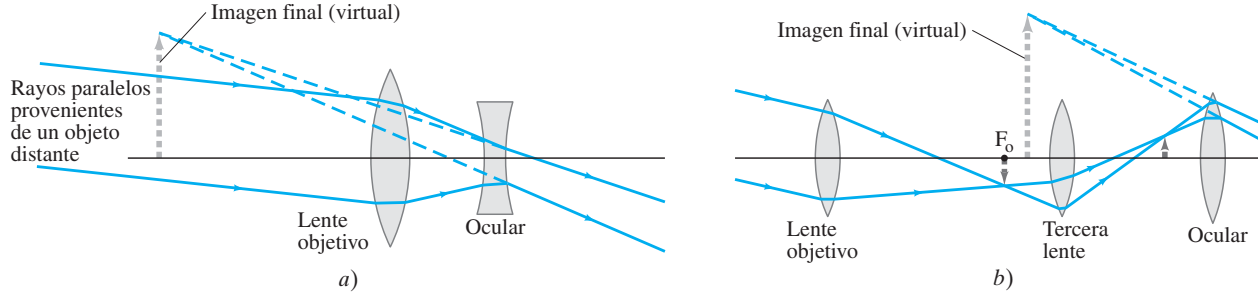


FIGURA 33–39 Telescopios terrestres que producen una imagen derecha: *a*) galileano; *b*) tipo catalejo o lente de campo.

*33–9 Microscopio compuesto

FÍSICA APLICADA
Microscopios

El **microscopio** compuesto, como el telescopio, tiene lentes tanto objetivo como ocular, figura 33-40. El diseño es diferente del de un telescopio porque un microscopio se usa para ver objetos que están muy cerca, de manera que la distancia del objeto es muy corta. El objeto se coloca justo más allá del punto focal del objetivo, como se muestra en la figura 33-40a. La imagen I_1 formada por la lente objetivo es real, bastante lejos del objetivo y muy agrandada. El ocular se coloca de manera que esta imagen esté cerca del punto focal del ocular F_e. El ocular amplifica esta imagen I_1 en una imagen virtual muy grande, I_2, que ve el ojo y está invertida. Los microscopios modernos usan una tercera lente "tubo" detrás del objetivo, pero aquí se estudiará el arreglo más simple que se reproduce en la figura 33-40a.

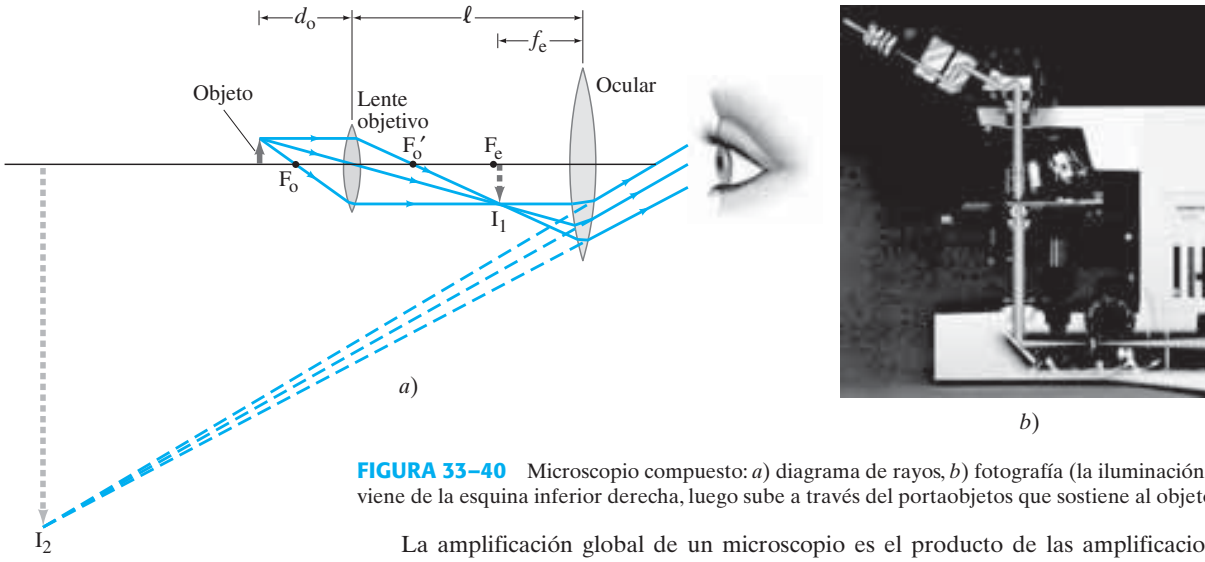


FIGURA 33–40 Microscopio compuesto: *a*) diagrama de rayos, *b*) fotografía (la iluminación viene de la esquina inferior derecha, luego sube a través del portaobjetos que sostiene al objeto).

La amplificación global de un microscopio es el producto de las amplificaciones producidas por las dos lentes. La imagen I_1 formada por el objetivo es un factor m_o más grande que el objeto en sí. A partir de la figura 33-40a y la ecuación 33-3 para la amplificación lateral de una lente simple, se tiene

$$m_o = \frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o} = \frac{\ell - f_e}{d_o}, \qquad \textbf{(33–8)}$$

donde d_o y d_i son las distancias del objeto y de la imagen para la lente objetivo, l es la distancia entre las lentes (igual a la longitud del barril) y se ignora el signo menos en la ecuación 33-3, que sólo dice que la imagen está invertida. Se establece que $d_i = \ell - f_e$, lo que es cierto sólo si el ojo está relajado, de manera que la imagen I_1 está en el punto focal del ocular F_e. El ocular actúa como un amplificador simple. Si suponemos que el ojo está relajado, la amplificación angular del ocular M_e es (a partir de la ecuación 33-6a)

$$M_e = \frac{N}{f_e}, \qquad \textbf{(33–9)}$$

donde el punto cercano $N = 25$ cm para el ojo normal. Como el ocular agranda la imagen formada por el objetivo, la amplificación angular global M es el producto de la amplificación lateral del objetivo, m_o, por la amplificación angular, M_e, de la lente ocular (ecuaciones 33-8 y 33-9):

$$M = M_e m_o = \left(\frac{N}{f_e}\right)\left(\frac{\ell - f_e}{d_o}\right) \qquad \text{[microscopio]} \quad \textbf{(33–10a)}$$

$$\approx \frac{N\ell}{f_e f_o}. \qquad [f_o \text{ y } f_e \ll \ell] \quad \textbf{(33–10b)}$$

La aproximación, ecuación 33-10b, es exacta cuando f_e y f_o son pequeñas comparadas con ℓ, de manera que $\ell - f_e \approx \ell$ y el objeto está cerca de F_o, por lo que $d_o \approx f_o$ (figura 33-40a). Ésta es una buena aproximación para grandes amplificaciones, que se obtienen

cuando f_o y f_e son muy pequeñas (están en el denominador de la ecuación 33-10b). Para fabricar lentes con distancia focal muy corta, se deben usar lentes compuestas que implican varios elementos para evitar aberraciones serias, como se explicará en la siguiente sección.

EJEMPLO 33–16 **Microscopio.** Un microscopio compuesto consiste en un ocular 10× y un objetivo 50× separados 17.0 cm. Determine *a*) la amplificación global, *b*) la distancia focal de cada lente y *c*) la posición del objeto cuando la imagen final está en foco con el ojo relajado. Suponga un ojo normal, de manera que $N = 25$ cm.

PLANTEAMIENTO La amplificación global es el producto de la amplificación del ocular y la amplificación del objetivo. La distancia focal del ocular se encuentra a partir de la ecuación 33-6a o de la 33-9 para la amplificación de un amplificador simple. Para el objetivo, es más fácil encontrar a continuación d_o (inciso c) con la ecuación 33-8 antes de encontrar f_o.

SOLUCIÓN *a*) La amplificación global es $(10\times)(50\times) = 500\times$.
b) La distancia focal del ocular es (ecuación 33-9) $f_e = N/M_e = 25\text{ cm}/10 = 2.5$ cm. A continuación se despeja d_o en la ecuación 33-8 y se encuentra

$$d_o = \frac{\ell - f_e}{m_o} = \frac{(17.0\text{ cm} - 2.5\text{ cm})}{50} = 0.29\text{ cm}.$$

Luego, a partir de la ecuación de la lente delgada para el objetivo con $d_i = \ell - f_e = 14.5$ cm (véase la figura 33-40a),

$$\frac{1}{f_o} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{0.29\text{ cm}} + \frac{1}{14.5\text{ cm}} = 3.52\text{ cm}^{-1};$$

de manera que $f_o = 1/(3.52\text{ cm}^{-1}) = 0.28$ cm.
c) Acabamos de calcular $d_o = 0.29$ cm, que está muy cerca de f_o.

*33–10 Aberraciones de lentes y espejos

Anteriormente en este capítulo se desarrolló una teoría de formación de imágenes mediante lentes delgadas. Se encontró, por ejemplo, que todos los rayos provenientes de cada punto de un objeto se llevan hacia un solo punto como el punto de imagen. Éste y otros resultados se basaron en aproximaciones para una lente delgada, principalmente la referente a que todos los rayos forman pequeños ángulos con el eje y que se puede considerar sen $\theta \approx \theta$. En virtud de estas aproximaciones, se esperan desviaciones de la teoría simple, que se conocen como **aberraciones de lentes**. Existen muchos tipos de aberración; se discutirá brevemente cada una de ellas por separado, pero todas pueden presentarse al mismo tiempo.

FÍSICA APLICADA
Aberraciones de lentes

Considere un objeto en cualquier punto (incluso en el infinito) sobre el eje de una lente con superficies esféricas. Los rayos provenientes de este punto que pasan a través de regiones exteriores de la lente se llevan a un foco en un punto diferente de los que pasan por el centro de la lente. A esto se le llama **aberración esférica** y se muestra exagerada en la figura 33-41. En consecuencia, la imagen que se ve en una pantalla o película no será un punto, sino un pequeño parche circular de luz. Si el sensor o la película se colocan en el punto C, como se indica, el círculo tendrá su diámetro más pequeño, al que se le conoce como **círculo de menor confusión**. La aberración esférica está presente siempre que se usan superficies esféricas. Se puede reducir al usar lentes con superficies no esféricas (= asféricas), pero pulir tales lentes es difícil y costoso. Es posible reducir la aberración esférica empleando varias lentes en combinación, y utilizando principalmente la parte central de las lentes.

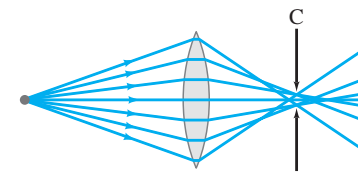


FIGURA 33–41 Aberración esférica (exagerada). El círculo de menor confusión está en C.

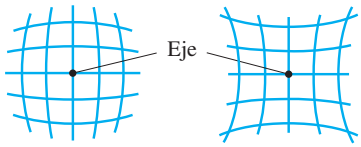


FIGURA 33–42 Distorsión: las lentes pueden formar la imagen de una rejilla cuadriculada con líneas perpendiculares para producir *a*) distorsión de barril o *b*) distorsión de cojín. Estas distorsiones se ilustran en la fotografía de la figura 33-2d.

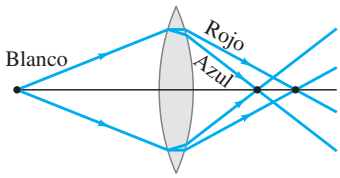
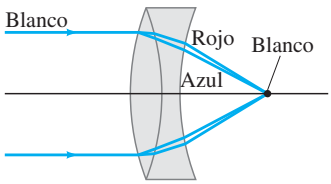


FIGURA 33–43 Aberración cromática. Los diferentes colores se enfocan en diferentes puntos.

FIGURA 33–44 Doblete acromático.



FÍSICA APLICADA

Ojo humano

Para objetos que apuntan fuera del eje de la lente ocurren aberraciones adicionales. Los rayos que pasan a través de las diferentes partes de la lente provocan dispersión de la imagen que es no circular. Existen dos efectos: **coma** (porque la imagen de un punto tiene forma de cometa en lugar de un círculo) y **astigmatismo fuera de eje**†. Más aún, los puntos imagen para los objetos fuera de eje pero a la misma distancia de la lente no caen sobre una superficie plana, sino sobre una superficie curva; esto es, el plano focal no es plano. (Esto es de esperar puesto que los puntos sobre un plano no curvo, como la película en una cámara, no están equidistantes de la lente). Esta aberración se conoce como **curvatura de campo** y es un problema en las cámaras y otros dispositivos donde la película se coloca en un plano no curvo. Sin embargo, en el ojo, la retina es curva, lo que compensa este efecto.

Otra aberración, la **distorsión**, es resultado de la variación de la amplificación a diferentes distancias del eje de la lente. Así, un objeto en línea recta a cierta distancia del eje puede formar una imagen curva. Una retícula cuadrada de líneas se puede distorsionar para producir "distorsión de barril" o "distorsión de cojín", figura 33-42. Esta última es común en lentes gran angular extremos.

Todas las aberraciones anteriores ocurren para luz monocromática y, por ende, se les conoce como *aberraciones monocromáticas*. La luz normal no es monocromática y también habrá **aberración cromática**. Esta aberración surge a causa de la dispersión: la variación del índice de refracción de los materiales transparentes con la longitud de onda (sección 32-6). Por ejemplo, la luz azul se desvía más que la luz roja en el vidrio. De esta manera, si luz blanca incide sobre una lente, los diferentes colores se enfocan en diferentes puntos, figura 33-43, y tendrá amplificaciones ligeramente diferentes que dan por resultado franjas coloridas en la imagen. Es posible eliminar la aberración cromática para cualesquiera dos colores (y reducirse enormemente para todos los demás) empleando dos lentes hechas de diferentes materiales con diferentes índices de refracción y dispersión. Normalmente, una lente es convergente y la otra divergente, y a menudo se pegan una con otra (figura 33-44). Tal combinación de lentes se llama **doblete acromático** (o lente "correctora de color").

Para reducir las aberraciones, las lentes de alta calidad son **lentes compuestas** que consisten en muchas lentes simples, que se conocen como **elementos**. Una lente típica de alta calidad para cámara contiene de seis a ocho (o más) elementos. Por simplicidad, las lentes en los diagramas generalmente se representan como si fueran lentes simples.

El ojo humano también está sujeto a aberraciones, pero son mínimas. La aberración esférica, por ejemplo, se minimiza porque **1.** la córnea es menos curva en los bordes que en el centro y **2.** el cristalino es menos denso en los bordes que en el centro. Ambos efectos hacen que los rayos en los bordes exteriores se doblen con menos intensidad, lo que ayuda a reducir la aberración esférica. La aberración cromática se compensa parcialmente porque el cristalino absorbe en forma considerable las longitudes de onda más cortas y la retina es menos sensible a las longitudes de onda azul y violeta. Ésta es justo la región del espectro donde la dispersión —y, por consiguiente, la aberración cromática— es mayor (figura 32-28).

Los espejos esféricos (sección 32-3) también sufren aberraciones, incluida la aberración esférica (véase la figura 32-13). Los espejos se pueden pulir en forma parabólica para corregir las aberraciones, pero son mucho más difíciles de elaborar y, por lo mismo, muy costosos. Sin embargo, los espejos esféricos no exhiben aberración cromática porque la luz no pasa a través de ellos (no hay refracción ni dispersión).

†Aunque el efecto es el mismo que para el astigmatismo en el ojo (sección 33-6), la causa es diferente. El astigmatismo fuera de eje no es problema en el ojo porque los objetos se ven claramente sólo en la fóvea, en el eje de la lente.

Resumen

Una lente usa refracción para producir una imagen real o virtual. Los rayos de luz paralelos se enfocan en un punto, llamado **punto focal**, mediante una lente convergente. La distancia del punto focal desde la lente se llama **distancia focal** f de la lente.

Después de que los rayos paralelos pasan a través de una lente **divergente**, parecen divergir de un punto, su punto focal; y la correspondiente distancia focal se considera negativa.

La **potencia** P de una lente, que es

$$P = \frac{1}{f} \qquad \textbf{(33–1)}$$

se da en dioptrías, que son unidades de metro inverso (m^{-1}).

Para un objeto dado, la posición y el tamaño de la imagen formada por una lente se determinan aproximadamente mediante un trazado de rayos. Algebraicamente, la relación entre distancias de

objeto e imagen, d_i y d_o, y la distancia focal f, está dada por la **ecuación de la lente delgada**:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}. \qquad \textbf{(33–2)}$$

La razón entre la altura de la imagen y la altura del objeto, que es igual a la **amplificación lateral** m, es

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}. \qquad \textbf{(33–3)}$$

Cuando se usan las diversas ecuaciones de la óptica geométrica, es importante recordar las **convenciones de signos** para todas las cantidades implicadas: revíselas cuidadosamente (página 871) cuando resuelva problemas.

Cuando se usan en combinación dos (o más) lentes delgadas para producir una imagen, puede usar la ecuación de la lente delgada para cada lente en secuencia. La imagen producida por la primera lente actúa como el objeto para la segunda lente.

[*La **ecuación del fabricante de lentes** relaciona los radios de curvatura de las superficies de la lente y el índice de refracción de ésta con la distancia focal].

La lente de una **cámara** forma una imagen sobre una película, o sobre un sensor electrónico (CCD o CMOS) en una cámara digital, al permitir que la luz entre por el obturador. La imagen se enfoca al mover la lente en relación con la película, y el **número *f*** (o abertura de la lente) debe ajustarse para el brillo de la escena y la rapidez de obturador elegida. El número f se define como la razón entre la distancia focal y el diámetro de abertura de la lente.

El **ojo** humano también se ajusta a la luz disponible, al abrir y cerrar el iris. Se enfoca no con el movimiento del cristalino, sino al ajustar la forma de éste para variar su distancia focal. La imagen se forma sobre la retina, que contiene un arreglo de receptores conocidos como bastones y conos.

Las lentes divergentes o los lentes de contacto se usan para corregir el defecto de un ojo miope, que no logra enfocar bien objetos distantes. Las lentes convergentes se usan para corregir defectos en los que el ojo no logra enfocar objetos cercanos.

Un **amplificador simple** es una lente convergente que forma una imagen virtual de un objeto colocado en el punto focal (o precisamente dentro de él). La **amplificación angular**, cuando se ve mediante un ojo normal relajado, es

$$M = \frac{N}{f}, \qquad \textbf{(33–6a)}$$

donde f es la distancia focal de la lente y N es el punto cercano del ojo (25 cm para un ojo "normal").

Un **telescopio astronómico** consiste en un lente **objetivo** o espejo, y un **ocular** que amplifica la imagen real formada por el objetivo. La **amplificación** es igual a la razón de las distancias focales del objetivo y el ocular, y la imagen está invertida:

$$M = -\frac{f_o}{f_e}. \qquad \textbf{(33–7)}$$

[*Un **microscopio** compuesto también usa lentes objetivo y ocular, y la imagen final está invertida. La amplificación total es el producto de las amplificaciones de las dos lentes y es aproximadamente

$$M \approx \frac{N\ell}{f_e f_o}, \qquad \textbf{(33–10b)}$$

donde ℓ es la distancia entre las lentes, N es el punto cercano del ojo y f_o y f_e son las distancias focales de objetivo y ocular, respectivamente].

[*Microscopios, telescopios y otros instrumentos ópticos están limitados en la formación de imágenes nítidas por las **aberraciones de lentes**. Éstas incluyen la **aberración esférica**, en la que los rayos que pasan a través del borde de una lente no se enfocan en el mismo punto que los que pasan cerca del centro; y la **aberración cromática**, en la que los diferentes colores se enfocan en diferentes puntos. Las lentes compuestas, que consisten en muchos elementos, permiten corregir considerablemente las aberraciones].

Preguntas

1. ¿Dónde hay que colocar la película si la lente de una cámara debe formar una imagen nítida de un objeto lejano?
2. Un fotógrafo se acerca al sujeto que va a fotografiar y luego vuelve a enfocar. ¿La lente de la cámara se aleja o se acerca al sensor? Explique.
3. ¿Una lente divergente forma una imagen real en cualquier circunstancia? Explique.
4. Utilice diagramas de rayos para demostrar que una imagen real formada por una lente delgada siempre está invertida, mientras que una imagen virtual siempre está derecha si el objeto es real.
5. Se dice que los rayos de luz son "reversibles". ¿Esto es congruente con la ecuación de la lente delgada? Explique.
6. ¿Es posible proyectar las imágenes reales sobre una pantalla? ¿Y las imágenes virtuales? ¿Es posible fotografiar alguna de ellas? Analice cuidadosamente.
7. Una lente convergente delgada se acerca más a un objeto cercano. ¿La imagen real formada cambia *a*) de posición, *b*) de tamaño? Si es así, describa cómo.
8. Compare la ecuación del espejo con la ecuación de la lente delgada. Discuta las similitudes y diferencias, en especial las convenciones de signos para las cantidades implicadas.
9. Una lente está hecha de un material con un índice de refracción $n = 1.30$. En aire es una lente convergente. ¿Seguirá siendo una lente convergente si se coloca en agua? Explique mediante un diagrama de rayos.
10. Explique cómo podría tener un objeto virtual.
11. Un perro con su cola en el aire está de pie frente a una lente convergente. Si la nariz y la cola se enfocan cada una sobre una pantalla a la vez, ¿cuál tendrá la mayor amplificación?
12. Un gato con su cola en el aire está de pie frente a una lente convergente. ¿En qué circunstancias (si acaso alguna) la imagen de la nariz sería virtual y la imagen de la cola sería real? ¿Dónde estaría la imagen del resto del gato?
13. ¿Por qué, en el ejemplo 33-6, la lente convergente debe tener una distancia focal más corta que la lente divergente, si la distancia focal de esta última estará determinada al combinarlas?
14. Cuanto más gruesa sea una lente biconvexa en el centro que en sus bordes, más corta será su distancia focal para un diámetro de lente dado. Explique.
15. ¿La distancia focal de una lente depende del fluido en el que está sumergida? ¿Y qué hay acerca de la distancia focal de un espejo esférico? Explique.

16. Un lente submarino consiste en un contenedor plástico lleno de aire, con paredes delgadas al que se le da forma con mucho cuidado. ¿Qué forma debe tener para ser *a*) convergente, *b*) divergente? Utilice diagramas de rayos para apoyar su respuesta.

17. Considere dos lentes convergentes separados por cierta distancia. Un objeto se coloca de manera que la imagen de la primera lente se encuentre exactamente en el punto focal de la segunda lente. ¿Esta combinación producirá una imagen? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué?

18. ¿Una persona miope que usa lentes correctivas en sus anteojos podrá ver claramente bajo el agua cuando use esos anteojos? Utilice un diagrama para demostrar por qué sí o por qué no.

19. Es posible decir si una persona es miope o hipermétrope al observar el ancho de su rostro a través de sus gafas. Si el rostro de una persona parece más estrecho a través de las gafas (figura 33-45), ¿la persona es hipermétrope o miope?

FIGURA 33–45
Pregunta 19.

20. El ojo humano es muy parecido a una cámara, aunque, cuando el obturador de una cámara se deja abierto y la cámara se mueve, la imagen será borrosa. Pero, cuando una persona mueve su cabeza con los ojos abiertos, sigue viendo claramente. Explique por qué.

21. Para distinguir detalles distantes, en ocasiones las personas entrecierran los ojos. ¿Por qué ayuda esto?

22. ¿La imagen formada sobre la retina del ojo humano es derecha o invertida? Analice las implicaciones de esto para la percepción de los objetos.

23. Los anteojos para lectura tienen lentes convergentes. Un amplificador simple también es una lente convergente. Por lo tanto, ¿los anteojos para lectura son amplificadores? Analice las similitudes y diferencias entre las lentes convergentes que se usan para estos dos diferentes propósitos.

24. ¿Por qué la lente de una cámara se debe mover más lejos de la película para enfocar un objeto más cercano?

* **25.** La aberración esférica en una lente delgada se minimiza si los rayos se desvían igualmente por las dos superficies. Si una lente plano convexa se utiliza para formar una imagen real de un objeto en el infinito, ¿cuál superficie debe quedar de frente al objeto? Utilice diagramas de rayos para demostrar por qué.

* **26.** Para lentes convergentes y divergentes, discuta cómo la distancia focal de la luz roja difiere de la distancia focal de la luz violeta.

Problemas

33–1 y 33–2 Lentes delgadas

1. (I) Una imagen nítida se ubica a 88.0 mm detrás de una lente convergente con distancia focal de 75.0 mm. Determine la distancia del objeto *a*) mediante un diagrama de rayos, *b*) mediante cálculo.

2. (I) Se observa que la luz solar se enfoca en un punto 18.5 cm detrás de una lente. *a*) ¿Qué tipo de lente es? *b*) ¿Cuál es su potencia en dioptrías?

3. (I) *a*) ¿Cuál es la potencia de una lente con 23.5 cm de distancia focal? *b*) ¿Cuál es la distancia focal de una lente de -6.75 D? ¿Estas lentes son convergentes o divergentes?

4. (II) Cierta lente enfoca un objeto a 1.85 m de distancia como una imagen de 48.3 cm en el otro lado de la lente. ¿Qué tipo de lente es y cuál es su distancia focal? ¿La imagen es real o virtual?

5. (II) Una lente con 105 mm de distancia focal se utiliza para enfocar una imagen en el sensor de una cámara. La distancia máxima permitida entre la lente y el plano del sensor es 132 mm. *a*) ¿A qué distancia del sensor debe estar la lente si el objeto a fotografiar está a 10.0 m de distancia? *b*) ¿Y si está a 3.0 m de distancia? *c*) ¿A 1.0 m de distancia? *d*) ¿Cuál es el objeto más cercano que podría fotografiar con claridad esta lente?

6. (II) Un coleccionista de estampillas emplea una lente convergente con distancia focal de 28 cm para examinar una estampilla que se encuentra a 18 cm enfrente de la lente. *a*) ¿Dónde se ubica la imagen? *b*) ¿Cuál es la amplificación?

7. (II) Se desea amplificar material de lectura en un factor de 2.5× cuando un libro se coloca a 9.0 cm detrás de una lente. *a*) Dibuje un diagrama de rayos y describa el tipo de imagen que se formaría. *b*) ¿Qué tipo de lente se necesita? *c*) ¿Cuál es la potencia de la lente en dioptrías?

8. (II) Una lente de -8.00 D se sostiene a 12.5 cm de una hormiga de 1.00 mm de alto. Describa la posición, el tipo y la altura de la imagen.

9. (II) Un objeto se ubica a 1.50 m de una lente de 8.0 D. ¿Cuánto se mueve la imagen si el objeto se coloca *a*) 0.90 m más cerca de la lente y *b*) 0.90 m más lejos de la lente?

10. (II) *a*) ¿A qué distancia de una lente con distancia focal de 50.0 mm debe colocarse un objeto si su imagen se debe amplificar 2.50× y ser real? *b*) ¿Y si la imagen debe ser virtual y amplificada 2.50×?

11. (II) ¿A qué distancia de una lente convergente, con distancia focal de 25 cm, se debe colocar un objeto para producir una imagen real que sea del mismo tamaño que el objeto?

12. (II) *a*) Un insecto de 2.80 cm de alto está a 1.30 m de una lente con distancia focal de 135 mm. ¿Dónde está la imagen, qué altura tiene y de qué tipo es? *b*) ¿Y si $f = -135$ mm?

13. (II) Un objeto brillante y una pantalla de visualización están separados una distancia de 86.0 cm. ¿En qué ubicación (o ubicaciones) entre el objeto y la pantalla se debe colocar una lente con distancia focal de 16.0 cm para producir una imagen nítida sobre la pantalla? [*Sugerencia:* Primero dibuje un diagrama].

14. (II) ¿Qué tan separados están un objeto y una imagen formada por una lente convergente de 85 cm de distancia focal, si la imagen es 2.95× más grande que el objeto y es real?

15. (II) Demuestre analíticamente que la imagen formada por una lente convergente *a*) es real e invertida si el objeto está más allá del punto focal ($d_o > f$) y *b*) es virtual y derecha si el objeto está dentro del punto focal ($d_o < f$). A continuación, describa la imagen si el objeto es en sí mismo una imagen (formada por otra lente) y su posición está en el lado opuesto de la lente de donde llega la luz, *c*) para $-d_o > f$, y *d*) para $0 < -d_o < f$.

16. (II) Una lente convergente tiene distancia focal f. Cuando un objeto se coloca a una distancia $d_o > f$ de esta lente, se forma una imagen real con amplificación m. *a*) Demuestre que $m = f/(f - d_o)$. *b*) Bosqueje m contra d_o en el intervalo $f < d_o < \infty$, donde $f = 0.45$ cm. *c*) ¿Para qué valor de d_o la imagen real tendrá el mismo tamaño (lateral) que el objeto? *d*) Para obtener una imagen real que sea mucho más grande que el objeto, ¿en qué región general debe colocarse el objeto en relación con la lente?

17. (II) En un proyector de diapositivas o películas, la película actúa como el objeto cuya imagen se proyecta sobre una pantalla (figura 33-46). Si una lente de 105 mm de distancia focal proyectará una imagen sobre una pantalla a 6.50 m de distancia, ¿a qué distancia de la lente debe estar la diapositiva? Si la diapositiva tiene 36 mm de ancho, ¿qué tan ancha será la imagen sobre la pantalla?

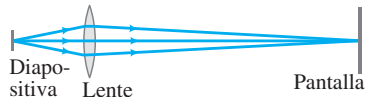


FIGURA 33–46
Proyector de diapositivas. Problema 17.

18. (III) Un objeto brillante se coloca en un lado de una lente convergente con distancia focal f, mientras una pantalla blanca para ver la imagen está en el lado opuesto. La distancia $d_T = d_i + d_o$ entre el objeto y la pantalla se mantiene fija, pero la lente se puede mover. *a*) Demuestre que, si $d_T > 4f$, habrá dos posiciones donde la lente se puede colocar para producir una imagen nítida sobre la pantalla. *b*) Si $d_T > 4f$, demuestre que no habrá posición de la lente donde se forme una imagen nítida. *c*) Determine una fórmula para la distancia entre las dos posiciones de lente en el inciso *a*) y la razón de los tamaños de la imagen.

19. (III) *a*) Demuestre que la ecuación de la lente se puede escribir en la *forma newtoniana*:

$$xx' = f^2,$$

donde x es la distancia del objeto desde el punto focal en el lado frontal de la lente, y x' es la distancia de la imagen al punto focal en el otro lado de la lente. Calcule la ubicación de una imagen si el objeto se coloca 48.0 cm enfrente de una lente convexa con una distancia focal de 38.0 cm con *b*) la forma estándar de la fórmula de la lente delgada y *c*) la forma newtoniana, que se acaba de deducir.

33–3 Combinaciones de lentes

20. (II) Una lente divergente con $f = -33.5$ se coloca 14.0 cm detrás de una lente convergente con $f = 20.0$ cm. ¿Dónde se enfocará un objeto en el infinito?

21. (II) Dos lentes convergentes, con distancia focal de 25.0 cm, se colocan separadas por 16.5 cm. Un objeto se coloca 35.0 cm enfrente de una lente. ¿Dónde se ubicará la imagen final formada mediante la segunda lente? ¿Cuál es la amplificación total?

22. (II) Una lente convergente de 34.0 cm de distancia focal está 24.0 cm detrás de una lente divergente. Luz paralela incide sobre la lente divergente. Después de pasar a través de la lente convergente, la luz de nuevo es paralela. ¿Cuál es la distancia focal de la lente divergente? [*Sugerencia:* Primero dibuje un diagrama de rayos].

23. (II) Las dos lentes convergentes del ejemplo 33-5 ahora se colocan separadas sólo por 20.0 cm. El objeto todavía está a 60.0 cm enfrente de la primera lente, como en la figura 33-14. En este caso, determine *a*) la posición de la imagen final y *b*) la amplificación total. *c*) Bosqueje el diagrama de rayos para este sistema.

24. (II) Una lente divergente, con distancia focal de -14 cm, se coloca 12 cm a la derecha de una lente convergente con una distancia focal de 18 cm. Un objeto se coloca 33 cm a la izquierda de la lente convergente. *a*) ¿Dónde se ubicará la imagen final? *b*) ¿Dónde estará la imagen si la lente divergente está a 38 cm de la lente convergente?

25. (II) Dos lentes, una convergente con distancia focal de 20.0 cm y una divergente con distancia focal de -10.0 cm, se colocan separadas por 25.0 cm. Un objeto se coloca 60.0 cm enfrente de la lente convergente. Determine *a*) la posición y *b*) la amplificación de la imagen final formada. *c*) Bosqueje un diagrama de rayos para este sistema.

26. (II) Una lente divergente se coloca junto a una lente convergente con distancia focal f_C, como en la figura 33-15. Si f_T representa la distancia focal de la combinación, demuestre que la distancia focal de la lente divergente, f_D, está dada por

$$\frac{1}{f_D} = \frac{1}{f_T} - \frac{1}{f_C}.$$

27. (II) Una vela encendida se coloca 36 cm enfrente de una lente convergente con distancia focal $f_1 = 13$ cm, la cual, a la vez, está a 56 cm enfrente de otra lente convergente con distancia focal $f_2 = 16$ cm (véase la figura 33-47). *a*) Dibuje un diagrama de rayos y estime la ubicación y el tamaño relativo de la imagen final. *b*) Calcule la posición y el tamaño relativo de la imagen final.

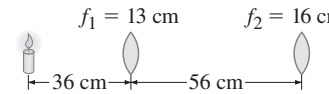


FIGURA 33–47
Problema 27.

*33–4 Ecuación del fabricante de lentes

***28.** (I) Una lente bicóncava tiene radios de superficie 33.4 cm y 28.8 cm. ¿Cuál es la distancia focal si $n = 1.58$?

***29.** (I) Las dos superficies de una lente biconvexa tienen radios de 31.4 cm. Si la distancia focal es de 28.9 cm, ¿cuál es el índice de refracción del material de la lente?

***30.** (I) Demuestre que, si la lente del ejemplo 33-7 se invierte, la distancia focal no cambia.

***31.** (I) Una lente plano convexa (figura 33-2a) debe tener una distancia focal de 18.7 cm. Si se elabora con cuarzo fundido, ¿cuál debe ser el radio de curvatura de la superficie convexa?

***32.** (II) Un objeto se coloca a 90.0 cm de una lente de vidrio ($n = 1.52$) con una superficie cóncava de 22.0 cm de radio y una superficie convexa de 18.5 cm de radio. ¿Dónde está la imagen final? ¿Cuál es la amplificación?

***33.** (II) La prescripción médica para unos lentes correctivos solicita $+3.50$ dioptrías. El fabricante de lentes pule la lente a partir una "pieza bruta" con $n = 1.56$ y una superficie frontal convexa con 30.0 cm de radio de curvatura. ¿Cuál debe ser el radio de curvatura de la otra superficie?

33–5 Cámara

34. (I) Una fotografía expuesta de manera adecuada se toma a $f/16$ y $\frac{1}{120}$ s. ¿Qué abertura de lente se requiere si la rapidez el obturador es $\frac{1}{1000}$ s?

35. (I) La lente de una cámara de televisión tiene una distancia focal de 17 cm y un diámetro de 6.0 cm. ¿Cuál es su número f?

36. (II) Una cámara estenopeica usa un pequeño orificio en vez de una lente. Demuestre, con un diagrama de rayos, cómo se pueden formar imágenes razonablemente nítidas con este tipo de cámara. En particular, considere dos objetos puntuales separados 2.0 cm, que están a 1.0 m de un orificio de 1.0 mm de diámetro. Demuestre que, sobre un trozo de película colocado 7.0 cm detrás del orificio, los dos objetos producen dos círculos separados que no se traslapan.

37. (II) Suponga que una exposición correcta es $\frac{1}{250}$ s a $f/11$. En las mismas condiciones, ¿qué tiempo de exposición se necesitaría para una cámara estenopeica (problema 36), si el diámetro del orificio es de 1.0 mm y la película está a 7.0 cm del orificio?

38. (II) La visión humana normalmente cubre un ángulo aproximado de 40º horizontalmente. La lente de una cámara "normal" se define entonces del siguiente modo: cuando se enfoca en un objeto horizontal distante, que subtiende un ángulo de 40º, la lente produce una imagen que se extiende a través de toda la superficie horizontal del medio que registra la luz de la cámara (película o sensor electrónico). Determine la distancia focal f de la lente "normal" para los siguientes tipos de cámaras: *a*) una cámara de 35 mm que registra imágenes sobre una película de 36 mm de ancho; *b*) una cámara digital que registra las imágenes sobre un dispositivo de carga acoplada (CCD) de 1.00 cm de ancho.

39. (II) Un fotógrafo de la naturaleza quiere fotografiar un árbol de 38 m de alto desde una distancia de 65 m. ¿Qué distancia focal de lente deberá usar si la imagen debe llenar los 24 mm de alto del sensor?

33–6 Ojo y lentes correctivas

40. (I) Un globo ocular humano mide aproximadamente 2.0 cm de largo y la pupila tiene un diámetro máximo aproximado de 8.0 mm. ¿Cuál es la "rapidez" de esta lente?

41. (II) Una persona intenta leer sosteniendo un libro a la longitud del brazo, a una distancia de 55 cm. ¿Qué potencia de anteojos de lectura le deben prescribir, suponiendo que se colocarán a 2.0 cm del ojo y el sujeto quiere leer en el punto cercano "normal" de 25 cm?

42. (II) ¿Qué potencia de anteojos de lectura se necesitan para una persona cuyo punto cercano es de 105 cm, de manera que pueda leer una pantalla de computadora a 55 cm? Suponga que la distancia entre las gafas y los ojos es de 1.8 cm.

43. (II) Si la persona miope del ejemplo 33-13 usa lentes de contacto corregidos para el punto lejano ($= \infty$), ¿cuál sería el punto cercano? ¿En este caso sería mejor usar gafas?

44. (II) Un ojo se corrige mediante una lente de -4.50 D, a 2.0 cm del ojo. *a*) ¿Este ojo es miope o hipermétrope? *b*) ¿Cuál es el punto lejano de este ojo sin gafas?

45. (II) El ojo derecho de una persona puede ver objetos claramente sólo si están entre 25 cm y 78 cm de distancia. *a*) ¿Qué potencia de lentes de contacto se requieren de manera que los objetos lejanos se vean con claridad? *b*) ¿Cuál será el punto cercano con la lente en su lugar?

46. (II) Un individuo tiene un punto lejano de 14 cm. ¿Qué potencia de anteojos corregirían esta visión, si éstos se colocan a 2.0 cm del ojo? ¿Qué potencia de lentes de contacto, colocados en el ojo, necesitaría el individuo?

47. (II) Una lente de los anteojos de una persona miope tiene distancia focal de -23.0 cm y la lente está a 1.8 cm del ojo. Si la persona cambia a lentes de contacto colocados directamente sobre el ojo, ¿cuál debería ser la distancia focal de los correspondientes lentes de contacto?

48. (II) ¿Cuál es la distancia focal del sistema de lente (el cristalino) del ojo cuando ve un objeto *a*) en el infinito y *b*) a 38 cm del ojo? Suponga que la distancia entre el cristalino y la retina es de 2.0 cm.

49. (II) Una persona miope tiene puntos cercano y lejano de 10.6 y 20.0 cm respectivamente. Si se pone lentes de contacto con potencia $P = -4.00$ D, ¿cuáles son sus nuevos puntos cercano y lejano?

50. (II) Los conos estrechamente empacados en la fóvea del ojo tienen un diámetro aproximado de 2 μm. Para que el ojo perciba dos imágenes en la fóvea como distintas, suponga que las imágenes deben estar separadas por al menos un cono que no esté excitado. Si estas imágenes son de dos objetos puntuales en el punto cercano de 25 cm del ojo, ¿qué distancia separa a estos objetos apenas resolubles? Suponga que el diámetro del ojo (distancia de la córnea a la fóvea) es de 2.0 cm.

33–7 Lente de aumento

51. (I) ¿Cuál es la distancia focal de una lente de aumento de 3.8× de amplificación para un ojo normal relajado?

52. (I) ¿Cuál es la amplificación de una lente que se usa con un ojo relajado, si su distancia focal es de 13 cm?

53. (I) Un amplificador se clasifica en 3.0× para un ojo normal que enfoca una imagen en el punto cercano. *a*) ¿Cuál es su distancia focal? *b*) ¿Cuál es su distancia focal si los 3.0× se refieren a un ojo relajado?

54. (II) Sherlock Holmes usa una lente de 8.80 cm de distancia focal como su lente de aumento. Para obtener máxima amplificación, ¿dónde se debe colocar el objeto (suponga un ojo normal) y cuál será la amplificación?

55. (II) Un pequeño insecto se coloca a 5.85 cm de una lente de +6.00 cm de distancia focal. Calcule *a*) la posición de la imagen y *b*) la amplificación angular.

56. (II) Un perno de 3.40 mm de ancho se examina con una lente de 9.60 cm de distancia focal. Un ojo normal ve la imagen en su punto cercano. Calcule *a*) la amplificación angular, *b*) el ancho de la imagen y *c*) la distancia entre el objeto y la lente.

57. (II) Una lente de aumento, con una distancia focal de 9.5 cm, se usa para leer un impreso colocado a una distancia de 8.3 cm. Calcule *a*) la posición de la imagen; *b*) la amplificación angular.

58. (II) Una lente de aumento se clasifica en 3.0× para un ojo normal que está relajado. ¿Cuál sería la amplificación para un ojo relajado cuyo punto cercano está a *a*) 65 cm y *b*) 17 cm? Explique las diferencias.

59. (II) Un escritor usará una lente convergente, con distancia focal $f = 12$ cm, para leer las letras pequeñas en el contrato de su libro. Inicialmente, el escritor sostiene la lente sobre la letra pequeña de manera que su imagen quede en el infinito. Luego, para obtener una mejor visión, mueve la lente de manera que la imagen esté en su punto cercano de 25 cm. ¿A qué distancia, y en qué dirección (hacia o desde la letra pequeña) el escritor mueve la lente? Suponga que el ojo del escritor se ajusta para permanecer siempre cerca de la lente de aumento.

33–8 Telescopios

60. (I) ¿Cuál es la amplificación de un telescopio astronómico cuyo objetivo tiene una distancia focal de 78 cm y cuyo ocular tiene una distancia focal de 2.8 cm? ¿Cuál es la longitud total del telescopio cuando se ajusta para un ojo relajado?

61. (I) Se desea que la amplificación total de un telescopio astronómico sea de 35×. Si se usa un objetivo con distancia focal de 88 cm, ¿cuál debe ser la distancia focal del ocular? ¿Cuál es la longitud total del telescopio cuando se ajusta para que un ojo relajado vea a través de él?

62. (II) Un binocular de 7.0× tiene oculares de 3.0 cm de distancia focal. ¿Cuál es la distancia focal del objetivo?

63. (II) Un telescopio astronómico tiene un objetivo con distancia focal de 75 cm y un ocular de +35 D. ¿Cuál es la amplificación total?

64. (II) Un telescopio astronómico tiene sus dos lentes separadas 78.0 cm. Si la lente objetivo tiene una distancia focal de 75.5 cm, ¿cuál es la amplificación de este telescopio? Suponga un ojo relajado.

65. (II) Un telescopio galileano, ajustado para un ojo relajado, mide 33.8 cm de largo. Si la lente objetivo tiene una distancia focal de 36.0 cm, ¿cuál es la amplificación?

66. (II) ¿Cuál es la potencia de amplificación de un telescopio astronómico que usa un espejo reflector cuyo radio de curvatura es de 6.4 m y un ocular cuya distancia focal es de 2.8 cm?

67. (II) La imagen de la Luna parece amplificada 120× por un telescopio astronómico reflector con un ocular que tiene una distancia focal de 3.1 cm. ¿Cuáles son la distancia focal y el radio de curvatura del espejo principal (objetivo)?

68. (II) Un telescopio astronómico de 120× se ajusta para un ojo relajado cuando las dos lentes están separadas 1.25 m. ¿Cuál es la distancia focal de cada lente?

69. (II) Un telescopio astronómico más largo que aproximadamente 50 cm no es fácil de sostener con la mano. Con base en este hecho, estime la amplificación angular máxima que logra un telescopio diseñado para sostenerse con la mano. Suponga que su ocular, si se usa como lente de aumento, da una amplificación de 5× para un ojo relajado con un punto cercano $N = 25$ cm.

70. (III) Un telescopio reflector (figura 33-38b) tiene un radio de curvatura de 3.00 m para su espejo objetivo y un radio de curvatura de −1.50 m para su espejo ocular. Si la distancia entre los dos espejos es de 0.90 m, ¿a qué distancia, enfrente del ocular, se debe colocar el sensor electrónico para registrar la imagen de una estrella?

71. (III) Un par de binoculares de 7.5× tiene una distancia focal de objetivo de 26 cm. Si los binoculares se enfocan en un objeto a 4.0 m de distancia (desde el objetivo), ¿cuál es la amplificación? (Los 7.5× se refieren a los objetos en el infinito; la ecuación 33-7 se sostiene sólo para objetos en el infinito y no para objetos cercanos).

*33–9 Microscopios

***72.** (I) Un microscopio usa un ocular con una distancia focal de 1.50 cm. Suponiendo un ojo normal, con una imagen final en el infinito, la longitud del barril es de 17.5 cm y la distancia focal del objetivo es de 0.65 cm. ¿Cuál es la amplificación del microscopio?

***73.** (I) Un microscopio de 680× usa un objetivo con 0.40 cm de distancia focal. Si la longitud del barril es de 17.5 cm, ¿cuál es la distancia focal del ocular? Suponga un ojo normal y que la imagen final está en el infinito.

***74.** (I) Un microscopio de 17 cm de largo tiene un ocular con una distancia focal de 2.5 cm y un objetivo con una distancia focal de 0.28 cm. ¿Cuál es la amplificación aproximada?

***75.** (II) Un microscopio tiene un ocular de 13.0× y un objetivo de 58.0×, separados 20.0 cm. Calcule *a*) la amplificación total, *b*) la distancia focal de cada lente y *c*) dónde debe estar el objeto para que un ojo normal relajado lo vea en foco.

***76.** (II) Repita el problema 75, pero suponga que la imagen final se ubica a 25 cm del ocular (punto cercano de un ojo normal).

***77.** (II) Un microscopio tiene un ocular con 1.8 cm de distancia focal y un objetivo de 0.80 cm. Suponiendo un ojo normal relajado, calcule *a*) la posición del objeto si la distancia entre las lentes es de 16.8 cm, y *b*) la amplificación total.

***78.** (II) El ocular de un microscopio compuesto tiene una distancia focal de 2.80 cm, mientras que el objetivo tiene $f = 0.740$ cm. Si se coloca un objeto a 0.790 cm de la lente objetivo, calcule *a*) la distancia entre las lentes cuando el microscopio se ajusta para un ojo relajado, y *b*) la amplificación total.

***79.** (II) Un económico microscopio educativo de laboratorio permite al usuario seleccionar su objetivo para que tenga una distancia focal de 32 mm, 15 mm o 3.9 mm. También tiene dos posibles oculares con amplificaciones de 5× y 10×. Cada objetivo forma una imagen real 160 mm detrás de su punto focal. ¿Cuáles son las amplificaciones totales máxima y mínima que se obtienen con este instrumento?

***80.** (III) Dadas dos lentes con distancias focales de 12 cm, intente fabricar un burdo microscopio con ellas. Mientras sostiene estas lentes a una distancia de 55 cm, coloca su microscopio de manera que su objetivo esté a una distancia d_o de un pequeño objeto. Suponga que el punto cercano de su ojo es $N = 25$ cm. *a*) Para que su microscopio funcione adecuadamente, ¿cuál debe ser d_o? *b*) Suponiendo que su ojo está relajado cuando lo usa, ¿qué amplificación M logra su microscopio? *c*) Puesto que la longitud de su microscopio no es mucho mayor que las distancias focales de sus lentes, la aproximación $M \approx N\ell/f_e f_o$ no es válida. Si usted aplica esta aproximación a su microscopio, ¿qué error porcentual comete en la verdadera amplificación de su microscopio?

*33–10 Aberraciones de lentes

***81.** (II) Una lente plano convexa (figura 33-2a) tiene una superficie plana y la otra tiene $R = 15.3$ cm. Esta lente se usa para ver un objeto rojo y amarillo que está a 66.0 cm de distancia de la lente. El índice de refracción del vidrio es 1.5106 para la luz roja y 1.5226 para la luz amarilla. ¿Cuáles son las ubicaciones de las imágenes roja y amarilla formadas por la lente?

***82.** (II) Una lente acromática está hecha de dos lentes muy delgadas, colocadas en contacto, que tienen distancias focales $f_1 = -28$ cm y $f_2 = +25$ cm. *a*) ¿La combinación es convergente o divergente? *b*) ¿Cuál es la distancia focal neta?

Problemas generales

83. Una lente con distancia focal de 200 mm se puede ajustar de manera que esté de 200.00 mm a 206.4 mm de la película. ¿Para qué intervalo de distancias del objeto se puede ajustar?

84. Si un telefoto de 135 mm se diseña para cubrir distancias de objeto de 1.30 m a ∞, ¿qué distancia se debe mover la lente en relación con el plano del sensor o de la película?

85. Para una cámara equipada con una lente cuya distancia focal es de 58 mm, ¿cuál es la distancia del objeto, si la altura de la imagen es igual a la altura del objeto? ¿A qué distancia está el objeto de la imagen en la película?

86. Demuestre que, para objetos muy alejados (suponga infinito), la amplificación de cualquier lente de cámara es proporcional a su distancia focal.

87. Un pequeño objeto está a 25.0 cm de una lente divergente, como se observa en la figura 33-48. Una lente convergente, con distancia focal de 12.0 cm, está a 30.0 cm a la derecha de la lente divergente. El sistema de dos lentes forma una imagen real invertida 17.0 cm a la derecha de la lente convergente. ¿Cuál es la distancia focal de la lente divergente?

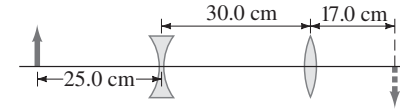


FIGURA 33–48 Problema 87.

88. Una lente convergente, con distancia focal de 13.0 cm, se pone en contacto con una lente divergente con distancia focal de −20.0 cm. ¿Cuál es la distancia focal de la combinación? ¿La combinación es convergente o divergente?

89. Un telescopio astronómico tiene una amplificación de 8.0×. Si las dos lentes están separadas 28 cm, determine la distancia focal de cada lente.

90. *a*) Demuestre que, si dos lentes delgadas, con distancias focales f_1 y f_2, se colocan en contacto una con la otra, la distancia focal de la combinación está dada por $f_T = f_1 f_2/(f_1 + f_2)$. *b*) Demuestre que la potencia P de la combinación de dos lentes es la suma de sus potencias separadas, $P = P_1 + P_2$.

91. ¿De qué tamaño es la imagen del Sol en una película que se usa en una cámara con *a*) una lente con distancia focal de 28 mm, *b*) una lente con distancia focal de 50 mm y *c*) una lente con distancia focal de 135 mm? *d*) Si la lente de 50 mm se considera normal para esta cámara, ¿qué amplificación relativa brinda cada una de las otras dos lentes? El Sol tiene un diámetro de 1.4×10^6 km, y está a 1.5×10^8 km de distancia.

92. Dos lentes convergentes se colocan separadas 30.0 cm. La distancia focal de la lente a la derecha es de 20.0 cm y la distancia focal de la lente de la izquierda es de 15.0 cm. Se coloca un objeto a la izquierda de la lente con distancia focal de 15.0 cm. Una imagen final de ambas lentes es invertida y se ubica a la mitad entre las dos lentes. ¿A qué distancia a la izquierda de la lente con distancia focal de 15.0 cm se encuentra el objeto original?

93. Cuando un objeto se coloca a 60.0 cm de cierta lente convergente, forma una imagen real. Cuando el objeto se mueve a 40.0 cm de la lente, la imagen se mueve 10.0 cm más lejos de la lente. Calcule la distancia focal de esta lente.

94. La figura 33-49 se tomó desde el laboratorio del Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (NIST), en Boulder, Colorado, a 2 km del excursionista en la fotografía. La imagen del Sol tenía 15 mm de diámetro en la película. Estime la distancia focal de la lente de la cámara (en realidad un telescopio). El Sol tiene un diámetro de 1.4×10^6 km y está a 1.5×10^8 km de distancia.

FIGURA 33–49 Problema 94.

95. Una estrella cinematográfica sorprende a un reportero tomando fotografías de ella en casa. La actriz afirma que el reportero invadió su casa. Para probar su argumento, entrega como evidencia la película que confiscó. Su altura de 1.75 m aparece como una altura de 8.25 mm en la película, y la distancia focal de la lente de la cámara era de 220 mm. ¿A qué distancia de la actriz se encontraba el reportero?

96. Conforme la mañana transcurre hacia mediodía, y la luz del Sol se vuelve más intensa, un fotógrafo nota que, si mantiene constante la rapidez del obturador, tiene que cambiar el número f de $f/5.6$ a $f/16$. ¿En qué factor aumentó la intensidad de la luz del Sol durante ese tiempo?

97. Un niño tiene un punto cercano de 15 cm. ¿Cuál es la máxima amplificación que puede obtener el niño con un amplificador de 8.5 cm de distancia focal? ¿Qué amplificación puede obtener un ojo normal con la misma lente? ¿Qué persona ve más detalle?

98. Una mujer puede ver claramente con su ojo derecho sólo cuando los objetos están entre 45 cm y 155 cm de distancia. ¿Qué potencias deben tener los bifocales que le prescribieron para que pueda ver objetos distantes con claridad (con ayuda de la parte superior de los anteojos) y pueda leer un libro a 25 cm de distancia (con ayuda de la parte inferior de los anteojos) con su ojo derecho? Suponga que las gafas estarán a 2.0 cm del ojo.

99. ¿Cuál es la potencia de amplificación de una lente de +4.0 D que se utiliza como amplificador? Suponga un ojo normal relajado.

100. Un físico perdido en las montañas intenta fabricar un telescopio con las lentes de sus anteojos de lectura. Las lentes tienen potencias de +2.0 D y +4.5 D, respectivamente. *a*) ¿Qué amplificación máxima de telescopio es posible? *b*) ¿Cuál lente debe usar como ocular?

101. Un hombre de 50 años de edad usa lentes de +2.5 D para leer un periódico a 25 cm de distancia. Diez años después, debe sostener el periódico a 32 cm de distancia para ver con claridad con los mismos anteojos. ¿Qué potencia de lentes necesita ahora para sostener el periódico a 25 cm de distancia? (Las distancias se miden desde las lentes).

102. Un objeto se mueve con rapidez constante v_0 hacia una lente convergente con distancia focal f, de manera que su distancia d_o desde la lente siempre es mayor que f. *a*) Determine la velocidad v_i de la imagen como función de d_o. *b*) ¿En cuál dirección se mueve la imagen (es decir, se acerca a la lente o se aleja de ella)? *c*) ¿Para qué d_o la rapidez de la imagen es igual a la rapidez del objeto?

103. El objetivo y el ocular de un telescopio están separados 85 cm. Si el ocular tiene +23 D, ¿cuál es la amplificación total del telescopio?

***104.** Dos lentes convergentes, una con $f = 4.0$ cm y la otra con $f = 44$ cm, se convierten en un telescopio. *a*) ¿Cuáles son la longitud y la amplificación? *b*) Suponga que estas lentes ahora se combinan para fabricar un microscopio; si la amplificación necesita ser de 25×, ¿qué longitud debe tener el microscopio?

105. Samuel compra unos anteojos de +3.50 D que corrigen su visión defectuosa para poner su punto cercano a 25 cm. (Suponga que usa los anteojos a 2.0 cm de sus ojos.) *a*) Calcule la distancia focal de los anteojos de Samuel. *b*) Calcule el punto cercano de Samuel sin anteojos. *c*) Pamela, quien tiene ojos normales con punto cercano en 25 cm, se prueba los anteojos de Samuel. Calcule el punto cercano de Pamela cuando se pone los anteojos de Samuel.

106. El funcionamiento adecuado de ciertos dispositivos ópticos (por ejemplo, fibras ópticas y espectrómetros) requiere que la luz de entrada sea una colección de rayos divergentes dentro de un cono de medio ángulo θ (figura 33-50). Si la luz inicialmente existe como un haz colimado (es decir, de rayos paralelos), demuestre que se puede usar una lente individual con distancia focal f y diámetro D para crear la entrada de luz requerida si $D/f = 2 \tan \theta$. Si $\theta = 3.5°$ para cierto espectrómetro, ¿qué distancia focal de lente se debe usar si el diámetro de la lente es de 5.0 cm?

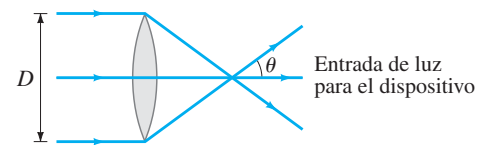


FIGURA 33–50 Problema 106.

107. En una novela de ciencia ficción, el ojo de una criatura inteligente que mora en el océano funciona bajo el agua con un punto cercano de 25 cm. A esta criatura le gustaría crear un amplificador submarino a partir de un pequeño recipiente de plástico lleno de aire. ¿Qué forma debe tener el recipiente de plástico lleno de aire (es decir, determine los radios de curvatura de sus superficies) para que la criatura lo pueda usar como un amplificador de 3.0×? Suponga que el ojo se enfoca en su punto cercano.

108. Un sistema de lentes de telefoto obtiene una gran amplificación en un paquete compacto. Un sistema simple de ese tipo se puede construir a partir de dos lentes, una convergente y otra divergente, con distancias focales f_1 y $f_2 = -\frac{1}{2}f_1$, respectivamente, separadas una distancia $\ell = \frac{3}{4}f_1$ como se muestra en la figura 33-51. *a*) Para un objeto distante ubicado a una distancia d_o de la primera lente, demuestre que la primera lente forma una imagen con amplificación $m_1 \approx -f_1/d_o$ ubicada muy cerca de su punto focal. Luego demuestre que la amplificación total para el sistema de dos lentes es $m \approx -2f_1/d_o$. *b*) Para un objeto ubicado en el infinito, demuestre que el sistema de dos lentes forma una imagen que está a una distancia $\frac{5}{4}f_1$ detrás de la primera lente. *c*) Una lente sola, con distancia focal de 250 mm, tendría que montarse aproximadamente a 250 mm de la película de una cámara para producir una imagen de un objeto distante en d_o con amplificación $-(250\text{ mm})/d_o$. Para producir una imagen de este objeto con la misma amplificación, con el mismo sistema de dos lentes, ¿qué valor de f_1 se debe usar y a qué distancia enfrente de la película se debe colocar la primera lente? ¿Cuánto más pequeña es la "longitud de enfoque" (es decir, la distancia de la primera lente a la imagen final) de este sistema de dos lentes, en comparación con la "longitud de enfoque" de 250 mm de la lente individual equivalente?

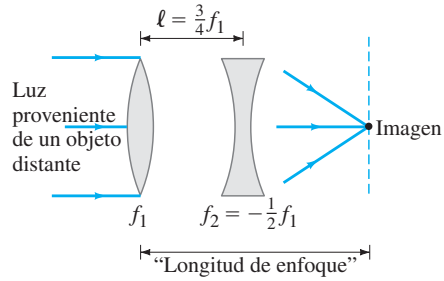


FIGURA 33–51 Problema 108.

*Problemas numéricos/por computadora

***109.** (III) En el método de "amplificación", la distancia focal f de una lente convergente se encuentra al colocar un objeto de tamaño conocido en varias posiciones enfrente de la lente y medir las distancias resultantes de la imagen real d_i así como sus amplificaciones asociadas m (el signo menos indica que la imagen está invertida). Los datos tomados en tal experimento se presentan aquí:

d_i (cm)	20	25	30	35	40
m	−0.43	−0.79	−1.14	−1.50	−1.89

a) Demuestre analíticamente que una gráfica de m contra d_i debe generar una línea recta. Teóricamente, ¿cuáles son los valores esperados para la pendiente y la ordenada al origen de esta línea? [*Sugerencia:* d_o no es constante.] *b*) Con los datos anteriores, grafique m contra d_i y demuestre que de hecho resulta una línea recta. Use la pendiente de esta línea para determinar la distancia focal de la lente. ¿La ordenada al origen de la gráfica tiene el valor esperado? *c*) Al realizar tal experimento, uno tiene el problema práctico de ubicar el centro exacto de la lente, pues d_i se debe medir desde este punto. En vez de ello, imagine que uno mide la distancia de la imagen d_i' desde la superficie posterior de la lente, que está a una distancia ℓ desde el centro de la lente. De esta forma, $d_i = d_i' + \ell$. Demuestre que, cuando se pone en práctica el método de amplificación en esta forma, una gráfica de m contra d_i' todavía dará por resultado una línea recta. ¿Cómo se determina f a partir de esta línea recta?

Respuestas a los ejercicios

A: Más cerca.

B: *b*) y *d*) son verdaderas.

C: $f = 10$ cm para ambos casos; $d_i = -10$ cm en *a*) y 30 cm en *b*).

D: −36 cm; divergente.

E: $P = -4.0$ D.

F: 48 cm.

Los hermosos colores de la superficie de esta burbuja de jabón se pueden explicar bastante bien mediante la teoría ondulatoria de la luz. Una burbuja de jabón es una película esférica muy delgada llena de aire. La luz que se refleja en las superficies exterior e interior de esta delgada película de agua jabonosa interfieren de manera constructiva para producir los brillantes colores. El color que se ve en un determinado punto depende del grosor de la película de agua jabonosa en ese punto y también del ángulo de visión. Cerca de la parte superior de la burbuja se ve una pequeña área negra rodeada por una área plateada o blanca. El grosor de la burbuja es menor en esa mancha negra, quizá sólo mide unos 30 nm, y es completamente transparente (por eso se ve el fondo negro). (Véase el pliego a color al final del libro).

En este capítulo se estudian aspectos fundamentales de la naturaleza ondulatoria de la luz, incluida la interferencia de dos rendijas y la interferencia en películas delgadas.

CAPÍTULO 34

La naturaleza ondulatoria de la luz; interferencia

CONTENIDO

34–1 Ondas frente a partículas; el principio de Huygens y la difracción
34–2 El principio de Huygens y la ley de refracción
34–3 Interferencia; experimento de Young de la doble rendija
*34–4 Intensidad en el patrón de interferencia de doble rendija
34–5 Interferencia en películas delgadas
*34–6 Interferómetro de Michelson
*34–7 Intensidad luminosa

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Cuando una película delgada de aceite yace sobre el agua o sobre el pavimento mojado, con frecuencia se ven en ella remolinos de colores. También se ven remolinos de color en la burbuja de jabón que se muestra arriba. ¿Qué causa estos colores?

a) Aditivos en el aceite o el jabón reflejan varios colores.
b) Sustancias químicas en el aceite o el jabón absorben varios colores.
c) La dispersión provocada por diferencias en el índice de refracción en el aceite o jabón.
d) Las interacciones de la luz con una delgada capa limítrofe donde el aceite (o el jabón) y el agua se mezclan de manera irregular.
e) Las ondas de luz reflejadas en las superficies superior e inferior de la delgada película de aceite o jabón pueden interferir de manera constructiva para longitudes de onda particulares.

El hecho de que la luz transporta energía es obvio para cualquier persona que haya enfocado los rayos del Sol con una lente de aumento sobre un trozo de papel hasta quemarlo y formar un hoyo en éste. Pero, ¿cómo viaja la luz y en qué forma se transporta esta energía? En el estudio de las ondas del capítulo 15, se mencionó que la energía se puede transportar de un lugar a otro básicamente en dos formas: mediante partículas o mediante ondas. En el primer caso, objetos o partículas materiales pueden transportar energía, al igual que una avalancha de rocas o agua que se desplaza rápidamente. En el segundo caso, las ondas de agua y las ondas sonoras, por ejemplo, pueden transportar energía a través de largas distancias, aun cuando las partículas oscilatorias del medio no recorran tales distancias. En vista de esto, ¿qué podemos decir acerca de la naturaleza de la luz? ¿Acaso la luz viaja como una corriente de partículas que se alejan de su fuente, o viaja en la forma de ondas que se dispersan hacia fuera desde la fuente?

En el pasado, esta cuestión resultó muy difícil. Por un lado, la luz no se revela a sí misma en forma obvia como constituida por pequeñas partículas; por otro, tampoco es posible ver pequeñas ondas de luz pasar por ahí como las ondas en el agua. La evidencia pareció favorecer primero a una postura y luego a la otra hasta cerca de 1830, cuando la mayoría de los físicos aceptaron la teoría ondulatoria. Hacia finales del siglo XIX, la luz se consideraba como una *onda electromagnética* (capítulo 31). A principios del siglo XX, se demostró que la luz también tenía una naturaleza corpuscular, como se estudiará en el capítulo 37. Ahora se habla de la dualidad onda-partícula de la luz. La teoría ondulatoria de la luz sigue siendo válida y ha demostrado ser muy útil. Ahora se investigará la evidencia para la teoría ondulatoria y cómo se usó para explicar una amplia gama de fenómenos.

34–1 Ondas frente a partículas; el principio de Huygens y la difracción

El científico holandés Christian Huygens (1629-1695), contemporáneo de Newton, propuso una teoría ondulatoria de la luz que tenía mucho mérito. En la actualidad todavía se utiliza una técnica desarrollada por Huygens para predecir la posición futura de un frente de onda cuando se conoce una posición anterior. El término frente de onda hace referencia a todos los puntos a lo largo de una onda bidimensional o tridimensional que forman una cresta de onda; es a lo que simplemente llamamos ola al observar el océano. Los frentes de onda son perpendiculares a los rayos, como ya se estudió en el capítulo 15 (figura 15-20). El **principio de Huygens** se puede enunciar del modo siguiente: *Todo punto en un frente de onda se puede considerar como una fuente de pequeñas ondulaciones que se dispersan hacia delante con la rapidez de la onda misma. El nuevo frente de onda es la envoltura de todas las onditas*; esto es, *la tangente a todas ellas*.

Como ejemplo simple del uso del principio de Huygens, considere el frente de onda AB en la figura 34-1, que viaja alejándose de una fuente S. Suponga que el medio es *isotrópico*; esto es, la rapidez v de las ondas es la misma en todas direcciones. Para encontrar el frente de onda poco tiempo t después de que está en AB, se dibujan pequeños círculos con radio $r = vt$. Los centros de estos pequeños círculos son los puntos indicados sobre el frente de onda original AB, y los círculos representan onditas (imaginarias) de Huygens. La tangente a todas estas onditas, la línea curva CD, es la nueva posición del frente de onda.

El principio de Huygens es particularmente útil para analizar lo que ocurre cuando las ondas chocan con un obstáculo y los frentes de onda se interrumpen parcialmente. El principio de Huygens predice que las ondas se doblan hacia atrás en un obstáculo, como se muestra en la figura 34-2. Esto es justo lo que hacen las ondas en el agua, como se vio en el capítulo 15 (figuras 15-31 y 15-32). El desvío de las ondas hacia atrás en los obstáculos en la "región de sombra" se conoce como **difracción**. Puesto que la difracción ocurre con las ondas, pero no con las partículas, sirve como un medio para distinguir la naturaleza de la luz.

Advierta, como se muestra en la figura 34-2, que la difracción es más prominente cuando el tamaño de la abertura está en el orden de la longitud de onda de la onda. Si la abertura es mucho mayor que la longitud de onda, la difracción pasa desapercibida.

¿La luz presenta difracción? A mediados del siglo XVII, el sacerdote jesuita Francesco Grimaldi (1618-1663) observó que, cuando la luz del Sol entraba a un cuarto oscuro a través de un pequeño orificio en una pantalla, la parte iluminada sobre la pared opuesta era más grande de lo que se esperaría a partir de los rayos geométricos. También observó que el borde de la imagen no era nítido, sino que estaba rodeado por franjas de colores. Grimaldi atribuyó esto a la difracción de la luz.

El modelo ondulatorio de la luz explica muy bien la difracción; en el siguiente capítulo estudiaremos con detalle este fenómeno. Pero el modelo de rayos (capítulo 32) no puede explicar la difracción, y es importante estar conscientes de tales limitaciones. La óptica geométrica que se basa en rayos tiene éxito en una amplia gama de situaciones, sólo porque las aberturas y los obstáculos normales son mucho más grandes que la longitud de onda de la luz y, por ende, ocurre relativamente poca difracción.

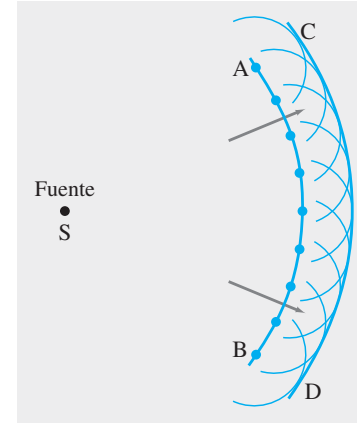
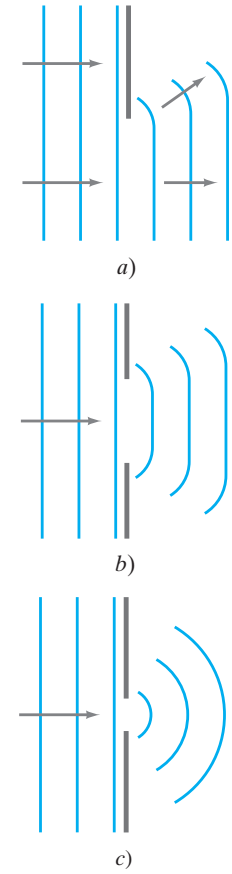


FIGURA 34–1 Principio de Huygens que permite determinar el frente de onda CD cuando se conoce el frente de onda AB.

FIGURA 34–2 El principio de Huygens es congruente con la difracción *a*) alrededor del borde de un obstáculo, *b*) a través de un gran orificio, *c*) a través de un orificio pequeño cuyo tamaño está en el orden de la longitud de onda de la onda.



34–2 El principio de Huygens y la ley de refracción

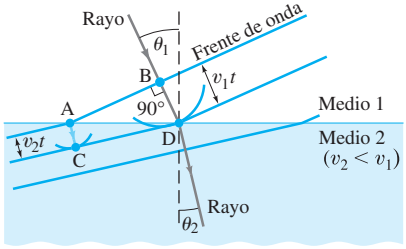


FIGURA 34–3 Explicación de la refracción mediante el principio de Huygens. Los frentes de onda son perpendiculares a los rayos.

Las leyes de reflexión y refracción eran bien conocidas en la época de Newton. La ley de reflexión no podía distinguir entre las dos teorías que acabamos de explicar: ondas frente a partículas. Cuando las ondas se reflejan en un obstáculo, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión (figura 15-21). Lo mismo es cierto en el caso de las partículas: piense en una pelota de tenis sin giro que golpea una superficie plana.

La ley de refracción es otro asunto. Considere un rayo de luz que entra a un medio donde se desvía hacia la normal, como cuando viaja en el aire y entra en el agua. Como se observa en la figura 34-3, este desvío se puede reconstruir a partir del principio de Huygens si uno supone que la rapidez de la luz es menor en el segundo medio ($v_2 < v_1$). En el tiempo t, el punto B sobre el frente de onda AB (perpendicular al rayo entrante) recorre una distancia v_1t para alcanzar el punto D. El punto A en el frente de onda, que viaja en el segundo medio, recorre una distancia v_2t para alcanzar el punto C, y $v_2t < v_1t$. El principio de Huygens se aplica a los puntos A y B para obtener las onditas curvas que se ilustran en C y D. El frente de onda es tangente a estas dos onditas, así que el nuevo frente de onda es la línea CD. Por lo tanto, los rayos, los cuales son perpendiculares a los frentes de onda, se desvían hacia la normal si $v_2 < v_1$, como se ilustra.

Newton favoreció una teoría corpuscular de la luz que predecía el resultado opuesto: que la rapidez de la luz sería mayor en el segundo medio ($v_2 > v_1$). En consecuencia, la teoría ondulatoria predice que la rapidez de la luz en el agua, por ejemplo, es menor que en el aire; y la teoría corpuscular de Newton predice lo contrario. En 1850 el físico francés Jean Foucault realizó un experimento para medir la rapidez de la luz en el agua, y confirmó la predicción de la teoría ondulatoria. Sin embargo, para entonces, la teoría ondulatoria ya era plenamente aceptada, como veremos en la siguiente sección.

La ley de Snell de la refracción se deduce directamente del principio de Huygens, puesto que la rapidez de la luz v en cualquier medio se relaciona con la rapidez en el vacío (c) y el índice de refracción (n) mediante la ecuación 32-4; esto es, $v = c/n$. A partir de la construcción de Huygens de la figura 34-3, el ángulo ADC es igual a θ_2 y el ángulo BAD es igual a θ_1. De esta forma, para los dos triángulos que tienen el lado común AD, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{v_1 t}{\text{AD}}, \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{v_2 t}{\text{AD}}.$$

Al dividir estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Así, por la ecuación 32-4, $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$, por lo que

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2,$$

que es la ley de Snell de la refracción, ecuación 32-5. (La ley de reflexión se deduce a partir del principio de Huygens en forma similar: véase el problema 1 al final de este capítulo).

Cuando una onda de luz viaja de un medio a otro, su frecuencia no cambia, pero su longitud de onda sí. Esto se observa en la figura 34-3, donde cada una de las líneas azules que representan un frente de onda corresponde a una cresta (pico) de la onda. De esta forma,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2 t}{v_1 t} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2},$$

donde, en el último paso, se usó la ecuación 32-4, $v = c/n$. Si el medio 1 es un vacío (o aire), de manera que $n_1 = 1$, $v_1 = c$ y a λ_1 simplemente se le llama λ, entonces la longitud de onda en otro medio con índice de refracción n ($= n_2$) será

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}. \qquad \textbf{(34–1)}$$

Este resultado es congruente con la frecuencia f que no cambia sin importar el medio donde viaje la onda, pues $c = f\lambda$.

EJERCICIO A Un haz de luz en el aire, con longitud de onda = 500 nm, frecuencia = 6.0×10^4 Hz y rapidez = 3.0×10^8 m/s, pasa a un trozo de vidrio cuyo índice de refracción es 1.5. ¿Cuáles son la longitud de onda, la frecuencia y la rapidez de la luz en el vidrio?

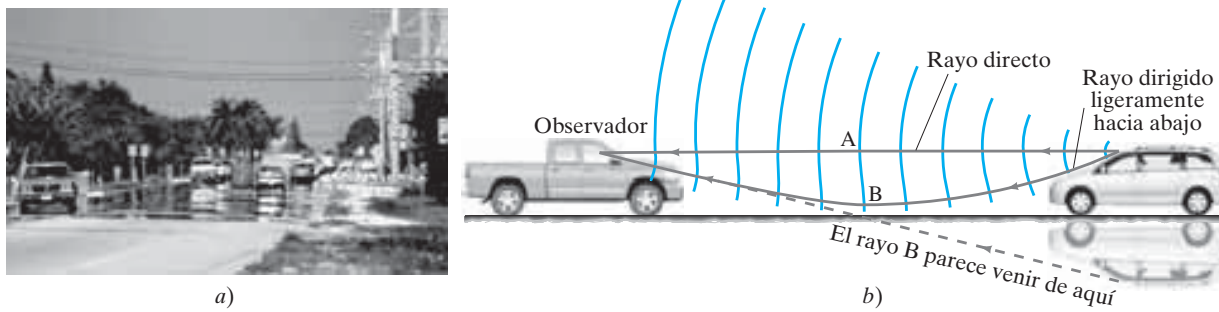


FIGURA 34–4 *a*) Espejismo en la carretera. *b*) Dibujo (enormemente exagerado) que muestra los frentes de onda y los rayos para explicar los espejismos en las carreteras. Note cómo las secciones de los frentes de onda cerca del suelo se desplazan más rápidamente y, por lo tanto, están más separados. (Véase el pliego a color al final del libro).

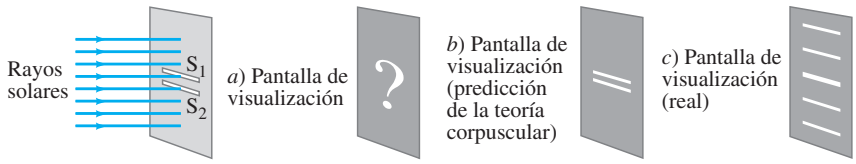
Los frentes de onda permiten explicar cómo se producen los espejismos mediante refracción de la luz. Por ejemplo, en un día caluroso, los automovilistas en ocasiones ven un espejismo en la carretera enfrente de ellos, y los vehículos distantes parecen reflejarse en él (figura 34-4a). En un día caluroso, puede haber una capa de aire muy caliente cerca del camino (que se calienta por los rayos solares que inciden sobre éste). El aire caliente es menos denso que el aire frío, así que el índice de refracción es ligeramente menor en el aire caliente. En la figura 34-4b se ve un diagrama de la luz que proviene de un punto en un vehículo distante (a la derecha) y se dirige a la izquierda hacia el observador. Se muestran los frentes de onda y dos rayos (perpendiculares a los frentes de onda). El rayo A se dirige directamente al observador, sigue una trayectoria en línea recta y representa la visión normal del vehículo distante. El rayo B es un rayo que al principio se dirige ligeramente hacia abajo, pero se dobla ligeramente conforme se mueve a través de las capas de aire de diferentes índices de refracción. Los frentes de onda, que en la figura 34-4b se indican como líneas curvas que pasan por el rayo A, se desplazan ligeramente más rápido en las capas de aire más cercanas al suelo. Por lo tanto, el rayo B se dobla como se indica, y al observador le parece que proviene desde abajo (línea punteada), como si se reflejara en el camino. De ahí la ilusión.

FÍSICA APLICADA
Espejismos en las carreteras

34–3 Interferencia; experimento de Young de la doble rendija

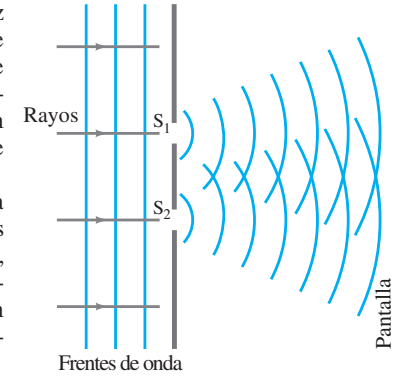
En 1801 el inglés Thomas Young (1773-1829) obtuvo evidencia convincente para la naturaleza ondulatoria de la luz e incluso fue capaz de medir longitudes de onda para luz visible. La figura 34-5a muestra un diagrama del famoso experimento de Young de la doble rendija. Para tener luz proveniente de una sola fuente, Young empleó la radiación solar que pasaba a través de una rendija muy estrecha en una persiana. Este haz de rayos paralelos incide sobre una pantalla que contiene dos rendijas cercanas entre sí, S_1 y S_2. (Las rendijas y sus separaciones son muy estrechas, no mucho mayores que la longitud de onda de la luz). Si la luz consiste en pequeñas partículas, se puede esperar ver dos líneas brillantes sobre una pantalla colocada detrás de las rendijas como en *b*). Pero, en vez de ello, se observa una serie de líneas brillantes, como en *c*). Young fue capaz de explicar este resultado como un fenómeno de **interferencia ondulatoria**.

FIGURA 34–5 *a*) Experimento de Young de la doble rendija. *b*) Si la luz consiste en partículas, se esperaría ver dos líneas brillantes sobre la pantalla detrás de las rendijas. *c*) De hecho, se observan muchas líneas. Las rendijas y sus separaciones deben ser muy delgadas.



Para ver por qué, considere la situación sencilla de ondas planas de luz de una sola longitud de onda, llamada **monocromática** (que significa "un color"); las ondas planas inciden sobre las dos rendijas, como se ilustra en la figura 34-6. Debido a la difracción, las ondas que salen de las dos pequeñas rendijas se dispersan hacia fuera como se indica. Esto es equivalente al patrón de interferencia producido cuando dos rocas se lanzan a un lago (figura 15-23), o cuando el sonido proveniente de dos altavoces interfiere (figura 16-15). Recuerde la sección 15-8 acerca de la interferencia de las ondas.

FIGURA 34–6 Si la luz es una onda, la luz que pasa a través de una de las dos rendijas interferirá con la luz que pasa a través de la otra rendija.



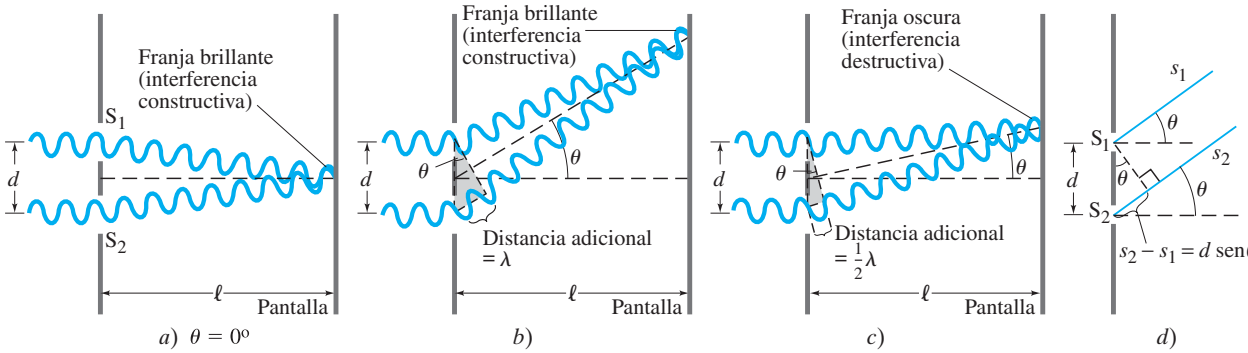
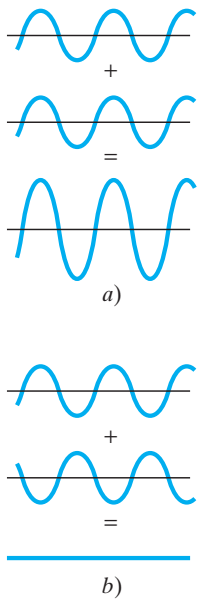


FIGURA 34–7 Explicación que ofrece la teoría ondulatoria para los patrones de líneas que se ven en el experimento de doble rendija. *a*) En el centro de la pantalla las ondas provenientes de cada rendija recorren la misma distancia y están en fase. *b*) A este ángulo θ, la onda inferior recorre una distancia adicional de un número entero de longitud de onda, y las ondas están en fase; a partir del triángulo sombreado, note que la diferencia en trayectoria es igual a d sen θ. *c*) Para este ángulo θ, la onda inferior recorre una distancia adicional igual a media longitud de onda, así que las dos ondas llegan a la pantalla completamente fuera de fase. *d*) Diagrama más detallado que muestra la geometría para los incisos *b*) y *c*).

FIGURA 34–8 A continuación se muestran dos ondas viajeras que experimentan *a*) interferencia constructiva, *b*) interferencia destructiva. (Véase también la sección 15-8).



Para ver cómo se produce un patrón de interferencia sobre la pantalla, consideremos la figura 34-7. Las ondas con longitud de onda λ se muestran entrando a las rendijas S_1 y S_2, que están separadas una distancia d. Las ondas se dispersan en todas direcciones después de pasar a través de las rendijas (figura 34-6), pero sólo se muestran para tres ángulos diferentes θ. En la figura 34-7a se representan las ondas que llegan al centro de la pantalla ($\theta = 0°$). Las ondas provenientes de las dos rendijas recorren la misma distancia, así que están en fase: una cresta de una onda llega al mismo tiempo que una cresta de la otra onda. Por lo tanto, las amplitudes de las dos ondas se suman para formar una amplitud más grande, como se observa en la figura 34-8a. Ésta es **interferencia constructiva**, y en el centro de la pantalla hay una área brillante. La interferencia constructiva también ocurre cuando las trayectorias de los dos rayos difieren por una longitud de onda (o cualquier número entero de longitudes de onda), como se ilustra en la figura 34-7b; también aquí existirá brillo en la pantalla. Pero si un rayo recorre una distancia adicional de media longitud de onda (o $\frac{3}{2}\lambda$, $\frac{5}{2}\lambda$, etcétera), las dos ondas estarán exactamente fuera de fase cuando lleguen a la pantalla: las crestas de una onda llegan al mismo tiempo que los valles de la otra onda, y así se suman para producir amplitud cero (figura 34-8b). Esto es **interferencia destructiva**, y la pantalla es oscura, figura 34-7c. De esta forma, habrá una serie de líneas (o **franjas**) brillantes y oscuras en la pantalla de visualización.

Para determinar con exactitud dónde inciden las líneas brillantes, considere primero que la figura 34-7 está un poco exagerada; en situaciones reales, la distancia d entre las rendijas es muy pequeña en comparación con la distancia ℓ a la pantalla. Por lo tanto, los rayos provenientes de cada rendija para cada caso en esencia serán paralelos, y θ será el ángulo que formen con la horizontal, como se muestra en la figura 34-7d. A partir de los triángulos rectángulos sombreados que se ilustran en las figuras 34-7b y c, se puede ver que la distancia adicional recorrida por el rayo inferior es d sen θ (que se ve más claramente en la figura 34-7d). Ocurrirá interferencia constructiva y una franja brillante aparecerá en la pantalla cuando la *diferencia en trayectoria*, d sen θ, sea igual a un número entero de longitudes de onda:

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots. \qquad \begin{bmatrix}\text{interferencia}\\ \text{constructiva}\\ \text{(brillante)}\end{bmatrix} \quad \textbf{(34–2a)}$$

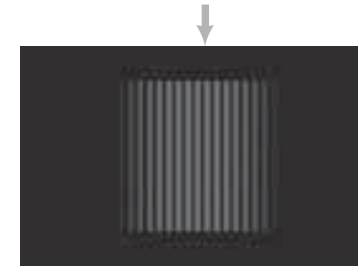
El valor de m se llama **orden** de la franja de interferencia. El primer orden ($m = 1$), por ejemplo, es la primera franja a cada lado de la franja central (que está en $\theta = 0$, $m = 0$). La interferencia destructiva ocurre cuando la diferencia en trayectoria d sen θ es $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, etcétera:

$$d \operatorname{sen}\theta = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots. \qquad \begin{bmatrix}\text{interferencia}\\ \text{destructiva}\\ \text{(oscuro)}\end{bmatrix} \quad \textbf{(34–2b)}$$

Las franjas brillantes son picos o máximos de intensidad de luz; las franjas oscuras son mínimos. La intensidad de las franjas brillantes es mayor para la franja central ($m = 0$) y disminuye para órdenes superiores, como se muestra en la figura 34-9. El ancho de las dos rendijas determina cuánto disminuye la intensidad con el orden creciente.

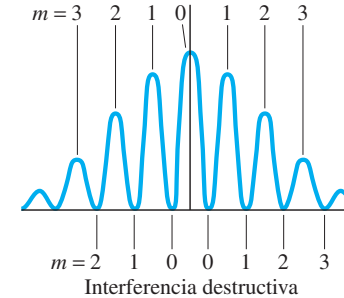
EJEMPLO CONCEPTUAL 34–1 **Líneas de patrón de interferencia.** *a*) En la pantalla de visualización donde ocurren interferencias constructiva y destructiva, ¿habrá un número infinito de puntos o sólo un número finito de puntos? *b*) Los puntos circunvecinos de la interferencia constructiva, ¿están uniformemente espaciados, o el espaciamiento entre ellos no es uniforme?

RESPUESTA *a*) Cuando se observan las ecuaciones 34-2a y b, uno puede sentirse tentado a decir, dado el enunciado $m = 0, 1, 2, \ldots$ que aparece junto a las ecuaciones, que existe un número infinito de puntos de interferencia constructiva y destructiva. Sin embargo, recuerde que sen θ no puede superar 1. Por lo tanto, existe un límite superior a los valores de m que se puede usar en estas ecuaciones. Para la ecuación 34-2a, el valor máximo de m es el entero más cercano en valor, pero menor que d/λ. De manera que existe un número *finito* de puntos de interferencia constructiva y destructiva sin importar qué tan grande sea la pantalla. *b*) El espaciamiento entre puntos circunvecinos de interferencia constructiva o destructiva no es uniforme. El espaciamiento se vuelve mayor conforme θ se hace más grande, y este enunciado es verificable matemáticamente. Para valores pequeños de θ, el espaciamiento casi es uniforme, como verá en el ejemplo 34-2.



Interferencia constructiva

a)



Interferencia destructiva

b)

FIGURA 34–9 *a*) Franjas de interferencia producidas por un experimento de doble rendija y detectadas por película fotográfica colocada en la pantalla de visualización. La flecha marca la franja central. *b*) Gráfica de la intensidad de luz en el patrón de interferencia. También se muestran valores de m para la ecuación 34-2a (interferencia constructiva) y la ecuación 34-2b (interferencia destructiva).

EJEMPLO 34–2 **Espaciamiento de líneas para interferencia de doble rendija.** Una pantalla que contiene dos rendijas separadas 0.100 mm está a 1.20 m de la pantalla de visualización. Luz con longitud de onda $\lambda = 500$ nm incide sobre las rendijas desde una fuente distante. ¿Aproximadamente qué distancia estarán separadas sobre la pantalla las franjas brillantes adyacentes de interferencia?

PLANTEAMIENTO La posición angular de las franjas brillantes (interferencia constructiva) se encuentra con la ecuación 34-2a. La distancia entre las dos primeras franjas (por ejemplo) se encuentra con la ayuda de triángulos rectángulos, como se muestra en la figura 34-10.

SOLUCIÓN Dadas $d = 0.100\,\text{mm} = 1.00 \times 10^{-4}\,\text{m}$, $\lambda = 500 \times 10^{-9}\,\text{m}$, y $\ell = 1.20$ m, la franja de primer orden ($m = 1$) se presenta en un ángulo θ dado por

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(1)(500 \times 10^{-9}\,\text{m})}{1.00 \times 10^{-4}\,\text{m}} = 5.00 \times 10^{-3}.$$

Éste es un ángulo muy pequeño, así que se puede considerar que sen $\theta \approx \theta$, con θ en radianes. La franja de primer orden se presentará a una distancia x_1 arriba del centro de la pantalla (véase la figura 34-10), dada por $x_1/\ell = \tan\theta_1 \approx \theta_1$, de manera que

$$x_1 \approx \ell\theta_1 = (1.20\,\text{m})(5.00 \times 10^{-3}) = 6.00\,\text{mm}.$$

La franja de segundo orden ($m = 2$) se presentará en

$$x_2 \approx \ell\theta_2 = \ell\frac{2\lambda}{d} = 12.0\,\text{mm}$$

arriba del centro, etcétera. Por lo tanto, las franjas de orden inferior están separadas 6.00 mm.

NOTA El espaciamiento entre franjas en esencia es uniforme hasta que la aproximación sen $\theta \approx \theta$ ya no sea válida.

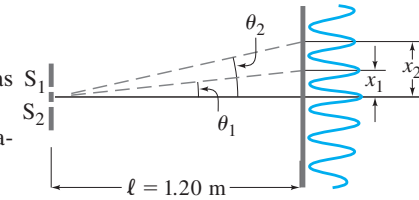


FIGURA 34–10 Ejemplos 34-2 y 34-3. Para ángulos pequeños θ (en radianes), las franjas de interferencia se presentan a un distancia $x = \theta\ell$ por arriba de la franja central ($m = 0$); θ_1 y x_1 son para la franja de primer orden ($m = 1$); θ_2 y x_2 son para $m = 2$.

EJEMPLO CONCEPTUAL 34–3 **Cambio de longitud de onda.** *a*) ¿Qué ocurre con el patrón de interferencia que se representa en la figura 34-10, ejemplo 34-2, si la luz incidente (500 nm) se sustituye por luz con 700 nm de longitud de onda? *b*) ¿Qué ocurre si, en vez de ello, la longitud de onda permanece en 500 nm, pero las rendijas se separan todavía más?

RESPUESTA *a*) Cuando λ aumenta en la ecuación 34-2a pero d permanece igual, entonces el ángulo θ para franjas brillantes aumenta y el patrón de interferencia se dispersa. *b*) Aumentar el espaciamiento de las rendijas d reduce θ para cada orden, de manera que las líneas están más juntas.

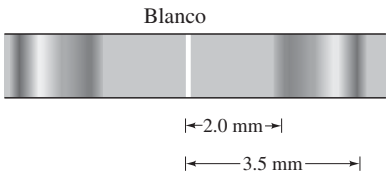
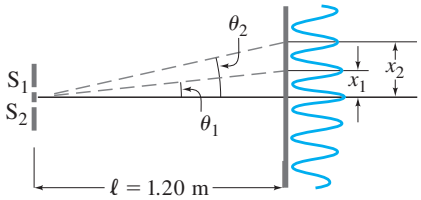


FIGURA 34–11 Las franjas de primer orden son un espectro completo, como un arcoíris. Ejemplo 34-4. (Véase el pliego a color al final del libro).

FIGURA 34–10 (Repetida) Para ángulos pequeños θ (en radianes), las franjas de interferencia se presentan a un distancia $x = \theta\ell$ por arriba de la franja central ($m = 0$); θ_1 y x_1 son para la franja de primer orden ($m = 1$); θ_2 y x_2 son para $m = 2$.



A partir de las ecuaciones 34-2 se puede ver que, excepto para la franja de orden cero en el centro, la posición de las franjas depende de la longitud de onda. En consecuencia, cuando luz blanca incide sobre las dos rendijas, como Young encontró en sus experimentos, la franja central es blanca, pero las franjas de primer orden (o superiores) contienen un espectro de colores parecido a un arcoíris; se encontró que θ era el menor para la luz violeta y el mayor para la roja (figura 34-11). Al medir la posición de estas franjas, Young fue el primero en determinar las longitudes de onda de la luz visible (con las ecuaciones 34-2). Al hacerlo, demostró que lo que distingue físicamente a los diferentes colores es su longitud de onda (o frecuencia), una idea que Grimaldi llevaría más adelante en 1665.

EJEMPLO 34–4 **Longitudes de onda a partir de interferencia de doble rendija.** Luz blanca pasa a través de dos rendijas separadas 0.50 mm, y sobre una pantalla a 2.5 m de distancia se observa un patrón de interferencia. La franja de primer orden recuerda un arcoíris con los colores violeta y rojo en los extremos opuestos. La luz violeta está aproximadamente a 2.0 mm y la roja a 3.5 mm del centro de la franja central blanca (figura 34-11). Estime las longitudes de onda para las luces violeta y roja.

PLANTEAMIENTO Los ángulos para las luces violeta y roja se encuentran a partir de las distancias dadas y del diagrama de la figura 34-10. Luego se emplea la ecuación 34-2a para obtener las longitudes de onda. Puesto que 3.5 mm es mucho menor que 2.5 m, se utiliza la aproximación de ángulo pequeño.

SOLUCIÓN Se emplea la ecuación 34-2a con $m = 1$ y $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$. Así, para la luz violeta, $x = 2.0$ mm, de manera que (véase también la figura 34-10)

$$\lambda = \frac{d \operatorname{sen}\theta}{m} \approx \frac{d\theta}{m} \approx \frac{d}{m}\frac{x}{\ell} = \left(\frac{5.0 \times 10^{-4}\,\text{m}}{1}\right)\left(\frac{2.0 \times 10^{-3}\,\text{m}}{2.5\,\text{m}}\right) = 4.0 \times 10^{-7}\,\text{m},$$

o 400 nm. Para la luz roja, $x = 3.5$ mm, de manera que

$$\lambda = \frac{d}{m}\frac{x}{\ell} = \left(\frac{5.0 \times 10^{-4}\,\text{m}}{1}\right)\left(\frac{3.5 \times 10^{-3}\,\text{m}}{2.5\,\text{m}}\right) = 7.0 \times 10^{-7}\,\text{m} = 700\,\text{nm}.$$

Coherencia

Las dos rendijas en la figura 34-7 actúan como si fueran dos fuentes de radiación. Se les denomina **fuentes coherentes** porque las ondas que salen de ellas tienen la misma longitud de onda y la misma frecuencia, y conservan la misma relación de fase mutua en todo momento. Esto ocurre porque las ondas provienen de una sola fuente a la izquierda de las dos rendijas en la figura 34-7, lo que divide el haz original en dos. Sólo se observa un patrón de interferencia cuando las fuentes son coherentes. Si dos pequeñas bombillas eléctricas sustituyen las dos rendijas, no se vería patrón de interferencia. La luz emitida por una bombilla tendría una fase aleatoria con respecto a la segunda bombilla, y la pantalla estaría iluminada de manera más o menos uniforme. Dos de tales fuentes, cuyas ondas de salida tienen fases que no guardan entre sí una relación fija con el paso del tiempo, se llaman **fuentes incoherentes**.

*34–4 Intensidad en el patrón de interferencia de doble rendija

En la sección 34-3 se vio que el patrón de interferencia producido por la luz coherente de dos rendijas, S_1 y S_2 (figuras 34-7 y 34-9), produce una serie de franjas brillantes y oscuras. Si las dos ondas monocromáticas con longitud de onda λ están en fase en las rendijas, los máximos (puntos brillantes) se presentan a ángulos θ dados por (ecuaciones 34-2)

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda,$$

y los mínimos (puntos oscuros) se presentan cuando

$$d \operatorname{sen}\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda,$$

donde m es un entero ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Ahora se determinará la intensidad de la luz en todos los puntos del patrón suponiendo que, si cualquier rendija estuviera cubierta, la luz que pasa a través de la otra se difractaría lo suficiente para iluminar una gran porción de la pantalla de manera uniforme. La intensidad I de la luz en cualquier punto es proporcional al cuadrado de su amplitud de onda (sección 15-3). Al tratar la luz como una onda electromagnética, I es proporcional al cuadrado del campo eléctrico E (o al campo magnético B, sección 31-8): $I \propto E^2$. El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en cualquier punto P (véase la figura 34-12) será la suma de los vectores de campo eléctrico de las ondas provenientes de cada una de las dos rendijas, $\vec{\mathbf{E}}_1$ y $\vec{\mathbf{E}}_2$. Puesto que $\vec{\mathbf{E}}_1$ y $\vec{\mathbf{E}}_2$ en esencia son paralelos (sobre una pantalla lejana en comparación con la separación de las rendijas), la magnitud del campo eléctrico al ángulo θ (esto es, en el punto P) será

$$E_\theta = E_1 + E_2.$$

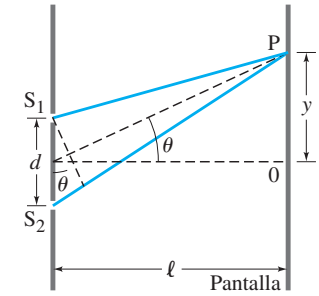


FIGURA 34–12 Determinación de la intensidad en un patrón de interferencia de doble rendija. La figura no está a escala: de hecho, $\ell \gg d$, y los dos rayos en esencia se vuelven paralelos.

Tanto E_1 como E_2 varían de forma sinusoidal con la frecuencia $f = c/\lambda$, pero difieren en fase, dependiendo de sus diferentes distancias recorridas desde las rendijas. El campo eléctrico en P se puede representar entonces para la luz proveniente de cada una de las dos rendijas, con $\omega = 2\pi f$, como

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{10} \operatorname{sen} \omega t \\ E_2 &= E_{20} \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \end{aligned} \qquad \textbf{(34–3)}$$

donde E_{10} y E_{20} son sus respectivas amplitudes y δ es la diferencia de fase. El valor de δ depende del ángulo θ, así que ahora se determinará δ como función de θ.

En el centro de la pantalla (punto 0), $\delta = 0$. Si la diferencia en longitud de trayectoria de P a S_1 y S_2 es $d \operatorname{sen} \theta = \lambda/2$, las dos ondas están exactamente fuera de fase, de manera que $\delta = \pi$ (o 180°). Si $d \operatorname{sen} \theta = \lambda$, las dos ondas difieren en fase por $\delta = 2\pi$. Así, en general, δ se relaciona con θ mediante

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}$$

o

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta. \qquad \textbf{(34–4)}$$

Para determinar $E_\theta = E_1 + E_2$, sume los dos escalares E_1 y E_2 que son funciones seno que difieren por la fase δ. Una forma de determinar la suma de E_1 y E_2 consiste en utilizar un **diagrama de fasores**. (Esta técnica se empleó antes, en el capítulo 30.) Como se muestra en la figura 34-13, se dibuja una flecha de longitud E_{10} para representar la amplitud de E_1 (ecuación 34-3); y la flecha de longitud E_{20}, que se dibuja para formar un ángulo fijo δ con E_{10}, representa la amplitud de E_2. Cuando el diagrama gira a frecuencia angular ω en torno al origen, las proyecciones de E_{10} y E_{20} sobre el eje vertical representan E_1 y E_2 como función del tiempo (véase la ecuación 34-3). Sea $E_{\theta 0}$ la suma[†] "vectorial" de E_{10} y E_{20}; $E_{\theta 0}$ es la amplitud de la suma $E_\theta = E_1 + E_2$, y la proyección de $E_{\theta 0}$ sobre el eje vertical es justo E_θ. Si las dos rendijas proporcionan igual iluminación, de manera que $E_{10} = E_{20} = E_0$, entonces, por *simetría* en la figura 34-13, el ángulo $\phi = \delta/2$, y podemos escribir

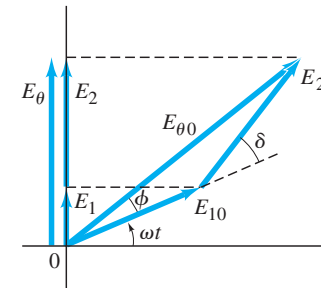


FIGURA 34–13 Diagrama de fasores para un patrón de interferencia de doble rendija.

$$E_\theta = E_{\theta 0} \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right). \qquad \textbf{(34–5a)}$$

En la figura 34-13 también se observa que

$$E_{\theta 0} = 2E_0 \cos \phi = 2E_0 \cos \frac{\delta}{2}. \qquad \textbf{(34–5b)}$$

Al combinar las ecuaciones 34-5a y b, se obtiene

$$E_\theta = 2E_0 \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right), \qquad \textbf{(34–5c)}$$

donde δ está dado por la ecuación 34-4.

[†]No se suman vectores de campo eléctrico reales; en vez de ello, se usa la técnica de "fasores" para sumar las amplitudes, tomando en cuenta la diferencia de fase de las dos ondas.

En realidad no se tiene interés en E_θ como función del tiempo, ya que, para luz visible, la frecuencia (10^{14} a 10^{15} Hz) es demasiado alta para ser apreciable. Se tiene interés en la intensidad promedio, que es proporcional a la amplitud al cuadrado, $E_{\theta 0}^2$. Ahora elimine la palabra "promedio" y sea $I_\theta\,(I_\theta \propto E_\theta^2)$ la intensidad en cualquier punto P a un ángulo θ con la horizontal. Sea I_0 la intensidad en el punto O, el centro de la pantalla, donde $\theta = \delta = 0$, de manera que $I_0 \propto (E_{10} + E_{20})^2 = (2E_0)^2$. Así, la razón I_θ/I_0 es igual a la razón de los cuadrados de las amplitudes del campo eléctrico en estos dos puntos, de manera que

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{E_{\theta 0}^2}{(2E_0)^2} = \cos^2\frac{\delta}{2}$$

donde se usó la ecuación 34-5b. Por ende, la intensidad I_θ en cualquier punto se relaciona con la intensidad máxima en el centro de la pantalla mediante

$$\begin{aligned} I_\theta &= I_0 \cos^2\frac{\delta}{2} \\ &= I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(34–6)}$$

donde δ está dado por la ecuación 34-4. Ésta es la relación que se buscaba.

A partir de la ecuación 34-6 se ve que los máximos se presentan donde $\cos \delta/2 = \pm 1$, que corresponde a $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ De acuerdo con la ecuación 34-4, δ tiene estos valores cuando

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Los mínimos se presentan donde $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, que corresponden a

$$d \operatorname{sen}\theta = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Éstos son los mismos resultados obtenidos en la sección 34-3. Pero ahora se conoce no sólo la posición de máximos y mínimos, sino que, a partir de la ecuación 34-6, es posible determinar la intensidad de todos los puntos.

En la situación habitual, donde la distancia ℓ a la pantalla desde las rendijas es grande en comparación con la separación de las rendijas d ($\ell \gg d$), si sólo se consideran puntos P cuya distancia y desde el centro (punto O) es pequeña en comparación con ℓ ($y \ll \ell$) (véase la figura 34-12), entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\ell}.$$

A partir de esto se deduce que (véase la ecuación 34-4)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{\ell}y.$$

Entonces la ecuación 34-6 se convierte en

$$I_\theta = I_0\left[\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda \ell}\,y\right)\right]^2. \qquad [y \ll \ell,\ d \ll \ell] \quad \textbf{(34–7)}$$

EJERCICIO B ¿Cuáles son los valores para la intensidad I_θ cuando *a*) $y = 0$, *b*) $y = \lambda\ell/4d$ y *c*) $y = \lambda\ell/2d$?

La intensidad I_θ como función de la diferencia de fase δ se grafica en la figura 34-14. En la aproximación de la ecuación 34-7, el eje horizontal también podría ser y, la posición sobre la pantalla.

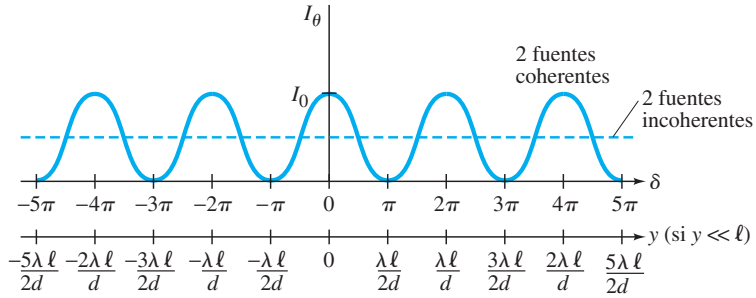


FIGURA 34–14 Intensidad I como función de la diferencia de fase δ y la posición sobre la pantalla y (suponiendo que $y \ll \ell$).

El patrón de intensidad que se expresa en las ecuaciones 34-6 y 34-7, y se grafica en la figura 34-14, presenta una serie de máximos de igual altura y se basa sobre la suposición de que cada rendija (sola) iluminaría la pantalla de manera uniforme. Esto nunca es totalmente cierto, como se verá cuando se estudie la difracción en el siguiente capítulo. Veremos que el máximo central es más intenso y que cada máximo sucesivo a cada lado es un poco menos intenso.

EJEMPLO 34–5 **Intensidad de una antena.** Dos antenas de radio se ubican una cerca de la otra, como se ilustra en la figura 34-15, separadas por una distancia d. Las antenas irradian en fase una con respecto a la otra y emiten ondas de intensidad I_0 con longitud de onda λ. *a*) Calcule la intensidad neta como función de θ para puntos muy lejanos de las antenas. *b*) Para $d = \lambda$, determine I y encuentre en cuáles direcciones I es un máximo y un mínimo. *c*) Repita el inciso *b*) cuando $d = \lambda/2$.

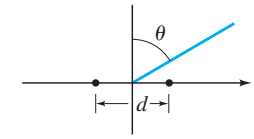


FIGURA 34–15 Ejemplo 34-5. Los dos puntos representan las antenas.

PLANTEAMIENTO Esta configuración es similar al experimento de Young de la doble rendija.

SOLUCIÓN *a*) Los puntos de interferencia constructiva y destructiva todavía están dados por las ecuaciones 34-2a y b, y la intensidad neta como función de θ está dada por la ecuación 34-6. *b*) Sea $d = \lambda$ en la ecuación 34-6, y se encuentra la intensidad,

$$I = I_0 \cos^2(\pi \operatorname{sen} \theta).$$

I es un máximo, igual a I_0, cuando sen $\theta = 0, 1,$ o -1, lo que significa que $\theta = 0, 90^\circ$, 180° y 270°. I es cero cuando sen $\theta = \frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, para lo cual $\theta = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$ y 330°. *c*) Para $d = \lambda/2$, I se maximiza para $\theta = 0$ y 180°, y se minimiza para 90° y 270°.

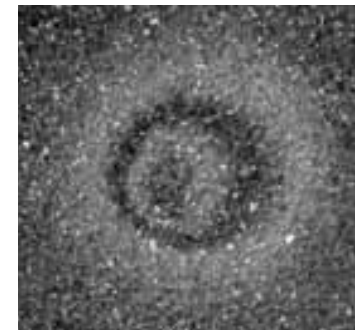
34–5 Interferencia en películas delgadas

La interferencia de la luz da lugar a muchos fenómenos de la vida cotidiana, como los brillantes colores reflejados en las burbujas de jabón y en las delgadas películas de aceite o gasolina en el agua (figura 34-16). En éstos y otros casos, los colores son resultado de interferencia constructiva entre la luz reflejada en las dos superficies de la película delgada.

FIGURA 34–16 Patrones de interferencia de película delgada vistos en *a*) una burbuja de jabón, *b*) una película delgada de agua jabonosa y *c*) una delgada capa de aceite en el pavimento mojado. (Véase el pliego a color al final del libro).

a)

b)



c)

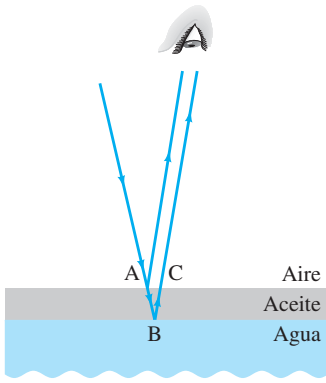


FIGURA 34–17 Luz reflejada en las superficies superior e inferior de una película delgada de aceite que yace sobre agua. Este análisis supone que la luz incide sobre la superficie casi perpendicularmente, pero aquí se ilustra en un ángulo, de manera que se pueda distinguir cada rayo.

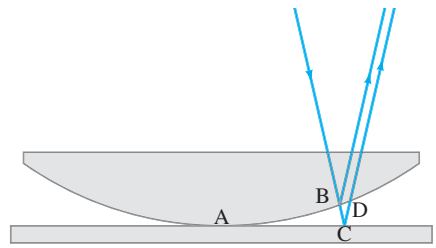
Para ver cómo ocurre esta **interferencia de película delgada,** considere una superficie lisa de agua sobre la que se encuentra una delgada capa uniforme de otra sustancia, como aceite, cuyo índice de refracción es menor que el del agua (en un momento verá por qué se supone esto); véase la figura 34-17. Suponga por un momento que la luz incidente es de una sola longitud de onda. Parte de la luz incidente se refleja en A sobre la superficie superior, y parte de la luz transmitida se refleja en B sobre la superficie inferior. La parte reflejada en la superficie inferior debe recorrer la distancia adicional ABC. Si esta *diferencia de trayectoria* ABC es igual a uno o a un número entero de longitudes de onda en la película (λ_n), las dos ondas llegarán al ojo en fase e interferirán constructivamente. Por lo tanto, la región AC en la superficie de la película parecerá brillante. Pero si ABC es igual a $\frac{1}{2}\lambda_n$, $\frac{3}{2}\lambda_n$, etcétera, las dos ondas estarán exactamente fuera de fase y ocurrirá interferencia destructiva: el área AC sobre la película no mostrará reflexión, será oscura (o mejor dicho, transparente al material oscuro que hay debajo). La longitud de onda λ_n es *la longitud de onda en la película*: $\lambda_n = \lambda/n$, donde n es el índice de refracción en la película y λ es la longitud de onda en el vacío. Véase la ecuación 34-1.

Cuando sobre tal película incide luz blanca, la diferencia de trayectoria ABC será igual a λ_n (o $m\lambda_n$, con m = entero) sólo para una longitud de onda en un ángulo de visión dado. El color que corresponde a λ (λ en el aire) se verá muy brillante. Para la luz que se ve en un ángulo ligeramente diferente, la diferencia de trayectoria ABC será más larga o más corta, y un color diferente experimentará interferencia constructiva. Por ende, en el caso de una fuente extendida (no puntual) que emite luz blanca, se verá una serie de colores brillantes uno junto a otro. Las variaciones en grosor de la película también alterarán la diferencia de trayectoria ABC y, por consiguiente, afectarán el color de la luz que se refleje con más intensidad.

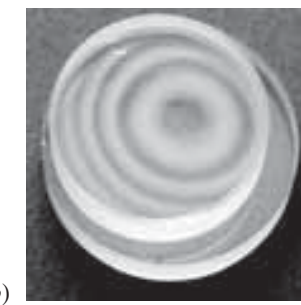
EJERCICIO C Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 900, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizá usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Cuando una superficie curva de vidrio se pone en contacto con una superficie plana de vidrio (figura 34-18), se observa una serie de anillos concéntricos cuando se iluminan desde arriba con luz blanca (como se muestra) o con luz monocromática. A éstos se les llama **anillos de Newton**[†] y se deben a la interferencia entre las ondas reflejadas por las superficies superior e inferior de la muy delgada *capa de aire* entre las dos piezas de vidrio. Puesto que esta capa (que es equivalente a una película delgada) aumenta en anchura desde el punto de contacto central y hacia fuera, hacia los bordes, la longitud de la trayectoria adicional para el rayo inferior (igual a BCD) varía; donde es igual a $0, \frac{1}{2}\lambda, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda$, etcétera, se produce interferencia constructiva y destructiva; y esto origina los brillantes círculos coloridos que se aprecian en la figura 34-18b (véase el pliego a color al final del libro). El color que se ve en un radio dado corresponde a interferencia constructiva; en ese radio, otros colores interfieren parcial o totalmente de manera destructiva. (Si se usa luz monocromática, los anillos son alternativamente brillantes y oscuros).

[†]Aunque Newton dio una descripción detallada de ellos, su contemporáneo Robert Hooke fue quien los observó y describió por primera vez.



a)



b)

FIGURA 34–18 Anillos de Newton. *a*) Los rayos de luz reflejados en las superficies superior e inferior de la delgada capa de aire pueden interferir. *b*) Fotografía de patrones de interferencia empleando luz blanca. (Véase el pliego a color al final del libro).

El punto de contacto de las dos superficies de vidrio (A en la figura 34-18a) es oscuro en la figura 34-18b. Puesto que aquí la diferencia en trayectoria es cero, el análisis anterior sugeriría que las ondas reflejadas en cada superficie están en fase y, por consiguiente, esta área central debe ser brillante; sin embargo, es oscura, lo que indica que algo más sucede aquí: las dos ondas deben estar completamente fuera de fase. Esto ocurre si una de las ondas, en la reflexión, se voltea: una cresta se convierte en valle; véase la figura 34-19. Se dice que la onda reflejada experimenta un cambio de fase de 180°, o de medio ciclo de onda. De hecho, éste y otros experimentos revelan que, a incidencia normal,

un haz de luz reflejado por un material con índice de refracción mayor que el del material en el que viaja, cambia de fase por 180° o $\frac{1}{2}$ ciclo;

véase la figura 34-19. Este cambio de fase actúa justo como una diferencia de trayectoria de $\frac{1}{2}\lambda$. Si el índice de refracción del material que refleja es menor que el del material donde viaja la luz, no ocurre cambio de fase.[†]

Por lo tanto, la onda reflejada por la superficie curva arriba de la capa de aire en la figura 34-18a no experimenta cambio de fase. Pero la onda reflejada en la superficie inferior, donde el haz en el aire incide sobre el vidrio, experimenta un cambio de fase de $\frac{1}{2}$ ciclo, equivalente a una diferencia de trayectoria de $\frac{1}{2}\lambda$. En consecuencia, los dos rayos reflejados cerca del punto de contacto A de las dos superficies de vidrio (donde la capa de aire tiende a grosor cero) estará medio ciclo (o 180°) fuera de fase, y se producirá una mancha oscura. Otros anillos coloridos brillantes se presentarán cuando la diferencia de trayectoria sea de $\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda$, etcétera, porque el cambio de fase en una superficie efectivamente suma una diferencia de trayectoria de $\frac{1}{2}\lambda\,(=\frac{1}{2}\text{ciclo})$. (Si se usa luz monocromática, los anillos de Newton brillantes estarán separados por bandas oscuras que se presentan cuando la diferencia de trayectoria BCD en la figura 34-18a es igual a un número entero de longitudes de onda).

Regrese por un momento a la figura 34-17. La luz que se refleja en ambas interfaces, aire-aceite y aceite-agua, experimentó un cambio de fase de 180° equivalente a una diferencia de trayectoria de $\frac{1}{2}\lambda$, pues se supuso que $n_{\text{agua}} > n_{\text{aceite}} > n_{\text{aire}}$; como los cambios de fase fueron iguales, no afectaron el análisis.

EJEMPLO 34–6 **Película delgada de aire con forma de cuña.** Un alambre muy fino, de 7.35×10^{-3} mm de diámetro, se coloca entre dos placas planas de vidrio, como en la figura 34-20a. Luz, cuya longitud de onda en el aire es de 600 nm, incide (y se ve) en forma perpendicular a las placas, y se aprecia una serie de bandas brillantes y oscuras (figura 34-20b). ¿Cuántas bandas claras y oscuras habrá en este caso? ¿El área junto al alambre será brillante u oscura?

PLANTEAMIENTO Es necesario considerar dos efectos: **1.** las diferencias de trayectoria para los rayos que se reflejan en las dos superficies cercanas (por la delgada cuña de aire entre las dos placas de vidrio) y **2.** el cambio de fase de $\frac{1}{2}$ ciclo en la superficie inferior (punto E en la figura 34-20a), donde los rayos en el aire pueden entrar al vidrio. Debido al cambio de fase en la superficie inferior, habrá una banda oscura (sin reflexión) cuando la diferencia de trayectoria sea 0, λ, 2λ, 3λ, etcétera. Puesto que los rayos de luz son perpendiculares a las placas, la longitud de la trayectoria adicional es igual a $2t$, donde t es el grosor de la capa de aire en cualquier punto.

SOLUCIÓN Las bandas oscuras se presentarán donde

$$2t = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Las bandas brillantes se presentan cuando $2t = (m + \frac{1}{2})\lambda$, donde m es entero. En la posición del alambre, $t = 7.35 \times 10^{-6}$ m. En este punto habrá $2t/\lambda = (2)(7.35 \times 10^{-6}\,\text{m})/(6.00 \times 10^{-7}\,\text{m}) = 24.5$ longitudes de onda. Esto es un "entero y medio", así que el área junto al alambre será brillante. Habrá un total de 25 líneas oscuras a lo largo de las placas, lo que corresponde a longitudes de trayectoria de 0λ, 1λ, 2λ, 3λ,..., 24λ, incluida la del punto de contacto A ($m = 0$). Entre ellas, habrá 24 líneas brillantes más la del extremo, es decir, 25.

NOTA Las bandas brillantes y oscuras serán rectas sólo si las placas de vidrio son extremadamente planas. Si no lo son, el patrón es disparejo, como en la figura 34-20c. Así, se tiene una forma muy precisa de probar si una superficie de vidrio es plana. Las superficies de las lentes esféricas se pueden probar con precisión colocando la lente sobre una superficie plana de vidrio y observando si los anillos de Newton (figura 34-18b) son círculos perfectos.

[†]Este resultado puede deducirse de las ecuaciones de Maxwell. Esto corresponde a la reflexión de una onda que viaja a lo largo de una cuerda cuando llega al extremo; como se vio en la figura 15-18, si el extremo está amarrado, la onda cambia de fase y el pulso se invierte, pero si el extremo está libre, no ocurre cambio de fase.

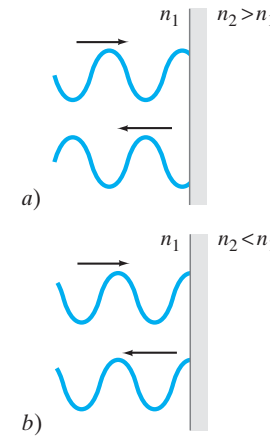
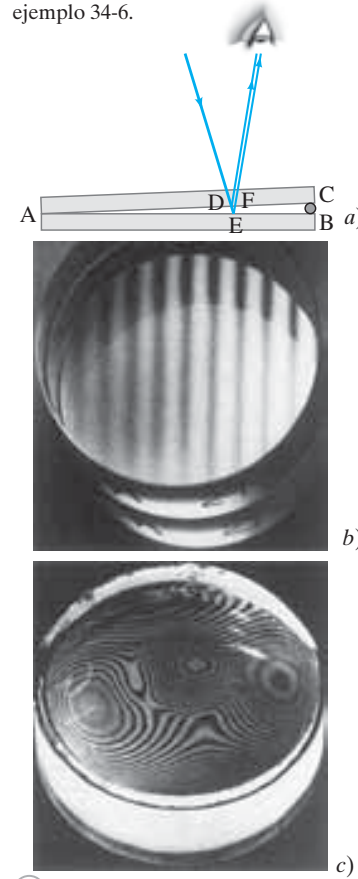


FIGURA 34–19 *a*) El rayo reflejado cambia de fase en 180º o $\frac{1}{2}$ ciclo, si $n_2 > n_1$, pero *b*) no cambia si $n_2 < n_1$.

FIGURA 34–20 *a*) Los rayos de luz reflejados en las superficies superior e inferior de una delgada cuña de aire interfieren para producir bandas brillantes y oscuras. *b*) Patrón que se observa cuando placas de vidrio son ópticamente planas; *c*) patrón cuando las placas no son tan planas. Véase el ejemplo 34-6.



FÍSICA APLICADA

Comprobación de la naturaleza plana de un vidrio

Si la cuña entre las dos placas de vidrio del ejemplo 34-6 está llena con alguna sustancia transparente distinta al aire —por ejemplo, agua—, el patrón se desplaza porque cambia la longitud de onda de la luz. En un material donde el índice de refracción es n, la longitud de onda es $\lambda_n = \lambda/n$, donde λ es la longitud de onda en el vacío (ecuación 34-1). Por ejemplo, si la delgada cuña del ejemplo 34-6 estuviera llena con agua, entonces $\lambda_n = 600\text{ nm}/1.33 = 450\text{ nm}$; en vez de 25 líneas oscuras, habría 33.

Cuando luz blanca (en lugar de luz monocromática) incide sobre la delgada cuña de aire de las figuras 34-18a o 34-20a, se ve una serie de franjas coloridas porque la interferencia constructiva ocurre para diferentes longitudes de onda en la luz reflejada en diferentes grosores a lo largo de la cuña.

Una burbuja de jabón (figura 34-16a y fotografía al inicio del capítulo) es un delgado cascarón (o película) esférico con aire en su interior. Las variaciones en grosor de la película de una burbuja de jabón dan lugar a brillantes colores reflejados en la burbuja de jabón. (Hay aire en ambos lados de la película de la burbuja). Variaciones similares en el grosor de la película producen los brillantes colores que se reflejan en una delgada capa de aceite o gasolina sobre un charco o lago (figura 34-16c). El ángulo de visión también determina cuáles longitudes de onda parecen más brillantes.

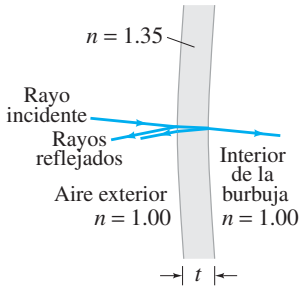


FIGURA 34–21 Ejemplo 34-7. Los rayos incidente y reflejado se suponen perpendiculares a la superficie de la burbuja. Se ilustran con un ligero ángulo para poder distinguirlos.

EJEMPLO 34–7 **Grosor de la película de una burbuja de jabón.** Una burbuja de jabón parece verde ($\lambda = 540$ nm) en el punto sobre su superficie frontal más cercano al observador. ¿Cuál es el grosor más pequeño que podría tener la película de la burbuja de jabón? Suponga que $n = 1.35$.

PLANTEAMIENTO Suponga que la luz se refleja perpendicularmente desde el punto sobre una superficie esférica que se encuentra más cercano al observador (figura 34-21). Los rayos de luz también se reflejan en la superficie interior de la película de la burbuja de jabón, como se muestra. La diferencia de trayectoria de estos dos rayos reflejados es $2t$, donde t es el grosor de la película de jabón. La luz reflejada en la primera superficie (exterior) experimenta un cambio de fase de 180° (el índice de refracción del jabón es mayor que el del aire), mientras que la reflexión en la segunda superficie (interior) no cambia. Para determinar el grosor t para una máxima interferencia, se debe usar la longitud de onda de la luz en el jabón ($n = 1.35$).

SOLUCIÓN El cambio de fase de 180° sólo en una superficie es equivalente a una diferencia de trayectoria de $\frac{1}{2}\lambda$ Por lo tanto, la luz verde es brillante cuando la diferencia de trayectoria mínima es igual a $\frac{1}{2}\lambda_n$. En consecuencia, $2t = \lambda/2n$, de manera que

$$t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{(540\text{ nm})}{(4)(1.35)} = 100\text{ nm}.$$

Éste es el menor grosor; pero es más probable que se vea el color verde en el *siguiente* grosor que da interferencia constructiva, $2t = 3\lambda/2n$, porque otros colores se cancelarían más plenamente por interferencia destructiva. El grosor más probable es $3\lambda/4n = 300$ nm, o incluso $5\lambda/4n = 500$ nm. Advierta que el verde se ve en el aire, de manera que $\lambda = 540$ nm (no λ/n).

⚠ CUIDADO

Una fórmula no es suficiente: también hay que comprobar los cambios de fase en las superficies

*Colores en una película de jabón delgada

FIGURA 34–16b (Repetida). (Véase el pliego a color al final del libro).

La delgada película de agua jabonosa que se aprecia en la figura 34-16b (y se repite aquí) estuvo en posición vertical durante mucho tiempo, de manera que la gravedad llevó mucha del agua jabonosa hacia el fondo. La sección superior es tan delgada (quizá de 30 nm de grosor) que la luz que se refleja en las superficies frontal y posterior casi no tiene diferencia de trayectoria. Por ende, el cambio de fase de 180º en la superficie frontal asegura que las dos ondas reflejadas estén 180º fuera de fase para todas las longitudes de onda de la luz visible. La luz blanca incidente sobre esta película delgada no se refleja en la parte superior de la película. Por lo tanto, la parte superior **es** transparente y permite distinguir el fondo negro.

Bajo el área negra en la parte superior hay una delgada línea azul, y luego una banda blanca. El grosor de la película es tal vez de 75 a 100 nm, de manera que la luz con longitud de onda más corta (azul) comienza a interferir parcialmente de manera constructiva; pero justo abajo, donde el grosor es ligeramente mayor (100 nm), la longitud de la trayectoria está razonablemente cerca de $\lambda/2$ para gran parte del espectro y se ve blanco o plateado. (¿Por qué? Recuerde que el rojo comienza en 600 nm en el aire; así que la mayoría de los colores en el espectro se encuentran entre 450 nm y 600 nm en el aire; pero en el agua las longitudes de onda son $n = 1.33$ veces más pequeñas, de 340 nm a 450 nm, de manera que un grosor de 100 nm corresponde a una longitud de trayectoria de 200 nm, no muy lejos de $\lambda/2$ para la mayoría de los colores). Inmediatamente abajo de la banda blanca se ve una banda café (de alrededor de 200 nm de grosor) donde las longitudes de onda seleccionadas (no todas) están cerca de ser exactamente λ, y esos colores interfieren de manera destructiva dejando sólo unos cuantos colores para interferir parcialmente de manera constructiva, lo que produce un café turbio.

Más abajo, con grosor creciente t, una longitud de trayectoria $2t = 510$ nm corresponde muy bien a $\frac{3}{2}\lambda$ para azul, pero no para otros colores, de manera que se ve azul (diferencia de trayectoria $\frac{3}{2}\lambda$ más cambio de fase $\frac{1}{2}\lambda$ interferencia constructiva). Otros colores experimentan interferencia constructiva (a $\frac{3}{2}\lambda$ y luego a $\frac{5}{2}\lambda$) a grosores todavía mayores, así que se ve una serie de colores separados, algo parecido a un arcoíris.

En la burbuja de jabón de la fotografía de inicio del capítulo (p. 900), ocurren cosas similares: en la parte superior (donde la película es más delgada) se ve negro y luego blanco plateado, tal como dentro del aro que se ilustra en la figura 34-16b. Ahora examine la película de aceite sobre pavimento mojado que se observa en la figura 34-16c (repetida aquí); la película de aceite es más gruesa en el centro y se adelgaza hacia los bordes. Note el blanquecino anillo exterior donde la mayoría de los colores interfieren constructivamente, lo que sugeriría un grosor del orden de 100 nm, como se explicó antes para el caso de la banda blanca en la película de jabón. Más allá de la banda blanca exterior de la película de aceite, figura 34-16c, todavía hay algo de aceite, pero la película es tan delgada que la luz que se refleja en las superficies superior e inferior interfiere de manera destructiva, lo que permite ver a través de esta muy delgada película de aceite.

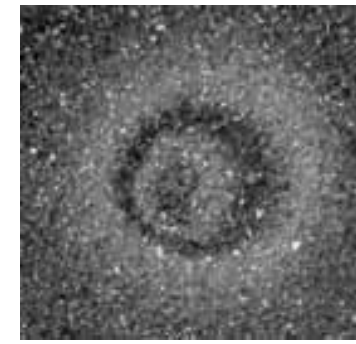


FIGURA 34–16c (Repetida). (Véase el pliego a color al final del libro).

Recubrimiento de lentes

FÍSICA APLICADA
Recubrimiento de lentes

Una importante aplicación de la interferencia de película delgada es el recubrimiento de vidrio para volverlo "no reflector", en particular para fabricar lentes. Una superficie de vidrio refleja alrededor del 4% de la luz que incide sobre ella. Las cámaras, microscopios y otros dispositivos ópticos de buena calidad pueden contener de seis a diez lentes delgadas. La reflexión en todas estas superficies puede reducir considerablemente el nivel de luz, y las reflexiones múltiples producen un fondo brumoso que reduce la calidad de la imagen. Al reducir la reflexión, aumenta la transmisión. Un recubrimiento muy delgado sobre las superficies de las lentes permite reducir las reflexiones de manera considerable. El grosor de la película se elige de manera que la luz (al menos para una longitud de onda) que se refleja en las superficies anterior y posterior de la película interfiera destructivamente. La cantidad de reflexión en una frontera depende de la diferencia en el índice de refracción entre los dos materiales. De manera ideal, el material de recubrimiento debe tener un índice de refracción que sea la media geométrica $\left(=\sqrt{n_1 n_2}\right)$ de los índices del aire y el vidrio, de manera que la cantidad de reflexión en cada superficie sea más o menos igual. Entonces la interferencia destructiva puede ocurrir casi por completo para una longitud de onda particular, dependiendo del grosor del recubrimiento. Las longitudes de onda cercanas interferirán destructivamente, al menos en parte, pero un solo recubrimiento no puede eliminar las reflexiones para todas las longitudes de onda. No obstante, un solo recubrimiento permite reducir la reflexión total del 4 al 1% de la luz incidente. Con frecuencia, el recubrimiento se diseña para eliminar el centro del espectro reflejado (alrededor de 550 nm). Los extremos del espectro (rojo y violeta) no se reducirán tanto. Puesto que una mezcla de rojo y violeta produce púrpura, la luz que se ve reflejada en tales lentes recubiertas es púrpura (figura 34-22, véase el pliego a color al final del libro). Las lentes que contienen dos o tres recubrimientos separados reducen más efectivamente un rango más amplio de longitudes de onda que se reflejan.

FIGURA 34–22 Lente recubierta. Note el color de la luz reflejada de la superficie frontal de la lente. (Véase el pliego a color al final del libro).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Interferencia

1. Los **efectos de interferencia** dependen de la llegada simultánea de dos o más ondas al mismo punto en el espacio.
2. La **interferencia constructiva** ocurre cuando las ondas llegan en fase una con la otra: una cresta de una onda llega al mismo tiempo que la cresta de la otra onda. Entonces las amplitudes de las ondas se suman para formar una amplitud más grande. La interferencia constructiva también ocurre cuando la diferencia de trayectoria es exactamente una longitud de onda completa o cualquier múltiplo entero de una longitud de onda completa: $1\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$
3. La **interferencia destructiva** ocurre cuando una cresta de una onda llega al mismo tiempo que un valle de la otra onda. Las amplitudes se suman, pero son de signo opuesto, así que la amplitud total se reduce a cero si las dos amplitudes son iguales. La interferencia destructiva ocurre siempre que la diferencia de fase es la mitad de un ciclo de onda, o la diferencia de trayectoria es medio número entero de longitudes de onda. Por lo tanto, la amplitud total será cero si dos ondas idénticas llegan media longitud de onda fuera de fase, o $\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ fuera de fase, donde m es entero.
4. Para interferencia de película delgada, ocurre un **corrimiento de fase** adicional de media longitud de onda cuando la luz **se refleja** en un medio ópticamente más denso (al ir de un medio de menor índice de refracción a uno de mayor índice de refracción).

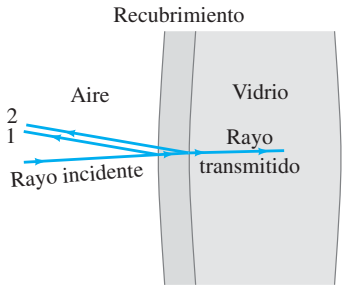


FIGURA 34–23 Ejemplo 34-8. El rayo de luz incidente se refleja parcialmente en la superficie frontal del recubrimiento de una lente (rayo 1) y de nuevo se refleja parcialmente en la superficie posterior del recubrimiento (rayo 2), y la mayor parte de la energía pasa al vidrio como el rayo transmitido.

EJEMPLO 34–8 **Recubrimiento no reflector.** ¿Cuál es el grosor de un recubrimiento óptico de MgF_2 cuyo índice de refracción es $n = 1.38$ y está diseñado para eliminar la luz reflejada a longitudes de onda (en aire) de alrededor de 550 nm cuando incide de manera normal sobre vidrio para el que $n = 1.50$?

PLANTEAMIENTO Siga explícitamente el procedimiento que se describe en el recuadro de Resolución de problemas de la página 913.

SOLUCIÓN

1. **Efectos de interferencia.** Considere dos rayos que se reflejan en las superficies frontal y posterior del recubrimiento de la lente, como se muestra en la figura 34-23. Los rayos se dibujan no muy perpendiculares a la lente, de manera que se puede distinguir cada uno de ellos. Estos dos rayos reflejados interferirán entre sí.
2. **Interferencia constructiva.** Se quiere eliminar la luz reflejada, así que no se considera interferencia constructiva.
3. **Interferencia destructiva.** Para eliminar la reflexión, se necesita que los rayos reflejados 1 y 2 estén $\frac{1}{2}$ ciclo fuera de fase entre sí, para que interfieran de manera destructiva. La diferencia de fase se debe a la diferencia de trayectoria $2t$ que recorre el rayo 2, al igual que cualquier cambio de fase en cualquiera de los rayos debida a reflexión.
4. **Reflexión del corrimiento de fase.** Los rayos 1 y 2 experimentan *ambos* un cambio de fase de $\frac{1}{2}$ ciclo cuando se reflejan en las superficies anterior y posterior del recubrimiento, respectivamente (en ambas superficies aumenta el índice de refracción). Por lo tanto, no hay cambio neto en la fase que se deba a las reflexiones. La diferencia de fase neta se deberá a la trayectoria adicional $2t$ que sigue el rayo 2 en el recubrimiento, donde $n = 1.38$. Se desea que $2t$ sea igual a $\frac{1}{2}\lambda_n$ de manera que ocurre interferencia destructiva, donde $\lambda_n = \lambda/n$ es la longitud de onda del recubrimiento. Con $2t = \lambda_n/2 = \lambda/2n$, entonces

$$t = \frac{\lambda_n}{4} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{(550\text{ nm})}{(4)(1.38)} = 99.6\text{ nm}.$$

NOTA Podría establecerse que $2t = (m + \frac{1}{2})\lambda_n$, donde m es entero. Generalmente se elige el grosor más pequeño ($m = 0$) porque la interferencia destructiva ocurrirá sobre el ángulo más ancho.

NOTA La interferencia destructiva completa sólo ocurre para la longitud de onda dada de la luz visible. Las longitudes de onda más largas y más cortas sólo tendrán cancelación parcial.

*34–6 Interferómetro de Michelson

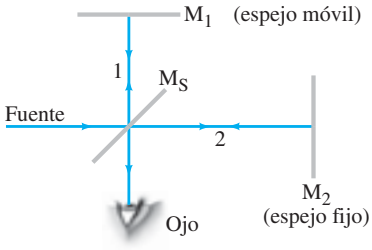


FIGURA 34–24 Interferómetro de Michelson.

Un instrumento de gran utilidad que implica la interferencia de ondas es el **interferómetro de Michelson** (figura 34-24)[†], que inventó el estadounidense Albert A. Michelson (sección 31-7). Se tiene luz monocromática, proveniente de un solo punto en una fuente extendida, que incide sobre un espejo semiplateado M_S. Este espejo M_S **divisor de haz** tiene una delgada capa de plata que refleja sólo la mitad de la luz que incide sobre él, de manera que la mitad del haz pasa a través de un espejo fijo M_2, donde se refleja de regreso. La otra mitad la refleja M_S hacia un espejo M_1 que es móvil (mediante un tornillo de rosca fina), donde también se refleja de regreso. A su retorno, parte del haz 1 pasa a través de M_S y llega al ojo; y parte del haz 2, en su regreso, se refleja en M_S hacia el ojo. Si las dos longitudes de trayectoria son idénticas, los dos haces coherentes que entran al ojo interfieren de manera constructiva y se verá brillo. Si el espejo móvil se mueve una distancia $\lambda/4$, un haz recorrerá una distancia adicional igual a $\lambda/2$ (pues recorre de ida y vuelta la distancia $\lambda/4$). En este caso, los dos haces interferirán destructivamente y se verá oscuridad. Conforme M_1 se mueva más lejos, volverá el brillo (cuando la diferencia de trayectoria sea λ), luego oscuridad, y así sucesivamente.

Con un interferómetro se pueden realizar mediciones de longitud muy precisas. El movimiento del espejo M_1 por sólo $\frac{1}{4}\lambda$ produce una clara diferencia ente brillo y oscuridad. Para $\lambda = 400$ nm, esto significa una precisión de 100 nm, ¡o 10^{-4} mm! Si el espejo M_1 se inclina muy ligeramente, en vez de una serie de líneas o "franjas" brillantes y oscuras, se ven manchas brillantes u oscuras. Al contar el número de franjas (o fracciones de las mismas) que pasan por una línea de referencia, es posible realizar mediciones de longitud extremadamente precisas.

[†]Existen otros tipos de interferómetro, pero el de Michelson es el más conocido.

*34–7 Intensidad luminosa

La *intensidad* de la luz, como para cualquier onda electromagnética, se mide mediante el vector de Poynting en W/m^2, y la salida de potencia total de una fuente se mide en watts (el *flujo radiante*). Pero para medir la sensación visual a la que se llama brillo, *sólo* se debe considerar el espectro visible, así como la sensibilidad del ojo a diferentes longitudes de onda: el ojo es más sensible en la porción central del espectro, 550 nm (correspondiente al verde).

Estos factores se toman en cuenta en la cantidad **flujo luminoso**, F_ℓ, cuya unidad es el **lumen** (lm). Un lumen es equivalente a $\frac{1}{683}$ watts de luz de 555 nm.

Como el flujo luminoso de una fuente tal vez no sea uniforme en todas direcciones, la **intensidad luminosa** I_ℓ se define como el flujo luminoso por unidad de ángulo sólido[†] (estereorradián, sr). Su unidad es la **candela** (cd), donde 1 cd = 1 lm/sr, y es una de las siete cantidades básicas del SI. (Véase la sección 1-4 y la tabla 1-5).

La **iluminancia**, E_ℓ, es el flujo luminoso que incide sobre una superficie por unidad de área de la superficie: $E_\ell = F_\ell/A$. Su unidad es el lumen por metro cuadrado (lm/m^2) y es una medida de la iluminación que incide sobre una superficie.[‡]

EJEMPLO 34–9 **Iluminancia de una bombilla.** El brillo de un tipo particular de bombilla de 100 W tiene un valor nominal de 1700 lm. Determine *a*) la intensidad luminosa y *b*) la iluminancia a una distancia de 2.0 m.

APPROACH Suponga que la salida de luz es uniforme en todas direcciones.

SOLUCIÓN *a*) Una esfera completa corresponde a 4π sr. Por lo tanto, $I_\ell = 1700$ lm/4π sr = 135 cd. No depende de la distancia. *b*) A $d = 2.0$ m de la fuente, el flujo luminoso por unidad de área es

$$E_\ell = \frac{F_\ell}{4\pi d^2} = \frac{1700\ \text{lm}}{(4\pi)(2.0\ \text{m})^2} = 34\ \text{lm/m}^2.$$

La iluminancia disminuye como el cuadrado de la distancia.

[†]Un ángulo sólido es una clase de ángulo tridimensional y se mide en estereorradianes. Piense en un ángulo sólido que comienza en un punto e intercepta una área ΔA sobre una esfera de radio r que rodea ese punto. El ángulo sólido tiene magnitud de $\Delta A/r^2$ estereorradianes. Un ángulo sólido que incluye todo el espacio intercepta el área total de la superficie de la esfera, $4\pi r^2$, y por ende tiene magnitud $4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ estereorradianes. (Compare con un ángulo normal, para el cual un círculo completo subtiende $2p$ radianes).

[‡]La unidad inglesa es el pie-candela, o lumen por pie cuadrado.

Resumen

La teoría ondulatoria de la luz recibe enorme apoyo por las observaciones de que la luz experimenta **interferencia** y **difracción**. La teoría ondulatoria también explica la refracción de la luz y el hecho de que la luz viaja más lentamente en sólidos y líquidos transparentes de lo que lo hace en el aire.

Un auxiliar para predecir el comportamiento ondulatorio es el **principio de Huygens**, el cual afirma que todo punto sobre un frente de onda se puede considerar como una fuente de pequeñas onditas que se dispersan hacia delante con la rapidez de la onda misma. El nuevo frente de onda es la "envoltura" (la tangente común) de todas las onditas.

La longitud de onda de la luz en un medio con índice de refracción n es

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}, \qquad \textbf{(34–1)}$$

donde λ es la longitud de onda en el vacío; la frecuencia no cambia.

El experimento de Young de la doble rendija demostró claramente la interferencia de la luz. Las manchas brillantes que se observaron en el patrón de interferencia se explican como interferencia constructiva entre los haces provenientes a través de las dos rendijas, donde los haces difieren en longitud de trayectoria por un número entero de longitudes de onda. Las áreas oscuras intermedias se deben a interferencia destructiva cuando la longitudes de trayectoria difieren por $\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda$, etcétera. Los ángulos θ a los que ocurre **interferencia constructiva** están dados por

$$\text{sen}\,\theta = m\frac{\lambda}{d}, \qquad \textbf{(34–2a)}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz, d es la separación de las rendijas y m es un entero (0, 1, 2,…). La **interferencia destructiva** ocurre en ángulos θ dados por

$$\text{sen}\,\theta = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}, \qquad \textbf{(34–2b)}$$

donde m es un entero (0, 1, 2,…).

La intensidad de la luz I_θ en cualquier punto en un patrón de interferencia de doble rendija se calcula con un diagrama de fasores, el cual predice que

$$I_\theta = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \qquad \textbf{(34–6)}$$

donde I_0 es la intensidad en $\theta = 0$ y el ángulo de fase δ es

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \qquad \textbf{(34–4)}$$

Dos fuentes de luz son perfectamente **coherentes** si las ondas que salen de ellas son de la misma frecuencia individual y mantienen la misma relación de fase en todo momento. Si las ondas de luz provenientes de las dos fuentes tienen una fase aleatoria una con respecto a las otras a lo largo del tiempo (como en el caso de dos bombillas incandescentes), las dos fuentes son **incoherentes**.

La luz que se refleja en las superficies anterior y posterior de una película delgada de material transparente pueden interferir constructiva o destructivamente, dependiendo de la diferencia de trayectoria. Un cambio de fase de 180° o $\frac{1}{2}\lambda$ ocurre cuando la luz se refleja en una superficie donde el índice de refracción aumenta. Tal **interferencia de película delgada** tiene muchas aplicaciones prácticas, como los recubrimientos de lentes y el uso de anillos de Newton para comprobar la uniformidad de las superficies de vidrio.

Preguntas

1. ¿El principio de Huygens se aplica a ondas sonoras? ¿A ondas en el agua? Explique.
2. ¿Cuál es la evidencia de que la luz es energía?
3. ¿Por qué a veces la luz se describe como constituida por rayos y a veces por ondas?
4. Los sonidos se pueden escuchar alrededor de las esquinas, pero es imposible ver alrededor de las esquinas, aunque tanto el sonido como la luz son ondas. Explique la diferencia.
5. ¿La longitud de onda de la luz se puede determinar a partir de mediciones de reflexión o refracción?
6. Dos rayos de luz proveniente de la misma fuente interfieren destructivamente si las longitudes de sus trayectorias difieren, ¿por cuánto?
7. Luz monocromática roja incide sobre una doble rendija y el patrón de interferencia se visualiza sobre una pantalla a cierta distancia. Explique cómo cambiaría el patrón de franjas si la fuente de luz roja se sustituye por una fuente de luz azul.
8. Si el experimento de Young de la doble rendija se realiza bajo el agua, ¿cómo cambiaría el patrón de franjas?
9. Compare un experimento de doble rendija para ondas sonoras con el de ondas de luz. Discuta las semejanzas y diferencias.
10. Suponga que luz blanca incide sobre las dos rendijas de la figura 34-7, pero una rendija está cubierta con un filtro rojo (700 nm) y la otra con un filtro azul (450 nm). Describa el patrón sobre la pantalla.
11. ¿Por qué la luz proveniente de los faros de un automóvil distante no produce un patrón de interferencia?
12. ¿Por qué las franjas de interferencia son apreciables sólo para una película *delgada* como una burbuja de jabón y no para un grueso trozo de vidrio, por ejemplo?
13. ¿Por qué los anillos de Newton (figura 34-18) están más juntos a mayor distancia del centro?
14. Algunos lentes recubiertos tienen un tono amarillo verdoso cuando se ven mediante una luz reflejada. El recubrimiento está diseñado para eliminarlo por completo. ¿Cuáles longitudes de onda elimina?
15. Una gota de aceite sobre un charco parece brillar en sus bordes, donde su grosor es mucho menor que las longitudes de onda de la luz visible. ¿Qué puede decir acerca del índice de refracción del aceite, en comparación con el del agua?

Problemas

34–2 Principio de Huygens

1. (II) Deduzca la ley de reflexión (a saber, que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión en una superficie plana) a partir del principio de Huygens para ondas.

34–3 Interferencia de doble rendija

2. (I) Luz monocromática que incide sobre dos rendijas separadas 0.018 mm produce la franja brillante de quinto orden a un ángulo de 9.8°. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz utilizada?
3. (I) La franja brillante de tercer orden de luz de 610 nm se observa a un ángulo de 28° cuando la luz incide sobre dos rendijas estrechas. ¿Qué distancia separa a las rendijas?
4. (II) Luz monocromática incide sobre dos rendijas muy estrechas separadas 0.048 mm. Franjas sucesivas sobre una pantalla a 6.00 m de distancia están separadas 8.5 cm cerca del centro del patrón. Determine la longitud de onda y la frecuencia de la luz.
5. (II) Si rayos de luz de 720 nm y 660 nm pasan a través de dos rendijas separadas 0.68 mm, ¿qué distancia separará a las franjas de segundo orden de estas dos longitudes de onda sobre una pantalla colocada a 1.0 m de distancia?
6. (II) Un láser rojo de un laboratorio de física produce luz de 632.8 nm. Cuando la luz de este láser incide sobre dos rendijas muy cercanas, el patrón de interferencia que se forma sobre una pared a varios metros de distancia tiene franjas brillantes espaciadas 5.00 mm cerca del centro del patrón. Cuando el láser se sustituye por un pequeño puntero láser, las franjas quedan separadas por 5.14 mm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz producida por el puntero?
7. (II) Luz con longitud de onda λ pasa a través de un par de rendijas separadas 0.17 mm, lo que forma un patrón de interferencia de doble rendija sobre una pantalla ubicada a 35 cm de distancia. Suponga que la imagen de la figura 34-9a es una reproducción a tamaño real de ese patrón de interferencia. Use una regla para medir una distancia pertinente sobre esta imagen; luego utilice este valor medido para determinar λ (nm).
8. (II) Luz de 680 nm de longitud de onda incide sobre dos rendijas y produce un patrón de interferencia donde la franja de tercer orden está a 38 mm de la franja central sobre una pantalla a 2.6 m de distancia. ¿Cuál es la separación de las dos rendijas?
9. (II) Un haz paralelo de luz proveniente de un láser He-Ne, con una longitud de onda de 633 nm, incide sobre dos rendijas muy estrechas separadas 0.068 mm. ¿Qué distancia separa a las franjas en el centro del patrón sobre una pantalla colocada a 3.8 m de distancia?
10. (II) Un profesor de física quiere realizar en su clase una demostración del experimento de Young de la doble rendija empleando luz de 633 nm proveniente de un láser He-Ne. Puesto que el salón de conferencias es muy grande, el patrón de interferencia se proyectará sobre una pared que está a 5.0 m de las rendijas. Para fácil visualización de todos los estudiantes en la clase, el profesor quiere que la distancia entre los máximos $m = 0$ y $m = 1$ sea de 25 cm. ¿Qué separación de rendija se requiere para producir el patrón de interferencia deseado?

11. (II) Suponga que una delgada pieza de vidrio se coloca enfrente de la rendija inferior de la figura 34-7, de manera que las dos ondas entran a las rendijas 180° fuera de fase (figura 34-25). Describa con detalle el patrón de interferencia sobre la pantalla.

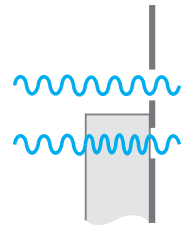


FIGURA 34–25
Problema 11.

12. (II) En un experimento de doble rendija, se encuentra que luz azul con 480 nm de longitud de onda produce un máximo de segundo orden en cierta ubicación sobre la pantalla. ¿Qué longitud de onda de luz visible tendría un mínimo en la misma ubicación?

13. (II) Dos rendijas estrechas, separadas 1.0 mm, se iluminan mediante luz de 544 nm. Encuentre la distancia entre franjas brillantes adyacentes sobre una pantalla ubicada a 5.0 m de las rendijas.

14. (II) En un experimento de doble rendija, el máximo de tercer orden para la luz con longitud de onda de 500 nm se localiza a 12 mm de la mancha brillante central sobre una pantalla a 1.6 m de las rendijas. Luego, a través de las mismas rendijas, se proyecta luz con 650 nm de longitud de onda. ¿A qué distancia de la mancha brillante central se ubicará el máximo de segundo orden de esta luz?

15. (II) Luz con 470 nm de longitud de onda en el aire incide sobre dos rendijas separadas 6.00×10^{-2} mm. Las rendijas están sumergidas en agua, como lo está una pantalla de visualización a 50.0 cm de distancia. ¿Qué distancia separa a las franjas sobre la pantalla?

16. (II) Una hoja muy delgada de plástico ($n = 1.60$) cubre una rendija de un aparato de doble rendija, iluminado por luz de 680 nm. El punto central sobre la pantalla, en vez de ser un máximo, es oscuro. ¿Cuál es el grosor (mínimo) del plástico?

*34–4 Intensidad en interferencia de dos rendijas

***17.** (I) Si una rendija en la figura 34-12 está cubierta, ¿en qué factor cambia la intensidad en el centro de la pantalla?

***18.** (II) Deduzca una expresión similar a la ecuación 34-2 que proporcione los ángulos para los cuales la intensidad de doble rendija sea la mitad de su valor máximo, $I_\theta = \frac{1}{2} I_0$.

***19.** (II) Demuestre que el ancho angular completo a medio máximo del pico central en un patrón de interferencia de doble rendija está dado por $\Delta\theta = \lambda/2d$ si $\lambda \ll d$.

***20.** (II) En un experimento de interferencia de doble rendija, la longitud de la trayectoria a cierto punto P sobre la pantalla difiere para una rendija, en comparación con la otra, por 1.25λ. *a*) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas que llegan al punto P? *b*) Determine la intensidad en P, expresada como fracción de la intensidad máxima I_0 sobre la pantalla.

***21.** (III) Suponga que una rendija de un aparato de doble rendija es más ancha que la otra, de manera que la intensidad de la luz que pasa a través de ella es dos veces mayor. Determine la intensidad I como función de la posición (θ) sobre la pantalla para luz coherente.

***22.** (III) *a*) Considere tres fuentes de luz coherente igualmente espaciadas y de igual intensidad (agregando una tercera rendija a las dos rendijas de la figura 34-12). Use el método de fasores para obtener la intensidad como función de la diferencia de fase δ (ecuación 34-4). *b*) Determine las posiciones de máximos y mínimos.

34–5 Interferencia de película delgada

23. (I) Si una burbuja de jabón tiene un grosor de 120 nm, ¿qué longitud de onda se refleja con más intensidad en el centro de la superficie exterior cuando se ilumina de manera normal con luz blanca? Suponga que $n = 1.32$.

24. (I) ¿Qué tan separadas están las franjas oscuras en el ejemplo 34-6, si las placas de vidrio miden, cada una, 28.5 cm de largo?

25. (II) *a*) ¿Cuál es el grosor mínimo de una película de jabón ($n = 1.33$) que parecería negra si se ilumina con luz de 480 nm? Suponga que hay aire en ambos lados de la película de jabón. *b*) ¿Cuáles son otros dos posibles grosores para que la película parezca negra? *c*) Si el grosor t fuera mucho menor que λ, ¿por qué la película también parecería negra?

26. (II) Una lente adquiere un tono amarillo verdoso ($\lambda = 570$ nm es más intensa) cuando en ésta se refleja luz blanca. ¿Qué grosor mínimo de recubrimiento ($n = 1.25$) cree que se usó en tal lente de vidrio ($n = 1.52$) y por qué?

27. (II) Una delgada película de aceite ($n_o = 1.50$), con grosor variable, flota sobre agua ($n_w = 1.33$). Cuando se ilumina desde arriba con luz blanca, los colores reflejados son como se ilustra en la figura 34-26. En aire, la longitud de onda de la luz amarilla es 580 nm. *a*) ¿Por qué no hay colores reflejados en el punto A? *b*) ¿Cuál es el grosor t del aceite en el punto B?

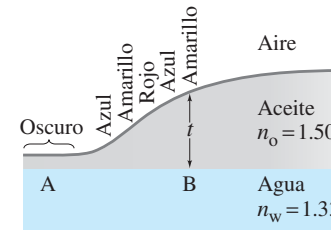


FIGURA 34–26
Problema 27.

28. (II) Una delgada mancha de aceite ($n_o = 1.50$) flota sobre agua ($n_w = 1.33$). Cuando un haz de luz blanca incide de manera normal sobre esta película desde el aire, los únicos colores reflejados que se realzan son el rojo (650 nm) y el violeta (390 nm). A partir de esta información, deduzca el grosor (mínimo) t de la mancha de aceite.

29. (II) Un total de 31 anillos de Newton brillantes y 31 oscuros (sin contar la mancha oscura en el centro) se observan cuando luz de 560 nm incide de manera normal sobre una lente plano convexa que yace sobre una superficie plana de vidrio (figura 34-18). ¿Por cuánto varía el grosor en el centro con respecto a los bordes?

30. (II) Una hoja metálica fina separa un extremo de dos trozos de vidrio ópticamente plano, como en la figura 34-20. Cuando luz con 670 nm de longitud de onda incide de manera normal, se observan 28 líneas oscuras (con una en cada extremo). ¿De qué grosor es la hoja?

31. (II) ¿Qué grosor (mínimo) debe tener la capa de aire entre dos superficies planas de vidrio, si el vidrio debe aparecer brillante cuando sobre él incide de manera normal luz de 450 nm? ¿Y si el vidrio aparece oscuro?

32. (II) Una delgada película uniforme de alcohol ($n = 1.36$) yace sobre una placa de vidrio plana ($n = 1.56$). Cuando luz monocromática, cuya longitud de onda puede cambiar, incide de manera normal, la luz reflejada es un mínimo para $\lambda = 512$ nm y un máximo para $\lambda = 635$ nm. ¿Cuál es el grosor mínimo de la película?

33. (II) Demuestre que el radio r del m-ésimo anillo oscuro de Newton, visto directamente desde arriba (figura 34-18), está dado por $r = \sqrt{m\lambda R}$ donde R es el radio de curvatura de la superficie curva de vidrio y λ es la longitud de la luz utilizada. Suponga que el grosor de la capa de aire es mucho menor que R en todos los puntos y que $r \ll R$. [*Sugerencia:* Utilice el desarrollo binomial].

34. (II) Con base en el resultado del problema 33, demuestre que la distancia entre anillos oscuros adyacentes de Newton es

$$\Delta r \approx \sqrt{\frac{\lambda R}{4m}}$$

para el m-ésimo anillo, suponiendo que $m \gg 1$.

35. (II) Cuando un aparato de anillos de Newton (figura 34-18) se sumerge en un líquido, el diámetro del octavo anillo oscuro disminuye de 2.92 cm a 2.54 cm. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido? [*Sugerencia:* Véase el problema 33].

36. (II) Una lente plano convexa de lucita, de 3.4 cm de diámetro, se coloca sobre un trozo plano de vidrio, como en la figura 34-18. Cuando luz de 580 nm incide de manera normal, se observan 44 anillos brillantes, el último de ellos justo en el borde. ¿Cuál es el radio de curvatura de la superficie de la lente y la distancia focal de la lente? [*Sugerencia:* Véase el problema 33].

37. (II) Exploremos por qué sólo las capas "delgadas" muestran interferencia de película delgada. Suponga que una capa de agua, sobre la parte superior de una superficie plana de vidrio, se ilumina desde el aire que hay arriba mediante luz blanca (todas las longitudes de onda de 400 nm a 700 nm). Más aún, suponga que el grosor t de la capa de agua es mucho mayor que un micrón (= 1000 nm); en particular, sea $t = 200\ \mu$m. Considere que el índice de refracción para el agua es $n = 1.33$ para todas las longitudes de onda visibles. *a*) Demuestre que un color visible se reflejará en la capa de agua si su longitud de onda es $\lambda = 2nt/m$, donde m es un entero. *b*) Demuestre que los dos extremos en las longitudes de onda (400 nm y 700 nm) de la luz incidente se reflejan ambas en la capa de agua y determine el valor m asociado con cada una. *c*) ¿Cuántas otras longitudes de onda visibles, además de $\lambda = 400$ nm y 700 nm, se reflejan en la capa "gruesa" de agua? *d*) ¿Cómo explica esto el hecho de que tal capa gruesa no produzca diversos colores cuando refleja, sino sólo blanco o gris?

38. (III) Un recubrimiento óptico sencillo reduce la reflexión a cero para $\lambda = 550$ nm. ¿En qué factor se reduce la intensidad por el recubrimiento para $\lambda = 430$ nm y $\lambda = 670$ nm, en comparación con la ausencia de recubrimiento? Suponga incidencia normal.

*34–6 Interferómetro de Michelson

***39.** (II) ¿A qué distancia debe moverse el espejo M_1 en un interferómetro de Michelson si por una línea de referencia deben pasar 589 franjas de luz de 589 nm?

***40.** (II) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que entra a un interferómetro si se cuentan 384 franjas brillantes cuando el espejo móvil se mueve 0.125 mm?

***41.** (II) Un micrómetro se conecta al espejo móvil de un interferómetro. Cuando el micrómetro presiona sobre una delgada hoja metálica, el número neto de franjas brillantes que se mueven, en comparación con el micrómetro en vacío, es de 272. ¿Cuál es el grosor de la hoja? La longitud de onda de la luz que se utiliza es de 589 nm.

***42.** (III) Uno de los haces de un interferómetro (figura 34-27) pasa a través de un pequeño recipiente de vidrio al vacío de 1.155 cm de profundidad. Cuando se permite que un gas llene lentamente el recipiente, se cuenta un total de 176 franjas oscuras que pasan por una línea de referencia. La luz que se utiliza tiene una longitud de onda de 632.8 nm. Calcule el índice de refracción del gas a su densidad final, suponiendo que el interferómetro está en vacío.

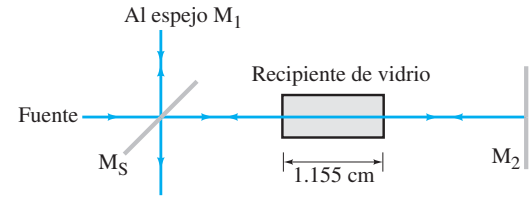


FIGURA 34–27 Problema 42.

***43.** (III) Las líneas D amarillas de sodio tienen longitudes de onda de 589.0 y 589.6 nm. Cuando se usan para iluminar un interferómetro de Michelson, se nota que las franjas de interferencia desaparecen y reaparecen periódicamente conforme se mueve el espejo M_1. ¿Por qué sucede esto? ¿Cuánto se debe mover el espejo entre una desaparición y la siguiente?

*34–7 Intensidad luminosa

***44.** (II) La iluminancia de la luz solar directa sobre la Tierra es de aproximadamente 10^5 lm/m^2. Estime el flujo luminoso y la intensidad luminosa del Sol.

***45.** (II) La *eficiencia luminosa* de una bombilla es la razón entre el flujo luminoso y la entrada de potencia eléctrica. *a*) ¿Cuál es la eficiencia luminosa de una bombilla de 100 W y 1700 lm? *b*) ¿Cuántas lámparas fluorescentes de 40 W y 60 lm/W se necesitarían para obtener una iluminancia de 250 lm/m^2 en el suelo de una fábrica de 25 m $\times$ 30 m de área? Suponga que las luces están 10 m arriba del suelo y que la mitad de su flujo llega al suelo.

Problemas generales

46. Luz con 5.0×10^{-7} m de longitud de onda pasa a través de dos rendijas paralelas e incide sobre una pantalla a 4.0 m de distancia. Las bandas brillantes adyacentes del patrón de interferencia están separadas 2.0 cm. *a*) Encuentre la distancia entre las rendijas. *b*) A continuación, las mismas dos rendijas se iluminan con luz de una longitud de onda diferente, y el mínimo de quinto orden para esta luz se presenta en el mismo punto sobre la pantalla que el mínimo de cuarto orden para la luz anterior. ¿Cuál es la longitud de onda de la segunda fuente de luz?

47. Las ondas de televisión y radio que se reflejan en las montañas o en los aviones pueden interferir con la señal directa de la estación. *a*) ¿Qué tipo de interferencia ocurrirá cuando señales de televisión de 75 MHz lleguen a un receptor directamente desde una estación distante y se reflejen en un avión cercano 122 m directamente arriba del receptor? Suponga un cambio de fase de $\frac{1}{2}\lambda$ en la señal durante la reflexión. *b*) ¿Qué tipo de interferencia ocurrirá si el avión está 22 m más cerca del receptor?

48. Una estación de radio que opera a 88.5 MHz transmite desde dos antenas idénticas a la misma elevación, pero separadas una distancia horizontal d de 9.0 m (figura 34-28). A lo largo de la línea media se encuentra una señal máxima, perpendicular a d en su punto medio, y se extiende horizontalmente en ambas direcciones. Si la línea media se toma como 0°, ¿en qué otro(s) ángulo(s) θ se detecta señal máxima? ¿Y una señal mínima? Suponga que todas las mediciones se realizan mucho más lejos que los 9.0 m desde las torres de las antenas.

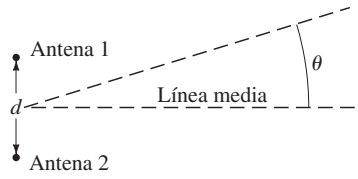


FIGURA 34–28
Problema 48.

49. Luz con longitud de onda de 690 nm pasa a través de dos rendijas estrechas separadas 0.66 mm. La pantalla está a 1.60 m de distancia. Una segunda fuente, con longitud de onda desconocida, produce su franja de segundo orden 1.23 mm más cerca del máximo central que la luz de 690 nm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz desconocida?

50. Luz monocromática con longitud de onda variable incide de manera normal sobre una delgada hoja de película plástica en el aire. La luz que se refleja es un máximo sólo para $\lambda = 491.4$ nm y $\lambda = 688.0$ nm en el espectro visible. ¿Cuál es el grosor de la película ($n = 1.58$)? [*Sugerencia:* Suponga valores sucesivos de m].

***51.** Suponga que los espejos en un interferómetro de Michelson están perfectamente alineados y que las longitudes de trayectoria hacia los espejos M_1 y M_2 son idénticas. Con estas condiciones iniciales, un observador ve un máximo brillante en el centro del área de visión. Ahora, uno de los espejos se mueve una distancia x. Determine una fórmula para la intensidad en el centro del área de visión como función de x, la distancia que se mueve el espejo móvil desde la posición inicial.

52. Es posible construir un espejo enormemente reflectante para una longitud de onda particular, a incidencia normal, empleando dos capas delgadas de materiales transparentes con índices de refracción n_1 y n_2 ($1 < n_1 < n_2$) sobre la superficie del vidrio ($n > n_2$). ¿Cuál debe ser el grosor mínimo d_1 y d_2 en la figura 34-29, en términos de la longitud de onda incidente l, para maximizar la reflexión?

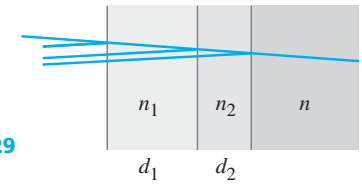


FIGURA 34–29
Problema 52.

53. Calcule el grosor mínimo necesario para un recubrimiento antirreflector ($n = 1.38$) aplicado a una lente de vidrio con la finalidad de eliminar reflexiones de *a*) azul (450 nm) o *b*) rojo (720 nm) para luz a incidencia normal.

54. El avión Stealth está diseñado para no reflejar señales de radar, cuya longitud de onda por lo general es de 2 cm, empleando un recubrimiento antirreflector. Ignorando cualquier cambio en la longitud de onda en el recubrimiento, estime su grosor.

55. Luz con longitud de onda λ incide sobre una pantalla que contiene dos rendijas separadas una distancia d a un ángulo θ_i con la normal. Determine el ángulo θ_m al que se presenta el máximo de m-ésimo orden.

56. Considere dos antenas que irradian ondas de radio de 6.0 MHz en fase unas con otras. Las antenas se ubican en los puntos S_1 y S_2, separadas una distancia $d = 175$ m (figura 34-30). Determine los puntos sobre el eje y donde las señales provenientes de las dos fuentes estarán fuera de fase (las crestas de una encuentran los valles de la otra).

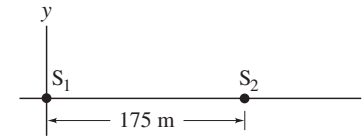


FIGURA 34–30
Problema 56.

57. ¿Cuál es el grosor mínimo (distinto de cero) para la capa de aire entre dos superficies planas de vidrio, si éste debe aparecer oscuro cuando luz de 680 nm incide de manera normal? ¿Y si el vidrio debe aparecer brillante?

58. El *espejo de Lloyd* ofrece un medio para obtener un patrón de interferencia de doble rendija a partir de una sola fuente, de manera que la luz es coherente. Como se ilustra en la figura 34-31, la luz que se refleja en el espejo plano parece provenir de la imagen virtual de la rendija. Describa con detalle el patrón de interferencia sobre la pantalla.

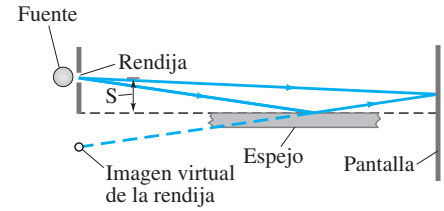


FIGURA 34–31 Problema 58.

59. Considere el arreglo de antenas del ejemplo 34-5 (figura 34-15). Sea $d = \lambda/2$ y suponga que las dos antenas están ahora 180º fuera de fase una con otra. Encuentre las direcciones para interferencia constructiva y destructiva, y compare con el caso cuando las fuentes están en fase. (Estos resultados ilustran la base para las antenas direccionales).

60. Suponga que usted ve la luz *transmitida* a través de una película delgada colocada sobre una pieza plana de vidrio. Dibuje un diagrama, similar a las figuras 34-17 o 34-23, y describa las condiciones requeridas para máximos y mínimos. Considere todos los valores posibles del índice de refracción. Discuta el tamaño relativo de los mínimos en comparación con los máximos y con cero.

61. Una delgada película de jabón ($n = 1.34$) recubre un trozo de vidrio plano ($n = 1.52$). ¿De qué grosor es la película si refleja luz roja de 643 nm con más intensidad cuando se ilumina de manera normal con luz blanca?

62. Dos fuentes idénticas, S_1 y S_2, separadas una distancia d, emiten luz coherente con longitud de onda λ uniformemente en todas direcciones. Si se define el eje x con su origen en S_1, como se muestra en la figura 34-32, encuentre las posiciones (expresadas como múltiplos de λ) donde las señales provenientes de las dos fuentes están fuera de fase a lo largo de este eje para $x > 0$, si $d = 3\lambda$.

FIGURA 34–32
Problema 62.

63. Una configuración de interferencia de dos rendijas, con separación de rendija $d = 0.10$ mm, produce franjas de interferencia en un conjunto particular de ángulos θ_m (donde $m = 0, 1, 2,\ldots$) para luz roja con frecuencia $f = 4.6 \times 10^4$ Hz. Si uno quiere construir una configuración análoga de interferencia de dos rendijas que produzca franjas de interferencia en el mismo conjunto de ángulos θ_m para sonido de do central a temperatura ambiente, con frecuencia $f_S = 262$ Hz, ¿cuál debe ser la separación de rendija para esta configuración análoga?

64. Un radiotelescopio, cuyas dos antenas se encuentran separadas 55 m, está diseñado para recibir ondas de radio de 3.0 MHz producidas por objetos astronómicos. Las ondas de radio recibidas crean señales electrónicas de 3.0 MHz en las antenas izquierda y derecha del telescopio. Luego, estas señales viajan por cables de igual longitud a un amplificador de ubicación central, donde se suman. El telescopio se puede "apuntar" a cierta región del cielo al sumar la señal instantánea de la antena derecha a la señal "demorada en el tiempo" recibida por la antena izquierda un tiempo Δt antes. (Esta demora en el tiempo de la señal izquierda se puede lograr fácilmente con el circuito electrónico adecuado). Si un radioastrónomo quiere "ver" las señales de radio que llegan desde un objeto orientado a un ángulo de 12° con la vertical, como en la figura 34-33, ¿qué demora de tiempo Δt es necesaria?

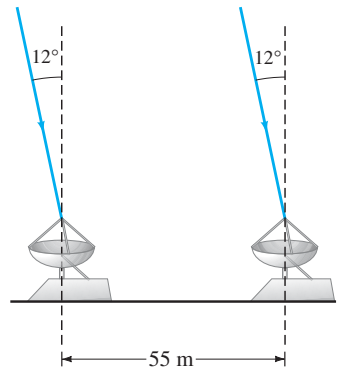


FIGURA 34–33
Problema 64.

65. En un disco compacto (CD), la información digital se almacena como una secuencia de superficies elevadas llamadas *pits* y concavidades llamadas *lands*. Tanto *pits* como *lands* son enormemente reflectantes y están incrustadas en un grueso material plástico con índice de refracción $n = 1.55$ (figura 34-34). Conforme un láser con 780 nm de longitud de onda (en aire) explora la secuencia *pit-land*, la transición entre un *pit* y un *land* vecinos se percibe al monitorear la intensidad de la luz láser reflejada en el CD. En el momento cuando la mitad del ancho del haz láser se refleja en el *pit* y la otra mitad en el *land*, se quiere que las dos mitades del haz reflejado estén fuera de fase 180° una con otra. ¿Cuál debe ser la diferencia de altura t (mínima) entre un *pit* y un *land*? [Cuando esta luz entra a un detector, la cancelación de las dos mitades fuera de fase produce una salida de detector mínima].

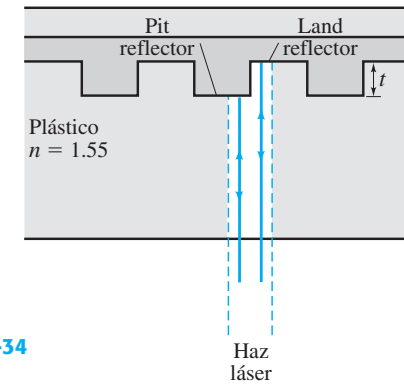


FIGURA 34–34
Problema 65.

* Problema numérico/por computadora

***66.** (II) Un interferómetro de Michelson se puede usar para determinar el índice de refracción de una placa de vidrio. Una placa de vidrio (grosor t) se coloca sobre una plataforma giratoria. La placa se coloca en la trayectoria de la luz entre el divisor de haz y ya sea el espejo fijo o el móvil, de manera que su grosor esté en la dirección del haz láser. La plataforma gira a varios ángulos, y se cuenta el número de corrimiento de franjas. Es posible demostrar que, si N es el número de corrimiento de franjas cuando el ángulo de rotación cambia por θ, el índice de refracción es $n = (2t - N\lambda)(1 - \cos\theta)/[2t(1 - \cos\theta) - N\lambda]$ donde t es el grosor de la placa. La siguiente tabla presenta los datos que recopiló un estudiante al determinar el índice de refracción de una placa transparente mediante un interferómetro Michelson.

N	25	50	75	100	125	150
θ (grados)	5.5	6.9	8.6	10.0	11.3	12.5

En el experimento, $\lambda = 632.8$ nm y $t = 4.0$ mm. Determine n para cada θ y encuentre el promedio n.

Respuestas a los ejercicios

A: 333 nm; 6.0×10^{14} Hz; 2.0×10^8 m/s.

B: *a*) I_0; *b*) 0.50 I_0; *c*) 0.

C: *e*).

Luz coherente paralela de un láser, que actúa casi como una fuente puntual, ilumina estas tijeras. En vez de una sombra nítida, hay un notorio patrón de difracción, lo que constituye una fuerte confirmación de la teoría ondulatoria de la luz. Los patrones de difracción se difuminan cuando se usan fuentes de luz típicas y, por lo tanto, no se ven, aunque un examen cuidadoso de las sombras revelará una imagen difusa. Examinaremos la difracción mediante una sola rendija y cómo afecta el patrón de doble rendija. También se estudiarán las rejillas de difracción y la difracción de rayos X mediante cristales. Veremos cómo la difracción afecta la resolución de los instrumentos ópticos y que la resolución final nunca puede ser mayor que la longitud de onda de la radiación utilizada. Por último, se estudiará la polarización de la luz.

CAPÍTULO 35

Difracción y polarización

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
A causa de la difracción, un microscopio de luz tiene una amplificación útil máxima de aproximadamente

a) 50×;
b) 100×;
c) 500×;
d) 2000×;
e) 5000×;

y los objetos más pequeños que se pueden observar tienen un tamaño aproximado de

a) 10 nm;
b) 100 nm;
c) 500 nm;
d) 2500 nm;
e) 5500 nm.

El experimento de Young de la doble rendija colocó a la teoría ondulatoria de la luz sobre un terreno firme. Pero la plena aceptación sólo vendría con los estudios de difracción que se realizaron más de una década después, entre 1810 y 1820.

Ya se estudió brevemente la difracción en relación con las olas (sección 15-11), así como para la luz (sección 34-1). Se vio que se refiere a la dispersión o desviación de las ondas alrededor de los bordes. Ahora se analizará la difracción de manera más minuciosa, incluidos sus efectos prácticos de limitar la cantidad de detalles, o *resolución*, que se puede obtener con cualquier instrumento óptico como telescopios, cámaras y el ojo.

CONTENIDO

35–1 Difracción mediante una sola rendija o disco
*35–2 Intensidad en el patrón de difracción de una sola rendija
*35–3 Difracción en el experimento de doble rendija
35–4 Límites de resolución; aberturas circulares
35–5 Resolución de telescopios y microscopios; el límite λ
*35–6 Resolución del ojo humano y amplificación útil
35–7 Rejilla de difracción
35–8 El espectrómetro y espectroscopia
*35–9 Ancho de pico y poder de resolución para una rejilla de difracción
35–10 Rayos X y difracción de rayos X
35–11 Polarización
*35–12 Pantallas de cristal líquido (LCD)
*35–13 Dispersión de la luz por la atmósfera

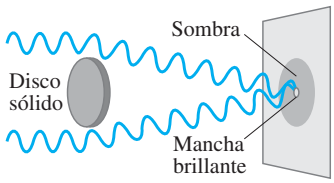


FIGURA 35–1 Si la luz es una onda, aparecerá una mancha brillante en el centro de la sombra de un disco sólido iluminado por una fuente puntual de luz monocromática.

En 1819 Augustin Fresnel (1788-1827) presentó ante la Academia Francesa una teoría ondulatoria de la luz que predecía y explicaba los efectos de interferencia y difracción. Casi inmediatamente, Siméon Poisson (1781-1840) puntualizó una inferencia contraria a la intuición: de acuerdo con la teoría ondulatoria de Fresnel, si la luz proveniente de una fuente puntual incidiera sobre un disco sólido, parte de la luz incidente se difractaría alrededor de los bordes e interferiría constructivamente en el centro de la sombra (figura 35-1). Tal predicción parecía muy improbable. Pero cuando François Arago realmente llevó a cabo el experimento, se vio la mancha brillante en el centro mismo de la sombra (figura 35-2a), lo que constituyó una fuerte evidencia para la teoría ondulatoria.

La figura 35-2a es una fotografía de la sombra producida por una moneda utilizando una fuente puntual coherente de luz, un láser en este caso. La mancha brillante se presenta claramente en el centro. Observe también las franjas brillantes y oscuras más allá de la sombra. Esto recuerda las franjas de interferencia de una doble rendija. De hecho, se deben a interferencia de ondas difractadas alrededor del disco, y a todo ello se le conoce como **patrón de difracción**. Alrededor de cualquier objeto con frontera definida, iluminado por una fuente puntual, existe un patrón de difracción, como se muestra en las figuras 35-2b y c. Uno no siempre está al tanto de la difracción, porque la mayoría de las fuentes de luz en la vida cotidiana no son puntuales, de manera que la luz proveniente de diferentes partes de la fuente diluye el patrón.

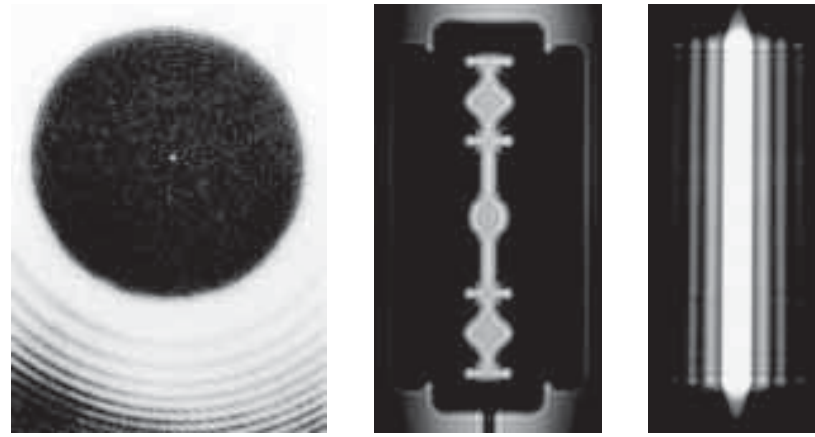


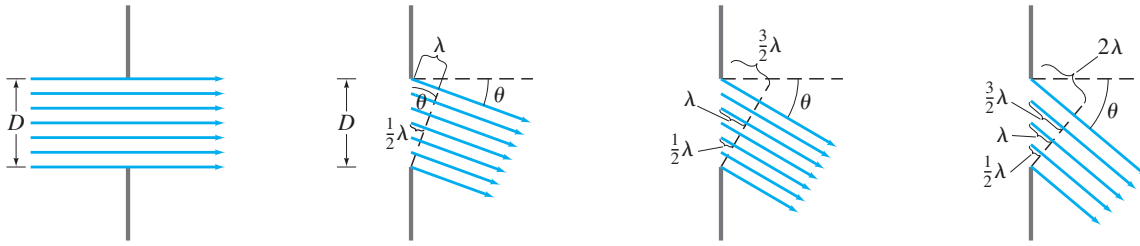
FIGURA 35–2 Patrón de difracción de *a*) un disco circular (una moneda), *b*) una hoja de afeitar, *c*) una sola rendija, cada uno iluminado por una fuente puntual coherente de luz monocromática, como un láser.

35–1 Difracción mediante una sola rendija o disco

Para ver cómo surge un patrón de difracción, se analizará el importante caso de la luz monocromática que pasa a través de una rendija estrecha. Supondremos que los rayos paralelos (ondas planas) de luz inciden sobre la rendija de ancho D, y pasan a través de ella hacia una pantalla de visualización muy alejada. Si la pantalla de visualización no está muy alejada, se pueden usar lentes para hacer los rayos paralelos.[†] Como se sabe a partir del estudio de las ondas en el agua y del principio de Huygens, las ondas que pasan a través de la rendija se dispersan en todas direcciones. Ahora se examinará cómo interfieren entre sí las ondas que pasan a través de diferentes partes de la rendija.

Rayos paralelos de luz monocromática pasan a través de la rendija estrecha, como se ilustra en la figura 35-3a. El ancho de la rendija D es del orden de la longitud de onda λ de la luz, pero la longitud de la rendija (adentro y afuera de la página) es grande en comparación con λ. La luz incide sobre una pantalla que se supone está muy alejada, así que los rayos que salen de cualquier punto prácticamente son paralelos antes de

[†] A tal patrón de difracción, que implica rayos paralelos, se le llama *difracción de Fraunhofer*. Si la pantalla está cerca y no se emplean lentes, se llama *difracción de Fresnel*. El análisis del último caso está implicado, así que sólo se considera el caso límite de la difracción de Fraunhofer.



a) $\theta = 0$
Brillante

b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{D}$
Oscuro

c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{3\lambda}{2D}$
Brillante

d) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\lambda}{D}$
Oscuro

FIGURA 35–3 Análisis del patrón de difracción formado por la luz que pasa a través de una rendija estrecha de ancho D.

llegar a la pantalla. Considere primero los rayos que pasan de manera directa a través de la rendija, como en la figura 35-3a. Todos ellos están en fase, así que habrá una mancha brillante en el centro de la pantalla (véase la figura 35-2c). En la figura 35-3b se consideran los rayos que se desplazan en un ángulo θ, en forma tal que el rayo que pasa por la parte superior de la rendija viaja exactamente una longitud de onda más lejos que el rayo proveniente del borde inferior para alcanzar la pantalla. El rayo que pasa a través del centro mismo de la rendija recorrerá media longitud de onda más que el rayo en la parte inferior de la rendija. Estos dos rayos estarán exactamente fuera de fase uno con respecto al otro y por ello interferirán destructivamente cuando se traslapen en la pantalla. De manera similar, un rayo ligeramente arriba del que está en la parte inferior cancelará un rayo que esté a la misma distancia arriba del del rayo del centro. De hecho, cada rayo que pasa a través de la mitad inferior de la rendija se cancelará con un rayo correspondiente que pase a través de la mitad superior. Por lo tanto, todos los rayos interfieren destructivamente en pares, y así la intensidad de la luz será cero sobre la pantalla de visualización a este ángulo. En la figura 35-3b se puede ver que el ángulo θ donde esto tiene lugar se presenta cuando $\lambda = D \operatorname{sen}\theta$, de manera que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{D}. \qquad \text{[primer mínimo]} \quad \textbf{(35–1)}$$

La intensidad de la luz es un máximo en $\theta = 0°$ y disminuye a un mínimo (intensidad = cero) en el ángulo θ dado por la ecuación 35-1.

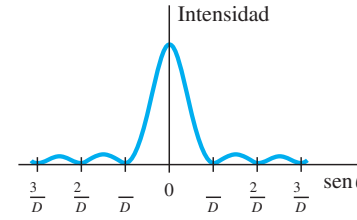
Ahora considere un ángulo θ mayor, de tal forma que el rayo superior recorra $\frac{3}{2}\lambda$ más que el rayo de la parte inferior, como en la figura 35-3c. En este caso, los rayos provenientes del tercio inferior de la rendija se cancelarán en pares con los del tercio medio porque estarán $\lambda/2$ fuera de fase. Sin embargo, la luz proveniente del tercio superior de la rendija todavía llegará a la pantalla, así que habrá una mancha brillante centrada alrededor de $\operatorname{sen}\theta \approx 3\lambda/2D$, pero no será tan brillante como la mancha central en $\theta = 0°$. Para un ángulo θ todavía mayor, de manera que el rayo superior recorra 2λ más que el rayo de la parte inferior (figura 35-3d), los rayos provenientes del cuarto inferior de la rendija se cancelarán con los que se encuentran en el cuarto justo arriba de él, porque las longitudes de la trayectoria difieren por $\lambda/2$. Y los rayos a través del cuarto de la rendija justo sobre el centro se cancelarán con los que pasan a través del cuarto superior. A este ángulo de nuevo habrá un mínimo de intensidad cero en el patrón de difracción. En la figura 35-4 se presenta una gráfica de la intensidad como función del ángulo. Esto corresponde bien con la fotografía de la figura 35-2c. Advierta que los mínimos (intensidad cero) se presentan a ambos lados del centro en

$$D \operatorname{sen}\theta = m\lambda, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \qquad \text{[mínimos]} \quad \textbf{(35–2)}$$

pero *no* en $m = 0$, donde existe el máximo más intenso. Entre los mínimos, se presentan máximos de menor intensidad aproximadamente (aunque no exactamente) en $m \approx \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$.

Note que los *mínimos* para un patrón de difracción, ecuación 35-2, satisfacen un criterio que parece muy similar al de los *máximos* (franjas brillantes) para interferencia de doble rendija, ecuación 34-2a. Advierta también que D es el ancho de una sola rendija, mientras que d en la ecuación 34-2 es la distancia entre dos rendijas.

FIGURA 35–4 Intensidad en el patrón de difracción de una sola rendija como función de $\operatorname{sen}\theta$. Observe que el máximo central no sólo es mucho más alto que los máximos a cada lado, también es el doble de ancho ($2\lambda/D$ de ancho) que cualquiera de los otros (cada uno con ancho de sólo λ/D).



⚠ CUIDADO

No confunda las ecuaciones 34-2 para interferencia con la ecuación 35-1 para difracción: advierta las diferencias

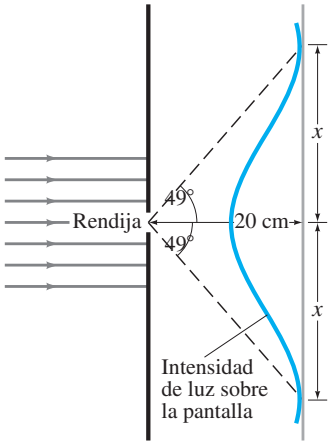


FIGURA 35–5 Ejemplo 35–1.

EJEMPLO 35–1 **Máximo de difracción con una sola rendija.** Luz con 750 nm de longitud de onda pasa a través de una rendija de 1.0×10^{-3} mm de ancho. ¿Cuál es el ancho del máximo central *a*) en grados (el ángulo relacionado con la anchura) y *b*) en centímetros, sobre una pantalla a 20 cm de distancia?

PLANTEAMIENTO El ancho del máximo central va del primer mínimo en un lado, al primer mínimo en el otro lado. La ecuación 35-1 nos permite encontrar la posición angular del primer mínimo de difracción con una sola rendija.

SOLUCIÓN *a*) El primer mínimo se presenta en

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{7.5 \times 10^{-7}\,\text{m}}{1.0 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 0.75.$$

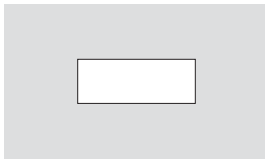
De manera que $\theta = 49°$. Éste es el ángulo entre el centro y el primer mínimo, figura 35-5. El ángulo subtendido por todo el máximo central, entre los mínimos arriba y abajo del centro, es el doble de esto, o 98°.

b) El ancho del máximo central es $2x$, donde $\tan\theta = x/20$ cm. Así que $2x = 2(20\text{ cm})(\tan 49°) = 46$ cm.

NOTA Se iluminará un gran ancho de la pantalla, pero normalmente no será muy brillante ya que la cantidad de luz que pase a través de tan pequeña rendija será poca y se dispersará sobre una gran área. Note también que aquí *no se puede* usar la aproximación para ángulo pequeño ($\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$) porque θ es grande.

EJERCICIO En el ejemplo 35-1 se empleó luz roja ($\lambda = 750$ nm). Si en vez de ésta se usara luz amarilla ($\lambda = 575$ nm), ¿el máximo central sería más ancho o más estrecho?

FIGURA 35–6 Ejemplo 35–2.



EJEMPLO CONCEPTUAL 35–2 **La difracción se dispersa.** Luz brilla a través de un agujero rectangular que es más estrecho en la dirección vertical que en la horizontal, figura 35-6. *a*) ¿Esperaría que el patrón de difracción esté más disperso en la dirección vertical o en la dirección horizontal? *b*) En un estadio, un altavoz rectangular, ¿debería ser alto y estrecho, o ancho y plano?

RESPUESTA *a*) A partir de la ecuación 35-1 se puede ver que, si la rendija (ancho D) se hace más estrecha, el patrón se dispersa más. Esto es congruente con nuestro estudio de las ondas en el capítulo 15. La difracción a través del agujero rectangular será más ancha verticalmente, pues la abertura es más pequeña en esa dirección. *b*) Para un altavoz, el patrón sonoro deseado es uno que se disperse horizontalmente, así que el altavoz deberá ser alto y estrecho (gire 90º la figura 35-6).

*35–2 Intensidad en el patrón de difracción de una sola rendija

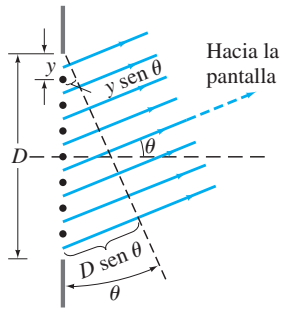
Se determinaron las posiciones de los mínimos en el patrón de difracción producido por luz que pasa a través de una sola rendija, ecuación 35-2. Ahora se explicará un método para predecir la amplitud y la intensidad en cualquier punto en el patrón, con la técnica de fasores ya discutida en la sección 34-4.

Considere la rendija dividida en N tiras muy delgadas de ancho Δy, como se indica en la figura 35-7. Cada tira envía luz en todas direcciones hacia una pantalla a la derecha. De nuevo, considere que los rayos que salen de cualquier punto particular hacia la pantalla distante son paralelos, y todos forman un ángulo θ con la horizontal, como se muestra. Elegimos el ancho de tira Δy mucho menor que la longitud de onda λ de la luz monocromática que incide sobre la rendija, de manera que toda la luz de una tira dada está en fase. Las tiras son de igual tamaño, y si toda la rendija se ilumina de manera uniforme, se puede considerar que las amplitudes de onda de campo eléctrico ΔE_0 de cada tira delgada son iguales en tanto θ no sea muy grande. Sin embargo, las amplitudes separadas de las diferentes tiras diferirán en fase. La diferencia de fase en la luz entrante desde tiras adyacentes será (véase la sección 34-4, ecuación 34-4)

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta y \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(35–3)}$$

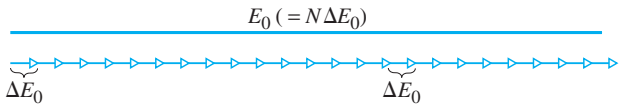
pues la diferencia en longitud de trayectoria es $\Delta y \operatorname{sen}\theta$.

FIGURA 35–7 Rendija con ancho D, dividida en N tiras de ancho Δy.

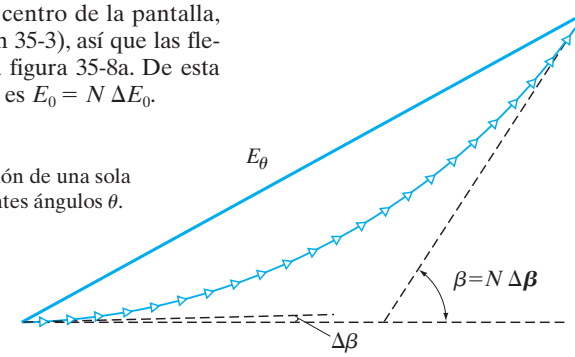


La amplitud total sobre la pantalla a cualquier ángulo θ será la suma de las amplitudes de onda separadas que se deben a cada tira. Estas onditas tienen la misma amplitud ΔE_0, pero difieren en fase. Para obtener la amplitud total, podemos utilizar un diagrama de fasores como se hizo en la sección 34-4 (figura 34-13). En la figura 35-8 se presentan los diagramas de fasores para cuatro diferentes ángulos θ. En el centro de la pantalla, $\theta = 0$, las ondas de cada tira están todas en fase ($\Delta\beta = 0$, ecuación 35-3), así que las flechas que representan cada ΔE_0 se alinean como se muestra en la figura 35-8a. De esta forma, la amplitud total de la luz que llega al centro de la pantalla es $E_0 = N\,\Delta E_0$.

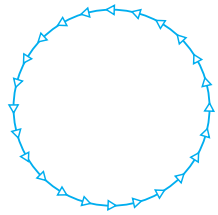
FIGURA 35–8 Diagrama de fasores para difracción de una sola rendija, que da la amplitud total E_θ a cuatro diferentes ángulos θ.



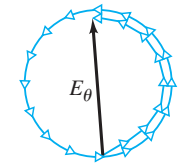
a) En en centro, $\theta = 0$.



b) Entre el centro y el primer mínimo.



c) Primer mínimo, $E_\theta = 0$ ($\beta = 2\pi = 360°$).



d) Cerca del máximo secundario.

A un ángulo pequeño θ, para un punto sobre la pantalla distante no lejos del centro, la figura 35-8b muestra cómo las onditas de amplitud ΔE_0 se interfieren para dar E_θ, la amplitud total sobre la pantalla a este ángulo θ. Note que cada ondita difiere en fase de la adyacente por $\Delta\beta$. La diferencia de fase entre las onditas de los bordes superior e inferior de la rendija es

$$\beta = N\,\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} N\,\Delta y \operatorname{sen}\theta = \frac{2\pi}{\lambda} D \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(35–4)}$$

donde $D = N\,\Delta y$ es el ancho total de la rendija. Aunque el "arco" en la figura 35-8b tenga longitud $N\,\Delta E_0$, y por lo tanto sea igual a E_0 (amplitud total en $\theta = 0$), la amplitud de la onda total E_θ en el ángulo θ es la suma *vectorial* de cada amplitud de ondita y, por ende, es igual a la longitud de la cuerda, como se muestra. La cuerda es más corta que el arco, así que $E_\theta < E_0$.

Para θ más grande, finalmente se llega al caso que se ilustra en la figura 35-8c, donde la cadena de flechas se cierra sobre sí misma. En este caso, la suma vectorial es cero, de manera que $E_\theta = 0$ para este ángulo θ. Esto corresponde al primer mínimo. Puesto que $\beta = N\,\Delta\beta$ es 360° o 2π en este caso, de acuerdo con la ecuación 35-3 se tiene

$$2\pi = N\,\Delta\beta = N\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta y \operatorname{sen}\theta\right)$$

o, dado que el ancho de rendija $D = N\,\Delta y$,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{D}.$$

Por ende, el primer mínimo ($E_\theta = 0$) se presenta donde $\operatorname{sen}\theta = \lambda/D$, que es el mismo resultado que se obtuvo en la sección anterior, ecuación 35-1.

Para valores de θ todavía mayores, la cadena de flechas cae en espiral más allá de 360°. La figura 35-8d ilustra el caso cerca del máximo secundario junto al primer mínimo. Aquí, $\beta = N\,\Delta\beta \approx 360° + 180° = 540°$ o 3π. Cuando se consideran ángulos θ mayores, se presentan nuevos máximos y mínimos. Pero como la longitud total de la espiral permanece constante, igual a $N\,\Delta E_0$ ($= E_0$), cada máximo sucesivo es cada vez menor conforme la espiral se enrolla sobre sí misma.

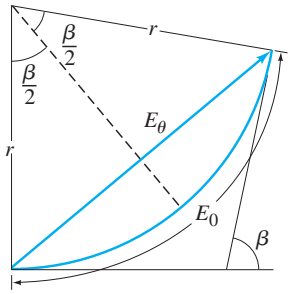


FIGURA 35–9 Determinación de la amplitud E_θ como función de θ para difracción de una sola rendija.

Para obtener una expresión cuantitativa para la amplitud (y la intensidad) de cualquier punto sobre la pantalla (esto es, para cualquier ángulo θ), ahora se considera el límite $N \to \infty$, de manera que Δy se convierte en el ancho infinitesimal dy. En este caso, los diagramas de la figura 35-8 se vuelven curvas suaves, una de las cuales se muestra en la figura 35-9. Para cualquier ángulo θ, la amplitud de onda sobre la pantalla es E_θ, igual a la cuerda en la figura 35-9. La longitud del arco es E_0, como antes. Si r es el radio de curvatura del arco, entonces

$$\frac{E_\theta}{2} = r \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}.$$

Al usar la medida radián para $\beta/2$, también se tiene

$$\frac{E_0}{2} = r \frac{\beta}{2}.$$

Esto se combina para obtener

$$E_\theta = E_0 \frac{\operatorname{sen} \beta/2}{\beta/2}. \qquad \textbf{(35–5)}$$

El ángulo β es la diferencia de fase entre las ondas que pasan por los bordes superior e inferior de la rendija. La diferencia de trayectoria para estos dos rayos es D sen θ (véase la figura 35-7, así como la ecuación 35-4), de manera que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} D \operatorname{sen} \theta. \qquad \textbf{(35–6)}$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de onda, así que la intensidad I_θ a cualquier ángulo es, de acuerdo con la ecuación 35-5,

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\operatorname{sen} \beta/2}{\beta/2} \right)^2 \qquad \textbf{(35–7)}$$

donde $I_0 \left(\propto E_0^2\right)$ es la intensidad en $\theta = 0$ (el máximo central). Es posible combinar las ecuaciones 35-7 y 35-6 (aunque a menudo es más sencillo dejarlas como ecuaciones separadas) para obtener

$$I_\theta = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi D \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \right)}{\left(\dfrac{\pi D \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \right)} \right]^2. \qquad \textbf{(35–8)}$$

De acuerdo con la ecuación 35-8, los mínimos ($I_\theta = 0$) se presentan donde sen(π D sen θ/λ) = 0, lo cual significa que π D sen θ/λ debe ser $\pi, 2\pi, 3\pi$, etcétera, o

$$D \operatorname{sen} \theta = m\lambda, \qquad m = 1, 2, 3, \cdots \qquad \text{[mínimos]}$$

que es lo que se obtuvo anteriormente, ecuación 35-2. Advierta que m no puede ser cero: cuando $\beta/2 = \pi$ D sen $\theta/\lambda) = 0$, desaparece el denominador, así como el numerador, en las ecuaciones 35-7 o 35-8. En este caso se puede evaluar la intensidad al tomar el límite como $\theta \to 0$ (o $\beta \to 0$); para ángulos muy pequeños, sen $\beta/2 \approx \beta/2$, de manera que (sen $\beta/2)/(\beta/2) \to 1$ e $I_\theta = I_0$, el *máximo* en el centro del patrón.

La intensidad I_θ como función de θ, según la ecuación 35-8, corresponde al diagrama de la figura 35-4.

EJEMPLO 35–3 ESTIMACIÓN **Intensidad en máximos secundarios.** Estime las intensidades de los primeros dos máximos secundarios a cualquier lado del máximo central.

PLANTEAMIENTO Los máximos secundarios se presentan cerca de la mitad entre los mínimos, en aproximadamente

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi D \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \approx (m + \tfrac{1}{2})\pi. \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

Los máximos reales no están en estos puntos (sus posiciones se pueden determinar mediante diferenciación de la ecuación 35-7; véase el problema 14), pues sólo se busca una estimación.

SOLUCIÓN Con estos valores para β en la ecuación 35-7 o 35-8, con $\operatorname{sen}(m + \frac{1}{2})\pi = 1$, se obtiene

$$I_\theta = \frac{I_0}{(m + \frac{1}{2})^2 \pi^2}. \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

Para $m = 1$ y 2, se obtiene

$$I_\theta = \frac{I_0}{22.2} = 0.045 I_0 \qquad [m = 1]$$

$$I_\theta = \frac{I_0}{61.7} = 0.016 I_0. \qquad [m = 2]$$

El primer máximo al lado del pico central sólo tiene 1/22, o el 4.5%, de la intensidad del pico central, y los sucesivos son todavía más pequeños, tal como se aprecia en la figura 35-4 y la fotografía de la figura 35-2c.

La difracción mediante una abertura circular produce un patrón similar (aunque circular, más que rectangular) y es de gran importancia práctica, pues las lentes son esencialmente aberturas circulares a través de las cuales pasa la luz. Esto se discutirá en la sección 35-4 y se verá cómo la difracción limita la resolución (o nitidez) de las imágenes.

*35–3 Difracción en el experimento de doble rendija

Cuando se estudió el experimento de Young de la doble rendija en la sección 34-4, se supuso que la porción central de la pantalla estaba iluminada de manera uniforme. Esto es equivalente a suponer que las rendijas son infinitesimalmente estrechas, de forma que el pico de difracción central se dispersa sobre toda la pantalla. Esto nunca es el caso con rendijas reales; la difracción reduce la intensidad de las franjas de interferencia brillantes al lado del centro, así que no todas son de la misma altura como se mostraron en la figura 34-14. (Se mostraron más correctamente en la figura 34-9b).

Para calcular la intensidad en un patrón de interferencia de doble rendija, incluida la difracción, suponga que las rendijas tienen anchos iguales D y que sus centros están separados una distancia d. Como la distancia a la pantalla es grande en comparación con la separación de entre rendijas d, la amplitud de onda debida a cada rendija es esencialmente la misma en cada punto de la pantalla. Así, la amplitud de onda total a cualquier ángulo θ ya no será

$$E_{\theta 0} = 2E_0 \cos\frac{\delta}{2},$$

como se obtuvo con la ecuación 34-5b. En vez de ello, se debe modificar a causa de la difracción, por la ecuación 35-5, de manera que

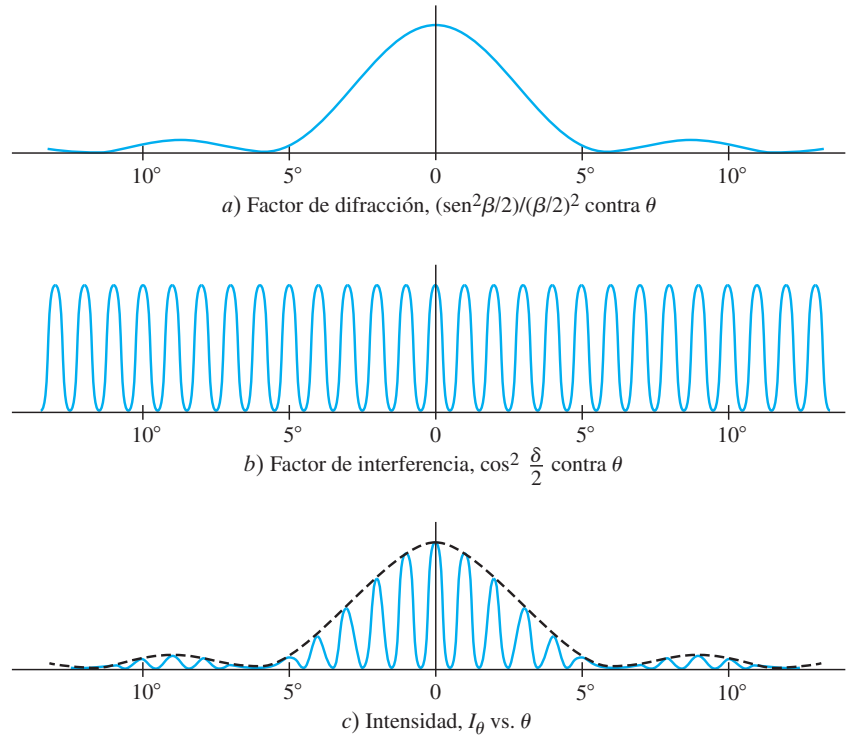
$$E_{\theta 0} = 2E_0\left(\frac{\operatorname{sen}\beta/2}{\beta/2}\right)\cos\frac{\delta}{2}.$$

Por ende, la intensidad estará dada por

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}\beta/2}{\beta/2}\right)^2\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 \qquad \textbf{(35–9)}$$

donde $I_0 = 4E_0^2$, y, a partir de las ecuaciones 35-6 y 34-4, se tiene

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} D \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta.$$



a) Factor de difracción, $(\text{sen}^2\beta/2)/(\beta/2)^2$ contra θ

b) Factor de interferencia, $\cos^2 \frac{\delta}{2}$ contra θ

c) Intensidad, I_θ vs. θ

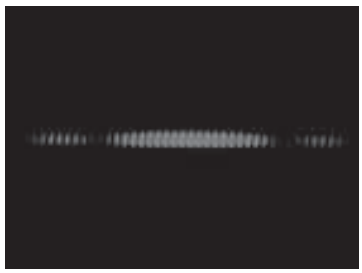
FIGURA 35–10
a) Factor de difracción, *b*) factor de interferencia y *c*) la intensidad resultante I_θ, graficados como función de θ para $d = 6D = 60\lambda$.

La ecuación 35-9 para la intensidad en un patrón de doble rendija, como recién se vio, es

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\text{sen}\,\beta/2}{\beta/2}\right)^2\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2. \qquad \textbf{(35–9)}$$

El primer término entre paréntesis a veces se llama "factor de difracción" y el segundo se denomina "factor de interferencia". Estos dos factores se grafican en las figuras 35-10a y b para el caso cuando $d = 6D$, y $D = 10\lambda$. (La figura 35-10b es en esencia la misma que la figura 34-14). La figura 35-10c muestra el producto de estas dos curvas (por I_0), que es la intensidad real como función de θ (o como función de la posición sobre la pantalla para θ no muy grande) como indica la ecuación 35-9. Como se señala mediante las líneas punteadas en la figura 35-10c, el factor de difracción actúa como una especie de envoltura que limita los picos de interferencia.

FIGURA 35–11 Fotografías de un patrón de interferencia de doble rendija empleando un haz láser, que muestran los efectos de la difracción. En ambos casos, $d = 0.50$ mm, mientras que $D = 0.040$ mm en *a*) y 0.089 mm en *b*).



a)

b)

EJEMPLO 35–4 **Difracción más interferencia.** Demuestre por qué el pico de difracción central en la figura 35-10c contiene 11 franjas de interferencia.

PLANTEAMIENTO El primer mínimo en el patrón de difracción se presenta donde

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\lambda}{D}.$$

Puesto que $d = 6D$,

$$d\,\text{sen}\,\theta = 6D\left(\frac{\lambda}{D}\right) = 6\lambda.$$

SOLUCIÓN A partir de la ecuación 34-2a, los picos de interferencia (máximos) se presentan para $d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$, donde m puede ser 0, 1,..., o cualquier entero. Por ende, el mínimo de difracción ($d\,\text{sen}\,\theta = 6\lambda$) coincide con $m = 6$ en el patrón de interferencia, de manera que el pico $m = 6$ no aparecerá. En consecuencia, el pico de difracción central encierra el pico de interferencia central ($m = 0$) y cinco picos ($m = 1$ a 5) en cada lado, para dar un total de 11. Como el sexto orden no aparece, se dice que es un "orden faltante".

Note del ejemplo 35-4 que el número de franjas de interferencia en el pico de difracción central depende sólo de la razón d/D. No depende de la longitud de onda λ. El espaciamiento real (en ángulo o en posición sobre la pantalla) sí depende de λ. Para el caso ilustrado, $D = 10\lambda$ y, por lo tanto, el primer mínimo de difracción se presenta en $\text{sen}\,\theta = \lambda/D = 0.10$ o aproximadamente 6º.

En la figura 35-11 se muestra la disminución en intensidad de las franjas de interferencia lejos del centro, como se graficó en la figura 35-10.

Interferencia contra difracción

Los patrones debidos a interferencia y difracción surgen a partir del mismo fenómeno: la superposición de ondas coherentes de diferente fase. Por esa razón, la distinción entre ellos no es tanto física sino más bien por conveniencia de descripción, como en esta sección, donde se estudió el patrón de doble rendija en términos de interferencia y difracción por separado. En general, la palabra "difracción" se utiliza cuando se hace referencia a un análisis mediante superposición de muchas fuentes infinitesimales y a menudo contiguas, como cuando se subdivide una fuente en partes infinitesimales. El término "interferencia" se emplea cuando se superpone la onda a partir de un número finito (y por lo general pequeño) de fuentes coherentes.

35–4 Límites de resolución; aberturas circulares

La capacidad de una lente para producir distintas imágenes de dos objetos puntuales muy cercanos se llama **resolución** de la lente. Cuanto más juntas estén las imágenes sin dejar de distinguirse (es decir, sin que se vean como manchas traslapadas), mayor será la resolución. La resolución de la lente de una cámara, por ejemplo, con frecuencia se especifica como tantos puntos o líneas por milímetro, como se mencionó en la sección 33-5.

Dos factores principales limitan la resolución de una lente. El primero está constituido por las aberraciones de la lente. Como se vio en el capítulo 33, a causa de las aberraciones esféricas y algunas otras, un objeto puntual no es un punto sobre la imagen, sino una pequeña mancha. El diseño cuidadoso de lentes compuestas logra reducir significativamente las aberraciones, pero no las elimina por completo. El segundo factor que limita la resolución es la *difracción*, que no se puede corregir ya que es un resultado natural de la naturaleza ondulatoria de la luz. A continuación la analizaremos.

En la sección 35-1 se vio que, puesto que la luz viaja como onda, la luz proveniente de una fuente puntual que pasa a través de una rendija se dispersa en un patrón de difracción (figuras 35-2 y 35-4). Una lente, en tanto que tiene bordes, actúa como una rendija redonda. Cuando una lente forma la imagen de un objeto puntual, la imagen en realidad es un pequeño patrón de difracción. Por consiguiente, *una imagen sería borrosa incluso si no hubiera aberraciones*.

En el análisis que sigue se supone que la lente está libre de aberraciones, así que es posible concentrarse en los efectos de la difracción y en cuánto limitan la resolución de una lente. En la figura 35-4 se vio que el patrón de difracción producido por la luz que pasa a través de una rendija rectangular tiene un máximo central donde incide la mayor parte de la luz. Este pico central cae a un mínimo en cualquier lado de su centro en un ángulo θ dado por $\operatorname{sen}\theta = \lambda/D$ (ésta es la ecuación 35-1), donde D es el ancho de la rendija y λ la longitud de onda de la luz utilizada. θ es el ancho medio angular del máximo central y para ángulos pequeños se representa como

$$\theta \approx \operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{D}.$$

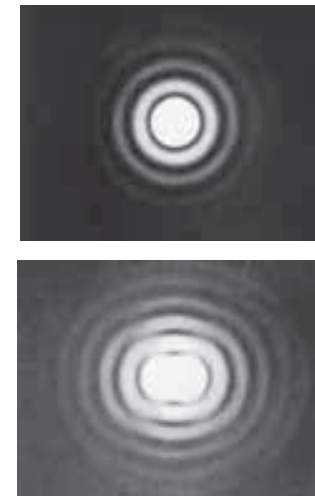
También hay franjas de baja intensidad más allá.

Para una lente, o cualquier orificio circular, la imagen de un objeto puntual consistirá en un pico central *circular* (llamado *punto de difracción* o *disco Airy*) rodeado por franjas circulares más débiles, como se ilustra en la figura 35-12a. El máximo central tiene un ancho medio angular dado por

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D},$$

donde D es el diámetro de la abertura circular. Éste es un resultado teórico para un círculo o lente perfecto. Para lentes o círculos reales, el factor está en el orden de 1 o 2. Esta fórmula difiere de aquella para una rendija (ecuación 35-1) por el factor 1.22. Este factor aparece porque el ancho de un orificio circular no es uniforme (como una rendija rectangular), sino que varía desde su diámetro D hasta cero. Un análisis matemático demuestra que el ancho "promedio" es $D/1.22$. En consecuencia, se obtiene la ecuación anterior en vez de la ecuación 35-1. En la figura 35-13 se muestra la intensidad de la luz en el patrón de difracción de la luz proveniente de una fuente puntual que pasa a través de una abertura circular. La imagen para una fuente no puntual es una superposición de tales patrones. Para la mayoría de los propósitos es necesario considerar sólo la mancha central, pues los anillos concéntricos son mucho más tenues.

Si dos objetos puntuales están muy juntos, los patrones de difracción de sus imágenes se traslaparán como se muestra en la figura 35-12b. Conforme los objetos se acer-

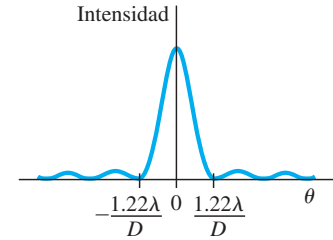


a)

b)

FIGURA 35–12 Fotografías de imágenes (enormemente amplificadas) formadas por una lente, que muestran el patrón de difracción de una imagen para: *a*) un solo objeto puntual; *b*) dos objetos puntuales cuyas imágenes apenas están resueltas.

FIGURA 35–13 Intensidad de la luz a través del patrón de difracción de un orificio circular.



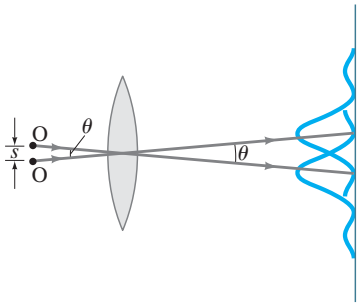


FIGURA 35–14 El *criterio de Rayleigh*. Dos imágenes apenas son resolubles cuando el centro del pico de difracción de una está directamente sobre el primer mínimo en el patrón de difracción de la otra. Los dos objetos puntuales O y O′ subtienden un ángulo θ en la lente; para cada objeto sólo se dibuja un rayo (el que pasa a través del centro de la lente), para indicar el centro del patrón de difracción de su imagen.

FIGURA 35–15 El Telescopio Espacial Hubble, con la Tierra como fondo. Los enormes paneles planos son celdas solares que colectan energía proveniente del Sol.

quen más, se llegará a una separación donde no se pueda decir si existen dos imágenes traslapadas o una sola. Distintos observadores juzgarán la separación a la que esto ocurre de manera diferente. Sin embargo, un criterio generalmente aceptado es el que propuso Lord Rayleigh (1842-1919). El **criterio de Rayleigh** afirma que *dos imágenes apenas son resolubles cuando el centro del disco de difracción de una imagen está directamente sobre el primer mínimo en el patrón de difracción de la otra.* Esto se ilustra en la figura 35-14. Como el primer mínimo está a un ángulo $\theta = 1.22\lambda/D$ del máximo central, la figura 35-14 muestra que dos objetos se pueden considerar *apenas resolubles* si están separados al menos por un ángulo θ dado por

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}. \qquad [\theta \text{ en radianes}] \quad \textbf{(35–10)}$$

En esta ecuación, D es el diámetro de la lente y también se aplica al diámetro de un espejo. Éste es el límite impuesto sobre la resolución por la naturaleza ondulatoria de la luz debido a la difracción. Un ángulo más pequeño significa mejor resolución: es posible distinguir objetos más cercanos. A partir de la ecuación 35-10 se ve que emplear una longitud de onda más corta λ permite reducir θ y, en consecuencia, aumentar la resolución.

EJERCICIO B Luz verde (550 nm) pasa a través de la lente de una cámara de 25 mm de diámetro. ¿Cuál es el ancho medio angular del patrón de difracción resultante? *a*) 2.7×10^{-5} grados, *b*) 1.5×10^{-3} grados, *c*) 3.2°, *d*) 27°, *e*) 1.5×10^{3} grados.

EJEMPLO 35–5 **Telescopio Espacial Hubble.** El Telescopio Espacial Hubble (HST) es un telescopio reflector que se colocó en órbita sobre la atmósfera de la Tierra, de manera que su resolución no estuviera limitada por turbulencia en la atmósfera (figura 35-15). El diámetro de su objetivo es 2.4 m. Para luz visible, digamos, $\lambda = 550$ nm, estime la mejora en resolución que ofrece el Hubble sobre los telescopios ubicados en la Tierra, que están limitados en resolución debido al movimiento de la atmósfera terrestre a casi la mitad de un arco segundo. (Cada grado se divide en 60 minutos, y cada uno contiene 60 segundos, de manera que $1° = 3600$ arco segundos).

PLANTEAMIENTO La resolución angular para el Hubble está dada (en radianes) por la ecuación 35-10. Se conoce la resolución para los telescopios en la Tierra, y primero se convierte a radianes para poder comparar.

SOLUCIÓN Los telescopios en la Tierra están limitados a una resolución angular de

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^{\circ}}\right) = 2.4 \times 10^{-6} \text{ rad}.$$

El Hubble, por otra parte, está limitado por la difracción (ecuación 35-10) que, para $\lambda = 550$ nm, es

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{1.22(550 \times 10^{-9}\,\text{m})}{2.4\,\text{m}} = 2.8 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

lo que representa casi diez veces mejor resolución (2.4×10^{-6} rad/2.8×10^{-7} rad $\approx 9\times$).

EJEMPLO 35–6 **ESTIMACIÓN** **Resolución del ojo.** Usted va a bordo de un avión a una altitud de 10,000 m. Si mira hacia abajo, hacia tierra, estime la separación mínima s entre los objetos que podría distinguir. ¿Podría contar los autos en un estacionamiento? Considere sólo la difracción y suponga que su pupila mide aproximadamente 3.0 mm de diámetro y $\lambda = 550$ nm.

PLANTEAMIENTO Use el criterio de Rayleigh, ecuación 35-10, para estimar θ. La separación s de los objetos es $s = \ell\theta$, donde $\ell = 10^4$ m y θ está en radianes.

SOLUCIÓN En la ecuación 35-10, se establece que $D = 3.0$ mm para la abertura del ojo:

$$s = \ell\theta = \ell\frac{1.22\lambda}{D} = \frac{(10^4\,\text{m})(1.22)(550 \times 10^{-9}\,\text{m})}{3.0 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 2.2\,\text{m}.$$

Sí, usted apenas podría distinguir un automóvil (2 m de ancho por 3 o 4 m de largo) y contar los autos que hay en un estacionamiento.

FÍSICA APLICADA
Qué tan bien puede ver el ojo

35–5 Resolución de telescopios y microscopios; el límite λ

Es posible que piense que se podría diseñar un microscopio o un telescopio para producir cualquier amplificación deseada, en función de la elección de longitudes focales y de la calidad de las lentes. Pero esto no es posible a causa de la difracción. Un aumento en amplificación sobre cierto punto simplemente da por resultado amplificación de los patrones de difracción. Esto puede conducir a errores enormes, pues se podría pensar que uno ve detalles de un objeto cuando en realidad está viendo detalles del patrón de difracción. Para examinar este problema, aplicaremos el criterio de Rayleigh: dos objetos (o dos puntos cercanos en un objeto) apenas son resolubles si están separados por un ángulo θ (figura 35-14) dado por la ecuación 35-10:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}.$$

Esta fórmula es válida para cualquier microscopio o telescopio, donde D es el diámetro del espejo o de la lente objetivo. Para un telescopio, la resolución se especifica al establecer θ mediante esta ecuación.[†]

FIGURA 35–16 El radiotelescopio de 300 m de Arecibo, Puerto Rico, usa ondas de radio (figura 31-12) en vez de luz visible.

EJEMPLO 35–7 Resolución de un telescopio (onda de radio contra luz visible). ¿Cuál es la mínima separación angular teórica de dos estrellas que apenas se pueden resolver mediante *a*) el telescopio de 200 pulgadas de monte Palomar (figura 33-38c); y *b*) el radiotelescopio de Arecibo (figura 35-16), cuyo diámetro es de 300 m y cuyo radio de curvatura también es de 300 m. Suponga que $\lambda = 550$ nm para el telescopio de luz visible en el inciso *a*) y $\lambda = 4$ cm (la longitud de onda más corta a la que se ha operado el radiotelescopio) para el inciso *b*).

PLANTEAMIENTO Aplicamos el criterio de Rayleigh (ecuación 35-10) para cada telescopio.

SOLUCIÓN *a*) Como $D = 200$ pulgadas $= 5.1$ m, a partir de la ecuación 35-10 se tiene que

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{(1.22)(5.50 \times 10^{-7}\,\text{m})}{(5.1\,\text{m})} = 1.3 \times 10^{-7}\,\text{rad},$$

o 0.75×10^{-5} grados. (¡Note que esto es equivalente a resolver dos puntos separados menos de 1 cm desde una distancia de 100 km!)

b) Para ondas de radio con $\lambda = 0.04$ m emitidas por las estrellas, la resolución es

$$\theta = \frac{(1.22)(0.04\,\text{m})}{(300\,\text{m})} = 1.6 \times 10^{-4}\,\text{rad}.$$

La resolución es menor porque la longitud de onda es mucho mayor, pero el objetivo más grande recolecta más radiación y, por lo tanto, detecta objetos menos brillantes.

NOTA En ambos casos, se determinó el límite impuesto por la difracción. La resolución para un telescopio terrestre de luz visible no es tan buena a causa de las aberraciones y, algo más importante, a causa de la turbulencia en la atmósfera. De hecho, los objetivos de diámetro grande no se justifican por un aumento en la resolución, sino por su mayor capacidad para recolectar luz: permiten que entre más luz, por lo que se pueden ver objetos menos brillantes. A los radiotelescopios no les estorba la turbulencia atmosférica, y la resolución que se encontró en *b*) es una buena estimación.

[†]Los telescopios en la Tierra con objetivos de gran diámetro generalmente están limitados, no por la difracción, sino por otros efectos como la turbulencia en la atmósfera. Por otra parte, la resolución de un microscopio de gran calidad normalmente *está* limitada por la difracción; los objetivos de los microscopios son complejas lentes compuestas que contienen muchos elementos de diámetro pequeño (puesto que f es pequeña), y así se reducen las aberraciones.

Para un microscopio, es más conveniente especificar la distancia real s entre dos puntos que apenas son resolubles: véase la figura 35-14. Como los objetos normalmente se colocan cerca del punto focal del objetivo del microscopio, el ángulo que subtienden los dos objetos es $\theta = s/f$, de manera que $s = f\theta$. Si esto se combina con la ecuación 35-10, se obtiene el **poder de resolución (PR)** de un microscopio

$$\text{RP} = s = f\theta = \frac{1.22\lambda f}{D}, \qquad \textbf{(35–11)}$$

donde f es la distancia focal de la lente del objetivo (no una frecuencia). Esta distancia s se llama poder de resolución de la lente porque es la separación mínima de dos puntos que apenas se pueden resolver suponiendo la lente de mayor calidad, pues este límite lo impone la naturaleza ondulatoria de la luz. Un menor PR significa mejor resolución, es decir, mayor detalle.

EJERCICIO C ¿Cuál es el poder de resolución de un microscopio con un objetivo de 5 mm de diámetro, con $f = 9$ mm? *a*) 550 nm, *b*) 750 nm, *c*) 1200 nm, *d*) 0.05 nm, *e*) 0.005 nm.

La difracción impone un límite final al detalle que se puede apreciar en cualquier objeto. En la ecuación 35-11 para el poder de resolución de un microscopio, la distancia focal de una lente prácticamente no se puede hacer menor (aproximadamente) que el radio de la lente, e incluso esto es muy difícil (véase la ecuación del fabricante de lentes, ecuación 33-4). En este caso, la ecuación 35-11 da, con $f \approx D/2$,

$$\text{RP} \approx \frac{\lambda}{2}. \qquad \textbf{(35–12)}$$

Por lo tanto, se puede decir, dentro de un factor de 2 aproximadamente, que

λ limita la resolución

no es posible distinguir detalles de objetos más pequeños que la longitud de onda de la radiación que se utiliza.

Ésta es una importante y útil regla empírica.

Las lentes compuestas de los microscopios ahora se diseñan tan bien que el límite real en la resolución a menudo lo impone la difracción, esto es, la longitud de onda de la luz utilizada. Para obtener mayor detalle se debe usar radiación de longitud de onda más corta. El uso de radiación UV permite aumentar la resolución en un factor tal vez de 2. Sin embargo, fue mucho más importante el descubrimiento, a principios del siglo XX, de que los electrones tenían propiedades ondulatorias (capítulo 37) y que sus longitudes de onda podían ser muy pequeñas. La naturaleza ondulatoria de los electrones se utiliza en el microscopio electrónico (sección 37-8), que es capaz de amplificar de 100 a 1000 veces más que un microscopio de luz visible gracias a las longitudes de onda mucho más cortas. Los rayos X también tienen longitudes de onda muy cortas y con frecuencia se utilizan para estudiar objetos con gran detalle (sección 35-10).

*35–6 Resolución del ojo humano y amplificación útil

La resolución del ojo humano está limitada por varios factores, todos de aproximadamente el mismo orden de magnitud. La resolución es mejor en la fóvea, donde la separación entre los conos es menor, de alrededor de 3 μm (= 3000 nm). El diámetro de la pupila varía desde más o menos 0.1 cm hasta aproximadamente 0.8 cm. De manera que para $\lambda = 500$ nm (donde la sensibilidad del ojo es mayor), el límite de difracción es de alrededor de $\theta \approx 1.22\lambda/D \approx 8 \times 10^{-5}$ rad a 6×10^{-4} rad. El ojo mide aproximadamente 2 cm de largo, lo que da un poder de resolución (ecuación 35-11) de $s \approx (2 \times 10^{-2}\,\text{m})(8 \times 10^{-5}\,\text{rad}) \approx 2\,\mu\text{m}$ en el mejor de los casos, hasta más o menos 10 μm en el peor de los casos (pupila pequeña). Las aberraciones esférica y cromática también limitan la resolución a alrededor de 10 μm. El resultado neto es que el ojo apenas logra distinguir objetos cuya separación angular es de alrededor de

$$5 \times 10^{-4}\,\text{rad}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{mejor resolución}\\ \text{del ojo}\end{array}\right]$$

Esto corresponde a objetos separados 1 cm a una distancia de unos 20 m.

El punto cercano típico de un ojo humano es aproximadamente de 25 cm. A esta distancia, el ojo apenas logra distinguir objetos que están separados (25 cm) $(5 \times 10^{-4}\,\text{rad}) \approx 10^{-4}\,\text{m} = \frac{1}{10}\,\text{mm}$. Como los mejores microscopios de luz logran resolver objetos no menores a aproximadamente 200 nm cuando mucho (ecuación 35-12 para luz violeta, $\lambda = 400$ nm), la amplificación útil [= (resolución del ojo)/(resolución del microscopio)] está limitada a más o menos

$$\frac{10^{-4}\,\text{m}}{200 \times 10^{-9}\,\text{m}} \approx 500\times. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{máxima amplificación}\\ \text{útil de microscopio}\end{array}\right]$$

En la práctica, a menudo se usan amplificaciones de aproximadamente 1000× para minimizar la tensión ocular. Cualquier amplificación mayor simplemente haría visible el patrón de difracción producido por el objetivo del microscopio.

Ahora tiene las respuestas a la pregunta de inicio de capítulo: *c*) por la ecuación anterior y *c*) por la regla λ.

35–7 Rejilla de difracción

Una gran cantidad de rendijas paralelas igualmente espaciadas se denomina **rejilla de difracción**, aunque el término "rejilla de interferencia" quizá sea más adecuado. Las rejillas se fabrican al trazar con precisión líneas paralelas muy finas sobre una placa de vidrio. Los espacios sin tocar entre las líneas sirven como las rendijas. Las transparencias fotográficas de una rejilla original sirven como rejillas poco costosas. Son comunes las rejillas que contienen 10,000 líneas por centímetro, y son muy útiles para mediciones precisas de longitudes de onda. Una rejilla de difracción que contiene rendijas se llama **rejilla de transmisión**. Otro tipo de rejilla de difracción es la **rejilla de reflexión**, que se obtiene al trazar líneas finas sobre una superficie metálica o de vidrio en la cual se refleja la luz y luego se analiza. El análisis básicamente es el mismo que para una rejilla de transmisión, que se estudia a continuación.

El análisis de una rejilla de difracción es muy parecido al del experimento de Young de la doble rendija. Se supone que rayos paralelos de luz inciden sobre la rejilla, como se ilustra en la figura 35-17. También se supone que las rendijas son suficientemente estrechas como para que la difracción en cada una de ellas disperse la luz en un ángulo muy amplio sobre una pantalla distante más allá de la rejilla, y para que pueda ocurrir interferencia con la luz proveniente de todas las demás rendijas. Los rayos de luz que pasan a través de cada rendija sin desviación ($\theta = 0°$) interfieren de manera constructiva para producir una línea brillante en el centro de la pantalla. También ocurre interferencia constructiva a un ángulo θ tal que los rayos provenientes de rendijas adyacentes recorren una distancia adicional de $\Delta\ell = m\lambda$, donde m es un entero. Si d es la distancia entre rendijas, entonces, a partir de la figura 35-17, se ve que $\Delta\ell = d \operatorname{sen}\theta$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d}, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \qquad \left[\begin{array}{c}\text{máximos principales,}\\ \text{rejilla de difracción}\end{array}\right] \quad \textbf{(35–13)}$$

es el criterio para tener un máximo brillante. Ésta es la misma ecuación que para la situación de doble rendija, y de nuevo m se llama orden del patrón.

Existe una importante diferencia entre un patrón de doble rendija y uno de múltiples rendijas. Los máximos brillantes son mucho *mejor definidos* y *más estrechos* en el caso de una rejilla. ¿Por qué? Suponga que el ángulo θ aumenta apenas ligeramente más allá del requerido para un máximo. En el caso de sólo dos rendijas, las dos ondas estarán sólo ligeramente fuera de fase, así que ocurre interferencia constructiva casi completa. Esto significa que los máximos son anchos (véase la figura 34-9). Para una rejilla, las ondas provenientes de dos rendijas adyacentes tampoco estarán significativamente fuera de fase. Pero las ondas provenientes de una rendija y las provenientes de una segunda a unos cientos de rendijas de distancia podrían estar exactamente fuera de fase; de esta forma, se puede cancelar en pares toda o casi toda la luz. Por ejemplo, suponga que el ángulo θ apenas es diferente de su máximo de primer orden, así que la longitud adicional de la trayectoria para un par de rendijas adyacentes no es exactamente λ, sino más bien 1.0010λ. La onda a través de una rendija y otra localizada 500 rendijas más abajo tendrán una diferencia de trayectoria de $1\lambda + (500)(0.0010\text{l}) = 1.5000\lambda$. o $1\frac{1}{2}$ longitudes de onda, así que las dos se cancelarán. Un par de rendijas, cada una debajo de éstas, también se cancelarán. Esto es, la luz proveniente de la rendija 1 se cancela con la proveniente de la rendija 501; la luz proveniente de la rendija 2 se cancela con la de la rendija 502, etcétera. Por lo tanto, incluso para un ángulo pequeño[†] correspondiente a una longitud de trayectoria adicional de $\frac{1}{1000}\lambda$, existe mucha interferencia destructiva y, por lo tanto, los máximos son muy estrechos. Cuanto mayor sea el número de líneas que haya en una rejilla, más pronunciados serán los picos (véase la figura 35-18). Puesto que una rejilla produce líneas mucho más definidas que las que producen dos rendijas solas (y líneas mucho más brillantes, porque hay muchas más rendijas), la rejilla es un dispositivo mucho más preciso para medir longitudes de onda.

[†]Dependiendo del número total de rendijas, puede o no haber cancelación completa para tal ángulo, de manera que entre los máximos principales habrá picos muy pequeños (véase la figura 35-18b), pero generalmente son demasiado pequeños como para verse.

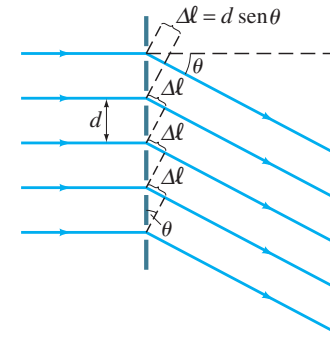
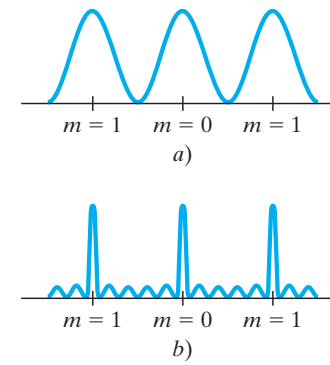


FIGURA 35–17 Rejilla de difracción.

⚠ CUIDADO

La rejilla de difracción se analiza empleando fórmulas de interferencia, no de fórmulas de difracción

FIGURA 35–18 Intensidad como función del ángulo de visión θ (o posición sobre la pantalla) para *a*) dos rendijas, *b*) seis rendijas. Para una rejilla de difracción, el número de rendijas es muy grande ($\approx 10^4$) y los picos son todavía más estrechos.



Suponga que la luz que incide sobre una rejilla de difracción no es monocromática, sino que consiste en dos o más longitudes de onda distintas. Entonces, para todos los órdenes distintos de $m = 0$, cada longitud de onda producirá un máximo en un ángulo diferente (figura 35-19a), tal como para una doble rendija. Si sobre una rejilla incide luz blanca, el máximo central ($m = 0$) será un pico blanco pronunciado. Pero para todos los demás órdenes habrá un espectro de colores distinto, disperso sobre cierto ancho angular, figura 35-19b. Puesto que una rejilla de difracción dispersa la luz en sus diferentes longitudes de onda, al patrón resultante se le llama **espectro**.

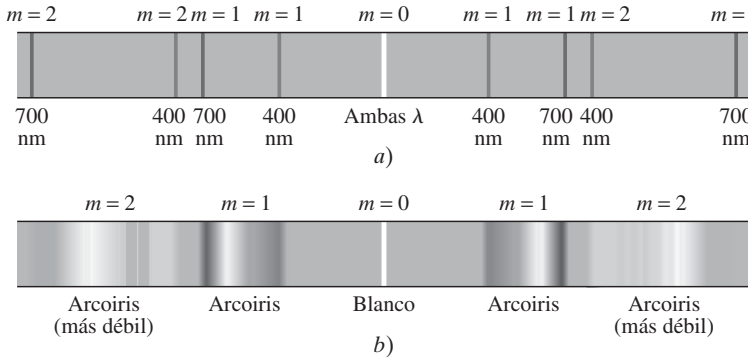


FIGURA 35–19 Espectros producidos por una rejilla: *a*) dos longitudes de onda, 400 nm y 700 nm; *b*) luz blanca. El segundo orden normalmente será más tenue que el primer orden. (No se muestran órdenes superiores). Si el espaciamiento de la rejilla es suficientemente pequeño, el segundo orden así como los órdenes superiores desaparecerán. (Véase el pliego a color al final del libro).

EJEMPLO 35–8 **Rejilla de difracción: líneas.** Determine las posiciones angulares de los máximos de primer y segundo órdenes para luces con longitudes de onda de 400 nm y 700 nm que inciden sobre una rejilla que contiene 10,000 líneas/cm.

PLANTEAMIENTO Primero encuentre la distancia d entre las líneas de la rejilla: si la rejilla tiene N líneas en 1 m, entonces la distancia entre líneas debe ser $d = 1/N$ metros. Luego use la ecuación 35-13, $\text{sen}\,\theta = m\lambda/d$, con la finalidad de encontrar los ángulos para las dos longitudes de onda en el caso de $m = 1$ y 2.

SOLUCIÓN La rejilla contiene 1.00×10^4 líneas/cm $= 1.00 \times 10^6$ líneas/m, lo que significa que la distancia entre líneas es $d = (1/1.00 \times 10^6)$ m $= 1.00 \times 10^{-6}$ m $= 1.00\ \mu$m. En el primer orden ($m = 1$), los ángulos son

$$\text{sen}\,\theta_{400} = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(1)(4.00 \times 10^{-7}\,\text{m})}{1.00 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 0.400$$

$$\text{sen}\,\theta_{700} = \frac{(1)(7.00 \times 10^{-7}\,\text{m})}{1.00 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 0.700$$

de manera que $\theta_{400} = 23.6°$ y $\theta_{700} = 44.4°$. En el segundo orden,

$$\text{sen}\,\theta_{400} = \frac{2\lambda}{d} = \frac{(2)(4.00 \times 10^{-7}\,\text{m})}{1.00 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 0.800$$

$$\text{sen}\,\theta_{700} = \frac{(2)(7.00 \times 10^{-7}\,\text{m})}{1.00 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 1.40$$

de manera que $\theta_{400} = 53.1°$. Pero el segundo orden no existe para $\lambda = 700$ nm porque sen θ no puede superar 1. No aparecerán órdenes superiores.

EJEMPLO 35–9 **Traslape de espectros.** Luz blanca, que contiene longitudes de onda desde 400 nm hasta 750 nm, incide sobre una rejilla que contiene 4000 líneas/cm. Demuestre que el azul en $\lambda = 450$ nm del espectro de tercer orden se traslapa con el rojo a 700 nm del segundo orden.

PLANTEAMIENTO La fórmula $\text{sen}\,\theta = m\lambda/d$ permite calcular las posiciones angulares del máximo azul $m = 3$ y del rojo $m = 2$.

SOLUCIÓN El espaciamiento de la rejilla es $d = (1/4000)\text{ cm} = 2.50 \times 10^{-6}\text{ m}$. El azul del tercer orden se presenta a un ángulo θ dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(3)(4.50 \times 10^{-7}\text{ m})}{(2.50 \times 10^{-6}\text{ m})} = 0.540.$$

El rojo en el segundo orden se presenta en

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(2)(7.00 \times 10^{-7}\text{ m})}{(2.50 \times 10^{-6}\text{ m})} = 0.560,$$

que es un ángulo mucho mayor; de manera que el segundo orden se traslapa con el comienzo del espectro de tercer orden.

EJEMPLO CONCEPTUAL 35–10 **Disco compacto.** Cuando se mira la superficie de un CD de música (figura 35-20, véase el pliego a color al final del libro), se distinguen los colores de un arcoíris. *a*) Estime la distancia entre las líneas curvas (que lee un láser). *b*) Estime la distancia entre líneas, y note que un CD contiene cuando mucho 80 min de música, que gira con rapidez de 200 a 500 rev/min, y que $\frac{2}{3}$ de su radio de 6 cm contienen las líneas.

RESPUESTA *a*) El CD actúa como una rejilla de difracción y reflexión. Para satisfacer la ecuación 35-13, puede estimar el espaciamiento de anillo como una o algunas (2 o 3) longitudes de onda ($\lambda \approx 550$ nm) o 0.5 a 1.5 μm. *b*) La rapidez de rotación promedio de 350 rev/min por 80 min produce 28,000 rotaciones totales, o 28,000 líneas, que se dispersan sobre $(\frac{2}{3})(6\text{ cm}) = 4$ cm. Así que se tiene una especie de rejilla de difracción y reflexión con aproximadamente (28,000 líneas)/(4 cm) = 7000 líneas/cm. La distancia d entre líneas es aproximadamente $1\text{ cm}/7000\text{ líneas} \approx 1.4 \times 10^{-6}$ m $= 1.4$ μm. Los resultados en *a*) y *b*) concuerdan.

FIGURA 35–20 Disco compacto, ejemplo 35.10. (Véase el pliego a color al final del libro).

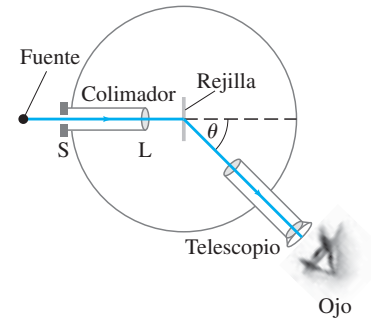
35–8 El espectrómetro y espectroscopia

Un **espectrómetro** o **espectroscopio**, figura 35-21, es un dispositivo para medir longitudes de onda con exactitud mediante una rejilla (o un prisma) de difracción para separar las diferentes longitudes de onda de la luz. La luz proveniente de una fuente pasa a través de una estrecha rendija S en el "colimador". La rendija está en el punto focal de la lente L, así que sobre la rejilla incide luz paralela. El telescopio móvil puede llevar los rayos a un foco. En el telescopio no se verá nada a menos que se coloque en un ángulo θ que corresponda a un pico de difracción (por lo general se usa el primer orden) de una longitud de onda emitida por la fuente. El ángulo θ se puede medir con mucha exactitud, de manera que la longitud de onda de una línea se determina con alto grado de exactitud al emplear la ecuación 35-13:

$$\lambda = \frac{d}{m}\operatorname{sen}\theta,$$

donde m es un entero que representa el orden y d es la distancia entre líneas de la rejilla. La línea que se ve en un espectrómetro, correspondiente a cada longitud de onda, en realidad es una imagen de la rendija S. Una rendija más estrecha da por resultado una luz más tenue, pero las posiciones angulares se pueden medir con más precisión. Si la luz contiene un rango continuo de longitudes de onda, entonces en el espectroscopio se observa un espectro continuo.

FIGURA 35–21 Espectrómetro o espectroscopio.



El espectrómetro de la figura 35-21 utiliza una rejilla de transmisión. Otros emplean una rejilla de reflexión, o en ocasiones un prisma. Un prisma funciona gracias a la dispersión (sección 32-6), que desvía la luz de diferentes longitudes de onda en diferentes ángulos. (Un prisma no es un dispositivo lineal y se debe calibrar).

Un importante uso de los espectrómetros es la identificación de átomos o moléculas. Cuando un gas se calienta o una corriente eléctrica pasa a través de él, el gas emite un **espectro de líneas** característico. Esto es, sólo se emiten ciertas longitudes de onda discretas de luz, y éstas son diferentes para distintos elementos y compuestos[†]. La figura 35-22 muestra los espectros de líneas para varios elementos en el estado gaseoso. Los espectros de líneas sólo se presentan para gases a temperaturas altas y presión y densidad bajas. La luz proveniente de sólidos calientes, como el filamento de una bombilla, e incluso de un objeto gaseoso denso como el Sol, produce un **espectro continuo** que incluye un amplio rango de longitudes de onda.

[†]La razón por la que los átomos y las moléculas emiten espectros de líneas fue un gran misterio durante muchos años y desempeñó un papel central en el desarrollo de la teoría cuántica moderna, como se verá en el capítulo 37.

FIGURA 35–22 Espectros de líneas para los gases indicados y el espectro del Sol que muestra líneas de absorción. (Véase el pliego a color al final del libro).

La figura 35-22 también muestra el "espectro continuo" del Sol, que contiene algunas líneas *oscuras* (sólo se incluyen las más prominentes), llamadas **líneas de absorción**. Los átomos y las moléculas pueden absorber luz a las mismas longitudes de onda a las que emiten luz. Las líneas de absorción del Sol se deben a la absorción por parte de átomos y moléculas en la atmósfera exterior más fría del Sol, así como por parte de átomos y moléculas en la atmósfera de la Tierra. Un análisis cuidadoso de todos estos miles de líneas revelan que al menos dos tercios de todos los elementos están presentes en la atmósfera del Sol. También por espectroscopia se determina la presencia de elementos en la atmósfera de otros planetas, en el espacio interestelar y en las estrellas.

FÍSICA APLICADA
Análisis químico y bioquímico mediante espectroscopia

La espectroscopia es útil para determinar la presencia de ciertos tipos de moléculas en especímenes de laboratorio, donde el análisis químico sería difícil. Por ejemplo, el ADN biológico y diferentes tipos de proteínas absorben luz en regiones particulares del espectro (como en la región UV). El material a examinar, que generalmente está en solución, se coloca en un haz de luz monocromática cuya longitud de onda se selecciona mediante el ángulo de colocación de una rejilla o prisma de difracción. La cantidad de absorción, comparada con una solución estándar sin el espécimen, revela no sólo la presencia de un tipo particular de molécula, sino también su concentración.

La emisión y absorción de luz también ocurren afuera de la parte visible del espectro, como en las regiones UV e IR. El vidrio absorbe luz en estas regiones, así que se usan para rejillas de reflexión y espejos (en lugar de lentes). Para la detección se usan tipos especiales de película o sensores.

EJEMPLO 35–11 **Espectro de hidrógeno.** La luz emitida por gas hidrógeno caliente se observa con un espectroscopio que utiliza una rejilla de difracción con 1.00×10^4 líneas/cm. Las líneas espectrales más cercanas al centro (0º) son una línea violeta a 24.2º, una línea azul a 25.7º, una línea azul-verde a 29.1º y una línea roja a 41.0º del centro. ¿Cuáles son las longitudes de onda de estas líneas espectrales del hidrógeno?

PLANTEAMIENTO Las longitudes de onda se determinan a partir de los ángulos con $\lambda = (d/m)\,\text{sen}\,\theta$, donde θ es el espaciamiento entre rendijas y m es el orden del espectro (figura 35-13).

SOLUCIÓN Puesto que éstas son las líneas más cercanas a $\theta = 0º$, éste es el espectro de primer orden ($m = 1$). El espaciamiento entre rendijas es $d = 1/(1.00 \times 10^4\,\text{cm}^{-1}) = 1.00 \times 10^{-6}\,\text{m}$. La longitud de onda de la línea violeta es

$$\lambda = \left(\frac{d}{m}\right)\text{sen}\,\theta = \left(\frac{1.00 \times 10^{-6}\,\text{m}}{1}\right)\text{sen}\,24.2° = 4.10 \times 10^{-7}\,\text{m} = 410\,\text{nm}.$$

Las otras longitudes de onda son

azul: $\lambda = (1.00 \times 10^{-6}\,\text{m})\,\text{sen}\,25.7° = 434\,\text{nm}$,

azul-verde: $\lambda = (1.00 \times 10^{-6}\,\text{m})\,\text{sen}\,29.1° = 486\,\text{nm}$,

rojo: $\lambda = (1.00 \times 10^{-6}\,\text{m})\,\text{sen}\,41.0° = 656\,\text{nm}$.

NOTA En una mezcla desconocida de gases, es necesario ver estas cuatro líneas espectrales para identificar que la mezcla contiene hidrógeno.

*35–9 Anchos de pico y poder de resolución para una rejilla de difracción

Ahora se observará el patrón de los máximos producidos por una rejilla de múltiples rendijas empleando diagramas de fasores. Es posible determinar una fórmula para el ancho de cada pico, y se verá por qué hay pequeños máximos entre los máximos principales, como se indica en la figura 35-18b. Antes que todo, se debe notar que los patrones de doble rendija y de seis rendijas que se ilustran en la figura 35-18 se dibujaron suponiendo rendijas muy estrechas, de manera que la difracción no limita la altura de los picos. Para rejillas de difracción reales, por lo general éste no es el caso: el ancho de rendija D a menudo no es mucho menor que la separación entre rendijas d y, por ende, la difracción limita la intensidad de los picos, de manera que el pico central ($m = 0$) es más brillante que los picos laterales. No nos preocuparemos por este efecto sobre la intensidad; sin embargo, hay que advertir que, si un mínimo de difracción coincide con un orden particular del patrón de interferencia, ese orden no aparecerá. (Por ejemplo, si $d = 2D$, todos los órdenes pares, $m = 2, 4, \ldots$, se perderán. ¿Puede ver por qué? *Sugerencia:* Véase el ejemplo 35-4).

Las figuras 35-23 y 35-24 muestran diagramas de fasores para una rejilla de doble rendija y de seis rendijas, respectivamente. Cada flecha corta representa la amplitud de una onda proveniente de una sola rendija, y su suma vectorial (como fasores) representa la amplitud total para un ángulo de visión θ dado. El inciso *a*) de cada figura muestra el diagrama de fasores en $\theta = 0°$, en el centro del patrón, que es el máximo central ($m = 0$). El inciso *b*) de cada figura muestra la condición para el mínimo adyacente: donde las flechas se cierran por primera vez sobre ellas mismas (suman cero), de manera que la amplitud E_θ es cero. Para dos rendijas, eso ocurre cuando las dos amplitudes separadas están fuera de fase 180°. Para seis rendijas, ocurre cuando cada amplitud forma un ángulo de 60° con su vecina. Para dos rendijas, el mínimo ocurre cuando la fase entre rendijas es $\delta = 2\pi/2$ (en radianes); para seis rendijas, ocurre cuando la fase δ es $2\pi/6$; y en el caso general de N rendijas, el mínimo ocurre para una diferencia de fase entre rendijas adyacentes de

$$\delta = \frac{2\pi}{N}. \qquad \textbf{(35–14)}$$

¿A qué corresponde esto en θ? Note primero que δ se relaciona con θ por (ecuación 35-4)

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d \operatorname{sen}\theta}{\lambda} \qquad \text{o} \qquad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta. \qquad \textbf{(35–15)}$$

Sea $\Delta\theta_0$ la posición angular del mínimo junto al pico en $\theta = 0$. Entonces,

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d \operatorname{sen}\Delta\theta_0}{\lambda}.$$

Inserte la ecuación 35-14 para δ y encuentre

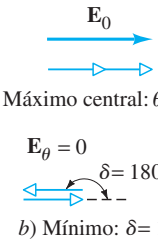
$$\operatorname{sen}\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \qquad \textbf{(35–16a)}$$

Puesto que $\Delta\theta_0$ por lo general es pequeño (N generalmente es muy grande para una rejilla), $\operatorname{sen}\Delta\theta_0 \approx \Delta\theta_0$, de manera que, en el límite de ángulo pequeño, se puede escribir

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \qquad \textbf{(35–16b)}$$

Es claro a partir de cualquiera de las dos últimas relaciones que, cuanto más grande sea N, más estrecho será el pico central. (Para $N = 2$, $\operatorname{sen}\Delta\theta_0 = \lambda/2d$, que es lo que se obtuvo anteriormente para la doble rendija, ecuación 34-2b, con $m = 0$).

Cualquiera de las ecuaciones 35-16 indica por qué los picos se vuelven más estrechos cuando N es más grande. El origen de los pequeños máximos secundarios entre los picos principales (véase la figura 35-18b) se puede deducir a partir del diagrama de la figura 35-25. Ésta es sólo una continuación de la figura 35-24b (donde $\delta = 60°$); pero ahora la fase δ aumentó a casi 90°, donde E_θ es un máximo relativo. Advierta que E_θ es mucho menor que E_0 (figura 35-24a), de manera que la intensidad en este máximo secundario es mucho menor que en un pico principal. Conforme δ (y θ) aumenta aún más, E_θ de nuevo disminuye a cero (un "doble círculo"), entonces llega otro pequeño máximo, y así sucesivamente. Con el tiempo, el diagrama se despliega de nuevo y, cuando $\delta = 360°$, todas las amplitudes yacen de nuevo en una línea recta (como en la figura 35-24a), que corresponde al siguiente máximo principal ($m = 1$ en la ecuación 35-13).

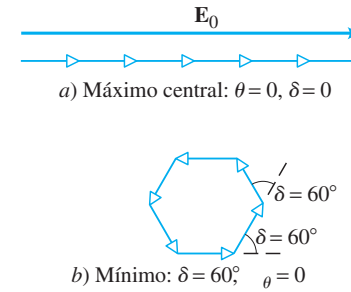


a) Máximo central: $\theta = 0$, $\delta = 0$

b) Mínimo: $\delta = 180°$

FIGURA 35–23 Diagrama de fasores para dos rendijas *a*) en el máximo central, *b*) en el mínimo más cercano.

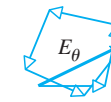
FIGURA 35–24 Diagrama de fasores para seis rendijas *a*) en el máximo central, *b*) en el mínimo más cercano.



a) Máximo central: $\theta = 0$, $\delta = 0$

b) Mínimo: $\delta = 60°$, $\theta = 0$

FIGURA 35–25 Diagrama de fasores para el pico secundario.



La ecuación 35-16b proporciona el ancho medio del pico central ($m = 0$). Para determinar el ancho medio de los picos de orden superior, $\Delta\theta_m$ para el orden m, diferencie la ecuación 35-15 de manera que relacione el cambio $\Delta\delta$ en δ, con el cambio $\Delta\theta$ en el ángulo θ:

$$\Delta\delta \approx \frac{d\delta}{d\theta}\Delta\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta\,\Delta\theta.$$

Si $\Delta\theta_m$ representa el ancho medio de un pico de orden m ($m = 1, 2, \ldots$) (esto es, el ángulo entre el pico máximo y mínimo en cualquier lado), entonces $\Delta\delta = 2\pi/N$, según la ecuación 35-14. Al insertar esto en la relación anterior se encuentra

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m}, \qquad \textbf{(35–17)}$$

donde θ_m es la posición angular del pico m-ésimo, según la ecuación 35-13. Desde luego, esta derivación es válida sólo para $\Delta\delta$ pequeño ($= 2\pi/N$) que de hecho es el caso de las rejillas reales, pues N está en el orden de 10^4 o más.

Una propiedad importante de cualquier rejilla de difracción que se use en un espectrómetro es su capacidad para resolver dos longitudes de onda con un espaciamiento muy cercano (diferencia de longitud de onda $= \Delta\lambda$). El **poder de resolución** R de una rejilla se define como

$$\mathrm{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \qquad \textbf{(35–18)}$$

Con un poco de trabajo, y la ecuación 35-17, es posible demostrar que $\Delta\lambda = \lambda/Nm$, donde N es el número total de líneas de rejilla y m es el orden. Así, se tiene

$$\mathrm{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm. \qquad \textbf{(35–19)}$$

Cuanto más grande sea el valor de R, más juntas pueden estar las dos longitudes de onda y aún así ser resolubles. Si se proporciona R, la separación mínima $\Delta\lambda$ entre dos longitudes de onda cerca de λ es (por la ecuación 35-18)

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{\mathrm{R}}.$$

EJEMPLO 35–12 **Resolución de dos líneas cercanas.** Luz amarilla de sodio, que consiste en dos longitudes de onda, $\lambda_1 = 589.00$ nm y $\lambda_2 = 589.59$ nm, incide sobre una rejilla de difracción de 7500 líneas/cm. Determine *a*) el orden máximo m que se presentará para luz de sodio, *b*) el ancho de rejilla necesario para resolver las dos líneas de sodio.

PLANTEAMIENTO Primero encuentre $d = 1\text{ cm}/7500 = 1.33 \times 10^{-6}$ m, y luego use la ecuación 35-13 para encontrar m. Para *b*), use las ecuaciones 35-18 y 35-19.

SOLUCIÓN *a*) El valor máximo de m para $\lambda = 589$ nm, con la ecuación 35-13 y $\operatorname{sen}\theta \leq 1$, es

$$m = \frac{d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{1.33 \times 10^{-6}\,\text{m}}{5.89 \times 10^{-7}\,\text{m}} = 2.26,$$

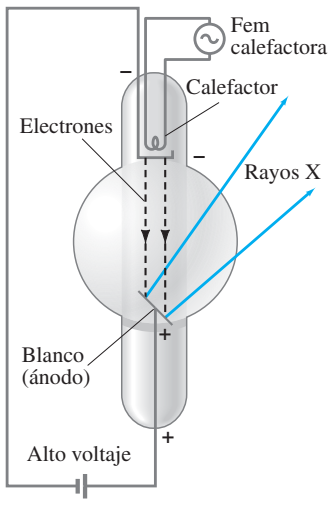
así que $m = 2$ es el máximo orden presente.

b) El poder de resolución necesario es

$$\mathrm{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\text{ nm}}{0.59\text{ nm}} = 1000.$$

De acuerdo con la ecuación 35-19, el número total N de líneas necesarias para el orden $m = 2$ es $N = \mathrm{R}/m = 1000/2 = 500$, de manera que la rejilla sólo necesita tener $500/7500\text{ cm}^{-1} = 0.0667$ cm de ancho. Una rejilla común tiene algunos centímetros de ancho y, por lo tanto, resolverá fácilmente dos líneas.

FIGURA 35–26 Tubo de rayos X. Los electrones emitidos por un filamento caliente en un tubo al vacío se aceleran mediante un alto voltaje. Cuando chocan con la superficie del ánodo, el "blanco", se emiten rayos X.



35–10 Rayos X y difracción de rayos X

En 1895 W. C. Roentgen (1845-1923) descubrió que, cuando se aceleran electrones mediante un alto voltaje en un tubo al vacío y se les permite golpear un vidrio o superficie metálica en el interior del tubo, brillan minerales fluorescentes a cierta distancia, y una película fotográfica podría verse expuesta. Roentgen atribuyó estos efectos a un nuevo tipo de radiación (diferente de los rayos catódicos). Recibieron el nombre de **rayos X** en referencia al símbolo algebraico x, que significa una cantidad desconocida. Roentgen pronto descubrió que los rayos X penetraban a través de algunos materiales mejor que a través de otros, y en pocas semanas presentó la primera fotografía de rayos X (la mano de su esposa). La producción actual de rayos X generalmente se realiza en un tubo (figura 35-26) similar al de Roentgen, empleando comúnmente voltajes de 30 kV a 150 kV.

Las investigaciones acerca de la naturaleza de los rayos X indicaron que no eran partículas con carga (como los electrones), pues no se podían desviar mediante campos eléctricos o magnéticos. Se sugirió que podían ser una forma de luz invisible. Sin embargo, no mostraban efectos de difracción o interferencia al utilizar rejillas ordinarias. De hecho, si sus longitudes de onda eran mucho menores que el espaciamiento ordinario de 10^{-6} m ($= 10^{3}$ nm) de una rejilla, no se esperarían efectos. Alrededor de 1912, Max von Laue (1879-1960) sugirió que si los átomos en un cristal se ordenaban en un arreglo regular (véase la figura 17-2a), tal cristal podría servir como rejilla de difracción para longitudes de onda muy cortas, del orden del espaciamiento entre átomos, el cual se estimaba en alrededor de 10^{-10} m ($= 10^{-1}$ nm). Los experimentos pronto demostraron que los rayos X dispersados por un cristal de hecho mostraban los picos y valles de un patrón de difracción (figura 35-27). Así, al mismo tiempo se demostró que los rayos X tenían naturaleza ondulatoria y que los átomos en un cristal estaban ordenados en forma regular. En la actualidad, los rayos X se reconocen como radiación electromagnética con longitudes de onda en el intervalo de más o menos 10^{-2} nm hasta 10 nm, el rango que se produce fácilmente en un tubo de rayos X.

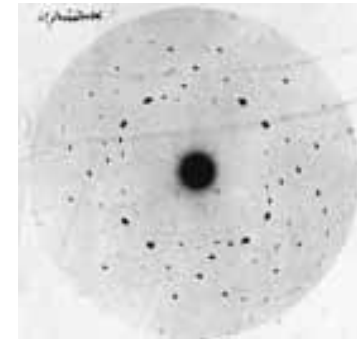
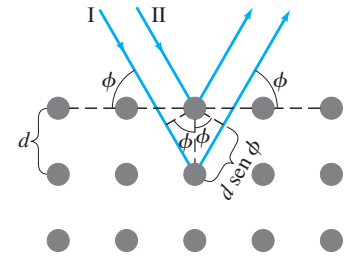


FIGURA 35–27 Este patrón de difracción de rayos X es uno de los primeros observados por Max von Laue en 1912, cuando dirigió un haz de rayos X a un cristal de sulfuro de zinc. El patrón de difracción se detectó directamente sobre una placa fotográfica.

En la sección 35-5 se vio que la luz con longitud de onda más corta brinda mayor resolución cuando se examina un objeto microscópicamente. Como los rayos X tienen longitudes de onda mucho más cortas que la luz visible, en principio ofrecerían mucho mayor resolución. Sin embargo, parecía no haber un material efectivo para usarse como lente en el caso de las longitudes de onda tan cortas de los rayos X. En vez de ello, la astuta pero complicada técnica de **difracción de rayos X** (o **cristalografía**) probó ser muy efectiva para examinar el mundo microscópico de los átomos y las moléculas. En un cristal simple, como el NaCl, los átomos se acomodan en una forma cúbica ordenada, figura 35-28, con átomos espaciados una distancia d. Suponga que un haz de rayos X incide sobre el cristal a un ángulo ϕ con la superficie, y que los dos rayos mostrados se reflejan en dos planos subsiguientes de átomos, como se muestra. Los dos rayos interferirán constructivamente si la distancia adicional que recorre el rayo I es un número entero de longitudes de onda más lejos que la distancia que recorre el rayo II. Esta distancia adicional es $2d$ sen ϕ. Por lo tanto, ocurrirá interferencia constructiva cuando

FIGURA 35–28 Difracción de rayos X mediante un cristal.



$$m\lambda = 2d \operatorname{sen} \phi, \qquad m = 1, 2, 3, \cdots, \tag{35–20}$$

donde m puede ser cualquier entero. (Advierta que ϕ *no* es el ángulo con respecto a la normal a la superficie). A esto se le llama **ecuación de Bragg**, en honor de W. L. Bragg (1890-1971), quien la dedujo y quien, junto con su padre, W. H. Bragg (1862-1942), desarrolló entre 1912 y 1913 la teoría y técnica de difracción de rayos X mediante cristales. Si se conoce la longitud de onda de los rayos X y se mide el ángulo ϕ, es posible obtener la distancia d entre átomos. Ésta es la base de la cristalografía con rayos X.

EJERCICIO D Cuando rayos X con longitud de onda de 0.10×10^{-9} m se dispersan a partir de un cristal de cloruro de sodio, se observa un pico de difracción de segundo orden a 21°. ¿Cuál es el espaciamiento entre los planos de átomos para esta dispersión?

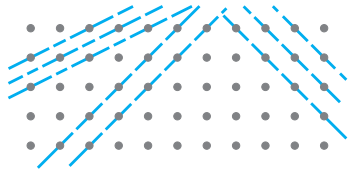
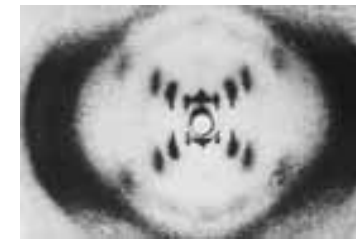


FIGURA 35–29 Los rayos X se pueden difractar en muchos planos posibles dentro de un cristal.

Los patrones de difracción de rayos X reales son bastante complicados. Antes que todo, un cristal es un objeto tridimensional, y los rayos X se pueden difractar de diferentes planos en diferentes ángulos dentro del cristal, como se muestra en la figura 35-29. Aunque el análisis es complejo, se aprende mucho acerca de cualquier sustancia que se pueda poner en forma cristalina.

La difracción de rayos X también fue muy útil para determinar la estructura de moléculas biológicamente importantes, como la estructura de doble hélice del ADN, que dilucidaron James Watson y Francis Crick en 1953. Véase la figura 35-30 y, para modelos de la doble hélice, las figuras 21-47a y 21-48. Alrededor de 1960, con la ayuda de la difracción de rayos X, se dilucidó la primera estructura detallada de una molécula proteica, la mioglobina. Pronto se esclareció la estructura de un importante constituyente de la sangre, la hemoglobina, y desde entonces, con el auxilio de los rayos X, se determinaron las estructuras de una gran cantidad de moléculas.

FIGURA 35–30 Fotografía de difracción de rayos X de moléculas de ADN tomada por Rosalind Franklin a comienzos de la década de 1950. La cruz de manchas sugirió que el ADN era una hélice.



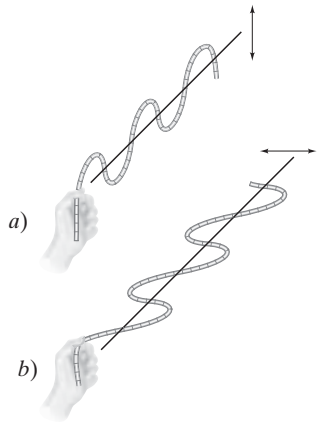


FIGURA 35–31 Ondas transversales en una cuerda polarizada *a*) en un plano vertical y *b*) en un plano horizontal.

FIGURA 35–32 *a*) La onda polarizada verticalmente pasa a través de una rendija vertical, pero *b*) una onda polarizada horizontalmente no lo hará.

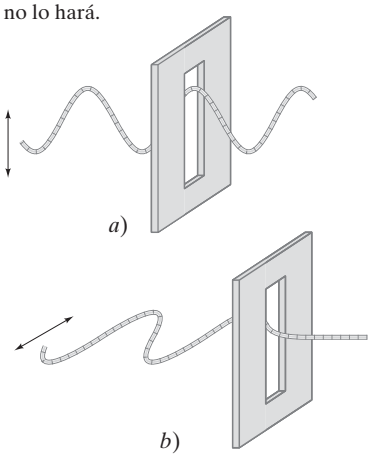


FIGURA 35–33 (abajo) *a*) Oscilación de los vectores de campo eléctrico en luz no polarizada. La luz viaja hacia dentro o hacia fuera de la página. *b*) Campo eléctrico en luz polarizada lineal.

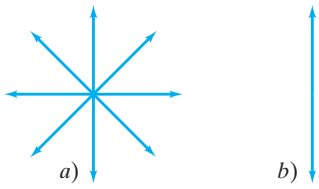


FIGURA 35–34 (derecha) El Polaroid vertical sólo transmite el componente vertical de una onda (campo eléctrico) que incide sobre él.

35–11 Polarización

Una importante y útil propiedad de la luz es que se puede *polarizar*. Para ver lo que esto significa, se examinarán ondas que viajan por una cuerda. Una cuerda se puede poner a oscilar en un plano vertical, como en la figura 35-31a, o en un plano horizontal, como en la figura 35-31b. En cualquier caso, se dice que la onda está **linealmente polarizada** o **plano-polarizada**; esto es, las oscilaciones tienen lugar en un plano.

Si ahora se coloca un obstáculo que contenga una rendija vertical en la trayectoria de la onda, figura 35-32, una onda verticalmente polarizada pasará a través de la rendija vertical, pero una onda polarizada horizontalmente no lo logrará. Si se usara una rendija horizontal, la onda polarizada verticalmente se detendría. Si se usaran ambos tipos de rendijas, ambos tipos de onda se detendrían por una rendija o por otra. Advierta que la polarización puede existir *sólo* para *ondas transversales* y no para ondas longitudinales como el sonido. Estas últimas oscilan sólo a lo largo de la dirección de movimiento y ninguna orientación de las rendijas las detendría.

La luz no necesariamente está polarizada. También puede estar **no polarizada**, lo que significa que la fuente tiene oscilaciones en muchos planos a la vez, como se muestra en la figura 35-33. Una bombilla incandescente ordinaria emite luz no polarizada, como lo hace el Sol.

Polaroid (polarización por absorción)

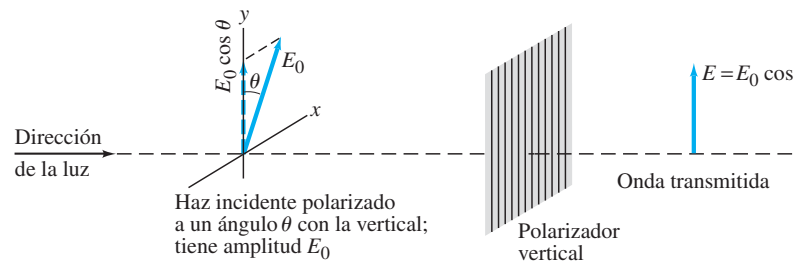
La luz plano-polarizada se obtiene a partir de luz no polarizada utilizando ciertos cristales, como la turmalina, o, más comúnmente, empleando una **hoja Polaroid**. (Edwin Land inventó los materiales Polaroid en 1929.) Una hoja Polaroid consiste en largas moléculas complejas ordenadas en forma paralela entre sí. Tal Polaroid actúa como una serie de rendijas paralelas para permitir que pase una orientación de polarización casi sin disminución. Esta dirección se llama *eje de transmisión* del Polaroid. El Polaroid absorbe casi por completo la polarización perpendicular a esta dirección.

La absorción mediante un Polaroid se explica a nivel molecular. Un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ que oscila paralelo a las moléculas largas puede poner en movimiento a los electrones en dichas moléculas, y de esta forma realiza trabajo sobre ellos y les transfiere energía. En consecuencia, si $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a las moléculas, se absorbe. Un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ perpendicular a las moléculas largas no tiene la posibilidad de realizar trabajo y transferir su energía, por lo tanto, atraviesa libremente. Cuando se habla del *eje de transmisión* de un Polaroid, se hace referencia a la dirección por la que pasa $\vec{\mathbf{E}}$ así que el eje de un Polaroid es *perpendicular* a las moléculas largas. Si queremos pensar que entre las moléculas paralelas hay rendijas en el sentido de la figura 35-32, entonces la figura 35-32 se aplicaría para el campo $\vec{\mathbf{B}}$ en la onda EM, no para el campo $\vec{\mathbf{E}}$.

Si una haz de luz plano-polarizada incide sobre un Polaroid cuyo eje de transmisión está en un ángulo θ con la dirección de polarización incidente, el haz saldrá plano-polarizado paralelo al eje de transmisión del Polaroid, y la amplitud de E se reducirá a $E\cos\theta$, figura 35-34. Por lo tanto, un Polaroid sólo permite el paso de esa componente de polarización (el vector de campo eléctrico, $\vec{\mathbf{E}}$) que es paralela a su eje de transmisión. Puesto que la intensidad de un haz de luz es proporcional al cuadrado de la amplitud (secciones 15-3 y 31-8), se ve que la intensidad de un haz plano-polarizado transmitido por un polarizador es

$$I = I_0 \cos^2\theta, \qquad \left[\begin{array}{c}\text{intensidad de onda plana polarizada}\\ \text{reducida por un polarizador}\end{array}\right] \quad \textbf{(35–21)}$$

donde I_0 es la intensidad entrante y θ es el ángulo entre el eje de transmisión del polarizador y el plano de polarización de la onda entrante.



Un Polaroid se puede usar como **polarizador** para producir luz plano-polarizada a partir de luz no polarizada, puesto que sólo se transmite la componente de luz paralela al eje. Un Polaroid también se puede usar como **analizador** para determinar: **1.** si la luz está polarizada y **2.** el plano de polarización. Un Polaroid que actúa como analizador pasará la misma cantidad de luz independientemente de la orientación de su eje, si la luz es no polarizada; intente dar vuelta a una lente de un par de gafas de sol Polaroid mientras observa a través de ellas una bombilla. Sin embargo, si la luz está polarizada, cuando gire el Polaroid, la luz transmitida será un máximo cuando el plano de polarización sea paralelo al eje del Polaroid, y un mínimo cuando sea perpendicular a él. Si hace esto mientras mira al cielo, de preferencia en ángulos rectos con la dirección del Sol, verá que la luz del cielo está polarizada. (La luz solar directa es no polarizada; pero nunca mire directamente al Sol, ni siquiera a través de un polarizador, porque puede causar daño a sus ojos). Si la luz transmitida por un analizador Polaroid cae a cero en una orientación, entonces la luz es 100% plano-polarizada. Si simplemente alcanza un mínimo, la luz está *parcialmente polarizada*.

La luz no polarizada consiste en luz con direcciones aleatorias de polarización. Cada una de estas direcciones de polarización se puede separar en componentes a lo largo de dos direcciones perpendiculares entre sí. En promedio, un haz no polarizado se puede considerar como dos haces plano-polarizados de igual magnitud y perpendiculares entre sí. Cuando luz no polarizada pasa a través de un polarizador, una componente se elimina. De esta manera, la intensidad de la luz que pasa a través de él se reduce a la mitad, pues se elimina la mitad de la luz: $I = \frac{1}{2} I_0$ (figura 35-35).

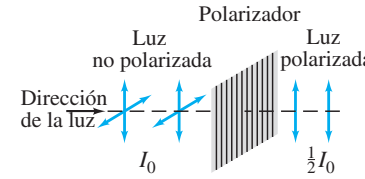


FIGURA 35–35 La luz no polarizada tiene componentes vertical y horizontal de igual intensidad. Luego de pasar a través de un polarizador, una de estas componentes se elimina. La intensidad de la luz se reduce a la mitad.

Cuando dos Polaroid se *cruzan* (esto es, cuando sus ejes de polarización son perpendiculares entre sí), la luz no polarizada se puede detener por completo. Como se observa en la figura 35-36, el primer Polaroid (el polarizador) convierte la luz no polarizada en plano-polarizada. Entonces el segundo Polaroid, el analizador, elimina esta componente, pues su eje de transmisión es perpendicular al primero. Puede intentar esto con gafas de sol Polaroid (figura 35-37). Advierta que los anteojos para sol Polaroid eliminan el 50% de la luz no polarizada en virtud de sus propiedades polarizantes; absorben incluso más porque están coloreados.

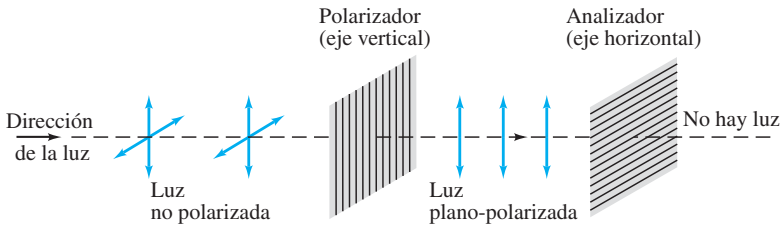


FIGURA 35–36 Los Polaroid cruzados eliminan por completo la luz.

EJEMPLO 35–13 **Dos Polaroid a 60°.** Luz no polarizada pasa a través de dos Polaroid; el eje de uno es vertical y el del otro está a 60° con la vertical. Describa la orientación e intensidad de la luz transmitida.

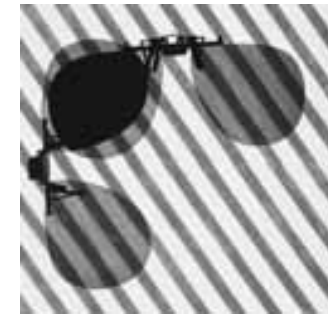
PLANTEAMIENTO La mitad de la luz no polarizada se absorbe en el primer Polaroid y la luz restante sale plano-polarizada. Cuando esa luz pasa a través del segundo Polaroid, la intensidad se reduce aún más, de acuerdo con la ecuación 35-21, y el plano de polarización queda a lo largo del eje del segundo Polaroid.

SOLUCIÓN El primer Polaroid elimina la mitad de la luz, de manera que la intensidad se reduce a la mitad: $I_1 = \frac{1}{2} I_0$. La luz que llega al segundo polarizador está verticalmente polarizada y, por lo tanto, su intensidad se reduce (ecuación 35-21) a

$$I_2 = I_1(\cos 60°)^2 = \tfrac{1}{4} I_1 .$$

En consecuencia, $I_2 = \frac{1}{8} I_0$. La luz transmitida tiene una intensidad de un octavo de la original y está plano-polarizada en un ángulo de 60° con la vertical.

FIGURA 35–37 Polaroid cruzados. Cuando las lentes polarizadas de las dos gafas se traslapan, con ejes perpendiculares, casi no pasa luz a través de ellas.



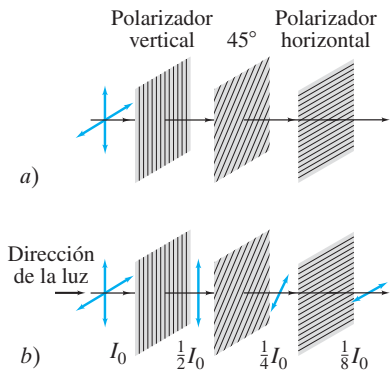


FIGURA 35–38 Ejemplo 35–14.

EJEMPLO CONCEPTUAL 35–14 **Tres Polaroid.** En la figura 35-36 se vio que, cuando la luz no polarizada incide sobre dos Polaroid cruzados (ejes a 90°), no pasa luz a través de ellos. ¿Qué ocurre si entre ellos se coloca un tercer Polaroid con eje a 45° con respecto a los otros dos (figura 35-38a)?

RESPUESTA Comience tal como en el ejemplo 35-13 y recuerde de nuevo que la luz que sale de cada Polaroid está polarizada paralela al eje de ese Polaroid. Por lo tanto, el ángulo en la ecuación 35-21 es el que existe entre los ejes de transmisión de cada par de Polaroid, considerados a la vez. El primer Polaroid cambia la luz no polarizada a plano-polarizada y reduce la intensidad de I_0 a $I_1 = \frac{1}{2}I_0$. El segundo polarizador reduce aún más la intensidad en $(\cos 45°)^2$, ecuación 35-21:

$$I_2 = I_1(\cos 45°)^2 = \tfrac{1}{2}I_1 = \tfrac{1}{4}I_0.$$

La luz que sale del segundo polarizador es plano-polarizada a 45° (figura 35-38b) en relación con el tercer polarizador, de manera que el tercero reduce la intensidad a

$$I_3 = I_2(\cos 45°)^2 = \tfrac{1}{2}I_2,$$

o $I_3 = \frac{1}{8}I_0$. En consecuencia, se transmite $\frac{1}{8}$ de la intensidad original.

NOTA Si no se inserta el Polaroid a 45°, resulta intensidad cero (figura 35-36).

EJERCICIO E ¿Cuánta luz pasaría a través si el polarizador de 45° del ejemplo 35-14 se coloca, no entre los otros dos polarizadores, sino *a*) antes del polarizador vertical (el primero) o *b*) después del polarizador horizontal?

Polarización por reflexión

Otro medio de producción de luz polarizada a partir de luz no polarizada es mediante reflexión. Cuando la luz incide sobre una superficie no metálica en cualquier ángulo distinto a la perpendicular, el haz reflejado se polariza preferentemente en el plano paralelo a la superficie, figura 35-39. En otras palabras, la componente con polarización en el plano perpendicular a la superficie preferentemente se transmite o se absorbe. Es posible comprobar esto al girar las gafas para sol Polaroid mientras a través de ellas observa una superficie plana en un lago o camino. Puesto que la mayoría de las superficies exteriores son horizontales, las gafas Polaroid se fabrican con sus ejes verticales para eliminar el componente horizontal que se refleja con más intensidad y así reducen el destello. La gente que va de pesca usa anteojos Polaroid para eliminar el destello reflejado por la superficie de un lago o corriente y de esta manera logra ver abajo del agua con más claridad (figura 35-40).

FIGURA 35–39 La luz que se refleja en una superficie no metálica, como la superficie lisa del agua en un lago, está parcialmente polarizada en forma paralela a la superficie.

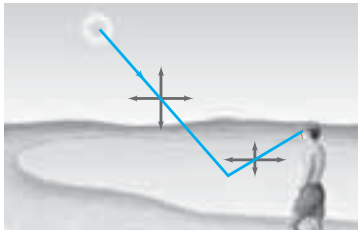
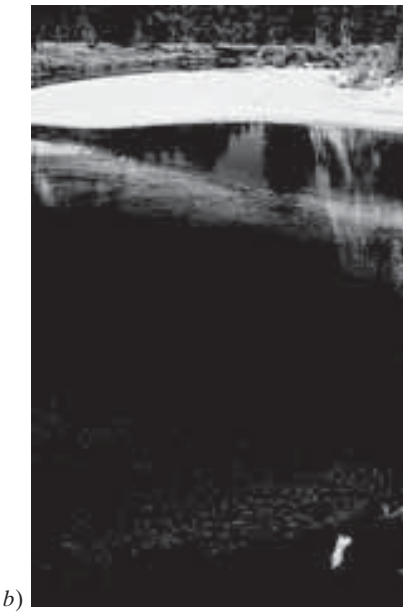


FIGURA 35–40 Fotografías de un río *a*) cuando se permite que toda la luz entre a la lente de la cámara y *b*) utilizando un polarizador. El polarizador se ajusta para absorber la mayor parte de la luz (polarizada) que se refleja en la superficie del agua, lo que permite que la luz más tenue proveniente del fondo del río y cualquier pez que se encuentre ahí se distingan con mayor facilidad. (Véase el pliego a color al final del libro).

a)



b)

La cantidad de polarización en el haz reflejado depende del ángulo, que varía a partir de ninguna polarización en incidencia normal hasta el 100% de polarización en un ángulo que se conoce como **ángulo de polarización**, θ_p.[†] Este ángulo se relaciona con el índice de refracción de los dos materiales en cualquier lado de la frontera mediante la ecuación

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \textbf{(35–22a)}$$

donde n_1 es el índice de refracción del material donde viaja el haz y n_2 es el índice del medio más allá de la frontera de reflexión. Si el haz viaja en aire, $n_1 = 1$ y la ecuación 35-22a se convierte en

$$\tan\theta_p = n. \qquad \textbf{(35–22b)}$$

El ángulo de polarización θ_p también se llama **ángulo de Brewster**, y las ecuaciones 35-22 se conocen como *ley de Brewster*, en honor del físico escocés David Brewster (1781-1868), quien las obtuvo experimentalmente en 1812. Las ecuaciones 35-22 se pueden deducir de la teoría ondulatoria electromagnética de la luz. Es interesante que a un ángulo de Brewster, el rayo reflejado y el rayo transmitido (refractado) forman un ángulo de 90° entre sí; esto es, $\theta_p + \theta_r = 90°$, donde θ_r es el ángulo de refracción (figura 35-41). Esto se puede ver al sustituir la ecuación 35-22a, $n_2 = n_1 \tan\theta_p = n_1 \operatorname{sen}\theta_p/\cos\theta_p$, en la ley de Snell, $n_1 \operatorname{sen}\theta_p = n_2 \operatorname{sen}\theta_r$, para obtener $\cos\theta_p = \operatorname{sen}\theta_r$ que sólo se cumple si $\theta_p = 90° \times \theta_r$.

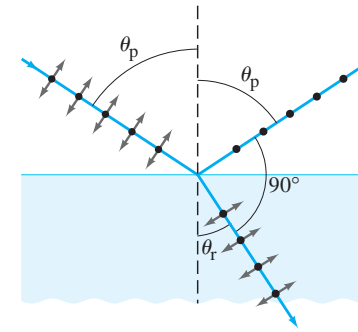


FIGURA 35–41 En θ_p la luz reflejada es plano-polarizada paralela a la superficie y $\theta_p + \theta_r = 90°$, donde θ_r es el ángulo de refracción. (Los puntos grandes representan vibraciones perpendiculares a la página).

EJEMPLO 35–15 **Ángulo de polarización.** *a*) ¿A qué ángulo incidente se refleja la luz solar en un lago plano-polarizado? *b*) ¿Cuál es el ángulo de refracción?

PLANTEAMIENTO El ángulo de polarización en la superficie es el ángulo de Brewster, ecuación 35-22b. El ángulo de refracción se encuentra a partir de la ley de Snell.

SOLUCIÓN *a*) Use la ecuación 35-22b con $n = 1.33$, de manera que $\tan\theta_p = 1.33$, lo que da $\theta_p = 53.1°$.

b) A partir de la ley de Snell, $\operatorname{sen}\theta_r = \operatorname{sen}\theta_p/n = \operatorname{sen} 53.1°/1.33 = 0.601$ lo que da $\theta_r = 36.9°$.

NOTA $\theta_p + \theta_r = 53.1° + 36.9° = 90.0°$, como se esperaba.

*35–12 Pantallas de cristal líquido (LCD)

Un uso maravilloso de la polarización se presenta en las **pantallas de cristal líquido** (LCD). Las LCD se usan como la pantalla en calculadoras de mano, relojes de pulso digitales, teléfonos celulares y en pantallas de televisión y monitores planos de computadora que proyectan hermosos colores.

Una pantalla de cristal líquido está hecha de muchos pequeños rectángulos llamado **pixeles**, o "elementos de imagen". La imagen que se ve depende de cuáles pixeles son oscuros o claros y de qué color, como sugiere la figura 35-42 para un sencillo dibujo en blanco y negro.

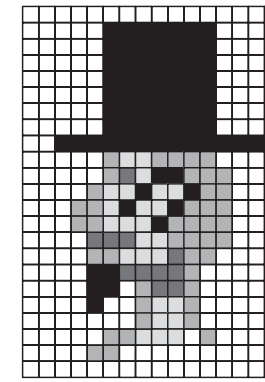


FIGURA 35–42 Ejemplo de una imagen hecha con muchos pequeños cuadrados o *pixeles* (*picture elements* = elementos de imagen). Esta imagen tiene una resolución más bien deficiente.

Los cristales líquidos son materiales orgánicos que, a temperatura ambiente, existen en una fase que no es completamente sólida ni completamente líquida. Son una especie de material viscoso y sus moléculas presentan una aleatoriedad de posición característica de los líquidos, como se estudió en la sección 17-1 y la figura 17-2. También exhiben algo del ordenamiento de un cristal sólido (figura 17-2a), pero sólo en una dimensión. Los cristales líquidos que resultan útiles están hechos de moléculas relativamente rígidas con forma alargada que interactúan débilmente unas con otras y tienden a alinearse paralelas entre sí, como se aprecia en la figura 35-43.

FIGURA 35–43 Las moléculas de cristal líquido tienden a alinearse en una dimensión (paralelas entre sí), pero tienen posiciones aleatorias (izquierda-derecha, arriba-abajo).

[†]Sólo una fracción de la luz incidente se refleja en la superficie de un medio transparente. Aunque esta luz reflejada es 100% polarizada (si $\theta = \theta_p$), el resto de la luz, que se transmite hacia el nuevo medio, sólo está parcialmente polarizada.

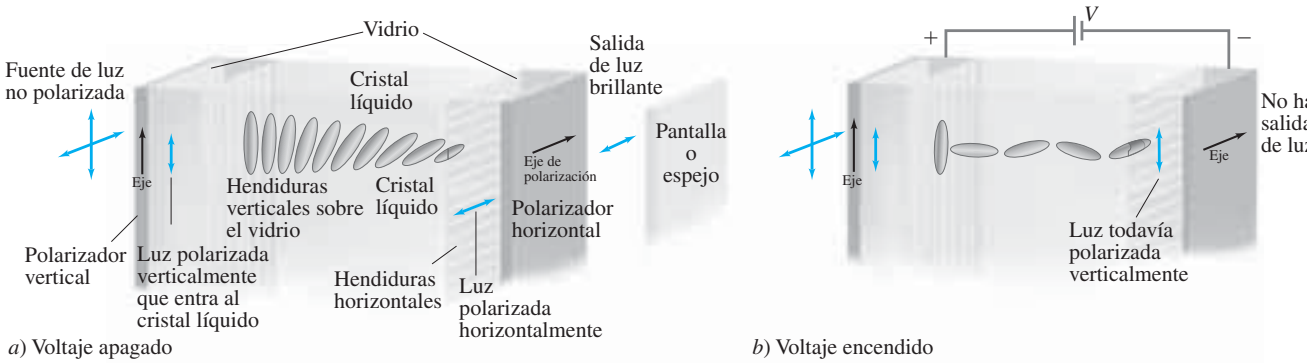


FIGURA 35–44 *a*) Forma "retorcida" del cristal líquido. El plano de polarización de la luz gira 90°, así que se transmite a través del polarizador horizontal. Sólo se muestra una línea de moléculas. *b*) Moléculas desorientadas por el campo eléctrico. El plano de polarización no cambia, de manera que la luz no pasa a través del polarizador horizontal. (No se muestran los electrodos transparentes).

En una LCD simple, cada pixel (elemento de imagen) contiene un cristal líquido colocado entre dos placas de vidrio cuyas superficies interiores se cepillaron para formar hendiduras paralelas nanométricas. Las moléculas de cristal líquido con forma alargada en contacto con las hendiduras tienden a alinearse a lo largo de estas últimas. Las dos placas generalmente tienen sus hendiduras a 90° una con otra, y las fuerzas débiles entre las moléculas con forma alargada tienden a mantenerlas casi alineadas con sus vecinas más cercanas, lo que da por resultado el patrón retorcido que se muestra en la figura 35-44a.

Las superficies exteriores de las placas de vidrio tienen, cada una, delgadas películas polarizadoras, y también están orientadas a 90° una con otra. La luz no polarizada incidente proveniente de la izquierda se vuelve plano-polarizada y las moléculas de cristal líquido mantienen esta polarización alineada con sus formas alargadas. Esto es, el plano de polarización de la luz gira con las moléculas conforme la luz pasa a través del cristal líquido. La luz sale con su plano de polarización girado 90° y pasa a través del segundo polarizador con facilidad (figura 35-44a). Un pequeño pixel de una pantalla LCD en esta situación parecerá brillante.

Ahora suponga que se aplica un voltaje a electrodos transparentes sobre cada placa de vidrio del pixel. Las moléculas con forma alargada son polares (o pueden adquirir una separación interna de carga debido al campo eléctrico aplicado). El voltaje aplicado tiende a alinear las moléculas y éstas ya no siguen el patrón retorcido que se ilustra en la figura 35-44a, con las moléculas del extremo siempre en un plano paralelo a las placas de vidrio. Ahora el campo eléctrico aplicado tiende a alinear las moléculas planas, de izquierda a derecha (perpendiculares a las placas de vidrio) y esto no afecta significativamente la polarización de la luz. La luz plano-polarizada que entra ya no tiene más su plano de polarización girado conforme atraviesa, y ninguna luz puede salir a través del segundo polarizador (horizontal, figura 35-44b). Cuando se aplica voltaje, el pixel aparece oscuro.†

FIGURA 35–45 Pantalla LCD de calculadora. A los segmentos o pixeles negros se les aplica un voltaje. Note que el 8 utiliza los sietes segmentos (pixeles), mientras que otros números usan menos.

Las pantallas sencillas de los relojes y las calculadoras usan la luz del ambiente como fuente (por eso la pantalla no se puede ver en la oscuridad) y un espejo detrás del LCD refleja la luz de regreso. Sólo hay unos cuantos pixeles, que corresponden a los segmentos alargados necesarios para formar los números del 0 al 9 (y las letras en algunas pantallas), como se observa en la figura 35-45. Cualquier pixel al que se aplique voltaje aparecerá oscuro y formará parte de un número. Sin voltaje, los pixeles dejan pasar la luz través de los polarizadores hacia el espejo y de regreso, lo que forma un fondo brillante para los números oscuros en la pantalla.

Las pantallas LCD de los televisores a color y las computadoras son más complejas. Un pixel de color consiste en tres celdas, o subpixeles, cada uno cubierto con un filtro rojo, verde o azul. El brillo variable de estos tres colores primarios puede producir casi cualquier color natural. Una pantalla de buena calidad consiste en un millón o más de pixeles. Detrás de este arreglo de pixeles hay una fuente de luz, con frecuencia son tubos delgados fluorescentes del diámetro de una pajilla. La luz pasa, o no, a través de los pixeles dependiendo del voltaje aplicado a cada subpixel, como en las figura 35-44a y b.

†En algunas pantallas, los polarizadores son paralelos entre sí (las hendiduras permanecen en 90° para mantener el retorcimiento). Así, cuando no hay voltaje se produce un color negro (ausencia de luz) y el voltaje encendido da por resultado luz brillante.

*35–13 Dispersión de la luz por la atmósfera

Los atardeceres son rojos, el cielo es azul y la luz del cielo es polarizada (al menos en parte). Estos fenómenos se explican sobre la base de la *dispersión* de la luz por medio de las moléculas de la atmósfera. En la figura 35-46 se ve luz no polarizada proveniente del Sol que incide sobre una molécula de la atmósfera terrestre. El campo eléctrico de la onda EM pone a oscilar las cargas eléctricas en el interior de la molécula, y ésta absorbe parte de la radiación incidente. Pero la molécula rápidamente vuelve a emitir esta luz, pues las cargas están en oscilación. Como se estudió en la sección 31-4, las cargas eléctricas en oscilación producen ondas EM. La intensidad es mayor a lo largo de la dirección perpendicular a la oscilación, y cae a cero a lo largo de la línea de oscilación (sección 31-4). En la figura 35-46 el movimiento de las cargas se descompone en dos componentes. Un observador en ángulo recto a la dirección de la luz solar, como se muestra, verá luz plano-polarizada porque no se emite luz a lo largo de la línea de la otra componente de oscilación. (Cuando se ve a lo largo de la línea de una oscilación, no se ve tal oscilación, y por lo tanto no se ven las ondas que produce). En otros ángulos de visión, ambas componentes estarán presentes; sin embargo, una será más intensa, de manera que la luz parecerá parcialmente polarizada. En consecuencia, el proceso de dispersión explica la polarización de la luz del cielo.

La dispersión de la luz por la atmósfera terrestre depende de λ. Para partículas mucho más pequeñas que la longitud de onda de la luz (como las moléculas del aire), las partículas serán menor obstáculo para las longitudes de onda largas que para las cortas. De hecho, la dispersión disminuye como $1/\lambda^4$. Por ende, la luz azul y la violeta se dispersan mucho más que la roja y anaranjada, por lo que el cielo parece azul. En el ocaso, los rayos del Sol pasan a través de una longitud máxima de atmósfera. Buena parte del azul queda fuera por la dispersión. Por lo tanto, la luz que llega a la superficie de la Tierra y se refleja en las nubes y la neblina, carece de azul. Por esa razón, los atardeceres parecen rojizos.

La dependencia de la dispersión en $1/\lambda^4$ sólo es válida si los objetos que dispersan son mucho más pequeños que la longitud de onda de la luz. Esto es válido para las moléculas de oxígeno y nitrógeno, cuyos diámetros son de aproximadamente 0.2 nm. Sin embargo, las nubes contienen gotitas o cristales de agua que son mucho más grandes que λ, y dispersan todas las frecuencias de luz casi de manera uniforme. Por consiguiente, las nubes parecen blancas (o grises, si está sombreado).

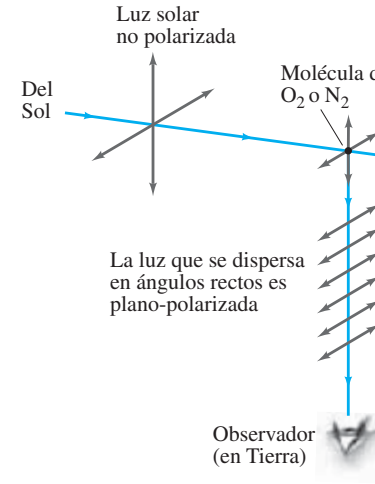


FIGURA 35–46 Las moléculas del aire dispersan la luz solar no polarizada. Un observador en ángulo recto ve luz plano-polarizada, pues la componente de oscilación a lo largo de la línea de visión no emite luz en esa dirección.

FÍSICA APLICADA
Por qué el cielo es azul; por qué los atardeceres son rojos

FÍSICA APLICADA
Por qué las nubes son blancas

Resumen

La **difracción** se refiere al hecho de que la luz, como otras ondas, se desvía alrededor de los objetos por los que pasa, y se dispersa después de pasar a través de rendijas estrechas. Esta desviación origina un **patrón de difracción** que se debe a la interferencia entre rayos de luz que recorren diferentes distancias.

La luz que pasa a través de una rendija muy estrecha de ancho D (en el orden de la longitud de onda λ) producirá un patrón con un máximo central brillante de ancho medio θ dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{D}, \qquad \textbf{(35–1)}$$

flanqueado por líneas más tenues a cualquier lado.

Los mínimos en el patrón de difracción se presentan en

$$D\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad \textbf{(35–2)}$$

donde $m = 1, 2, 3,\ldots$, pero no $m = 0$ (para el cual el patrón tiene su máximo más intenso).

La **intensidad** en cualquier punto en el patrón de difracción de una rendija se calcula mediante diagramas de **fasores**. La misma técnica resulta útil para determinar la intensidad del patrón producido por dos rendijas.

El patrón para interferencia de doble rendija se puede describir como una serie de máximos debidos a la interferencia de luz en las dos rendijas, modificada por una "envoltura" debida a difracción en cada rendija.

La naturaleza ondulatoria de la luz limita la nitidez o **resolución** de las imágenes. A causa de la difracción, no es posible *discernir detalles menores a la longitud de onda* de la radiación que se usa. La amplificación útil de un microscopio óptico está limitada por la difracción a aproximadamente 500×.

Una **rejilla de difracción** consiste en muchas rendijas o líneas paralelas, cada una separada de sus vecinas por una distancia d. Los picos de interferencia constructiva se presentan a ángulos θ dados por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d}, \qquad \textbf{(35–13)}$$

donde $m = 0, 1, 2,\ldots$ Los picos de interferencia constructiva son mucho más brillantes y pronunciados en el caso de una rejilla de difracción que en el de un aparato sencillo de doble rendija. [*El ancho del pico es inversamente proporcional al número total de líneas en la rejilla].

[*En un **espectrómetro** se usa una rejilla (o prisma) de difracción para separar diferentes colores o para observar **espectros de líneas**. Para un orden dado m, θ depende de λ. Con un espectrómetro se puede realizar la determinación precisa de la longitud de onda, mediante la medición cuidadosa de θ].

*Los **rayos X** son una forma de radiación electromagnética de longitud de onda muy corta. Se producen cuando electrones de alta rapidez, acelerados mediante alto voltaje en un tubo al vacío, inciden sobre un blanco de vidrio o metal.

En la **luz no polarizada**, los vectores de campo eléctrico oscilan en todas las direcciones transversales. Si el vector eléctrico oscila sólo en un plano, se dice que la luz es **plano-polarizada**. La luz también puede estar parcialmente polarizada.

Cuando un haz de luz no polarizada pasa a través de una hoja **Polaroid**, el haz que sale es plano-polarizada. Cuando un haz de luz está polarizado y pasa a través de un Polaroid, la intensidad varía conforme gira el Polaroid. Por lo tanto, un Polaroid puede actuar como **polarizador** o como **analizador**.

La intensidad I de un haz de luz plano-polarizada que incide sobre un Polaroid se reduce por el factor

$$I = I_0 \cos^2 \theta \qquad \textbf{(35–21)}$$

donde θ es el ángulo entre el eje del Polaroid y el plano inicial de polarización.

La luz también puede ser parcial o completamente **polarizada mediante reflexión**. Si la luz que viaja en aire se refleja en un medio con índice de refracción n, el haz reflejado será *completamente* plano-polarizado si el ángulo incidente θ_p está dado por

$$\tan \theta_p = n. \qquad \textbf{(35–22b)}$$

El hecho de que la luz se pueda polarizar demuestra que debe ser una onda transversal.

Preguntas

1. Las ondas de radio y la luz son ondas electromagnéticas. ¿Por qué un aparato de radio puede recibir una señal detrás de una colina cuando no se puede ver la antena de transmisión?
2. Mantenga una mano cerca de su ojo y enfoque sobre una fuente de luz distante a través de una estrecha rendija entre dos dedos. (Ajuste sus dedos para obtener el mejor patrón). Describa el patrón que observa.
3. Explique por qué los patrones de difracción son más difíciles de observar con una fuente de luz extendida que con una fuente puntual. Compare también una fuente monocromática con luz blanca.
4. Para difracción mediante una sola rendija, ¿cuál es el efecto de aumentar *a*) el ancho de la rendija, *b*) la longitud de onda?
5. Describa el patrón de difracción de una sola rendija que se produce cuando luz blanca incide sobre una rendija que tiene un ancho de *a*) 50 nm, *b*) 50,000 nm.
6. ¿Qué ocurre con el patrón de difracción de una sola rendija, si todo el aparato se sumerge en *a*) agua, *b*) vacío en lugar de en aire?
7. En el patrón de difracción de una sola rendija, ¿por qué el primer máximo fuera de centro no se presenta exactamente en $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2}\lambda/D$?
8. Discuta las semejanzas y diferencias de la interferencia de doble rendija y la difracción de una sola rendija.
9. * La figura 35-10 ilustra un patrón de interferencia de doble rendija para el caso cuando d es mayor que D. ¿Puede ocurrir el caso inverso, cuando d es menor que D?
10. * Cuando en el experimento de doble rendija se toman en cuenta tanto la difracción como la interferencia, analice el efecto de aumentar *a*) la longitud de onda, *b*) la separación de rendija, *c*) el ancho de rendija.
11. ¿La difracción limita la resolución de las imágenes formadas por *a*) espejos esféricos, *b*) espejos planos?
12. ¿Los efectos de difracción ocurren tanto en el caso de imágenes virtuales como en el de imágenes reales?
13. Mencione al menos dos ventajas para el uso de grandes espejos reflectores en telescopios astronómicos.
14. Los átomos tienen diámetros de aproximadamente 10^{-8} cm. ¿La luz visible se puede usar para "ver" un átomo? Explique.
15. ¿Qué color de luz visible daría la mejor resolución en un microscopio? Explique.
16. ¿Una rejilla de difracción también se podría llamar rejilla de interferencia? Discuta.
17. Suponga que luz consistente en longitudes de onda entre 400 nm y 700 nm incide de manera normal sobre una rejilla de difracción. ¿Para qué órdenes (si acaso alguno) habría traslape en el espectro observado? ¿Su respuesta depende del espaciamiento de rendija?
18. ¿Cuál es la diferencia en los patrones de interferencia formados por dos rendijas separadas 10^{-4} cm, en comparación con una rejilla de difracción que contiene 10^4 líneas/cm?
19. Luz blanca incide sobre *a*) una rejilla de difracción y *b*) un prisma. En cada caso aparece un arcoíris sobre una pared justo abajo de la dirección del haz incidente horizontal. ¿Cuál es el color de la parte superior del arcoíris en cada caso? Explique.
20. Explique por qué hay pequeños picos entre los picos principales producidos por una rejilla de difracción iluminada con luz monocromática. ¿Por qué los picos son tan pequeños?
21. ¿Qué nos dice la polarización acerca de la naturaleza de la luz?
22. ¿Cómo se puede saber si un par de gafas para sol son polarizadas o no?
23. * ¿Cuál sería el color del cielo si la Tierra no tuviera atmósfera?

Problemas

[Nota: Suponga que la luz que pasa a través de las rendijas está en fase, a menos que se establezca de otro modo].

35–1 Difracción de una sola rendija

1. (I) Si la luz de 680 nm incide sobre una rendija de 0.0365 mm de ancho, ¿cuál es el ancho angular del pico de difracción central?
2. (I) Luz monocromática incide sobre una rendija que mide 2.60×10^{-3} mm de ancho. Si el ángulo entre las primeras franjas oscuras a cualquier lado del máximo central es de 32.0° (de una franja oscura a otra), ¿cuál es la longitud de onda de la luz que se utiliza?
3. (II) Luz con 580 nm de longitud de onda incide sobre una rendija que mide 3.80×10^{-3} mm de ancho. Estime a qué distancia del máximo central intenso se encuentra la primera franja de difracción más brillante, si la pantalla está a 10.0 m de distancia.
4. (II) Considere microondas que inciden perpendicularmente sobre una placa metálica con una rendija de 1.60 cm. Determine los ángulos a los que habrá mínimos de difracción para longitudes de onda de *a*) 0.50 cm, *b*) 1.0 cm y *c*) 3.0 cm.

5. (II) Si luz paralela incide sobre una sola rendija de ancho D a un ángulo de 23º con la normal, describa el patrón de difracción.

6. (II) Luz monocromática de 633 nm de longitud de onda incide sobre una rendija. Si el ángulo entre las primeras franjas brillantes a cada lado del máximo central es de 35º, estime el ancho de la rendija.

7. (II) Si una rendija difracta luz de 580 nm, de manera que el máximo de difracción tiene 6.0 cm de ancho sobre una pantalla a 2.20 m de distancia, ¿cuál será el ancho del máximo de difracción para luz con una longitud de onda de 460 nm?

8. (II) *a*) Para una longitud de onda dada λ, ¿cuál es el ancho mínimo de rendija para que el cual no habrá mínimos de difracción? *b*) ¿Cuál es el ancho mínimo de rendija de manera que la luz visible no muestre un mínimo de difracción?

9. (II) Cuando luz azul, con longitud de onda de 440 nm, incide sobre una sola rendija, las primeras bandas oscuras a cualquier lado del centro están separadas por 55º. Determine el ancho de la rendija.

10. (II) Una sola rendija de 1.0 mm de ancho se ilumina con luz de 450 nm. ¿Cuál es el ancho del máximo central (en cm) en el patrón de difracción sobre una pantalla a 5.0 m de distancia?

11. (II) Luz coherente de un diodo láser se emite a través de una área rectangular de 3.0 μm $\times$ 1.5 μm (horizontal por vertical). Si la luz láser tiene una longitud de onda de 780 nm, determine el ángulo entre los primeros mínimos de difracción *a*) arriba y abajo del máximo central, *b*) a la izquierda y derecha del máximo central.

*35–2 Intensidad, patrón de difracción de una sola rendija

*12. (II) Si se duplica el ancho de una sola rendija, la intensidad de la luz que pasa a través de la rendija se duplica. *a*) Sin embargo, demuestre que la intensidad en el centro de la pantalla aumenta en un factor de 4. *b*) Explique por qué esto no viola la conservación de la energía.

*13. (II) Luz con 750 nm de longitud de onda pasa a través de una rendija de 1.0 μm de ancho y verticalmente se forma un patrón de difracción de una sola rendija sobre una pantalla a 25 cm de distancia. Determine la intensidad de la luz I 15 cm arriba del máximo central, expresada como fracción de la intensidad del máximo central I_0.

*14. (III) *a*) Explique por qué los máximos secundarios en el patrón de difracción de una sola rendija no se presentan exactamente en $\beta/2 = (m + \frac{1}{2})\pi$ donde $m = 1, 2, 3, \ldots$ *b*) Mediante diferenciación de la ecuación 35-7 con respecto a β, demuestre que los máximos secundarios se presentan cuando $\beta/2$ satisface la relación $\tan(\beta/2) = \beta/2$. *c*) Grafique cuidadosa y precisamente las curvas $y = \beta/2$ y $y = \tan\beta/2$. A partir de sus intersecciones, determine los valores de β para el primero y segundo máximos secundarios. ¿Cuál es la diferencia porcentual con $\beta/2 = (m + \frac{1}{2})\pi$?

*35–3 Intensidad, difracción de doble rendija

*15. (II) Si un patrón de doble rendija contiene exactamente nueve franjas en el pico de difracción central, ¿qué puede decir acerca del ancho y la separación de las rendijas? Suponga que el primer mínimo de difracción se presenta a un mínimo de interferencia.

*16. (II) Diseñe un aparato de doble rendija de manera que el pico de difracción central contenga exactamente 17 franjas. Suponga que el primer mínimo de difracción se presenta en *a*) un mínimo de interferencia mínima, *b*) un máximo de interferencia.

*17. (II) Luz de 605 nm pasa a través de un par de rendijas y crea un patrón de interferencia sobre una pantalla 2.0 m detrás de las rendijas. Las rendijas están separadas 0.120 mm y cada una mide 0.040 mm de ancho. ¿Cuántas franjas de interferencia constructiva se forman sobre la pantalla? [Muchas de estas franjas serán de muy baja intensidad].

*18. (II) En un experimento de doble rendija, si el pico de difracción central contiene 13 franjas de interferencia, ¿cuántas franjas están contenidas dentro de cada pico de difracción secundario (entre $m = +1$ y $+2$ en la ecuación 35-2)? Suponga que el primer mínimo de difracción se presenta a un mínimo de interferencia.

*19. (II) Dos rendijas de 0.010 mm de ancho están separadas 0.030 mm (de centro a centro). Determine *a*) el espaciamiento entre franjas de interferencia para luz de 580 nm sobre una pantalla a 1.0 m de distancia y *b*) la distancia entre los dos mínimos de difracción en cualquier lado del máximo central de la envoltura.

*20. (II) Suponga que $d = D$ en un aparato de doble rendija, de manera que las dos rendijas se unan en una rendija de ancho $2D$. Demuestre que la ecuación 35-9 se reduce a la ecuación correcta para difracción de una rendija.

*21. (II) En un experimento de doble rendija, sea $d = 5.00D = 40.0\lambda$. Compare (como razón) la intensidad del máximo de interferencia de tercer orden con el del máximo de orden cero.

*22. (II) ¿Cuántas franjas contiene el pico de difracción central en un patrón de doble rendija si *a*) $d = 2.00D$, *b*) $d = 12.0D$, *c*) $d = 4.50D$, *d*) $d = 7.20D$.

*23. (III) *a*) Deduzca una expresión para la intensidad en el patrón de interferencia en el caso de tres rendijas igualmente espaciadas. Exprese en términos de $\delta = 2\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda$, donde d es la distancia entre rendijas adyacentes y suponga que el ancho de la rendija $D \approx \lambda$. *b*) Demuestre que sólo hay un máximo secundario entre picos principales.

35–4 y 35–5 Límites de resolución

24. (I) ¿Cuál es el límite de resolución angular (grados) impuesto por difracción para el telescopio de 100 pulgadas (diámetro de espejo = 254 cm) del monte Wilson (λ = 560 nm)?

25. (II) Dos estrellas a 16 años luz de distancia apenas son distinguibles mediante un telescopio de 66 cm (diámetro de espejo). ¿Qué distancia están separadas las estrellas? Suponga que λ = 550 nm y que la resolución está limitada por difracción.

26. (II) La estrella vecina más cercana al Sol está aproximadamente a 4 años luz de distancia. Si un planeta gira alrededor de esta estrella a un radio orbital igual a la distancia que hay entre la Tierra y el Sol, ¿qué diámetro mínimo debería tener la abertura de un telescopio en la Tierra para obtener una imagen que distinga este sistema estrella-planeta? Suponga que la luz emitida por la estrella y el planeta tiene una longitud de onda de 550 nm.

27. (II) Si se dirige el haz de una linterna hacia la Luna, estime el diámetro del haz cuando llega a la Luna. Suponga que el haz sale de la linterna a través de una abertura de 5.0 cm, que su luz blanca tiene una longitud de onda promedio de 550 nm y que el haz se dispersa debido sólo a la difracción.

28. (II) Suponga que quiere construir un telescopio capaz de discernir características de 7.5 km en la Luna, a 384,000 km de distancia. Tiene una lente objetivo con 2.0 m de distancia focal, cuyo diámetro es de 11.0 cm. ¿Qué distancia focal de ocular necesita si su ojo puede distinguir objetos separados 0.10 mm a una distancia de 25 cm? ¿Cuál es el límite de resolución impuesto por el tamaño de la lente objetivo (esto es, por difracción)? Considere que λ = 560 nm.

29. (II) La lente normal en una cámara de 35 mm tiene una distancia focal de 50.0 mm. El diámetro de su apertura varía de un máximo de 25 mm ($f/2$) a un mínimo de 3.0 mm ($f/16$). Determine el límite de resolución impuesto por difracción para ($f/2$) y ($f/16$). Especifique el número de líneas por milímetro resueltas en el detector o la película. Considere que $\lambda = 560$ nm.

35–7 y 35–8 Rejilla de difracción, espectroscopia

30. (I) ¿A qué ángulo la luz de 480 nm producirá un máximo de segundo orden cuando incida sobre una rejilla cuyas rendijas están separadas 1.35×10^{-3} cm?

31. (I) Una fuente produce líneas de primer orden cuando incide de manera normal sobre una rejilla de difracción de 12,000 líneas/cm a ángulos de 28.8°, 36.7°, 38.6° y 47.9°. ¿Cuáles son las longitudes de onda?

32. (I) Una rejilla de 3500 líneas/cm produce una franja de tercer orden a un ángulo de 26.0°. ¿Qué longitud de onda de luz se utiliza?

33. (I) Una rejilla tiene 6800 líneas/cm. ¿Cuántos órdenes espectrales se pueden ver (de 400 a 700 nm) cuando se ilumina con luz blanca?

34. (II) ¿Cuántas líneas por centímetro tiene una rejilla, si el tercer orden se presenta a un ángulo de 15° para luz de 650 nm?

35. (II) Luz láser roja de He-Ne ($\lambda = 632.8$ nm) se utiliza para calibrar una rejilla de difracción. Si esta luz crea una franja de segundo orden a 53.2° después de pasar a través de la rejilla, y luz de una longitud de onda desconocida λ crea una franja de primer orden a 20.6°, encuentre λ.

36. (II) Luz blanca que contiene longitudes de onda de 410 nm a 750 nm incide sobre una rejilla con 7800 líneas/cm. ¿De qué ancho es el espectro de primer orden sobre una pantalla a 2.80 m de distancia?

37. (II) Una rejilla de difracción tiene 6.0×10^5 líneas/m. Encuentre la dispersión angular en el espectro de segundo orden entre luz roja con 7.0×10^{-7} m de longitud de onda, y luz azul con 4.5×10^{-7} m de longitud de onda.

38. (II) Una bombilla de tungsteno-halógeno emite un espectro continuo de luz ultravioleta, visible e infrarroja en el rango de longitud de onda de 360 nm a 2000 nm. Suponga que la luz proveniente de una bombilla de tungsteno-halógeno incide sobre una rejilla de difracción con espaciamiento de rendija d y que el máximo brillante de primer orden para la longitud de onda de 1200 nm se presenta a un ángulo θ. ¿Qué otras longitudes de onda dentro del espectro de luz incidente producirán un máximo brillante a este mismo ángulo θ? [Para lidiar con este efecto molesto, se emplean filtros ópticos cuando se mide un espectro continuo de luz mediante un espectrómetro].

39. (II) Demuestre que los espectros de segundo y tercer orden de luz blanca producida por una rejilla de difracción siempre se traslapan. ¿Qué longitudes de onda se traslapan?

40. (II) Dos líneas espectrales de primer orden, a cada lado del centro, se miden mediante un espectroscopio de 9650 líneas/cm a ángulos de +26°38′, +41°02′ y −26°18′, −40°27′. Con base en estos datos calcule las longitudes de onda.

41. (II) Suponga que los ángulos medidos en el problema 40 se produjeron cuando el espectrómetro (pero no la fuente) se sumergió en agua. ¿Cuáles serían las longitudes de onda en el aire?

42. (II) La línea de primer orden de luz de 589 nm que incide sobre una rejilla de difracción se observa a un ángulo de 16.5°. ¿Qué distancia separa a las rendijas? ¿A qué ángulo se observará el tercer orden?

43. (II) Luz blanca pasa a través de una rejilla de difracción de 610 líneas/mm. Espectros visibles de primer y segundo órdenes ("arcoíris") aparecen en la pared a 32 cm de distancia, como se ilustra en la figura 35-47. Determine los anchos ℓ_1 y ℓ_2 de los dos "arcoíris" (de 400 nm a 700 nm). ¿En qué orden se dispersa el "arcoíris" a una gran distancia?

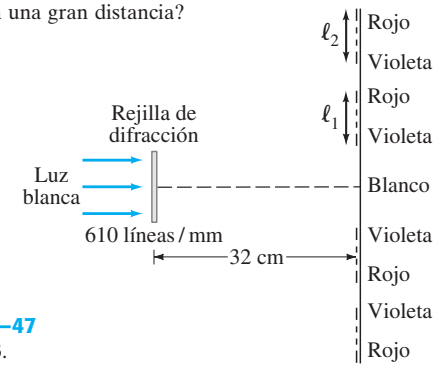


FIGURA 35–47
Problema 43.

44. (II) Para una rejilla de difracción, cuando un mínimo de difracción coincide con un máximo de interferencia, se presentan **órdenes faltantes**. Sea D el ancho de cada rendija y d la separación entre rendijas. Demuestre *a*) que, si $d = 2D$, todos los órdenes pares ($m = 2, 4, 6, \ldots$) desaparecen. *b*) Demuestre que habrá órdenes faltantes siempre que

$$\frac{d}{D} = \frac{m_1}{m_2}$$

donde m_1 y m_2 son enteros. *c*) Analice el caso $d = D$, el límite donde el espacio entre rendijas se vuelve despreciable.

45. (II) Luz monocromática incide sobre una rejilla de transmisión a un ángulo ϕ con la normal. *a*) Demuestre que la ecuación 35-13 para máximos de difracción se debe sustituir con

$$d(\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\theta) = \pm m\lambda. \qquad m = 0, 1, 2, \cdots.$$

b) Explique el signo $\pm$. *c*) Luz verde, con una longitud de onda de 550 nm, incide sobre una rejilla de difracción con 5000 líneas/cm. Encuentre los ángulos a los que se presentan los máximos de primer orden.

*35–9 Rejilla, anchos de pico, poder de resolución

***46.** (II) Una rejilla de difracción de 6500 líneas/cm, tiene 3.18 cm de ancho. Si luz con longitud de onda cercana a 624 nm incide sobre la rejilla, ¿qué tan cercanas pueden estar las dos longitudes de onda, si se deben resolver en cualquier orden? ¿Qué orden da la mejor resolución?

***47.** (II) Una rejilla de difracción tiene 16,000 líneas en sus 1.9 cm de ancho. Determine *a*) su poder de resolución en el primer y segundo órdenes, y *b*) la mínima resolución de longitud de onda ($\Delta\lambda$) que produce para $\lambda = 410$ nm.

***48.** (II) Suponga que luz de 580 nm incide de manera normal sobre una rejilla de difracción para la cual $d = 3.00D = 1\,050$ nm. *a*) ¿Cuántos órdenes (máximos principales) están presentes? *b*) Si la rejilla mide 1.80 cm de ancho, ¿cuál es el ancho angular completo de cada máximo principal?

35–10 Difracción de rayos X

49. (II) Rayos X de 0.138 nm de longitud de onda inciden sobre un cristal cuyos átomos, que se encuentran en planos, están espaciados 0.285 nm. ¿A qué ángulo ϕ (con respecto a la superficie, figura 35-28) deben dirigirse los rayos X si debe observarse el primer máximo de difracción?

50. (II) Se observa difracción de Bragg de primer orden a 26.8° en relación con la superficie del cristal, con espaciamiento entre átomos de 0.24 nm. *a*) ¿A qué ángulo se observará el segundo orden? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos X?

51. (II) Si se miden picos de difracción de rayos X, que corresponden a los tres primeros órdenes ($m = 1, 2,$ y 3), ¿es posible determinar tanto la longitud de onda λ de los rayos X como el espaciamiento de retícula d? Pruebe su respuesta.

35–11 Polarización

52. (I) Dos polarizadores se orientan a 65° uno con otro. Luz no polarizada incide sobre ellos. ¿Qué fracción de la intensidad de la luz se transmite?

53. (I) Dos Polaroid se alinean de manera que la luz que pasa a través de ellos es un máximo. ¿A qué ángulo se debe colocar uno de ellos para que la intensidad se reduzca posteriormente a la mitad?

54. (I) ¿Cuál es el ángulo de Brewster para una superficie aire-vidrio ($n = 1.58$)?

55. (I) ¿Cuál es el ángulo de Brewster para un diamante sumergido en agua, si la luz incide sobre el diamante ($n = 2.42$) mientras viaja en el agua?

56. (II) El ángulo crítico para reflexión total interna en una frontera entre dos materiales es de 55°. ¿Cuál es el ángulo de Brewster en esta frontera? Dé dos respuestas, una para cada material.

57. (II) ¿A qué ángulo se deben colocar los ejes de dos Polaroid de manera que reduzcan la intensidad de luz no polarizada incidente a *a*) $\frac{1}{3}$, *b*) $\frac{1}{10}$?

58. (II) Dos polarizadores se orientan a 36.0° uno con otro. Luz polarizada a un ángulo de 18.0° con cada polarizador pasa a través de ambos. ¿Cuál es la intensidad transmitida (%)?

59. (II) ¿Cuál sería el ángulo de Brewster para reflexiones en la superficie del agua con luz proveniente de abajo de la superficie? Compare con el ángulo para reflexión total interna y con el ángulo de Brewster desde abajo de la superficie.

60. (II) Luz no polarizada pasa a través de seis hojas Polaroid sucesivas, cada uno de cuyos ejes forma un ángulo de 45° con la anterior. ¿Cuál es la intensidad del haz transmitido?

61. (II) Dos polarizadores A y B se alinean de manera que sus ejes de transmisión son vertical y horizontal, respectivamente. Un tercer polarizador se coloca entre estos dos, con su eje alineado a un ángulo θ con respecto a la vertical. Si se supone que luz polarizada verticalmente, con intensidad I_0, incide sobre el polarizador A, encuentre una expresión para la intensidad de la luz I transmitida a través de esta secuencia de tres polarizadores. Calcule la derivada $dI/d\theta$; luego úsela para encontrar el ángulo θ que maximiza I.

62. (III) La polarización porcentual P de un haz de luz parcialmente polarizada se define como

$$P = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}} \times 100$$

donde $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ son las intensidades máxima y mínima que se obtienen cuando la luz pasa a través de un polarizador que gira lentamente. Tal luz se puede considerar como la suma de dos haces plano-polarizados desiguales con intensidades $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ perpendiculares entre sí. Demuestre que la luz transmitida por un polarizador, cuyo eje forma un ángulo ϕ con la dirección en la que se obtiene $I_{\text{máx}}$, tiene intensidad

$$\frac{1 + p\cos 2\phi}{1 + p} I_{\text{máx}}$$

donde $p = P/100$ es la "polarización fraccional".

Problemas generales

63. Cuando luz violeta, con longitud de onda de 415 nm, incide sobre una sola rendija, crea un pico de difracción central que tiene 8.20 cm de ancho sobre una pantalla que está a 2.85 m de distancia. ¿Cuál es el ancho de la rendija?

64. Una serie de polarizadores se colocan cada uno a un intervalo de 10° del polarizador anterior. Luz no polarizada incide sobre esta serie de polarizadores. ¿Por cuántos polarizadores tiene que pasar la luz antes de que tenga $\frac{1}{4}$ de su intensidad original?

65. Las alas de cierto escarabajo tienen una serie de líneas paralelas a través de ellas. Cuando en el ala se refleja luz de 480 nm que incide de manera normal sobre ella, el ala parece brillar cuando se ve a un ángulo de 56°. ¿Qué distancia separa a las líneas?

66. Un profesor está de pie atrás de una puerta exterior de 0.88 m de ancho, y sopla un silbato de 850 Hz de frecuencia. Ignorando las reflexiones, estime a qué ángulo(s) *no* es posible escuchar claramente el silbato en el patio afuera de la puerta. Suponga que la rapidez del sonido es de 340 m/s.

67. Sobre una rejilla de difracción con 7600 líneas/cm incide luz; el patrón se observa sobre una pantalla ubicada a 2.5 m de la rejilla. El haz de luz incidente consiste en dos longitudes de onda, $\lambda_1 = 4.4 \times 10^{-7}$ m y $\lambda_2 = 6.8 \times 10^{-7}$ m. Calcule la distancia lineal entre las franjas brillantes de primer orden de estas dos longitudes de onda sobre la pantalla.

68. ¿Cuántas líneas por centímetro debe tener una rejilla si no debe haber espectro de segundo orden para cualquier longitud de onda visible?

69. Cuando luz de sodio amarilla, $\lambda = 589$ nm, incide sobre una rejilla de difracción, su pico de primer orden sobre una pantalla a 66.0 cm de distancia se localiza a 3.32 cm del pico central. Otra fuente produce una línea de 3.71 cm del pico central. ¿Cuál es su longitud de onda? ¿Cuántas líneas/cm hay en la rejilla?

70. Dos de las líneas del espectro atómico del hidrógeno tienen longitudes de onda de 656 nm y 410 nm. Si éstas inciden de manera normal sobre una rejilla con 8100 líneas/cm, ¿cuál será la separación angular de las dos longitudes de onda en el espectro de primer orden?

71. *a*) ¿A qué distancia puede un ojo humano distinguir dos faros de automóvil separados 2.0 m? Considere sólo efectos de difracción y suponga un diámetro del ojo de 6.0 mm y longitud de onda de 560 nm. *b*) ¿Cuál es la separación angular mínima que un ojo puede resolver cuando ve dos estrellas, si sólo se consideran los efectos de difracción? En realidad, es aproximadamente 1′ de arco. ¿Por qué no es igual a su respuesta en *a*)?

72. Un haz láser pasa a través de una rendija de 1.0 cm de ancho y apunta a la Luna, que está aproximadamente a 380,000 km de la Tierra. Suponga que el láser emite ondas con longitud de onda de 633 nm (la luz roja de un láser He-Ne). Estime el ancho del haz cuando llega a la Luna.

73. Un láser de gas He-Ne, que produce luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 6.328 \times 10^{-7}$ m, se usa para calibrar una rejilla de reflexión en un espectroscopio. La línea de difracción de primer orden se encuentra a un ángulo de 21.5° con el haz incidente. ¿Cuántas líneas por metro hay en la rejilla?

74. La entrada al dormitorio de un niño consta de dos puertas, cada una de 1.0 m de ancho, separadas por una distancia de 3.0 m. La madre del niño le grita a través de las dos puertas, como se muestra en la figura 35-48, y le dice que ordene su cuarto. Su voz tiene una frecuencia de 400 Hz. Más tarde, cuando la madre descubre que la habitación todavía está en desorden, el niño dice que él nunca escuchó que le dijera que limpiara su habitación. La velocidad del sonido es de 340 m/s. *a*) Encuentre todos los ángulos θ (figura 35-48) a los cuales no se escuchará sonido dentro de la habitación cuando la madre grite. Suponga que el sonido se absorbe por completo cuando incide sobre una pared de la recámara. *b*) Si el niño estaba en la posición que se ilustra cuando su madre gritó, ¿tiene una buena explicación por no haberla escuchado? Explique.

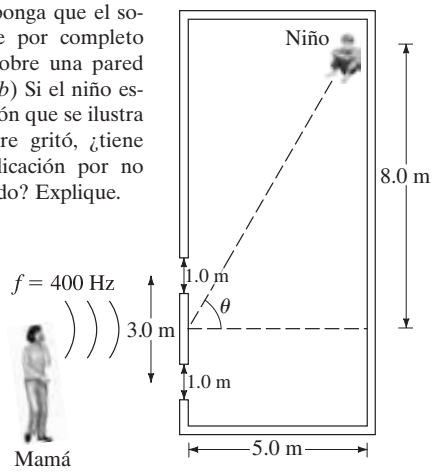


FIGURA 35–48
Problema 74.

75. ¿A qué ángulo sobre el horizonte se encuentra el Sol cuando la luz que se refleja en un lago tranquilo se polariza con más fuerza?

76. Luz no polarizada incide sobre dos hojas polarizadoras cuyos ejes están en ángulos rectos. *a*) ¿Qué fracción de la intensidad de la luz incidente se transmite? *b*) ¿Qué fracción se transmite si se coloca un tercer polarizador entre los primeros dos, de manera que su eje forme un ángulo de 66º con el eje del primer polarizador? *c*) ¿Y si el tercer polarizador se encuentra enfrente de los otros dos?

77 ¿A qué ángulo se deben colocar los ejes de dos Polaroid para reducir la intensidad de la luz no polarizada incidente en un factor adicional (después de que el primer Polaroid la reduce a la mitad) de *a*) 4, *b*) 10, *c*) 100?

78. Cuatro polarizadores se colocan en sucesión con sus ejes verticales, a 30º, 60º y 90º con la vertical. *a*) Calcule qué fracción de la luz no polarizada incidente se transmite mediante los cuatro polarizadores. *b*) ¿La luz transmitida puede *disminuir* al eliminar uno de los polarizadores? Si es así, ¿cuál? *c*) ¿La intensidad de la luz transmitida se puede extinguir al eliminar polarizadores? Si es así, ¿cuál?

79. Los aviones espía vuelan a altitudes extremadamente altas (25 km) para evitar intercepción. Se supone que sus cámaras son capaces de distinguir características tan pequeñas como 5 cm. ¿Cuál debe ser la apertura mínima de la lente de la cámara para lograr esta resolución? (Considere que $\lambda = 580$ nm.)

80. Dos polarizadores se orientan a 48º uno de otro y luz plano-polarizada incide sobre ellos. Si sólo el 25% de la luz pasa a través de ambos, ¿cuál fue la dirección de polarización inicial de la luz incidente?

81. Rayos X con longitud de onda de 0.0973 nm se dirige a un cristal desconocido. El segundo máximo de difracción se registra cuando los rayos X se dirigen a un ángulo de 23.4º en relación con la superficie del cristal. ¿Cuál es el espaciamiento entre planos del cristal?

82. Rayos X, con longitud de onda de 0.10 nm, caen sobre una muestra de polvo microcristalino. La muestra se ubica a 12 cm de la película fotográfica. La estructura cristalina de la muestra tiene un espaciamiento atómico de 0.22 nm. Calcule los radios de los anillos de difracción correspondientes a dispersión de primer y segundo órdenes. Note en la figura 35-28 que el haz de rayos X se desvía a través de un ángulo 2ϕ.

83. El Telescopio Espacial Hubble, con un diámetro de objetivo de 2.4 m, observa la Luna. Estime la distancia mínima entre dos objetos sobre la Luna que puede distinguir el Hubble. Considere difracción de luz con longitud de onda de 550 nm. Suponga que el Hubble está cerca de la Tierra.

84. La Tierra y la Luna están separadas por aproximadamente 400×10^6 m. Cuando Marte está a 8×10^{10} m de la Tierra, ¿una persona de pie sobre Marte podría distinguir la Tierra y su Luna como dos objetos separados sin ayuda de un telescopio? Suponga un diámetro de pupila de 5 mm y $\lambda = 550$ nm.

85. A través de una delgada placa de aluminio se corta una rendija de ancho $D = 22\ \mu$m. Luz con longitud de onda $\lambda = 650$ nm pasa a través de esta rendija y forma un patrón de difracción de una sola rendija sobre una pantalla a una distancia $\ell = 2.0$ m. Si x se define como la distancia entre los primeros mínimos ($m = +1$ y $m = -1$) en este patrón de difracción, encuentre el cambio Δx en esta distancia cuando la temperatura T de la placa metálica cambia por una cantidad $\Delta T = 55$C°. [*Sugerencia:* Puesto que $\lambda \ll D$, los primeros mínimos se presentan a un ángulo pequeño].

*Problemas numéricos/por computadora

***86.** (II) Un estudiante dirige una luz láser hacia una sola rendija de 0.04000 mm de ancho. Coloca una pantalla a una distancia de 1.490 m de la rendija para observar el patrón de difracción de la luz láser. La siguiente tabla indica las distancias de las franjas oscuras desde el centro de la franja brillante central para diferentes órdenes.

Número de orden, m:	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia (m)	0.0225	0.0445	0.0655	0.0870	0.1105	0.1320	0.1540	0.1775

Determine el ángulo de difracción, θ, y sen θ para cada orden. Elabore una gráfica de sen θ contra número de orden m y encuentre la longitud de onda λ del láser a partir de la línea recta de mejor ajuste.

***87.** (III) Describa cómo girar 90º el plano de polarización de un haz de luz plano-polarizada de manera que sólo se pierda un 10% en intensidad, utilizando polarizadores. Sea N el número de polarizadores y θ el ángulo (igual) entre polarizadores sucesivos.

88. (III) El "ancho medio máximo completo" (FWHM, por las siglas de *full-width at half-maximum*) del pico central para difracción de una rendija se define como el ángulo $\Delta\theta$ entre los dos puntos a cada lado del centro donde la intensidad es $\frac{1}{2} I_0$. *a*) Determine $\Delta\theta$ en términos de (λ/D). Use gráficas o una hoja de cálculo para resolver sen $\alpha = \alpha/\sqrt{2}$. *b*) Determine $\Delta\theta$ (en grados) para $D = \lambda$ y para $D = 100\lambda$.

Respuestas a los ejercicios

A: Más estrecho.

B: *b*).

C: c).

D: 0.28 nm.

E: Cero para *a*) y *b*), porque los dos polarizadores sucesivos a 90º cancelan la luz. El Polaroid de 45º debe insertarse *entre* los otros dos si se quiere lograr alguna transmisión.

Uno de los primeros libros de fantasía científica (1940), titulado *Mr. Tompkins en el país de las maravillas* y escrito por el físico George Gamow, describía un mundo donde la rapidez de la luz sólo era de 10 m/s (20 mi/h). El señor Tompkins estudió relatividad y, cuando comenzó a "acelerar" en su bicicleta, "esperaba que su figura se acortara de inmediato, y estaba muy feliz acerca de ello ya que su creciente figura últimamente le causaba cierta ansiedad. Sin embargo, para su gran sorpresa, nada le ocurrió ni a él ni a su bicicleta. Por otra parte, el cuadro alrededor suyo cambió por completo. Las calles se hicieron más cortas, las ventanas de las tiendas comenzaron a parecer estrechas rendijas, y el policía en la esquina se convirtió en el hombre más delgado que había visto jamás. '¡Por Júpiter!', exclamó el señor Tompkins emocionadísimo, 'Ahora veo el truco. De aquí es de donde proviene la palabra *relatividad*.'"

De hecho, la relatividad predice que los objetos que se mueven en relación con nosotros a gran rapidez, cerca de la rapidez de la luz c, se acortan en longitud. Uno no lo nota, como le ocurrió al señor Tompkins, porque $c = 3 \times 10^8$ m/s es una rapidez increíble. En este capítulo se estudiará la contracción de la longitud, la dilatación del tiempo, la falta de acuerdo en cuanto a la simultaneidad, y cómo energía y masa son equivalentes ($E = mc^2$).

CAPÍTULO 36

La teoría especial de la relatividad

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Un cohete se aleja de la Tierra con una rapidez de $0.80c$. El cohete dispara un misil con una rapidez de $0.70c$ (el misil se apunta lejos de la Tierra y abandona el cohete a $0.70c$ en relación con este último). ¿Con qué rapidez se desplaza el misil en relación con la Tierra?

a) $1.50c$;
b) un poco menos que $1.50c$;
c) un poco más que c;
d) un poco abajo de c;
e) $0.75c$.

La física de finales del siglo XIX volvió la vista a un periodo de grandes progresos. Las teorías desarrolladas durante los tres siglos precedentes tuvieron mucho éxito para explicar una amplia gama de fenómenos naturales. La mecánica newtoniana explicaba hermosamente el movimiento de los objetos sobre la Tierra y en los cielos. Más aún, formó la base para tener éxito en los tratamientos de fluidos, el movimiento ondulatorio y el sonido. La teoría cinética explicaba el comportamiento de los gases y otros materiales. La teoría de Maxwell del electromagnetismo no sólo conjuntó y explicó los fenómenos eléctricos y magnéticos, sino que también predijo la existencia de ondas electromagnéticas que se comportarían como la luz, de manera que la luz llegó a considerarse como una onda electromagnética. De hecho, parecía que el mundo natural, visto a través de los ojos de los físicos, estaba muy bien explicado. Todavía quedaban algunos enigmas, pero se creía que éstos se explicarían pronto mediante los principios ya conocidos.

CONTENIDO

36–1 Relatividad galileana-newtoniana
*36–2 El experimento de Michelson y Morley
36–3 Postulados de la teoría especial de la relatividad
36–4 Simultaneidad
36–5 Dilatación del tiempo y la paradoja de los gemelos
36–6 Contracción de la longitud
36–7 Espacio-tiempo tetradimensional
36–8 Transformaciones galileanas y de Lorentz
36–9 Cantidad de movimiento relativista
36–10 La rapidez última
36–11 $E = mc^2$; masa y energía
36–12 Corrimiento Doppler para la luz
36–13 El impacto de la relatividad especial

FIGURA 36–1 Albert Einstein (1879-1955), una de las grandes mentes del siglo XX, fue el creador de las teorías especial y general de la relatividad.

Pero esto no resultó tan sencillo. En vez de ello, estos enigmas sólo se resolverían con la introducción, en la primera parte del siglo XX, de dos nuevas teorías revolucionarias que cambiarían toda la concepción de la naturaleza: la *teoría de la relatividad* y la *teoría cuántica*.

A la física, tal como se conocía a finales del siglo XIX (lo que se ha estudiado hasta ahora en este libro), se le llama **física clásica**. La nueva física que se desarrolló a partir de la gran revolución a la vuelta del siglo XX ahora se conoce como **física moderna**. En este capítulo se presenta la teoría especial de la relatividad, que propuso Albert Einstein (1879-1955; figura 36-1) en 1905. En el capítulo 37 se presenta la igualmente trascendental teoría cuántica.

36–1 Relatividad galileana-newtoniana

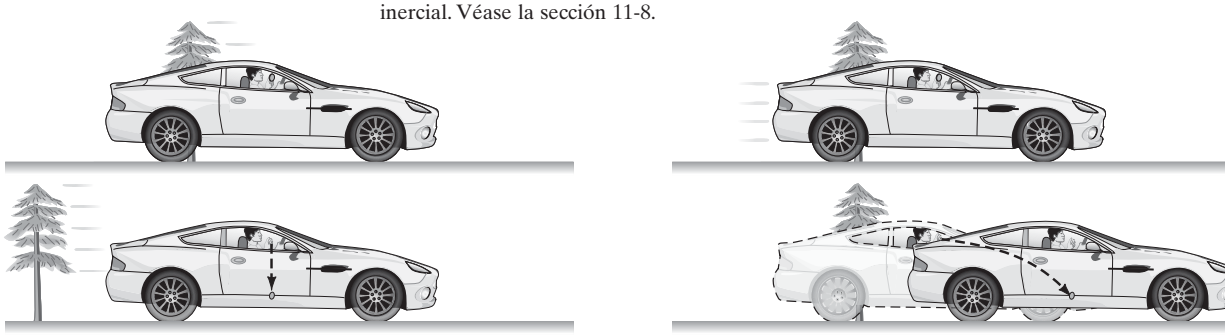
La teoría especial de la relatividad de Einstein trata de cómo se observan los acontecimientos, en particular sobre la forma como los objetos y eventos se observan desde diferentes marcos de referencia. Desde luego, este tema ya lo habían explorado Galileo y Newton.

La teoría especial de la relatividad trata con acontecimientos que se observan y miden en los llamados **marcos de referencia inerciales** (secciones 4-2 y 11-8), que son los marcos de referencia donde es válida la primera ley de Newton: si un objeto no experimenta fuerza neta, permanece en reposo o continúa en movimiento con rapidez constante en línea recta. Por lo general, es más fácil analizar los acontecimientos cuando los observan y miden observadores en reposo en un marco inercial. La Tierra, aunque no es un marco inercial (puesto que gira), está suficientemente cerca de serlo, de manera que para la mayoría de los propósitos se le puede considerar un marco inercial. Los marcos de referencia en rotación o que de alguna otra forma aceleran son marcos no inerciales,[†] y no se tratarán en este capítulo (la teoría general de la relatividad de Einstein se ocupa de ellos).

Un marco de referencia que se mueve con velocidad constante con respecto a un marco inercial también es en sí mismo un marco inercial, pues en él también se sostienen las leyes de Newton. Cuando se dice que observamos o realizamos mediciones desde cierto marco de referencia, significa que estamos en reposo en ese marco de referencia.

Tanto Galileo como Newton estuvieron conscientes de lo que ahora se llama **principio de relatividad** aplicado a la mecánica, es decir, eran conscientes de que *las leyes básicas de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales*. Es posible que reconozca su validez en la vida cotidiana. Por ejemplo, los objetos se mueven en un tren o un avión que se desplaza suavemente (velocidad constante) de la misma forma que lo hacen en la Tierra. (Esto supone que no hay vibraciones o sacudidas que podrían hacer al marco de referencia no inercial). Cuando usted camina, toma un tazón de sopa, juega billar o deja caer un lápiz en el suelo mientras viaja en un tren, avión o barco que se desplaza con velocidad constante, los objetos se mueven tal como lo hacen cuando usted está en reposo sobre la Tierra. Suponga que está en un automóvil que viaja rápidamente con velocidad constante. Si deja caer una moneda desde arriba de su cabeza adentro del automóvil, ¿cómo caerá? Caerá en línea recta hacia abajo con respecto al automóvil, y golpeará el suelo directamente abajo del punto de liberación, figura 36-2a. Esto es tal como los objetos caen en la Tierra —en línea recta hacia aba-

[†]En una plataforma giratoria (por ejemplo, un tiovivo), un objeto en reposo comienza a moverse hacia fuera aun cuando ningún cuerpo ejerza fuerza sobre él. Por lo tanto, éste no es un marco inercial. Véase la sección 11-8.



a)
Marco de referencia = automóvil

b)
Marco de referencia = Tierra

FIGURA 36–2 Una persona deja caer una moneda en un automóvil en movimiento. Las imágenes superiores muestran el momento de liberación de la moneda, las inferiores ilustran un momento posterior. *a*) En el marco de referencia del automóvil, la moneda cae en línea recta hacia abajo (y el árbol se mueve hacia la izquierda). *b*) En un marco de referencia fijo sobre la Tierra, la moneda tiene una velocidad inicial (= a la del auto) y sigue una trayectoria curva (parabólica).

jo— y por lo tanto el experimento en el auto en movimiento está en concordancia con el principio de relatividad. (Si deja caer la moneda por la ventanilla del automóvil, esto no ocurriría porque el aire en movimiento arrastraría la moneda hacia atrás en relación con el automóvil).

Sin embargo, note en este ejemplo que, para un observador en la Tierra, la moneda sigue una trayectoria curva, figura 36-2b. La trayectoria real que sigue la moneda es diferente según se vea desde distintos marcos de referencia. Esto no viola el principio de relatividad porque este principio afirma que las *leyes* de la física son las mismas en todos los marcos inerciales. La misma ley de gravedad y las mismas leyes de movimiento se aplican en ambos marcos de referencia. La aceleración de la moneda es la misma en ambos marcos de referencia. La diferencia en las figuras 36-2a y b es que, en el marco de referencia de la Tierra, la moneda tiene una velocidad inicial (igual a la del automóvil). Por lo tanto, las leyes de la física predicen que seguirá una trayectoria parabólica como cualquier proyectil (capítulo 3). En el marco de referencia del automóvil, no hay velocidad inicial, y las leyes de la física predicen que la moneda caerá en línea recta hacia abajo. Las leyes son las mismas en ambos marcos de referencia, aunque las trayectorias específicas son diferentes.

⚠ CUIDADO

Las leyes son las mismas, pero las trayectorias pueden ser diferentes en distintos marcos de referencia.

La relatividad galileana-newtoniana implica ciertas suposiciones no verificables que tienen sentido a partir de la experiencia cotidiana. Se supone que las longitudes de los objetos son las mismas en un marco de referencia y en otro, y que el tiempo transcurre de igual forma en diferentes marcos de referencia. Entonces, en la mecánica clásica, los intervalos de espacio y tiempo se consideran **absolutos**: su medición no cambia de un marco de referencia a otro. La masa de un objeto, así como todas las fuerzas, se suponen invariables por un cambio en un marco de referencia inercial.

Sin embargo, la posición de un objeto es diferente cuando se especifica en distintos marcos de referencia, y lo mismo sucede con su velocidad. Por ejemplo, una persona puede caminar en el interior de un autobús hacia el frente con una rapidez de 2 m/s. Pero si el autobús se desplaza a 10 m/s con respecto a la Tierra, entonces la persona se mueve con una rapidez de 12 m/s con respecto a la Tierra. No obstante, la aceleración de un objeto es la misma en cualquier marco de referencia inercial, de acuerdo con la mecánica clásica. Esto es así porque el cambio en velocidad y el intervalo de tiempo serán los mismos. Por ejemplo, la persona en el autobús puede acelerar de 0 a 2 m/s en 1.0 segundo, de manera que $a = 2\ \text{m/s}^2$ en el marco de referencia del autobús. Con respecto a la Tierra, la aceleración es $(12\ \text{m/s} - 10\ \text{m/s})/(1.0\ \text{s}) = 2\ \text{m/s}^2$, que es la misma.

⚠ CUIDADO

La posición y la velocidad son diferentes en distintos marcos de referencia, pero la longitud es la misma (clásica)

Puesto que ni F ni m ni a cambian de un marco inercial a otro, entonces la segunda ley de Newton, $F = ma$, no cambia. En consecuencia, la segunda ley de Newton satisface el principio de relatividad. Se puede demostrar fácilmente que las otras leyes de la mecánica también satisfacen el principio de relatividad.

El hecho de que las leyes de la mecánica sean las mismas en todos los marcos de referencia inerciales implica que ningún marco inercial es especial en sentido alguno. Esta importante conclusión se expresa al decir que **todos los marcos de referencia inerciales son equivalentes** para la descripción de fenómenos mecánicos. Ningún marco de referencia inercial es mejor que otro. Un marco de referencia fijo en un automóvil o un avión que viajen con velocidad constante es tan bueno como uno fijo en Tierra. Cuando alguien viaja suavemente con velocidad constante en un automóvil o avión, es tan válido decir que la persona está en reposo y que la Tierra se mueve como decir lo contrario.[†] No hay un experimento que se pueda realizar para decir cuál marco "realmente" está en reposo y cuál en movimiento. Por consiguiente, no hay forma de caracterizar un marco de referencia particular como en reposo absoluto.

Sin embargo, en la segunda mitad del siglo XIX surgió una complicación. La extensa teoría del electromagnetismo de Maxwell (capítulo 31) predijo con éxito que la luz era una onda electromagnética. Las ecuaciones de Maxwell establecieron la velocidad de la luz c como 3.00×10^8 m/s; y esto es justo lo que se midió. Entonces surgió la pregunta: ¿en qué marco de referencia la luz tiene precisamente el valor predicho por la teoría de Maxwell? Se supuso que la luz tendría una rapidez diferente en distintos marcos de referencia. Por ejemplo, si algunos observadores viajaran en una nave espacial con una rapidez de 1.0×10^8 m/s alejándose de una fuente de luz, uno esperaría que ellos midieran la rapidez de la luz que los alcanza en $(3.0 \times 10^8\ \text{m/s}) - (1.0 \times 10^8\ \text{m/s}) = 2.0 \times 10^8$ m/s. Pero las ecuaciones de Maxwell no prevén la velocidad relativa. Las ecuaciones predicen que la rapidez de la luz es $c = 3.0 \times 10^8$ m/s, lo que parece implicar que debe haber algún marco de referencia especial donde c tendría este valor.

[†]Ignore la rotación y curvatura de la Tierra.

En los capítulos 15 y 16 se estudió que las ondas pueden viajar en agua y a lo largo de sogas o cuerdas, y que las ondas sonoras viajan en el aire y otros materiales. Los físicos del siglo XIX visualizaron el mundo material en términos de las leyes de la mecánica, de manera que para ellos era natural suponer que la luz también debía viajar en algún *medio*. A este medio transparente lo llamaron **éter** y supusieron que permeaba todo el espacio.[†] En consecuencia, se supuso que la velocidad de la luz dada por las ecuaciones de Maxwell debía darse con respecto al éter.

Al principio parecía que las ecuaciones de Maxwell *no* satisfacían el principio de relatividad. Eran más simples en el marco donde $c = 3.00 \times 10^8$ m/s; esto es, en un marco de referencia en reposo en el éter. En cualquier otro marco de referencia tendrían que agregarse términos para explicar la velocidad relativa. Por ende, aunque la mayoría de las leyes de la física obedecían el principio de relatividad, las leyes de la electricidad y el magnetismo aparentemente no lo hacían. El segundo postulado de Einstein (sección 36-3) resolvió este problema: las ecuaciones de Maxwell sí satisfacen la relatividad.

Los científicos pronto se dieron a la tarea de determinar la rapidez de la Tierra en relación con este marco absoluto, cualquiera que pudiera ser. Se diseñaron varios experimentos ingeniosos. El más directo lo realizaron A. A. Michelson y E. W. Morley en la década de 1880. Ellos midieron la diferencia en la rapidez de la luz en distintas direcciones con el interferómetro de Michelson (sección 34-6). Esperaban encontrar una diferencia que dependiera de la orientación de sus aparatos con respecto al éter. Así, tal como un bote tiene diferentes rapideces relativas con respecto a la Tierra cuando se mueve corriente arriba, corriente abajo o a través de la corriente, del mismo modo se esperaría que la luz tuviera diferentes rapideces dependiendo de la velocidad del éter que pase por la Tierra.

Por extraño que parezca, no detectaron diferencia en absoluto. Éste fue un gran enigma. Durante varios años se esgrimieron varias explicaciones, pero conducían a contradicciones o, por alguna razón, no tenían aceptación generalizada. Este **resultado nulo** fue uno de los grandes enigmas a finales del siglo XIX.

Entonces, en 1905, Albert Einstein propuso una nueva teoría radical que reconciliaba estos múltiples problemas en una forma sencilla. Pero, al mismo tiempo, como se verá, cambió por completo las ideas del espacio y el tiempo.

*36–2 El experimento de Michelson y Morley

El experimento de Michelson y Morley se diseñó para medir la rapidez del *éter* —el medio donde se suponía que viajaba la luz— con respecto a la Tierra. De esta forma, los experimentadores esperaban encontrar un marco de referencia absoluto, uno que pudiera considerarse en reposo.

Una de las posibilidades que consideraron los científicos del siglo XIX fue que el éter estaba fijo en relación con el Sol, ya que incluso Newton consideró al Sol como el centro del Universo. Si éste fuera el caso (desde luego, no había garantía), la rapidez de la Tierra de aproximadamente 3×10^4 m/s en su órbita alrededor del Sol produciría un cambio de 1 parte en 10^4 en la rapidez de la luz (3.0×10^8 m/s). La medición directa de la rapidez de la luz con esta precisión no era posible. Pero más tarde, A. A. Michelson, con la ayuda de E. W. Morley, pudo usar su interferómetro (sección 34-6) para medir la diferencia en la rapidez de la luz en diferentes direcciones con esta precisión.

Este famoso experimento se basó en el principio que se muestra en la figura 36-3. El inciso *a*) es un diagrama del interferómetro de Michelson, y se supuso que el "viento de éter" se desplazaba con rapidez v hacia la derecha. (De manera alternativa, se supuso que la Tierra se movía hacia la izquierda con respecto al éter, con rapidez v). La luz proveniente de la fuente se divide en dos haces mediante un espejo semi-plateado M_S. Un haz viaja hacia el espejo M_1 y el otro hacia el espejo M_2. Los haces se reflejan en M_1 y M_2 y se unen de nuevo después de pasar a través de M_S. Los haces ahora superpuestos interfieren entre sí y el ojo del observador ve la resultante como un patrón de interferencia (que se estudió en la sección 34-6).

Si ocurre interferencia constructiva o destructiva en el centro del patrón de interferencia depende de las fases relativas de los dos haces después de que recorren sus trayectorias separadas. Consideremos una analogía de un bote que viaja de arriba abajo y a través de un río cuya corriente se desplaza con rapidez v, como se ilustra en la fi-

[†]El medio para las ondas de luz no podía ser el aire, pues la luz viaja desde el Sol hasta la Tierra a través de espacio casi vacío. Por lo tanto, se postuló otro medio: el éter. El éter no sólo era transparente sino que, debido a la dificultad para detectarlo, se supuso que tenía densidad cero.

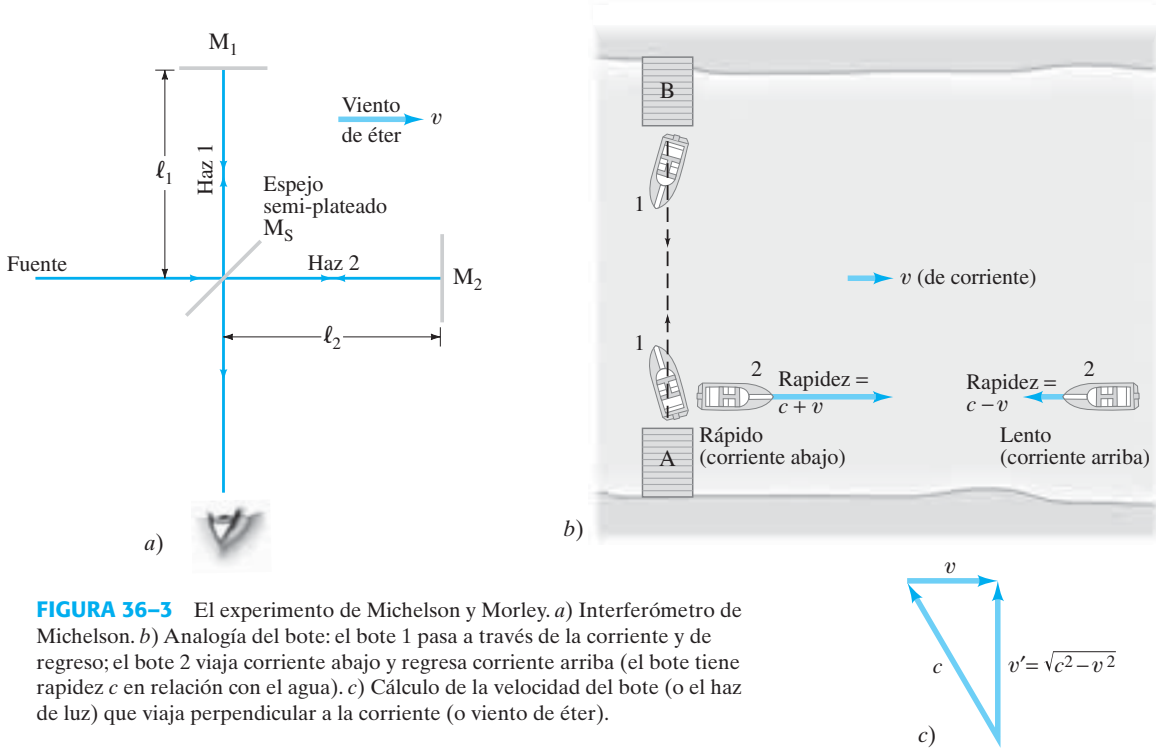


FIGURA 36–3 El experimento de Michelson y Morley. *a*) Interferómetro de Michelson. *b*) Analogía del bote: el bote 1 pasa a través de la corriente y de regreso; el bote 2 viaja corriente abajo y regresa corriente arriba (el bote tiene rapidez c en relación con el agua). *c*) Cálculo de la velocidad del bote (o el haz de luz) que viaja perpendicular a la corriente (o viento de éter).

gura 36-3b. En agua tranquila, el bote puede viajar con rapidez c (no la rapidez de la luz, en este caso).

Considere primero el haz 2 en la figura 36-3a, que viaja paralelo al "viento de éter". En su trayecto de M_S a M_2, la luz viajaría con rapidez $c + v$, de acuerdo con la física clásica; tal como en el caso de un bote que viaja corriente abajo (véase la figura 36-3b), se agrega la rapidez del agua del río a la rapidez del bote (en relación con el agua) para obtener la rapidez del bote en relación con la orilla. Como el haz recorre una distancia ℓ_2, el tiempo que tarda en ir de M_S a M_2 sería $t = \ell_2/(c + v)$. Para hacer el viaje de regreso de M_2 a M_S, la luz se desplaza contra el viento de éter (como el bote que va corriente arriba), de manera que se espera que su rapidez relativa sea $c - v$. El tiempo para el viaje de regreso sería $\ell_2/(c - v)$. El tiempo total para que el haz 2 vaya de M_S a M_2 y de regreso a M_S es

$$t_2 = \frac{\ell_2}{c + v} + \frac{\ell_2}{c - v} = \frac{2\ell_2}{c\left(1 - v^2/c^2\right)}.$$

Ahora considere el haz 1, que viaja a través del viento de éter. Aquí la analogía del bote (figura 36-3b) es especialmente útil. El bote va del embarcadero A al embarcadero B directamente a través de la corriente. Si va directamente, el flujo de la corriente lo arrastrará corriente abajo. Para llegar al embarcadero B, el bote debe dirigirse en un ángulo corriente arriba. El ángulo preciso depende de las magnitudes de c y v, pero no es de interés para este análisis por sí mismo. El inciso *c*) de la figura 36-3 indica cómo calcular la velocidad v' del bote en relación con la Tierra conforme cruza la corriente. Como c, v y v' forman un triángulo recto, se tiene que $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$. El bote tiene la misma rapidez cuando regresa. Si ahora se aplican estos principios al haz de luz 1 en la figura 36-3a, se espera que el haz viaje con rapidez $\sqrt{c^2 - v^2}$ para ir de M_S a M_1 y de regreso. La distancia total recorrida es $2\ell_1$, así que el tiempo requerido para que el haz 1 haga el viaje redondo sería $2\ell_1/\sqrt{c^2 - v^2}$, o

$$t_1 = \frac{2\ell_1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Note que el denominador en esta ecuación para t_1 implica una raíz cuadrada, mientras que para t_2 no la implica.

Si $l_1 = \ell_2 = \ell$, se ve que el haz 2 se retrasará con respecto al haz 1 por una cantidad

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\ell}{c}\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Si $v = 0$, entonces $\Delta t = 0$, y los dos haces regresarán en fase, pues inicialmente estaban en fase. Pero si $v \neq 0$, entonces $\Delta t \neq 0$ y los dos haces regresarán fuera de fase. Si se pudiera medir este cambio de fase de la condición $v = 0$ a la de $v \neq 0$, entonces se podría determinar v. Pero la Tierra no se puede detener. Más aún, no debemos apresurarnos para suponer que las longitudes no resultan afectadas por el movimiento y, por consiguiente, que $\ell_1 = \ell_2$.

Michelson y Morley se dieron cuenta de que podían detectar la diferencia de fase (suponiendo que $v \neq 0$) si giraban su aparato 90º, porque entonces el patrón de interferencia entre los dos haces debía cambiar. En la posición girada, el haz 1 ahora se movería paralelo al éter y el haz 2 perpendicular al éter. Por lo tanto, los roles podrían invertirse, y en la posición girada los tiempos (designados mediante primas) serían

$$t_1' = \frac{2\ell_1}{c\,(1 - v^2/c^2)} \qquad \text{y} \qquad t_2' = \frac{2\ell_2}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

El retraso de tiempo entre los dos haces en la posición no girada (sin prima) sería

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\ell_2}{c\,(1 - v^2/c^2)} - \frac{2\ell_1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

En la posición girada, la diferencia de tiempo sería

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2\ell_2}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2\ell_1}{c\,(1 - v^2/c^2)}.$$

Cuando se realiza la rotación, las franjas del patrón de interferencia (sección 34-6) se correrían una cantidad determinada por la diferencia:

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{2}{c}(\ell_1 + \ell_2)\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Esta expresión se simplifica considerablemente si se supone que $v/c \ll 1$. En este caso se puede usar el desarrollo binomial (Apéndice A), de manera que

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}.$$

Así,

$$\Delta t - \Delta t' \approx \frac{2}{c}(\ell_1 + \ell_2)\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\approx (\ell_1 + \ell_2)\frac{v^2}{c^3}.$$

Ahora suponga que $v = 3.0 \times 10^4$ m/s, la rapidez de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. En los experimentos de Michelson y Morley, los brazos ℓ_1 y ℓ_2 fueron tuvieron aproximadamente 11 m de largo. La diferencia de tiempo sería entonces alrededor de

$$\frac{(22\text{ m})(3.0 \times 10^4\text{ m/s})^2}{(3.0 \times 10^8\text{ m/s})^3} \approx 7.3 \times 10^{-16}\text{ s}.$$

Para luz visible con longitud de onda $\lambda = 5.5 \times 10^{-7}$ m, la frecuencia sería $f = c/\lambda = (3.0 \times 10^8\text{ m/s})/5.5 \times 10^{-7}\text{ m}) = 5.5 \times 10^{14}$ Hz, lo cual significa que las crestas de onda pasan por un punto cada $1/(5.5 \times 10^{14}\text{ Hz}) = 1.8 \times 10^{-15}$ s. Por lo tanto, con una diferencia de tiempo de 7.3×10^{-16} s, Michelson y Morley deberían notar un movimiento en el patrón de interferencia de $(7.3 \times 10^{-16}\text{ s})/(1.8 \times 10^{-15}\text{ s}) = 0.4$ franjas. Ellos podían detectar fácilmente esto, pues su aparato era capaz de observar un corrimiento de franjas tan pequeño como de 0.01 franjas.

Pero, *¡no encontraron corrimiento significativo de franjas!* Colocaron su aparato en varias orientaciones. Realizaron observaciones día y noche, de manera que tuvieran varias orientaciones con respecto al Sol (por la rotación de la Tierra).

Intentaron en diferentes estaciones del año (la Tierra en diferentes posiciones por su órbita alrededor del Sol). Nunca observaron un corrimiento significativo de franjas.

Este **resultado nulo** fue uno de los grandes enigmas de la física a finales del siglo XIX. Explicarlo era un reto difícil. Una posibilidad para explicar el resultado nulo la plantearon de manera independiente G. F. Fitzgerald y H. A. Lorentz (en la década de 1890), y propusieron que cualquier longitud (incluido el brazo de un interferómetro) se contrae en un factor de $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en la dirección de movimiento a través del éter. De acuerdo con Lorentz, esto se podría deber al éter que afecta las fuerzas entre las moléculas de una sustancia, que se suponía tenían naturaleza eléctrica. Con el tiempo, esta teoría fue sustituida por la teoría más extensa propuesta por Albert Einstein en 1905: la teoría especial de la relatividad.

36–3 Postulados de la teoría especial de la relatividad

Los problemas que existían a comienzos del siglo XX con respecto a la teoría electromagnética y la mecánica newtoniana fueron hermosamente resueltos por la introducción de Einstein de la teoría de la relatividad en 1905. Desconocedor del resultado nulo de Michelson y Morley, Einstein fue motivado por ciertas preguntas concernientes a la teoría electromagnética y las ondas luminosas. Por ejemplo, se preguntaba: "¿Qué vería si viajo en un haz de luz?". La respuesta fue que, en vez de una onda electromagnética viajera, vería campos eléctricos y magnéticos alternos en reposo cuya magnitud cambiaría en el espacio, pero no cambiaría en el tiempo. Tales campos —reconoció— nunca fueron detectados y de hecho no eran congruentes con la teoría electromagnética de Maxwell. Por lo tanto, argumentó, no era razonable pensar que la rapidez de la luz relativa a algún observador se podría reducir a cero, o de hecho reducirse en absoluto. Esta idea se convirtió en el segundo postulado de su teoría de la relatividad.

En su famoso ensayo de 1905, Einstein propuso deshacerse por completo de la idea del éter y la suposición acompañante de un marco de referencia en reposo preferido o absoluto. Esta propuesta tomó cuerpo en dos postulados. El primero fue una extensión del principio de relatividad galileano-newtoniano para incluir no sólo las leyes de la mecánica, sino también las del resto de la física, incluidas las de la electricidad y el magnetismo:

> ***Primer postulado* (*el principio de relatividad*): Las leyes de la física tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales.**

El primer postulado también se puede enunciar como: *No hay experimento alguno que se pueda realizar en un marco de referencia inercial para decir si se está en reposo o en movimiento uniforme con velocidad constante.*

El segundo postulado es congruente con el primero:

> ***Segundo postulado* (*constancia de la rapidez de la luz*): La luz se propaga a través del espacio vacío con una rapidez definida *c* independiente de la rapidez de la fuente o el observador.**

Estos dos postulados constituyen los fundamentos de la **teoría especial de la relatividad** de Einstein. Se le llama "especial" para distinguirla de la posterior "teoría general de la relatividad", que trata con marcos de referencia no inerciales (en aceleración; capítulo 44). La teoría especial, que es la que estudia aquí, trata sólo con marcos inerciales

El segundo postulado parece difícil de aceptar, pues parece violar el sentido común. Antes que todo, se tiene que pensar en luz que viaja a través del espacio vacío. Sin embargo, abandonar la idea del éter no era tan difícil, pues nunca se le detectó. Pero el segundo postulado también dice que la rapidez de la luz en el vacío siempre es la misma, 3.00×10^8 m/s, sin importar cuál sea la rapidez del observador o de la fuente. En consecuencia, una persona que viaje hacia o desde una fuente de luz medirá la misma rapidez para esa luz que alguien en reposo con respecto a la fuente. Esto entra en conflicto con la experiencia cotidiana: uno esperaría tener que sumar la velocidad del observador. Por otra parte, quizás uno no espera que la experiencia cotidiana sea de utilidad cuando se lidia con la alta velocidad de la luz. Más aún, el resultado nulo del experimento de Michelson y Morley es completamente congruente con el segundo postulado.[†]

[†]El experimento de Michelson y Morley también se puede considerar como evidencia del primer postulado, pues tenía la intención de medir el movimiento relativo de la Tierra en un marco de referencia absoluto. Su fracaso para hacerlo implica la ausencia de cualquiera de tales marcos preferidos.

La propuesta de Einstein tiene cierta belleza. Al desechar la idea de un marco de referencia absoluto, fue posible reconciliar la mecánica clásica con la teoría electromagnética de Maxwell. La rapidez de la luz predicha por las ecuaciones de Maxwell *es* la rapidez de la luz en el vacío *en cualquier* marco de referencia.

La teoría de Einstein requiere que uno deseche nociones de sentido común acerca del espacio y el tiempo, y en las siguientes secciones se examinarán algunas extrañas, pero interesantes, consecuencias de la relatividad especial. Los argumentos para la mayor parte serán sencillos. Se usará una técnica que el mismo Einstein utilizó: imaginar situaciones experimentales muy sencillas en las que se necesiten pocas matemáticas. De esta forma, se pueden ver muchas de las consecuencias de la teoría de la relatividad sin necesidad de hacer cálculos detallados. Einstein llamó a estos experimentos "mentales".

36–4 Simultaneidad

Una consecuencia importante de la teoría de la relatividad es que uno ya no puede considerar al tiempo como una cantidad absoluta. Nadie duda que el tiempo fluye hacia delante y nunca regresa. Pero el intervalo de tiempo entre dos eventos, e incluso si dos eventos son o no simultáneos, depende del marco de referencia del observador. Por **evento**, que se usa mucho en el texto, se quiere dar a entender algo que ocurre en un lugar y en un tiempo particulares.

Se dice que dos eventos ocurren simultáneamente si ocurren exactamente al mismo tiempo. Pero, ¿cómo se sabe si dos eventos ocurren precisamente al mismo tiempo? Si ocurren en el mismo punto en el espacio, como dos manzanas que caen sobre su cabeza al mismo tiempo, es fácil. Pero si los dos eventos ocurren en lugares muy separados, es más difícil saber si son simultáneos, pues se debe considerar el tiempo que la luz proveniente de ellos tarda en llegar a donde uno está. Puesto que la luz viaja con rapidez finita, una persona que ve dos eventos debe calcular de nuevo para descubrir cuándo ocurrieron en realidad. Por ejemplo, si se *observa* que dos eventos ocurren al mismo tiempo, pero en realidad uno tuvo lugar más lejos del observador que el otro, entonces el más distante pudo ocurrir antes, y los dos eventos no fueron simultáneos.

Ahora imagine un sencillo experimento mental. Suponga que un observador, llamado O, se ubica exactamente a la mitad entre los puntos A y B, donde ocurren dos eventos, figura 36-4. Suponga que los dos eventos son relámpagos que caen en los puntos A y B, como se muestra. Para eventos breves como los relámpagos, sólo cortos pulsos de luz (representados por curvas en la figura 36-4) viajarán hacia fuera desde A y B, y llegarán a O. El observador O "ve" los eventos cuando los pulsos de luz llegan al punto O. Si los dos pulsos llegan a O al mismo tiempo, entonces los dos eventos tuvieron que ser simultáneos. Esto se debe a que los dos pulsos de luz viajaron con la misma rapidez (postulado 2) y, puesto que la distancia OA es igual a OB, el tiempo para que la luz viaje de A a O y de B a O debe ser el mismo. Entonces el observador O puede afirmar definitivamente que los dos eventos ocurrieron de manera simultánea. Por otra parte, si O ve la luz de un evento antes que la del otro, entonces el primer evento ocurrió primero.

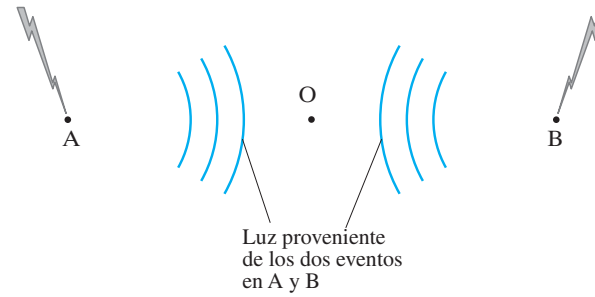


FIGURA 36–4 Un momento después de que el relámpago llega a los puntos A y B, los pulsos de luz (que se muestran como ondas) viajan hacia el observador O, pero O "ve" el relámpago sólo cuando la luz llega a O.

La pregunta que realmente se quiere examinar es ésta: si dos eventos son simultáneos para un observador en un marco de referencia, ¿también son simultáneos para otro observador que se mueve con respecto al primero? Llamemos a los observadores O_1 y O_2 y supongamos que están fijos en los marcos de referencia 1 y 2 que se mueven con rapidez relativa v uno con respecto al otro. Estos dos marcos de referencia se pueden considerar como dos cohetes o dos trenes (figura 36-5). O_2 dice que O_1 se mueve hacia la derecha con rapidez v, como en la figura 36-5a; y O_1 dice que O_2 se mueve hacia la izquierda con rapidez v, como en la figura 36-5b. Ambos puntos de vista son legítimos de acuerdo con el principio de la relatividad. [No hay un tercer punto de vista que diga cuál se mueve "en realidad"].

Ahora suponga que los observadores O_1 y O_2 observan y miden dos impactos de relámpagos. Los relámpagos marcan ambos trenes en los puntos adonde llegan: en A_1 y B_1 en el tren de O_1, y en A_2 y B_2 en el tren de O_2, figura 36-6a. En aras de la sencillez, suponga que O_1 está exactamente a medio camino entre A_1 y B_1, y que O_2 está a medio camino entre A_2 y B_2. Póngase primero en el marco de referencia de O_2, de manera que observe que O_1 se mueve a la derecha con rapidez v. Suponga también que los dos eventos ocurren *simultáneamente* en el marco de O_2, y justo en el instante cuando O_1 y O_2 están opuestos uno con respecto al otro, figura 36-6a. Poco tiempo después, figura 36-6b, la luz proveniente de A_2 y de B_2 llega a O_2 al mismo tiempo (esto se supuso). Puesto que O_2 sabe (o mide) que las distancias O_2A_2 y O_2B_2 son iguales, O_2 sabe que los eventos son simultáneos en el marco de referencia O_2.

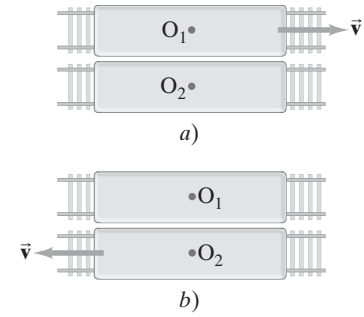


FIGURA 36–5 Los observadores O_1 y O_2, en dos trenes diferentes (dos marcos de referencia diferentes), se mueven con rapidez relativa v. O_2 dice que O_1 se mueve hacia la derecha *a*); O_1 dice que O_2 se mueve hacia la izquierda *b*). Ambos puntos de vista son legítimos: todo depende del marco de referencia.

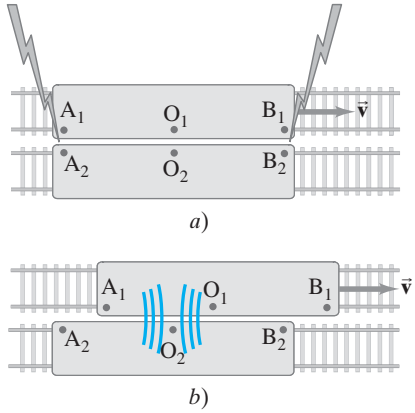


FIGURA 36–6 Experimento mental acerca de la simultaneidad. Tanto en *a*) como en *b*) se está en el marco de referencia del observador O_2, quien ve que el marco de referencia O_1 se mueve hacia la derecha. En *a*), un relámpago llega a los dos marcos de referencia en A_1 y A_2, y un segundo relámpago llega a B_1 y B_2. *b*) Un momento después, la luz (que se muestra en gris) proveniente de los dos eventos llega a O_2 al mismo tiempo. De manera que, de acuerdo con el observador O_2, los dos relámpagos llegan simultáneamente. Pero en el marco de referencia de O_1, la luz proveniente de B_1 ya llegó a O_1, mientras que la luz proveniente de A_1 todavía no llega a O_1. Por lo tanto, en el marco de referencia de O_1, el evento en B_1 debe preceder al evento en A_1. La simultaneidad en el tiempo no es absoluta.

Pero, ¿qué observa y mide el observador O_1? Desde nuestro marco de referencia (O_2), se puede predecir lo que observará O_1. Se ve que O_1 se mueve hacia la derecha durante el tiempo que la luz viaja hacia O_1 desde A_1 y B_1. Como se ilustra en la figura 36-6b, desde el marco de referencia O_2 se puede ver que la luz proveniente de B_1 ya pasó a O_1, mientras que la luz proveniente de A_1 todavía no llega a O_1. Esto es, O_1 observa la luz proveniente de B_1 antes de observar la luz que viene de A_1. Puesto que **1.** la luz viaja con la misma rapidez c en cualquier dirección y en cualquier marco de referencia, y **2.** la distancia O_1A_1 es igual a O_1B_1, entonces el observador O_1 sólo puede concluir que el evento en B_1 ocurrió antes que el evento en A_1. Los dos eventos *no* son simultáneos para O_1, aun cuando lo sean para O_2.

Por ende, se encuentra que dos eventos que tienen lugar en diferentes ubicaciones y son simultáneos para un observador, en realidad no son simultáneos para un segundo observador que se mueve en relación con el primero.

Puede ser tentador preguntar: "¿Cuál observador tiene razón, O_1 u O_2?". La respuesta, de acuerdo con la relatividad, es que *ambos* tienen razón. No existe un "mejor" marco de referencia que se pueda elegir para determinar cuál observador está en lo correcto. Ambos marcos son igualmente buenos. Sólo se puede concluir que *la simultaneidad no es un concepto absoluto*, sino relativo. Uno no está consciente de esta falta de concordancia en la simultaneidad en la vida diaria, porque el efecto sólo es apreciable cuando la rapidez relativa de los dos marcos de referencia es muy grande (cerca de c), o las distancias implicadas son muy grandes.

EJERCICIO A Examine el experimento de la figura 36-6 desde el marco de referencia de O_1. En este caso, O_1 estará en reposo y verá que el evento B_1 ocurre antes que A_1. ¿O_1 reconocerá que O_2, quien se mueve con rapidez v hacia la izquierda, verá los dos eventos como simultáneos? (*Sugerencia:* Dibuje un diagrama equivalente a la figura 36-6).

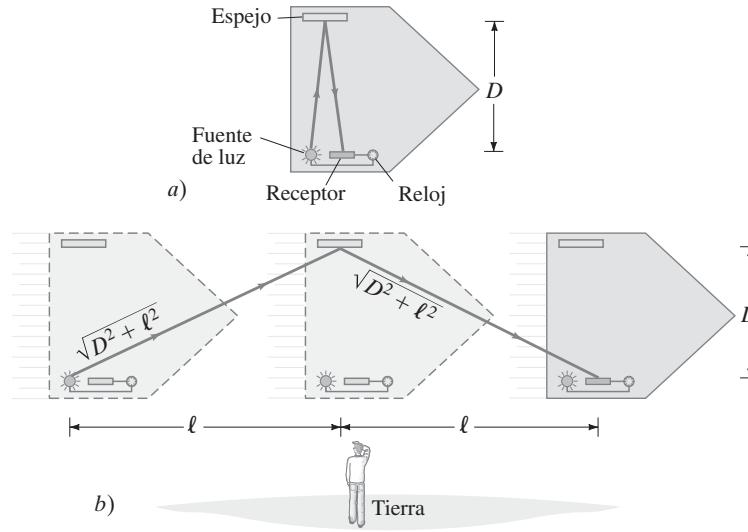


FIGURA 36–7 La dilatación del tiempo se puede demostrar mediante un experimento mental: el tiempo que tarda la luz en recorrer una nave espacial y regresar es mayor para el observador en la Tierra *b*) que para el observador en la nave espacial *a*).

36–5 Dilatación del tiempo y la paradoja de los gemelos

El hecho de que dos eventos simultáneos para un observador puedan no ser simultáneos para un segundo observador sugiere que el tiempo en sí no es absoluto. ¿Será que el tiempo transcurre de manera diferente en un marco de referencia que en otro? De hecho, esto es justo lo que predice la teoría de la relatividad de Einstein, como demuestra el siguiente experimento mental.

La figura 36-7 ilustra una nave espacial que pasa por la Tierra a alta rapidez. El punto de vista de un observador en la nave espacial se muestra en el inciso *a*), y el de un observador en la Tierra en el inciso *b*). Ambos observadores tienen relojes precisos. La persona en la nave espacial (figura 36-7a) emite un destello de luz y mide el tiempo que la luz tarda en viajar directamente a través de la nave espacial y regresar después de reflejarse en un espejo (para mayor claridad, los rayos se dibujan con un ligero ángulo). En el marco de referencia de la nave espacial, la luz recorre una distancia $2D$ con rapidez c; de manera que el tiempo requerido para ir de ida y vuelta, que se denotará como Δt_0, es

$$\Delta t_0 = 2D/c.$$

El observador en la Tierra, figura 36-7b, observa el mismo proceso. Pero, para este observador, la nave espacial está en movimiento. De esta manera, la luz recorre la trayectoria diagonal a través de la nave espacial, se refleja en el espejo y regresa al emisor. Aunque la luz viaja con la misma rapidez para este observador (segundo postulado), recorre una mayor distancia. Por lo tanto, el tiempo requerido, según mide el observador en la Tierra, será *mayor* que el medido por el observador en la nave espacial.

Determinemos el intervalo de tiempo Δt medido por el observador en la Tierra entre la emisión y la recepción de la luz. En el tiempo Δt, la nave espacial recorre una distancia $2\ell = v\,\Delta t$, donde v es la rapidez de la nave espacial (figura 36-7b). La luz recorre una distancia total sobre su trayectoria diagonal (teorema de Pitágoras) de $2\sqrt{D^2 + \ell^2}$, donde $\ell = v\,\Delta t/2$. En consecuencia,

$$c = \frac{2\sqrt{D^2 + \ell^2}}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{D^2 + v^2(\Delta t)^2/4}}{\Delta t}.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados,

$$c^2 = \frac{4D^2}{(\Delta t)^2} + v^2,$$

y al despejar Δt, se encuentra

$$\Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Al combinar esta ecuación para Δt con la fórmula anterior, $\Delta t_0 = 2D/c$, se encuentra que:

DILATACIÓN DEL TIEMPO

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad \textbf{(36–1a)}$$

Puesto que $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ siempre es menor que 1, se ve que $\Delta t > \Delta t_0$. Esto es, el intervalo de tiempo entre los dos eventos (el envío de la luz y su recepción en la nave espa-

cial) es *mayor* para el observador en la Tierra que para el observador en la nave espacial. Éste es un resultado general de la teoría de la relatividad, y se conoce como **dilatación del tiempo**. Enunciado de manera sencilla, el efecto de dilatación del tiempo dice que

> **los relojes en movimiento relativo a un observador corren más lentamente (en comparación con los relojes en reposo relativo a ese observador).**

Sin embargo, no se debe pensar que los relojes de alguna forma tienen fallas. En realidad, se mide que el tiempo pasa más lentamente en cualquier marco de referencia en movimiento, comparado con el propio. Este resultado notable es un resultado inevitable de los dos postulados de la teoría de la relatividad.

El factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ocurre con tanta frecuencia en relatividad que generalmente se le da el símbolo abreviado γ (letra griega "gamma"), y la ecuación 36-1a se escribe como

$$\Delta t = \gamma \, \Delta t_0 \qquad \textbf{(36–1b)}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad \textbf{(36–2)}$$

Advierta que γ nunca es menor que 1 y no tiene unidades. A rapideces normales, $\gamma = 1$ hasta algunos lugares decimales; en general, $\gamma \geq 1$.

El concepto de dilatación del tiempo puede ser difícil de aceptar, porque contradice la experiencia. A partir de las ecuaciones 36-1 se ve que el efecto de la dilatación del tiempo de hecho es despreciable a menos que v esté razonablemente cerca de c. Si v es mucho menor que c, entonces el término v^2/c^2 es mucho menor que 1 en el denominador de la ecuación 36-1a, y entonces $\Delta t \approx \Delta t_0$ (véase el ejemplo 36-2). Las rapideces que se experimentan en la vida cotidiana son mucho menores que c; son tan pequeñitas que comúnmente no se nota la dilatación del tiempo. Los experimentos pusieron a prueba el efecto de la dilatación del tiempo y confirmaron las predicciones de Einstein. En 1971, por ejemplo, relojes atómicos extremadamente precisos volaron alrededor del mundo en aviones a propulsión. La rapidez de los aviones (10^3 km/h) era mucho menor que c, de manera que los relojes tenían que ser precisos en el orden de los nanosegundos (10^{-9} s) para que se pudiera detectar cualquier dilatación del tiempo. Tuvieron esta precisión y confirmaron las ecuaciones 36-1 dentro del margen de error experimental. Sin embargo, la dilatación del tiempo se confirmó décadas antes, mediante observaciones de "partículas elementales" que tienen masas diminutas (por lo general de 10^{-30} a 10^{-27} kg) y en consecuencia requieren poca energía para acelerarse a rapideces cercanas a la de la luz, c. Muchas de estas partículas elementales no son estables y, con el tiempo, decaen en partículas más ligeras. Un ejemplo es el muón, cuya vida media es de 2.2 μs cuando está en reposo. Cuidadosos experimentos demostraron que, cuando un muón viaja con alta rapidez, su vida media es más larga que cuando está en reposo, tal como predijo la fórmula de dilatación del tiempo.

EJEMPLO 36–1 **Vida media de un muón en movimiento.** *a*) ¿Cuál será la vida media de un muón, medida en el laboratorio, si viaja a $v = 0.60c = 1.80 \times 10^8$ m/s con respecto al laboratorio? Su vida media en reposo es 2.20 μs $= 2.20 \times 10^{-6}$ s. *b*) ¿Cuánto recorre un muón en el laboratorio, en promedio, antes de decaer?

PLANTEAMIENTO Si un observador se moviera junto con el muón (el muón estaría en reposo para este observador), el muón tendría una vida media de 2.2×10^{-6} s. Para un observador en el laboratorio, el muón vive más debido a la dilatación del tiempo. Encuentre la vida media con la ecuación 36-1a y la distancia media dada por $d = v \, \Delta t$.

SOLUCIÓN *a*) A partir de la ecuación 36-1a, con $v = 0.60c$, se tiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2.20 \times 10^{-6}\,\text{s}}{\sqrt{1 - 0.36c^2/c^2}} = \frac{2.20 \times 10^{-6}\,\text{s}}{\sqrt{0.64}} = 2.8 \times 10^{-6}\,\text{s}.$$

b) La relatividad predice que un muón con una rapidez de 1.80×10^8 m/s recorrería una distancia media $d = v \, \Delta t = (1.80 \times 10^8\,\text{m/s})(2.8 \times 10^{-6}\,\text{s}) = 500$ m, y ésta es la distancia que se mide experimentalmente en el laboratorio.

NOTA A una rapidez de 1.8×10^8 m/s, la física clásica diría que, con una vida media de 2.2 μs, un muón promedio recorrería $d = vt = (1.8 \times 10^8\,\text{m/s})(2.2 \times 10^{-6}\,\text{s}) = 400$ m. Esto es menos que la distancia medida.

EJERCICIO B ¿Cuál es la vida media del muón (ejemplo 36-1) si viaja a $v = 0.90c$? *a*) 0.42 μs; *b*) 2.3 μs; *c*) 5.0 μs; *d*) 5.3 μs; *e*) 12.0 μs.

⚠ CUIDADO

El tiempo propio Δt_0 es para 2 eventos en el mismo punto en el espacio

Es necesario clarificar cómo usar las ecuaciones 36-1 y el significado de Δt y Δt_0. La ecuación es cierta sólo cuando Δt_0 representa el intervalo de tiempo entre los dos eventos en un marco de referencia donde ambos ocurren *en el mismo punto del espacio* (como en la figura 36-7a, donde los dos eventos son el destello de luz que se envía y el destello que se recibe). Este intervalo de tiempo, Δt_0, se denomina **tiempo propio**. Entonces Δt en las ecuaciones 36-1 representa el intervalo de tiempo entre los dos eventos, medido en un marco de referencia que se mueve con rapidez v con respecto al primero. En el ejemplo 36-1 anterior, Δt_0 (y no Δt) se igualó a 2.2×10^{-6} s porque sólo es en el marco en reposo del muón donde ocurren los dos eventos ("nacimiento" y "decaimiento") en el mismo punto en el espacio. El tiempo propio Δt_0 es el tiempo más corto entre los eventos que puede medir cualquier observador. En cualquier otro marco de referencia en movimiento, el tiempo Δt es mayor.

EJEMPLO 36–2 **Dilatación del tiempo a 100 km/h.** Comprobemos la dilatación del tiempo para rapideces cotidianas. Un automóvil que viaja a 100 km/h recorre cierta distancia en 10.00 s, de acuerdo con el reloj del conductor. ¿Cuál sería la medición de un observador en reposo sobre la Tierra para el intervalo de tiempo?

PLANTEAMIENTO La rapidez del automóvil relativa a la Tierra es 100 km/h = $(1.00 \times 10^5 \text{ m})/(3600 \text{ s}) = 27.8$ m/s. El conductor está en reposo en el marco de referencia del automóvil, así que se sustituye $\Delta t_0 = 10.00$ s en la fórmula de dilatación del tiempo.

SOLUCIÓN Se utiliza la ecuación 36-1a:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{10.00 \text{ s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{27.8 \text{ m/s}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2}} = \frac{10.00 \text{ s}}{\sqrt{1 - (8.59 \times 10^{-15})}}.$$

Si usted alimenta una calculadora con estos números, obtendrá $\Delta t = 10.00$ s, pues el denominador difiere de 1 por tan pequeña cantidad. De hecho, el tiempo medido por un observador en la Tierra no mostraría diferencia del que mide el conductor, incluso con los mejores instrumentos. Una computadora capaz de calcular hasta un gran número de lugares decimales revelaría una diferencia entre Δt y Δt_0. La diferencia se puede estimar con el desarrollo binomial (Apéndice A).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Uso del desarrollo binomial

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx. \qquad [\text{para } x \ll 1]$$

En la fórmula de dilatación del tiempo, se tiene el factor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Por lo tanto,

$$\Delta t = \gamma \, \Delta t_0 = \Delta t_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \Delta t_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\approx 10.00 \text{ s} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{27.8 \text{ m/s}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2\right] \approx 10.00 \text{ s} + 4 \times 10^{-14} \text{ s}.$$

De manera que la diferencia entre Δt y Δt_0 se predice como 4×10^{-14} s, una cantidad extremadamente pequeña.

EJERCICIO C Cierto reloj atómico mantiene tiempo perfecto sobre la Tierra. Si el reloj se lleva en una nave espacial que viaja con una rapidez $v = 0.60c$, ¿este reloj ahora corre más lentamente de acuerdo con las personas en *a*) la nave espacial, *b*) la Tierra?

EJEMPLO 36–3 **Lectura de una revista en una nave espacial.** Un pasajero en una nave espacial de gran rapidez, que viaja entre la Tierra y Júpiter con una rapidez constante de $0.75c$, lee una revista en 10.0 min de acuerdo con su reloj. *a*) ¿Cuánto tarda en leerla, según se mide en relojes colocados en Tierra? *b*) ¿Cuánto más lejos está la nave espacial de la Tierra al final de la lectura de la revista, de lo que estaba al principio?

PLANTEAMIENTO *a*) El intervalo de tiempo en un marco de referencia se relaciona con el intervalo de tiempo en el otro mediante la ecuación 36-1a o b. *b*) Con rapidez constante, la distancia es rapidez × tiempo. Puesto que hay dos tiempos (un Δt y un Δt_0), se obtendrán dos distancias: una para cada marco de referencia. [Este resultado sorprendente se explora en la siguiente sección (36-6)].

SOLUCIÓN *a*) El intervalo de tiempo dado de 10.0 min es el tiempo propio: el inicio y el fin de la lectura de la revista ocurren en el mismo lugar en la nave espacial. Los relojes en la Tierra miden

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{10.00 \text{ min}}{\sqrt{1 - (0.75)^2}} = 15.1 \text{ min}.$$

b) En el marco de la Tierra, el cohete recorre una distancia $D = v\,\Delta t = (0.75c)(15.1 \text{ min}) = (0.75)(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})(15.1 \text{ min} \times 60 \text{ s/min}) = 2.04 \times 10^{11} \text{ m}$. En el marco de la nave espacial, la Tierra se aleja de la nave espacial a $0.75c$, pero el tiempo sólo es de 10.0 min, de manera que la distancia se mide en $D_0 = v\,\Delta t_0 = (2.25 \times 10^8 \text{ m/s})(600\text{s}) = 1.35 \times 10^{11} \text{ m}$.

En la tabla 36-1 se indican valores para $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ para algunos valores de rapidez v.

TABLA 36–1 Valores de γ

v	γ
0	1.000
$0.01c$	1.000
$0.10c$	1.005
$0.50c$	1.15
$0.90c$	2.3
$0.99c$	7.1

¿Viaje espacial?

La dilatación del tiempo suscitó interesantes especulaciones acerca de los viajes espaciales. De acuerdo con la física clásica (newtoniana), alcanzar una estrella a 100 años luz de distancia no sería posible para mortales ordinarios (1 año luz es la distancia que recorre la luz en 1 año $= 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \times 3.16 \times 10^7 \text{ s} = 9.5 \times 10^{15} \text{ m}$). Incluso si una nave espacial pudiera viajar con una rapidez muy cercana a la de la luz, tardaría cerca de 100 años en llegar a tal estrella. Pero la dilatación del tiempo dice que el tiempo implicado podría ser menor. En una nave espacial que viaje a $v = 0.999c$, el tiempo para tal viaje sería de sólo aproximadamente $\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = (100 \text{ años})\sqrt{1 - (0.999)^2} = 4.5 \text{ años}$. Por lo tanto, la dilatación del tiempo permite tal viaje, pero es probable que no se superen los enormes problemas prácticos que implica lograr una rapidez así, al menos no en el futuro cercano.

En este ejemplo, en la Tierra transcurrirían 100 años, mientras que para el astronauta en el viaje sólo pasarían 4.5 años. ¿Sólo son los relojes lo que funcionaría más lentamente para el astronauta? No. Todos los procesos, incluidos el envejecimiento y otros procesos vitales, se realizarían más lentamente para el astronauta, de acuerdo con el observador de la Tierra. Pero para el astronauta, el tiempo pasaría en una forma normal. El astronauta experimentaría 4.5 años de dormir, comer, leer, etcétera. Y las personas sobre la Tierra experimentarían 100 años de actividad ordinaria.

Paradoja de los gemelos

No mucho tiempo después de que Einstein propusiera la teoría especial de la relatividad, se puntualizó una aparente paradoja. De acuerdo con esta **paradoja de los gemelos**, suponga que uno de un par de gemelos de 20 años de edad despega en una nave espacial que viaja con muy alta rapidez hacia una estrella distante y regresa, mientras que el otro gemelo permanece en la Tierra. De acuerdo con el gemelo en la Tierra, el gemelo astronauta envejecerá menos. Mientras que pueden pasar 20 años para el gemelo en la Tierra, tal vez sólo pasaría un año para el viajero (dependiendo de la rapidez de la nave espacial). Por ende, cuando el viajero regresa, el gemelo que se quedó en Tierra podría tener 40 años de edad, mientras que el gemelo viajero sólo tendría 21.

Éste es el punto de vista del gemelo en la Tierra. Pero, ¿qué hay del gemelo viajero? Si todos los marcos de referencia inerciales son igualmente buenos, ¿el gemelo viajero no haría las mismas afirmaciones que el gemelo en la Tierra, sólo que a la inversa? ¿El gemelo astronauta no puede afirmar que, puesto que la Tierra se mueve alejándose a alta rapidez, el tiempo pasa más lentamente en la Tierra y que el gemelo en la Tierra envejecerá menos? Esto es lo opuesto de lo que predice el gemelo de la Tierra. No es posible que ambos estén en lo correcto, porque, después de todo, la nave espacial regresa a la Tierra y se puede realizar una comparación directa de edades y relojes.

Sin embargo, aquí no existe contradicción. De hecho, uno de los puntos de vista es incorrecto. Las consecuencias de la teoría especial de la relatividad (en este caso, la dilatación del tiempo) se pueden aplicar sólo mediante observadores en un marco de referencia inercial. La Tierra es (o casi es) uno de tales marcos, mientras que la nave espacial no lo es. La nave espacial acelera al comienzo y al final de su viaje, y cuando da vuelta en el punto más lejano de su viaje. Durante la aceleración, el gemelo en la nave espacial no está en un marco de referencia inercial. Mientras tanto, el gemelo astronauta puede estar en un marco inercial (y se justifica al decir que el reloj del gemelo de la Tierra funciona lentamente), pero no siempre es el mismo marco. Así que no puede usar la relatividad especial para predecir sus edades relativas cuando regresa a Tierra. El gemelo de la Tierra permanece en el mismo marco inercial y, por ende, se puede confiar en sus predicciones con base en la relatividad especial. En consecuencia, no hay paradoja. La predicción del gemelo de la Tierra de que el gemelo viajero envejece menos es la adecuada.

*Sistema de posicionamiento global (GPS)

FÍSICA APLICADA
Sistema de posicionamiento global (GPS)

Los pilotos de aviones, automóviles y botes, así como los excursionistas usan receptores de **sistema de posicionamiento global** (**GPS**, por las siglas de *global positioning system*) que les informan con bastante exactitud dónde están en un momento dado. Los 24 satélites del sistema de posicionamiento global envían señales de tiempo precisas que usan relojes atómicos. El receptor compara los tiempos recibidos desde al menos cuatro satélites, cuyos tiempos se sincronizan cuidadosamente dentro del orden de 1 parte en 10^{13}. Al comparar las diferencias de tiempo con las posiciones conocidas de los satélites y la rapidez fija de la luz, el receptor puede determinar a qué distancia está de cada satélite y, por consiguiente, dónde está sobre la Tierra. Esto se logra hasta con una exactitud de 15 m, si se realizan correcciones como la siguiente debida a la relatividad especial.

EJEMPLO CONCEPTUAL 36–4 **Una corrección relativista al GPS.** Los satélites GPS se desplazan aproximadamente a 4 km/s = 4000 m/s. Demuestre que un buen receptor GPS necesita corregir considerando la dilatación del tiempo si ha de producir resultados congruentes con relojes atómicos precisos hasta 1 parte en 10^{13}.

RESPUESTA Calcule la magnitud del efecto de dilatación del tiempo al insertar $v = 4000$ m/s en la ecuación 36-1a:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,\Delta t_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{4 \times 10^3\ \text{m/s}}{3 \times 10^8\ \text{m/s}}\right)^2}}\,\Delta t_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 1.8 \times 10^{-10}}}\,\Delta t_0 .\end{aligned}$$

Use el desarrollo binomial: $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ para $x \ll 1$ (véase el Apéndice A) que aquí es $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. Esto es,

$$\Delta t = \left(1 + \tfrac{1}{2}(1.8 \times 10^{-10})\right)\Delta t_0 = \left(1 + 9 \times 10^{-11}\right)\Delta t_0 .$$

El "error" de tiempo dividido entre el intervalo de tiempo es

$$\frac{(\Delta t - \Delta t_0)}{\Delta t_0} = 1 + 9 \times 10^{-11} - 1 = 9 \times 10^{-11} \approx 1 \times 10^{-10}.$$

La dilatación del tiempo, si no se toma en cuenta, introduciría un error de aproximadamente 1 parte en 10^{10}, que es 1000 veces mayor que la precisión de los relojes atómicos. No corregir considerando la dilatación del tiempo significa que un receptor podría obtener una exactitud mucho menor.

NOTA Los dispositivos GPS también deben hacer otras correcciones, incluidas aquéllas referentes a los efectos asociados con la relatividad general.

36–6 Contracción de la longitud

No sólo los intervalos de tiempo son diferentes en distintos marcos de referencia. Los intervalos de espacio —longitudes y distancias— también son diferentes de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, y esto se ilustra con un experimento mental.

Observadores en la Tierra miran una nave espacial que viaja con rapidez v desde la Tierra hasta Neptuno, figura 36-8a. La distancia entre los planetas, medida por los observadores de la Tierra, es ℓ_0. El tiempo requerido para el viaje, medido desde la Tierra, es

$$\Delta t = \frac{\ell_0}{v}. \qquad \text{[observador en la Tierra]}$$

En la figura 36-8b se ve el punto de vista de los observadores en la nave espacial. En este marco de referencia, la nave espacial está en reposo; la Tierra y Neptuno se mueven† con rapidez v. El tiempo entre la partida de la Tierra y la llegada a Neptuno (observada desde la nave espacial) es el "tiempo propio", pues los dos eventos ocurren en el mismo punto en el espacio (es decir, en la nave espacial). En consecuencia, el inter-

†Se supone que v es mucho mayor que la rapidez relativa de Neptuno y la Tierra, así que esta última se puede ignorar.

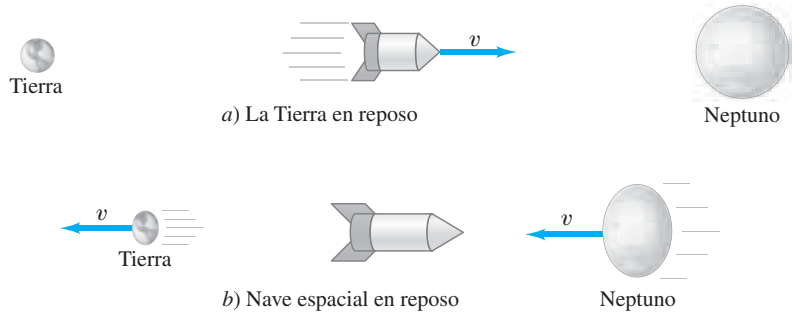


FIGURA 36–8 *a*) Una nave espacial que viaja a muy alta rapidez desde la Tierra hacia el planeta Neptuno, como se ve desde el marco de referencia de la Tierra. *b*) De acuerdo con un observador en la nave espacial, la Tierra y Neptuno se mueven a la muy alta rapidez v: la Tierra deja la nave espacial y un tiempo Δt_0 más tarde Neptuno llega a la nave espacial.

valo de tiempo es menor para los observadores en la nave especial que para los observadores en la Tierra. Esto es, a causa de la dilatación del tiempo (ecuación 36-1a), el tiempo para el viaje, según se ve en la nave espacial, es

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = \Delta t/\gamma. \qquad \text{[observador en la nave espacial]}$$

Puesto que los observadores en la nave espacial miden la misma rapidez pero menos tiempo entre estos dos eventos, también miden la distancia como menor. Si se considera que ℓ es la distancia entre los planetas, vista por los observadores de la nave espacial, entonces $\ell = v\,\Delta t_0$, que se puede rescribir como $\ell = v\,\Delta t_0 = v\,\Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = \ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Por lo tanto, se tiene el importante resultado

CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad \textbf{(36–3a)}$$

o, empleando γ (ecuación 36-2),

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma}. \qquad \textbf{(36–3b)}$$

Éste es un resultado general de la teoría especial de la relatividad y se aplica a longitudes de objetos así como a distancia entre objetos. El resultado se puede enunciar de forma más sencilla con palabras:

> **La longitud de un objeto que se mueve en relación con el observador, según las mediciones, es más corta a lo largo de su dirección de movimiento que cuando está en reposo.**

A esto se le conoce como **contracción de la longitud**. La longitud ℓ_0 en las ecuaciones 36-3 se llama **longitud propia**. Es la longitud del objeto (o la distancia entre dos puntos cuyas posiciones se miden al mismo tiempo) según determinan *observadores en reposo* con respecto al objeto. Las ecuaciones 36-3 dan la longitud ℓ que medirán los observadores cuando el objeto pase junto a ellos con rapidez v.

⚠ CUIDADO
La longitud propia se mide en el marco de referencia donde las dos posiciones están en reposo

Es importante notar que la contracción de la longitud ocurre *sólo a lo largo de la dirección de movimiento*. Por ejemplo, la nave espacial en movimiento de la figura 36-8a se acorta en longitud, pero su altura es la misma que cuando está en reposo.

La contracción de la longitud, al igual que la dilatación del tiempo, no es apreciable en la vida cotidiana debido a que el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en la ecuación 36-3a difiere significativamente de 1.00 sólo cuando v es muy grande.

EJEMPLO 36–5 **Contracción de una pintura.** Una pintura rectangular, que mide 1.00 m de alto y 1.50 m de ancho, cuelga de la pared lateral de una nave espacial que pasa junto a la Tierra con una rapidez de $0.90c$. Véase la figura 36-9a. *a*) ¿Cuáles son las dimensiones de la pintura, de acuerdo con el capitán de la nave espacial? *b*) ¿Cuáles son las dimensiones que ve un observador en la Tierra?

PLANTEAMIENTO Se aplica la fórmula de la contracción de la longitud, ecuación 36-3a, a la dimensión paralela al movimiento; v es la rapidez de la pintura relativa al observador.

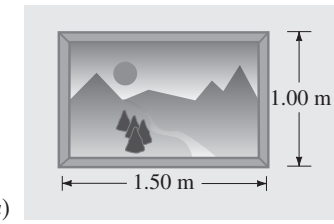
SOLUCIÓN *a*) La pintura está en reposo ($v = 0$) en la nave espacial, de manera que parece perfectamente normal a todos en la nave espacial (al igual que todo lo demás en la nave espacial). El capitán ve una pintura de 1.00 m por 1.50 m.

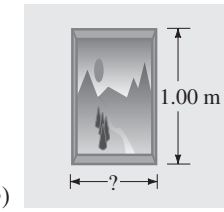
b) Sólo se acorta la dimensión en la dirección del movimiento, así que la altura queda inalterada en 1.00 m, figura 36-9b. Sin embargo, la longitud se contrae a

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$= (1.50\text{ m})\sqrt{1 - (0.90)^2} = 0.65\text{ m}.$$

De manera que la pintura tiene dimensiones de 1.00 m × 0.65 m.

FIGURA 36–9 Ejemplo 36–5.





EJEMPLO 36–6 **Un supertrén de fantasía.** Un tren muy rápido, con una longitud propia de 500 m, pasa a través de un túnel de 200 m de largo. Imagine que la rapidez del tren es tan elevada que el tren cabe completamente dentro del túnel, según ve un observador en reposo sobre la Tierra. Esto es, la máquina está a punto de salir por un extremo del túnel cuando el último vagón desaparece por el otro extremo. ¿Cuál es la rapidez del tren?

PLANTEAMIENTO Puesto que el tren cabe justo en el interior del túnel, su longitud medida por la persona en el suelo es de 200 m. Entonces se puede usar la fórmula de contracción de la longitud, ecuación 36-3a o b, para despejar v.

SOLUCIÓN Al sustituir $\ell = 200$ m y $\ell_0 = 500$ m en la ecuación 36-3a se obtiene

$$200\text{ m} = 500\text{ m}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

Al dividir ambos lados entre 500 m y elevar al cuadrado se obtiene

$$(0.40)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

o

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (0.40)^2}$$

y

$$v = 0.92c.$$

NOTA Ningún tren real podría ir tan rápido. Pero es divertido pensar en ello.

NOTA Un observador en el *tren no* vería los dos extremos del tren dentro del túnel al mismo tiempo. Recuerde que los observadores que se mueven unos en relación con otros no concuerdan acerca de la simultaneidad.

EJERCICIO D ¿Cuál es la longitud del túnel, según miden los observadores a bordo del tren en el ejemplo 36-6?

EJEMPLO CONCEPTUAL 36–7 **Determinación de la longitud del tren y el túnel.** Observadores en reposo sobre la Tierra ven un tren muy rápido de 200 m de largo que pasa a través de un túnel de 200 m de largo (como en el ejemplo 36-6), de manera que el tren momentáneamente desaparece de la vista dentro del túnel. Observadores a bordo del tren miden la longitud del tren en 500 m y la longitud del túnel sólo en 80 m (ejercicio D, con la ecuación 36-3a). Como es obvio, un tren de 500 m de largo no puede caber dentro de un túnel de 80 m de largo. ¿Cómo se explica esta aparente incongruencia?

RESPUESTA Los eventos simultáneos en un marco de referencia tal vez no sean simultáneos en otro. Sea el "evento A" la máquina que sale de un extremo del túnel, y el "evento B" el último vagón que desaparece en el otro extremo. Para los observadores en el marco de la Tierra, los eventos A y B son simultáneos. Sin embargo, para los observadores a bordo del tren, los eventos no son simultáneos. En el marco del tren, el evento A ocurre antes que el evento B. Conforme la máquina sale del túnel, los observadores a bordo del tren observan al último vagón todavía a 500 m − 80 m = 420 m de la entrada al túnel.

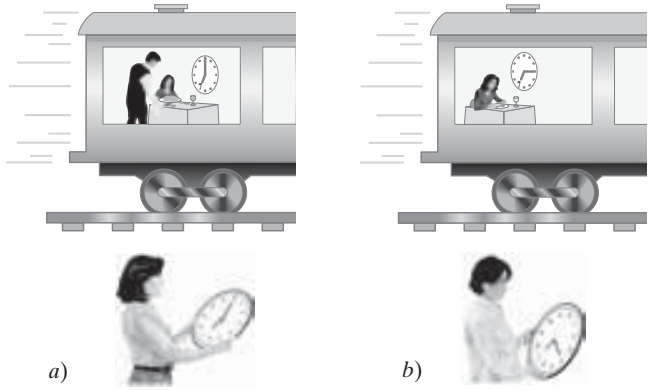


FIGURA 36–10 De acuerdo con un reloj exacto sobre un tren que viaja rápidamente, una persona *a*) comienza a cenar a las 7:00 y *b*) termina a las 7:15. Al comienzo de la cena, dos observadores en la Tierra ajustan sus relojes para corresponder con el reloj del tren. Estos observadores miden que el tiempo de comida es de 20 minutos.

36–7 Espacio-tiempo tetradimensional

Imagine que una persona se encuentra a bordo de un tren que viaja a una rapidez muy alta, por ejemplo, $0.65c$ (figura 36-10). Esta persona comienza a cenar a las 7:00 y termina a las 7:15, de acuerdo con un reloj en el tren. Los dos eventos, comienzo y fin de la cena, tienen lugar en el mismo punto a bordo del tren. Así que el tiempo propio entre estos dos eventos es de 15 min. Para observadores en la Tierra, la comida tardará más: 20 min, de acuerdo con las ecuaciones 36-1. Suponga que la comida se sirvió en un plato de 20 cm de diámetro. Para observadores en la Tierra, el plato mide sólo 15 cm de diámetro (contracción de la longitud). Por ende, para observadores en la Tierra, la ración de comida parece más pequeña, pero dura más tiempo.

En un sentido, los dos efectos (dilatación del tiempo y contracción de la longitud) se equilibran mutuamente. Cuando se ven desde la Tierra, lo que un objeto parece perder en tamaño lo gana en longitud de tiempo de duración. Espacio, o longitud, se intercambian por tiempo.

Consideraciones como ésta conducen a la idea de un **espacio-tiempo tetradimensional**: el espacio ocupa tres dimensiones y el tiempo es una cuarta dimensión. Espacio y tiempo están íntimamente vinculados. Tal como cuando al apretar un globo, una dimensión de éste se hace más larga y otra más corta, de igual forma, cuando se examinan objetos y eventos desde diferentes marcos de referencia, cierta cantidad de espacio se intercambia por tiempo, o viceversa.

Aunque la idea de cuatro dimensiones parece extraña, se refiere a la idea de que cualquier objeto o evento se especifica mediante cuatro cantidades: tres para describir dónde en el espacio, y una para describir cuándo en el tiempo. El aspecto realmente inusual del espacio-tiempo tetradimensional es que espacio y tiempo pueden entremezclarse: un poco de uno puede intercambiarse por un poco del otro cuando cambia el marco de referencia.

Para la mayoría de las personas es difícil entender la idea de espacio-tiempo tetradimensional. De algún modo sienten, como los físicos lo hicieron antes de la llegada de la relatividad, que espacio y tiempo son entidades completamente separadas. Sin embargo, en los experimentos mentales se encontró que no están completamente separados. Y piense acerca de Galileo y Newton. Antes de Galileo, la dirección vertical, aquélla en la que caen los objetos, se consideraba distintivamente diferente de las dos dimensiones horizontales. Galileo demostró que la dimensión vertical sólo difiere en que resulta ser la dirección en la que actúa la gravedad. De otro modo, las tres dimensiones son equivalentes, un punto de vista que todos aceptan en la actualidad. Ahora se pide aceptar una dimensión más, el tiempo, que anteriormente se consideraba como algo diferente. Esto no equivale a decir que no hay distinción entre espacio y tiempo. Lo que la relatividad demostró es que las determinaciones de espacio y tiempo no son independientes una de otra.

En la relatividad galileana-newtoniana, el intervalo de tiempo entre dos eventos, Δt, y la distancia entre dos eventos o puntos, Δx, son cantidades invariantes sin importar desde cuál marco de referencia se vean. Ninguna de estas cantidades es invariante de acuerdo con la relatividad de Einstein. Pero hay una cantidad invariante en el espacio- tiempo tetradimensional, llamada **intervalo espacio-tiempo**, que es $(\Delta s)^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$. Este problema (indicado con el número 97 al final del capítulo) se deja para demostrar que tal cantidad, de hecho, es invariante bajo una transformación de Lorentz (sección 36-8).

36–8 Transformaciones galileanas y de Lorentz

Ahora examinaremos con detalle las matemáticas de cantidades relacionadas en un marco de referencia inercial, con las cantidades equivalentes en otro. En particular, se verá cómo las posiciones y velocidades se *transforman* (esto es, cambian) de un marco a otro.

Comenzaremos con el punto de vista clásico o galileano. Considere dos marcos de referencia inerciales S y S′ que se caracterizan, cada uno, por un conjunto de ejes coordenados, figura 36-11. Los ejes x y y se refieren a S, y x' y y' a S′ (no se muestra z). Los ejes x' y x se traslapan entre sí, y se supone que el marco S′ se mueve hacia la derecha en la dirección x con rapidez constante v con respecto a S. Para simplicar la situación, suponga que los orígenes 0 y 0′ de los dos marcos de referencia se superponen en el tiempo $t = 0$.

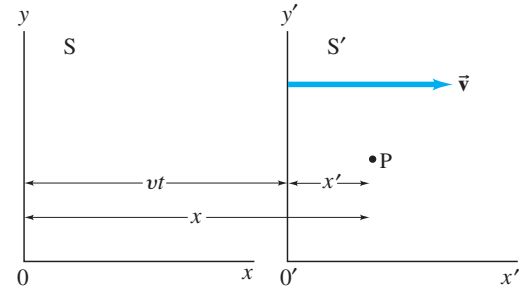


FIGURA 36–11 El marco de referencia inercial S′ se mueve hacia la derecha con rapidez constante v con respecto al marco S.

Ahora considere un evento que ocurre en algún punto P (figura 36-11) representado por las coordenadas x', y', z' en el marco de referencia S′ en el tiempo t'. ¿Cuáles serán las coordenadas de P en S? Como S y S′ inicialmente se traslapan con precisión, después de un tiempo t', S′ se moverá una distancia vt'. Por lo tanto, en el tiempo t', $x = x' + vt'$. Por otra parte, las coordenadas y y z, no se alteran por el movimiento a lo largo del eje x; por lo tanto, $y = y'$ y $z = z'$. Finalmente, puesto que el tiempo se supone absoluto en la física galileana-newtoniana, los relojes en los dos marcos concordarán entre sí; de manera que $t = t'$. Esto se resume en las siguientes **ecuaciones de transformación galileana**:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t'. \end{aligned} \qquad \text{[galileana]} \quad \textbf{(36–4)}$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas de un evento en el marco S cuando se conocen las coordenadas en el marco S′. Si se conocen las del marco S, entonces las coordenadas S′ se obtienen a partir de

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \quad \text{[galileana]}$$

Estas cuatro ecuaciones son la transformación "inversa" y se obtienen muy fácilmente de las ecuaciones 36-4. Advierta que el efecto es simplemente intercambiar cantidades primas y no primas, y sustituir v por $-v$. Esto tiene sentido pues, desde el marco S′, S se mueve hacia la izquierda (dirección x negativa) con rapidez v.

Ahora suponga que el punto P en la figura 36-11 representa una partícula que se mueve. Sean u'_x, u'_y, u'_z las componentes de su vector velocidad en S′. (Se usa u para distinguirla de la velocidad relativa de los dos marcos, v). Ahora $u'_x = dx'/dt'$, $u'_y = dy'/dt'$ y $u'_z = dz'/dt'$. La velocidad de P vista desde S tendrá componentes u_x, u_y y u_z. Se puede demostrar cómo se relacionan éstas con las componentes de velocidad en S′ al diferenciar las ecuaciones 36-4. Para u_x se obtiene

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + vt')}{dt'} = u'_x + v$$

pues v se supuso constante. Para las otras componentes, $u'_y = u_y$ y $u'_z = u_z$, de manera que se tiene

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z. \end{aligned} \qquad \text{[galileana]} \quad \textbf{(36–5)}$$

Éstas se conocen como **ecuaciones de transformación galileana de velocidad**. Se ve que las componentes y y z de velocidad no cambian, pero las componentes x difieren por v: $u_x = u'_x + v$. Esto es justo lo que se empleó antes (véase el capítulo 3, sección 3-9) cuando se trató con velocidad relativa.

Las transformaciones galileanas, ecuaciones 36-4 y 36-5, sólo son válidas cuando las velocidades implicadas son mucho menores que c. Se puede ver, por ejemplo, que la primera de las ecuaciones 36-5 no funcionará para la rapidez de la luz: la luz que viaja en S′ con rapidez $u'_x = c$ tendría rapidez $c + v$ en S, mientras que la teoría de la relatividad insiste en que debe ser c en S. Así que, sin duda, se necesita un nuevo conjunto de ecuaciones de transformación para lidiar con velocidades relativistas.

Deducimos la ecuación requerida al observar de nuevo la figura 36-11. Se tratará la suposición simple de que la transformación es lineal y de la forma

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad y = y', \qquad z = z'. \qquad \textbf{(i)}$$

Esto es, modificamos la primera de las ecuaciones 36-4 multiplicando por una constante γ que todavía se tiene que determinar[†] ($\gamma = 1$ no relativista). Pero se supone que las ecuaciones y y z no cambian, pues no hay contracción de la longitud en estas direcciones. No se supondrá una forma para t, pero se le deducirá. Las ecuaciones inversas deben tener la misma forma sólo que con $-v$ en lugar de v. (El principio de relatividad lo demanda, pues S′ que se mueve hacia la derecha con respecto a S es equivalente a S que se mueve hacia la izquierda con respecto a S′). Por lo tanto,

$$x' = \gamma(x - vt). \qquad \textbf{(ii)}$$

Ahora, si un pulso de luz sale del origen común de S y S′ en el tiempo $t = t' = 0$, después de un tiempo t habrá recorrido una distancia $x = ct$ o $x' = ct'$ a lo largo del eje x. En consecuencia, a partir de las ecuaciones (i) y (ii) anteriores,

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)\,t', \qquad \textbf{(iii)}$$

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t. \qquad \textbf{(iv)}$$

Sustituya t' de la ecuación (iv) en la ecuación (iii) y encuentre $ct = \gamma(c + v)\,\gamma(c - v)(t/c) = \gamma^2(c^2 - v^2)t/c$. Cancele la t en cada lado y despeje γ para encontrar

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Aquí la constante γ tiene el mismo valor que la γ que se usó antes, ecuación 36-2. Ahora que se encontró γ, sólo se necesita encontrar la relación entre t y t'. Para ello, combine $x' = \gamma(x - vt)$ con $x = \gamma(x' + vt')$:

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(\gamma[x' + vt'] - vt).$$

Despeje t para obtener $t = \gamma\left(t' + vx'/c^2\right)$. En resumen,

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(36–6)}$$

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Estas ecuaciones se conocen como la **transformación de Lorentz**. Lorentz las propuso por primera vez en 1904, en una forma ligeramente diferente, para explicar el resultado nulo del experimento de Michelson y Morley y para hacer que las ecuaciones de Maxwell tomaran la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. Un año después Einstein las dedujo de manera independiente con base en su teoría de la relatividad. Observe que no sólo se modificó la ecuación x en comparación con la transformación galileana, sino también la ecuación t; de hecho, en esta última ecuación se ve directamente cómo se mezclan las coordenadas espacio y tiempo.

[†]Aquí no se supuso que γ está dada por la ecuación 36-2.

Deducción de la contracción de la longitud

Ahora se deducirá la fórmula de contracción de la longitud, ecuación 36-3, a partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz. Considere dos marcos de referencia S y S′, como en la figura 36-11.

Sea un objeto con longitud ℓ_0 en reposo sobre el eje x en S. Las coordenadas de sus dos puntos extremos son x_1 y x_2, de manera que $x_2 - x_1 = \ell_0$. En cualquier instante en S′, los puntos extremos estarán en x'_1 y x'_2 según las ecuaciones de transformación de Lorentz. La longitud medida en S′ es $\ell = x'_2 - x'_1$. Un observador en S′ determina esta longitud al medir x'_2 y x'_1 al mismo tiempo (en el marco de referencia S′), de manera que $t'_2 = t'_1$. Así, a partir de la primera de las ecuaciones 36-6,

$$\ell_0 = x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x'_2 + vt'_2 - x'_1 - vt'_1).$$

Puesto que $t'_2 = t'_1$, se tiene

$$\ell_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x'_2 - x'_1) = \frac{\ell}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

o

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

que es la ecuación 36-3.

Deducción de la dilatación del tiempo

Ahora se deducirá la fórmula de dilatación del tiempo, ecuación 36-1a, a partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz.

El tiempo Δt_0 entre dos eventos que ocurren en el mismo lugar $(x'_2 = x'_1)$ en S′ se mide en $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$. Puesto que $x'_2 = x'_1$, entonces, a partir de la última de las ecuaciones 36-6, el tiempo Δt entre los eventos medidos en S es

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2} - t'_1 - \frac{vx'_1}{c^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t'_2 - t'_1) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

que es la ecuación 36-1a. Note que se elige S′ como el marco donde ocurren los dos eventos en el mismo lugar, de manera que se cancelan $x'_1 = x'_2$ y los términos que contienen x'_1 y x'_2.

Suma relativista de velocidades

Las ecuaciones de velocidad relativísticamente correctas se obtienen con facilidad al derivar las ecuaciones 36-6 con respecto al tiempo. Por ejemplo (con $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y la regla de la cadena para derivadas):

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[\gamma(x' + vt')]$$
$$= \frac{d}{dt'}[\gamma(x' + vt')]\frac{dt'}{dt} = \gamma\left[\frac{dx'}{dt'} + v\right]\frac{dt'}{dt}.$$

Pero $dx'/dt' = u'_x$ y $dt'/dt = 1/(dt/dt') = 1/[\gamma(1 + vu'_x/c^2)]$ donde se derivó la última de las ecuaciones 36-6 con respecto al tiempo. Por lo tanto,

$$u_x = \frac{[\gamma(u'_x + v)]}{[\gamma(1 + vu'_x/c^2)]} = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}.$$

Las otras se obtienen en la misma forma y se les recopila a continuación:

TRANSFORMACIONES DE VELOCIDAD DE LORENTZ

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \quad \textbf{(36–7a)}$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2} \quad \textbf{(36–7b)}$$

$$u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \quad \textbf{(36–7c)}$$

Observe que, aun cuando la velocidad relativista $\vec{\mathbf{v}}$ esté en la dirección x, si el objeto tiene componentes de velocidad y o z, éstas también resultan afectadas por v y por la componente x de velocidad del objeto. Esto no fue cierto para la transformación galileana, ecuaciones 36-5.

EJEMPLO 36–8 **Suma de velocidades.** Calcule la rapidez del cohete 2 en la figura 36-12 con respecto a la Tierra.

PLANTEAMIENTO Considere la Tierra como el marco de referencia S y el cohete 1 como el marco de referencia S′. El cohete 2 viaja con rapidez $u' = 0.60c$ con respecto al cohete 1. El cohete 1 tiene rapidez $v = 0.60c$ con respecto a la Tierra. Las velocidades son a lo largo de la misma línea recta que se considera como el eje x (y x'). Sólo es necesario usar la primera de las ecuaciones 36-7.

SOLUCIÓN La rapidez del cohete 2 con respecto a la Tierra es

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}} = \frac{0.60c + 0.60c}{1 + \dfrac{(0.60c)(0.60c)}{c^2}} = \frac{1.20c}{1.36} = 0.88c.$$

NOTA La transformación galileana daría $u = 1.20c$.

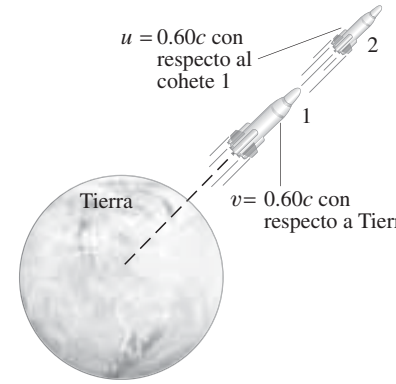


FIGURA 36–12 El cohete 1 se aleja con rapidez $v = 0.60c$. El cohete 2 se lanza desde el cohete 1 con rapidez $u' = 0.60c$. ¿Cuál es la rapidez del cohete 2 con respecto a la Tierra?

EJERCICIO E Con base en las ecuaciones 36-7, calcule la rapidez del cohete 2 en la figura 36-12 en relación con la Tierra, si se lanza desde el cohete 1 con una rapidez $u' = 3000$ km/s $= 0.010c$. Suponga que el cohete 1 tiene una rapidez $v = 6000$ m/s $= 0.020c$.

EJERCICIO F Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 951, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Advierta que las ecuaciones 36-7 se reducen a las formas clásicas (galileanas) para velocidades pequeñas comparadas con la rapidez de la luz, pues $1 + vu'/c^2 \approx 1$ para v y $u' \ll c$. En el otro extremo, suponga que el cohete 1 en la figura 36-12 envía un haz de luz, de manera que $u' = c$. Entonces la ecuación 36-7 dice que la rapidez de la luz en relación con la Tierra es

$$u = \frac{0.60c + c}{1 + \dfrac{(0.60c)(c)}{c^2}} = c,$$

que es congruente con el segundo postulado de la relatividad.

36–9 Cantidad de movimiento relativista

Hasta ahora en este capítulo se ha visto que dos cantidades mecánicas básicas (longitud e intervalos de tiempo) necesitan modificación porque son relativas: sus valores dependen del marco de referencia donde se miden. Cabe esperar que otras cantidades físicas también necesiten cierta modificación de acuerdo con la teoría de la relatividad, como la cantidad de movimiento (o momento lineal), la energía y la masa.

El análisis de las colisiones entre dos partículas demuestra que si se quiere preservar la ley de conservación de la cantidad de movimiento en la relatividad, la cantidad de movimiento se debe redefinir como

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mv. \qquad \textbf{(36–8)}$$

Aquí γ es abreviatura para $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, como antes (ecuación 36-2). Para casos en que la rapidez es mucho menor que la rapidez de la luz, la ecuación 36-8 da la cantidad de movimiento clásica, $p = mv$.

La cantidad de movimiento relativista se ha puesto a prueba muchas veces en pequeñas partículas elementales (como los muones) y se encontró que se comporta en concordancia con la ecuación 36-8. La ecuación 36-8 se deduce en el subapartado de la siguiente página.

EJEMPLO 36–9 **Cantidad de movimiento de un electrón en movimiento.** Compare la cantidad de movimiento de un electrón cuando tiene una rapidez de *a*) 4.00×10^7 m/s en el TRC de un televisor y *b*) $0.98c$ en un acelerador que se usa en la terapia de cáncer.

PLANTEAMIENTO Utilice la ecuación 36-8 para la cantidad de movimiento de un electrón en movimiento.

SOLUCIÓN *a*) $v = 4.00 \times 10^7$ m/s, la cantidad de movimiento del electrón es

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{(4.00 \times 10^7 \text{ m/s})^2}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2}}} = 1.01mv.$$

El factor $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1.01$, de manera que la cantidad de movimiento sólo es aproximadamente 1% mayor que el valor clásico. (Si se considera la masa del electrón, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, la cantidad de movimiento es $p = 1.01mv = 3.68 \times 10^{-23}$ kg·m/s). *b*) Con $v = 0.98c$, la cantidad de movimiento es

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{(0.98c)^2}{c^2}}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} = 5.0mv.$$

Un electrón que viaja al 98% de la rapidez de la luz tiene $\gamma = 5.0$ y una cantidad de movimiento 5.0 veces su valor clásico.

La segunda ley de Newton, enunciada en la forma más general, es

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{\mathbf{v}}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad \textbf{(36–9)}$$

y es válida de manera relativista.

*Deducción de la cantidad de movimiento relativista

De manera clásica, la cantidad de movimiento es una cantidad que se conserva. Se espera encontrar una fórmula para la cantidad de movimiento que también sea válida de manera relativista. Para hacerlo, suponga que tiene la forma general dada por $p = fmv$, donde f es alguna función de v: $f(v)$. Considere una colisión hipotética entre dos objetos —un experimento mental— y vea qué forma debe tomar $f(v)$ para que la cantidad de movimiento se conserve.

El experimento mental implica la colisión elástica de dos pelotas idénticas, A y B. Considere dos marcos de referencia inerciales, S y S′, que se mueven a lo largo del eje x con una rapidez v uno con respecto al otro (figura 36-13). Esto es, el marco S′ se mueve hacia la derecha con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ con respecto a los observadores en el marco S; y el marco S se mueve hacia la izquierda con $-\vec{\mathbf{v}}$ con respecto a los observadores en S′. En el marco de referencia S, la pelota A se lanza con rapidez u en la dirección $+y$. En el marco de referencia S′, la pelota B se lanza con rapidez u en el sentido negativo de la dirección y'. Las dos pelotas se lanzan justo en el tiempo correcto, de manera que chocan. Suponga que rebotan elásticamente y que, a partir de *simetría*, cada una se mueve con la misma rapidez u de regreso en sentido opuesto en el marco de referencia de su lanzador. La figura 36-13a ilustra la colisión como la ve un observador en el marco de referencia S, y la figura 36-13b representa la colisión vista desde el marco de referencia S′. En el marco de referencia S, la pelota A tiene $v_x = 0$ tanto antes como después de la colisión; tiene $v_y = +u$ antes de la colisión y $-u$ después de la colisión. En el marco S′, la pelota A tiene componente de velocidad x $u'_x = -v$ tanto antes como después de la colisión, y una componente y' (ecuación 36-7b con $u'_x = -v$) de magnitud

$$u'_y = u\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Lo mismo es cierto para la pelota B, excepto que a la inversa. Las componentes de velocidad se indican en la figura 36-13.

Ahora aplicamos la ley de conservación de la cantidad de movimiento, que se espera siga siendo válida en la relatividad, incluso si la cantidad de movimiento debe redefinirse. Esto es, suponga que la cantidad de movimiento total antes de la colisión es igual a la cantidad de movimiento después de la colisión. Aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento a la componente y de la cantidad de movimiento en el marco

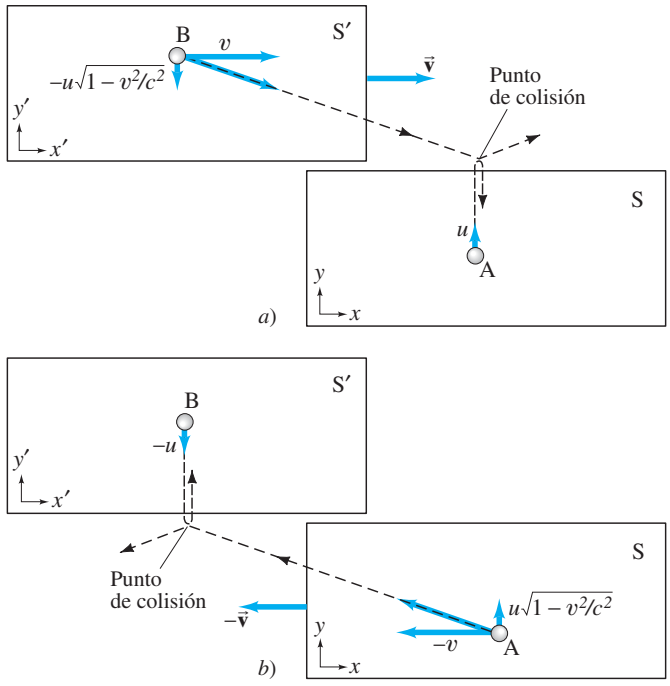


FIGURA 36–13 Deducción de la fórmula de cantidad de movimiento. Colisión según la ven observadores *a*) en el marco de referencia S, *b*) en el marco de referencia S′.

de referencia S (figura 36-13a). Para hacer la labor más sencilla, suponga que $u \ll v$, de manera que la rapidez de la pelota B, vista en el marco de referencia S, en esencia es v. Entonces la componente y de la cantidad de movimiento de B en S antes de la colisión es $-f(v)mu\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y después de la colisión es $+f(v)mu\sqrt{1 - v^2/c^2}$. La pelota A en S tiene componente y $f(u)mu$ antes y $-f(u)mu$ después de la colisión. (Se usa $f(u)$ para A porque su rapidez en S sólo es u). La conservación de la cantidad de movimiento en S para la componente y es

$$(p_A + p_B)_{\text{antes}} = (p_A + p_B)_{\text{después}}$$

$$f(u)mu - f(v)mu\sqrt{1 - v^2/c^2} = -f(u)mu + f(v)mu\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Se despeja $f(v)$ para obtener

$$f(v) = \frac{f(u)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Para simplificar esta relación, de manera que se pueda despejar f, permita que u se vuelva muy pequeña, de manera que tienda a cero (esto corresponde a una colisión oblicua con una de las pelotas esencialmente en reposo y la otra en movimiento con rapidez v). Entonces los términos $f(u)mu$ de la cantidad de movimiento están en el ámbito no relativista y toman la forma clásica, simplemente mu, lo cual significa que $f(u) = 1$. De esta manera, la ecuación anterior se convierte en

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Vemos que $f(v)$ resulta ser el factor que se empleó antes como γ, y aquí se demostró que es válido para la pelota A. Al usar la figura 36-13b se puede deducir la misma relación para la pelota B. Por ende, se concluye que es necesario definir la cantidad de movimiento relativista de una partícula que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ como

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{m\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m\vec{\mathbf{v}}.$$

Con esta definición, la ley de conservación de la cantidad de movimiento seguirá siendo válida incluso en el reino relativista. Esta fórmula de cantidad de movimiento relativista (ecuación 36-8) se probó incontables veces en pequeñas partículas elementales y resultó ser válida.

*Masa relativista

La definición relativista de la cantidad de movimiento, ecuación 36-8, a veces se interpreta como un aumento en la masa de un objeto. En esta interpretación, una partícula puede tener una **masa relativista**, m_{rel}, que aumenta con la rapidez de acuerdo con

$$m_{\text{rel}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

En esta fórmula de "aumento de masa", m se conoce como la **masa en reposo** del objeto. Con esta interpretación, *la masa de un objeto parece aumentar conforme su rapidez aumenta*. Pero debemos tener cuidado al emplear la masa relativista. No se puede tan sólo ponerla en fórmulas como $F = ma$ o $K = \frac{1}{2}mv^2$. Por ejemplo, si la sustituimos en $F = ma$, se obtiene una fórmula que no concuerda con los experimentos. Sin embargo, si la segunda ley de Newton se escribe en su forma más general, $\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, se obtiene un resultado correcto (ecuación 36-9).

Además, tenga cuidado de *no* pensar que una masa adquiere más partículas o más moléculas conforme su rapidez aumenta, porque no es así. De hecho, muchos físicos creen que un objeto sólo tiene una masa (su masa en reposo) y que sólo es la cantidad de movimiento la que aumenta con la rapidez.

Siempre que se hable de masa de un objeto, nos referiremos a su masa en reposo (un valor fijo).

36–10 La rapidez última

Un resultado básico de la teoría especial de la relatividad es que la rapidez de un objeto no puede ser igual a la rapidez de la luz, ni tampoco puede superarla. El hecho de que la rapidez de la luz es un límite natural de la rapidez en el Universo se puede constatar a partir de cualquiera de las ecuaciones 36-1, 36-2, 36-8 o la fórmula de suma de velocidades. Tal vez sea más fácil de ver a partir de la ecuación 36-8. Conforme un objeto acelera hacia una rapidez cada vez mayor, su cantidad de movimiento se vuelve más y más grande. De hecho, si v fuera igual a c, el denominador en esta ecuación sería cero y la cantidad de movimiento sería infinita. En consecuencia, acelerar un objeto a $v = c$ requeriría energía infinita, algo que no es posible.

36–11 $E = mc^2$; masa y energía

Si la cantidad de movimiento necesita modificación para concordar con la relatividad, como se acaba de ver en la ecuación 36-8, entonces cabe esperar que la energía también necesite repensarse. De hecho, Einstein no sólo desarrolló una nueva fórmula para la energía cinética, sino que también encontró una nueva relación entre masa y energía, y la sorprendente idea de que la masa es una forma de energía.

Comencemos con el principio trabajo-energía (capítulo 7), esperando que todavía sea válido en la relatividad y que dé resultados verificables. Esto es, suponga que el trabajo neto realizado sobre una partícula es igual a su cambio en energía cinética (K). Con base en este principio, Einstein demostró que, a alta rapidez, la fórmula $K = \frac{1}{2}mv^2$ no es correcta. En vez de ello, como se verá en el subapartado de la página 978, la energía cinética de una partícula de masa m que viaja con rapidez v está dada por

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \qquad \textbf{(36–10a)}$$

En términos de $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ la ecuación 36-10a se rescribe como

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \qquad \textbf{(36–10b)}$$

Las ecuaciones 36-10 requieren cierta interpretación. El primer término aumenta con la rapidez v de la partícula. El segundo término, mc^2, es constante; se le llama **energía en reposo** de la partícula y representa una forma de energía que una partícula tiene incluso cuando está en reposo. Advierta que, si una partícula está en reposo ($v = 0$), el primer término en la ecuación 36-10a se convierte en mc^2, de manera que $K = 0$, como debiera.

La ecuación 36-10b se reordena para obtener

$$\gamma mc^2 = mc^2 + K.$$

A γmc^2 se le llama la *energía total* E de la partícula (suponiendo que no hay energía potencial), porque es igual a la energía en reposo más la energía cinética:

$$E = K + mc^2. \qquad \textbf{(36–11a)}$$

La energía total también se puede expresar, con las ecuaciones 36-10, como

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad \textbf{(36–11b)}$$

Para una partícula en reposo en un marco de referencia dado, K es cero en la ecuación 36-11a, de manera que la energía total es su energía en reposo:

$$E = mc^2. \qquad \textbf{(36–12)}$$

MASA RELACIONADA CON ENERGÍA

He aquí la famosa fórmula de Einstein, $E = mc^2$. Esta fórmula relaciona matemáticamente los conceptos de energía y masa. Pero, si esta idea debe tener algún significado físico, entonces la masa debería ser convertible a otras formas de energía y viceversa. Einstein sugirió que esto era posible, y de hecho se han confirmado experimentalmente cambios de masa a otras formas de energía, y viceversa, en incontables ocasiones en física nuclear y de partículas elementales. Por ejemplo, un electrón y un positrón (= un electrón positivo, sección 37-5) con frecuencia chocan y desaparecen, lo que produce radiación electromagnética pura. La cantidad de energía electromagnética producida es exactamente igual a la que predice la fórmula de Einstein, $E = mc^2$. El proceso inverso también se observa comúnmente en el laboratorio: en ciertas condiciones, la radiación electromagnética se puede convertir en partículas materiales como los electrones (véase la sección 37-5 acerca de la producción de pares). A mayor escala, la energía producida en las plantas nucleares es resultado de la pérdida de masa del uranio (que sirve como combustible) conforme éste experimenta el proceso llamado fisión. Incluso la energía radiante que se recibe del Sol es un ejemplo de $E = mc^2$; la masa del Sol continuamente disminuye conforme irradia energía electromagnética hacia el exterior.

Ahora se cree que la relación $E = mc^2$ se aplica a todos los procesos, aunque los cambios a menudo son demasiado pequeños para medirse. Esto es, cuando la energía de un sistema cambia por una cantidad ΔE, la masa del sistema cambia por una cantidad Δm dada por

$$\Delta E = (\Delta m)(c^2).$$

En una reacción nuclear donde se requiere o se libera una energía E, las masas de los reactantes y los productos serán diferentes en $\Delta m = \Delta E/c^2$.

EJEMPLO 36–10 **Energía cinética de pión.** Un mesón π^0 ($m = 2.4 \times 10^{-28}$ kg) viaja con rapidez $v = 0.80c = 2.4 \times 10^8$ m/s. ¿Cuál es su energía cinética? Compare con un cálculo clásico.

PLANTEAMIENTO Use la ecuación 36-10 y compare con $\frac{1}{2}mv^2$.

SOLUCIÓN Sustituya valores en la ecuación 36-10a o b

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 1.67.$$

Luego

$$K = (1.67 - 1)(2.4 \times 10^{-28}\,\text{kg})(3.0 \times 10^8\,\text{m/s})^2$$
$$= 1.4 \times 10^{-11}\,\text{J}.$$

Note que las unidades de mc^2 son kg·m^2/s^2, que es el joule.

NOTA Si tuviéramos que realizar un cálculo clásico obtendríamos $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2.4 \times 10^{-28}\,\text{kg})(2.4 \times 10^8\,\text{m/s})^2 = 6.9 \times 10^{-12}$ J, aproximadamente la mitad, pero éste no es un resultado correcto. Advierta que $\frac{1}{2}\gamma mv^2$ tampoco funcionará.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Energía cinética relativista

EJERCICIO G Un protón viaja en un acelerador con una rapidez de 1.0×10^8 m/s. ¿En qué factor aumenta la energía cinética del protón si su rapidez se duplica? *a*) 1.3, *b*) 2.0 *c*) 4.0 *d*) 5.6.

EJEMPLO 36–11 **Energía a partir de decaimiento nuclear.** La energía requerida o liberada en las reacciones y los decaimientos nucleares proviene de un cambio en masa entre las partículas iniciales y finales. En un tipo de decaimiento radiactivo, un átomo de uranio ($m = 232.03714$ u) decae a un átomo de torio ($m = 228.02873$ u) más un átomo de helio ($m = 4.00260$ u), donde las masas dadas están en unidades de masa atómica ($1\text{ u} = 1.6605 \times 10^{-27}$ kg). Calcule la energía liberada en este decaimiento.

PLANTEAMIENTO La masa inicial menos la masa final total da la pérdida de masa en unidades de masa atómica (u); convierta esto a kg y multiplique por c^2 para encontrar la energía liberada, $\Delta E = \Delta m c^2$.

SOLUCIÓN La masa inicial es 232.03714 u, y después del decaimiento la masa es 228.02873 u + 4.00260 u = 232.03133 u, así que existe una disminución en masa de 0.00581 u. Esta masa, que es igual a $(0.00581\text{ u})(1.66 \times 10^{-27}\text{ kg}) = 9.64 \times 10^{-30}\text{ kg}$, se convierte en energía. Por $\Delta E = \Delta m c^2$ se tiene

$$\Delta E = (9.64 \times 10^{-30}\text{ kg})(3.0 \times 10^8\text{ m/s})^2 = 8.68 \times 10^{-13}\text{ J}.$$

Puesto que $1\text{ MeV} = 1.60 \times 10^{-13}$ J (sección 23-8), la energía liberada es de 5.4 MeV.

En el diminuto mundo de átomos y núcleos, es común expresar las energías en eV (electrón volts) o múltiplos como MeV (10^6 eV). La cantidad de movimiento (véase la ecuación 36-8) se puede expresar en unidades de eV/c (o MeV/c). Y la masa se puede citar (a partir de $E = mc^2$) en unidades de eV/c^2 (o MeV/c^2). Advierta el uso de c para mantener las unidades correctas. Se demuestra fácilmente que las masas en reposo del electrón y el protón son 0.511 MeV/c^2 y 938 MeV/c^2, respectivamente. Véase también la tabla en la segunda de forros.

EJEMPLO 36–12 **Un protón de 1 TeV.** El acelerador Tevatrón en el Fermilab en Illinois es capaz de acelerar protones a una energía cinética de 1.0 TeV (10^{12} eV). ¿Cuál es la rapidez de un protón en estas condiciones?

PLANTEAMIENTO Despeje v en la fórmula de energía cinética, ecuación 36-10.

SOLUCIÓN La energía en reposo de un protón es $mc^2 = 938$ MeV o 9.38×10^8 eV. Comparada con la energía cinética de 10^{12} eV, la energía en reposo se puede despreciar, así que la ecuación 36-10a se simplifica a

$$K \approx \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Despeje v en los siguientes pasos:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{K};$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2}{K}\right)^2;$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{K}\right)^2 = 1 - \left(\frac{9.38 \times 10^8\text{ eV}}{1.0 \times 10^{12}\text{ eV}}\right)^2;$$

$$v = \sqrt{1 - (9.38 \times 10^{-4})^2}\, c = 0.99999956\, c.$$

Así que el protón viaja con una rapidez muy cercana a c.

A baja rapidez, $v \ll c$, la fórmula relativista para la energía cinética se reduce a la clásica, como se demuestra ahora empleando el desarrollo binomial, $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + n(n-1)x^2/2! + \cdots$. Con $n = -\frac{1}{2}$, se desarrolla la raíz cuadrada en la ecuación 36-10a

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

de manera que

$$K \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots - 1\right)$$

$$\approx \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Los puntos en la primera expresión representan términos muy pequeños en la expansión que se desprecian, pues se supuso que $v \ll c$. Por lo tanto, a baja rapidez, la forma

relativista para la energía cinética se reduce a la forma clásica, $K = \frac{1}{2}mv^2$. Esto hace de la relatividad una teoría viable en tanto que permite predecir resultados exactos tanto a baja como a alta rapidez. De hecho, las otras ecuaciones de la relatividad especial también se reducen a sus equivalentes clásicas a rapidez ordinaria: contracción de la longitud, dilatación del tiempo y modificaciones a la cantidad de movimiento, así como a la energía cinética, todas desaparecen para $v \ll c$ pues $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$.

También se deduce una relación útil entre la energía total E de una partícula y su cantidad de movimiento p. La cantidad de movimiento de una partícula con masa m y rapidez v está dada por la ecuación 36-8:

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

La energía total es

$$E = K + mc^2$$

o

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Al elevar al cuadrado esta ecuación (e insertar "$v^2 - v^2$" que es cero, pero que ayudará):

$$E^2 = \frac{m^2c^2(v^2 - v^2 + c^2)}{1 - v^2/c^2}$$

$$= p^2c^2 + \frac{m^2c^4(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}$$

o

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \qquad \textbf{(36–13)}$$

Por ende, la energía total se puede escribir en términos de la cantidad de movimiento p, o en términos de la energía cinética (ecuación 36-11), donde se supuso que no hay energía potencial.

La ecuación 36-13 se rescribe como $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$. Puesto que la masa m de una partícula dada es la misma en cualquier marco de referencia, se ve que la cantidad $E^2 - p^2c^2$ también debe ser la misma en cualquier marco de referencia. Por lo tanto, en cualquier momento dado, la energía total E y la cantidad de movimiento p de una partícula serán diferentes en distintos marcos de referencia, pero la cantidad $E^2 - p^2c^2$ tendrá el mismo valor en todos los marcos de referencia inerciales. Se dice que la cantidad $E^2 - p^2c^2$ es **invariante** ante transformaciones de Lorentz.

*¿Cuándo se usan fórmula relativistas?

Desde un punto de vista práctico, en la vida diaria no se tiene mucha oportunidad para usar las matemáticas de la relatividad. Por ejemplo, el factor γ, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, que aparece en muchas fórmulas relativistas, tiene un valor de 1.005 cuando $v = 0.10c$. Por lo tanto, para una rapidez incluso tan alta como $0.10c = 3.0 \times 10^7$ m/s, el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en las fórmulas relativistas brinda una corrección numérica de menos de 1%. Para una rapidez menor que $0.10c$, o a menos que masa y energía se intercambien, generalmente no se necesita usar las fórmulas relativistas más complicadas, y se pueden usar las fórmulas clásicas más sencillas.

Si se conoce la masa m de una partícula y su energía cinética K, se hace un cálculo rápido para determinar si es necesario usar fórmulas relativistas o si las clásicas son suficientemente buenas. Simplemente calcule la razón K/mc^2 porque (ecuación 36-10b)

$$\frac{K}{mc^2} = \gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1.$$

Si esta razón resulta ser menor que 0.01, por ejemplo, entonces $\gamma \leq 1.01$ y las ecuaciones relativistas corregirán a las clásicas por más o menos 1%. Si la precisión esperada no es mejor que el 1%, las fórmulas clásicas son suficientemente buenas. Pero si se requiere una precisión de 1 parte en 1000 (0.1%), entonces es conveniente usar las fórmulas relativistas. Si la precisión esperada sólo es del 10%, necesita relatividad si $(K/mc^2) \gtrsim 0.1$.

EJERCICIO H Para 1% de exactitud, ¿un electrón con $K = 100$ eV necesita tratarse de manera relativista? [*Sugerencia:* Considere que la masa de un electrón es de 0.511 MeV].

*Deducción de la energía relativista

Para encontrar la relación matemática entre masa y energía, suponga que el teorema trabajo-energía todavía es válido en la relatividad para una partícula, y considere que el movimiento de la partícula es a lo largo del eje x. El trabajo realizado para aumentar la rapidez de una partícula desde cero hasta v es

$$W = \int_i^f F\,dx = \int_i^f \frac{dp}{dt}\,dx = \int_i^f \frac{dp}{dt}\,v\,dt = \int_i^f v\,dp$$

donde i y f se refieren a los estados inicial ($v = 0$) y final ($v = v$). Puesto que $d(pv) = p\,dv + v\,dp$, se puede escribir

$$v\,dp = d(pv) - p\,dv$$

de manera que

$$W = \int_i^f d(pv) - \int_i^f p\,dv.$$

El primer término a la derecha del signo igual es

$$\int_i^f d(pv) = pv\Big|_i^f = (\gamma mv)v = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

El segundo término en la ecuación anterior para W se integra fácilmente, pues

$$\frac{d}{dv}\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right) = -(v/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

y por lo tanto se convierte en

$$-\int_i^f p\,dv = -\int_0^v \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dv = mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}\Big|_0^v$$

$$= mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2.$$

Finalmente, para W se tiene:

$$W = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2.$$

Al multiplicar el segundo término a la derecha por $\sqrt{1 - v^2/c^2}/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1$, se obtiene

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2.$$

Por el teorema trabajo-energía, el trabajo realizado sobre la partícula debe ser igual a su energía cinética final K, pues la partícula partió desde el reposo. En consecuencia,

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

$$= \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2,$$

que son las ecuaciones 36-10.

*36–12 Corrimiento Doppler para la luz

En la sección 16-7 se estudió cómo la frecuencia y la longitud de onda del sonido se alteran si la fuente del sonido y el observador se acercan o se alejan entre sí. Cuando una fuente se mueve hacia uno, la frecuencia es mayor que cuando la fuente está en reposo. Si la fuente se aleja de uno, la frecuencia es menor. Se obtuvieron cuatro diferentes ecuaciones para el corrimiento Doppler (ecuaciones 16-9a y b, ecuaciones 16-10a y b), dependiendo de la dirección del movimiento relativo y de si la fuente o el observador están en movimiento. El efecto Doppler también ocurre para la luz; pero la frecuencia o longitud de onda recorrida se obtiene con ecuaciones ligeramente diferentes, y sólo hay dos de éstas, porque en el caso de la luz, de acuerdo con la relatividad especial, no se puede hacer distinción entre movimiento de la fuente y movimiento del observador.

(Recuerde que el sonido viaja en un medio como el aire, mientras que la luz no lo hace: no hay evidencia de un éter).

Para determinar el corrimiento Doppler para la luz, considere una fuente de luz y un observador que se mueven uno hacia el otro, y sea v su velocidad relativa según se mide en el marco de referencia ya sea de la fuente o del observador. La figura 36-14a ilustra una fuente en reposo que emite ondas de luz de frecuencia f_0 y longitud de onda $\lambda_0 = c/f_0$. Se aprecian dos crestas de onda, separadas una distancia λ_0, la segunda cresta apenas se emitió. En la figura 36-14b, la fuente se muestra en movimiento con rapidez v hacia un observador estacionario que verá la longitud de onda λ un poco menor que λ_0. (Esto es muy parecido a la figura 16-19 para el sonido). Sea Δt el tiempo entre crestas como las detecta el observador, cuyo marco de referencia se representa en la figura 36-14b. A partir de la figura 36-14b se ve que

$$\lambda = c\,\Delta t - v\,\Delta t,$$

donde $c\,\Delta t$ es la distancia que la cresta 1 se movió en el tiempo Δt después de ser emitida, y $v\,\Delta t$ es la distancia que la fuente se movió en el tiempo Δt. Hasta el momento, nuestra deducción no difiere de la del sonido (sección 16-7). Ahora se invocará la teoría de la relatividad. El tiempo entre emisión de crestas de onda experimentó dilatación del tiempo:

$$\Delta t = \Delta t_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

donde Δt_0 es el tiempo entre emisiones de crestas de onda en el marco de referencia donde la fuente está en reposo (el tiempo "propio"). En el marco de referencia de la fuente (figura 36-14a), se tiene

$$\Delta t_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{\lambda_0}{c}$$

(ecuaciones 5-2 y 31-14). Por consiguiente,

$$\lambda = (c - v)\,\Delta t = (c - v)\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(c - v)}{\sqrt{c^2 - v^2}}\lambda_0$$

o

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{fuente y observador}\\ \text{se acercan}\\ \text{entre sí}\end{array}\right] \qquad \textbf{(36–14a)}$$

La frecuencia f es (recuerde que $\lambda_0 = c/f_0$)

$$f = \frac{c}{\lambda} = f_0\sqrt{\frac{c + v}{c - v}}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{fuente y observador}\\ \text{se elejan}\\ \text{entre sí}\end{array}\right] \qquad \textbf{(36–14b)}$$

Aquí, f_0 es la frecuencia de la luz vista en el marco de referencia de la fuente, y f es la frecuencia medida por un observador que se mueve hacia la fuente o hacia quien la fuente se mueve. Las ecuaciones 36-14 sólo dependen de la velocidad relativa v. Para movimiento relativo en el que hay *alejamiento* entre fuente y observador se establece que $v < 0$ en las ecuaciones 36-14 y se obtiene

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \qquad \textbf{(36–15a)}$$

$$f = f_0\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{fuente y observador}\\ \text{se alejan}\\ \text{entre sí}\end{array}\right] \qquad \textbf{(36–15b)}$$

A partir de las ecuaciones 36-14 y 36-15 se ve que la luz proveniente de una fuente que se mueve hacia uno tendrá una frecuencia mayor y una longitud de onda más corta, mientras que si una fuente de luz se aleja de uno, se verá una frecuencia menor y una longitud de onda mayor. En el último caso, la luz visible tendrá su longitud de onda prolongada hacia el extremo rojo del espectro visible (figura 32-26), un efecto que se llama **corrimiento hacia el rojo**. Como se verá en el siguiente capítulo, todos los átomos tienen su propia firma distintiva en términos de las frecuencias de la luz que emiten. En 1929 el astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889-1953) descubrió que la radiación de los átomos en muchas galaxias se recorre hacia el rojo. Esto es, las frecuencias de la luz que emiten son menores que las que emiten átomos estacionarios en la Tierra, lo que sugiere que las galaxias se alejan de la Tierra. Éste es el origen de la idea de que el Universo se expande.

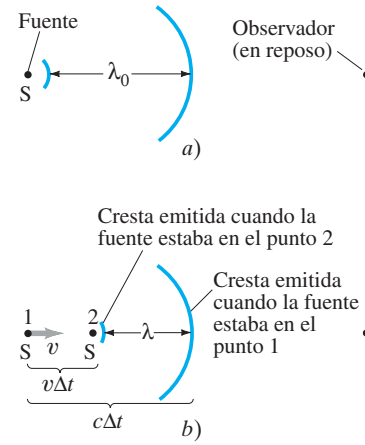


FIGURA 36–14 Corrimiento Doppler para la luz. *a*) Fuente y observador en reposo. *b*) Fuente que se mueve hacia un observador estacionario.

EJEMPLO 36–13 **Pasarse un alto a gran velocidad.** Un conductor afirma que él en realidad no se pasó el alto porque la luz tenía corrimiento Doppler y parecía verde. Calcule la rapidez que debe llevar un conductor para que la luz roja parezca verde.

PLANTEAMIENTO Aplique la ecuación de corrimiento Doppler para luz roja ($\lambda_0 \approx$ 650 nm) y luz verde ($\lambda \approx 500$ nm).

SOLUCIÓN La ecuación 36-14a se sostiene para la fuente y el objeto que se acercan entre sí:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}.$$

Eleve al cuadrado esta ecuación:

$$\frac{c - v}{c + v} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$$

donde $(\lambda/\lambda_0)^2 = (500\text{ nm}/650\text{ nm})^2 = 0.59$. Despeje v:

$$v = c\left[\frac{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}{1 + (\lambda/\lambda_0)^2}\right] = 0.26c.$$

Con esta defensa, el conductor no sería culpable de pasarse un alto, pero sin duda sería culpable de rebasar el límite de rapidez.

36–13 El impacto de la relatividad especial

Para poner a prueba las predicciones de la teoría especial de la relatividad se han realizado muchos experimentos. Dentro del error experimental, no se han encontrado contradicciones. Por lo tanto, los científicos aceptan la relatividad como una descripción exacta de la naturaleza.

A rapidez mucho menor que la rapidez de la luz, las fórmulas relativistas se reducen a las clásicas, como se estudió. Desde luego, se esperaría (más bien, se insistiría) que esto sea cierto, pues la mecánica newtoniana funciona tan bien para los objetos que se mueven con rapidez $v \ll c$. Esta insistencia de que una teoría más general (como la relatividad) proporcione los mismos resultados que una teoría más restringida (como la mecánica clásica que funciona para $v \ll c$) se llama **principio de correspondencia.** Las dos teorías deben corresponder donde sus ámbitos de validez se traslapen. De esta forma, la relatividad no contradice a la mecánica clásica. Más bien, es una teoría más general, de la cual ahora la mecánica clásica se considera un caso límite.

La importancia de la relatividad no reside simplemente en que ofrece resultados más exactos, en especial en los casos de rapidez muy alta. Mucho más que eso, cambió la forma como se ve el mundo. Los conceptos de espacio y tiempo ahora se ven como relativos, y mutuamente entremezclados, mientras que antes se consideraban absolutos y separados. Incluso los conceptos de materia y energía cambiaron: una se puede convertir en la otra. El impacto de la relatividad se extiende mucho más allá de la física. Influyó en otras ciencias, e incluso en el mundo del arte y la literatura; de hecho, entró a la cultura general.

Desde un punto de vista práctico, en la vida diaria no se tiene mucha oportunidad para usar las matemáticas de la relatividad. Por ejemplo, el factor γ, $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, que aparece en las fórmulas relativistas, tiene un valor de sólo 1.005 incluso para una rapidez tan alta como $0.10c = 3.0 \times 10^7$ m/s, que da una corrección de menos del 1%. Para valores de rapidez menores que $0.10c$, a menos que masa y energía se intercambien, generalmente no se necesita usar fórmulas relativistas más complicadas y se pueden usar las fórmulas clásicas más sencillas.

Resumen

Un **marco de referencia inercial** es aquél donde se cumple la ley de Newton de la inercia. Los marcos de referencia inerciales se pueden mover a velocidad constante unos en relación con otros; los marcos de referencia en aceleración son **no inerciales**.

La **teoría especial de la relatividad** se basa en dos principios: el **principio de relatividad**, que afirma que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales, y el principio de **constancia de la rapidez de la luz**, que afirma que la rapidez de la luz en el espacio vacío tiene el mismo valor en todos los marcos de referencia inerciales.

Una consecuencia de la teoría de la relatividad es que dos eventos que son simultáneos en un marco de referencia pueden no ser simultáneos en otro. Otros efectos son la **dilatación del tiempo**: de acuerdo con las mediciones, los relojes en movimiento funcionan más lentamente; y la **contracción de la longitud**: según las mediciones, la longitud de un objeto en movimiento es más corta (en su dirección de movimiento) que cuando está en reposo. Cuantitativamente,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\, \Delta t_0 \qquad \textbf{(36–1)}$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{\ell_0}{\gamma} \qquad \textbf{(36–3)}$$

donde ℓ y Δt son la longitud y el intervalo de tiempo de los objetos (o eventos) observados conforme se mueven con rapidez v; ℓ_0 y Δt_0 son la **longitud propia** y el **tiempo propio**, esto es, las mismas cantidades medidas en el marco en reposo de los objetos o eventos. La cantidad γ es una abreviatura de

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad \textbf{(36–2)}$$

La teoría de la relatividad cambió las nociones de espacio y tiempo, así como de cantidad de movimiento, energía y masa. Espacio y tiempo se ven como íntimamente conectados; el tiempo es una cuarta dimensión, además de las tres dimensiones del espacio.

Las **transformaciones de Lorentz** relacionan las posiciones y los tiempos de los eventos en un marco de referencia inercial con sus posiciones y tiempos en un segundo marco de referencia inercial.

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(36–6)}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

La suma de velocidad también se puede realizar en una forma especial. Todos estos efectos relativistas son significativos sólo a alta rapidez, cercana a la rapidez de la luz, que en sí misma es la rapidez última en el Universo.

La **cantidad de movimiento** de un objeto está dada por

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad \textbf{(36–8)}$$

Masa y energía son interconvertibles. La ecuación

$$E = mc^2 \qquad \textbf{(36–12)}$$

nos indica cuánta energía E se necesita para crear una masa m, o viceversa. Dicho de otra forma, $E = mc^2$ es la cantidad de energía que tiene un objeto en función de su masa m. La ley de conservación de la energía debe incluir la masa como forma de energía.

La energía cinética K de un objeto en movimiento con rapidez v está dada por

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \qquad \textbf{(36–10)}$$

donde m es la masa del objeto. La energía total E, si no hay energía potencial, es

$$\begin{aligned} E &= K + mc^2 \\ &= \gamma mc^2. \end{aligned} \qquad \textbf{(36–11)}$$

La cantidad de movimiento p de un objeto se relaciona con su energía total E (suponiendo que no hay energía potencial) mediante

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \qquad \textbf{(36–13)}$$

Preguntas

1. Usted está en un vagón sin ventanas en un tren excepcionalmente suave que viaja con velocidad constante. ¿Existe algún experimento físico que pueda realizar en el vagón para determinar si está en movimiento? Explique.
2. Es posible que usted haya tenido la experiencia de estar detenido ante un semáforo en alto cuando, por el rabillo del ojo, ve que el auto en el carril de junto se arrastra hacia delante. De manera instintiva, pisa el pedal del freno y piensa que usted es quien rueda hacia atrás. ¿Qué dice esto acerca del movimiento absoluto y relativo?
3. Un trabajador está de pie en lo alto de un vagón de ferrocarril en movimiento, y lanza una pesada bola en línea recta hacia arriba (desde su punto de vista). Ignorando la resistencia del aire, ¿la bola regresará directo a su mano o caerá detrás de él?
4. ¿La Tierra realmente gira alrededor del Sol? ¿O también es válido decir que el Sol gira alrededor de la Tierra? Discuta, en términos del principio de relatividad (que no hay un mejor marco de referencia). Explique.
5. Si usted va en una nave espacial que viaja a $0.5c$ alejándose de una estrella, ¿a qué rapidez lo pasaría la luz de la estrella?
6. El efecto de dilatación del tiempo a veces se expresa como "los relojes en movimiento corren más lentamente". En realidad, este efecto no tiene nada que ver con el movimiento que afecte el funcionamiento de los relojes. Entonces, ¿a qué se refiere?
7. ¿La dilatación del tiempo significa que el tiempo en realidad transcurre más lentamente en los marcos de referencia en movimiento o que sólo *parece* transcurrir más lentamente?
8. Una joven mujer astronauta acaba de llegar a casa de un largo viaje. Corre hacia un hombre de cabellos grises y, mientras entablan conversación, se refiere a él como su hijo. ¿Cómo es posible esto?
9. Si usted viaja alejándose de la Tierra con rapidez $0.5c$, ¿notaría un cambio en su ritmo cardiaco? ¿Su masa, peso o cintura se modificarían? ¿Qué dirían de usted los observadores en la Tierra que usen telescopios?
10. ¿La dilatación del tiempo y la contracción de la longitud ocurren a rapidez ordinaria, por ejemplo, a 90 km/h?
11. Suponga que la rapidez de la luz fuera infinita. ¿Qué ocurriría a las predicciones relativistas de contracción de la longitud y dilatación del tiempo?
12. Discuta cómo la vida cotidiana sería diferente si la rapidez de la luz fuera de sólo 25 m/s.
13. Explique cómo se pueden usar las fórmulas de contracción de la longitud y de dilatación del tiempo para indicar que c es la rapidez límite del Universo.

14. El dibujo al principio del capítulo presenta la calle como la ve el señor Tompkins, donde la rapidez de la luz es $c = 20$ mi/h. ¿Cómo ven al señor Tompkins las personas que están de pie en la calle (figura 36-15)? Explique.

FIGURA 36–15
Pregunta 14. El señor Tompkins visto por la gente en la acera. Vea también la figura al inicio del capítulo, en la página 951.

15. Un electrón está limitado a viajar a rapideces menores que c. ¿Esto pone un límite superior a la cantidad de movimiento de un electrón? Si es así, ¿cuál es este límite superior? Si no, explique.

16. ¿Una partícula con masa distinta de cero puede lograr la rapidez de la luz?

17. ¿La ecuación $E = mc^2$ está en conflicto con el principio de conservación de la energía? Explique.

18. Si la masa es una forma de energía, ¿significa esto que un resorte tiene más masa cuando se comprime que cuando está relajado?

19. No es correcto decir que "la materia no se crea ni se destruye". ¿Qué se debe decir en vez de ello?

20. ¿La noción intuitiva de que las velocidades simplemente se suman, como se hizo en la sección 3-9, es completamente errónea?

Problemas

36–5 y 36–6 Dilatación del tiempo, contracción de la longitud

1. (I) Una nave espacial pasa junto a usted con una rapidez de $0.850c$. Usted mide su longitud en 38.2 m. ¿Cuál será su longitud cuando esté en reposo?

2. (I) Cierto tipo de partícula elemental viaja con una rapidez de 2.70×10^8 m/s. A esta rapidez, la vida promedio se mide en 4.76×10^{-6} s. ¿Cuál es el tiempo de vida de la partícula en reposo?

3. (II) De acuerdo con la teoría especial de la relatividad, el factor γ que determina la contracción de la longitud y la dilatación del tiempo está dado por $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Determine los valores numéricos de γ para un objeto que se mueve con rapidez $v = 0.01c$, $0.05c$, $0.10c$, $0.20c$, $0.30c$, $0.40c$, $0.50c$, $0.60c$, $0.70c$, $0.80c$, $0.90c$ y $0.99c$. Elabore una gráfica de γ contra v.

4. (II) Si viajara a una estrella a 135 años luz de la Tierra, con una rapidez de 2.80×10^8 m/s, ¿cuánto mediría esta distancia?

5. (II) ¿Cuál es la rapidez de un pión si su vida media se mide en 4.40×10^{-8} s? En reposo, su vida media es de 2.60×10^{-8} s.

6. (II) En un marco de referencia terrestre, una estrella está a 56 años luz de distancia. ¿Con qué rapidez tendría que viajar una persona de manera que para ella la distancia sólo sea de 35 años luz?

7. (II) Suponga que decide viajar a una estrella a 65 años luz de distancia con una rapidez que le indica que la distancia sólo es de 25 años luz. ¿Cuántos años tardaría en realizar el viaje?

8. (II) ¿A qué rapidez v la longitud de una barra de 1.00 m parecería un 10.0% más corta (es decir, de 90.0 cm)?

9. (II) La velocidad de escape de la Tierra es de 11.2 km/s. ¿Cuál sería la disminución porcentual en longitud de una nave espacial de 65.2 m de largo que viaja a esa rapidez, vista desde la Tierra?

10. (II) Un amigo pasa rápidamente junto a usted en su nave espacial, con una rapidez de $0.760c$. En el marco de referencia de usted, la nave mide 4.80 m de largo por 1.35 m de alto. *a*) ¿Cuáles serán su longitud y altura en reposo? *b*) ¿Cuántos segundos transcurren en el reloj de su amigo cuando para usted pasaron 20.0 s? *c*) ¿Con qué rapidez parece viajar usted de acuerdo con su amigo? *d*) ¿Cuántos segundos transcurrieron en el reloj de usted cuando su amigo vio en su reloj que pasaron 20.0 s?

11. (II) ¿A qué rapidez las fórmulas relativistas para *a*) longitud y *b*) intervalos de tiempo difieren de los valores clásicos en 1.00%? (Ésta es una forma razonable de estimar cuándo hacer cálculos relativistas en lugar de clásicos).

12. (II) Cierta estrella se localiza a 18.6 años luz de distancia. ¿Cuánto le tomaría a una nave espacial viajar a $0.950c$ para llegar a esa estrella desde la Tierra, según las mediciones de observadores: *a*) en la Tierra, *b*) en la nave espacial? *c*) ¿Cuál es la distancia recorrida de acuerdo con observadores en la nave espacial? *d*) ¿Qué rapidez calcularán los ocupantes de la nave espacial a partir de los resultados de *b*) y *c*)?

13. (II) Suponga que un reporte noticioso afirma que la nave espacial *Enterprise* acaba de regresar de un viaje de 5 años en el que registró una rapidez de $0.74c$. *a*) Si el reporte quiere dar a entender 5.0 años de *tiempo en la Tierra*, ¿cuánto tiempo transcurrió en la nave? *b*) Si el reporte significa 5.0 años de *tiempo en la nave*, ¿cuánto tiempo transcurrió en la Tierra?

14. (II) Una partícula inestable producida en un experimento con acelerador, viaja con velocidad constante, y recorre 1.00 m en 3.40 ns en el marco del laboratorio, antes de "decaer" (convertirse) en otras partículas. En el marco en reposo de la partícula, determine *a*) cuánto vivió antes de decaer, *b*) cuánto recorrió antes de decaer.

15. (II) Cuando cierta partícula subatómica se encuentra estacionaria, su vida media es T_0. Esto es, si en cierto momento hay N de estas partículas, entonces un tiempo T_0 después sólo habrá $N/2$ partículas, suponiendo que las partículas están en reposo. En la posición $x = 0$ en un laboratorio de física de alta energía se crea un haz que porta N de tales partículas por segundo. Este haz viaja a lo largo del eje x con rapidez v en el marco de referencia del laboratorio, y se descubre que sólo $N/2$ partículas por segundo viajan en el haz en $x = 2cT_0$, donde c es la rapidez de la luz. Encuentre la rapidez v de las partículas dentro del haz.

16. (II) En su propio marco de referencia, una caja tiene la forma de un cubo de 2.0 m de lado. Esta caja se carga sobre el piso plano de una nave espacial y entonces la nave espacial vuela y pasa junto a usted con una rapidez horizontal de $0.80c$. ¿Cuál es el volumen de la caja según la observa usted?

17. (II) Cuando está en reposo, una nave espacial tiene la forma de un triángulo isósceles cuyos dos lados iguales tienen longitud 2ℓ y cuya base tiene longitud ℓ. Si esta nave vuela y pasa junto a un observador con una velocidad relativa de $v = 0.95c$ dirigida a lo largo de su base, ¿cuáles son las longitudes de los tres lados de la nave, de acuerdo con el observador?

18. (II) ¿Con qué rapidez debe moverse un pión, en promedio, para recorrer 25 m antes de decaer? La vida media, en reposo, es de 2.6×10^{-8} s.

36–8 Transformaciones de Lorentz

19. (I) Un observador en Tierra ve que una nave extraterrestre se aproxima con una rapidez de $0.60c$. El *Enterprise* viene al rescate (figura 36-16) y rebasa a los extraterrestres mientras se desplaza directamente hacia la Tierra con una rapidez de $0.90c$ relativa a la Tierra. ¿Cuál es la rapidez relativa de una nave vista por los tripulantes de la otra?

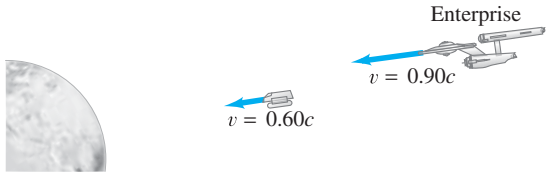


FIGURA 36–16 Problema 19.

20. (I) Suponga que en la figura 36-11 los orígenes de S y S′ se traslapan en $t = t' = 0$, y que S′ se mueve con rapidez $v = 30$ m/s con respecto a S. En S′, una persona descansa en un punto cuyas coordenadas son $x' = 25$ m, $y' = 20$ m y $z' = 0$. Calcule las coordenadas de esta persona en S (x, y, z) en *a*) $t = 3.5$ s, *b*) $t = 10.0$ s. Use la transformación galileana.

21. (I) Repita el problema 20 con la transformación de Lorentz y una rapidez relativa $v = 1.80 \times 10^8$ m/s, pero elija el tiempo t que es *a*) 3.5 μs y *b*) 10.0 μs.

22. (II) En el problema 21, suponga que la persona se mueve con una velocidad cuyas componentes son $u'_x = u'_y = 1.10 \times 10^8$ m/s, ¿Cuál será su velocidad con respecto a S? (Indique magnitud y dirección).

23. (II) Dos naves espaciales abandonan la Tierra en sentidos opuestos, cada una con una rapidez de $0.60c$ con respecto a la Tierra. *a*) ¿Cuál es la velocidad de la nave espacial 1 en relación con la nave espacial 2? *b*) ¿Cuál es la velocidad de la nave espacial 2 en relación con la nave espacial 1?

24. (II) El marco de referencia S′ se mueve con rapidez $v = 0.92c$ en la dirección $+x$ con respecto al marco de referencia S. Los orígenes de S y S′ se traslapan en $t = t' = 0$. Un objeto se encuentra estacionario en S′ en la posición $x' = 100$ m. ¿Cuál es la posición del objeto en S cuando el reloj en S registra 1.00 μs de acuerdo con las ecuaciones *a*) galileanas y *b*) de transformación de Lorentz?

25. (II) Una nave espacial abandona la Tierra y viaja a $0.61c$. Una segunda nave espacial sale de la primera nave con una rapidez de $0.87c$ con respecto a la primera. Calcule la rapidez de la segunda nave con respecto a Tierra si se lanza *a*) en la misma dirección en la que viaja la primera nave, *b*) directamente hacia atrás, hacia la Tierra.

26. (II) Su nave espacial, que viaja a $0.90c$, necesita lanzar una sonda por la escotilla frontal, de manera que su rapidez relativa con el planeta al que se aproxima sea de $0.95c$. ¿Con qué rapidez debe la sonda abandonar su nave?

27. (II) Una nave espacial que viaja a $0.76c$ alejándose de la Tierra lanza un módulo con una rapidez de $0.82c$ en ángulos rectos con su propia dirección de viaje (visto por la nave espacial). ¿Cuál es la rapidez del módulo y su dirección de viaje (relativa a la dirección de la nave espacial), vista por un observador en Tierra?

28. (II) Si una partícula se mueve en el plano xy del sistema S (figura 36-11) con rapidez u en una dirección que forma un ángulo θ con el eje x, demuestre que forma un ángulo θ' en S′ dado por $\tan\theta' = (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1 - v^2/c^2}/(\cos\theta - v/u)$.

29. (II) Una barra de longitud ℓ_0, en reposo en el marco de referencia S, forma un ángulo θ con el eje x. En el marco de referencia S′, que se mueve hacia la derecha con velocidad $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{i}}$ con respecto a S, determine *a*) la longitud ℓ de la barra y *b*) el ángulo θ' que forma con el eje x'.

30. (III) En el Viejo Oeste, un comisario en un tren que viaja a 35.0 m/s ve un duelo entre dos hombres de pie en tierra, separados 55.0 m en forma paralela al tren. Los instrumentos del comisario indican que, en su marco de referencia, los dos hombres disparan simultáneamente. *a*) ¿Cuál de los dos hombres, el primero que pasa el tren (A) o el segundo (B) debe ser arrestado por disparar el primer tiro? Esto es, en el marco de referencia de los pistoleros, ¿quién disparó primero? *b*) ¿Con cuánta anticipación disparó? *c*) ¿Quién recibió primero el disparo?

31. (III) Dos bombillas, A y B, se colocan en reposo sobre el eje x en las posiciones $x_A = 0$ y $x_B = +\ell$. En este marco de referencia, las bombillas se encienden simultáneamente. Con base en las transformaciones de Lorentz, encuentre una expresión para el intervalo de tiempo entre que las bombillas se encienden, según las mediciones de un observador que se desplaza con velocidad v en la dirección $+x$. De acuerdo con este observador, ¿cuál bombilla se encendió primero?

32. (III) Un observador en un marco de referencia S nota que dos eventos están separados en el espacio por 220 m y en el tiempo por 0.80 μs. ¿Con qué rapidez se debe mover el marco de referencia S′, en relación con S, para que un observador en S′ detecte que los dos eventos ocurren en la misma ubicación en el espacio?

33. (III) Un granjero que estudia física cree que puede encajar una pértiga de 12.0 m de largo en un granero de 10.0 m de largo, si corre suficientemente rápido llevando la pértiga. ¿Lo logrará? Explique en detalle. ¿Cómo coincide esto con la idea de que, cuando el granjero corre, el granero parece todavía más corto que 10.0 m?

36–9 Cantidad de movimiento relativista

34. (I) ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un protón que viaja a $v = 0.75c$?

35. (II) *a*) Una partícula viaja a $v = 0.10c$. ¿En qué porcentaje el cálculo de su cantidad de movimiento será erróneo si usa la fórmula clásica? *b*) Repita el ejercicio para $v = 0.60c$.

36. (II) Una partícula de masa m viaja con una rapidez $v = 0.26c$. ¿A qué rapidez su cantidad de movimiento será el doble?

37. (II) Una partícula inestable está en reposo y súbitamente decae en dos fragmentos. Ninguna fuerza externa actúa sobre la partícula o sus fragmentos. Uno de los fragmentos tiene una rapidez de $0.60c$ y una masa de 6.68×10^{-27} kg, mientras que la otra tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg. ¿Cuál es la rapidez del fragmento menos masivo?

38. (II) ¿Cuál es el cambio porcentual en cantidad de movimiento de un protón que acelera *a*) desde $0.45c$ hasta $0.80c$, *b*) de $0.80c$ a $0.98c$?

36–11 Energía relativista

39. (I) Calcule la energía en reposo de un electrón en joules y en MeV (1 MeV $= 1.60 \times 10^{-13}$ J).

40. (I) Cuando un núcleo de uranio en reposo se descompone en el proceso conocido como fisión en un reactor nuclear, los fragmentos resultantes tienen una energía cinética total de aproximadamente 200 MeV. ¿Cuánta masa se pierde en el proceso?

41. (I) El consumo anual total de energía en Estados Unidos es de aproximadamente 8×10^{19} J. ¿Cuánta masa tendría que convertirse a energía para satisfacer esta necesidad?

42. (I) Calcule la masa de un protón en MeV/c^2.

43. (II) Suponga que hay un proceso mediante el cual dos fotones, cada uno con cantidad de movimiento de 0.50 MeV/c, pudieran chocar y formar una sola partícula. ¿Cuál es la masa máxima que podría poseer la partícula?

44. (II) *a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para acelerar un protón desde el reposo hasta una rapidez de $0.998c$? *b*) ¿Cuál sería la cantidad de movimiento de este protón?

45. (II) ¿Cuánta energía se puede obtener de la conversión de 1.0 gramo de masa? ¿Cuánta masa podría elevar esta energía a una altura de 1.0 km sobre la superficie de la Tierra?

46. (II) Para acelerar una partícula de masa m desde el reposo hasta una rapidez de $0.90c$ se requiere trabajo W_1. Para acelerar la partícula desde la rapidez $0.90c$ hasta $0.99c$ se requiere trabajo W_2. Determine la razón W_2/W_1.

47. (II) ¿Cuál es la rapidez de una partícula cuando su energía cinética es igual a su energía en reposo?

48. (II) ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un protón de 950 MeV (esto es, su energía cinética es de 950 MeV)?

49. (II) Calcule la energía cinética y la cantidad de movimiento de un protón que viaja a 2.80×10^8 m/s.

50. (II) ¿Cuál es la rapidez de un electrón cuya energía cinética es de 1.25 MeV?

51. (II) ¿Cuál es la rapidez de un protón acelerado por una diferencia de potencial de 1.25 MeV?

52. (II) Dos partículas idénticas de masa m se aproximan una a otra con igual velocidad v, pero en sentido opuesto. La colisión es completamente inelástica y da por resultado una sola partícula en reposo. ¿Cuál es la masa de la nueva partícula? ¿Cuánta energía se perdió en la colisión? ¿Cuánta energía cinética se perdió en esta colisión?

53. (II) ¿Cuál es la rapidez de un electrón justo antes de que incida sobre una pantalla de televisión luego de acelerarse desde el reposo mediante los 28,000 V del cinescopio?

54. (II) La energía cinética de una partícula es de 45 MeV. Si la cantidad de movimiento es de 121 MeV/c, ¿cuál es la masa de la partícula?

55. (II) Calcule la rapidez de un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) cuya energía cinética es exactamente la mitad *a*) de su energía total, *b*) de su energía en reposo.

56. (II) Calcule la energía cinética y la cantidad de movimiento de un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) que viaja a 8.15×10^7 m/s. ¿Cuáles serían los errores porcentuales si se emplearan las fórmulas clásicas?

57. (II) Suponga que una nave espacial de 17,000 kg de masa se acelera a $0.18c$. *a*) ¿Cuánta energía cinética tendría? *b*) Si usó la fórmula clásica para energía cinética, ¿cuál sería el error porcentual?

***58.** (II) ¿Qué campo magnético B se necesita para mantener a protones de 998 GeV dando vueltas en un círculo de 1.0 km de radio (en el sincrotrón del Fermilab, por ejemplo)? Use la masa relativista. La masa en reposo del protón es 0.938 GeV/c^2. (1 GeV = 10^9 eV.) [*Sugerencia:* En relatividad, $m_{\text{rel}}v^2/r = qvB$ todavía es válida en un campo magnético, donde $m_{\text{rel}} = \gamma m$].

59. (II) El núcleo de americio, $^{241}_{95}$Am, decae a un núcleo de neptunio, $^{237}_{93}$Np, al emitir una partícula alfa de 4.00260 u de masa y energía cinética de 5.5 MeV. Estime la masa del núcleo de neptunio e ignore su retroceso, dado que la masa del americio es de 241.05682 u.

60. (II) Elabore una gráfica de la energía cinética frente a cantidad de movimiento para *a*) una partícula de masa distinta de cero y *b*) una partícula con masa cero.

61. (II) Un muón negativo, que viaja al 43% de la rapidez de la luz, choca de manera frontal con un muón positivo que viaja al 55% de la rapidez de la luz. Los dos muones (cada uno con masa de 105.7 MeV/c^2) se aniquilan; ¿cuánta energía electromagnética producen?

62. (II) Demuestre que la energía cinética K de una partícula de masa m se relaciona con su cantidad de movimiento p mediante la ecuación

$$p = \sqrt{K^2 + 2Kmc^2}/c.$$

63. (III) *a*) En el marco de referencia S, una partícula tiene cantidad de movimiento $\vec{\mathbf{p}} = p_x\hat{\mathbf{i}}$ a lo largo del eje positivo x. Demuestre que, en el marco S′, que se mueve con rapidez v, como en la figura 36-11, la cantidad de movimiento tiene componentes

$$p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$p'_y = p_y$$
$$p'_z = p_z$$
$$E' = \frac{E - p_x v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

(Estas ecuaciones de transformación se sostienen, en realidad, para cualquier dirección de $\vec{\mathbf{p}}$, en tanto el movimiento de S′ sea a lo largo del eje x). *b*) Demuestre que p_x, p_y, p_z, E/c se transforman de acuerdo con la transformación de Lorentz al igual que x, y, z, ct.

36–12 Corrimiento Doppler para la luz

64. (II) Cierta galaxia tiene un corrimiento Doppler dado por $f_0 - f = 0.0987f_0$. Estime con qué rapidez se aleja de la Tierra.

65. (II) Una nave espacial que se dirige hacia la Tierra a $0.70c$ transmite señales de radio a 95.0 MHz. ¿A qué frecuencia se deben sintonizar los receptores en la Tierra?

66. (II) A partir de la ecuación 36-15a, demuestre que el corrimiento Doppler en longitud de onda es

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

si $v \ll c$.

67. (III) Una "pistola" de radar emite microondas de frecuencia f_0 = 36.0 GHz. Cuando la pistola se apunta a un objeto que se dirige hacia ella con rapidez v, el objeto recibe las microondas en la frecuencia con corrimiento Doppler f. El objeto en movimiento refleja estas microondas con esta misma frecuencia f. El aparato de radar estacionario detecta estas ondas reflejadas como una frecuencia con corrimiento Doppler f'. La pistola combina su onda emitida a f_0 y su onda detectada en f'. Estas ondas interfieren, lo que crea un patrón de pulsos cuya frecuencia de pulso es $f_{\text{pulso}} = f' - f_0$. *a*) Demuestre que

$$v \approx \frac{cf_{\text{pulso}}}{2f_0},$$

si $f_{\text{pulso}} \ll f_0$. Si f_{pulso} = 6670 Hz, ¿cuál es v (en km/h)? *b*) Si la rapidez del objeto es diferente por Δv, demuestre que la diferencia en frecuencia de pulsos Δf_{pulso} está dada por

$$\Delta f_{\text{pulso}} = \frac{2f_0\,\Delta v}{c}.$$

Si la precisión de la pistola es de 1 km/h, ¿a que precisión se debe medir la frecuencia de pulso?

68. (III) Cierto átomo emite luz de frecuencia f_0 cuando está en reposo. Un gas monoatómico compuesto de estos átomos se encuentra a la temperatura T. Algunos de los átomos del gas se acercan a un observador y otros se alejan de él en virtud de su movimiento térmico aleatorio. Con la rapidez rms del movimiento térmico, demuestre que la diferencia fraccional entre las frecuencias con corrimiento Doppler para átomos que se acercan directamente hacia el observador y los que se alejan directamente del observador es $\Delta f/f_0 \approx 2\sqrt{3kT/mc^2}$; suponga que $mc^2 \gg 3kT$. Evalúe $\Delta f/f_0$ para un gas de átomos de hidrógeno a 550 K. [Este efecto de "ensanchamiento Doppler" comúnmente se usa para medir la temperatura de los gases, como en astronomía].

Problemas generales

69. Un reloj atómico se lleva al polo norte, mientras otro permanece en el ecuador. ¿Cuánto estarán fuera de sincronización después de transcurridos 2.0 años? [*Sugerencia:* Use el desarrollo binomial, Apéndice A].

70. Una nave espacial en apuros envía dos cápsulas de escape en sentidos opuestos. Una viaja con una rapidez $v_1 = -0.60c$ en un sentido, y la otra viaja con una rapidez $v_2 = +0.50c$ en el sentido opuesto, según se observa desde la nave espacial. ¿Qué rapidez lleva la segunda cápsula de acuerdo con las mediciones de la primera cápsula de escape?

71. Un avión viaja a 1300 km/h alrededor de la Tierra en un círculo de radio esencialmente igual al de la Tierra, y regresa al mismo lugar. Con la relatividad especial, estime la diferencia en tiempo para hacer el viaje, según observadores en Tierra y en el avión. [*Sugerencia:* Use el desarrollo binomial, Apéndice A.]

72. La estrella más cercana a la Tierra es Próxima Centauri, a 4.3 años luz de distancia. *a*) ¿A qué velocidad constante debe viajar una nave espacial desde la Tierra, si debe llegar a la estrella en 4.6 años, según los viajeros en la nave espacial? *b*) ¿Cuánto tarda el viaje de acuerdo con observadores en Tierra?

73. Un quasar emite líneas de hidrógeno cuyas longitudes de onda son 7.0% más largas que lo que se mide en el laboratorio. *a*) Con la fórmula Doppler para la luz, determine la rapidez de este quasar. *b*) ¿Qué resultado obtendría si empleara el corrimiento Doppler "clásico" que estudió en el capítulo 16?

74. El corazón sano de un astronauta tiene un ritmo cardiaco de 60 latidos/minuto. Los médicos del vuelo que permanecen en Tierra pueden monitorear los signos vitales del astronauta a distancia durante el vuelo. ¿Con qué rapidez tendría que alejarse un astronauta de la Tierra para que el médico registrara que su ritmo cardiaco es de 30 latidos/min?

75. Una nave espacial (marco de referencia S′) pasa junto a la Tierra (marco de referencia S) con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, que apunta a lo largo de los ejes x y x'. La nave espacial emite un haz de luz (rapidez c) a lo largo de su eje y', como se muestra en la figura 36-17. *a*) ¿Qué ángulo θ forma este haz de luz con el eje x en el marco de referencia de la Tierra? *b*) Use transformaciones de velocidad para demostrar que la luz se desplaza con rapidez c también en el marco de referencia de la Tierra. *c*) Compare estos resultados relativistas con el que se obtendría de manera clásica (transformaciones galileanas).

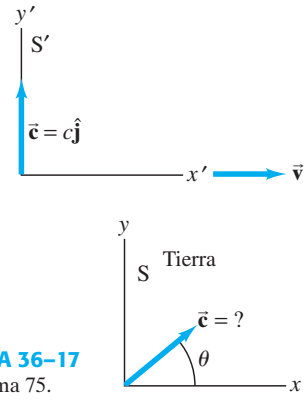


FIGURA 36–17
Problema 75.

76. El cohete A pasa junto a la Tierra con una rapidez de $0.65c$. Al mismo tiempo, el cohete B pasa junto a la Tierra y se desplaza a $0.85c$ en relación con la Tierra en la misma dirección. ¿Con qué rapidez viaja B en relación con A cuando rebasa a A?

77. *a*) ¿Cuál es la rapidez v de un electrón cuya energía cinética es 14,000 veces su energía en reposo? Puede enunciar la respuesta como la diferencia $c - v$. Tal rapidez se alcanzó en el Acelerador Lineal Stanford, SLAC. *b*) Si los electrones viajan en el laboratorio a través de un tubo de 3.0 km de largo (como en el SLAC), ¿de qué longitud es este tubo en el marco de referencia de los electrones? [*Sugerencia:* Utilice el desarrollo binomial].

78. Como regla general, cualquier objeto que viaje más rápido que aproximadamente $0.1c$ se llama *relativista*; esto es, la relatividad especial es un efecto significativo. Determine la rapidez de un electrón en un átomo de hidrógeno (radio: 0.53×10^{-10} m) e indique si es o no relativista. (Considere al electrón como si estuviera en una órbita circular alrededor del protón).

79. ¿Qué cantidad mínima de energía electromagnética se necesita para producir un electrón y un positrón juntos? Un positrón es una partícula con la misma masa que un electrón, pero con carga opuesta. (Advierta que la carga eléctrica se conserva en este proceso. Véase la sección 37-5).

80. ¿Cuántos gramos de materia tendrían que destruirse totalmente para mantener encendida una bombilla de 75 W durante 1.0 año?

81. Si E es la energía total de una partícula con energía potencial cero, demuestre que $dE/dp = v$, donde p y v son la cantidad de movimiento y la velocidad de la partícula, respectivamente.

82. Un neutrón libre puede decaer en un protón, un electrón y un neutrino. Suponga que la masa del neutrino es cero; las otras masas se pueden encontrar en la tabla de la segunda de forros. Determine la energía cinética total compartida entre las tres partículas cuando un neutrón decae en reposo.

83. El Sol irradia energía a una tasa aproximada de 4×10^{26} W. *a*) ¿A qué tasa disminuye la masa del Sol? *b*) ¿Cuánto tarda el Sol en perder una masa igual a la de la Tierra? *c*) Estime cuánto podría durar el Sol si irradiara constantemente a esa tasa.

84. Según las mediciones, una partícula desconocida tiene carga negativa y una rapidez de 2.24×10^8 m/s. Su cantidad de movimiento se determina en 3.07×10^{-22} kg·m/s. Identifique la partícula al encontrar su masa.

85. ¿Cuánta energía se requeriría para descomponer un núcleo de helio en sus constituyentes, dos protones y dos neutrones? Las masas en reposo de un protón (incluyendo la masa de un electrón), un neutrón y helio neutro son, respectivamente, 1.00783 u, 1.00867 u y 4.00260 u. (Esta diferencia de energía se llama *energía de enlace total* del núcleo de ${}^4_2\text{He}$).

86. Demuestre analíticamente que una partícula con cantidad de movimiento p y energía E tiene una rapidez dada por

$$v = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}.$$

87. Dos protones, cada uno con una rapidez de $0.985c$ en el laboratorio, se acercan entre sí. Determine *a*) la cantidad de movimiento de cada protón en el laboratorio, *b*) la cantidad de movimiento total de los dos protones en el laboratorio y *c*) la cantidad de movimiento de un protón desde la perspectiva del otro protón.

88. Cuando dos moles de moléculas de hidrógeno (H_2) y un mol de moléculas de oxígeno (O_2) reaccionan para formar dos moles de agua (H_2O), la energía liberada es 484 kJ. ¿Cuánto disminuye la masa en esta reacción? ¿Qué porcentaje de la masa original total del sistema representa este cambio de masa?

89. La nave espacial ficticia *Enterprise* obtiene su potencia al combinar materia y antimateria, y logra la conversión completa de masa en energía. Si la masa del *Enterprise* es aproximadamente de 6×10^9 kg, ¿cuánta masa se debe convertir en energía cinética para acelerarla desde el reposo hasta un décimo de la rapidez de la luz?

90. Una nave espacial y sus ocupantes tienen una masa total de 180,000 kg. A los ocupantes les gustaría viajar a una estrella que está a 35 años luz de distancia, con una rapidez de $0.70c$. Para acelerar, el motor de la nave espacial convierte masa directamente en energía. ¿Cuánta masa se convertirá en energía para acelerar la nave espacial a esta rapidez? Suponga que la nave se acelera rápidamente, de manera que la rapidez de todo el viaje se puede considerar como $0.70c$, e ignore la disminución en masa total para el cálculo. ¿Cuánto tardará el viaje de acuerdo con los astronautas a bordo?

91. En una reacción nuclear se crean dos partículas idénticas, que viajan en sentidos opuestos. Si la rapidez de cada partícula es $0.85c$, relativa al marco de referencia del laboratorio, ¿cuál es la rapidez de una partícula en relación con la otra partícula?

92. Una nave espacial de 32,000 kg viajará a la vecindad de una estrella a 6.6 años luz de distancia de la Tierra. Los pasajeros en la nave quieren que el viaje (de ida) no tarde más de 1.0 año. ¿Cuánto trabajo se debe realizar sobre la nave para llevarla a la rapidez necesaria para este viaje?

93. Suponga que una nave espacial de 14,500 kg abandona la Tierra con una rapidez de $0.98c$. ¿Cuál es la energía cinética de la nave espacial? Compare con el consumo anual total de energía en Estados Unidos (aproximadamente 10^{20} J).

94. Un mesón pi de masa m_π decae en reposo en un muón (masa m_μ) y un neutrino de masa despreciable o cero. Demuestre que la energía cinética del muón es $K_\mu = (m_\pi - m_\mu)^2c^2/(2m_\pi)$.

95. Los astrónomos miden la distancia a una estrella particular en 6.0 años luz (1 año luz = distancia que recorre la luz en un año). Una nave espacial viaja de la Tierra a la vecindad de esta estrella con rapidez constante, y llega en 2.50 años, según los relojes en la nave espacial. *a*) ¿Cuánto tarda el viaje, según los relojes en el marco de referencia de la Tierra (que se supone inercial)? *b*) ¿Qué distancia recorre la nave espacial, según las mediciones en su propio marco de referencia?

96. Una masa de 1.88 kg oscila en el extremo de un resorte cuya constante de rigidez es $k = 84.2$ N/m. Si este sistema se encuentra en una nave espacial que pasa junto a la Tierra a $0.900c$, ¿cuál es su periodo de oscilación de acuerdo con *a*) observadores en la nave y *b*) observadores en Tierra?

97. Demuestre que el intervalo espacio-tiempo, $(c\,\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$, es invariante, lo cual significa que todos los observadores en todos los marcos de referencia inerciales calculan el mismo número para esta cantidad en el caso de cualquier par de eventos.

98. Una losa de vidrio, con índice de refracción n, se desplaza hacia la derecha con rapidez v. Un haz de luz se emite en el punto A (figura 36-18), pasa a través del vidrio y llega al punto B a una distancia ℓ. El vidrio tiene grosor d en el marco de referencia donde está en reposo, y la rapidez de la luz en el vidrio es c/n. ¿Cuánto tarda la luz en ir del punto A al punto B, de acuerdo con un observador en reposo con respecto a los puntos A y B? Compruebe su respuesta para los casos $v = c$, $v = 0$ y $n = 1$.

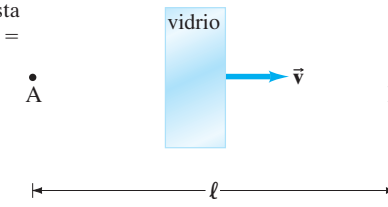


FIGURA 36–18
Problema 98.

*Problemas numéricos/por computadora

***99.** (II) Para una masa de 1.0 kg, elabore una gráfica de la energía cinética como función de la rapidez para valores de 0 a $0.9c$, tanto con la fórmula clásica $\left(K = \frac{1}{2}mv^2\right)$ como con la fórmula relativista correcta $\left(K = (\gamma - 1)mc^2\right)$.

***100.** (III) Una partícula de masa m se proyecta horizontalmente a una rapidez relativista v_0 en la dirección $+x$. Existe una fuerza descendente constante F que actúa sobre la partícula. Con la definición de cantidad de movimiento relativista $\vec{\mathbf{p}} = \gamma m\vec{\mathbf{v}}$ y la segunda ley de Newton $\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, *a*) demuestre que las componentes x y y de velocidad de la partícula en el tiempo t están dadas por

$$v_x(t) = p_0c/(m^2c^2 + p_0^2 + F^2t^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$v_y(t) = -Fct/(m^2c^2 + p_0^2 + F^2t^2)^{\frac{1}{2}}$$

donde p_0 es la cantidad de movimiento inicial de la partícula. *b*) Suponga que la partícula es un electrón ($m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg), con $v_0 = 0.50c$ y $F = 1.00 \times 10^{-15}$ N. Calcule los valores de v_x y v_y del electrón como función del tiempo t, desde $t = 0$ hasta $t = 5.00$ μs, en intervalos de 0.05 μs. Grafique los valores para mostrar cómo cambian con el tiempo las componentes de velocidad durante este intervalo. *c*) ¿La trayectoria es parabólica, como lo sería en la mecánica clásica (secciones 3-7 y 3-8)? Explique.

Respuestas a los ejercicios

A: Sí.
B: *c*).
C: *a*) No; *b*) sí.
D: 80 m.
E: $0.030c$, igual que clásica, a una precisión mejor que 0.1%.
F: *d*).
G: *d*).
H: No.

Los microscopios electrónicos producen imágenes utilizando electrones, los cuales tienen propiedades ondulatorias como la luz. Puesto que la longitud de onda de los electrones puede ser mucho menor que la de la luz visible, es posible obtener mayor resolución y amplificación. Un microscopio electrónico de barrido (SEM) produce imágenes con una calidad tridimensional, como en el caso de estas células *Giardia* dentro de un intestino delgado humano. La amplificación aquí es de aproximadamente 2000×. *Giardia* es una preocupación para los excursionistas porque se ha vuelto muy común en el agua sin tratamiento, incluso en las altas montañas, y causa una desagradable infección intestinal difícil de eliminar.

CAPÍTULO 37

Teoría cuántica temprana y modelos atómicos

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Experimentalmente se descubrió que

a) la luz se comporta como onda.
b) la luz se comporta como partícula.
c) los electrones se comportan como partículas.
d) los electrones se comportan como ondas.
e) todo lo anterior es cierto.
f) ninguno de los incisos anteriores es verdadero.

El segundo aspecto de la revolución que conmocionó al mundo de la física en la primera parte del siglo XIX fue la teoría cuántica (el otro fue la teoría de la relatividad de Einstein). A diferencia de la teoría especial de la relatividad, la revolución de la teoría cuántica requirió casi tres décadas para desarrollarse, y muchos científicos contribuyeron a su desarrollo. Comenzó en 1900, con la hipótesis cuántica de Planck, y culminó a mediados de la década de 1920 con la teoría de la mecánica cuántica de Schrödinger y Heisenberg, que es bastante efectiva para explicar la estructura de la materia.

CONTENIDO

37–1 Hipótesis cuántica de Planck; radiación de cuerpo negro
37–2 La teoría fotónica de la luz y el efecto fotoeléctrico
37–3 Energía, masa y cantidad de movimiento de un fotón
37–4 Efecto Compton
37–5 Interacciones de fotones; producción de pares
37–6 Dualidad onda-partícula; el principio de complementariedad
37–7 Naturaleza ondulatoria de la materia
*37–8 Microscopios electrónicos
37–9 Primeros modelos atómicos
37–10 La clave para la estructura del átomo: Los espectros atómicos
37–11 El modelo de Bohr
37–12 Aplicación de la hipótesis de De Broglie a los átomos

37–1 Hipótesis cuántica de Planck; radiación de cuerpo negro

Radiación de cuerpo negro

Una de las observaciones que quedó sin explicar a finales del siglo XIX fue el espectro de luz emitido por los objetos calientes. En la sección 19-10 se vio que todos los objetos emiten radiación, cuya intensidad total es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura (absoluta) Kelvin (T^4). A temperaturas normales (≈ 300 K), no se está al tanto de esta radiación electromagnética en virtud de su baja intensidad. A temperaturas superiores, hay suficiente radiación infrarroja que uno puede sentir como calor si

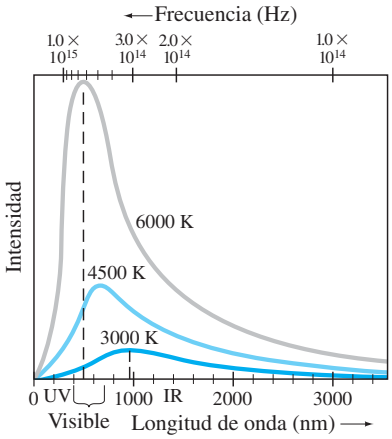


FIGURA 37–1 Espectros medidos de longitudes de onda y frecuencias emitidas por un cuerpo negro a tres temperaturas diferentes.

está cerca del objeto. A temperaturas todavía más altas (en el orden de 1000 K), los objetos en realidad brillan, como el quemador de una estufa eléctrica al rojo vivo o el elemento calefactor de un tostador. A temperaturas por arriba de 2000 K, los objetos brillan con un color amarillento o blanquecino, como el hierro candente y el filamento de una bombilla. La luz emitida es de un rango continuo de longitudes de onda o frecuencias, y el *espectro* es una gráfica de intensidad contra longitud de onda o frecuencia. Conforme la temperatura aumenta, la radiación electromagnética emitida por los objetos no sólo aumenta en intensidad total, sino que alcanza un máximo a frecuencias cada vez más altas.

En la figura 37-1 se ilustra el espectro de luz emitido por un objeto caliente denso para un **cuerpo negro** idealizado. Un cuerpo negro es un cuerpo que absorbería toda la radiación que llegara a él (y por lo tanto parecería negro bajo reflexión cuando se ilumine por otras fuentes). La radiación que tal cuerpo negro idealizado, emitiría cuando es caliente y luminoso, la llamada **radiación de cuerpo negro** (aunque no necesariamente de color negro), se aproxima a la de muchos objetos reales. La curva de 6000 K en la figura 37-1, que corresponde a la temperatura de la superficie del Sol, llega a su pico en la parte visible del espectro. Para temperaturas más bajas, la radiación total cae considerablemente y el pico se presenta a longitudes de onda más largas (o frecuencias más bajas). (Por eso los objetos brillan con un color rojo cuando están alrededor de 1000 K). Experimentalmente se descubrió que la longitud de onda en el pico del espectro, λ_P, se relaciona con la temperatura Kelvin T mediante

$$\lambda_P T = 2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}. \qquad \textbf{(37–1)}$$

Esto se conoce como **ley de Wien**.

EJEMPLO 37–1 **Temperatura de la superficie del Sol.** Estime la temperatura de la superficie del Sol, considerando que el Sol emite luz cuyo pico de intensidad se presenta en el espectro visible, alrededor de los 500 nm.

PLANTEAMIENTO Suponga que el Sol actúa como un cuerpo negro, y considere que λ_P = 500 nm en la ley de Wien (ecuación 37-1).

SOLUCIÓN La ley de Wien da

$$T = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{\lambda_P} = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{500 \times 10^{-9}\ \text{m}} \approx 6000\ \text{K}.$$

EJEMPLO 37–2 **Color de una estrella.** Suponga que una estrella tiene una temperatura superficial de 32,500 K. ¿De qué color parecería esta estrella?

PLANTEAMIENTO Suponga que la estrella emite radiación como un cuerpo negro, y despeje λ_P en la ley de Wien, ecuación 37-1.

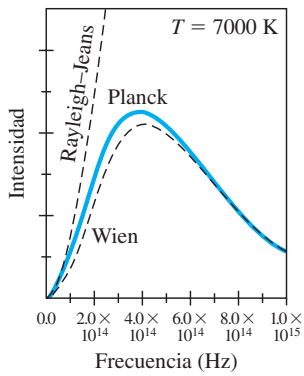
SOLUCIÓN A partir de la ley de Wien se tiene

$$\lambda_P = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{T} = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{3.25 \times 10^{4}\ \text{K}} = 89.2\ \text{nm}.$$

El pico está en el rango UV del espectro y estará a la izquierda en la figura 37-1. En la región visible, la curva descenderá, así que las longitudes de onda visibles más cortas serán más intensas. Por lo tanto, la estrella parecerá azulada (o de color blanco azulado).

NOTA Este ejemplo ayuda a entender por qué las estrellas tienen diferentes colores (rojizo en el caso las estrellas más frías, y anaranjado, amarillo, blanco y azulado en el caso de las estrellas "más calientes").

FIGURA 37–2 Comparación de las teorías de Wien y de Rayleigh-Jeans con la de Planck, que se apega cercanamente a los experimentos. Las líneas punteadas muestran falta de concordancia con teorías anteriores.



Hipótesis cuántica de Planck

Un gran problema que enfrentaron los científicos en la década de 1890 fue explicar la radiación de cuerpo negro. La teoría electromagnética de Maxwell predijo que cargas eléctricas oscilatorias producirían ondas electromagnéticas, y la radiación emitida por un objeto caliente podría deberse a las oscilaciones de cargas eléctricas en las moléculas del material. Aunque esto explicaría de dónde proviene la radiación, no predice correctamente el espectro observado de la luz emitida. Dos importantes curvas teóricas basadas sobre ideas clásicas fueron las propuestas por W. Wien (en 1896) y Lord Rayleigh (en 1900). La última fue modificada más tarde por J. Jeans y desde entonces se conoce como teoría Rayleigh-Jeans. Conforme se dispuso de datos experimentales, se dejó en claro que ni las formulaciones de Wien ni las de Rayleigh-Jeans estaban en concordancia con los experimentos (véase la figura 37-2).

En el año 1900 Max Planck (1858-1947) propuso una fórmula empírica que se ajustaba muy bien a los datos (ahora con frecuencia se llama *fórmula de radiación de Planck*):

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

$I(\lambda, T)$ es la intensidad de la radiación como función de la longitud de onda λ a la temperatura T; k es la constante de Boltzmann, c es la rapidez de la luz y h es la nueva constante, ahora llamada **constante de Planck**. El valor de h lo estimó Planck al ajustar su fórmula para la curva de radiación de cuerpo negro con el experimento. El valor aceptado en la actualidad es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

Para dar una base teórica para su fórmula, Planck hizo una nueva y radical suposición: que la energía de las oscilaciones de los átomos dentro de las moléculas no puede tener sólo un valor cualquiera; en vez de ello, cada una tiene energía que es un múltiplo de un valor mínimo relacionado con la frecuencia de oscilación por

$$E = hf.$$

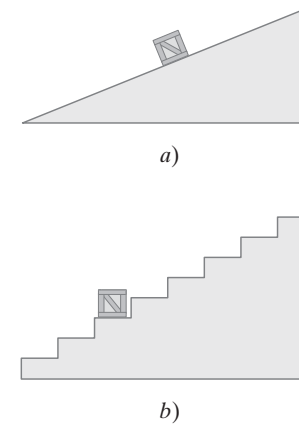
La suposición de Planck sugiere que la energía de cualquier vibración molecular podría ser sólo un múltiplo entero de la energía mínima hf:

$$E = nhf, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{37–2}$$

donde n se llama **número cuántico** ("cuanto" significa "cantidad discreta", en oposición a "continua"). Con frecuencia, esta idea se llama **hipótesis cuántica de Planck**, aunque en aquella época se brindó poca atención a este aspecto. De hecho, parece que Planck la consideró más como un dispositivo matemático para obtener la "respuesta correcta", y no como un importante descubrimiento por derecho propio. Planck mismo continuó buscando una explicación clásica para la introducción de h. El reconocimiento de que ésta fue una importante y radical innovación no llegaría sino más tarde, después de 1905, cuando otros, en particular Einstein, entraron al campo.

La hipótesis cuántica, ecuación 37-2, establece que la energía de un oscilador puede ser $E = hf$, o $2hf$, o $3hf$, etcétera, pero no puede haber vibraciones con energías entre estos valores. Esto es, la energía no sería una cantidad continua como se creyó durante siglos; más bien está **cuantizada**: existe sólo en cantidades discretas. La menor cantidad de energía posible (hf) se llama **cuanto de energía**. Recuerde del capítulo 14 que la energía de una oscilación es proporcional a la amplitud al cuadrado. Otra forma de expresar la hipótesis cuántica es que no sólo cualquier amplitud de vibración es posible. Los posibles valores para la amplitud se relacionan con la frecuencia f.

Una analogía simple nos ayudará. Compare una rampa, sobre la que se puede colocar una caja a cualquier altura, con un tramo de escalera sobre cuyos escalones la caja sólo puede tener ciertas cantidades discretas de energía potencial, como se ilustra en la figura 37-3.



a)

b)

FIGURA 37–3 Analogía de una rampa contra una escalera. *a*) Sobre una rampa, una caja puede tener valores continuos de energía potencial. *b*) En cambio, en las escaleras, la caja sólo puede tener valores discretos (cuantizados) de energía.

37–2 La teoría fotónica de la luz y el efecto fotoeléctrico

En 1905, el mismo año en que presentó la teoría especial de la relatividad, Einstein realizó una soberbia extensión de la idea cuántica al proponer una nueva teoría de la luz. El trabajo de Planck sugirió que la energía vibratoria de las moléculas en un objeto que irradia está cuantizada, con energía $E = nhf$, donde n es un entero y f es la frecuencia de vibración molecular. Einstein argumentó que, cuando un oscilador molecular emite luz, la energía vibratoria de la molécula de nhf debe disminuir por una cantidad hf (o por $2hf$, etcétera) a otro entero por hf, como $(n-1)hf$. Entonces, para conservar energía, la luz debe emitirse en paquetes, o *cuantos*, cada uno con energía

$$E = hf, \tag{37–3}$$

donde f aquí es la frecuencia de la luz emitida.

De nuevo, h es la constante de Planck. Como toda la luz a final de cuentas proviene de una fuente que irradia, esto sugiere que quizá la *luz se transmite mediante pequeñas partículas*, o **fotones**, como ahora se les llama, así como a través de las ondas predichas por la teoría electromagnética de Maxwell. La teoría fotónica de la luz fue una divergencia radical de las ideas clásicas. Einstein propuso una prueba de la teoría cuántica de la luz: mediciones cuantitativas en el efecto fotoeléctrico.

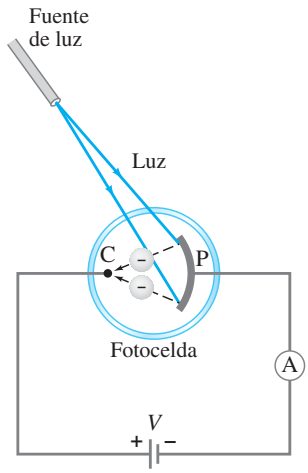


FIGURA 37–4 El efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz brilla sobre una superficie metálica, se emiten electrones desde la superficie. Este efecto se llama **efecto fotoeléctrico** y ocurre en muchos materiales, pero se observa con mayor facilidad en los metales. Se puede observar con el aparato que se ilustra en la figura 37-4. Una placa metálica P y un electrodo más pequeño C se colocan dentro de un tubo de vidrio al vacío, llamado **fotocelda**. Los dos electrodos se conectan a un amperímetro y una fuente de fem, como se muestra. Cuando la fotocelda está en la oscuridad, el amperímetro registra cero. Pero cuando luz de frecuencia suficientemente alta ilumina la placa, el amperímetro indica una corriente que fluye en el circuito. Para completar el circuito, imagine que los electrones expulsados de la placa por la radiación incidente fluyen a través del tubo desde la placa hasta el "colector" C, como se indica en la figura 37-4.

El hecho de que los electrones deben emitirse cuando la luz brilla sobre un metal es congruente con la teoría de las ondas electromagnéticas (EM) de la luz: el campo eléctrico de una onda EM podría ejercer una fuerza sobre los electrones en el metal y expulsar algunos de ellos. Sin embargo, Einstein puntualizó que la teoría ondulatoria y la teoría fotónica de la luz dan predicciones muy diferentes acerca de los detalles del efecto fotoeléctrico. Por ejemplo, algo que se puede medir con el aparato de la figura 37-4 es la máxima energía cinética ($K_{\text{máx}}$) de los electrones emitidos. Esto se logra al usar una fuente de voltaje variable e invertir las terminales de manera que el electrodo C sea negativo y P positivo. Los electrones emitidos de P serán repelidos por el electrodo negativo, pero si este voltaje inverso es suficientemente pequeño, los electrones más rápidos todavía llegarán a C y habrá una corriente en el circuito. Si el voltaje invertido aumenta, se llega a un punto donde la corriente tiende a cero: ningún electrón tiene suficiente energía cinética para llegar a C. A esto se le llama *potencial de frenado*, o *voltaje de frenado*, V_0, y a partir de su medición, es posible determinar $K_{\text{máx}}$ con base en la conservación de la energía (pérdida de energía cinética = ganancia en energía potencial):

$$K_{\text{máx}} = eV_0.$$

Ahora examinemos los detalles del efecto fotoeléctrico desde el punto de vista de la teoría ondulatoria, frente a la teoría corpuscular de Einstein.

Comencemos por la teoría ondulatoria, suponiendo luz monocromática. Las dos importantes propiedades de una onda de luz son su intensidad y su frecuencia (o longitud de onda). Cuando estas dos cantidades varían, la teoría ondulatoria hace las siguientes predicciones:

Predicciones de la teoría ondulatoria

1. Si la intensidad de la luz aumenta, el número de electrones expulsados y sus energías cinéticas máximas deberían aumentar porque la intensidad más alta significa una mayor amplitud de campo eléctrico, y el campo eléctrico más grande debería expulsar electrones con mayor rapidez.
2. La frecuencia de la luz no debe afectar la energía cinética de los electrones expulsados. Sólo la intensidad debe afectar a $K_{\text{máx}}$.

La teoría fotónica hace predicciones completamente diferentes. Primero, advierta que, en un haz monocromático, todos los fotones tienen la misma energía ($= hf$). Aumentar la intensidad del haz de luz significa aumentar el número de fotones en el haz, pero no afecta la energía de cada fotón en tanto que la frecuencia no cambie. De acuerdo con la teoría de Einstein, un electrón se expulsa del metal por una colisión con un solo fotón. En el proceso, toda la energía fotónica se transfiere al electrón y el fotón deja de existir. Como los electrones se mantienen en el metal mediante fuerzas de atracción, se requiere alguna energía mínima W_0 para sacar un electrón a través de la superficie. W_0 se llama **función trabajo** y es de algunos electrón volts ($1\ \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}$) para la mayoría de los metales. Si la frecuencia f de la luz incidente es tan baja que hf sea menor que W_0, entonces los fotones no tendrán suficiente energía para expulsar electrones en absoluto. Si $hf > W_0$, entonces se expulsarán electrones y la energía se conservará en el proceso. Esto es, la energía entrante (del fotón), hf, igualará la energía cinética K saliente del electrón más la energía requerida para sacarlo del metal, W:

$$hf = K + W. \qquad \textbf{(37–4a)}$$

Los electrones ligados con menor intensidad se emitirán con más energía cinética ($K_{\text{máx}}$), en cuyo caso W en esta ecuación se convierte en la función trabajo W_0, y K se convierte en $K_{\text{máx}}$:

$$hf = K_{\text{máx}} + W_0. \qquad \text{[electrones ligados con menor intensidad]} \quad \textbf{(37–4b)}$$

Muchos electrones requerirán más energía que el mínimo (W_0) para salir del metal, y por ende la energía cinética de tales electrones será menor que el máximo.

A partir de estas consideraciones, la teoría fotónica hace las siguientes predicciones:

Predicciones de la teoría fotónica

1. Un aumento en intensidad del haz de luz significa que más fotones son incidentes, de manera que se expulsarán más electrones; pero, dado que la energía de cada fotón no cambia, la máxima energía cinética de los electrones no cambia por un aumento en intensidad.
2. Si la frecuencia de la luz aumenta, la máxima energía cinética de los electrones aumenta linealmente, de acuerdo con la ecuación 37-4b. Esto es,
$$K_{\text{máx}} = hf - W_0.$$
Esta relación se grafica en la figura 37-5.
3. Si la frecuencia f es menor que la frecuencia "de corte" f_0, donde $hf_0 = W_0$, no se expulsarán electrones, sin importar cuán grande sea la intensidad de la luz.

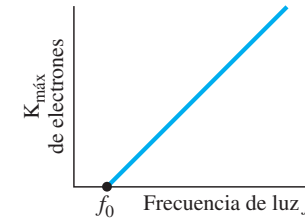


FIGURA 37–5 Efecto fotoeléctrico: la máxima energía cinética de los electrones expulsados aumenta linealmente con la frecuencia de la luz incidente. No se emiten electrones si $f < f_0$.

Estas predicciones de la teoría fotónica claramente son muy diferentes de las predicciones de la teoría ondulatoria. Entre 1913 y 1914, R. A. Millikan realizó cuidadosos experimentos. Los resultados estuvieron en completa concordancia con la teoría fotónica de Einstein.

Otro aspecto del efecto fotoeléctrico también confirmó la teoría fotónica. Si se usa luz con intensidad extremadamente baja, la teoría ondulatoria predice un retraso temporal antes de la emisión de electrones, de manera que un electrón pueda absorber suficiente energía para superar la función trabajo. La teoría fotónica no predice tal demora, pues sólo se requiere un fotón (si su frecuencia es suficientemente alta) para expulsar un electrón, y los experimentos no demostraron demora. Esto también confirmó la teoría fotónica de Einstein.

EJEMPLO 37–3 **Energía de fotón.** Calcule la energía de un fotón de luz azul, $\lambda = 450$ nm en el aire (o en el vacío).

PLANTEAMIENTO El fotón tiene energía $E = hf$ (ecuación 37-3), donde $f = c/\lambda$.

SOLUCIÓN Puesto que $f = c/\lambda$, se tiene

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{(4.5 \times 10^{-7}\,\text{m})} = 4.4 \times 10^{-19}\,\text{J},$$

o $(4.4 \times 10^{-19}\,\text{J})/(1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}) = 2.8\,\text{eV}$. (Véase la definición de eV en la sección 23-8, 1 eV $= 1.60 \times 10^{-19}$ J).

EJEMPLO 37–4 **ESTIMACIÓN** **Fotones de una bombilla.** Estime cuántos fotones de luz visible emite por segundo una bombilla de 100 W. Suponga que la bombilla tiene una eficiencia típica de aproximadamente el 3% (esto es, el 97% de la energía se manifiesta como calor).

PLANTEAMIENTO Suponga una longitud de onda promedio a la mitad del espectro visible, $\lambda \approx 500$ nm. La energía de cada fotón es $E = hf = hc/\lambda$. Sólo el 3% de la potencia de 100 W se emite como luz, o 3 W = 3 J/s. El número de fotones emitidos por segundo es igual a la salida de luz de 3 J/s dividida entre la energía de cada fotón.

SOLUCIÓN La energía emitida en un segundo (= 3 J) es $E = Nhf$, donde N es el número de fotones emitidos por segundo y $f = c/\lambda$. Por lo tanto,

$$N = \frac{E}{hf} = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{(3\,\text{J})(500 \times 10^{-9}\,\text{m})}{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s})} \approx 8 \times 10^{18}$$

por segundo, o casi 10^{19} fotones emitidos por segundo, un número enorme.

EJERCICIO A Compare un haz de luz que contiene luz infrarroja de una sola longitud de onda, 1000 nm, con un haz UV monocromático a 100 nm, ambos de la misma intensidad. ¿Hay más fotones de 100 nm o más fotones de 1000 nm?

EJEMPLO 37–5 **Rapidez y energía de un fotoelectrón.** ¿Cuál es la energía cinética y la rapidez de un electrón expulsado de una superficie de sodio cuya función trabajo es $W_0 = 2.28$ eV cuando se ilumina con luz de *a*) 410 nm, *b*) 550 nm de longitud de onda?

PLANTEAMIENTO Primero encuentre la energía de los fotones ($E = hf = hc/\lambda$). Si la energía es mayor que W_0, entonces se expulsarán electrones con cantidades variables de energía cinética, con un máximo de $K_{\text{máx}} = hf - W_0$.

SOLUCIÓN *a*) Para $\lambda = 410$ nm,

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = 4.85 \times 10^{-19}\,\text{J} \quad \text{o} \quad 3.03\,\text{eV}.$$

La máxima energía cinética que puede tener un electrón está dada por la ecuación 37-4b, $K_{\text{máx}} = 3.03\ \text{eV} - 2.28\ \text{eV} = 0.75$ eV, o $(0.75\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\text{J/eV}) = 1.2 \times 10^{-19}$J. Puesto que $K = \frac{1}{2}mv^2$ donde $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg,

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 5.1 \times 10^5\,\text{m/s}.$$

La mayoría de los electrones expulsados tendrán menos energía cinética y menos rapidez que estos valores máximos.

b) Para $\lambda = 550$ nm, $hf = hc/\lambda = 3.61 \times 10^{-19}$ J $= 2.26$ eV. Puesto que esta energía fotónica es menor que la función trabajo, no se expulsarán electrones.

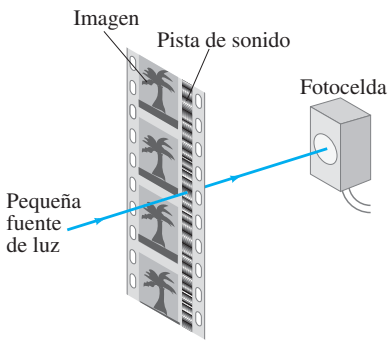
NOTA En *a*) se usó la ecuación no relativista para energía cinética. Si v resulta mayor que aproximadamente $0.1c$, el cálculo habría sido impreciso por al menos un porcentaje, y probablemente sería preferible volver a resolverlo con la forma relativista (ecuación 36-10).

EJERCICIO B Determine la menor frecuencia y la mayor longitud de onda necesarias para emitir electrones de sodio.

Es fácil demostrar que la energía de un fotón en electrón volts, cuando se conoce la longitud de onda λ en nm, es

$$E\ (\text{eV}) = \frac{1.240 \times 10^3\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{\lambda\ (\text{nm})}. \quad \text{[energía de un fotón en eV]}$$

FIGURA 37–6 Pista de sonido óptico en cinta de película. En el proyector, la luz de una pequeña fuente (diferente de la que se usa para las imágenes) pasa a través de la pista de sonido en la película en movimiento. Las áreas claras y oscuras en la pista de sonido varían la intensidad de la luz transmitida que llega a la fotocelda, cuya corriente de salida es entonces una réplica del sonido original. Esta salida se amplifica y se envía a los altavoces. Los proyectores de alta calidad pueden exhibir películas que contienen varias pistas sonoras paralelas que van a diferentes altavoces alrededor de la sala.



Aplicaciones del efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico, además de desempeñar un importante papel histórico en la confirmación de la teoría fotónica de la luz, también tiene muchas aplicaciones prácticas. Las alarmas contra robos y los porteros automáticos con frecuencia utilizan un circuito de fotocelda como el de la figura 37-4. Cuando una persona interrumpe el haz de luz, la súbita caída de corriente en el circuito activa un interruptor, a menudo un solenoide, que opera un timbre o abre la puerta. En las alarmas contra robos en ocasiones se usa luz UV o IR, en virtud de su invisibilidad. Muchos detectores de humo usan el efecto fotoeléctrico para detectar pequeñas cantidades de humo que interrumpen el flujo de luz y, por lo tanto, alteran la corriente eléctrica. Los medidores de luz que se emplean en fotografía (exposímetros) también usan este circuito. Las fotoceldas se usan en muchos otros dispositivos, como en los espectrofotómetros de absorción, para medir intensidad de luz. Un tipo de pista sonora de película es una sección estrecha con sombreado variable al lado de la película. La luz que pasa a través de la película se "modula", y la señal eléctrica de salida de la fotocelda detectora sigue las frecuencias en la pista sonora. Véase la figura 37-6. Para muchas aplicaciones actuales, la fotocelda de tubo de vacío de la figura 37-4 se sustituyó por un dispositivo semiconductor llamado **fotodiodo** (sección 40-9). En estos semiconductores, la absorción de un fotón libera un electrón ligado, lo que modifica la conductividad del material, de manera que se altera la corriente a través de un fotodiodo.

37–3 Energía, masa y cantidad de movimiento de un fotón

Como acabamos de ver (ecuación 37-3), la energía total de un fotón individual está dada por $E = hf$. Puesto que un fotón siempre viaja con la rapidez de la luz, verdaderamente es una partícula relativista. Por consiguiente, se deben usar fórmulas relativistas para lidiar con su energía y cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento de cualquier partícula de masa m está dada por $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Puesto que $v = c$ para un fotón, el denominador es cero. Para evitar tener una cantidad de movimiento infinita, se concluye que la masa del fotón debe ser cero: $m = 0$. Esto también tiene sentido porque un fotón nunca puede estar en reposo (siempre se mueve con la rapidez de la luz). La energía cinética de un fotón es su energía total:

$$K = E = hf. \qquad \text{[fotón]}$$

La cantidad de movimiento de un fotón se puede obtener a partir de la fórmula relativista (ecuación 36-13) $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, donde se establece que $m = 0$, de manera que $E^2 = p^2c^2$ o

$$p = \frac{E}{c}. \qquad \text{[fotón]}$$

⚠ CUIDADO
La cantidad de movimiento de un fotón no es mv

Puesto que $E = hf$ para un fotón, su cantidad de movimiento se relaciona con su longitud de onda mediante

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad \textbf{(37–5)}$$

EJEMPLO 37–6 ESTIMACIÓN Cantidad de movimiento y fuerza de un fotón. Suponga que los 10^{19} fotones emitidos por segundo de la bombilla de 100 W en el ejemplo 37-4 se enfocaron todos sobre un trozo de papel negro y se absorbieron. *a*) Calcule la cantidad de movimiento de un fotón y *b*) estime la fuerza que todos estos fotones podrían ejercer sobre el papel.

PLANTEAMIENTO La cantidad de movimiento de cada fotón se obtiene a partir de la ecuación 37-5, $p = h/\lambda$. A continuación, la cantidad de movimiento de cada fotón absorbido cambia de $p = h/\lambda$ a cero. Use la segunda ley de Newton, $F = \Delta p/\Delta t$, para obtener la fuerza. Sea $\lambda = 500$ nm.

SOLUCIÓN *a*) Cada fotón tiene una cantidad de movimiento

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{500 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 1.3 \times 10^{-27}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

b) Con la segunda ley de Newton para $N = 10^{19}$ fotones (ejemplo 37-4), cuya cantidad de movimiento cambia de h/λ a 0, se obtiene

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{Nh/\lambda - 0}{1\,\text{s}} = N\frac{h}{\lambda} \approx (10^{19}\,\text{s}^{-1})(10^{-27}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}) \approx 10^{-8}\,\text{N}.$$

Ésta es una fuerza pequeña, pero se puede ver que una fuente de luz muy fuerte podría ejercer una fuerza mensurable, y cerca del Sol o una estrella, la fuerza debida a los fotones en la radiación electromagnética podría ser considerable. Véase la sección 31-9.

EJEMPLO 37–7 Fotosíntesis. En la *fotosíntesis*, pigmentos como la clorofila en las plantas capturan la energía de la luz solar para convertir el CO_2 en carbohidrato útil. Se necesitan aproximadamente nueve fotones para transformar una molécula de CO_2 a carbohidrato y O_2. Suponiendo luz con longitud de onda $\lambda = 670$ nm (la clorofila absorbe con más intensidad en el intervalo de 650 nm a 700 nm), ¿qué tan eficiente es el proceso fotosintético? La reacción química inversa libera una energía de 4.9 eV/molécula de CO_2.

PLANTEAMIENTO La eficiencia es la energía mínima requerida (4.9 eV) dividida entre la energía real absorbida, nueve veces la energía (hf) de un fotón.

SOLUCIÓN La energía de nueve fotones, cada uno de energía $hf = hc/\lambda$, es $(9)(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s})/(6.7 \times 10^{-7}\,\text{m}) = 2.7 \times 10^{-18}\,\text{J}$ o 17 eV. Por lo tanto, el proceso es (4.9 eV/17 eV) = 29% eficiente.

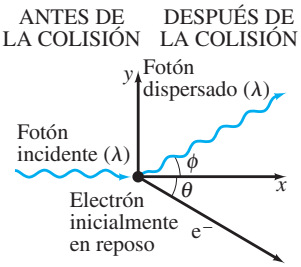
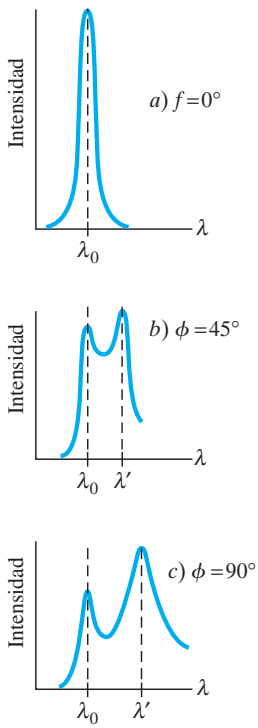


FIGURA 37–7 El efecto Compton. Un solo fotón con longitud de onda λ choca con un electrón en algún material, y lo saca de su átomo. El fotón dispersado tiene menos energía (parte de la energía se entrega al electrón) y, por lo tanto, tiene una longitud de onda mayor λ'.

FIGURA 37–8 Gráficas de intensidad de la radiación dispersada desde un blanco como grafito (carbono), para tres diferentes ángulos. Los valores para λ' coinciden con la ecuación 37-6. Para *a*) $\phi = 0°$, $\lambda' = \lambda_0$. En *b*) y *c*), se encontró un pico no sólo en λ' debido a fotones dispersos de electrones libres (o casi libres), sino también un pico casi precisamente en λ_0. Esto último se debe a la dispersión de electrones ligados muy firmemente a sus átomos, de manera que la masa en la ecuación 37-6 se vuelve muy grande (masa del átomo) y $\Delta\lambda$ se vuelve muy pequeña.



37–4 Efecto Compton

Además del efecto fotoeléctrico, a principios del siglo XX se realizaron algunos otros experimentos que también apoyaron la teoría fotónica. Uno de tales experimentos permitió conocer el **efecto Compton** (1923), llamado así en honor de su descubridor, A. H. Compton (1892-1962). Compton dispersó luz con longitud de onda corta (en realidad rayos X) de varios materiales. Encontró que la luz dispersada tenía una longitud de onda ligeramente más larga que la luz incidente, y por lo tanto una frecuencia ligeramente menor, lo que indicaba una pérdida de energía. Él explicó este resultado sobre la base de la teoría fotónica, como fotones incidentes que chocaban con electrones del material (figura 37-7). Con la ecuación 37-5 para cantidad de movimiento de un fotón, Compton aplicó las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía a la colisión de la figura 37-7, y dedujo la siguiente ecuación para la longitud de onda de los fotones dispersados:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\phi), \qquad \textbf{(37–6a)}$$

donde m_e es la masa del electrón. Para $\phi = 0$, la longitud de onda no cambia (no hay colisión para este caso del fotón que pasa en línea recta). A cualquier otro ángulo, λ' es mayor que λ. La diferencia en longitud de onda,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\phi), \qquad \textbf{(37–6b)}$$

se llama **corrimiento Compton**. La cantidad $h/m_e c$, que tiene las dimensiones de longitud, se llama **longitud de onda Compton** λ_C de un electrón libre,

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-3}\,\text{nm} = 2.43\,\text{pm}. \qquad \text{[electrón]}$$

Las ecuaciones 37-6 predicen que λ' depende del ángulo ϕ al que los fotones se detectan. Las mediciones de Compton de 1923 fueron congruentes con esta fórmula, lo que confirmó el valor de λ_C y la dependencia de λ' con respecto a ϕ. Véase la figura 37-8. La teoría ondulatoria de la luz predice que no hay corrimiento de longitud de onda: una onda electromagnética entrante con frecuencia f debería poner a los electrones a oscilar con la misma frecuencia f, y tales electrones en oscilación deberían volver a emitir ondas EM de esta misma frecuencia f (capítulo 31), y no cambiarían con el ángulo ϕ. De esta forma, el efecto Compton se agrega al firme cimiento experimental para la teoría fotónica de la luz.

EJERCICIO C Cuando un fotón se dispersa a partir de un electrón mediante el efecto Compton, ¿cuál de los siguientes aumenta: su energía, frecuencia o longitud de onda?

EJEMPLO 37–8 **Dispersión de rayos X.** Rayos X con longitud de onda de 0.140 nm se dispersan en una rebanada muy delgada de carbono. ¿Cuáles serán las longitudes de onda de los rayos X dispersados a *a*) 0°, *b*) 90°, *c*) 180°?

PLANTEAMIENTO Éste es un ejemplo del efecto Compton, y se emplea la ecuación 37-6a para encontrar las longitudes de onda.

SOLUCIÓN *a*) Para $\phi = 0°$, $\cos\phi = 1$ y $1 - \cos\phi = 0$. Entonces la ecuación 37-6 da $\lambda' = \lambda = 0.140$ nm. Esto tiene sentido pues, para $\phi = 0°$, en realidad no hay colisión alguna ya que el fotón pasa en línea recta sin interactuar.

b) Para $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ y $1 - \cos\phi = 1$. De manera que

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} = 0.140\,\text{nm} + \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}$$
$$= 0.140\,\text{nm} + 2.4 \times 10^{-12}\,\text{m} = 0.142\,\text{nm};$$

esto es, la longitud de onda es más larga por una longitud de onda Compton (= 0.0024 nm para un electrón).

c) Para $\phi = 180°$, lo cual significa que el fotón se dispersa hacia atrás, regresando a la dirección de donde vino (una colisión "frontal" directa), $\cos\phi = -1$, y $1 - \cos\phi = 2$. De esta manera,

$$\lambda' = \lambda + 2\frac{h}{m_e c} = 0.140\,\text{nm} + 2(0.0024\,\text{nm}) = 0.145\,\text{nm}.$$

NOTA El máximo corrimiento en longitud de onda ocurre para la dispersión hacia atrás, y es el doble de la longitud de onda Compton.

FÍSICA APLICADA
Medición de la densidad ósea

El efecto Compton permite diagnosticar enfermedades óseas como la osteoporosis. Rayos gamma, que son fotones con longitud de onda todavía menor que la de los rayos X, provenientes de una fuente radiactiva se dispersan a partir del material óseo. La intensidad total de la radiación dispersada es proporcional a la densidad de los electrones, que a la vez es proporcional a la densidad ósea. Los cambios en la densidad del hueso pueden indicar el inicio de osteoporosis.

*Deducción del corrimiento Compton

Si el fotón entrante en la figura 37-7 tiene longitud de onda λ, entonces su energía total y cantidad de movimiento son

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{y} \quad p = \frac{h}{\lambda}.$$

Después de la colisión de la figura 37-7, el fotón dispersado al ángulo ϕ tiene una longitud de onda a la que se llama λ'. Su energía y cantidad de movimiento son

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} \quad \text{y} \quad p' = \frac{h}{\lambda'}.$$

El electrón, que se supone en reposo antes de la colisión pero libre de moverse cuando es golpeado, se dispersa a un ángulo θ, como se muestra en la figura 37-8. La energía cinética del electrón es (véase la ecuación 36-10):

$$K_e = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) m_e c^2$$

donde m_e es la masa del electrón y v su rapidez. La cantidad de movimiento del electrón es

$$p_e = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} m_e v.$$

Aplicamos la conservación de energía a la colisión (véase la figura 37-7):

$$\text{fotón entrante} \rightarrow \text{fotón dispersado} + \text{electrón}$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) m_e c^2.$$

Aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento a las componentes x y y de la cantidad de movimiento:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + \frac{m_e v \cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\operatorname{sen}\phi - \frac{m_e v \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Se pueden combinar estas tres ecuaciones para eliminar v y θ, y se obtiene, como Compton hizo, una ecuación para la longitud del fotón dispersado en términos de su ángulo de dispersión ϕ:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\phi),$$

que es la ecuación 37-6a.

37–5 Interacciones de fotones; producción de pares

Cuando un fotón pasa a través de la materia, interactúa con los átomos y electrones. Existen cuatro tipos importantes de interacciones que un fotón puede experimentar:

1. El *efecto fotoeléctrico*: Un fotón puede sacar un electrón de un átomo y, en el proceso, el fotón desaparece.
2. El fotón puede sacar un electrón atómico a un estado energético superior en el átomo si su energía no es suficiente para sacar por completo al electrón. En este proceso el fotón también desaparece y entrega toda su energía al átomo. Se dice entonces que tal átomo está en un *estado excitado*, algo que estudiaremos más adelante.
3. El fotón puede dispersarse a partir de un electrón (o un núcleo) y, en el proceso, perder algo de energía; éste es el *efecto Compton* (figura 37-7). Pero note que el fotón no se frena. Todavía viaja con rapidez c, pero su frecuencia será menor porque perdió algo de energía.
4. *Producción de pares:* Un fotón realmente puede crear materia, como la producción de un electrón y un positrón, figura 37-9. (Un positrón tiene la misma masa que un electrón, pero con carga opuesta, $+e$).

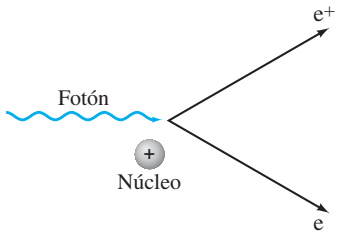


FIGURA 37–9 Producción de pares: un fotón desaparece y produce un electrón y un positrón.

En el proceso 4, **producción de pares**, el fotón desaparece al crearse el par electrón-positrón. Éste es un ejemplo de masa creada a partir de energía pura, y ocurre en concordancia con la ecuación de Einstein $E = mc^2$. Advierta que un fotón no puede crear un electrón solo, pues entonces la carga eléctrica no se conservaría. El inverso de la producción de pares también ocurre: si un electrón choca con un positrón, ambos se **aniquilan** y sus energías, incluidas sus masas, aparecen como energía electromagnética de fotones. A causa de este proceso, los positrones generalmente no duran mucho tiempo en la naturaleza.

EJEMPLO 37–9 **Producción de pares.** *a*) ¿Cuál es la energía mínima de un fotón capaz de producir un par electrón-positrón? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón?

PLANTEAMIENTO La mínima energía E de un fotón es igual a la energía en reposo (mc^2) de las dos partículas creadas, de acuerdo con la famosa ecuación de Einstein $E = m_0c^2$ (ecuación 36-12). No hay energía restante, de manera que las partículas producidas tendrán energía cinética igual a cero. La longitud de onda es $\lambda = c/f$, donde $E = hf$ para el fotón original.

SOLUCIÓN *a*) Puesto que $E = mc^2$, y la masa creada es igual a la masa de dos electrones, el fotón debe tener energía

$$E = 2(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s})^2 = 1.64 \times 10^{-13}\,\text{J} = 1.02\,\text{MeV}$$

$(1\,\text{MeV} = 10^{6}\,\text{eV} = 1.60 \times 10^{-13}\,\text{J})$. Un fotón con menos energía no puede experimentar producción de pares.

b) Puesto que $E = hf = hc/\lambda$, la longitud de onda de un fotón de 1.02 MeV es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{(1.64 \times 10^{-13}\,\text{J})} = 1.2 \times 10^{-12}\,\text{m},$$

que es 0.0012 nm. Tales fotones están en la región de los rayos gamma (o rayos X muy cortos) del espectro electromagnético (figura 31-12).

NOTA Los fotones de mayor energía (menor longitud de onda) también pueden crear un par electrón-positrón, con la energía en exceso convertida en energía cinética de las partículas.

La producción de pares no ocurre en espacio vacío, pues la cantidad de movimiento no podría conservarse. Así, en el ejemplo 37-9, la energía se conserva, pero sólo se suministró suficiente energía para crear el par electrón-positrón en reposo, y por ende con cantidad de movimiento cero, lo que no podría igualar la cantidad de movimiento inicial del fotón. De hecho, es posible demostrar que, a cualquier energía, un objeto masivo adicional, como un núcleo atómico, debe tomar parte en la interacción para llevarse algo de la cantidad de movimiento.

37–6 Dualidad onda-partícula; el principio de complementariedad

El efecto fotoeléctrico, el efecto Compton y otros experimentos colocaron la teoría corpuscular de la luz sobre una firme base experimental. Pero, ¿qué hay de los experimentos clásicos de Young y otros (capítulos 34 y 35) acerca de interferencia y difracción, los cuales demostraron que la teoría ondulatoria de la luz también descansa sobre una firme base experimental?

Parece haber un dilema. Algunos experimentos indican que la luz se comporta como una onda; otros indican que se comporta como una corriente de partículas. Estas dos teorías parecen ser incompatibles, pero ambas demostraron tener validez. Los físicos finalmente llegaron a la conclusión de que esta dualidad de la luz se debe aceptar como un hecho de la vida. Se le conoce como la **dualidad onda-partícula**. Aparentemente, la luz es un fenómeno más complejo que una simple onda o un simple haz de partículas.

Para clarificar la situación, el gran físico danés Niels Bohr (1885-1962, figura 37-10) propuso su famoso **principio de complementariedad**. En él afirma que, para comprender un experimento, a veces se encuentra una explicación con la teoría ondulatoria y en ocasiones con la teoría corpuscular. Aunque si uno quiere tener una comprensión completa de la luz, debe estar consciente de los aspectos ondulatorio y corpuscular de la luz. Por lo tanto, estos dos aspectos de la luz se complementan mutuamente.

No es fácil "visualizar" esta dualidad. No se puede imaginar con facilidad una combinación de onda y partícula. En vez de ello, se debe reconocer que los dos aspectos de la luz son diferentes "rostros" que la luz presenta a los experimentadores.

Parte de la dificultad surge de los procesos de pensamiento. Las imágenes (o modelos) visuales en la mente se basan en lo que se ve en el mundo cada día. Los conceptos de onda y partícula se aplican a la luz porque, en el mundo macroscópico, uno ve que la energía se transfiere de un lugar a otro mediante estos dos métodos. No se puede ver directamente si la luz es una onda o una partícula, así que se realizan experimentos indirectos. Para explicar los experimentos, se aplican los modelos de ondas o de partículas a la naturaleza de la luz. Pero éstas son abstracciones de la mente humana. Cuando se trata de concebir qué "es" en realidad la luz, se insiste en una imagen visual. Aunque no hay razón por la cual la luz deba conformarse a esos modelos (o imágenes visuales) tomados del mundo macroscópico. La "verdadera" naturaleza de la luz, si eso significa algo, no es posible de visualizar. Por eso es importante reconocer que el conocimiento está limitado a los experimentos indirectos, y que, en términos del lenguaje y las imágenes cotidianas, la luz revela propiedades tanto de onda como de partícula.

Vale la pena hacer notar que la ecuación de Einstein $E = hf$ en sí misma vincula las propiedades corpusculares y ondulatorias de un haz de luz. En esta ecuación, E se refiere a la energía de una partícula; y en el otro lado de la ecuación, se tiene la frecuencia f de la onda correspondiente.

FIGURA 37–10 Niels Bohr (derecha) camina junto a Enrico Fermi en la Vía Appia, afuera de Roma. Esta fotografía muestra una importante forma como se hace la física.

⚠ **CUIDADO**

No es correcto decir que la luz es una onda y/o una partícula. La luz puede **actuar** *como una onda o como una partícula.*

37–7 Naturaleza ondulatoria de la materia

En 1923 Louis de Broglie (1892-1987) extendió la idea de la dualidad onda-partícula. Él apreció la *simetría* en la naturaleza y argumentó que, si la luz a veces se comporta como onda y a veces como partícula, entonces tal vez aquellas cosas en la naturaleza que se consideraban partículas, como los electrones y otros objetos materiales, también podrían tener propiedades ondulatorias. De Broglie propuso que la longitud de onda de una partícula material se relacionaría con su cantidad de movimiento en la misma forma que para un fotón, ecuación 37-5, $p = h/\lambda$. Esto es, para una partícula que tenga cantidad de movimiento lineal $p = mv$, la longitud de onda λ estará dada por

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad \textbf{(37–7)}$$

y es válida de manera clásica ($p = mv$ para $v \ll c$) y relativista ($p = \gamma mv = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$). A esto en ocasiones se le llama la **longitud de onda de De Broglie** de una partícula.

EJEMPLO 37–10 **Longitud de onda de una pelota.** Calcule la longitud de onda de De Broglie de una pelota de 0.20 kg que viaja con una rapidez de 15 m/s.

PLANTEAMIENTO Use la ecuación 37-7.

SOLUCIÓN $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{(6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})}{(0.20\,\mathrm{kg})(15\,\mathrm{m/s})} = 2.2 \times 10^{-34}\,\mathrm{m}.$

Los objetos de tamaño ordinario, como la pelota del ejemplo 37-10, tienen longitudes de onda increíblemente pequeñas. Incluso si la rapidez fuera extremadamente pequeña, por ejemplo, de 10^{-4} m/s, la longitud de onda sería de más o menos 10^{-29} m. De hecho, la longitud de onda de cualquier objeto ordinario es demasiado pequeña para medirse y detectarse. El problema es que las propiedades de las ondas, como interferencia y difracción, sólo son significativas cuando el tamaño de los objetos o las rendijas no es mucho mayor que la longitud de onda. Y no existen objetos conocidos o rendijas que difracten ondas de sólo 10^{-30} m de largo, así que las propiedades ondulatorias de los objetos ordinarios no son detectables.

Pero las pequeñas partículas elementales, como los electrones, son otra cuestión. Puesto que la masa m aparece en el denominador de la ecuación 37-7, una masa muy pequeña debe tener una longitud de onda mucho mayor.

EJEMPLO 37–11 **Longitud de onda de un electrón.** Determine la longitud de onda de un electrón que se acelera a través de una diferencia de potencial de 100 V.

PLANTEAMIENTO Si la energía cinética es mucho menor que la energía en reposo, se puede usar la fórmula clásica, $K = \frac{1}{2}mv^2$ (véase la sección 36-11). Para un electrón, $mc^2 = 0.511$ MeV. Entonces aplique la conservación de energía: la energía cinética adquirida por el electrón es igual a su pérdida en energía potencial. Después de despejar v, se usa la ecuación 37-7 para encontrar la longitud de onda de De Broglie.

SOLUCIÓN Ganancia en energía cinética es igual a pérdida en energía potencial: $\Delta U = eV - 0$. Por lo tanto, $K = eV$, de manera que $K = 100$ eV. La razón $K/mc^2 = 100\ \mathrm{eV}/(0.511 \times 10^6\ \mathrm{eV}) \approx 10^{-4}$, así que no es necesaria la relatividad. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

y

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(100\,\mathrm{V})}{(9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})}} = 5.9 \times 10^6\,\mathrm{m/s}.$$

Luego,

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})}{(9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})(5.9 \times 10^6\,\mathrm{m/s})} = 1.2 \times 10^{-10}\,\mathrm{m},$$

o 0.12 nm.

EJERCICIO D Conforme una partícula viaja más rápido, ¿su longitud de onda de De Broglie disminuye, aumenta o permanece igual?

FIGURA 37–11 Patrón de difracción de electrones dispersados de una hoja de aluminio, registrado en película.

Del ejemplo 37-11 se ve que los electrones pueden tener longitudes de onda en el orden de 10^{-10} m, e incluso menores. Aunque pequeña, esta longitud de onda se puede detectar: la separación de los átomos en un cristal está en el orden de 10^{-10} m y el arreglo ordenado de los átomos en un cristal se puede usar como un tipo de rejilla de difracción, como se hizo anteriormente con los rayos X (véase la sección 35-10). C. J. Davisson y L. H. Germer realizaron un experimento crucial; dispersaron electrones de la superficie de un cristal metálico y, a principios de 1927, observaron que los electrones se dispersaban en un patrón de picos regulares. Cuando interpretaron esos picos como un patrón de difracción, descubrieron que la longitud de onda del electrón difractado era justo la predicha por De Broglie, ecuación 37-7. En el mismo año, G. P. Thomson (hijo de J. J. Thomson) utilizó un arreglo experimental diferente y también detectó difracción de electrones. (Véase la figura 37-11. Compárela con la difracción de rayos X, sección 35-10.) Experimentos posteriores demostraron que protones, neutrones y otras partículas también tienen propiedades ondulatorias.

En consecuencia, la dualidad onda-partícula se aplica a objetos materiales, así como a la luz. El principio de complementariedad se aplica también a la materia. Esto es, debemos estar conscientes de ambos aspectos, corpuscular y ondulatorio, para comprender la materia, incluidos los electrones. Pero de nuevo debemos reconocer que no es posible una imagen visual de una "onda-partícula".

EJEMPLO 37–12 **Difracción de electrones.** La naturaleza ondulatoria de los electrones se manifiesta en experimentos donde un haz de electrones interactúa con los átomos en la superficie de un sólido. Al estudiar la distribución angular de los electrones difractados, es posible medir indirectamente el arreglo geométrico de los átomos. Suponga que los electrones inciden de manera perpendicular sobre la superficie de un sólido (véase la figura 37-12) y que su energía es baja, $K = 100$ eV, de manera que interactúan sólo con la capa superficial de átomos. Si el ángulo más pequeño al que ocurre máxima difracción es de 24°, ¿cuál es la separación d entre los átomos en la superficie?

SOLUCIÓN Al tratar a los electrones como ondas, es necesario determinar la condición donde la diferencia en trayectoria recorrida por la onda difractada de los átomos adyacentes es un múltiplo entero de la longitud de onda de De Broglie, de manera que ocurre interferencia constructiva. La diferencia en longitud de trayectoria es d sen θ; así que, para el valor más pequeño de θ se debe tener

$$d \operatorname{sen}\theta = \lambda.$$

Sin embargo, λ se relaciona con la energía cinética (no relativista) K mediante

$$K = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2}.$$

Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(100\,\text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})}} = 0.123\,\text{nm}.$$

El espaciamiento interatómico en la superficie es

$$d = \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{0.123\,\text{nm}}{\operatorname{sen} 24^\circ} = 0.30\,\text{nm}.$$

FÍSICA APLICADA
Difracción de electrones

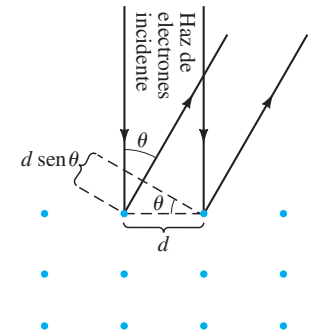


FIGURA 37–12 Ejemplo 37-12. Los puntos representan átomos en un arreglo ordenado en un sólido.

EJERCICIO E Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 987, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

¿Qué es un electrón?

Uno tal vez se pregunte: ¿qué es un electrón? Los primeros experimentos de J. J. Thomson (sección 27-7) indicaron un destello en un tubo, y ese destello se movió cuando se aplicó un campo magnético. Los resultados de éstos y otros experimentos se interpretaron mejor al considerarlos como provocados por pequeñas partículas con carga negativa, que ahora se llaman electrones. Sin embargo, nadie en realidad ha visto directamente un electrón. Los dibujos que a veces se hacen de los electrones, como pequeñas esferas con una carga negativa, son simples representaciones convenientes (ahora reconocidas como imprecisas). De nuevo, debemos apoyarnos en resultados experimentales, algunos de los cuales se interpretan mejor con el modelo corpuscular y otros con el modelo ondulatorio. Estos modelos son meras imágenes que se usan para extrapolar del mundo macroscópico al pequeño mundo microscópico del átomo. Y no hay razón para esperar que estos modelos reflejen de algún modo la realidad de un electrón. Por lo tanto, uno usa un modelo de onda o de partícula (cualquiera que funcione mejor en una situación) de manera que pueda hablar de lo que ocurre. Pero ello no debe conducir a creer que un electrón *es* una onda o una partícula. En vez de ello, podríamos decir que un electrón es el conjunto de sus propiedades que se pueden medir. Bertrand Russell tenía razón cuando escribió que un electrón es "una construcción lógica".

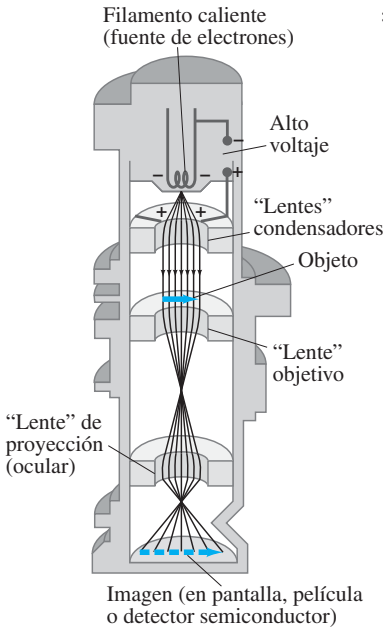
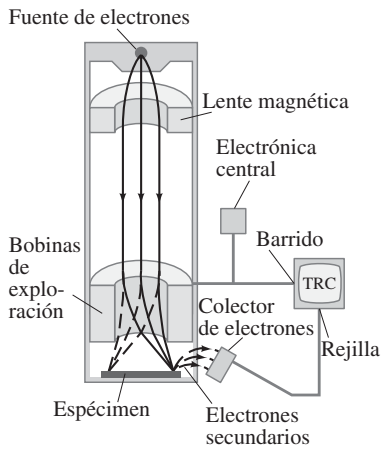


FIGURA 37–13 Microscopio electrónico de transmisión. Las bobinas de campo magnético están diseñadas para ser "lentes magnéticas", las cuales desvían las trayectorias de los electrones y los llevan a un foco, como se muestra.

FÍSICA APLICADA

Microscopio electrónico

FIGURA 37–14 Microscopio electrónico de barrido. Bobinas de exploración dirigen un haz de electrones atrás y adelante a través del espécimen. Se recolectan electrones secundarios, que se producen cuando el haz incide sobre el espécimen, y éstos se encargan de modular la intensidad del haz en el TRC para producir una imagen.



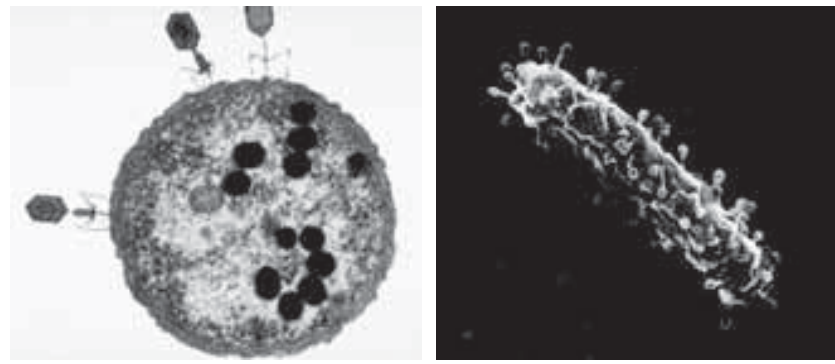
*37–8 Microscopios electrónicos

La idea de que los electrones tienen propiedades ondulatorias condujo al desarrollo del **microscopio electrónico**, el cual produce imágenes mucho más amplificadas que un microscopio óptico. Las figuras 37-13 y 37-14 son diagramas de dos tipos, desarrollados alrededor de mediados del siglo XX: el **microscopio electrónico de transmisión**, que produce imágenes bidimensionales, y el **microscopio electrónico de barrido** (SEM, por las siglas de *scanning electron microscope*), que produce imágenes con una calidad tridimensional. En ambos tipos, las lentes de objetivo y ocular en realidad son campos magnéticos que ejercen fuerzas sobre los electrones para llevarlos a un foco. Los campos se producen mediante bobinas de alambre portadoras de corriente cuidadosamente diseñadas. En la figura 37-15 se presentan fotografías con cada tipo

Como se estudió en la sección 35-5, la máxima resolución de detalles en un objeto es aproximadamente del tamaño de la longitud de onda de la radiación que se usa para verlo. Los electrones acelerados por voltajes en el orden de 10^5 V tienen longitudes de onda de aproximadamente 0.004 nm. La máxima resolución que se puede lograr estaría en este orden, pero en la práctica, aberraciones en las lentes magnéticas limitan la resolución en los microscopios electrónicos de transmisión cuando mucho de aproximadamente 0.1 a 0.5 nm. Esto todavía es 10^3 veces mejor que la resolución que se logra con un microscopio de luz visible, y corresponde a una amplificación útil de más o menos un millón. Tales amplificaciones son difíciles de lograr, y las amplificaciones más comunes son de 10^4 a 10^5. La máxima amplificación que se alcanza con un microscopio electrónico de barrido es un poco menor, por lo general de 5 a 10 nm, aunque los nuevos SEM de alta resolución se aproximan a 1 nm.

En el siguiente capítulo se estudian otros complejos microscopios electrónicos (sección 38-10).

FIGURA 37–15 Micrografías electrónicas de virus que atacan una célula de la bacteria *Escherichia coli*: *a*) micrografía electrónica de transmisión (≈50,000×); *b*) micrografía electrónica de barrido (≈35,000×).



a) *b*)

37–9 Primeros modelos atómicos

Hacia 1900 la mayoría de los científicos aceptaron la idea de que la materia está constituida por átomos. Con el descubrimiento del electrón en la década de 1890, los científicos comenzaron a pensar en el átomo mismo como poseedor de una estructura con electrones como parte de tal estructura. Ahora se presenta el enfoque moderno al átomo y la teoría cuántica con la que se entremezcla.[†]

[†]Tal vez algunos lectores digan: "Cuéntenos los hechos como los conocemos en la actualidad, y no nos moleste con el antecedente histórico y sus teorías fuera de moda". Tal enfoque ignoraría el aspecto creativo de la ciencia y, por ende, daría una falsa impresión de cómo se desarrolla la actividad científica. Más aún, en realidad no es posible entender la visión actual del átomo sin adentrarse en los conceptos que condujeron a ella.

Un modelo típico del átomo en la década de 1890 visualizó al átomo como una esfera homogénea de carga positiva dentro de la cual había pequeños electrones con carga negativa, un poco como las pasas en un pudín, figura 37-16.

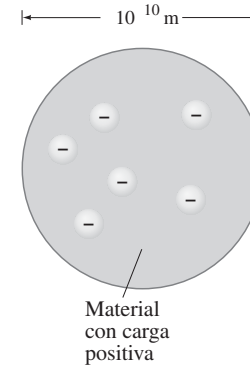


FIGURA 37–16 Modelo del pudín de pasas del átomo.

Alrededor de 1911, Ernest Rutherford (1871-1937) y sus colegas realizaron experimentos cuyos resultados contradijeron el modelo de pudín de pasas del átomo. En estos experimentos, un haz de partículas alfa (α) con carga positiva se dirigió hacia una delgada hoja metálica como el oro, figura 37-17a. (Estas partículas α recientemente descubiertas eran emitidas por ciertos materiales radiactivos y pronto se demostró que eran átomos de helio doblemente ionizados; esto es, con una carga de $+2e$). A partir del modelo del pudín de pasas se esperaba que las partículas alfa no se desviaran significativamente, porque los electrones eran mucho más ligeros que las partículas alfa, y las partículas alfa no encontrarían ninguna concentración masiva de carga positiva para repelerlos con fuerza. Los resultados experimentales contradijeron por completo estas predicciones. Se descubrió que la mayoría de las partículas alfa pasaban a través de la hoja sin problemas, como si la hoja fuera principalmente espacio vacío. Y de las partículas alfa que se desviaban, algunas se desviaban a ángulos muy grandes, unas incluso hacia atrás, casi en la dirección desde la cual llegaron. Esto podría ocurrir, razonó Rutherford, sólo si las partículas alfa con carga positiva se repelían mediante una masiva carga positiva concentrada en una región muy pequeña del espacio (véase la figura 37-17b). Rutherford consideró la hipótesis de que el átomo debe consistir en un pequeño pero masivo núcleo con carga positiva, que contiene el 99.9% de la masa del átomo,

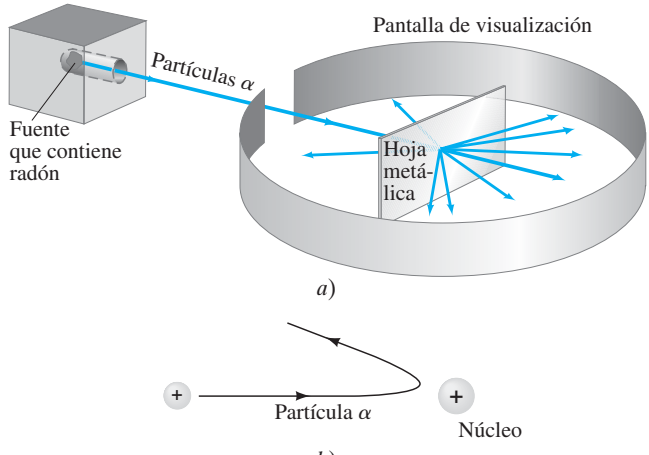
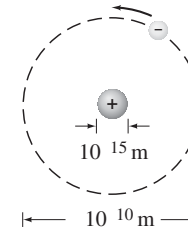


FIGURA 37–17 *a*) Configuración para el experimento de Rutherford: las partículas α emitidas por radón se desviaban mediante una delgada hoja metálica y algunas rebotaban hacia atrás; *b*) el rebote hacia atrás de las partículas α, explicada como la repulsión desde un pesado núcleo con carga positiva.

rodeado por electrones a cierta distancia. Los electrones estarían moviéndose en órbitas en torno al núcleo, en gran medida como los planetas giran alrededor del Sol, porque, si estuvieran en reposo, tenderían hacia el núcleo por la atracción eléctrica, figura 37-18. Los experimentos de Rutherford sugirieron que el núcleo debía tener un radio de aproximadamente 10^{-15} a 10^{-14} m. A partir de la teoría cinética, y especialmente a partir del análisis de Einstein del movimiento browniano (véase la sección 17-1), se estimó que el radio de los átomos era de alrededor de 10^{-10} m. Por consiguiente, los electrones estarían a una distancia aproximada del núcleo de 10,000 a 100,000 veces el radio del núcleo. (Si el núcleo tuviera el tamaño de una pelota de béisbol, el átomo tendría el diámetro de una gran ciudad de varios kilómetros de extensión). Así que el átomo sería principalmente espacio vacío.

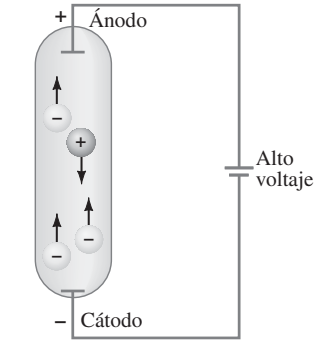
FIGURA 37–18 Modelo de Rutherford del átomo, en el que los electrones giran en torno a un pequeño núcleo positivo (no a escala). El átomo se visualiza principalmente como espacio vacío.



El modelo "planetario" del átomo de Rutherford (también llamado "modelo nuclear del átomo") fue un importante paso hacia la concepción actual del átomo. Sin embargo, no fue un modelo completo y presentó algunos grandes problemas, como se verá más adelante.

37–10 La clave para la estructura del átomo: Los espectros atómicos

Anteriormente en este capítulo se vio que los sólidos que se calientan (al igual que los líquidos y gases densos) emiten luz con un espectro continuo de longitudes de onda. Se supone que esta radiación se debe a oscilaciones de átomos y moléculas, las cuales están considerablemente gobernadas por la interacción de cada átomo o molécula con sus vecinos.



a)

b)

FIGURA 37–19 Tubo de descarga de gas: *a*) diagrama; *b*) fotografía de un tubo de descarga real para hidrógeno.

Los gases enrarecidos (gases poco densos) también se pueden excitar para emitir luz. Esto se hace mediante calentamiento intenso o, más comúnmente, al aplicar alto voltaje a un "tubo de descarga" que contiene el gas a baja presión, figura 37-19. La radiación de los gases excitados se observó en el siglo XIX, y se descubrió que el espectro no era continuo, sino *discreto*. Puesto que los gases excitados emiten luz sólo de ciertas longitudes de onda, cuando esta luz se analizó a través de la rendija de un espectroscopio o espectrómetro, en vez de un espectro continuo se observó un **espectro de líneas**. En la figura 37-20 y en el capítulo 35, figura 35-22, se muestran los espectros de líneas en la región visible que emiten algunos elementos. El **espectro de emisión** es característico del material y puede servir como un tipo de "huella digital" para identificar el gas.

También se vio (capítulo 35) que si un espectro continuo pasa a través de un gas enrarecido, se observan líneas oscuras en el espectro saliente, a longitudes de onda correspondientes a líneas normalmente emitidas por el gas. A esto se le llamó **espectro de absorción** (figura 37-20c) y quedó claro que los gases pueden absorber luz a las mismas frecuencias a las que emiten. Con película sensible a luz ultravioleta y a la infrarroja, se encontró que los gases emiten y absorben frecuencias discretas en estas regiones, así como en la región visible.

FIGURA 37–20 Espectros de emisión de los gases *a*) hidrógeno atómico, *b*) helio y *c*) espectro de *absorción solar*. (Véase el pliego a color al final del libro).

En los gases de baja densidad, los átomos están muy separados en promedio y, por lo tanto, se supone que la luz emitida o absorbida se debe a *átomos individuales* y no a interacciones entre átomos, como en un sólido, líquido o gas denso. En consecuencia, los espectros de líneas sirven como una clave para la estructura del átomo: cualquier teoría de estructura atómica debe ser capaz de explicar por qué los átomos sólo emiten luz de longitudes de ondas discretas, y debe predecir cuáles son estas longitudes de onda.

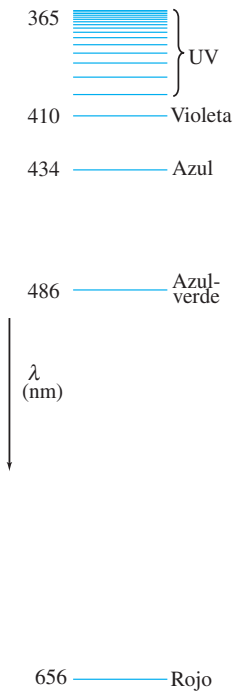
El hidrógeno es el átomo más simple: sólo tiene un electrón. También tiene el espectro más sencillo. El espectro de la mayoría de los átomos muestra poca regularidad aparente. Pero la separación entre líneas en el espectro del hidrógeno disminuye en una forma regular, figura 37-21. De hecho, en 1885, J. J. Balmer (1825-1898) demostró que las cuatro líneas en la porción visible del espectro del hidrógeno (con longitudes de onda medidas de 656 nm, 486 nm, 434 nm y 410 nm) tienen longitudes de onda que se ajustan a la fórmula

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 3, 4, \cdots. \tag{37–8}$$

Aquí, n toma los valores 3, 4, 5, 6 para las cuatro líneas visibles, y R, la llamada **constante de Rydberg**, tiene el valor $R = 1.0974 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Más tarde se descubrió que esta **serie de Balmer** de líneas se extendía hacia la región UV, y terminaba en $\lambda = 365$ nm, como se observa en la figura 37-21. La fórmula de Balmer, ecuación 37-8, también funcionó para estas líneas con valores enteros mayores de n. Las líneas cerca de 365 nm se juntaban mucho como para distinguirlas, pero el límite de la serie en 365 nm corresponde a $n = \infty$ (de manera que $1/n^2 = 0$ en la ecuación 37-8).

Experimentos posteriores con el hidrógeno demostraron que había series de líneas similares en las regiones UV e IR, y que cada serie tenía un patrón como la serie de Balmer, pero a diferentes longitudes de onda, figura 37-22. Cada una de estas series encajaba en una serie con la misma forma que la ecuación 37-8, pero con el $1/2^2$ sustituido por $1/1^2$, $1/3^2$, $1/4^2$, etcétera. Por ejemplo, la llamada **serie de Lyman** contiene

FIGURA 37–21 Series de líneas de Balmer para el hidrógeno.



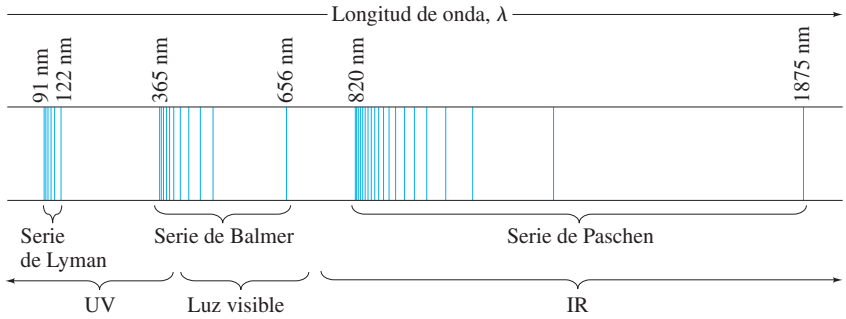


FIGURA 37–22 Espectro de líneas del hidrógeno atómico. Cada serie se ajusta a la fórmula $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, donde $n' = 1$ para la serie de Lyman, $n' = 2$ para la serie de Balmer, $n' = 3$ para la serie de Paschen, etcétera; n puede tomar todos los valores enteros, desde $n = n' + 1$ hasta infinito. Las únicas líneas en la región visible del espectro electromagnético son parte de la serie de Balmer.

líneas con longitudes de onda de 91 nm a 122 nm (en la región UV) y se ajusta a la fórmula

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 2, 3, \cdots.$$

Las longitudes de onda de la **serie de Paschen** (en la región IR) se ajusta a la fórmula

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 4, 5, \cdots.$$

El modelo de Rutherford no logró explicar por qué los átomos emiten espectros de líneas. También tenía otras dificultades. De acuerdo con el modelo de Rutherford, los electrones giran en órbita alrededor del núcleo y, puesto que sus trayectorias se curvan, los electrones están en aceleración. Por ende, deben emitir luz como cualquier otra carga en aceleración (capítulo 31), con una frecuencia igual a su frecuencia orbital. Como la luz transporta energía y la energía se conserva, la energía propia del electrón debe disminuir para compensar. En consecuencia, se esperaría que los electrones cayeran en espiral hacia el núcleo. Conforme cayeran en espiral hacia dentro, su frecuencia aumentaría en un corto tiempo y, por lo tanto, también lo haría la frecuencia de la luz emitida. Así que las dos principales dificultades con el modelo de Rutherford son las siguientes: **1.** predice que se emitirá luz de un rango continuo de frecuencias, mientras que los experimentos demuestran espectros de líneas; **2.** predice que los átomos son inestables (los electrones caerían rápidamente en espiral hacia el núcleo), pero se sabe que los átomos en general son estables, porque hay materia estable alrededor de todos nosotros.

Sin duda, el modelo de Rutherford no era suficiente. Era necesaria alguna especie de modificación, y Niels Bohr la aportó en un modelo que incluyó la hipótesis cuántica. Aunque el modelo de Bohr se considera obsoleto, constituyó un paso crucial para la comprensión actual. En la actualidad todavía son útiles algunos aspectos del modelo de Bohr, por lo que en la siguiente sección se le estudiará con detalle.

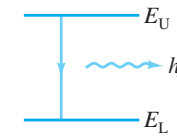
37–11 El modelo de Bohr

Bohr estudió en el laboratorio de Rutherford durante varios meses en 1912 y se convenció de que el modelo planetario del átomo de Rutherford tenía validez. Pero, para hacerlo funcionar, sintió que de algún modo tendría que incorporarle la recientemente desarrollada teoría cuántica. La obra de Planck y Einstein demostró que, en los sólidos calientes, la energía de las cargas eléctricas oscilando debe cambiar de manera discontinua, de un estado de energía discreto a otro, con la emisión de un cuanto de luz. Quizás —Bohr argumentó— los electrones en un átomo tampoco pueden perder energía de manera continua, sino que deben hacerlo en "saltos" cuánticos. Al trabajar su modelo durante el año siguiente, Bohr postuló que los electrones se mueven en torno al núcleo en órbitas circulares, pero que sólo se permiten ciertas órbitas. Además, postuló que un electrón en cada órbita tendría una energía definida y se movería en la órbita *sin irradiar energía* (aun cuando esto viole las ideas clásicas, pues se supone que las cargas eléctricas en aceleración emiten ondas EM; véase el capítulo 31). Por lo tanto, a las órbitas posibles las llamó **estados estacionarios**. Formuló la hipótesis de que la luz se emite sólo cuando un electrón salta de un estado estacionario más alto (superior) a otro de menor energía, figura 37-23. Cuando tal transición ocurre, se emite un solo fotón de luz, cuya energía, por conservación de la energía, está dada por

$$hf = E_U - E_L, \qquad \textbf{(37–9)}$$

donde E_U se refiere a la energía del estado superior y E_L a la energía del estado inferior.

FIGURA 37–23 Un átomo emite un fotón (energía = hf) cuando su energía cambia de E_U a una energía menor E_L.



Entre 1912 y 1913, Bohr se propuso determinar qué energías tendrían estas órbitas en el átomo más simple, el de hidrógeno; así, a partir de la ecuación 37-9 se podría predecir el espectro de la luz emitida. En la fórmula de Balmer tenía la clave que buscaba. Bohr rápidamente encontró que su teoría estaría en concordancia con la fórmula de Balmer si suponía que la cantidad de movimiento angular L del electrón estaba cuantizada y era igual a un entero n por $h/2\pi$. Como se vio en el capítulo 11, la cantidad de movimiento angular está dada por $L = I\omega$, donde I es el momento de inercia y ω es la velocidad angular. Para una sola partícula de masa m que se desplaza en un círculo de radio r con rapidez v, $I = mr^2$ y $\omega = v/r$; por lo tanto, $L = I\omega = (mr^2)(v/r) = mvr$. La **condición cuántica** de Bohr es

$$L = mvr_n = n\frac{h}{2\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{37–10}$$

donde n es un entero y r_n es el radio de la n-ésima órbita posible. Las órbitas permitidas se numeran 1, 2, 3,..., de acuerdo con el valor de n, que se llama **número cuántico principal** de la órbita.

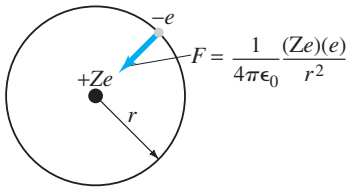


FIGURA 37–24 La fuerza eléctrica (ley de Coulomb) mantiene al electrón negativo en órbita alrededor del núcleo con carga positiva.

La ecuación 37-10 no tenía un firme cimiento teórico. Bohr buscaba alguna "condición cuántica", y los intentos como $E = hf$ (donde E representa la energía del electrón en una órbita) no dieron resultados en concordancia con el experimento. La razón por la que Bohr empleó la ecuación 37-10 fue simplemente porque funcionaba; y ahora se verá cómo. En particular, determinemos lo que predice la teoría de Bohr para las longitudes de onda mesurables de la luz emitida.

Un electrón en una órbita circular de radio r_n (figura 37-24) tendría una aceleración centrípeta v^2/r_n producida por la fuerza eléctrica de atracción entre el electrón negativo y el núcleo positivo. Esta fuerza está dada por la ley de Coulomb,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(Ze)(e)}{r_n^2}.$$

La carga en el núcleo es $+Ze$, donde Z es el número de cargas positivas[†] (es decir, protones). Para el átomo de hidrógeno, $Z = +1$.

En la segunda ley de Newton, $F = ma$, se sustituye la ley de Coulomb por F y $a = v^2/r_n$ para una órbita particular permitida con radio r_n, y se obtiene

$$F = ma$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n^2} = \frac{mv^2}{r_n}.$$

Se despeja r_n y luego se sustituye en donde está v (véase la ecuación 37-10, que dice que $v = nh/2\pi mr_n$):

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Ze^2 4\pi^2 mr_n^2}{4\pi\epsilon_0 n^2 h^2}.$$

Al despejar r_n (aparece en ambos lados, así que se cancela una de ellas) se encuentra

$$r_n = \frac{n^2h^2\epsilon_0}{\pi mZe^2} = \frac{n^2}{Z}r_1 \tag{37–11}$$

donde

$$r_1 = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}.$$

La ecuación 37-11 da los radios de todas las órbitas posibles. La órbita más pequeña es para $n = 1$, y para el hidrógeno ($Z = 1$) tiene el valor

$$r_1 = \frac{(1)^2(6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2(8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})}{(3.14)(9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})(1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}$$

[†]En la deducción se incluye Z, de manera que se puedan tratar otros átomos de un solo electrón ("hidrogenoides") como los iones He^+ ($Z = 2$) y Li^{2+} ($Z = 3$). El helio en el estado neutro tiene dos electrones: si un electrón se pierde, el ion He^+ restante consiste en un electrón que gira alrededor de un núcleo de carga $+2e$. De igual modo, el litio doblemente ionizado, Li^{2+}, también tiene un solo electrón y en este caso $Z = 3$.

o

$$r_1 = 0.529 \times 10^{-10}\,\text{m}. \qquad \textbf{(37–12)}$$

El radio de la menor órbita en el hidrógeno, r_1, a veces se llama **radio de Bohr**. A partir de la ecuación 37-11, se ve que los radios de las órbitas más grandes[†] aumentan como n^2, de manera que

$$\begin{aligned} r_2 &= 4r_1 = 2.12 \times 10^{-10}\,\text{m}, \\ r_3 &= 9r_1 = 4.76 \times 10^{-10}\,\text{m}, \\ &\vdots \\ r_n &= n^2 r_1 . \end{aligned}$$

En la figura 37-25 se muestran las primeras cuatro órbitas. Note que, de acuerdo con el modelo de Bohr, un electrón sólo puede existir en las órbitas dadas por la ecuación 37-11. No hay órbitas permitidas intermedias.

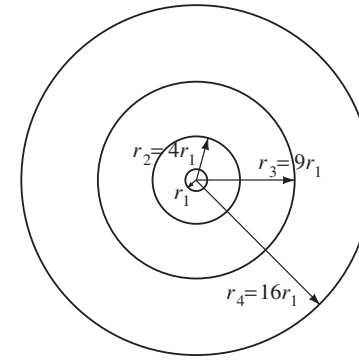


FIGURA 37–25 Las cuatro órbitas más pequeñas en el modelo de Bohr del hidrógeno; $r_1 = 0.529 \times 10^{-10}$ m.

Para un átomo con $Z \neq 1$, los radios orbitales, r_n, se pueden representar a partir de la ecuación 37-11:

$$r_n = \frac{n^2}{Z}\left(0.529 \times 10^{-10}\,\text{m}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad \textbf{(37–13)}$$

En cada una de sus órbitas posibles, el electrón tendría una energía definida, como indica el siguiente cálculo. La energía total es igual a la suma de las energías cinética y potencial. La energía potencial del electrón está dada por $U = qV = -eV$, donde V es el potencial debido a una carga puntual $+Ze$, según indica la ecuación 23-5: $V = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/r) = (1/4\pi\epsilon_0)(Ze/r)$. De manera que

$$U = -eV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r}.$$

La energía total E_n para un electrón en la n-ésima órbita de radio r_n es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_n = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n}.$$

Cuando se sustituye v de la ecuación 37-10 y r_n de la ecuación 37-11 en esta ecuación, se obtiene

$$E_n = -\left(\frac{Z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad \textbf{(37–14a)}$$

Si el término constante en la ecuación 37-14a se evalúa y se convierte a electrón volts, como es costumbre en física atómica, se obtiene

$$E_n = -(13.6\,\text{eV})\frac{Z^2}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad \textbf{(37–14b)}$$

El nivel de energía más bajo ($n = 1$) para el hidrógeno ($Z = 1$) es

$$E_1 = -13.6\,\text{eV}.$$

Como n^2 aparece en el denominador de la ecuación 37-14b, las energías de las órbitas más grandes en el hidrógeno ($Z = 1$) están dadas por

$$E_n = \frac{-13.6\,\text{eV}}{n^2}.$$

Por ejemplo,

$$E_2 = \frac{-13.6\,\text{eV}}{4} = -3.40\,\text{eV},$$

$$E_3 = \frac{-13.6\,\text{eV}}{9} = -1.51\,\text{eV}.$$

Se ve que no sólo los radios de las órbitas están cuantizados, sino, de acuerdo con las ecuaciones 37-14, también lo está la energía. El número cuántico n que indica los radios de las órbitas también indica los niveles de energía. El **nivel energético** o **estado energético** más bajo tiene energía E_1 y se llama **estado fundamental**. Los estados superiores, E_2, E_3 y demás, se llaman **estados excitados**. Los niveles de energía fijos también se llaman **estados estacionarios**.

[†]Tenga cuidado de no creer que estas órbitas bien definidas en realidad existen. En la actualidad, mejor se considera que los electrones forman "nubes", como se estudiará en el capítulo 39.

Advierta que, aunque la energía para las órbitas más grandes tiene un valor numérico menor, todas las energías son menores que cero. Por consiguiente, −3.4 eV es una energía más alta que −13.6 eV. Por lo tanto, la órbita más cercana al núcleo (r_1) tiene la energía más baja. La razón por la que las energías tienen valores negativos está relacionada con la forma como se define el cero para energía potencial (U). Para dos cargas puntuales, $U = (1/4\pi\epsilon_0)(q_1 q_2/r)$ corresponde a cero energía potencial cuando las dos cargas están infinitamente separadas. En consecuencia, un electrón que apenas puede liberarse del átomo al llegar a $r = \infty$ (o, al menos, lejos del núcleo) con energía cinética cero tendrá $E = 0$, que corresponde a $n = \infty$ en las ecuaciones 37-14. Si un electrón está libre y tiene energía cinética, entonces $E > 0$. Para remover un electrón que es parte de un átomo se requiere una entrada de energía (de otro modo, los átomos no serían estables). Puesto que $E \geq 0$ para un electrón libre, entonces un electrón ligado a un átomo necesita tener $E < 0$. Esto es, se debe agregar energía para elevar su energía, desde un valor negativo hasta al menos cero, y así poder liberarlo.

La energía mínima requerida para remover un electrón de un átomo inicialmente en el estado fundamental se llama **energía de enlace** o **energía de ionización**. La energía de ionización para el hidrógeno se midió en 13.6 eV y esto corresponde precisamente a remover un electrón del estado más bajo, $E_1 = -13.6$ eV, hasta $E = 0$, donde se puede liberar.

Explicación de las líneas espectrales

Es útil mostrar los diversos valores posibles de energía como líneas horizontales en un diagrama de niveles de energía. Esto se ilustra para el hidrógeno en la figura 37-26.[†] El electrón en un átomo de hidrógeno puede estar en uno de estos niveles, de acuerdo con la teoría de Bohr. Pero nunca podría estar en medio, por ejemplo, en −9.0 eV. A temperatura ambiente, casi todos los átomos de H estarán en el estado fundamental ($n = 1$). A temperaturas más altas, o durante una descarga eléctrica, cuando hay muchas colisiones entre electrones libres y átomos, muchos átomos pueden estar en estados excitados ($n > 1$). Una vez en un estado excitado, el electrón de un átomo puede saltar hacia un estado inferior y ceder un fotón en el proceso. Esto es, de acuerdo con el modelo de Bohr, el origen de los espectros de emisión de los gases excitados.

[†]Advierta que arriba de $E = 0$, un electrón es libre y puede tener cualquier energía (E no está cuantizada). Por lo tanto, hay un continuo de estados de energía por encima de $E = 0$, como se indica en el diagrama de niveles de energía de la figura 37-26.

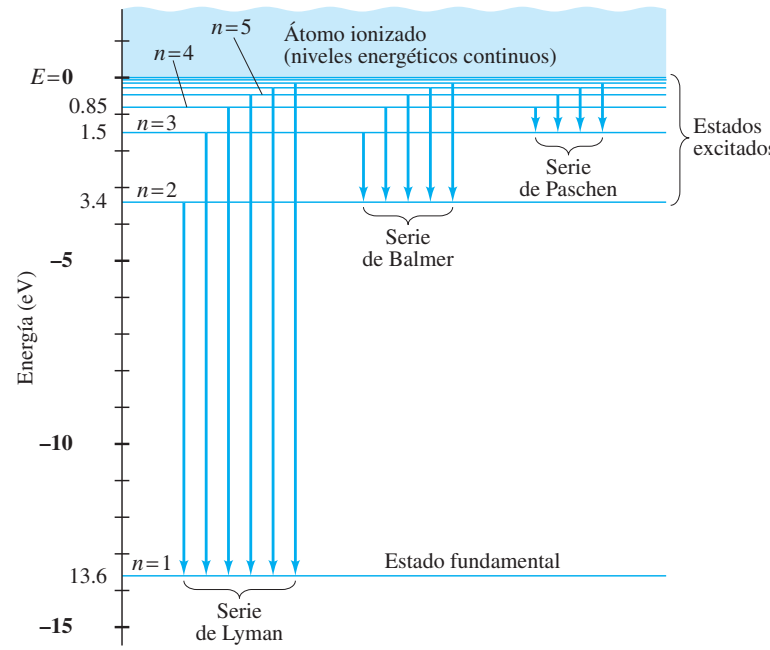


FIGURA 37–26 Diagrama de niveles energéticos para el átomo de hidrógeno, que muestra las transiciones para las líneas espectrales de las series de Lyman, Balmer y Paschen (figura 37-22). Cada flecha vertical representa una transición atómica que da lugar a los fotones de una línea espectral (una sola longitud de onda o frecuencia).

Las flechas verticales en la figura 37-26 representan las transiciones o saltos que corresponden a las diversas líneas espectrales observadas. Por ejemplo, un electrón que salta del nivel $n = 3$ a $n = 2$ originaría la línea 656 nm en la serie de Balmer, y el salto de $n = 4$ a $n = 2$ daría lugar a la línea 486 nm (véase la figura 37-21). Es posible predecir las longitudes de onda de las líneas espectrales emitidas al combinar las ecuaciones 37-9 y 37-14a. Puesto que $hf = hc/\lambda$, se tiene, de acuerdo con la ecuación 37-9,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{hf}{hc} = \frac{1}{hc}(E_n - E_{n'}),$$

donde n se refiere al estado superior y n' al estado inferior. Así, con la ecuación 37-14a,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2e^4m}{8\epsilon_0^2h^3c}\left(\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{(n)^2}\right). \qquad \textbf{(37–15)}$$

Esta fórmula teórica tiene la misma forma que la fórmula experimental de Balmer, ecuación 37-8, con $n' = 2$. Por consiguiente, se ve que la serie de líneas de Balmer corresponde a transiciones o "saltos" que bajan al electrón al segundo nivel energético. De igual modo, $n' = 1$ corresponde a la serie de Lyman y $n' = 3$ a la serie de Paschen (véase la figura 37-26).

Cuando la constante en la ecuación 37-15 se evalúa con $Z = 1$, se encuentra que tiene el valor medido de la constante de Rydberg, $R = 1.0974 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$ en la ecuación 37-8, en concordancia con el experimento (véase el problema 58).

El gran éxito del modelo de Bohr es que ofrece una explicación de por qué los átomos emiten espectros de líneas, y predice con exactitud las longitudes de onda de la luz emitida por el hidrógeno. El modelo de Bohr también explica los espectros de absorción: fotones justo de la longitud de onda correcta pueden sacar un electrón de un nivel energético y moverlo hacia uno superior. Para conservar energía, sólo se absorberán fotones que tengan justo la energía correcta. Esto explica por qué un espectro continuo de luz que entra a un gas saldrá con líneas oscuras (de absorción) a frecuencias que corresponden a líneas de emisión (figura 37-20c).

La teoría de Bohr también asegura la estabilidad de los átomos. Establece la estabilidad al decretar: el estado fundamental es el estado más bajo para un electrón y no hay nivel energético inferior al cual pueda ir y emitir más energía. Finalmente, como se vio antes, la teoría de Bohr predice con exactitud la energía de ionización de 13.6 eV para el hidrógeno. Sin embargo, el modelo de Bohr no tuvo éxito para otros átomos y se abandonó, como se estudiará en el siguiente capítulo. El modelo de Bohr se estudia porque *fue* un importante comienzo y porque todavía se usa el concepto de estados estacionarios, el estado fundamental y las transiciones entre estados. Además, la terminología que se emplea en el modelo de Bohr todavía la usan los químicos y espectroscopistas.

EJEMPLO 37–13 **Longitud de onda de una línea de Lyman.** Con base en la figura 37-26, determine la longitud de onda de la primera línea de Lyman, la transición de $n = 2$ a $n = 1$. ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra?

PLANTEAMIENTO Con base en la ecuación 37-9, $hf = E_U - E_L$, con las energías obtenidas a partir de la figura 37-26, encuentre la energía y la longitud de onda de la transición. La región del espectro electromagnético se encuentra con el espectro EM de la figura 31-12.

SOLUCIÓN En este caso, $hf = E_2 - E_1 = \{-3.4\,\text{eV} - (-13.6\,\text{eV})\} = 10.2\,\text{eV} = (10.2\,\text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}) = 1.63 \times 10^{-18}\,\text{J}$. Puesto que $\lambda = c/f$, se tiene

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{1.63 \times 10^{-18}\,\text{J}} = 1.22 \times 10^{-7}\,\text{m},$$

o 122 nm, que está en la región UV del espectro EM (figura 31-12). Véase también la figura 37-22.

NOTA Un enfoque alternativo sería usar la ecuación 37-15 para encontrar λ, lo que da el mismo resultado.

EJEMPLO 37–14 **Longitud de onda de una línea de Balmer.** Determine la longitud de onda de la luz que se emite cuando un átomo de hidrógeno realiza una transición del nivel energético $n = 6$ al $n = 2$, de acuerdo con el modelo de Bohr.

PLANTEAMIENTO Podemos utilizar la ecuación 37-15 o su equivalente, ecuación 37-8, con $R = 1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$.

SOLUCIÓN Se encuentra que

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = 2.44 \times 10^6\ \text{m}^{-1}.$$

De manera que $\lambda = 1/(2.44 \times 10^6\ \text{m}^{-1}) = 4.10 \times 10^{-7}$ m o 410 nm. Ésta es la cuarta línea en la serie de Balmer, figura 37-21, y es de color violeta.

EJERCICIO F La energía del fotón que se emite cuando un átomo de hidrógeno va del estado $n = 6$ al estado $n = 3$ es *a*) 0.378 eV; *b*) 0.503 eV; *c*) 1.13 eV; *d*) 3.06 eV; *e*) 13.6 eV.

EJEMPLO 37–15 **Longitud de onda de absorción.** Con base en la figura 37-26, determine la longitud de onda máxima que puede absorber el hidrógeno en su estado fundamental. ¿Cuál sería la siguiente longitud de onda menor que funcionaría?

PLANTEAMIENTO La longitud de onda máxima corresponde a energía mínima, y sería el salto del estado fundamental al primer estado excitado (figura 37-26). La siguiente longitud de onda menor se presenta para el salto del estado fundamental al segundo estado excitado. En cada caso, se puede usar la diferencia de energía para encontrar la longitud de onda.

SOLUCIÓN La energía necesaria para saltar del estado fundamental al primer estado excitado es 13.6 eV−3.4 eV = 10.2 eV; la longitud de onda requerida, como se vio en el ejemplo 37-13, es 122 nm. La energía para saltar del estado fundamental al segundo estado excitado es 13.6 eV−1.5 eV = 12.1 eV, que corresponde a una longitud de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{E_3 - E_1}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{(12.1\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})} = 103\ \text{nm}.$$

EJEMPLO 37–16 **Energía de ionización de He^+.** *a*) Use el modelo de Bohr para determinar la energía de ionización del ion He^+, que tiene un solo electrón. *b*) Calcule también la longitud de onda máxima que puede tener un fotón para causar ionización.

PLANTEAMIENTO Se quiere determinar la energía mínima requerida para elevar al electrón de su estado fundamental y apenas llegar al estado libre en $E = 0$. La energía del estado fundamental de He^+ está dada por la ecuación 37-14b, con $n = 1$ y $Z = 2$.

SOLUCIÓN *a*) Puesto que todos los símbolos en la ecuación 37-14b son los mismos que para el cálculo en el caso del hidrógeno, excepto que Z es 2 en vez de 1, se ve que E_1 será $Z^2 = 2^2 = 4$ veces E_1 para el hidrógeno:

$$E_1 = 4(-13.6\ \text{eV}) = -54.4\ \text{eV}.$$

Por lo tanto, para ionizar al ion He+ se requerirían 54.4 eV, y este valor concuerda con el experimento.

b) La longitud de onda máxima del fotón que puede causar ionización tendrá energía $hf = 54.4$ eV y longitud de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{(54.4\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})} = 22.8\ \text{nm}.$$

NOTA Si el átomo absorbe un fotón de mayor energía (longitud de onda más corta que 22.8 nm), el átomo todavía podría ionizarse y el electrón liberado tendría energía cinética propia. Si $\lambda > 22.8$ nm, el fotón tiene muy poca energía para provocar ionización.

En este último ejemplo, se vio que E_1 para el ion He^+ es cuatro veces más negativo que para el hidrógeno. De hecho, el diagrama de niveles de energía para He^+ se parece al del hidrógeno, figura 37-26, excepto que los valores numéricos para cada nivel energético son cuatro veces más grandes. Sin embargo, note que aquí se habla del *ion* He^+. El helio normal (neutro) tiene dos electrones y su diagrama de niveles de energía es completamente diferente.

EJEMPLO CONCEPTUAL 37–17 **Hidrógeno a 20°C.** Estime la energía cinética promedio de los átomos de hidrógeno completos (no sólo de los electrones) a temperatura ambiente y, con base en el resultado, explique por qué casi todos los átomos de H están en el estado fundamental a temperatura ambiente y, por lo tanto, no emiten luz.

RESPUESTA De acuerdo con la teoría cinética (capítulo 18), la energía cinética promedio de los átomos o las moléculas en un gas está dada por la ecuación 18-4:

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}kT,$$

donde $k = 1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K}$ es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura kelvin (absoluta). La temperatura ambiente es aproximadamente $T = 300\,\text{K}$, de manera que

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K}) = 6.2 \times 10^{-21}\,\text{J},$$

o, en electrón volts:

$$\overline{K} = \frac{6.2 \times 10^{-21}\,\text{J}}{1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 0.04\,\text{eV}.$$

Por lo tanto, la energía cinética promedio de un átomo como un todo es muy pequeña comparada con la energía entre el estado fundamental y el siguiente estado energético superior (13.6 eV − 3.4 eV = 10.2 eV). Cualquier átomo en estado excitado rápidamente cae al estado fundamental y emite luz. Una vez en el estado fundamental, las colisiones con otros átomos pueden transferir energía de sólo 0.04 eV en promedio. Una pequeña fracción de átomos pueden tener mucha más energía (véase la sección 18-2 acerca de la distribución de la rapidez molecular), pero incluso una energía cinética que sea 10 veces el promedio no es suficiente para excitar átomos hacia estados por encima del estado fundamental. Así, a temperatura ambiente, casi todos los átomos están en el estado fundamental. Los átomos se pueden excitar a estados superiores mediante temperaturas muy altas, o al pasar una corriente de electrones de alta energía a través del gas, como en un tubo de descarga (figura 37-19).

Principio de correspondencia

Cabe hacer notar que Bohr hizo algunas suposiciones radicales que variaban con respecto a las ideas clásicas. Él supuso que los electrones en órbitas fijas no irradian luz aun cuando aceleren (se mueven en un círculo) y supuso que la cantidad de movimiento angular está cuantizada. Más aún, no fue capaz de decir cómo un electrón se mueve cuando realiza una transición de un nivel energético a otro. Por otra parte, no hay razón real para esperar que, en el pequeño mundo del átomo, los electrones se comporten como lo hacen los objetos de tamaño ordinario. No obstante, sintió que ahí donde la teoría cuántica se traslapa con el mundo macroscópico, debería predecir resultados clásicos. Éste es el **principio de correspondencia**, que ya se mencionó en relación con la relatividad (sección 36-13). Este principio funciona para la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno. Los tamaños y energías de las órbitas son muy diferentes para $n = 1$ y $n = 2$, por ejemplo. Pero las órbitas con $n = 100{,}000{,}000$ y $100{,}000{,}001$ tendrían radio y energía muy cercanos (véase la figura 37-26). De hecho, los saltos entre órbitas tan grandes (que se aproximarían a tamaños macroscópicos), serían imperceptibles. En consecuencia, tales órbitas parecerían tener espaciado continuo, que es lo que se espera en el mundo cotidiano.

Por último, se debe hacer hincapié en que las órbitas bien definidas del modelo de Bohr en realidad no existen. El modelo de Bohr sólo es un modelo, no la realidad. La idea de las órbitas de los electrones se rechazó pocos años después, y en la actualidad se considera (capítulo 39) que los electrones forman "nubes de probabilidad".

37–12 Aplicación de la hipótesis de De Broglie a los átomos

La teoría de Bohr fue, sobre todo, de una naturaleza *ad hoc*. Se realizaron suposiciones de manera que la teoría concordara con el experimento. Pero Bohr no podía dar razones de por qué las órbitas estaban cuantizadas, ni de por qué debía haber un estado fundamental. Finalmente, diez años después, Louis de Broglie propuso una razón. En la sección 37-7 se vio que, en 1923, De Broglie propuso que las partículas materiales, como los electrones, tenían una naturaleza ondulatoria; y esta hipótesis se confirmó mediante experimentos muchos años después.

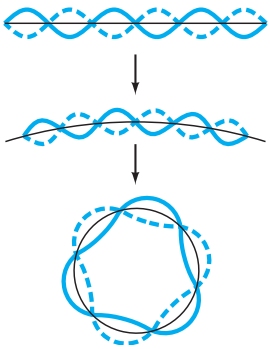


FIGURA 37–27 Una onda estacionaria ordinaria comparada con una onda estacionaria circular.

FIGURA 37–28 Cuando una onda no se cierra (y por lo tanto interfiere destructivamente consigo misma), se extingue rápidamente.

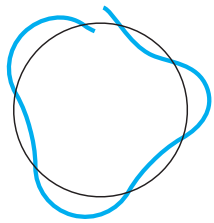
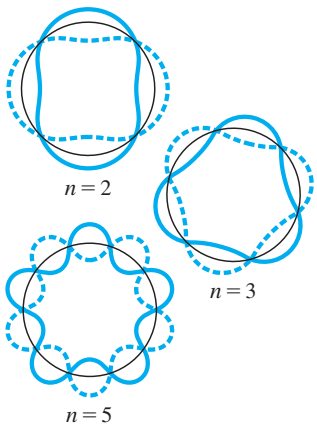


FIGURA 37–29 Ondas circulares estacionarias para dos, tres y cinco longitudes de onda sobre la circunferencia; n, el número de longitudes de onda, también es el número cuántico.



Uno de los argumentos originales de De Broglie en favor de la naturaleza ondulatoria de los electrones fue que brindaba una explicación para la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno. De acuerdo con De Broglie, una partícula de masa m que se desplaza con una rapidez no relativista v tendría una longitud de onda (ecuación 37-7) de

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Propuso que cada electrón que se encuentra en órbita alrededor de un átomo es en realidad una onda estacionaria. Como se vio en el capítulo 15, cuando se pulsa una cuerda de violín o guitarra, se excita un gran número de longitudes de onda. Pero sólo algunas, las que tienen nodos en los extremos, se sostienen. Éstos son los modos *resonantes* de la cuerda. Las ondas con otras longitudes de onda interfieren con ellas mismas en la reflexión, y sus amplitudes rápidamente caen a cero. Con electrones moviéndose en círculos, de acuerdo con la teoría de Bohr, De Broglie argumentó que la onda del electrón era una onda estacionaria *circular* que se cierra sobre sí misma, figura 37-27. Si la longitud de onda de una onda no se cierra sobre sí misma, como en la figura 37-28, tiene lugar interferencia destructiva conforme la onda viaja alrededor de la espira, y la onda rápidamente se extingue. Así, las únicas ondas que persisten son aquéllas para las cuales la circunferencia de la órbita circular contiene un número entero de longitudes de onda, figura 37-29. La circunferencia de una órbita de Bohr de radio r_n es $2\pi r_n$, de manera que, para tener interferencia constructiva, se necesita

$$2\pi r_n = n\lambda, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Cuando se sustituye $\lambda = h/mv$, se obtiene $2\pi r_n = nh/mv$, o

$$mvr_n = \frac{nh}{2\pi}.$$

Ésta es justo la *condición cuántica* que propuso Bohr sobre una base *ad hoc*, ecuación 37-10. Es a partir de esta ecuación que se dedujeron las órbitas discretas y los niveles de energía. Por lo tanto, se tiene una primera explicación para las órbitas y los estados energéticos cuantizados en el modelo de Bohr: se deben a la naturaleza ondulatoria del electrón, y sólo persisten las ondas "estacionarias" resonantes.[†] Esto implica que la *dualidad onda-partícula* está en la base de la estructura atómica.

Al ver las ondas electrónicas circulares de la figura 37-29, no se debe considerar que el electrón sigue el patrón de onda oscilatorio. En el modelo de Bohr del hidrógeno, el electrón se mueve en un círculo. La onda circular, por otra parte, representa la *amplitud* de la "onda material" del electrón, y en la figura 37-29, por conveniencia, la amplitud de onda se superpone a la trayectoria circular de la órbita de la partícula.

La teoría de Bohr funcionó bien para el hidrógeno y para iones de un electrón. Pero no tuvo éxito con átomos de muchos electrones. La teoría de Bohr no logró predecir los espectros de líneas siquiera para el siguiente átomo más simple, el helio. No podía explicar por qué algunas líneas de emisión son más brillantes que otras, ni por qué algunas líneas se dividen en dos o más líneas cercanamente espaciadas ("estructura fina"). Era necesaria una nueva teoría que, de hecho, se desarrolló en la década de 1920. Esta nueva y radical teoría se llamó *mecánica cuántica*. La teoría finalmente resolvió el problema de la estructura atómica, pero arrojó una concepción muy diferente del átomo: la idea de electrones en órbitas bien definidas se sustituyó con la idea de "nubes" de electrones. Esta nueva teoría de la mecánica cuántica ofreció una perspectiva totalmente diferente de los mecanismos básicos que subyacen en los procesos físicos.

[†]Sin embargo, la ecuación 37-10 ya no se considera válida, como se estudiará en el capítulo 39.

Resumen

La teoría cuántica tiene sus orígenes en la **hipótesis cuántica de Planck** de que las oscilaciones moleculares están **cuantizadas**: sus energías E sólo pueden ser múltiplos enteros (n) de hf, donde h es la constante de Planck y f es la frecuencia natural de oscilación:

$$E = nhf. \qquad \textbf{(37–2)}$$

Esta hipótesis explicaba el espectro de radiación emitido por un **cuerpo negro** a alta temperatura.

Einstein propuso que, para algunos experimentos, la luz se podía representar como emitida y absorbida en forma de **cuantos** (partículas), que ahora se llaman **fotones**, cada uno con energía

$$E = hf \qquad \textbf{(37–3)}$$

y cantidad de movimiento

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad \textbf{(37–5)}$$

Él propuso el efecto fotoeléctrico como una prueba para la teoría fotónica de la luz. En el **efecto fotoeléctrico**, la teoría fotónica dice que cada fotón incidente puede golpear un electrón en un material y expulsarlo si el fotón tiene suficiente energía. Entonces, la energía máxima de los electrones expulsados se relaciona linealmente con la frecuencia de la luz incidente.

La teoría fotónica también recibe apoyo del **efecto Compton** y la observación de la **producción de pares** electrón-positrón.

La **dualidad onda-partícula** se refiere a la idea de que la luz y la materia (como los electrones) tienen propiedades tanto ondulatorias como corpusculares. La longitud de onda de un objeto está dada por

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad \textbf{(37–7)}$$

donde p es la cantidad de movimiento del objeto ($p = mv$ para una partícula de masa m y rapidez v).

El **principio de complementariedad** afirma que se debe estar al tanto de las propiedades corpusculares y ondulatorias de la luz y la materia para una plena comprensión de ellos.

Los primeros modelos del átomo incluyen el modelo de pudín de pasas y el modelo planetario (o nuclear) de Rutherford de un átomo que consiste en un pequeño pero masivo núcleo con carga positiva, rodeado (a una distancia relativamente grande) por electrones.

Para explicar los **espectros de líneas** emitidos por los átomos, así como la estabilidad de éstos, la **teoría de Bohr** postuló que: **1.** los electrones ligados en un átomo sólo pueden ocupar órbitas para las cuales la cantidad de movimiento angular esté cuantizada, lo que da por resultado valores discretos para el radio y la energía; **2.** un electrón en tal **estado estacionario** no emite radiación; **3.** si un electrón salta a un estado inferior, emite un fotón cuya energía es igual a la diferencia de energía entre los dos estados; **4.** la cantidad de movimiento angular L de los electrones atómicos está cuantizada por la regla

$$L = \frac{nh}{2\pi}, \qquad \textbf{(37–10)}$$

donde n es un entero llamado **número cuántico**. El estado $n = 1$ es el **estado fundamental**, que en el hidrógeno tiene una energía $E_1 = -13.6$ eV. Valores más altos de n corresponden a **estados excitados** y sus energías son

$$E_n = -(13.6\,\text{eV})\frac{Z^2}{n^2}. \qquad \textbf{(37–14b)}$$

Los átomos en estos estados superiores se excitan mediante colisiones con otros átomos o electrones, o mediante absorción de un fotón justo de la frecuencia correcta.

La hipótesis de De Broglie de que los electrones (y otra materia) tiene una longitud de onda $\lambda = h/mv$ brindó una explicación para las órbitas cuantizadas de Bohr, al introducir la dualidad onda-partícula: las órbitas corresponden a ondas estacionarias circulares donde la circunferencia de la órbita es igual a un número entero de longitudes de onda.

Preguntas

1. ¿Qué se puede decir acerca de las temperaturas relativas de las estrellas de color amarillo blanquecino, rojizas y azuladas? Explique.
2. Si todos los objetos irradian energía, ¿por qué la mayoría de ellos no se pueden ver en la oscuridad?
3. ¿Una bombilla a una temperatura de 2500 K produce una luz tan blanca como el Sol a 6000 K? Explique.
4. Los cuartos oscuros para revelar película en blanco y negro en alguna época se iluminaban con una bombilla roja. ¿Por qué roja? ¿Tal bombilla funcionaría en un cuarto oscuro para revelar fotografías a color?
5. Si la longitud de onda umbral en el efecto fotoeléctrico aumenta cuando el metal emisor se transforma en un metal diferente, ¿qué se puede decir acerca de las funciones de trabajo de los dos metales?
6. Explique por qué la existencia de una frecuencia de corte en el efecto fotoeléctrico favorece con más fuerza una teoría corpuscular y no una teoría ondulatoria de la luz.
7. La luz UV causa quemaduras solares, mientras que la luz visible no lo hace. Sugiera una razón.
8. Las funciones de trabajo para sodio y cesio son 2.28 eV y 2.14 eV, respectivamente. Para fotones incidentes de una frecuencia dada, ¿qué metal dará una energía cinética máxima más alta para los electrones?
9. *a*) ¿Un haz de fotones infrarrojos siempre tiene menos energía que un haz de fotones ultravioletas? Explique. *b*) ¿Un solo fotón de luz infrarroja siempre tiene menos energía que un solo fotón de luz ultravioleta?
10. Luz de 450 nm de longitud de onda incide sobre una superficie metálica, y del metal sale un torrente de electrones. Si luz con la misma intensidad, pero con 400 nm de longitud de onda, incide sobre la superficie, ¿se emiten más electrones? ¿Cambia la energía de los electrones emitidos? Explique.
11. Explique cómo se podría usar el circuito fotoeléctrico de la figura 37-4 en *a*) una alarma antirrobo, *b*) un detector de humo, *c*) un exposímetro fotográfico.
12. Si un fotón de rayos X se dispersa mediante un electrón, ¿cambia la longitud de onda del fotón? Si es así, ¿aumenta o disminuye?
13. En el efecto fotoeléctrico y en el efecto Compton, un fotón que choca con un electrón hace que el electrón salga disparado. Entonces, ¿cuál es la diferencia entre los dos procesos?
14. Considere una fuente puntual de luz. ¿Cómo variaría la intensidad de la luz con la distancia desde la fuente, de acuerdo con *a*) la teoría ondulatoria, *b*) la teoría corpuscular (fotónica)? ¿Esto ayudaría a distinguir las dos teorías?
15. Si un electrón y un protón viajan con la misma rapidez, ¿cuál tiene la longitud de onda de De Broglie más corta? Explique.
16. ¿Por qué se dice que la luz tiene propiedades ondulatorias? ¿Por qué se dice que la luz tiene propiedades de partícula?
17. ¿Por qué se dice que los electrones tienen propiedades ondulatorias? ¿Por qué se dice que los electrones tienen propiedades de partícula?
18. ¿Cuáles son las diferencias entre un fotón y un electrón? Sea específico: elabore una lista.
19. En el modelo planetario del átomo de Rutherford, ¿qué evita que los electrones salgan volando hacia el espacio?
20. ¿Cómo puede decir si hay oxígeno cerca de la superficie del Sol?
21. Cuando un espectro ancho de luz pasa a través de gas hidrógeno a temperatura ambiente, se observan líneas de absorción que corresponden sólo a la serie de Lyman. ¿Por qué no se observan las otras series?
22. Explique cómo los niveles energéticos para el hidrógeno cercanamente espaciados en la parte superior de la figura 37-26 corresponden a las líneas espectrales cercanamente espaciadas en la parte superior de la figura 37-21.

23. ¿Es posible que la longitud de onda de De Broglie de una "partícula" sea mayor que las dimensiones de la partícula? ¿Es posible que sea menor? ¿Existe alguna vinculación directa?

24. En un átomo de helio, que contiene dos electrones, ¿cree que, en promedio, los electrones están más cerca o más lejos del núcleo que en un átomo de hidrógeno? ¿Por qué?

25. ¿Cómo es posible que el espectro del hidrógeno contenga tantas líneas cuando el hidrógeno sólo contiene un electrón?

26. La serie de Lyman es más brillante que la serie de Balmer porque esta serie de transiciones termina en el estado más común para el hidrógeno, el estado fundamental. ¿Por qué entonces se descubrió primero la serie de Balmer?

27. Con base en la conservación de la cantidad de movimiento, explique por qué los fotones emitidos por los átomos de hidrógeno tienen ligeramente menos energía que la que predice la ecuación 37-9.

28. Suponga que se obtiene un espectro de emisión para hidrógeno a temperatura muy alta (cuando algunos de los átomos están en estados excitados), y un espectro de absorción a temperatura ambiente, cuando todos los átomos están en el estado fundamental. ¿Los dos espectros contendrán líneas idénticas?

Problemas

37–1 Hipótesis cuántica de Planck

1. (I) Estime la longitud de onda pico para la radiación de *a*) hielo a 273 K, *b*) lámpara de proyección a 3 500 K, *c*) helio a 4.2 K, *d*) el Universo a $T = 2.725$ K, suponiendo emisión de cuerpo negro. ¿En cuál región del espectro EM está cada una?

2. (I) ¿Qué tan caliente está el metal para soldadura, si irradia con más fuerza a 460 nm?

3. (I) Una molécula de HCl vibra con una frecuencia natural de 8.1×10^{13} Hz. ¿Cuál es la diferencia en energía (en joules y electrón volts) entre valores sucesivos de la energía de oscilación?

4. (II) Estime la longitud de onda pico de la luz que se emite de la pupila del ojo humano (que se aproxima a cuerpo negro) suponiendo una temperatura corporal normal.

5. (III) La ley de radiación de Planck está dada por:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

donde $I(\lambda,T)$ es la tasa de energía que se irradia por unidad de área superficial por unidad de intervalo de longitud de onda, a una longitud de onda λ y una temperatura Kelvin T. *a*) Demuestre que la ley de desplazamiento de Wien se deduce a partir de esta relación. *b*) Determine el valor de h a partir del valor experimental de $\lambda_P T$ dado en el texto. [Tal vez quiera usar técnicas de graficación]. *c*) Deduzca la dependencia T^4 de la tasa a la que se irradia energía (como en la ley de Stefan-Boltzmann, ecuación 19-17), al integrar la fórmula de Planck sobre todas las longitudes de onda; esto es, demuestre que

$$\int I(\lambda, T)\, d\lambda \propto T^4.$$

37–2 y 37–3 Fotones y el efecto fotoeléctrico

6. (I) ¿Cuál es la energía de los fotones (en joules) emitidos por una estación de radio FM de 104.1 MHz?

7. (I) ¿Cuál es el rango de energía (en joules y eV) de los fotones en el espectro visible, con longitud de onda de 410 nm a 750 nm?

8. (I) Un rayo gamma típico, emitido de un núcleo durante decaimiento radiactivo, puede tener una energía de 380 keV. ¿Cuál es su longitud de onda? ¿Se esperaría difracción significativa de este tipo de luz cuando pase a través de una abertura cotidiana, como una puerta?

9. (I) Para romper un "enlace de hidrógeno" en una molécula de proteína se requiere aproximadamente 0.1 eV. Calcule la frecuencia mínima y la longitud de onda máxima de un fotón que pueda lograr esto.

10. (I) Calcule la cantidad de movimiento de un fotón de luz amarilla con longitud de onda de 6.20×10^{-7} m.

11. (I) ¿Qué frecuencia mínima de luz se necesita para expulsar electrones de un metal cuya función trabajo es 4.8×10^{-19} J?

12. (I) ¿Cuál es la longitud de onda más larga que emitirá electrones de un metal cuya función trabajo es 3.70 eV?

13. (II) ¿Qué longitud de onda debe tener un fotón, para tener la misma energía que una pelota de béisbol de 145 gramos que viaja a 30.0 m/s?

14. (II) El ojo humano es capaz de responder a energía luminosa tan diminuta como 10^{-18} J. Para una longitud de onda en el pico de sensibilidad visual, 550 nm, ¿cuántos fotones conducen a un destello observable?

15. (II) Las funciones de trabajo para sodio, cesio, cobre y hierro son 2.3, 2.1, 4.7 y 4.5 eV, respectivamente. ¿Cuál de estos metales no emitirá electrones cuando luz visible brille sobre ellos?

16. (II) En un experimento de efecto fotoeléctrico se observa que no fluye corriente a menos que la longitud de onda sea menor que 520 nm. *a*) ¿Cuál es la función trabajo de este material? *b*) ¿Cuál es el voltaje de frenado que se requiere si se usa luz con longitud de onda de 470 nm?

17. (II) ¿Cuál es la máxima energía cinética de los electrones expulsados de bario ($W_0 = 2.48$ eV) cuando se ilumina con luz blanca, $\lambda = 410$ a 750 nm?

18. (II) El bario tiene una función trabajo de 2.48 eV. ¿Cuál es la máxima energía cinética de los electrones, si el metal se ilumina con luz UV de 365 nm de longitud de onda? ¿Cuál es su rapidez?

19. (II) Cuando luz UV con longitud de onda de 285 nm incide sobre una superficie metálica, la máxima energía cinética de los electrones emitidos es 1.70 eV. ¿Cuál es la función trabajo del metal?

20. (II) La longitud de onda umbral para emisión de electrones de una superficie dada es 320 nm. ¿Cuál será la máxima energía cinética de los electrones expulsados cuando la longitud de onda cambia a *a*) 280 nm, *b*) 360 nm?

21. (II) Cuando luz de 230 nm incide sobre un metal, la corriente a través de un circuito fotoeléctrico (figura 37-4) se lleva a cero a un voltaje de frenado de 1.84 V. ¿Cuál es la función trabajo del metal?

22. (II) Cierto tipo de película es sensible sólo a luz cuya longitud de onda es menor que 630 nm. ¿Cuál es la energía (eV y kcal/mol) necesaria para que ocurra la reacción química que provoca el cambio en la película?

23. (II) El rango de longitudes de onda de la luz visible se extiende de aproximadamente 410 nm a 750 nm. *a*) Estime la mínima energía (eV) necesaria para iniciar el proceso químico en la retina que es responsable de la visión. *b*) Especule por qué, en el otro extremo del rango visible, hay una energía fotónica umbral más allá de la cual el ojo no registra sensación de visión. Determine esta energía fotónica umbral (eV).

24. (II) En un experimento fotoeléctrico con una superficie de sodio limpia, la máxima energía de los electrones emitidos se midió para diferentes frecuencias incidentes, con los siguientes resultados:

Frecuencia ($\times 10^{14}$ Hz)	Energía (eV)
11.8	2.60
10.6	2.11
9.9	1.81
9.1	1.47
8.2	1.10
6.9	0.57

Trace la gráfica de estos resultados y encuentre: *a*) la constante de Planck; *b*) la frecuencia de corte del sodio; *c*) la función trabajo.

25. (II) Un **tubo fotomultiplicador** (un sensor de luz muy sensible), se basa en el efecto fotoeléctrico: fotones incidentes llegan a una superficie metálica, y se recolectan los electrones expulsados resultantes. Al contar el número de electrones recolectados, es posible determinar el número de fotones incidentes (es decir, la intensidad de la luz incidente). *a*) Si un tubo fotomultiplicador debe responder adecuadamente a longitudes de onda incidentes a lo largo del rango visible (de 410 nm a 750 nm), ¿cuál es el máximo valor para la función trabajo W_0 (eV) de su superficie metálica? *b*) Si W_0 para su superficie metálica está arriba de cierto valor umbral, el fotomultiplicador sólo funcionará para longitudes de onda ultravioleta incidentes y no responderá a luz visible. Determine este valor umbral (eV).

26. (III) Un grupo de átomos está confinado a un volumen muy pequeño (casi puntual) en una **trampa atómica** basada en láser. La luz láser incidente hace que cada átomo emita 1.0×10^6 fotones con 780 nm de longitud de onda cada segundo. Un sensor, con 1.0 cm^2 de área, mide la intensidad de luz que emana de la trampa en 1.6 nW cuando se coloca a 25 cm de distancia de los átomos capturados. Suponiendo que cada átomo emite fotones con igual probabilidad en todas direcciones, determine el número de átomos capturados.

27. (III) Suponga que luz con longitud de onda λ incide sobre una superficie metálica, cuya función trabajo se conoce con precisión (es decir, su incertidumbre es mejor que 0.1% y se puede ignorar). Demuestre que, si el voltaje de frenado se puede determinar a una precisión de ΔV_0, la incertidumbre fraccional (magnitud) en longitud de onda es

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda e}{hc}\Delta V_0.$$

Determine esta incertidumbre fraccional si $\Delta V_0 = 0.01$ V y $\lambda = 550$ nm.

37–4 Efecto Compton

28. (I) Un fotón de alta frecuencia se dispersa de un electrón y experimenta un cambio en longitud de onda de 1.5×10^{-4} nm. ¿A qué ángulo se debe colocar un detector para detectar al fotón dispersado (en relación con la dirección del fotón entrante)?

29. (II) Determine la longitud de onda Compton para *a*) un electrón, *b*) un protón. *c*) Demuestre que, si un fotón tiene longitud de onda igual a la longitud de onda Compton de una partícula, la energía del fotón es igual a la energía en reposo de la partícula.

30. (II) Rayos X con longitud de onda $\lambda = 0.120$ nm se dispersan del carbono. ¿Cuál es el corrimiento en longitud de onda Compton esperado para los fotones que se detectan a ángulos (en relación con el haz incidente) de exactamente *a*) 60°, *b*) 90°, *c*) 180°?

31. (II) En el efecto Compton, determine la razón $(\Delta\lambda/\lambda)$ entre el máximo cambio $\Delta\lambda$ en la longitud de onda de un fotón y la longitud de onda inicial λ del fotón, si el fotón es *a*) un fotón de luz visible con $\lambda = 550$ nm, *b*) un fotón de rayos X con $\lambda = 0.10$ nm.

32. (II) Un fotón de rayos gamma de 1.0 MeV experimenta una secuencia de sucesos de dispersión Compton. Si el fotón se dispersa a un ángulo de 0.50° en cada suceso, estime el número de sucesos que se requieren para convertir el fotón en un fotón de luz visible con longitud de onda de 555 nm. Puede usar una expansión para θ pequeño; véase el Apéndice A. [Los rayos gamma creados cerca del centro del Sol se transforman en longitudes de onda visibles conforme viajan a la superficie del Sol a través de una secuencia de sucesos de dispersión Compton a ángulos pequeños].

33. (III) En el efecto Compton, un fotón de 0.160 nm incide sobre un electrón libre en una colisión frontal y lo proyecta en dirección hacia delante. El fotón, al rebotar, retrocede directamente hacia atrás. Con base en la conservación de energía (relativista) y de cantidad de movimiento, determine *a*) la energía cinética del electrón y *b*) la longitud de onda del fotón que retrocede. Utilice la ecuación 37-5, pero no la ecuación 37-6.

34. (III) En el efecto Compton (véase la figura 37-7), use las ecuaciones relativistas para conservación de energía y de cantidad de movimiento lineal para demostrar que el corrimiento Compton en longitud de onda está dado por la ecuación 37-6.

37–5 Producción de pares

35. (I) ¿Cuánta energía total tendrá un par electrón-positrón si se produjo mediante un fotón de 2.67 MeV?

36. (II) ¿Cuál es la longitud de onda más larga del fotón que produciría un par protón-antiprotón? (Cada uno tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg).

37. (II) ¿Cuál es la mínima energía fotónica necesaria para producir un par $\mu^+ - \mu^-$? La masa de cada μ (muón) es 207 veces la masa de un electrón. ¿Cuál es la longitud de onda de tal fotón?

38. (II) Un electrón y un positrón, cada uno en movimiento a 2.0×10^5 m/s, choca frontalmente, desaparece y produce dos fotones que se dirigen en sentidos opuestos, cada uno con la misma energía y cantidad de movimiento. Determine la energía y cantidad de movimiento de cada fotón.

39. (II) Un fotón de rayo gamma produce un electrón y un positrón, cada uno con una energía cinética de 375 keV. Determine la energía y la longitud de onda del fotón.

37–7 Naturaleza ondulatoria de la materia

40. (I) Calcule la longitud de onda de una pelota de 0.23 kg que viaja a 0.10 m/s.

41. (I) ¿Cuál es la longitud de onda de un neutrón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) que viaja a 8.5×10^4 m/s?

42. (I) ¿A través de cuántos volts de diferencia de potencial debe acelerarse un electrón para lograr una longitud de onda de 0.21 nm?

43. (II) ¿Cuál es el límite de resolución teórico para un microscopio electrónico cuyos electrones se aceleran a través de 85 kV? (Debe usar fórmulas relativistas).

44. (II) La rapidez de un electrón en un acelerador de partículas es $0.98c$. Encuentre su longitud de onda de De Broglie. (Utilice la cantidad de movimiento relativista).

45. (II) Calcule la razón entre la energía cinética de un electrón y la de un protón, si sus longitudes de onda son iguales. Suponga que las rapideces no son relativistas.

46. (II) Los neutrones se emplean en experimentos de difracción para examinar a fondo la estructura reticular de los sólidos cristalinos. Puesto que la longitud de onda del neutrón necesita estar en el orden del espaciamiento entre átomos en la retícula, aproximadamente 0.3 nm, ¿cuál debe ser la rapidez de los neutrones?

47. (II) Un electrón tiene una longitud de onda de De Broglie $\lambda = 6.0 \times 10^{-10}$ m. *a*) ¿Cuál es su cantidad de movimiento? *b*) ¿Cuál es su rapidez? *c*) ¿Qué voltaje se necesita para acelerarlo a esta rapidez?

48. (II) ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón con energía de *a*) 20 eV, *b*) 200 eV, *c*) 2.0 keV?

49. (II) Demuestre que, si un electrón y un protón tienen la misma energía cinética no relativista, el protón tiene la longitud de onda más corta.

50. (II) Calcule la longitud de onda de De Broglie de un electrón en un cinescopio de TV, si se acelera mediante 33,000 V. ¿Es relativista? ¿Cómo se compara su longitud de onda con el tamaño del "cuello" del cinescopio, por lo general de 5 cm? ¿Debe uno preocuparse por problemas de difracción que empañen la imagen en la pantalla?

51. (II) Después de pasar a través de dos rendijas separadas por una distancia de 3.0 μm, un haz de electrones crea un patrón de interferencia con su máximo de segundo orden a un ángulo de 55º. Encuentre la rapidez de los electrones en este haz.

*37–8 Microscopio electrónico

***52.** (II) ¿Qué voltaje se necesita para producir longitudes de onda de electrón de 0.28 nm? (Suponga que los electrones son no relativistas).

***53.** (II) En un microscopio electrónico se aceleran electrones mediante 3450 V. Estime la máxima resolución posible del microscopio.

37–10 y 37–11 Modelo de Bohr

54. (I) Para las tres transiciones del hidrógeno que se indican a continuación, con n como el estado inicial y n' como el estado final, ¿la transición es una absorción o una emisión? ¿Cuál es más alta, la energía del estado inicial o la energía del estado final del átomo? Por último, ¿cuál de estas transiciones implica el fotón de mayor energía? *a*) $n = 1, n' = 3$; *b*) $n = 6, n' = 2$; *c*) $n = 4, n' = 5$.

55. (I) ¿Cuánta energía se requiere para ionizar un átomo de hidrógeno en el estado $n = 3$?

56. (I) *a*) A partir de la figura 37-26, determine la longitud de onda de la segunda línea de Balmer (transición $n = 4$ a $n = 2$). Del mismo modo, determine *b*) la longitud de onda de la tercera línea de Lyman y *c*) la longitud de onda de la primera línea de Balmer.

57. (I) Calcule la energía de ionización del litio doblemente ionizado, Li^{2+}, que tiene $Z = 3$.

58. (I) Evalúe la constante de Rydberg R con el modelo de Bohr (compare con las ecuaciones 37-8 y 37-15) y demuestre que su valor es $R = 1.097\,4 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$.

59. (II) ¿Cuál es la luz con longitud de onda más larga capaz de ionizar un átomo de hidrógeno en el estado fundamental?

60. (II) En el Sol, un átomo de helio ionizado (He^+) realiza una transición del estado $n = 5$ al estado $n = 2$, y emite un fotón. ¿Los átomos de hidrógeno presentes en el Sol pueden absorber al fotón? Si es así, ¿entre qué estados energéticos ocurrirá la transición del átomo de hidrógeno?

61. (II) ¿Qué longitud de onda de fotón se requeriría para ionizar un átomo de hidrógeno en el estado fundamental y proporcionar al electrón expulsado una energía cinética de 20.0 eV?

62. (II) ¿Para qué energía cinética máxima una colisión entre un electrón y un átomo de hidrógeno en su estado fundamental definitivamente es elástica?

63. (II) Construya el diagrama de niveles energéticos para el ion He^+ (como la figura 37-26).

64. (II) Construya el diagrama de niveles energéticos (como la figura 37-26) para el litio doblemente ionizado, Li^{2+}.

65. (II) Determine la energía potencial electrostática y la energía cinética de un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno.

66. (II) Un átomo de hidrógeno excitado podría, en principio, tener un diámetro de 0.10 mm. ¿Cuál sería el valor de n para una órbita de Bohr de este tamaño? ¿Cuál sería su energía?

67. (II) ¿El uso de fórmulas no relativistas se justifica en el átomo de Bohr? Para comprobarlo, calcule la velocidad del electrón, v, en términos de c, para el estado fundamental del hidrógeno, y luego calcule $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

68. (II) Un átomo de hidrógeno tiene una cantidad de movimiento angular de $5.273 \times 10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. De acuerdo con el modelo de Bohr, ¿cuál es la energía (eV) asociada con este estado?

69. (II) Suponga que los átomos de hidrógeno en un gas inicialmente están en su estado fundamental. Si electrones libres, con energía cinética de 12.75 eV, chocan con estos átomos, ¿qué longitudes de onda de fotón emitirá el gas?

70. (II) Suponga que un electrón se enlaza a un protón, como en el átomo de hidrógeno, pero mediante fuerza gravitacional y no mediante fuerza eléctrica. ¿Cuál serían el radio y la energía de la primera órbita de Bohr?

71. (II) *Principio de correspondencia:* Demuestre que, para valores grandes de n, la diferencia en radio Δr entre dos órbitas adyacentes (con números cuánticos n y $n-1$) está dada por

$$\Delta r = r_n - r_{n-1} \approx \frac{2r_n}{n},$$

de manera que $\Delta r/r_n \to 0$ conforme $n \to \infty$, en concordancia con el principio de correspondencia. [Note que el principio de correspondencia se puede comprobar al considerar valores grandes de n ($n \to \infty$) o al dejar que $h \to 0$. ¿Son éstos equivalentes?]

Problemas generales

72. Si una bombilla de 75W emite 3.0% de la energía entrante como luz visible (longitud de onda promedio = 550 nm), uniformemente en todas direcciones, estime cuántos fotones por segundo de luz visible llegarán a la pupila (4.0 mm de diámetro) del ojo de un observador a 250 m de distancia.

73. A bajas temperaturas, casi todos los átomos en el gas hidrógeno estarán en el estado fundamental. ¿Qué frecuencia mínima de fotón se necesita si se debe observar el efecto fotoeléctrico?

74. Un haz de electrones de 125 eV se dispersa por un cristal, como en la difracción de rayos X, y a $\theta = 38º$ se observa un pico de primer orden. ¿Cuál es la separación entre planos en el cristal difractante? (Véase la sección 35-10).

75. Un horno de microondas produce radiación electromagnética a $\lambda = 12.2$ cm y produce una potencia de 860 W. Calcule el número de fotones de microondas producidos por el horno de microondas cada segundo.

76. La luz solar que llega a la Tierra tiene una intensidad aproximada de 1350 W/m^2. Estime cuántos fotones por metro cuadrado por segundo representa esto. Considere que la longitud de onda promedio es de 550 nm.

77. Un haz de luz láser roja (λ = 633 nm) incide sobre una pared negra y se absorbe por completo. Si esta luz ejerce una fuerza total F = 6.5 nN sobre la pared, ¿cuántos fotones por segundo inciden sobre la pared?

78. La teoría del Big Bang afirma que el comienzo del Universo estuvo acompañado por una enorme explosión de fotones. Esos fotones todavía están presentes en la actualidad y constituyen la llamada radiación de fondo cósmica de microondas. El Universo irradia como un cuerpo negro con una temperatura de aproximadamente 2.7 K. Calcule la longitud de onda pico de esta radiación.

79. Un electrón y un positrón chocan de manera frontal, se aniquilan y crean dos fotones de 0.755 MeV que viajan en sentidos opuestos. ¿Cuáles fueron las energías cinéticas iniciales del electrón y el positrón?

80. ¿En qué diferencia de potencial *a*) un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) y *b*) un electrón ($m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) se deben acelerar para tener una longitud de onda $\lambda = 6.0 \times 10^{-12}$ m?

81. En algunos experimentos de Rutherford (figura 37-17), las partículas α (masa = 6.64×10^{-27} kg) tienen una energía cinética de 4.8 MeV. ¿Qué tan cerca pueden llegar del centro de un núcleo de plata (carga = $+47e$)? Ignore el movimiento de retroceso del núcleo.

82. Demuestre que la magnitud de la energía potencial electrostática de un electrón en cualquier órbita de Bohr de un átomo de hidrógeno es el doble de la magnitud de su energía cinética en esa órbita.

83. Calcule la razón de la fuerza gravitacional a la fuerza eléctrica para el electrón en un átomo de hidrógeno. ¿La fuerza gravitacional se puede ignorar con seguridad?

84. Electrones acelerados por una diferencia de potencial de 12.3 V pasan a través de un gas de átomos de hidrógeno a temperatura ambiente. ¿Qué longitudes de onda de luz se emitirán?

85. En un experimento fotoeléctrico particular, se mide un potencial de frenado de 2.70 V cuando luz ultravioleta con longitud de onda de 380 nm incide sobre el metal. Si se usa luz azul con longitud de onda de 440 nm, ¿cuál es el nuevo potencial de frenado?

86. En un tubo de rayos X (véase la figura 36-26 y la explicación en la sección 35-10), el alto voltaje entre filamento y blanco es V. Después de acelerarse a través de este voltaje, un electrón incide sobre el blanco donde se desacelera (mediante núcleos con carga positiva) y en el proceso se emiten uno o más fotones de rayos X. *a*) Demuestre que el fotón con longitud de onda más corta tendrá

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV}.$$

b) ¿Cuál es la longitud de onda más corta de los rayos X emitidos cuando los electrones acelerados inciden sobre la cara de un cinescopio de televisión de 33 kV?

87. La intensidad de la luz del Sol en la vecindad de la Tierra es de aproximadamente 1350 W/m^2. Imagine una nave espacial con una vela de espejo con forma cuadrada que mide 1.0 km. Estime cuánto empuje (en newtons) experimentará esta nave a causa de las colisiones con los fotones del Sol. [*Sugerencia:* Suponga que los fotones rebotan perpendicularmente en la vela, sin cambio en la magnitud de su cantidad de movimiento].

88. Fotones de 9.0 eV de energía inciden sobre un metal. Se descubre que del metal fluye corriente hasta que se aplica un potencial de frenado de 4.0 V. Si se duplica la longitud de onda de los fotones incidentes, ¿cuál es la máxima energía cinética de los electrones expulsados? ¿Qué ocurriría si la longitud de onda de los fotones incidentes se triplica?

89. Luz con longitud de onda de 360 nm incide sobre un metal cuya función trabajo es 2.4 eV. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie más corta para los electrones que se producen como fotoelectrones?

90. Luz visible incidente sobre una rejilla de difracción, que tiene espaciamiento de rendijas de 0.012 nm, tiene el primer máximo a un ángulo de 3.5º del pico central. Si los electrones se pudieran difractar mediante la misma rejilla, ¿qué velocidad de electrón produciría el mismo patrón de difracción que la luz visible?

91. *a*) Suponga que un elemento desconocido tiene un espectro de absorción con líneas que corresponden a 2.5, 4.7 y 5.1 eV arriba de su estado fundamental, y una energía de ionización de 11.5 eV. Dibuje un diagrama de niveles de energía para este elemento. *b*) Si un átomo de esta sustancia absorbe un fotón de 5.1 eV, ¿en cuál estado estaba el átomo antes de absorber al fotón? ¿Cuáles serán las energías de los fotones que posteriormente pueda emitir este átomo?

92. Luz con longitud de onda de 424 nm cae sobre un metal que tiene una función trabajo de 2.28 eV. *a*) ¿Cuánto voltaje se debe aplicar para llevar la corriente a cero? *b*) ¿Cuál es la rapidez máxima de los electrones emitidos? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de estos electrones?

93. *a*) Aplique las suposiciones de Bohr al sistema Tierra-Luna para calcular las energías permitidas y los radios de movimiento. *b*) Dada la distancia conocida entre la Tierra y la Luna, ¿es aparente la cuantización de la energía y el radio?

94. Demuestre que la longitud de onda de una partícula de masa m, con energía cinética K, está dada por la fórmula relativista $\lambda = hc/\sqrt{K^2 + 2mc^2K}$.

95. Una pequeña linterna tiene un valor nominal de 3.0 W. Conforme la luz sale de la linterna en un sentido, sobre la linterna se ejerce una fuerza de reacción en el sentido opuesto. Estime el tamaño de esa fuerza de reacción.

96. A escala atómica, el electrón volt y el nanómetro son unidades muy adecuadas para energía y distancia, respectivamente. *a*) Demuestre que la energía E en eV de un fotón, cuya longitud de onda λ está en nm, está dada por

$$E = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{\lambda\ (\text{nm})}.$$

b) ¿Cuánta energía (eV) tiene un fotón de 650 nm?

***97.** Tres constantes fundamentales de la naturaleza (la constante gravitacional G, la constante de Planck h y la rapidez de la luz c) tienen las dimensiones de $[L^3/MT^2]$, $[ML^2/T]$ y $[L/T]$, respectivamente. *a*) Encuentre la combinación matemática de estas constantes fundamentales que tenga la dimensión de tiempo. Esta combinación se llama "tiempo de Planck" t_P y se cree que es el tiempo más temprano, después de la creación del Universo, cuando se pueden aplicar las leyes de la física actualmente conocidas. *b*) Determine el valor numérico de t_P. *c*) Encuentre la combinación matemática de estas constantes fundamentales que tenga la dimensión de longitud. Esta combinación se llama "longitud de Planck" λ_P y se cree que es la longitud más pequeña sobre la cual se pueden aplicar las leyes de la física actualmente conocidas. *d*) Determine el valor numérico de λ_P.

98. Imagine una partícula libre de masa m que rebota de ida y vuelta entre dos paredes perfectamente reflectantes, separadas por una distancia ℓ. Imagine que las dos ondas de materia que se dirigen en sentidos opuestos, asociadas con esta partícula, interfieren para crear una onda estacionaria con un nodo en cada una de las paredes. Demuestre que el estado fundamental (primer armónico) y el primer estado excitado (segundo armónico) tienen energías cinéticas (no relativistas) $h^2/8m\ell^2$ y $h^2/2m\ell^2$, respectivamente.

99. *a*) Un átomo de rubidio ($m = 85$ u) está en reposo con un electrón en un nivel energético excitado. Cuando el electrón salta hacia el estado fundamental, el átomo emite un fotón con longitud de onda $\lambda = 780$ nm. Determine la rapidez de retroceso resultante (no relativista) v del átomo. *b*) La rapidez de retroceso establece el límite inferior sobre la temperatura a la cual un gas ideal de átomos de rubidio se puede enfriar en una **trampa atómica** basada en láser. Con base en la teoría cinética de los gases (capítulo 18), estime esta temperatura "mínima alcanzable".

100. Un átomo de rubidio (masa atómica 85) inicialmente está a temperatura ambiente y tiene una velocidad $v = 290$ m/s debida a su movimiento térmico. Considere la absorción de fotones por este átomo a partir de un haz láser con longitud de onda $\lambda = 780$ nm. Suponga que la velocidad inicial v del átomo de rubidio se dirige hacia el haz láser (los fotones se mueven a la derecha y el átomo se mueve hacia la izquierda) y que el átomo absorbe un nuevo fotón cada 25 ns. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que este proceso detenga por completo ("enfríe") al átomo de rubidio? [*Nota:* Un análisis más detallado predice que el átomo se puede frenar aproximadamente a 1 cm/s mediante este proceso de absorción de luz, pero no se puede detener por completo].

*Problemas numéricos/por computadora

***101.** (III) *a*) Grafique la fórmula de radiación de Planck (parte superior de la página 989) como función de la longitud de onda, desde $\lambda = 20$ nm hasta 2000 nm, en intervalos de 20 nm, para dos filamentos de bombilla, uno a 2700 K y otro a 3300 K. Trace ambas curvas sobre el mismo conjunto de ejes. *b*) ¿Aproximadamente cuánto más intensa es la luz visible de la bombilla más caliente? Use integración numérica.

***102.** (III) Estime qué porcentaje de energía de luz solar emitida está en el rango visible. Use la fórmula de radiación de Planck (parte superior de la página 989) e integración numérica.

***103.** (III) El potasio tiene una de las funciones de trabajo más bajas de todos los metales y, por lo tanto, es útil en dispositivos fotoeléctricos que emplean luz visible. Luz proveniente de una fuente incide sobre una superficie de potasio. Los datos para el voltaje de frenado V_0 como función de la longitud de onda λ se presentan abajo. *a*) Explique por qué se espera que una gráfica de V_0 contra $1/\lambda$ produzca una línea recta. ¿Cuáles son las expectativas teóricas para la pendiente y la ordenada al origen de esta línea? *b*) Con los datos de abajo, grafique V_0 contra $1/\lambda$ y demuestre que de hecho resulta una gráfica en línea recta. *c*) Determine la pendiente a y la ordenada al origen b de esta línea. Con sus valores para a y b, determine *d*) la función trabajo del potasio (eV) y *e*) la constante de Planck h (J·s).

λ (μm)	0.400	0.430	0.460	0.490	0.520
V_0 (V)	0.803	0.578	0.402	0.229	0.083

Respuestas a los ejercicios

A: Más fotones de 1000 nm (menor frecuencia).
B: 5.50×10^{14} Hz, 545 nm.
C: Sólo λ.
D: Disminuye.
E: *e*).
F: *c*).

A. Piccard, E. Henriot, P. Ehrenfest, Ed. Herzen, Th. De Donder, E. Schrödinger, E. Verschaffelt, W. Pauli, W. Heisenberg, R. H. Fowler, L. Brillouin, P. Debye, M. Knudsen, W. L. Bragg, H. A. Kramers, P. A. M. Dirac, A. H. Compton, L. de Broglie, M. Born, N. Bohr, I. Langmuir, M. Planck, Mme Curie, H. A. Lorentz, A. Einstein, P. Langevin, Ch. E. Guye, C. T. R. Wilson, O. W. Richardson

Participantes en la Conferencia Solvay de 1927. Albert Einstein, sentado al centro de la primera fila, tuvo dificultad para aceptar que la naturaleza podría comportarse de acuerdo con las reglas de la mecánica cuántica. En este capítulo se presenta un breve resumen de la mecánica cuántica, comenzando con la función de onda y el principio de incertidumbre. Examinaremos la ecuación de Schrödinger y sus soluciones para algunos casos simples: partículas libres, el pozo cuadrado y el tunelamiento a través de una barrera.

CAPÍTULO 38

Mecánica cuántica

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
El principio de incertidumbre afirma que

a) ninguna medición puede ser perfecta porque es tecnológicamente imposible fabricar instrumentos de medición perfectos.
b) es imposible medir con exactitud dónde está una partícula, a menos que ésta se encuentre en reposo.
c) es imposible conocer simultáneamente tanto la posición como la cantidad de movimiento de una partícula con certeza completa.
d) en realidad, una partícula no puede tener un valor completamente cierto de cantidad de movimiento.

El mdelo atómico de Bohr dio una primera imagen (aunque aproximada) de cómo es un átomo. Con base en él se propusieron explicaciones de por qué los átomos emiten y absorben luz sólo a ciertas longitudes de onda. Las longitudes de onda de los espectros de líneas y la energía de ionización para el hidrógeno (y iones de un electrón) están en excelente concordancia con los experimentos. Pero la teoría de Bohr tuvo importantes limitaciones. No logró predecir los espectros de líneas para átomos más complejos, ni siquiera para el átomo neutro de helio, que sólo tiene dos electrones. Ni logró explicar por qué las líneas de emisión, cuando se ven con gran precisión, consisten en dos o más líneas muy cercanas entre sí (que se conocen como *estructura fina*). El modelo de Bohr tampoco explicaba por qué algunas líneas espectrales eran más brillantes que otras. Y no pudo explicar el enlace de los átomos en las moléculas o en los sólidos y líquidos.

Por otra parte, desde un punto de vista teórico, la teoría de Bohr no era satisfactoria: era una mezcla extraña de ideas clásicas y cuánticas. Más aún, la dualidad onda-partícula no se resolvía en realidad.

CONTENIDO

38–1 Una nueva teoría: La mecánica cuántica
38–2 La función de onda y su interpretación; el experimento de doble rendija
38–3 El principio de incertidumbre de Heisenberg
38–4 Implicaciones filosóficas; probabilidad frente a determinismo
38–5 La ecuación de Schrödinger en una dimensión: Una forma independiente del tiempo
*38–6 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo
38–7 Partículas libres; ondas planas y paquetes de ondas
38–8 Partícula en un pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita (una caja rígida)
38–9 Pozo de potencial finito
38–10 Tunelamiento a través de una barrera

FIGURA 38–1 Erwin Schrödinger con Lise Meitner (véase el capítulo 42).

FIGURA 38–2 Werner Heisenberg (centro) en el lago Como, con Enrico Fermi (izquierda) y Wolfgang Pauli (derecha).

Estas limitaciones de la teoría de Bohr se mencionan no para menospreciarla, pues se trató de un hito en la historia de la ciencia; más bien, se mencionan para mostrar por qué, a principios de la década de 1920, se volvió cada vez más evidente la necesidad de una nueva teoría más amplia. No tardó mucho tiempo en llegar. Menos de dos años después de que De Broglie propuso su hipótesis de onda-materia, Erwin Schrödinger (1887-1961; figura 38-1) y Werner Heisenberg (1901-1976; figura 38-2) desarrollaron de manera independiente una nueva teoría de mayor alcance.

38–1 Una nueva teoría: La mecánica cuántica

La nueva teoría, llamada **mecánica cuántica**, resultó tener gran éxito. Unificó la dualidad onda-partícula en una sola teoría consistente y lidió de manera satisfactoria con los espectros emitidos por átomos complejos, incluso con los detalles finos. Explicó el brillo relativo de las líneas espectrales y cómo los átomos forman moléculas. También es una teoría mucho más general que abarca todos los fenómenos cuánticos, desde la radiación de cuerpo negro hasta los átomos y las moléculas. Explicó una amplia gama de fenómenos naturales y, a partir de sus predicciones, fueron posibles muchos nuevos dispositivos prácticos. De hecho, tuvo tanto éxito que, en la actualidad, casi todos los físicos la aceptan como la teoría fundamental que subyace en los procesos físicos.

La mecánica cuántica trata principalmente con el mundo microscópico de átomos y luz. Pero esta nueva teoría, cuando se aplica a fenómenos macroscópicos, también debe ser congruente con las antiguas leyes clásicas. La mecánica cuántica satisface plenamente todo esto, es decir, el **principio de correspondencia** (que ya se mencionó en la sección 37-11).

Esto no significa que se deban desechar las teorías clásicas, como las leyes de Newton. En el mundo cotidiano, estas últimas son mucho más fáciles de aplicar al tiempo que brindan descripciones suficientemente precisas. Pero cuando se estudia una situación que implica una alta rapidez, cercana a la rapidez de la luz, se debe usar la teoría de la relatividad; y cuando se enfrenta el pequeño mundo del átomo, se emplea la mecánica cuántica.

Aunque aquí no se entrará en detalles sobre las matemáticas de la mecánica cuántica, se estudiarán las principales ideas y cómo implican a las propiedades ondulatorias y corpusculares de la materia para explicar la estructura atómica y otras aplicaciones.

38–2 La función de onda y su interpretación; el experimento de doble rendija

Las propiedades importantes de cualquier onda son su longitud de onda, frecuencia y amplitud. Para una onda electromagnética, la frecuencia (o longitud de onda) determina si la luz está o no en el espectro visible y, si es así, de qué color es. También vimos (ecuación 37-3) que la frecuencia es una medida de la energía de los fotones correspondientes ($E = hf$). La amplitud o el desplazamiento de una onda electromagnética en cualquier punto es la fuerza del campo eléctrico (o magnético) en ese punto, y se relaciona con la intensidad de la onda (el brillo de la luz).

Para partículas materiales como los electrones, la mecánica cuántica relaciona la longitud de onda con la cantidad de movimiento, de acuerdo con la fórmula de De Broglie, $\lambda = h/p$, ecuación 37-7. ¿Pero a qué corresponde la *amplitud* o el *desplazamiento* de una onda de materia? La amplitud de una onda electromagnética se representa mediante los campos eléctrico y magnético, E y B. En la mecánica cuántica, este papel lo desempeña la **función de onda**, a la que se le da el símbolo Ψ (la letra griega psi mayúscula). Así, Ψ representa el desplazamiento de onda, como función del tiempo y la posición, de un nuevo tipo de campo que se puede llamar un campo "de materia" u onda de materia.

Para comprender cómo interpretar la función de onda Ψ, haremos una analogía con la luz utilizando la dualidad onda-partícula.

En el capítulo 15 se vio que la intensidad I de cualquier onda es proporcional al cuadrado de la amplitud. Esto también es cierto para las ondas de luz, como se vio en el capítulo 31. Esto es,

$$I \propto E^2,$$

donde E es la intensidad del campo eléctrico. Desde el punto de vista de la *partícula*, la intensidad de un haz de luz (de frecuencia dada) es proporcional al número de fotones, N, que pasan a través de un área dada por unidad de tiempo. Cuanto mayor sea el número de fotones que haya, mayor será la intensidad. Por lo tanto,

$$I \propto E^2 \propto N.$$

Esta proporción se puede invertir de manera que

$$N \propto E^2.$$

Esto es, el número de fotones (que inciden sobre una página de este libro, por ejemplo) es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo eléctrico.

Si el haz de luz es muy débil, sólo intervendrán algunos fotones. De hecho, es posible "construir" una fotografía en una cámara empleando luz muy débil, de manera que se pueda ver el efecto de fotones individuales.

Si sólo se trata con un fotón, la relación anterior ($N \propto E^2$) se puede interpretar en una forma ligeramente diferente. En cualquier punto, el cuadrado de la intensidad del campo eléctrico, E^2, es una medida de la *probabilidad* de que un fotón estará en esa posición. En puntos donde E^2 es grande, hay una alta probabilidad de que el fotón estará ahí; donde E^2 es pequeña, la probabilidad es baja.

Es posible interpretar las ondas de materia de la misma forma, como sugirió por primera vez Max Born (1881-1970) en 1927. La función de onda Ψ puede variar en magnitud de un punto a otro en espacio y tiempo. Si Ψ describe una colección de muchos electrones, entonces $|\Psi|^2$ en cualquier punto será proporcional al número de electrones que se espera encontrar en ese punto.[†] Cuando se trata con números pequeños de electrones no es posible hacer predicciones exactas, de manera que $|\Psi|^2$ toma el carácter de una probabilidad. Si Ψ, que depende del tiempo y la posición, representa un solo electrón (digamos, en un átomo), entonces $|\Psi|^2$ se interpreta del modo siguiente: $|\Psi|^2$ *en cierto punto del espacio y del tiempo representa la probabilidad de encontrar al electrón en la posición y el tiempo dados.* Por esa razón, a $|\Psi|^2$ a menudo se le llama **densidad de probabilidad** o **distribución de probabilidad**.

Experimento de interferencia de doble rendija para electrones

Para comprender mejor esto, considere como experimento mental el conocido experimento de doble rendija, y visualícelo tanto para el caso de la luz como en el de los electrones.

Considere dos rendijas cuyo tamaño y separación estén en el orden de la longitud de onda de aquello que se dirija a ellas, ya sea luz o electrones, figura 38-3. Se sabe muy bien qué ocurriría en el caso de la luz, pues es justo el experimento de doble rendija de Young (sección 34-3): en la pantalla se vería un patrón de interferencia. Si la luz se sustituye por electrones con longitud de onda comparable al tamaño de la rendija, también se produciría un patrón de interferencia (recuerde la figura 37-11). En el caso de la luz, el patrón sería visible al ojo o se podría registrar en una película. En el caso de electrones, se podría usar una pantalla fluorescente (que brilla donde incide un electrón).

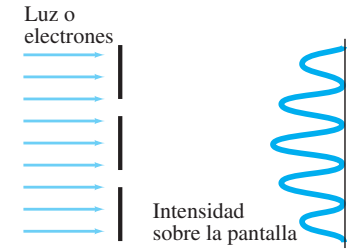


FIGURA 38–3 Haz paralelo, de luz o electrones, que incide sobre dos rendijas cuyos tamaños son comparables a la longitud de onda. Se observa un patrón de interferencia.

[†]La función de onda Ψ por lo general es una cantidad compleja (esto es, implica $i = \sqrt{-1}$) y, por consiguiente, no es directamente observable. Por otra parte, $|\Psi|^2$, el valor absoluto de Ψ al cuadrado, siempre es una cantidad real; se puede dar una interpretación física a $|\Psi|^2$.

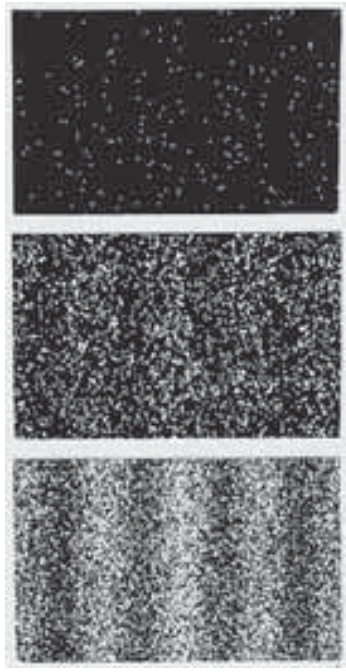


FIGURA 38–4 Experimento de doble rendija de Young realizado con electrones; note que el patrón no es evidente sólo con algunos electrones (fotografía superior), pero con más y más electrones (segunda y tercera fotografías), se distingue el familiar patrón de interferencia de doble rendija (capítulo 34).

Si el flujo de electrones (o fotones) se reduce de manera que pasen a través de las rendijas uno por uno, se vería un destello cada vez que uno de ellos incidiera sobre la pantalla. Al principio, los destellos parecerían aleatorios. De hecho, no hay forma de predecir en qué punto de la pantalla incidiría algún electrón. Si se deja que el experimento se efectúe durante mucho tiempo, y se lleva el registro del punto de la pantalla donde incide cada electrón, pronto se vería el surgimiento de un patrón: el patrón de interferencia predicho por la teoría ondulatoria; véase la figura 38-4. De esta forma, aunque no se pudiera predecir en qué punto de la pantalla incidiría un electrón dado, se podrían predecir probabilidades. (Lo mismo es válido en el caso de los fotones). La probabilidad, como se mencionó antes, es proporcional a $|\Psi|^2$. Donde $|\Psi|^2$ es cero, se obtendría un mínimo en el patrón de interferencia. Y donde $|\Psi|^2$ es un máximo, se obtendría un pico en el patrón de interferencia.

De esta forma, se presentaría el patrón de interferencia aun cuando los electrones (o fotones) pasaran a través de las rendijas uno a la vez. De manera que el patrón de interferencia no podría surgir a partir de la interacción de un electrón con otro. Es como si un electrón que pasara a través de ambas rendijas al mismo tiempo, interfiriera consigo mismo. Esto es posible porque un electrón no es precisamente una partícula. Es tanto una onda como una partícula, y una onda podría viajar a través de ambas rendijas a la vez. ¿Pero qué ocurriría si se cubre una de las rendijas, de manera que se sepa que el electrón pasará a través de la otra rendija, y poco después se cubre la segunda rendija, de manera que el electrón tenga que pasar a través de la primera rendija? El resultado sería que no se vería patrón de interferencia. En vez de ello, se verían dos áreas brillantes (o patrones de difracción) sobre la pantalla detrás de las rendijas. Esto confirma la idea de que, si ambas rendijas están abiertas, la pantalla mostrará un patrón de interferencia como si cada electrón pasara a través de ambas rendijas, como una onda. Sin embargo, cada electrón formaría una pequeña mancha sobre la pantalla, como si fuera una partícula.

El punto principal de esta discusión es éste: si los electrones (y otras partículas) se tratan como si fueran ondas, entonces Ψ representa la amplitud de onda. Si se les trata como partículas, entonces se les debe considerar sobre una base *probabilística*. El cuadrado de la función de onda, $|\Psi|^2$, da la probabilidad de encontrar un electrón dado, en un punto dado. No se puede predecir —y ni siquiera seguir— con precisión la trayectoria de un solo electrón a través de espacio y tiempo.

38–3 El principio de incertidumbre de Heisenberg

Cada vez que se realiza una medición, siempre hay implícita cierta incertidumbre. Por ejemplo, no es posible realizar una medición absolutamente exacta de la longitud de una mesa. Incluso con una cinta métrica que tenga marcas con separaciones de 1 mm, habrá una inexactitud de quizá $\frac{1}{2}$ mm o algo así. Los instrumentos más precisos producirán mediciones más precisas. Pero siempre hay algo de incertidumbre implícita en una medición, sin importar cuán bueno sea el dispositivo de medición. Se espera que, por usar instrumentos más precisos, la incertidumbre en una medición se pueda hacer indefinidamente pequeña.

Pero, de acuerdo con la mecánica cuántica, en realidad existe un límite a la precisión de ciertas mediciones. Este límite no es una restricción acerca de qué tan buenos instrumentos se pueden fabricar; más bien, es de naturaleza inherente. Es el resultado de dos factores: la dualidad onda-partícula y la inevitable interacción entre el objeto observado y el instrumento de observación. Examinemos esto con más detalle.

No es posible realizar una medición de un objeto sin perturbarlo, al menos un poco. Imagine que está tratando de localizar una pelota de ping-pong en una habitación completamente oscura. Usted andará a tientas por ahí intentando encontrar su posición; y justo cuando la toca con su dedo, la pelota se mueve y se aleja de usted. Siempre que se mide la posición de un objeto, ya sea una pelota o un electrón, siempre se le toca con algo más que da la información acerca de su posición. Para localizar una pelota de ping-pong perdida en una habitación oscura, podría sondear con su mano o una vara; o podría encender una luz y detectar la luz que se refleja en la pelota. Cuando busca con su mano o con una vara, determina la posición de la pelota cuando la toca, pero al mismo tiempo, inevitablemente, la golpea y le imparte alguna cantidad de movimiento. Por lo tanto, no sabrá su posición *futura*. Lo mismo sería cierto si observa la

pelota de ping-pong con la luz. Para "ver" la pelota, al menos un fotón debe dispersarse desde ella, y el fotón reflejado debe entrar a su ojo o algún otro detector. Cuando un fotón incide sobre un objeto de tamaño ordinario, no altera notablemente el movimiento o la posición del objeto. Pero cuando un fotón incide sobre un objeto muy pequeño, como un electrón, puede transferir cantidad de movimiento al objeto y, de esta forma, cambiar considerablemente el movimiento y la posición del objeto en una forma impredecible. El simple hecho de medir la posición de un objeto en un tiempo hace impreciso el conocimiento de su posición futura.

Ahora veamos dónde entra la dualidad onda-partícula. Imagine un experimento mental en el cual se intenta medir la posición de un objeto, por ejemplo, un electrón, mediante fotones, figura 38-5. (Los argumentos serían similares si se usara, en vez de ello, un microscopio electrónico). Como se vio en el capítulo 35, los objetos se pueden ver con una precisión, a lo sumo, de aproximadamente la longitud de onda de la radiación que se emplea, debido a la difracción. Si se quiere una medición de posición precisa, se debe usar una longitud de onda corta. Pero una longitud de onda corta corresponde a alta frecuencia y gran cantidad de movimiento ($p = h/\lambda$); y cuanta mayor cantidad de movimiento tengan los fotones, más cantidad de movimiento impartirán al objeto cuando lleguen a él. Si se usan fotones con longitud de onda más larga, y con la correspondiente menor cantidad de movimiento, el movimiento del objeto, cuando inciden sobre él los fotones, no se verá muy afectado. Pero una longitud de onda más larga significa menor resolución, de manera que la posición del objeto se conocerá con menor exactitud. Así, el acto de observar produce una incertidumbre tanto en la *posición* como en la *cantidad de movimiento* del electrón. Ésta es la esencia del *principio de incertidumbre*, que enunció por primera vez Heisenberg en 1927.

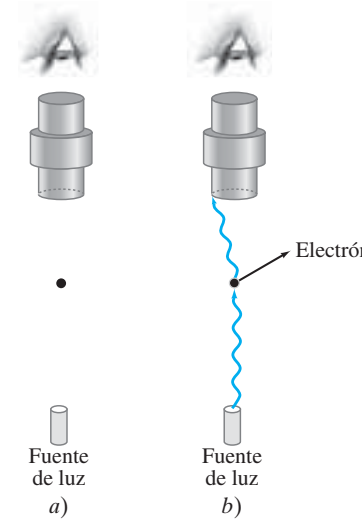


FIGURA 38–5 Experimento mental para observar un electrón con un potente microscopio óptico. Al menos un fotón se debe dispersar desde electrón (lo que le transfiere cierta cantidad de movimiento) para entrar al microscopio.

Cuantitativamente, se puede hacer un cálculo aproximado de la magnitud de este efecto. Si se emplea luz con longitud de onda λ, la posición se puede medir, cuando mucho, a una precisión de aproximadamente λ. Esto es, la incertidumbre en la medición de la posición, Δx, es aproximadamente

$$\Delta x \approx \lambda.$$

Suponga que el objeto se puede detectar mediante un solo fotón. El fotón tiene una cantidad de movimiento $p_x = h/\lambda$ (ecuación 37-5). Cuando el fotón incide sobre el objeto, cederá parte de su cantidad de movimiento, o quizá toda, al objeto (figura 38-5). Por lo tanto, la cantidad de movimiento final p_x del objeto será incierta en la cantidad

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda}$$

ya que no se puede decir por anticipado cuánta cantidad de movimiento se transferirá. El producto de estas incertidumbres es

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \approx h.$$

Las incertidumbres podrían ser mayores que esto, dependiendo del aparato y el número de fotones necesarios para la detección. Un cálculo matemático más cuidadoso indica que el producto de las incertidumbres, en el mejor de los casos, es aproximadamente

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \gtrsim \frac{h}{2\pi} \qquad \textbf{(38–1)}$$

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE (Δx y Δp)

donde Δp_x es la incertidumbre de la cantidad de movimiento en la dirección x.[†] Éste es un enunciado matemático del **principio de incertidumbre de Heisenberg** o, como a veces se le llama, **principio de indeterminación**, el cual nos dice que no es posible medir *tanto* la posición *como* la cantidad de movimiento de un objeto precisamente al mismo tiempo. Cuanto mayor sea la exactitud con que se intenta medir la posición, de manera que Δx sea pequeña, mayor será la incertidumbre en la cantidad de movimiento, Δp_x. Si se intenta medir la cantidad de movimiento de manera muy exacta, entonces aumenta la incertidumbre en la posición.

[†]Sin embargo, note que la mecánica cuántica no permite mediciones precisas simultáneas de p_x y y; esto es, $(\Delta y)(\Delta p_x) \gtrsim 0$.

Sin embargo, el principio de incertidumbre no prohíbe mediciones individuales precisas. Por ejemplo, en principio se podría medir con exactitud la posición de un objeto. Pero entonces su cantidad de movimiento sería completamente desconocida. De esta forma, aunque se pueda conocer la posición del objeto con exactitud en un instante, no se podría tener idea en absoluto de dónde estaría un momento después. Las incertidumbres expresadas aquí son inherentes en naturaleza y reflejan la mejor precisión teóricamente alcanzable incluso con los mejores instrumentos.

⚠ **CUIDADO**

Las incertidumbres no se deben a deficiencias del instrumento, sino que es de naturaleza inherente (onda-partícula)

EJERCICIO A Regrese a la pregunta de inicio de capítulo en la página 1017, y respóndala de nuevo ahora.

Otra forma útil del principio de incertidumbre relaciona energía y tiempo, lo cual se examina a continuación. El objeto a detectar tiene una incertidumbre en posición $\Delta x \approx \lambda$. El fotón que lo detecta viaja con rapidez c y tarda un tiempo $\Delta t \approx \Delta x/c \approx \lambda/c$ para pasar a través de la distancia de la incertidumbre. Por lo tanto, el tiempo medido cuando el objeto está en una posición dada, es incierta por aproximadamente

$$\Delta t \approx \frac{\lambda}{c}.$$

Puesto que el fotón puede transferir parte o toda su energía ($= hf = hc/\lambda$) al objeto, la incertidumbre en energía del objeto, como resultado, es

$$\Delta E \approx \frac{hc}{\lambda}.$$

El producto de estas dos incertidumbres es

$$(\Delta E)(\Delta t) \approx h.$$

Un cálculo más cuidadoso da por resultado,

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE (ΔE y Δt)

$$(\Delta E)(\Delta t) \gtrsim \frac{h}{2\pi}. \qquad \textbf{(38–2)}$$

Esta forma del principio de incertidumbre dice que la energía de un objeto puede ser incierta (o se puede interpretar como brevemente no conservada) mediante una cantidad ΔE para un tiempo $\Delta t \approx h/(2\pi\,\Delta E)$.

La cantidad $(h/2\pi)$ aparece con tanta frecuencia en la mecánica cuántica, que por conveniencia se le da el símbolo $\hbar$ ("h barra"). Esto es,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}.$$

Al usar estas notaciones, las ecuaciones 38-1 y 38-2 para el principio de incertidumbre se pueden escribir como

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \gtrsim \hbar \quad \text{y} \quad (\Delta E)(\Delta t) \gtrsim \hbar.$$

Nos hemos referido a la posición y velocidad de un electrón como si fuera una partícula. Pero no es simplemente una partícula. De hecho, el principio de incertidumbre existe porque un electrón —y la materia en general—, tiene propiedades tanto de onda como de partícula. Lo que el principio de incertidumbre dice en realidad es que, si se insiste en considerar al electrón como una partícula, entonces hay ciertas limitaciones para esta visión simplificada, a saber, que la posición y la velocidad no se pueden conocer ambas con precisión al mismo tiempo; e incluso que el electrón no *tiene* una posición y una cantidad de movimiento precisas al mismo tiempo (porque no es simplemente una partícula). De igual modo, la energía puede ser incierta en la cantidad ΔE para un tiempo $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$.

Puesto que la constante de Planck, h, es tan pequeña, las incertidumbres expresadas en el principio de incertidumbre por lo general son despreciables a nivel macroscópico. Pero a nivel de dimensiones atómicas, las incertidumbres son significativas. Puesto que los objetos ordinarios se consideran formados de átomos que contienen núcleos y electrones, el principio de incertidumbre es relevante para la comprensión de toda la naturaleza. El principio de incertidumbre expresa, tal vez con mayor claridad, la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica. Por lo tanto, con frecuencia se utiliza como base para discusiones filosóficas.

EJEMPLO 38–1 **Incertidumbre en la posición de un electrón.** Un electrón se desplaza en línea recta con una rapidez constante $v = 1.10 \times 10^6$ m/s que se midió con una precisión del 0.10%. ¿Cuál es la precisión máxima con la que se podría medir su posición simultáneamente?

PLANTEAMIENTO La cantidad de movimiento es $p = mv$, y la incertidumbre en p es $\Delta p = 0.0010p$. El principio de incertidumbre (ecuación 38-1) nos da la Δx más baja con el signo igual.

SOLUCIÓN La cantidad de movimiento del electrón es

$$p = mv = (9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(1.10 \times 10^6\,\text{m/s}) = 1.00 \times 10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

La incertidumbre en la cantidad de movimiento es el 0.10% de esto, o $\Delta p = 1.0 \times 10^{-17}$ kg·m/s. A partir del principio de incertidumbre, la mejor medición de posición simultánea tendrá una incertidumbre de

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{1.0 \times 10^{-27}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}} = 1.1 \times 10^{-7}\,\text{m},$$

o 110 nm.

NOTA Esto es aproximadamente 1000 veces el diámetro de un átomo.

EJEMPLO 38–2 **Incertidumbre en la posición de una pelota de béisbol.** ¿Cuál es la incertidumbre en posición, impuesta por el principio de incertidumbre, sobre una pelota de béisbol de 150 g que se lanza a (93 ± 2) mi/h $= (42 \pm 1)$ m/s?

PLANTEAMIENTO La incertidumbre en la rapidez es $\Delta v = 1$ m/s. Se multiplica Δv por m para obtener Δp, luego se utiliza el principio de incertidumbre y se despeja Δx.

SOLUCIÓN La incertidumbre en la cantidad de movimiento es

$$\Delta p = m\,\Delta v = (0.150\,\text{kg})(1\,\text{m/s}) = 0.15\,\text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la incertidumbre en una medición de posición podría ser tan pequeña como

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{0.15\,\text{kg}\cdot\text{m/s}} = 7 \times 10^{-34}\,\text{m}.$$

NOTA Esta distancia es mucho menor que cualquiera que pudiéramos imaginar al realizar observaciones o mediciones. Es billones de billones de veces menor que un átomo. De hecho, el principio de incertidumbre no establece un límite relevante sobre medición en el caso de objetos macroscópicos.

EJEMPLO 38–3 **ESTIMACIÓN** **Cálculo de vida de J/ψ.** La masa promedio de el mesón J/ψ, que se descubrió en 1974, se midió en 3100 MeV/c^2 (observe el uso de unidades de energía, pues $E = mc^2$) y un ancho intrínseco de 63 keV/c^2. Con esto se da a entender que las masas medidas de diferentes mesones J/ψ en realidad eran ligeramente diferentes una de otra. Este "ancho" de masa se relaciona con el tiempo de vida muy corto del J/ψ antes de que decaiga en otras partículas. A partir del principio de incertidumbre, si la partícula existe sólo durante un tiempo Δt, su masa (o energía en reposo) será incierta por $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$. Estime la vida de J/$\psi$.

PLANTEAMIENTO Se utiliza la versión energía-tiempo del principio de incertidumbre, ecuación 38-2.

SOLUCIÓN La incertidumbre de 63 keV/c^2 en la masa de J/ψ es una incertidumbre en su energía en reposo, lo que en joules es

$$\Delta E = (63 \times 10^3\,\text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}) = 1.01 \times 10^{-14}\,\text{J}.$$

Entonces se espera que su tiempo de vida τ (= Δt con la ecuación 38-2) sea

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{1.06 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{1.01 \times 10^{-14}\,\text{J}} \approx 1 \times 10^{-20}\,\text{s}.$$

Las vidas así de cortas resultan difíciles de medir directamente, y la asignación de vidas muy cortas depende de este uso del principio de incertidumbre. (Véase el capítulo 43).

El principio de incertidumbre también se aplica a variables angulares:

$$(\Delta L_z)(\Delta\phi) \gtrsim \hbar$$

donde L es el componente de la cantidad de movimiento angular a lo largo de un eje dado (z) y ϕ es la posición angular en un plano perpendicular a dicho eje.

38–4 Implicaciones filosóficas; probabilidad frente a determinismo

La visión newtoniana clásica del mundo es determinista (véase la sección 6-5). Una de sus ideas básicas es que, una vez conocida la posición y velocidad de un objeto en un tiempo particular, su posición futura se puede predecir si se conocen las fuerzas sobre él. Por ejemplo, si una piedra se lanza algunas veces con la misma velocidad y ángulo iniciales, y las fuerzas sobre ella permanecen constantes, la trayectoria del proyectil siempre será la misma. Si se conocen las fuerzas (gravedad y resistencia del aire, cuando existe esta última), la trayectoria de la piedra se puede predecir con precisión. Esta visión mecanicista implica que el desarrollo futuro del Universo, que se supone constituido por objetos particulares, está completamente determinado.

Esta visión determinista clásica del mundo físico se alteró radicalmente con la mecánica cuántica. Como se vio en el análisis del experimento de doble rendija (sección 38-2), electrones preparados en la misma forma no terminarán en el mismo lugar. De acuerdo con la mecánica cuántica, existen ciertas probabilidades de que un electrón llegue a diferentes puntos. Esto es muy diferente de la visión clásica, en la que la trayectoria de una partícula es exactamente predecible a partir de la posición y velocidad iniciales, y de las fuerzas que se ejercen sobre ella. De acuerdo con la mecánica cuántica, la posición y velocidad de un objeto no pueden conocerse con exactitud al mismo tiempo. Esto se expresa en el principio de incertidumbre, y surge porque sus entidades básicas, como los electrones, no se consideran simplemente como partículas, ya que también tienen propiedades ondulatorias. La mecánica cuántica permite calcular sólo la probabilidad[†] de que, por ejemplo, un electrón (cuando se considera como partícula) se observe en varios lugares. La mecánica cuántica dice que hay cierto carácter impredecible inherente a la naturaleza.

Puesto que la materia se considera como constituida de átomos, se espera que incluso los objetos de tamaño ordinario estén gobernados por la probabilidad y no por un determinismo estricto. Por ejemplo, la mecánica cuántica predice una probabilidad finita (pero insignificante) de que, cuando alguien lance una piedra, su trayectoria súbitamente se curvará hacia arriba en vez de seguir la parábola con curva hacia abajo característica del movimiento normal de proyectiles. La mecánica cuántica predice con probabilidad extremadamente alta que los objetos ordinarios se comportarán justo como predicen las leyes clásicas de la física. Pero estas predicciones se consideran probabilidades, no certidumbres. La razón de que los objetos macroscópicos se comporten en concordancia con las leyes clásicas con tan alta probabilidad se debe al gran número de moléculas implicadas: cuando en una situación estadística se presenta un enorme número de objetos, las desviaciones del promedio (o del resultado más probable) tienden a cero. La configuración promedio de gran número de moléculas sigue las llamadas leyes fijas de la física clásica con tan alta probabilidad, que da lugar a un aparente "determinismo". Las desviaciones de las leyes clásicas se observan cuando se estudia un pequeño número de moléculas. Entonces, se puede decir que, aunque no hay leyes deterministas precisas en la mecánica cuántica, hay leyes estadísticas basadas en la probabilidad.

Es importante notar que hay una diferencia entre la probabilidad impuesta por la mecánica cuántica y la que se usó en el siglo XIX para entender la termodinámica y el comportamiento de los gases en términos de moléculas (capítulos 18 y 20). En termodinámica se utiliza la probabilidad porque hay demasiadas partículas que rastrear. Pero se supone que las moléculas todavía se mueven e interactúan en una forma determinista con base en las leyes de Newton. La probabilidad en la mecánica cuántica es muy diferente; se ve como *inherente* a la naturaleza, y no como una limitación en la capacidad para calcular o medir.

La visión que se presenta aquí es la que generalmente se acepta y se llama **interpretación de Copenhague** de la mecánica cuántica, en honor a la ciudad natal de Niels Bohr, ya que fue el lugar donde principalmente se desarrollaron las discusiones al respecto entre Bohr y otros prominentes físicos.

Puesto que los electrones no son simplemente partículas, no se les puede considerar como seguidores de trayectorias particulares en espacio y tiempo. Esto sugiere que una descripción de la materia en el espacio y el tiempo puede no ser del todo correcta. Esta conclusión profunda y de largo alcance es un tema de discusión vigente entre filó-

[†]Advierta que estas probabilidades se pueden calcular con precisión, tal como las predicciones exactas de las probabilidades al lanzar un dado o jugar cartas, pero son diferentes a las predicciones de las probabilidades en los eventos deportivos o las referentes a desastres, ya sea naturales o provocados por el hombre, que son sólo estimaciones.

sofos. Acaso el filósofo más importante e influyente de la mecánica cuántica fue Bohr. Él argumentó que no es posible una descripción espacio-temporal de los átomos y electrones reales. Aunque una descripción de experimentos sobre átomos o electrones debe darse en términos de espacio y tiempo y otros conceptos familiares a la experiencia ordinaria, tal como los de ondas y partículas. No se debe dejar que las *descripciones* de los experimentos nos lleven a creer que los átomos o los electrones en sí mismos realmente se mueven en el espacio y el tiempo como partículas clásicas.

38–5 La ecuación de Schrödinger en una dimensión: Una forma independiente del tiempo

Para describir cuantitativamente los sistemas físicos mediante la mecánica cuántica, se debe tener un medio para determinar matemáticamente la función de onda Ψ. La ecuación básica (en el reino no relativista) para determinar Ψ es la *ecuación de Schrödinger*. Sin embargo, no es posible deducir la ecuación de Schrödinger a partir de algunos principios superiores, como sucede con la segunda ley de Newton, por ejemplo. La relación $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ la *inventó* Newton para describir cómo el movimiento de un objeto se relaciona con la fuerza neta aplicada. Como se vio antes en este libro, la segunda ley de Newton funciona excepcionalmente bien. En el reino de la física clásica es el punto de partida de la resolución analítica de una amplia gama de problemas, y las soluciones que produce son por completo congruentes con los experimentos. La validez de cualquier ecuación fundamental reside en su concordancia con los experimentos. La ecuación de Schrödinger forma parte de una nueva teoría, y también se tuvo que proponer y luego cotejar con los experimentos, un examen que aprobó de manera espléndida.

La ecuación de Schrödinger se puede escribir en dos formas: la versión dependiente del tiempo y la versión independiente del tiempo. Este texto se interesa principalmente por situaciones de estado estacionario, esto es, cuando no hay dependencia del tiempo; por esa razón, principalmente se tratará con la versión independiente del tiempo. (En la sección 38-6 se discute brevemente la versión dependiente del tiempo). La versión independiente del tiempo implica una función de onda sólo con dependencia espacial, que se representa mediante la psi minúscula, $\psi(x)$, para el caso sencillo unidimensional que se trata aquí. En tres dimensiones, se escribe $\psi(x, y, z)$ o $\psi(r, \theta, \phi)$.

En mecánica clásica, los problemas se resuelven mediante dos enfoques: mediante las leyes de Newton con el concepto de fuerza, y mediante el concepto de energía con las leyes de conservación. La ecuación de Schrödinger se basa en el enfoque de energía. Aun cuando la ecuación de Schrödinger no se pueda deducir, es posible sugerir cuál forma debe tomar al usar la conservación de la energía y considerar un caso muy simple: el de una partícula libre sobre la que no actúan fuerzas, de manera que su energía potencial U es constante. Suponga que la partícula se desplaza a lo largo del eje x y, puesto que no actúan fuerzas sobre ella, su cantidad de movimiento permanece constante y su longitud de onda ($\lambda = h/p$) es fija. Para describir una onda para una partícula libre como un electrón, se espera que su función de onda satisfaga una ecuación diferencial que sea parecida (pero no idéntica) a la ecuación de onda clásica. Veamos lo que se puede inferir acerca de esta ecuación. Considere una simple onda viajera de una sola longitud de onda λ cuyo desplazamiento de onda, como se vio en el capítulo 15 en el caso de ondas mecánicas y en el capítulo 31 en el de ondas electromagnéticas, está dada por $A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, o de manera más general como una superposición de seno y coseno: $A \operatorname{sen}(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t)$. Aquí sólo se tiene interés en la dependencia espacial, de manera que se considera la onda en un momento específico, por ejemplo, $t = 0$. Por consiguiente, se escribe como la función de onda para la partícula libre

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx, \qquad \textbf{(38–3a)}$$

donde A y B son constantes[†] y $k = 2\pi/\lambda$ (ecuación 15-11). Para una partícula de masa m y velocidad v, la longitud de onda de De Broglie es $\lambda = h/p$, donde $p = mv$ es la cantidad de movimiento de la partícula. En consecuencia,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}. \qquad \textbf{(38–3b)}$$

[†]En mecánica cuántica, las constantes pueden ser complejas (es decir, con una parte real y/o imaginaria).

Así, un requisito para la ecuación de onda es que tenga la función de onda $\psi(x)$, dada por la ecuación 38-3, como una solución para una partícula libre. Un segundo requisito es que sea congruente con la conservación de la energía, lo cual se expresa como

$$\frac{p^2}{2m} + U = E,$$

donde E es la energía total, U es la energía potencial, y (en tanto que se considera el reino no relativista) la energía cinética K de la partícula de masa m es $K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$. Puesto que $p = \hbar k$ (ecuación 38-3b), la condición de conservación de la energía se expresa como

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U = E. \tag{38–4}$$

De esta forma, se busca una ecuación diferencial que satisfaga la conservación de la energía (ecuación 38-4) cuando $\psi(x)$ es su solución. Ahora, advierta que, si se toman dos derivadas de la expresión para $\psi(x)$, ecuación 38-3a, se obtiene un factor $-k^2$ multiplicado por $\psi(x)$:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(A \operatorname{sen} kx + B \cos kx) = k(A \cos kx - B \operatorname{sen} kx)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = k\frac{d}{dx}(A \cos kx - B \operatorname{sen} kx) = -k^2(A \operatorname{sen} kx + B \cos kx) = -k^2\psi(x).$$

¿Este último término se puede relacionar con el término k^2 en la ecuación 38-4? De hecho, si esta última relación se multiplica por $-\hbar^2/2m$, se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi(x).$$

El lado derecho es justo el primer término a la izquierda en la ecuación 38-4, multiplicado por $\psi(x)$. Si la ecuación 38-4 se multiplica por $\psi(x)$, y se hace esta sustitución, se obtiene

ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER (forma independiente del tiempo)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{38–5}$$

Esta es, de hecho, la **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo** unidimensional, donde, por generalidad, se escribió $U = U(x)$. Ésta es la base para resolver problemas en mecánica cuántica no relativista. En el caso de una partícula que se mueve en tres dimensiones habría derivadas adicionales con respecto a y y a z (véase el capítulo 39).

Note que por ningún medio se dedujo la ecuación de Schrödinger. Aunque se dio un buen argumento en su favor, también pudieron darse otros argumentos que pudieran o no conducir a la misma ecuación. La ecuación de Schrödinger, tal como está escrita (ecuación 38-5) es útil y válida sólo porque dio resultados en concordancia con experimentos para una amplia gama de situaciones.

Existen algunos requisitos que se imponen sobre cualquier función de onda que sea solución de la ecuación de Schrödinger, con la finalidad de que sea físicamente significativa. Primero, se insiste en que sea una función continua; después de todo, si $|\psi|^2$ representa la probabilidad de encontrar una partícula en cierto punto, se espera que la probabilidad sea continua de un punto a otro y no dé saltos discontinuos. Segundo, se desea que la función de onda esté *normalizada*. Por esto se entiende que, para una sola partícula, la probabilidad de encontrarla en un punto u otro (es decir, las probabilidades sumadas sobre todo el espacio) debe ser exactamente 1 (o 100%). Para una sola partícula, $|\psi|^2$ representa la probabilidad de encontrar la partícula en una unidad de volumen. Así,

$$|\psi|^2\, dV \tag{38–6a}$$

es la probabilidad de encontrar la partícula dentro de un volumen dV, donde ψ es el valor de la función de onda en ese volumen infinitesimal dV. Para el caso unidimensional, $dV = dx$, de manera que la probabilidad de encontrar una partícula dentro de dx de la posición x es

$$|\psi(x)|^2\, dx. \tag{38–6b}$$

De esta forma, la suma de las probabilidades sobre todo el espacio (esto es, la probabilidad de encontrar la partícula en alguna parte) se convierte en

$$\int_{\text{todo el espacio}} |\psi|^2 \, dV \;=\; \int |\psi|^2 \, dx \;=\; 1. \qquad \textbf{(38–6c)}$$

Esto se llama la **condición de normalización** y la integral se toma sobre cualquier región del espacio donde exista probabilidad de encontrar a la partícula, que con frecuencia es todo el espacio, desde $x = -\infty$ hasta $x = \infty$.

*38–6 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

La forma más general de la ecuación de Schrödinger, incluida la dependencia del tiempo, para una partícula de masa m que se mueve en una dimensión es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) \;=\; i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}. \qquad \textbf{(38–7)}$$

Ésta es la **ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo**; aquí, $U(x)$ es la energía potencial de la partícula como función de la posición, e i es el número imaginario $i = \sqrt{-1}$. Para una partícula que se mueve en tres dimensiones, habría derivadas adicionales con respecto a y y z, como sucede con la ecuación de onda clásica que se estudió en la sección 15-5. De hecho, vale la pena notar la similitud entre la ecuación de onda de Schrödinger para energía potencial cero ($U = 0$) y la ecuación de onda clásica: $\partial^2 D/\partial t^2 = v^2\partial^2 D/\partial x^2$, donde D es el desplazamiento de la onda (equivalente de la función de onda). En ambas ecuaciones está la segunda derivada con respecto a x; pero en la ecuación de Schrödinger sólo existe la primera derivada con respecto al tiempo, mientras que la ecuación de onda clásica tiene la segunda derivada para el tiempo.

Como se apuntó en la sección anterior, no es posible deducir la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Pero se puede demostrar cómo se obtiene la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (ecuación 38-5) a partir de ella. Para muchos problemas de mecánica cuántica, es posible escribir la función de onda como producto de funciones separadas de espacio y tiempo:

$$\Psi(x,t) \;=\; \psi(x)f(t).$$

Al sustituir esto en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (ecuación 38-7) se obtiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}f(t)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x)f(t) \;=\; i\hbar\psi(x)\frac{df(t)}{dt}.$$

Ambos lados de esta ecuación se dividen entre $\psi(x)f(t)$ y se obtiene una ecuación que sólo incluye x en un lado y sólo t en el otro:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x) \;=\; i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}.$$

Esta **separación de variables** es muy conveniente. Como el lado izquierdo es una función sólo de x, y el lado derecho es una función sólo de t, la igualdad puede ser válida para todos los valores de x y todos los valores de t sólo si cada lado es igual a una constante (la misma constante), que se llama C:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x) \;=\; C \qquad \textbf{(38–8a)}$$

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} \;=\; C. \qquad \textbf{(38–8b)}$$

Multiplicamos la primera de estas ecuaciones (la 38-8a) por $\psi(x)$ para obtener

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) \;=\; C\psi(x). \qquad \textbf{(38–8c)}$$

Esto se reconoce inmediatamente como la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, ecuación 38-5, donde la constante C es igual a la energía total E. De esta forma, se obtuvo la forma independiente del tiempo de la ecuación de Schrödinger a partir de la forma dependiente del tiempo.

La ecuación 38-8b es fácil de resolver. Al establecer que $C = E$, la ecuación 38-8b se rescribe como

$$\frac{df(t)}{dt} = -i\frac{E}{\hbar}f(t)$$

(advierta que puesto que $i^2 = -1$, $i = -1/i$), y luego se rescribe como

$$\frac{df(t)}{f(t)} = -i\frac{E}{\hbar}dt.$$

Integramos ambos lados para obtener

$$\ln f(t) = -i\frac{E}{\hbar}t$$

o

$$f(t) = e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t}.$$

Por lo tanto, la función de onda total es

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t}, \qquad \textbf{(38–9)}$$

donde $\psi(x)$ satisface la ecuación 38-5. De hecho, la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (ecuación 38-5) es la principal tarea de la mecánica cuántica no relativista. No obstante, debe advertirse que, en general, la función de onda $\Psi(x, t)$ es una función compleja ya que implica a $i = \sqrt{-1}$. La función tiene una parte real y una parte imaginaria.[†] Como $\Psi(x, t)$ no es puramente real, en sí misma no puede ser físicamente mensurable. Más bien, sólo $|\Psi|^2$, que *es* real, se puede medir físicamente.

Observe también que

$$\left|f(t)\right| = \left|e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t}\right| = 1,$$

de manera que $|f(t)|^2 = 1$. De esta forma, la densidad de probabilidad en el espacio no depende del tiempo:

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2.$$

Por consiguiente, sólo se tendrá interés en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, ecuación 38-5, que ahora se examinará para algunas situaciones sencillas.

38–7 Partículas libres; ondas planas y paquetes de ondas

Una **partícula libre** es aquella que no está sujeta a fuerza alguna, y por lo tanto se puede considerar que su energía potencial es cero. (Aunque en la sección 38-5 se trató con la partícula libre al analizar la ecuación de Schrödinger, aquí se le tratará de manera directa usando como base la ecuación de Schrödinger). La ecuación de Schrödinger (ecuación 38-5) con $U(x) = 0$ se convierte en

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x),$$

que se expresa como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0.$$

Ésta es una ecuación conocida que se empleó en el capítulo 14 (ecuación 14-3) en relación con el oscilador armónico simple. La solución a esta ecuación, pero con cambios de variable[‡] adecuados para el presente caso, es

$$\psi = A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx, \qquad \text{[partícula libre]} \quad \textbf{(38–10)}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \qquad \textbf{(38–11a)}$$

Puesto que $U = 0$, la energía total E de la partícula es $E = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$ (donde p es la cantidad de movimiento); en consecuencia,

[†]Recuerde que $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$.

[‡]En la ecuación 14-3, t se convierte en x y ω se convierte en $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. (No confunda esta k con la constante de resorte k del capítulo 14.) La solución (ecuación 38-10) también se podría escribir como $\psi = A\cos(kx + \phi)$ donde ϕ es una constante de fase.

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{h}{\lambda\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad \textbf{(38–11b)}$$

De manera que una partícula libre con cantidad de movimiento p y energía E se puede representar mediante una onda plana que varíe sinusoidalmente. Si no se tiene interés en la fase, se puede elegir $B = 0$ en la ecuación 38-10 y esta onda seno se ilustra en la figura 38-6a.

EJEMPLO 38–4 **Electrón libre.** Un electrón con energía $E = 6.3$ eV está en el espacio libre (donde $U = 0$). Encuentre *a*) la longitud de onda λ y *b*) la función de onda ψ para el electrón, suponiendo que $B = 0$.

PLANTEAMIENTO La longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$ (ecuación 38-11b) donde el número de onda k está dado por la ecuación 38-11a. La función de onda está dada por $\psi = A \operatorname{sen} kx$.

SOLUCIÓN

a)
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}}$$
$$= \frac{2\pi(1.055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(6.3\,\text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})}}$$
$$= 4.9 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0.49\,\text{nm}.$$

b)
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$= 1.28 \times 10^{10}\,\text{m}^{-1},$$

de manera que

$$\psi = A \operatorname{sen} kx = A \operatorname{sen}\left[(1.28 \times 10^{10}\,\text{m}^{-1})(x)\right].$$

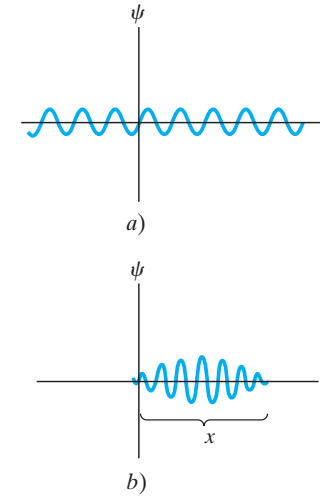


FIGURA 38–6 *a*) Una onda plana que describe una partícula libre. *b*) Un paquete de onda con "ancho" Δx.

Observe en la figura 38-6a que la onda seno se extenderá indefinidamente[†] en las direcciones $+x$ y $-x$. Por ende, puesto que $|\psi|^2$ representa la probabilidad de encontrar la partícula, ésta podría estar en cualquier parte entre $x = -\infty$ y $x = \infty$. Esto es completamente congruente con el principio de incertidumbre (sección 38-3): se tiene como dato la cantidad de movimiento de la partícula y por lo tanto se conoce con precisión $(p = \hbar k)$, de manera que la posición de la partícula debe ser totalmente impredecible. Matemáticamente, si $\Delta p = 0$, $\Delta x \gtrsim \hbar/\Delta p = \infty$.

Para describir una partícula cuya posición está bien localizada (esto es, cuando se sabe que está dentro de una pequeña región del espacio), se puede usar el concepto de **paquete de onda**. La figura 38-6b presenta un ejemplo de un paquete de onda cuyo ancho es aproximadamente Δx, como se muestra, lo cual significa que la partícula muy probablemente se encuentra dentro de esa región del espacio. Así, una partícula bien localizada que se mueve a través del espacio se puede representar mediante un paquete de onda en movimiento.

Un paquete de onda se representa matemáticamente como la suma de muchas ondas planas (ondas seno) con longitudes de onda ligeramente diferentes. Al observar con detenimiento la figura 16-17 se puede ver si esto funcionará. Ahí se combinan sólo dos frecuencias cercanas (para explicar por qué hay "pulsos") y se encuentra que la suma de dos ondas seno parece una serie de paquetes de onda. Si se suman ondas adicionales con otras frecuencias cercanas, se pueden eliminar todos menos uno de los paquetes, para llegar a la figura 38-6b. En consecuencia, un paquete de ondas consiste en ondas de un *rango* de longitudes de onda; por eso, no tiene una cantidad de movimiento definida p $(= h/\lambda)$, sino más bien un rango de cantidades de movimiento. Esto es congruente con el principio de incertidumbre: se redujo Δx, de manera que la cantidad de movimiento no puede ser precisa; esto es, Δp no puede ser cero. En vez de ello, se dice que la partícula tiene un rango de cantidades de movimiento, Δp, o tiene una incertidumbre en su cantidad de movimiento, Δp. No es difícil demostrar, incluso para esta situación sencilla (véase el problema 20), que $\Delta p \approx h/\Delta x$, en concordancia con el principio de incertidumbre.

[†]Tal onda infinita causa problemas para normalización ya que $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sen}^2 kx\,dx$ es infinita en el caso de cualquier valor distinto de cero para A. Para fines prácticos, por lo general es posible normalizar las ondas $(A \neq 0)$ al suponer que la partícula está en una gran región finita del espacio. La región se elige suficientemente grande para que la cantidad de movimiento sea más bien precisamente fija.

38–8 Partícula en un pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita (una caja rígida)

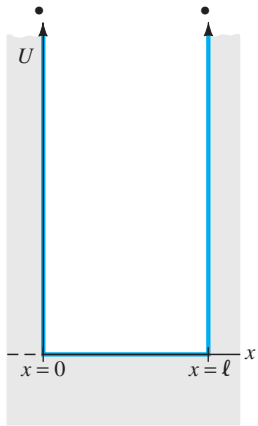


FIGURA 38–7 Gráfica de energía potencial U contra x para un pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita.

La ecuación de Schrödinger se puede resolver analíticamente sólo para algunas formas posibles de energía potencial U. Aquí se consideran algunos casos sencillos que en principio tal vez no parezcan reales, pero que tienen soluciones simples que resultan útiles como aproximaciones para comprender una variedad de fenómenos.

En el primer caso, suponga que una partícula de masa m está confinada a una caja unidimensional de ancho ℓ cuyas paredes son perfectamente rígidas. (Esto sirve como una aproximación para un electrón en un metal, por ejemplo). La partícula está atrapada en esta caja y las colisiones que se producen con las paredes son perfectamente elásticas. La energía potencial para esta situación, que comúnmente se conoce como **pozo de potencial con profundidad infinita** o **caja rígida**, se ilustra en la figura 38-7. La energía potencial $U(x)$ se expresa como

$$U(x) = 0 \qquad 0 < x < \ell$$
$$U(x) = \infty \qquad x \leq 0 \quad \text{y} \quad x \geq \ell.$$

Para la región $0 < x < \ell$, donde $U(x) = 0$, ya se conoce la solución de la ecuación de Schrödinger a partir de la discusión en la sección 38-7: es justo la ecuación 38-10,

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx,$$

donde (de acuerdo con la ecuación 38-11a)

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

(También podríamos utilizar $\psi(x) = A \operatorname{sen}(kx + \phi)$ donde ϕ es una constante de fase.) Afuera del pozo, $U(x) = \infty$, de manera que $\psi(x)$ debe ser cero. (Si no lo fuera, el producto $U\psi$ en la ecuación de Schrödinger no sería finito; además, si $U = \infty$, no se puede esperar que una partícula de energía total finita esté en tal región). Así que sólo nos preocuparemos por la función de onda dentro del pozo, y debemos determinar las constantes A y B, así como cualquier restricción sobre el valor de k (y, en consecuencia, sobre la energía E).

Se insistió que la función de onda debe ser continua. En consecuencia, si $\psi = 0$ afuera del pozo, debe ser cero en $x = 0$ y en $x = \ell$:

$$\psi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(\ell) = 0.$$

Éstas son las **condiciones de frontera** para este problema. En $x = 0$, sen $kx = 0$, pero cos $kx = 1$, de manera que, en este punto, la ecuación 38-10 da

$$0 = \psi(0) = A \operatorname{sen} 0 + B \cos 0 = 0 + B.$$

Por lo tanto, B debe ser cero. La solución se reduce a

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx.$$

Ahora aplicamos la otra condición de frontera, $\psi = 0$ en $x = \ell$:

$$0 = \psi(\ell) = A \operatorname{sen} k\ell.$$

No queremos que $A = 0$, o no se tendría partícula en absoluto ($|\psi|^2 = 0$ en todas partes). Por lo tanto, se establece que

$$\operatorname{sen} k\ell = 0.$$

El seno es cero para ángulos de $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ radianes, lo cual significa que $k\ell = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ En otras palabras,

$$k\ell = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{38–12}$$

donde n es un entero. Eliminamos el caso $n = 0$, pues esto haría que $\psi = 0$ en todas partes. De esta forma, k y, en consecuencia, E no pueden tener cualquier valor; más bien, k está limitada a valores

$$k = \frac{n\pi}{\ell}.$$

Al colocar esta expresión en la ecuación 38-11a (y al sustituir $\hbar$ por $h/2\pi$), se encuentra que E sólo puede tener los valores

$$E = n^2 \frac{h^2}{8m\ell^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{38–13}$$

En consecuencia, una partícula atrapada en una caja rígida sólo puede tener ciertas *energías cuantizadas*. La mínima energía (el estado fundamental) tiene $n = 1$ y está dada por

$$E_1 = \frac{h^2}{8m\ell^2}. \qquad \text{[estado fundamental]}$$

La siguiente energía más alta ($n = 2$) es

$$E_2 = 4E_1,$$

y para energías superiores (véase la figura 38-8),

$$\begin{aligned} E_3 &= 9E_1 \\ &\vdots \\ E_n &= n^2 E_1. \end{aligned}$$

El entero n se llama **número cuántico** del estado.

El hecho de que la energía más baja, E_1, no sea cero significa que la partícula en la caja nunca puede estar en reposo. Esto es contrario a las ideas clásicas, de acuerdo con las cuales una partícula puede tener $E = 0$. E_1 se llama **energía punto cero**. Una consecuencia de este resultado es que, incluso a una temperatura de cero absoluto (0 K), la mecánica cuántica predice que las partículas en una caja no estarían en reposo, sino que tendrían una energía de punto cero.

Note también que tanto la energía E_1 como la cantidad de movimiento $p_1 = \hbar k = \hbar\pi/\ell$ (ecuación 38-11b) en el estado fundamental se relacionan inversamente con el ancho de la caja. Cuanto más pequeño sea el ancho ℓ, mayor será la cantidad de movimiento (y la energía). Esto se considera un resultado directo del principio de incertidumbre (véase el problema 25).

La función de onda $\psi = A \operatorname{sen} kx$ para cada uno de los estados cuánticos es (puesto que $k = n\pi/\ell$)

$$\psi_n = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right). \tag{38–14}$$

Es posible determinar la constante A al imponer la condición de normalización (ecuación 38-6c):

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \, dx = \int_0^{\ell} A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx, \tag{38–15}$$

donde la integral se necesita realizar sólo sobre el intervalo $0 < x < \ell$, porque fuera de estos límites, $\psi = 0$. La integral (véase el ejemplo 38-6) es igual a $A^2\ell/2$, así que se tiene

$$A = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \qquad \text{y} \qquad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right).$$

La amplitud A es la misma para todos los números cuánticos. La figura 38-9 muestra las funciones de onda (ecuación 38-14) para $n = 1, 2, 3$ y 10. Parecen ondas estacionarias en una cuerda (véase la figura 15-26). Esto no es de sorprender ya que las soluciones de la función de onda, ecuación 38-14, son las mismas que para las ondas estacionarias en una cuerda, y la condición $k\ell = n\pi$ es la misma en los dos casos (página 414).

La figura 38-10 ilustra la distribución de probabilidad, $|\psi|^2$, para los mismos estados ($n = 1, 2, 3, 10$) para los cuales se muestra ψ en la figura 38-9. Inmediatamente se ve que es más probable encontrar la partícula en algunos lugares que en otros. Por ejemplo, en el estado fundamental ($n = 1$), es mucho más probable que el electrón se encuentre cerca del centro de la caja que cerca de las paredes. Esto es claramente una variación con respecto a las ideas clásicas, las cuales predicen una densidad de probabilidad uniforme: es tan probable que la partícula se encuentre en un punto de la caja como en cualquier otro. Las densidades de probabilidad mecánico-cuánticas para estados superiores son incluso más complicadas, con áreas de baja probabilidad no sólo cerca de las paredes, sino también a intervalos regulares intermedios.

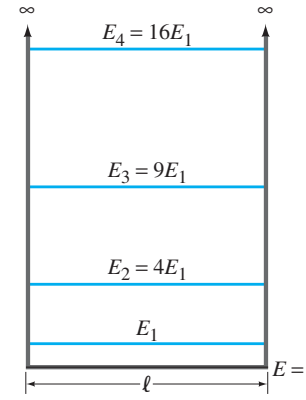


FIGURA 38–8 Posibles niveles de energía para una partícula en una caja con paredes perfectamente rígidas (pozo cuadrado de potencial infinito).

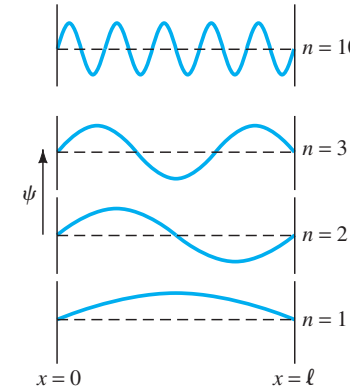
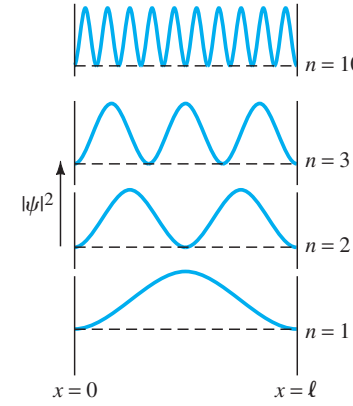


FIGURA 38–9 Funciones de onda que corresponden al número cuántico n con valores de 1, 2, 3 y 10 para una partícula confinada en una caja rígida.

FIGURA 38–10 Distribución de probabilidad para una partícula en una caja rígida para los estados con $n = 1, 2, 3$ y 10.



EJEMPLO 38–5 **Electrón en un pozo de potencial infinito.** *a*) Calcule los tres niveles energéticos inferiores para un electrón atrapado en un pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita de ancho $\ell = 1.00 \times 10^{-10}$ m (aproximadamente el diámetro de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental). *b*) Si se emitiera un fotón cuando el electrón salta del estado $n = 2$ al estado $n = 1$, ¿cuál sería su longitud de onda?

PLANTEAMIENTO Los niveles de energía están dados por la ecuación 38-13. En *b*), $hf = hc/\lambda = E_2 - E_1$.

SOLUCIÓN *a*) El estado fundamental ($n = 1$) tiene energía

$$E_1 = \frac{h^2}{8m\ell^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(1.00 \times 10^{-10}\,\text{m})^2} = 6.03 \times 10^{-18}\,\text{J}.$$

En electrón volts esto es

$$E_1 = \frac{6.03 \times 10^{-18}\,\text{J}}{1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 37.7\,\text{eV}.$$

Luego,

$$E_2 = (2)^2 E_1 = 151\,\text{eV}$$
$$E_3 = (3)^2 E_1 = 339\,\text{eV}.$$

b) La diferencia de energía es $E_2 - E_1 = 151\,\text{eV} - 38\,\text{eV} = 113\,\text{eV}$ o $1.81 - 10^{-17}$ J, y eso igualaría la energía del fotón emitido (conservación de la energía). Su longitud de onda sería

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{1.81 \times 10^{-17}\,\text{J}} = 1.10 \times 10^{-8}\,\text{m}$$

u 11.0 nm, que está en la región ultravioleta del espectro.

EJERCICIO B La longitud de onda de un fotón emitido en una transición de $n = 3$ a $n = 1$ es *a*) 0.062 nm, *b*) 620 nm, *c*) 301 nm, *d*) $3.2 - 10^{-15}$ m, *e*) 4.1 nm.

EJEMPLO 38–6 **Cálculo de una constante de normalización.** Demuestre que la constante de normalización A para todas las funciones de onda que describen una partícula en un pozo de potencial infinito de ancho ℓ tiene un valor de $A = \sqrt{2/\ell}$.

PLANTEAMIENTO Las funciones de onda para varias n son

$$\psi = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Para normalizar ψ, debemos tener (ecuación 38-15)

$$1 = \int_0^\ell |\psi|^2\,dx = \int_0^\ell A^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

SOLUCIÓN Se necesita integrar sólo de 0 a ℓ, pues $\psi = 0$ para todos los demás valores de x. Para evaluar esta integral se establece que $\theta = n\pi x/\ell$ y se utiliza la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Así, con $dx = \ell\,d\theta/n\pi$, se tiene

$$1 = A^2 \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{\ell}{n\pi}\right) d\theta = \frac{A^2\ell}{2n\pi} \int_0^{n\pi} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{A^2\ell}{2n\pi}\left(\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Big|_0^{n\pi}$$
$$= \frac{A^2\ell}{2}.$$

Por lo tanto, $A^2 = 2/\ell$ y

$$A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

EJEMPLO 38–7 **ESTIMACIÓN** **Probabilidad cerca del centro de una caja rígida.** Un electrón está en un pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita de ancho $\ell = 1.00 \times 10^{-10}$ m. Si el electrón está en el estado fundamental, ¿cuál es la probabilidad de encontrarlo en una región de ancho $\Delta x = 1.0 \times 10^{-12}$ m en el centro del pozo (en $x = 0.50 \times 10^{-10}$ m)?

PLANTEAMIENTO La probabilidad de encontrar una partícula en una pequeña región de ancho dx es $|\psi|^2\,dx$ (ecuación 38-6b). Con la A del ejemplo 38-6, la función de onda para el estado fundamental es

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{\ell}.$$

SOLUCIÓN La curva $n = 1$ en la figura 38-9 muestra que ψ es aproximadamente constante cerca del centro del pozo. Así que se puede evitar una integral sobre dx y sólo establecer $dx \approx \Delta x$ para encontrar

$$|\psi|^2\,\Delta x = \frac{2}{\ell}\,\text{sen}^2\left[\frac{\pi x}{\ell}\right]\Delta x$$

$$= \frac{2}{(1.00 \times 10^{-10}\ \text{m})}\,\text{sen}^2\left[\frac{\pi(0.50 \times 10^{-10}\ \text{m})}{(1.00 \times 10^{-10}\ \text{m})}\right](1.0 \times 10^{-12}\ \text{m}) = 0.02.$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar al electrón en esta región en el centro del pozo es del 2%.

NOTA Puesto que $\Delta x = 1.0 \times 10^{-12}$ m es el 1% del ancho del pozo de 1.00×10^{-10} m, el resultado de la probabilidad del 2% no es lo que se esperaría de manera clásica. Desde el punto de vista clásico, el electrón tendría la misma probabilidad de estar en cualquier parte en la caja, y se esperaría que la probabilidad fuera del 1% en vez del 2%.

EJEMPLO 38–8 **Probabilidad de e^- en $\frac{1}{4}$ de caja.** Determine la probabilidad de encontrar un electrón en el cuarto izquierdo de una caja rígida, es decir, entre una pared en $x = 0$ y la posición $x = \ell/4$. Suponga que el electrón está en el estado fundamental.

PLANTEAMIENTO No se puede hacer la suposición que se hizo en el ejemplo 38-7, de que $|\psi|^2 \approx$ constante y que Δx es pequeño. Aquí se necesita integrar $|\psi|^2\,dx$ desde $x = 0$ hasta $x = \ell/4$, que es igual al área bajo la curva que se muestra sombreada en la figura 38-11.

SOLUCIÓN La función de onda en el estado fundamental es $\psi_1 = \sqrt{2/\ell}\ \text{sen}(\pi x/\ell)$. Para encontrar la probabilidad del electrón en el cuarto izquierdo de la caja, integre tal como en el ejemplo 38-6, pero con diferentes límites en la integral (y ahora se sabe que $A = \sqrt{2/\ell}$). Esto es, se establece que $\theta = \pi x/\ell$ (entonces, $x = \ell/4$ correspondea $\theta = \pi/4$) y se utiliza la identidad $\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Por lo tanto, con $dx = (\ell/\pi)d\theta$,

$$\int_0^{\ell/4} |\psi|^2\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/4} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_0^{\pi/4}(1 - \cos 2\theta)\left(\frac{\ell}{\pi}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.091.$$

NOTA El electrón sólo pasa el 9.1% de su tiempo en el cuarto izquierdo de la caja. Desde el punto de vista clásico, pasaría el 25%.

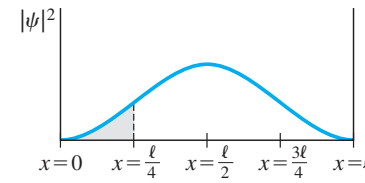


FIGURA 38–11 Distribución de probabilidad de estado fundamental $|\psi|^2$ para un electrón en una caja rígida. Igual que la gráfica $n = 1$ de la figura 38-10, pero aquí se muestra el área bajo la curva, desde $x = 0$ hasta $x = \ell/4$, que representa la probabilidad de encontrar el electrón en esa región.

EJERCICIO C ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al electrón entre $x = \ell/4$ y $x = \ell/2$? (¿Necesita integrar?) *a*) 9.1%, *b*) 18.2%, *c*) 25%, *d*) 33%, *e*) 40.9%.

EJEMPLO 38–9 **Posición más probable y posición promedio.** Dos interesantes cantidades son las posiciones más probable y promedio de la partícula. Considere un electrón en una caja rígida de ancho 1.00×10^{-10} m en el primer estado excitado $n = 2$. *a*) ¿Cuál es la posición más probable? *b*) ¿Cuál es su posición promedio?

PLANTEAMIENTO Para encontrar *a*), la posición (o posiciones) más probable(s), encontramos el valor (o valores) máximo(s) de la distribución de probabilidad $|\psi|^2$ al tomar su derivada e igualarla a cero. Para *b*), la posición promedio, se integra $\bar{x} = \int_0^\ell x\,|\psi|^2\,dx$.

SOLUCIÓN *a*) La función de onda para $n = 2$ es $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)$, de manera que $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{\ell}\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)$. Para encontrar máximos y mínimos, se establece que $d|\psi|^2/dx = 0$:

$$\frac{d}{dx}|\psi|^2 = \frac{2}{\ell}(2)\frac{2\pi}{\ell}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right).$$

Esta cantidad es cero cuando el seno es cero ($2\pi x/\ell = 0, \pi, 2\pi, \cdots$), o el coseno es cero ($2\pi x/\ell = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$). Los máximos y mínimos se presentan en $x = 0, \ell/2, \ell$ y $x = \ell/4, 3\ell/4$. Los últimos ($\ell/4, 3\ell/4$) son los máximos (véase la curva $n = 2$ de la figura 38-10); los otros son mínimos. [Para confirmar, se puede tomar la segunda derivada, $d^2|\psi|^2/dx^2$, que es > 0 para mínimos y < 0 para máximos].
b) La posición promedio es (de nuevo empleamos $\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$):

$$\bar{x} = \int_0^\ell x|\psi|^2\,dx = \int_0^\ell \frac{2}{\ell}\,x\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\,x\right)dx = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell x\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi}{\ell}\,x\right)\right]dx,$$

que da por resultado (al integrar por partes, Apéndice B: $u = x,\ dv = \cos(4\pi x/\ell)\,dx$):

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x\ell}{4\pi}\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{\ell}x\right) - \frac{\ell^2}{16\pi^2}\cos\left(\frac{4\pi}{\ell}\,x\right)\right]_0^\ell = \frac{\ell}{2}.$$

Puesto que las curvas para $|\psi|^2$ son simétricas en torno al centro de la caja, se espera esta respuesta. Pero advierta que, para $n = 2$, la probabilidad de encontrar la partícula en el punto $x = \ell/2$ en realidad es cero (figura 38-10).

EJEMPLO 38–10 **ESTIMACIÓN** **Bacteria confinada.** Una pequeña bacteria, con una masa de aproximadamente 10^{-14} kg, está confinada entre dos paredes rígidas separadas 0.1 mm. *a*) Estime su rapidez mínima. *b*) Si, en vez de ello, su rapidez es de aproximadamente 1 mm en 100 s, estime el número cuántico de su estado.

PLANTEAMIENTO Suponemos que $U = 0$ dentro del pozo de potencial, de manera que $E = \frac{1}{2}mv^2$. En *a*) la rapidez mínima se presenta en el estado fundamental, $n = 1$, de manera que $v = \sqrt{2E/m}$ donde E es la energía del estado fundamental. En *b*), despeje n en la ecuación 38-13.

SOLUCIÓN *a*) Con $n = 1$, la ecuación 38-13 da $E = h^2/8\,m\ell^2$ de manera que

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{h^2}{4m^2\ell^2}} = \frac{h}{2m\ell} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{2(10^{-14}\,\text{kg})(10^{-4}\,\text{m})} \approx 3 \times 10^{-16}\,\text{m/s}.$$

Ésta es una rapidez tan pequeña, que no se podría medir y el objeto parecería en reposo, en congruencia con la física clásica.
b) Dada $v = 10^{-3}\,\text{m}/100\,\text{s} = 10^{-5}\,\text{m/s}$, la energía cinética de la bacteria es

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(10^{-14}\,\text{kg})(10^{-5}\,\text{m/s})^2 = 0.5 \times 10^{-24}\,\text{J}.$$

A partir de la ecuación 38-13, el número cuántico de ese estado es

$$n = \sqrt{E\left(\frac{8m\ell^2}{h^2}\right)} = \sqrt{\frac{(0.5 \times 10^{-24}\,\text{J})(8)(10^{-14}\,\text{kg})(10^{-4}\,\text{m})^2}{(6.6 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}} \approx 3 \times 10^{10}.$$

NOTA Este número es tan grande que nunca se podría distinguir entre estados de energía adyacentes (entre $n = 3 \times 10^{10}$ y $3 \times 10^{10} + 1$). Los estados energéticos parecerían formar un continuo. Por ende, aun cuando las energías implicadas aquí son pequeñas ($\ll 1$ eV), todavía se lidia con un objeto macroscópico (aunque visible sólo bajo un microscopio) y el resultado cuántico no es distinguible de uno clásico. Esto está en concordancia con el principio de correspondencia.

38–9 Pozo de potencial finito

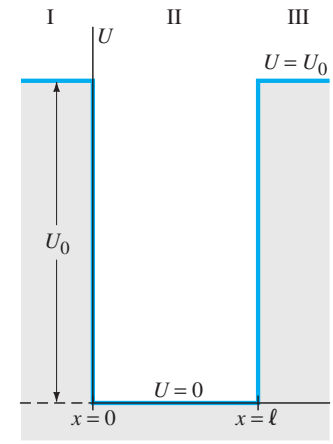


FIGURA 38–12 Energía potencial U contra x para un pozo cuadrado unidimensional finito.

Ahora examinemos una partícula en una caja cuyas paredes no son perfectamente rígidas. Esto es, la energía potencial afuera de la caja o del pozo no es infinita, sino que se eleva a cierto nivel U_0, como se ilustra en la figura 38-12. A esto se le llama **pozo de potencial finito**. Puede servir como una aproximación para un neutrón en un núcleo, por ejemplo. Existen algunas nuevas características significativas que surgen para el pozo finito en comparación con el pozo infinito. Dividimos el pozo en tres regiones, como se muestra en la figura 38-12. En la región II, dentro del pozo, la ecuación de Schrödinger es la misma que antes ($U = 0$), aunque las condiciones de frontera serán diferentes. De manera que la solución para la región II se escribe como

$$\psi_{II} = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \quad (0 < x < \ell)$$

pero no establecemos inmediatamente que $B = 0$ ni suponemos que k está dada por la ecuación 38-12.

En las regiones I y III, la ecuación de Shcrödinger, ahora con $U(x) = U_0$, es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U_0\psi = E\psi.$$

Esto se rescribe como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left[\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}\right]\psi = 0.$$

Suponga que E es menor que U_0, de manera que la partícula está "atrapada" en el pozo (al menos desde el punto de vista clásico). Puede haber sólo uno de tales **estados ligados**, o muchos, o incluso ninguno, como se estudiará más tarde. La constante G se define como

$$G^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \qquad \textbf{(38–16)}$$

y la ecuación de Schrödinger se rescribe como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - G^2\psi = 0.$$

Esta ecuación tiene la solución general

$$\psi_{I,\,III} = Ce^{Gx} + De^{-Gx},$$

que se confirma mediante sustitución directa, ya que

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{\pm Gx}\right) = G^2e^{\pm Gx}.$$

En la región I, x siempre es negativa, de manera que D debe ser cero (de otro modo, $\psi \to \infty$ conforme $x \to -\infty$, lo que da un resultado inaceptable). De igual modo, en la región III, donde x siempre es positiva, C debe ser cero. Por lo tanto,

$$\psi_I = Ce^{Gx} \quad (x < 0)$$
$$\psi_{III} = De^{-Gx} \quad (x > \ell).$$

En las regiones I y III, la función de onda disminuye exponencialmente con la distancia desde el pozo. Las formas matemáticas de la función de onda adentro y afuera del pozo son diferentes, pero se insiste en que la función de onda es continua incluso en las dos paredes. También se insiste en que la pendiente de ψ, que es su primera derivada, es continua en las paredes. Por lo tanto, se tienen las condiciones de frontera:

$$\psi_I = \psi_{II} \quad \text{y} \quad \frac{d\psi_I}{dx} = \frac{d\psi_{II}}{dx} \quad \text{en } x = 0$$
$$\psi_{II} = \psi_{III} \quad \text{y} \quad \frac{d\psi_{II}}{dx} = \frac{d\psi_{III}}{dx} \quad \text{en } x = \ell.$$

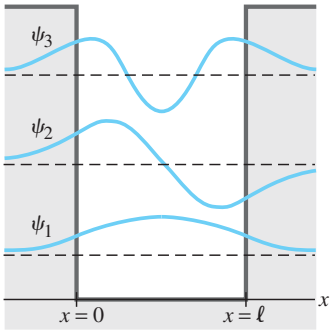
En la pared izquierda ($x = 0$) estas condiciones de frontera se convierten en

$$Ce^0 = A \operatorname{sen} 0 + B \cos 0 \quad \text{o} \quad C = B$$

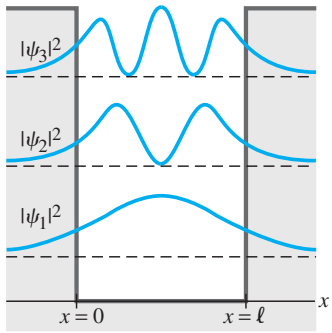
y

$$GCe^0 = kA \cos 0 - kB \operatorname{sen} 0 \quad \text{o} \quad GC = kA.$$

Éstas son dos de las relaciones que vinculan las constantes A, B, C, D y la energía E.



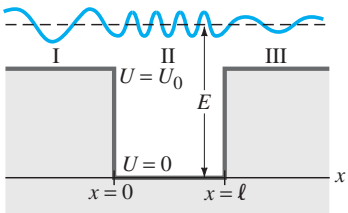
a)



b)

FIGURA 38–13 *a*) Funciones de onda y *b*) distribuciones de probabilidad para los tres mínimos estados posibles de una partícula en un pozo de potencial infinito. Cada una de las curvas ψ y $|\psi|^2$ se superpusieron sobre su nivel de energía (líneas punteadas) por conveniencia.

FIGURA 38–14 Función de onda de una partícula con energía E que viaja sobre un pozo de potencial cuya profundidad U_0 es menor que E (medida en el pozo).



Se obtienen dos relaciones más a partir de las condiciones de frontera en $x = \ell$, y una quinta relación a partir de la normalización de las funciones de onda sobre todo el espacio, $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = 1$. Estas cinco relaciones permiten resolver las cinco incógnitas, incluida la energía E. No se estudiarán las matemáticas detalladas, pero se estudiarán algunos de los resultados.

La figura 38-13a muestra la función de onda ψ para los tres mínimos estados posibles y la figura 38-13b muestra las distribuciones de probabilidad $|\psi|^2$. Se ve que las funciones de onda tienen un comportamiento suave en las paredes del pozo. Dentro del pozo, ψ tiene la forma de una onda sinusoidal; para el estado fundamental, hay menos de media longitud de onda. Compare esto con el pozo infinito (figura 38-9), donde la función de onda del estado fundamental es exactamente media longitud de onda: $\lambda = 2\ell$. Para el pozo infinito, $\lambda > 2\ell$. Por ende, para un pozo finito, la cantidad de movimiento de una partícula ($p = h/\lambda$) y, en consecuencia, su energía de estado fundamental, será menor que para un pozo infinito del mismo ancho ℓ.

Afuera del pozo finito se ve que la función de onda cae exponencialmente en cualquier lado de las paredes. El hecho de que ψ no sea cero más allá de las paredes significa que la partícula a veces puede encontrarse afuera del pozo. Esto contradice por completo las ideas clásicas. Afuera del pozo, la energía potencial de la partícula es mayor que su energía total: $U_0 > E$. Esto viola la conservación de la energía. Pero en la figura 38-13b se ve claramente que la partícula puede pasar parte del tiempo afuera del pozo, donde $U_0 > E$ (aunque la penetración dentro de esta región prohibida desde el punto de vista clásico por lo general no es mucha, pues $|\psi|^2$ disminuye exponencialmente con la distancia desde cualquier pared). La penetración de una partícula en una región prohibida desde el punto de vista clásico es un resultado muy importante de la mecánica cuántica. Pero, ¿cómo es posible? ¿Cómo se puede aceptar esta no conservación de la energía? Podemos mirar el principio de incertidumbre en la forma

$$\Delta E \, \Delta t \gtrsim \hbar.$$

Nos dice que la energía puede ser incierta, e incluso podría no conservarse, por una cantidad ΔE para tiempos muy cortos $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$.

Ahora considere la situación cuando la energía total E de la partícula es mayor que U_0. En este caso, la partícula es una partícula libre y en todas partes su función de onda es sinusoidal, figura 38-14. Su longitud de onda es diferente afuera del pozo y adentro, como se muestra. Puesto que $K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$, la longitud de onda en la región II ($U = 0$) es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \qquad 0 < x < \ell,$$

mientras que en las regiones I y III, donde $p^2/2m = K = E - U_0$, la longitud de onda es más grande y está dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - U_0)}} \qquad x < 0 \quad \text{y} \quad x > \ell.$$

Para $E > U_0$, cualquier energía E es posible. Pero para $E < U_0$, como se vio anteriormente, la energía está cuantizada y sólo son posibles ciertos estados.

EJERCICIO D Un electrón con energía $E = 6.0$ eV está cerca de un pozo de potencial de profundidad $U_0 = 4.5$ eV y ancho $\ell = 10.0$ nm. ¿Cuál es la longitud de onda del electrón cuando está dentro del pozo? *a*) 0.50 nm; *b*) 0.58 nm; *c*) 1.0 nm; *d*) 10 nm; *e*) 20 nm.

[Otro pozo muy interesante, pero más complicado, es el **oscilador armónico simple**, que tiene $U(x) = \frac{1}{2}Cx^2$ como se estudió en el capítulo 14. Algunos resultados de la mecánica cuántica, como una energía punto cero de $\frac{1}{2}\hbar\omega$ (E no puede ser cero), se tratan brevemente en el problema 52].

38–10 Tunelamiento a través de una barrera

En la sección 38-9 se vio que, de acuerdo con la mecánica cuántica, una partícula como un electrón puede penetrar una barrera en una región prohibida por la mecánica clásica. Existen algunas aplicaciones interesantes de este fenómeno, en particular como se aplica a la penetración de una barrera delgada.

Considere una partícula de masa m y energía E que viaja hacia la derecha a lo largo del eje x en el espacio libre, donde la energía potencial $U = 0$, de manera que toda

la energía es cinética ($E = K$). La partícula encuentra una estrecha barrera de potencial cuya altura U_0 (en unidades de energía) es mayor que E, y cuyo grosor es ℓ (unidades de distancia); véase la figura 38-15a. Puesto que $E < U_0$, de acuerdo con la física clásica, se esperaría que la partícula no lograra penetrar la barrera, sino que simplemente se reflejaría y regresaría en el sentido opuesto. De hecho, esto es lo que ocurre en el caso de objetos macroscópicos. Pero la mecánica cuántica predice una probabilidad distinta de cero para encontrar la partícula en el otro lado de la barrera. Se puede ver cómo ocurre esto en el inciso *b*) de la figura 38-15, que muestra la función de onda. La partícula que se aproxima tiene una función de onda sinusoidal. Dentro de la barrera, la solución a la ecuación de Schrödinger es un decaimiento exponencial tal como para el pozo finito de la sección 38-9. Sin embargo, antes de que el exponencial llegue a cero, la barrera termina (en $x = \ell$) y para $x > \ell$ de nuevo hay una función de onda sinusoidal, pues $U = 0$ y $E = K > 0$. Pero es una función seno con amplitud enormemente reducida. No obstante, puesto que $|\psi|^2$ es distinta de cero más allá de la barrera, se ve que hay una probabilidad distinta de cero de que la partícula penetre la barrera. Este proceso se llama **tunelamiento** a través de la barrera, o **penetración de barrera**. Aunque no es posible observar la partícula dentro de la barrera (esto violaría la conservación de la energía), se le puede detectar después de que penetró la barrera.

Cuantitativamente, la probabilidad de tunelamiento se describe con un *coeficiente de transmisión*, T, y un *coeficiente de reflexión*, R. Suponga, por ejemplo, que $T = 0.03$ y $R = 0.97$; entonces, si 100 partículas inciden sobre la barrera, en promedio, tres de ellas harían tunelamiento y 97 se reflejarían. Note que $T + R = 1$, pues una partícula incidente debe reflejarse o realizar tunelamiento. El coeficiente de transmisión se puede determinar al escribir la función de onda para cada una de las tres regiones, tal como se hizo para el pozo finito, y luego aplicar las condiciones de frontera de que ψ y $d\psi/dx$ deben ser continuas en los bordes de la barrera ($x = 0$ y $x = \ell$). El cálculo indica (véase el problema 44) que, si T es pequeña ($\ll 1$), entonces

$$T \approx e^{-2G\ell}, \tag{38–17a}$$

donde

$$G = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}. \tag{38–17b}$$

(Ésta es la misma G que la de la sección 38-9, ecuación 38-16.) Advierta que al aumentar la altura de la barrera U_0 o al aumentar su grosor ℓ, se reducirá drásticamente T. De hecho, para situaciones macroscópicas, T es extremadamente pequeña, en concordancia con la física clásica, que predice que no habrá tunelamiento (de nuevo, el principio de correspondencia).

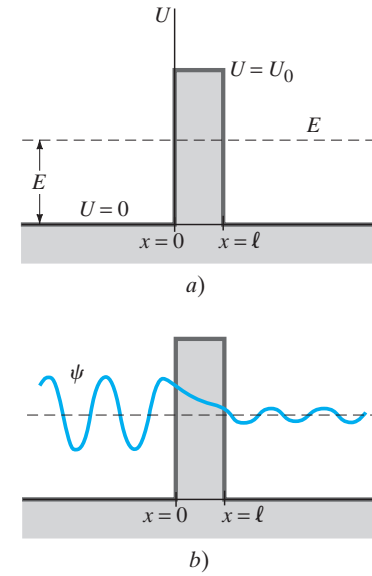


FIGURA 38–15 *a*) Barrera de potencial de altura U_0 y grosor ℓ. *b*) Función de onda para una partícula de energía E ($< U_0$) que se aproxima desde la izquierda. La curva para ψ se superpone, por conveniencia, sobre la línea del nivel de energía (línea punteada).

EJEMPLO 38–11 **Penetración de barrera.** Un electrón de 50 eV se aproxima a una barrera cuadrada de 70 eV de alto y *a*) 1.0 nm de grosor, *b*) 0.10 nm de grosor. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón efectúe tunelamiento?

PLANTEAMIENTO Los eV se convierten a joules y se emplean las ecuaciones 38-17.

SOLUCIÓN *a*) Adentro de la barrera, $U_0 - E = (70\text{ eV} - 50\text{ eV})(1.6 \times 10^{-19}\text{ J/eV}) = 3.2 \times 10^{-18}$ J.Así, al usar las ecuaciones 38-17, se tiene

$$2G\ell = 2\sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(3.2 \times 10^{-18}\text{ J})}{(1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s})^2}}(1.0 \times 10^{-9}\text{ m}) = 46$$

y

$$T = e^{-2G\ell} = e^{-46} \approx 1 \times 10^{-20},$$

que es un valor extremadamente pequeño.

b) Para $\ell = 0.10$ nm, $2G\ell = 4.6$ y

$$T = e^{-4.6} = 0.010.$$

Por consiguiente, el electrón tiene un 1% de probabilidad de penetrar una barrera de 0.1 nm de grosor, pero sólo una oportunidad en 10^{20} de penetrar una barrera de 1 nm. Al reducir el grosor de la barrera en un factor de 10, ¡la probabilidad de tunelamiento aumenta 10^{18} veces! Como es evidente, el coeficiente de transmisión es extremadamente sensible a los valores de ℓ, $U_0 - E$ y m.

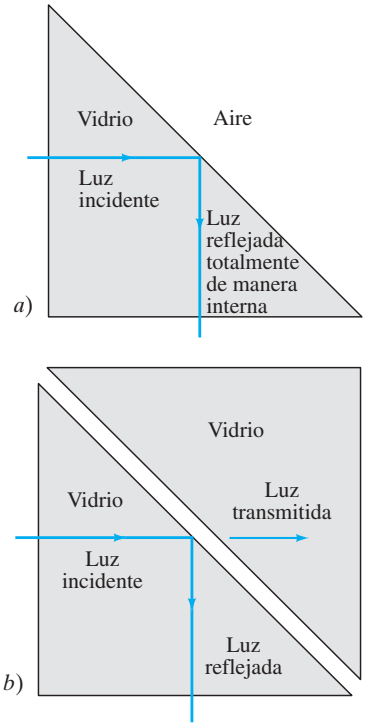
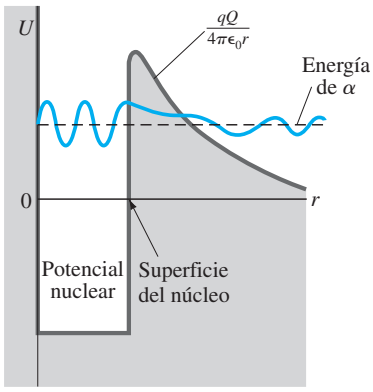


FIGURA 38–16 *a*) Luz que viaja en vidrio llega a la interfaz con aire a un ángulo mayor que el ángulo crítico y se refleja totalmente de manera interna. *b*) Una pequeña cantidad de luz realiza tunelamiento a través de una delgada brecha de aire entre dos piezas de vidrio.

FIGURA 38–17 Energía potencial vista por una partícula alfa (carga q) en presencia del núcleo (carga Q) que muestra la función de onda para tunelamiento de salida.



Tunelamiento de onda de luz

El tunelamiento es resultado de las propiedades ondulatorias de las partículas materiales, y también ocurre para ondas clásicas. Por ejemplo, en la sección 32-7 se vio que, cuando la luz que viaja en vidrio llega a una frontera vidrio-aire a un ángulo mayor que el ángulo crítico, la luz se refleja al 100%. Este fenómeno de la reflexión total interna se estudió desde el punto de vista de la óptica de rayos, y aquí se demostró en la figura 38-16a. Sin embargo, la teoría ondulatoria predice que las ondas en realidad penetran el aire en el caso de algunas longitudes de onda, casi como si "necesitaran" pasar la interfaz para descubrir que hay aire más allá y por eso necesitan reflejarse totalmente. De hecho, si una segunda pieza de vidrio se coloca cerca de la primera, como se ilustra en la figura 38-16b, se puede observar experimentalmente una onda transmitida que realiza tunelamiento en la brecha de aire. En realidad, uno puede observar esto al mirar un vaso de agua a un ángulo tal que la luz que entra al ojo se refleje totalmente de manera interna desde la superficie (exterior) del vaso (que parecerá plateada). Si usted presiona la yema de su dedo humedecida contra el vidrio, podrá ver las espiras de los surcos de sus huellas digitales, porque en los surcos usted interfirió con la reflexión total interna en la superficie exterior del vidrio. De manera que ve luz que penetra la brecha y se refleja en los surcos de su dedo.

Aplicaciones del tunelamiento

El tunelamiento ocurre incluso para ondas clásicas. Lo que es novedoso en la mecánica cuántica es que las partículas materiales tienen propiedades ondulatorias y, por lo tanto, pueden hacer tunelamiento. El tunelamiento dio la base para algunos dispositivos útiles, y también ayudó a explicar algunos fenómenos importantes, algunos de los cuales se mencionan brevemente a continuación.

Algunos núcleos atómicos experimentan **decaimiento radiactivo** mediante la emisión de una partícula alfa (α), que consiste en dos protones y dos neutrones. Podemos imaginar que, en el interior de un núcleo radiactivo, los protones y neutrones se mueven por ahí, y en ocasiones dos de cada uno se juntan y forman esa entidad estable, la partícula alfa. En el capítulo 41 se estudiará con más detalle el decaimiento alfa, pero por ahora advierta que el diagrama de energía potencial para la partícula alfa adentro de este tipo de núcleo es algo parecido a la figura 38-17. El pozo cuadrado representa la fuerza nuclear atractiva que mantiene unido al núcleo. A esto se agrega la energía potencial de repulsión de Coulomb $1/r$ entre la partícula alfa positiva y el núcleo restante con carga negativa. La barrera que resulta se llama **barrera de Coulomb**. La función de onda para la partícula en tunelamiento que se ilustra debe tener energía mayor que cero (o la barrera sería infinitamente ancha y no ocurriría tunelamiento), pero menos que la altura de la barrera. Si la partícula alfa tuviera mayor energía que la barrera, siempre estaría libre y no existiría el núcleo original. De esta forma, la barrera mantiene al núcleo unido, pero ocasionalmente un núcleo de este tipo puede decaer mediante tunelamiento de una partícula alfa. La probabilidad de que una partícula α escape (y, por lo tanto, la "vida" de un núcleo) depende de la altura y el ancho de la barrera, y puede tomar un rango muy amplio de valores sólo para un cambio limitado en ancho de barrera, como se vio en el ejemplo 38-11. Las vidas de los núcleos radiactivos que experimentan decaimiento α varían de menos de 1 μs a 10^{10} años.

Un llamado **diodo túnel** es un dispositivo electrónico hecho de dos tipos de semiconductor que llevan portadores de carga de signo opuesto, separados por una región neutra muy delgada. La corriente puede hacer tunelamiento a través de esta delgada barrera y puede controlarse mediante el voltaje que se le aplique, lo cual afecta la altura de la barrera.

El **microscopio de barrido y tunelamiento** (STM, por las siglas de *scanning tunneling electron microscope*), que se desarrolló en la década de 1980, utiliza el tunelamiento a través de un vacío. Una pequeña sonda, cuya punta puede ser de sólo un átomo (o algunos átomos) de ancho, se mueve a través del espécimen a examinar en una serie de barridos lineales, como los que se realizan mediante el haz de electrones en un cinescopio o TRC de televisión. La punta, conforme explora, permanece muy cerca de la superficie del espécimen, aproximadamente 1 nm sobre él, figura 38-18. Un pequeño voltaje aplicado entre la sonda y la superficie provoca que los electrones realicen tunelamiento a través del vacío entre ellos. Esta corriente de tunelamiento es muy sensible al ancho de la brecha (véase el ejemplo 38-11), de manera que se puede usar un meca-

nismo de retroalimentación para elevar o bajar la sonda y mantener una corriente de tunelamiento electrónica constante. El movimiento vertical de la sonda, que sigue la superficie del espécimen, se grafica como función de la posición, exploración tras exploración, lo que produce una imagen tridimensional de la superficie. Es posible resolver características superficiales tan finas como el tamaño de un átomo: una resolución mejor que 0.1 nm lateralmente y 10^{-2} a 10^{-3} nm verticalmente. Este tipo de resolución no estaba disponible con anterioridad, de manera que representó un mayor impulso al estudio de la estructura superficial de los materiales. La imagen "topográfica" de una superficie en realidad representa la distribución de la carga de electrones (distribuciones de probabilidad de onda de electrones) sobre la superficie.

El nuevo **microscopio de fuerza atómica** (AFM, por las siglas de *atomic force microscope*) es en muchas formas similar a un STM, pero se puede usar con una gama más amplia de materiales muestra. En vez de detectar una corriente eléctrica, el AFM mide la fuerza entre una punta voladiza y la muestra, una fuerza que depende notoriamente de la separación entre punta y muestra en cada punto. La punta se mueve como en el caso del STM.

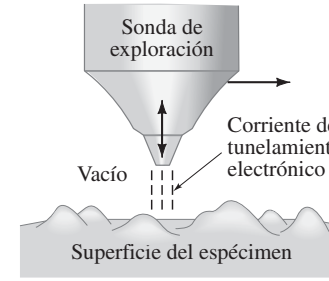


FIGURA 38–18 La punta de la sonda de un microscopio de barrido y tunelamiento, conforme se desplaza de manera horizontal, automáticamente se mueve arriba y abajo para mantener una corriente de tunelamiento constante, lo que produce una imagen de la superficie.

Resumen

En 1925 Schrödinger y Heisenberg trabajaron por separado una nueva teoría, la **mecánica cuántica**, que ahora se considera la teoría fundamental a nivel atómico. Es una teoría estadística más que determinista.

Un importante aspecto de la mecánica cuántica es el **principio de incertidumbre de Heisenberg**, el cual resulta de la dualidad onda-partícula y de la inevitable interacción entre el objeto observado y el observador.

Una forma del principio de incertidumbre afirma que la posición x y la cantidad de movimiento p_x de un objeto no se pueden medir con precisión al mismo tiempo. Los productos de las incertidumbres, $(\Delta x)(\Delta p_x)$, no pueden ser menores que $\hbar$ $(=h/2\pi)$:

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \gtrsim \hbar. \qquad \textbf{(38–1)}$$

Otra forma establece que la energía puede ser incierta, o no conservarse, en una cantidad ΔE para un tiempo Δt donde

$$(\Delta E)(\Delta t) \gtrsim \hbar. \qquad \textbf{(38–2)}$$

Una partícula, como un electrón, se representa mediante una **función de onda** ψ. El cuadrado de la función de onda, $|\psi|^2$, en cualquier punto del espacio representa la **probabilidad** de encontrar la partícula en ese punto. La función de onda se debe **normalizar**, lo cual significa que $\int |\psi|^2\, dV$ sobre todo el espacio debe ser igual a 1, pues la partícula debe encontrarse en un lugar u otro.

En la mecánica cuántica no relativista, ψ satisface la **ecuación de Schrödinger**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi, \qquad \textbf{(38–5)}$$

aquí en su forma unidimensional independiente del tiempo, donde U es la energía potencial como función de la posición y E es la energía total de la partícula.

Una **partícula libre**, no sujeta a fuerzas, tiene una función de onda sinusoidal $\psi = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$ con $k = p/\hbar$ y p es la cantidad de movimiento de la partícula. Tal onda con cantidad de movimiento fija se dispersa indefinidamente en el espacio como una onda plana.

Un **paquete de ondas**, ubicado en el espacio, es una superposición de ondas sinusoidales con un rango de cantidades de movimiento.

Para una partícula confinada en un **pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita**, o **caja rígida**, la ecuación de Schrödinger da las funciones de onda como

$$\psi = A \operatorname{sen} k\ell,$$

donde ℓ es el ancho de la caja, $A = \sqrt{2/\ell}$, y $k = n\pi/\ell$ con n entero, como soluciones dentro del pozo. La energía está cuantizada,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8m\ell^2}. \qquad \textbf{(38–13)}$$

En un **pozo de potencial finito**, la función de onda se extiende hacia la región prohibida desde el punto de vista clásico, donde la energía total es menor que la energía potencial. El hecho de que esto sea posible es congruente con el principio de incertidumbre. Las soluciones a la ecuación de Schrödinger en estas áreas decaen de manera exponencial.

Puesto que las partículas mecánico-cuánticas logran penetrar tales áreas prohibidas desde el punto de vista clásico, pueden realizar **tunelamiento** a través de delgadas barreras aun cuando la energía potencial en la barrera sea mayor que la energía total de la partícula.

Preguntas

1. Compare una onda de materia ψ con *a*) una onda en una cuerda, *b*) una onda EM. Discuta las semejanzas y diferencias.
2. Explique por qué la teoría del átomo de Bohr no es compatible con la mecánica cuántica, en particular con el principio de incertidumbre.
3. Explique por qué, cuanto más masivo es un objeto, más fácil es predecir su posición futura.
4. En vista del principio de incertidumbre, ¿por qué una pelota de béisbol tiene posición y rapidez bien definidas, mientras que un electrón no las tiene?

5. ¿Alguna vez sería posible equilibrar una aguja muy aguda exactamente sobre su punta? Explique.
6. Cuando usted mide la presión en una llanta, ¿acaso no escapa algo de aire inevitablemente? ¿Es posible evitar este escape de aire? ¿Cuál es la relación con el principio de incertidumbre?
7. Se dice que la energía del estado fundamental en el átomo de hidrógeno se puede conocer con precisión, pero que los estados excitados tienen cierta incertidumbre en sus valores (un "ancho de energía"). ¿Es esto congruente con el principio de incertidumbre en su forma de energía? Explique.
8. Si la constante de Planck fuera mucho más grande de lo que es, ¿cómo afectaría esto nuestra vida diaria?
9. ¿En qué formas la mecánica cuántica contradice a la mecánica newtoniana?
10. Si se conoce con exactitud la posición de un objeto, sin incertidumbre, ¿qué tan bien se conocería su cantidad de movimiento?
11. Se coloca un termómetro frío dentro de un tazón de sopa caliente. ¿La lectura de temperatura del termómetro será la misma que la temperatura de la sopa caliente antes de realizar la medición? Explique.
12. ¿El principio de incertidumbre establece un límite a qué tan bien se puede realizar alguna medición de posición?
13. Discuta la vinculación entre la energía punto cero para una partícula en una caja rígida y el principio de incertidumbre.
14. La función de onda para una partícula en una caja rígida es cero en puntos dentro de la caja (excepto para $n = 1$). ¿Significa esto que la probabilidad de encontrar la partícula en estos puntos es cero? ¿Significa que la partícula no puede pasar por estos puntos? Explique.
15. ¿Cómo será la densidad de probabilidad para una partícula en un pozo de potencial infinito con grandes valores de n, por ejemplo, $n = 100$ o $n = 1000$? Conforme n se vuelve muy grande, ¿sus predicciones se aproximan a las predicciones clásicas en concordancia con el principio de correspondencia?
16. Para una partícula en un pozo de potencial infinito, la separación entre estados de energía aumenta conforme n aumenta (véase la ecuación 38-13). Pero, ¿el principio de correspondencia no requiere espaciamiento cercano entre estados conforme n aumenta para que se aproxime a una situación clásica (no cuantizada)? Explique.
17. Una partícula queda atrapada en un pozo de potencial infinito. Describa lo que ocurre a la energía del estado fundamental y a la función de onda de la partícula conforme las paredes de potencial se vuelven finitas y se reducen cada vez más hasta que finalmente llegan a cero ($U = 0$ en todas partes).
18. Un átomo de hidrógeno y un átomo de helio, cada uno con 4 eV de energía cinética, se aproximan a una delgada barrera de 6 MeV de alto. ¿Cuál tiene la mayor probabilidad de tunelamiento?

Problemas

38–2 Función de onda, doble rendija

1. (II) Los neutrones en un haz paralelo, cada uno con 0.030 eV de energía cinética, se dirigen a través de dos rendijas separadas 0.60 mm. ¿Qué tan separados estarán los picos de interferencia sobre una pantalla a 1.0 m de distancia? [*Sugerencia:* Primero encuentre la longitud de onda del neutrón].
2. (II) Se disparan municiones de 3.0 g de masa en trayectorias paralelas con rapidez de 150 m/s a través de un orificio de 3.0 mm de diámetro. ¿A qué distancia del orificio debe detectarse una dispersión de 1.0 cm de diámetro en el haz de municiones?

38–3 Principio de incertidumbre

3. (I) Un protón viaja con una rapidez de $(7.560 \pm 0.012) \times 10^5$ m/s. ¿Con qué precisión máxima se puede determinar su posición?
4. (I) Por lo general, un electrón permanece en un estado excitado de un átomo durante 10^{-8} s. ¿Cuál es la mínima incertidumbre en la energía del estado (en eV)?
5. (I) Si la posición de un electrón se puede medir hasta una precisión de 2.6×10^{-8} m, ¿con cuánta precisión se puede conocer su rapidez?
6. (I) La vida de un estado excitado típico en un átomo es de aproximadamente 10 ns. Suponga que un átomo cae desde uno de tales estados excitados y emite un fotón con longitud de onda de aproximadamente 500 nm. Determine la incertidumbre de la energía fraccional $\Delta E/E$ y la incertidumbre en la longitud de onda $\Delta\lambda/\lambda$ de ese fotón.
7. (I) Un elemento radiactivo experimenta un decaimiento alfa con una vida de 12 μs. Si se emiten partículas alfa con 5.5 keV de energía cinética, determine la incertidumbre $\Delta E/E$ en la energía de la partícula.
8. (II) Una bala de 12 g sale horizontalmente de un rifle con una rapidez de 180 m/s. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de esta bala? *b*) Si la posición de la bala se conoce con una precisión de 0.65 cm (radio del cañón), ¿cuál es la incertidumbre mínima en su cantidad de movimiento vertical?
9. (II) Un electrón y una pelota de béisbol de 140 g viajan, cada una, a 95 m/s, una rapidez medida con una precisión del 0.085%. Calcule y compare la incertidumbre en la posición de cada uno.
10. (II) ¿Cuál es la incertidumbre en la masa de un muón ($m = 105.7\ \text{MeV}/c^2$), especificada en eV/c^2, dada su vida de 2.20 μs?
11. (II) Un neutrón libre ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) tiene una vida media de 900 s. ¿Cuál es la incertidumbre en su masa (en kg)?
12. (II) Con base en el principio de incertidumbre, demuestre que, si un electrón estuviera presente en el núcleo ($r \approx 10^{-15}$ m), su energía cinética (use relatividad) sería de cientos de MeV. (Puesto que tales energías de electrón no se observan, se concluye que los electrones no están presentes en el núcleo). [*Sugerencia:* Suponga que una partícula puede tener energía tan grande como su incertidumbre].
13. (II) Un electrón en el estado $n = 2$ del hidrógeno permanece ahí en promedio aproximadamente 10^{-8} s antes de saltar al estado $n = 1$. *a*) Estime la incertidumbre en la energía del estado $n = 2$. *b*) ¿Qué fracción de la energía de transición es ésta? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda, y el ancho (en nm), de esta línea en el espectro del hidrógeno?
14. (II) ¿Con cuánta precisión se puede medir la posición de un electrón de 3.50 keV, suponiendo que su energía se conoce al 1.00%?

15. (III) En un experimento de doble rendija con electrones (o fotones), suponga que se usan indicadores para determinar por cuál rendija pasó cada electrón (sección 38-2). Estos indicadores deben señalar la coordenada y dentro de $d/2$, donde d es la distancia entre rendijas. Con base en el principio de incertidumbre, demuestre que el patrón de interferencia se destruirá. [*Nota:* Demuestre primero que el ángulo θ entre máximos y mínimos del patrón de interferencia está dado por $\frac{1}{2}\lambda/d$, figura 38-19].

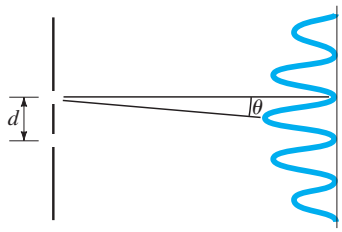


FIGURA 38–19 Problema 15.

*38–6 Ecuación de Schrödinger dependiente el tiempo

***16.** (II) Demuestre que el principio de superposición se sostiene para la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Esto es, demuestre que, si $\Psi_1(x, t)$ y $\Psi_2(x, t)$ son soluciones, entonces $A\Psi_1(x, t) + B\Psi_2(x, t)$ también es una solución, donde A y B son constantes arbitrarias.

***17.** (III) *a*) Demuestre que $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ es una solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para una partícula libre [$U(x) = U_0 =$ constante], pero que $\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$ y $\Psi(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$ no lo son. *b*) Demuestre que la solución válida del inciso *a*) satisface la conservación de la energía si se sostienen las relaciones de De Broglie; $\lambda = h/p$, $\omega = E/\hbar$. Esto es, demuestre que la sustitución directa en la ecuación 38-7 da

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0.$$

38–7 Partículas libres; ondas planas; paquetes de ondas

18. (I) Un electrón libre tiene una función de onda $\psi(x) = A\,\text{sen}(2.0 - 10^{10}\,x)$, donde x está dada en metros. Determine la *a*) longitud de onda, *b*) cantidad de movimiento, *c*) rapidez y *d*) energía cinética del electrón.

19. (I) Escriba la función de onda para *a*) un electrón libre y *b*) un protón libre, cada uno con una velocidad constante $v = 3.0 \times 10^5$ m/s.

20. (III) Demuestre que el principio de incertidumbre se sostiene para un "paquete de ondas" que se forma mediante dos ondas de similar longitud de onda λ_1 y λ_2. Para ello, siga el argumento que conduce a la ecuación 16-8, pero use como las dos ondas $\psi_1 = A\,\text{sen}\,k_1x$ y $\psi_2 = A\,\text{sen}\,k_2x$. Luego, demuestre que el ancho de cada "paquete de ondas" es $\Delta x = 2\pi/(k_1 - k_2) = 2\pi/\Delta k$ (de $t = 0.05$ s a $t = 0.15$ s en la figura 16-17). Por último, demuestre que $\Delta x\,\Delta p = h$ para esta situación sencilla.

38–8 Pozo cuadrado infinito

21. (II) ¿Cuál es la mínima rapidez de un electrón atrapado en un pozo cuadrado con profundidad infinita de 0.20 nm de ancho?

22. (II) Demuestre que, para una partícula en una caja perfectamente rígida, la longitud de onda de la función de onda para cualquier estado es la longitud de onda de De Broglie.

23. (II) Un electrón atrapado en un pozo cuadrado de profundidad infinita tiene una energía de estado fundamental $E = 9.0$ eV. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda más larga del fotón que puede emitir un estado excitado de este sistema? *b*) ¿Cuál es el ancho del pozo?

24. (II) Una transición de $n = 4$ a $n = 1$ para un electrón atrapado en una caja rígida produce un fotón de 340 nm. ¿Cuál es el ancho de la caja?

25. (II) Para una partícula en una caja con paredes rígidas, determine si los resultados para el estado fundamental son congruentes con el principio de incertidumbre al calcular el producto $\Delta p\,\Delta x$. Considere que $\Delta x \approx \ell$, puesto que la partícula está en algún lugar dentro de la caja. Para Δp, note que, aunque se conozca p $(= \hbar k)$, la dirección de $\vec{\mathbf{p}}$ no se conoce, de manera que el componente x podría variar de $-p$ a $+p$; por lo tanto, considere que $\Delta p \approx 2p$.

26. (II) La línea con longitud de onda más larga en el espectro emitido por un electrón atrapado en un pozo cuadrado con profundidad infinita es 610 nm. ¿Cuál es el ancho del pozo?

27. (II) Determine los cuatro niveles energéticos menores y las funciones de onda para un electrón atrapado en un pozo de potencial con profundidad infinita de 2.0 nm de ancho.

28. (II) Escriba una fórmula para las posiciones de *a*) los máximos y *b*) los mínimos en $|\psi|^2$ para una partícula en el n-ésimo estado en un pozo cuadrado infinito.

29. (II) Considere un núcleo atómico que se encuentra en un caja rígida de ancho 2.0×10^{-14} m. ¿Cuál sería la energía del estado fundamental para *a*) un electrón, *b*) un neutrón y *c*) un protón en este núcleo?

30. (II) Un protón en un núcleo se puede modelar aproximadamente como una partícula en una caja de dimensiones nucleares. Calcule la energía liberada cuando un protón confinado en un núcleo de 1.0×10^{-14} m de ancho realiza una transición desde el primer estado excitado hasta el estado fundamental.

31. (II) Considere una sola molécula de oxígeno confinada en una caja rígida unidimensional de 4.0 mm de ancho. *a*) Considérela como una partícula en una caja rígida, y determine la energía del estado fundamental. *b*) Si la molécula tiene una energía igual a la energía térmica promedio unidimensional $\frac{1}{2}kT$ a $T = 300$ K, ¿cuál es el número cuántico n? *c*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre el n-ésimo estado y el siguiente estado más alto?

32. (II) Un electrón está atrapado en una caja rígida de 1.00 nm de ancho. Determine la probabilidad de encontrar el electrón a menos de 0.15 nm desde el centro de la caja (a cualquier lado del centro) para *a*) $n = 1$, *b*) $n = 5$ y *c*) $n = 20$. *d*) Compare con la predicción clásica.

33. (III) Si un pozo de profundidad infinita y ancho ℓ se redefine como ubicado de $x = -\frac{1}{2}\ell$ hasta $x = \frac{1}{2}\ell$ (en oposición a $x = 0$ a $x = \ell$), especule cómo cambiará esto la función de onda para una partícula en ese pozo. Analice su especulación determinando las funciones de onda y los niveles de energía para este pozo recién definido. [*Sugerencia:* Intente $\psi = A\,\text{sen}\,(kx + \phi)$].

38–9 Pozo de potencial finito

34. (II) Un electrón, con 180 eV de energía cinética en espacio libre, pasa sobre un pozo de potencial finito de 56 eV de profundidad que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 0.50$ nm. ¿Cuál es la longitud de onda del electrón *a*) en espacio libre, *b*) cuando está sobre el pozo? *c*) Dibuje un diagrama que muestre la energía potencial y la energía total como función de x, y sobre el diagrama bosqueje una posible función de onda.

35. (II) Bosqueje las funciones de onda y las distribuciones de probabilidad para los estados $n = 4$ y $n = 5$ en el caso de una partícula atrapada en un pozo cuadrado finito.

36. (II) Suponga que una partícula de masa m está atrapada en un pozo de potencial finito que tiene una pared rígida en $x = 0$ ($U = \infty$ para $x < 0$) y una pared finita de altura $u = U_0$ en $x = \ell$, figura 38-20. *a*) Bosqueje las funciones de onda para los tres estados inferiores. *b*) ¿Cuál es la forma de la función de onda en el estado fundamental en las tres regiones $x < 0$, $0 < x < \ell$, $x > \ell$?

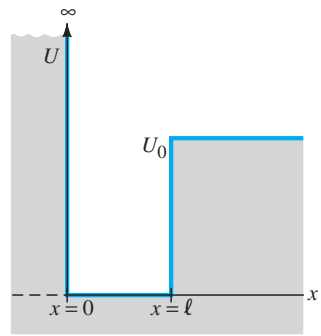


FIGURA 38–20
Problema 36.

37. (II) Un electrón está atrapado en un pozo cuadrado finito de 0.16 nm de ancho $U_0 = 2.0$ keV. Estime a qué distancia afuera de las paredes del pozo la función de onda del estado fundamental cae al 1.0% de su valor en las paredes.

38–10 Tunelamiento

38. (II) Una barrera de potencial tiene una altura $U_0 = 14$ eV y grosor $\ell = 0.85$ nm. Si el coeficiente de transmisión para un electrón incidente es 0.00050, ¿cuál es la energía del electrón?

39. (II) Un electrón se aproxima a una barrera de potencial de 18 eV de alto y 0.55 nm de ancho. Si el electrón tiene una probabilidad del 1.0% de efectuar tunelamiento a través de la barrera, ¿cuál es la energía del electrón?

40. (II) Un protón y un núcleo de helio se aproximan a una barrera de energía potencial de 25 MeV. Si cada uno tiene una energía cinética de 5.0 MeV, ¿cuál es la probabilidad de cada uno para realizar tunelamiento a través de la barrera, suponiendo que ésta es rectangular y mide 3.6 fm de grosor?

41. (II) Un electrón con una energía de 8.0 eV incide sobre una barrera de potencial que tiene 9.2 eV de alto y 0.25 nm de ancho. *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón pase a través de la barrera? *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón se refleje?

42. (II) Una corriente de 1.0 mA de protones de 1.6 MeV golpea una barrera de potencial de 2.6 MeV de alto y 2.8×10^{-13} m de grosor. Estime la corriente transmitida.

43. (II) Para el inciso *b*) del ejemplo 38-11, ¿qué efecto habrá sobre el coeficiente de transmisión si *a*) la altura de la barrera se eleva 2.0%, *b*) el grosor de la barrera aumenta en 2.0%?

44. (II) Demuestre que el coeficiente de transmisión está dado aproximadamente por las ecuaciones 38-17 para una barrera alta o gruesa, al calcular $|\psi(x = \ell)|^2/|\psi(0)|^2$. [*Sugerencia:* Suponga que ψ es un decaimiento exponencial dentro de la barrera].

45. (III) Un núcleo de uranio 238 ($Q = +92e$) dura aproximadamente 4.5×10^9 años antes de que decaiga por emisión de una partícula alfa ($q = +2e$, $M = 4M_{\text{protón}}$). *a*) Suponiendo que la partícula α es un punto, y el núcleo tiene aproximadamente 8 fm de radio, estime la altura de la barrera de Coulomb (el pico en la figura 38-17). *b*) La partícula alfa, cuando está libre, tiene energía cinética ≈ 4 MeV. Estime el ancho de la barrera. *c*) Suponiendo que el pozo cuadrado tiene $U = 0$ en el interior (y $U = 0$ lejos del núcleo), calcule la rapidez de la partícula alfa y con cuánta frecuencia golpea el interior de la barrera, y a partir de esto (y de las ecuaciones 38-17) estime la vida del uranio. [*Sugerencia:* Sustituya la barrera de Coulomb $1/r$ con una barrera rectangular "promediada" (como en la figura 38-15) de ancho igual a $\frac{1}{3}$ del calculado en *b*)].

Problemas generales

46. El bosón Z^0, descubierto en 1985, es el mediador de la fuerza nuclear débil, y por lo general decae muy rápidamente. Su energía en reposo promedio es de 91.19 GeV, pero su corta vida se manifiesta como un ancho intrínseco de 2.5 GeV. ¿Cuál es el tiempo de vida de esta partícula?

47. Estime la menor energía posible de un neutrón contenido en un núcleo típico de 1.2×10^{-15} m de radio. [*Sugerencia:* Considere que una partícula puede tener una energía al menos tan grande como su incertidumbre].

48. Un neutrón está atrapado en un pozo de potencial con profundidad infinita de 2.5 fm de ancho. Determine *a*) los cuatro estados energéticos más bajos posibles y *b*) sus funciones de onda. *c*) ¿Cuáles son la longitud de onda y la energía de un fotón emitido cuando el neutrón realiza una transición entre los dos estados más bajos? ¿En qué región del espectro EM se encuentra este fotón? [*Nota:* Éste es un modelo aproximado de un núcleo atómico].

49. Protones se aceleran desde el reposo a través de 650 V. Luego se dirigen hacia dos rendijas separadas 0.80 mm. ¿Qué tan separados estarán los picos de interferencia sobre una pantalla a 18 m de distancia?

50. Un electrón y un protón, ambos inicialmente en reposo, se aceleran a través del mismo voltaje. Suponiendo que la incertidumbre en su posición está dada por su longitud de onda de De Broglie, encuentre la razón de la incertidumbre en su cantidad de movimiento.

51. Con base en el principio de incertidumbre, estime la incertidumbre de posición para el electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno. [*Sugerencia:* Determine la cantidad de movimiento con base en el modelo de Bohr de la sección 37-11 y suponga que la cantidad de movimiento puede estar en cualquier parte entre este valor y cero]. ¿Cómo se compara esto con el radio de Bohr?

52. **Oscilador armónico simple**. Suponga que una partícula de masa m está atrapada no en un pozo cuadrado, sino en uno cuya energía potencial es la de un oscilador armónico simple: $U(x) = \frac{1}{2}Cx^2$. Esto es, si la partícula se desplaza desde $x = 0$, sobre ella actúa una fuerza restauradora $F = -Cx$, donde C es constante. *b*) Bosqueje esta energía potencial. *b*) Demuestre que $\psi = Ae^{-Bx^2}$ es una solución a la ecuación de Schrödinger y que la energía de este estado es $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{C/m}$ (como sucede de manera clásica, ecuación 14-5) y $B = m\omega/2\hbar$. [*Nota:* Éste es el estado fundamental y esta energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$ es la energía punto cero para un oscilador armónico. Las energías de estados superiores son $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, donde n es un entero].

53. Estime la energía cinética y la rapidez de una partícula alfa ($q = +2e$, $M = 4M_{\text{protón}}$) atrapada en un núcleo de 1.5×10^{-14} m de ancho. Suponga un pozo cuadrado de potencial con profundidad infinita.

54. Una pequeña pelota de 3.0×10^{-6} kg de masa se deja caer sobre una mesa desde una altura de 2.0 m. Después de cada rebote, la pelota se eleva al 65% de su altura antes del rebote, como resultado de su colisión inelástica con la mesa. Estime cuántos rebotes ocurren antes de que el principio de incertidumbre desempeñe un papel en el problema. [*Sugerencia:* Determine cuándo la incertidumbre en la rapidez de la pelota es comparable con su rapidez de impacto sobre la mesa].

55. ¿En cuánto cambia la corriente de tunelamiento a través de la punta de un STM, si la punta se eleva 0.020 nm desde alguna altura inicial sobre una superficie de sodio con una función trabajo $W_0 = 2.28$ eV? [*Sugerencia:* Deje que la función trabajo (véase la sección 37-2) iguale la energía necesaria para elevar el electrón a la parte superior de la barrera].

56. Demuestre que la función $\psi(x) = Ae^{ikx}$, donde A es una constante y k está dada por la ecuación 38-11, es una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el caso $U = 0$.

57. Demuestre que el valor promedio del cuadrado de la posición x de una partícula en el estado n dentro de un pozo infinito de ancho ℓ es $\overline{x^2} = \int x^2|\psi_n|^2\,dx = \ell^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(n\pi)^{-2}\right]$. Calcule los valores de $\overline{x^2}$ para $n = 1$ a 20 y elabore una gráfica de $\overline{x^2}$ contra n. [*Sugerencia:* Puede consultar una tabla de integrales detallada].

58. Considere una partícula que pueda existir en cualquier lugar del espacio, con una función de onda dada por $\psi(x) = b^{-\frac{1}{2}}|x/b|^{\frac{1}{2}}e^{-(x/b)^2/2}$, donde $b = 1.0$ nm. *a*) Compruebe que la función de onda está normalizada. *b*) ¿Cuál es la posición más probable para la partícula en la región $x > 0$? *c*) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula entre $x = 0$ nm y $x = 0.50$ nm?

59. Un lápiz de 7.0 gramos y 18 cm de largo se equilibra sobre su punta. Desde el punto de vista clásico, ésta es una configuración de equilibrio (inestable), de manera que el lápiz podría permanecer así por siempre si se coloca de manera perfecta. Un análisis mecánico-cuántico indica que el lápiz debe caer. *a*) ¿Por qué es éste el caso? *b*) Estime (dentro de un factor de 2) cuánto tiempo tardará el lápiz en golpear la mesa, si inicialmente se le coloca tan bien como sea posible. [*Sugerencia:* Con base en el principio de incertidumbre en su forma angular, obtenga una expresión para el ángulo inicial $\phi_0 \approx \Delta\phi$].

*Problemas numéricos/por computadora

***60.** (III) Un electrón está atrapado en el estado fundamental de un pozo de potencial infinito de ancho $\ell = 0.10$ nm. En el ejemplo 38-7 la probabilidad de que el electrón se encuentre en el 1% central del pozo se estimó en $|\psi|^2\Delta x$. Use métodos numéricos para determinar qué tan grande podría ser Δx para causar menos del 10% de error en tal estimación.

***61.** (III) Considere una partícula de masa m y energía E que viaja hacia la derecha, donde encuentra una estrecha barrera de potencial de altura U_0 y ancho ℓ, como se ilustra en la figura 38-21. Se puede demostrar que:

(i) para $E < U_0$, la probabilidad de transmisión es

$$T = \left[1 + \frac{(e^{G\ell} - e^{-G\ell})^2}{16(E/U_0)(1 - E/U_0)}\right]^{-1}$$

donde

$$G = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

y la probabilidad de reflexión es $R = 1 - T$.

(ii) Para $E > U_0$, la probabilidad de transmisión es

$$T = \left[1 + \frac{\text{sen}^2(G'\ell)}{4(E/U_0)(E/U_0 - 1)}\right]^{-1}$$

donde

$$G' = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$$

y $R = 1 - T$. Considere que la partícula es un electrón e incide sobre una barrera rectangular de altura $U_0 = 10$ eV y ancho $\ell = 1.0 \times 10^{-10}$ m. *a*) Calcule T y R para el electrón a partir de $E/U_0 = 0$ a 10, en incrementos de 0.1. Elabore una gráfica sencilla que incluya las dos curvas de T y R como función de E/U_0. *b*) A partir de la gráfica, determine las energías (E/U_0) a las que el electrón tendrá probabilidades de transmisión del 10%, 20%, 50% y 80%.

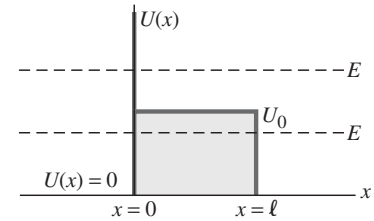


FIGURA 38–21 Problema 61.

Respuestas a los ejercicios

A: *c*).

B: *e*).

C: *e*).

D: *a*).

Un tubo de neón es un delgado tubo de vidrio, moldeable en varias formas, lleno con gas neón (u otro gas) que brilla con un color particular cuando a través de él pasa una corriente de alto voltaje. Los átomos del gas, excitados a niveles superiores de energía, saltan hacia niveles de energía inferiores y emiten luz (fotones) cuyas longitudes de onda (color) son características del tipo de gas.

En este capítulo se estudiarán, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, los átomos, sus funciones de onda y niveles de energía, incluido el efecto del principio de exclusión. También se estudiarán interesantes aplicaciones, como los láseres y la holografía.

CAPÍTULO 39

Mecánica cuántica de los átomos

CONTENIDO

39–1 Visión mecánico-cuántica de los átomos
39–2 El átomo de hidrógeno: La ecuación de Schrödinger y los números cuánticos
39–3 Funciones de onda del átomo de hidrógeno
39–4 Átomos complejos; el principio de exclusión
39–5 Tabla periódica de los elementos
39–6 Espectros de rayos X y el número atómico
*39–7 Momento dipolar magnético; cantidad de movimiento angular total
39–8 Fluorescencia y fosforescencia
39–9 Láseres
*39–10 Holografía

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

1. Miles de átomos de hidrógeno están todos en su estado fundamental. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

a) Todos los átomos tienen al electrón en una órbita circular en el radio de Bohr.
b) Todos los átomos tienen al electrón en la misma órbita, pero no es la misma órbita para el estado fundamental en el modelo de Bohr.
c) El electrón no está en una órbita real, pero la distancia entre el núcleo y el electrón es la misma en todos los átomos.
d) Si se pudiera medir la distancia desde el núcleo al electrón, éste se encontraría en diferentes posiciones en diferentes átomos. La distancia más probable sería el radio de Bohr.

2. El estado de un electrón en un átomo se puede especificar mediante un conjunto de números cuánticos. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son válidos?

a) No hay dos electrones en el Universo que sean idénticos.
b) Todos los electrones en el Universo son idénticos.
c) No hay dos electrones en un átomo que ocupen el mismo estado cuántico.
d) No puede haber más de un electrón en una órbita electrónica dada.
e) Los electrones se deben excluir del núcleo porque ahí sólo se permiten cargas positivas para originar órbitas electrónicas estables de acuerdo con el modelo de Bohr.

Al inicio del capítulo 38 se analizaron las limitaciones de la teoría de Bohr referente a la estructura atómica y se explicó por qué se necesitaba una nueva teoría. Aunque la teoría de Bohr tuvo gran éxito para predecir las longitudes de onda de la luz emitida y absorbida por el átomo de hidrógeno, no podía hacerlo para átomos más complejos. Tampoco logró explicar la *estructura fina*, la división de las líneas de emisión en dos o más líneas muy cercanas entre sí. Y, como teoría, era una incómoda mezcla de ideas clásicas y cuánticas.

La mecánica cuántica llegó al rescate en 1925 y 1926. En este capítulo se examina la teoría mecánico-cuántica de la estructura atómica, que es mucho más completa que la antigua teoría de Bohr.

39–1 Visión mecánico-cuántica de los átomos

Aunque el modelo de Bohr se descartó como una descripción exacta de la naturaleza, la mecánica cuántica reafirmó ciertos aspectos de la antigua teoría, como el que los electrones en un átomo sólo existen en estados discretos de energía definida, y que cuando un electrón realiza una transición de un estado a otro, se emite (o se absorbe) un fotón de luz. Pero la mecánica cuántica es una teoría mucho más profunda y ofrece una visión muy diferente del átomo. De acuerdo con la mecánica cuántica, los electrones no existen en órbitas circulares bien definidas como en la teoría de Bohr. Más bien, los electrones (en virtud de su naturaleza ondulatoria) se pueden considerar como dispersos en el espacio, como si fueran una **"nube"**. Es posible calcular el tamaño y la forma de la nube de electrones para un estado determinado de un átomo. Para el estado fundamental en el átomo de hidrógeno, la solución de la ecuación de Schrödinger, como se estudiará con más detalle en la sección 39-3, da

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}.$$

Aquí, $\psi(r)$ es la función de onda como función de la posición, y depende solamente de la distancia radial r desde el centro, y no de la posición angular θ o ϕ. (La constante r_0 resulta ser igual al primer radio de Bohr). Por ende, la nube de electrones, cuya densidad es $|\psi|^2$, para el estado fundamental del hidrógeno tiene simetría esférica, como se ilustra en la figura 39-1. La extensión de la nube de electrones a sus densidades más altas indica aproximadamente el "tamaño" de un átomo, pero, así como una nube carece de una frontera distintiva, los átomos tampoco tienen una frontera precisa o un tamaño bien definido. No todas las nubes de electrones tienen una forma esférica, como se verá más tarde en este capítulo. Observe que $\psi(r)$, aunque se vuelve extremadamente pequeña para grandes r (véase la ecuación anterior), no es igual a cero en cualquier región finita. Así que la mecánica cuántica sugiere que un átomo no es en su mayor parte espacio vacío. (De hecho, como $\psi \to 0$ sólo para $r \to \infty$, es cuestionable la idea de que haya algún espacio verdaderamente vacío en el Universo).

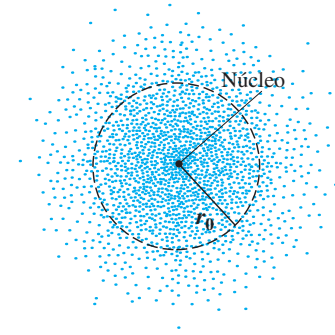


FIGURA 39–1 Nube de electrones o "distribución de probabilidad" $|\psi|^2$ para el estado fundamental del átomo de hidrógeno, visto desde lejos. El círculo representa el radio de Bohr r_0. Los puntos representan una detección hipotética de un electrón en ese punto: los puntos más cercanos representan una mayor probabilidad de la presencia de un electrón (nube más densa).

La nube de electrones se puede interpretar desde el punto de vista de una partícula o de una onda. Recuerde que por partícula se entiende algo que se ubica en el espacio: tiene una posición definida en cualquier instante dado. En contraste, una onda se dispersa hacia el espacio. La nube de electrones, dispersa en el espacio como en la figura 39-1, es resultado de la naturaleza ondulatoria de los electrones. La nube de electrones también puede interpretarse como **distribuciones de probabilidad** (o **densidad de probabilidad**) para una partícula. Como se vio en la sección 38-3, es imposible predecir la trayectoria que seguirá un electrón. Después de una medición de su posición no se puede predecir con exactitud dónde estará en un tiempo posterior. Sólo es posible calcular la probabilidad de que se encontrará en diferentes puntos. Si usted tuviera que realizar 500 mediciones distintas de la posición de un electrón, considerado como partícula, la mayoría de los resultados mostrarían al electrón en puntos donde la probabilidad es alta (área más oscura en la figura 39-1). Sólo ocasionalmente los electrones se encontrarían ahí donde la probabilidad es baja.

39–2 El átomo de hidrógeno: La ecuación de Schrödinger y los números cuánticos

El átomo de hidrógeno es el más simple de todos los átomos, y consiste en un solo electrón de carga $-e$ que gira alrededor de un núcleo central (un solo protón) de carga $+e$. El estudio de la estructura atómica debe comenzar con el hidrógeno.

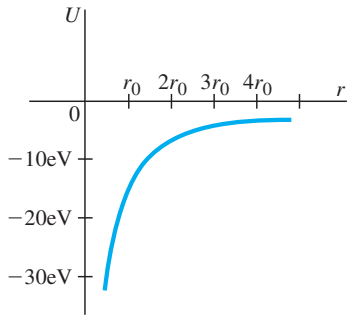


FIGURA 39–2 Energía potencial $U(r)$ para el átomo de hidrógeno. La distancia radial r del electrón desde el núcleo está dada en términos del radio de Bohr r_0.

La ecuación de Schrödinger (véase la ecuación 38-5) incluye un término que contiene la energía potencial. Para el átomo de hidrógeno (H), la energía potencial se debe a la fuerza de Coulomb entre electrón y protón:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

donde r es la distancia radial desde el protón (situado en $r = 0$) hasta el electrón. Véase la figura 39-2. La ecuación de Schrödinger (independiente del tiempo), que ahora se debe escribir en tres dimensiones, es entonces

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}\psi = E\psi, \qquad \textbf{(39–1)}$$

dondee $\partial^2\psi/\partial x^2$, $\partial^2\psi/\partial y^2$ y $\partial^2\psi/\partial z^2$ son derivadas parciales con respecto a x, y y z. Para resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo H, es común escribirla en términos de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ). Sin embargo, no la resolveremos. En vez de ello, se observarán las propiedades de las soluciones y (en la siguiente sección) las funciones de onda en sí.

Recuerde del capítulo 38 que las soluciones de la ecuación de Schrödinger en una dimensión para el pozo cuadrado infinito se caracterizaban por un solo número cuántico, que se llamó n, el cual surge de aplicar las condiciones de frontera. En el problema tridimensional del átomo H, las soluciones de la ecuación de Schrödinger se caracterizan por tres números cuánticos que corresponden a condiciones de frontera aplicadas en las tres dimensiones. Sin embargo, en realidad se necesitan cuatro números cuánticos para especificar cada estado en el átomo H, y el cuarto proviene de un tratamiento relativista. Ahora se estudiarán cada uno de estos números cuánticos. Gran parte del análisis también se aplicará a átomos más complejos; a ello se procederá al inicio de la sección 39-4.

La mecánica cuántica predice los mismos niveles de energía (figura 37-26) para el átomo H que la teoría de Bohr. Esto es,

$$E_n = -\frac{13.6\text{ eV}}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \qquad \textbf{(39–2)}$$

donde n es un entero. En la teoría de Bohr, sólo había un número cuántico, n. En la mecánica cuántica se necesitan cuatro números cuánticos para especificar cada estado en el átomo:

(1) El *número cuántico n* de la teoría de Bohr también se encuentra en la mecánica cuántica y se llama **número cuántico principal**. Puede tener cualquier valor entero de 1 a ∞. La energía total de un estado en el átomo de hidrógeno depende de n, como se vio anteriormente.

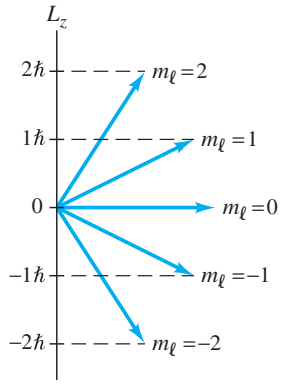
(2) El **número cuántico orbital,** ℓ, se relaciona con la magnitud de la cantidad de movimiento (o momento) angular del electrón; ℓ puede tomar valores enteros desde 0 hasta $(n - 1)$. Para el estado fundamental $(n = 1)$, ℓ sólo puede ser cero.[†] Para $n = 3$, ℓ puede ser 0, 1 o 2. La magnitud real de la cantidad de movimiento angular L se relaciona con el número cuántico ℓ mediante

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar. \qquad \textbf{(39–3)}$$

El valor de ℓ casi no tiene efecto sobre la energía total en el átomo de hidrógeno; sólo n lo tiene en algún grado apreciable (pero véase la *estructura fina* a continuación). En átomos con dos o más electrones, la energía sí depende de ℓ, así como de n, como se verá.

(3) El **número cuántico magnético**, m_ℓ, se relaciona con la *dirección* de la cantidad de movimiento angular del electrón, y puede tomar valores enteros que van de $-\ell$ a $+\ell$. Por ejemplo, si $\ell = 2$, entonces m_l puede ser -2, -1, 0, $+1$ o $+2$. Como la cantidad de movimiento angular es un vector, no es de sorprender que tanto la magnitud como la dirección estén cuantizadas. Para $\ell = 2$, las cinco diferentes direcciones permitidas se representan mediante el diagrama de la figura 39-3. Esta limitación en la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ con frecuencia se llama **cuantización espacial**. En

FIGURA 39–3 Cuantización de la dirección de la cantidad de movimiento angular para $\ell = 2$. (La magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ es $\sqrt{6}\,\hbar$).



[†]Esto sustituye a la teoría de Bohr, que tiene $\ell = 1$ para el estado fundamental (ecuación 37-10).

mecánica cuántica, la dirección de la cantidad de movimiento angular por lo general se especifica al dar su componente a lo largo del eje z (esta elección es arbitraria). Entonces L_z se relaciona con m_ℓ mediante la ecuación

$$L_z = m_\ell \hbar. \tag{39–4}$$

Sin embargo, los valores de L_x y L_y no están definidos. El nombre de m_ℓ se deriva no de la teoría (que lo relaciona con L_z), sino de los experimentos. Se encontró que cuando un tubo de descarga de gas se colocaba en un campo magnético, las líneas espectrales se dividían en muchas líneas muy cercanas entre sí. Esta división, conocida como **efecto Zeeman**, implica que los niveles de energía se deben dividir (figura 39-4) y, por lo tanto, que la energía de un estado depende no sólo de n, sino también de m_l cuando se aplica un campo magnético; de ahí el nombre de "número cuántico magnético".

(4) Finalmente, está el **número cuántico de espín**, m_s, que para un electrón puede tener sólo dos valores, $m_s = +\frac{1}{2}$ y $m_s = -\frac{1}{2}$. La existencia de este número cuántico no resultó de la teoría original de Schrödinger, como n, ℓ y m_ℓ. En vez de ello, una modificación posterior de P. A. M. Dirac (1902-1984) explicó su presencia como efecto relativista. Sin embargo, el primer indicio de que se necesitaba m_s provino de los experimentos. Un estudio cuidadoso de las líneas espectrales del hidrógeno indicó que cada una en realidad consistía en dos (o más) líneas muy cercanas entre sí, incluso en ausencia de un campo magnético externo. Primero se pensó que esta pequeña división de niveles de energía, llamada **estructura fina**, se debía a la cantidad de movimiento angular asociada con un giro del electrón. Esto es, el electrón puede girar en torno a su eje, así como girar alrededor del núcleo, tal como la Tierra gira sobre su eje mientras se encuentra en órbita alrededor del Sol. La interacción entre la pequeña corriente del electrón que gira podría entonces interactuar con el campo magnético debido a la carga en órbita y causar la pequeña división observada de los niveles de energía. (Por consiguiente, la energía depende ligeramente de m_ℓ y m_s. Se dice que la estructura fina se debe a una **interacción espín-órbita**). En la actualidad, la imagen de un electrón que gira no se considera legítima. Si no es posible visualizar un electrón como un objeto localizado, mucho menos como uno que se encuentra girando. Lo importante es que el electrón puede tener dos estados diferentes debido a alguna propiedad intrínseca que se comporta como una cantidad de movimiento angular, y a esta propiedad se le llama "espín". Se dice que el electrón tiene un número cuántico de espín $s = \frac{1}{2}$, que produce una cantidad de movimiento angular de espín

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar.$$

La componente z es

$$S_z = m_s \hbar$$

donde los dos posibles valores de m_s $\left(+\frac{1}{2} \text{ y } -\frac{1}{2}\right)$ con frecuencia se dice que son "espín hacia arriba" y "espín hacia abajo", en referencia a las dos posibles direcciones de la cantidad de movimiento angular de espín. Véase la figura 39-5. Un estado con espín hacia abajo $\left(m_s = -\frac{1}{2}\right)$ tiene energía ligeramente menor que uno con espín hacia arriba. (Note que en la lista de números cuánticos se incluye m_s, pero no s, ya que s es igual para todos los electrones).

En la tabla 39-1 se resumen los posibles valores de los cuatro números cuánticos para un electrón en el átomo de hidrógeno.

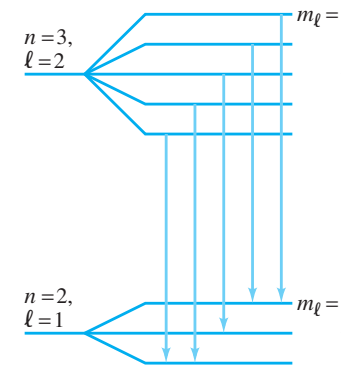


FIGURA 39–4 Cuando se aplica un campo magnético, un nivel de energía $n = 3, \ell = 2$ se divide en cinco niveles separados (que se muestran exagerados, no a escala), los cuales corresponden a los cinco valores de m_ℓ $(2, 1, 0, -1, -2)$. Un nivel $n = 2, \ell = 1$ se divide en tres niveles $(m_\ell = 1, 0, -1)$. Pueden ocurrir transiciones entre niveles (no se muestran todas las transiciones), con la emisión de electrones con muchas frecuencias ligeramente diferentes (efecto Zeeman).

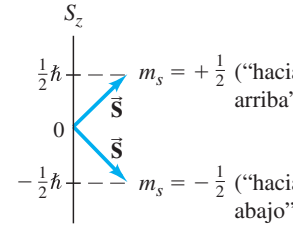


FIGURA 39–5 La cantidad de movimiento angular de espín S puede tomar sólo dos direcciones, $m_s = +\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$, que se llaman "espín hacia arriba" y "espín hacia abajo".

TABLA 39–1 Números cuánticos para un electrón

Nombre	Símbolo	Posibles valores
Principal	n	$1, 2, 3, \ldots, \infty$.
Orbital	ℓ	Para un n dado: ℓ puede ser $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Magnético	m_ℓ	Para n y ℓ dados: m_l puede ser $\ell, \ell-1, \ldots, 0, \ldots, -\ell$.
Espín	m_s	Para cada conjunto de n, ℓ y m_l: m_s puede ser $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

EJEMPLO CONCEPTUAL 39–1 **Posibles estados para $n = 3$** ¿Cuántos estados diferentes son posibles para un electrón cuyo número cuántico principal es $n = 3$?

RESPUESTA Para $n = 3$, ℓ puede tener los valores $\ell = 2, 1, 0$. Para $\ell = 2$, m_ℓ puede ser 2, 1, 0, −1, −2, lo que implica cinco diferentes posibilidades. Para cada uno de éstos, m_s puede ser hacia arriba o hacia abajo ($+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$); de manera que para $\ell = 2$ existen $2 \times 5 = 10$ estados. Para $\ell = 1$, m_ℓ puede ser 1, 0, −1, y puesto que m_s puede ser $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$ para cada uno de éstos, se tienen 6 posibles estados más. Finalmente, para $\ell = 0$, m_ℓ sólo puede ser 0, y sólo hay 2 estados que corresponden a $m_s = +\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$. El número total de estados es 10 + 6 + 2 = 18, como se detalla en la siguiente tabla:

n	ℓ	m_ℓ	m_s	n	ℓ	m_ℓ	m_s
3	2	2	$\frac{1}{2}$	3	1	1	$\frac{1}{2}$
3	2	2	$-\frac{1}{2}$	3	1	1	$-\frac{1}{2}$
3	2	1	$\frac{1}{2}$	3	1	0	$\frac{1}{2}$
3	2	1	$-\frac{1}{2}$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$
3	2	0	$\frac{1}{2}$	3	1	−1	$\frac{1}{2}$
3	2	0	$-\frac{1}{2}$	3	1	−1	$-\frac{1}{2}$
3	2	−1	$\frac{1}{2}$	3	0	0	$\frac{1}{2}$
3	2	−1	$-\frac{1}{2}$	3	0	0	$-\frac{1}{2}$
3	2	−2	$\frac{1}{2}$				
3	2	−2	$-\frac{1}{2}$				

EJERCICIO A Un electrón tiene $n = 4$, $\ell = 2$. ¿Cuáles de los siguientes valores de m_ℓ son posibles: 4, 3, 2, 1, 0 −1, −2, −3, −4?

EJEMPLO 39–2 ***E* y *L* para $n = 3$.** Determine *a*) la energía y *b*) la cantidad de movimiento angular orbital para un electrón en cada uno de los estados del átomo de hidrógeno del ejemplo 39-1.

PLANTEAMIENTO La energía de un estado sólo depende de n, excepto para las muy pequeñas correcciones mencionadas líneas arriba, que se ignorarán. La energía se calcula como en la teoría de Bohr, $E_n = -13.6\ \text{eV}/n^2$. Para cantidad de movimiento angular se utiliza la ecuación 39-3.

SOLUCIÓN *a*) Como $n = 3$ para todos estos estados, todos tienen la misma energía.

$$E_3 = -\frac{13.6\ \text{eV}}{(3)^2} = -1.51\ \text{eV}.$$

b) Para $\ell = 0$, la ecuación 39-3 da

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\,\hbar = 0.$$

Para $\ell = 1$,

$$L = \sqrt{1(1 + 1)}\,\hbar = \sqrt{2}\,\hbar = 1.49 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

Para $\ell = 2$, $L = \sqrt{2(2 + 1)}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar$.

NOTA Las cantidades de movimiento angulares atómicas por lo general se expresan como múltiplos de $\hbar$ ($\sqrt{2}\,\hbar$ o $\sqrt{6}\,\hbar$ en este caso), y no en unidades del SI.

EJERCICIO B ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital para el número cuántico orbital $\ell = 3$? *a*) $3\hbar$; *b*) $3.5\hbar$; *c*) $4\hbar$; *d*) $12\hbar$.

Reglas de selección: Transiciones permitidas y prohibidas

Otra predicción de la mecánica cuántica es que, cuando un fotón se emite o se absorbe, las transiciones sólo pueden ocurrir entre estados con valores de ℓ que difieren por exactamente una unidad:

$$\Delta\ell = \pm 1.$$

De acuerdo con esta **regla de selección**, un electrón en un estado $\ell = 2$ sólo puede saltar a un estado con $\ell = 1$ o $\ell = 3$. No podrá saltar a un estado con $\ell = 2$ o $\ell = 0$. Una

transición como la de $\ell = 2$ a $\ell = 0$ se llama **transición prohibida**. En realidad, tal transición no está absolutamente prohibida y es factible que ocurra, pero sólo con probabilidad muy baja en comparación con las **transiciones permitidas**, aquellas que satisfacen la regla de selección $\Delta\ell = \pm 1$. Puesto que la cantidad de movimiento angular orbital de un átomo H debe cambiar por una unidad cuando emite un fotón, la conservación de la cantidad de movimiento angular dice que el fotón debe llevarse cantidad de movimiento angular. De hecho, evidencia experimental de muchos tipos indica que al fotón se le puede asignar una cantidad de movimiento angular de espín de $1\hbar$.

39–3 Funciones de onda del átomo de hidrógeno

La solución de la ecuación de Schrödiner para el estado fundamental del hidrógeno (el estado con energía más baja) tiene una energía $E_1 = -13.6$ eV, como se vio. La función de onda para el estado fundamental sólo depende de r y, por consiguiente, tiene simetría esférica. Como ya se mencionó en la sección 39-1, su forma es

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} \qquad \textbf{(39–5a)}$$

donde $r_0 = h^2\epsilon_0/\pi me^2 = 0.0529$ nm es el radio de Bohr (sección 37-11). El subíndice 100 en ψ representa los números cuánticos n, ℓ y m_ℓ:

$$\psi_{n\ell m_\ell}.$$

Para el estado fundamental, $n = 1$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$ y sólo hay una función de onda que sirve para $m_s = +\frac{1}{2}$ y $m_s = -\frac{1}{2}$ (el valor de m_s no afecta la dependencia espacial de la función de onda para estado alguno, pues el espín es una propiedad *interna* o *intrínseca* del electrón). La densidad de probabilidad para el estado fundamental es

$$|\psi_{100}|^2 = \frac{1}{\pi r_0^3} e^{-\frac{2r}{r_0}} \qquad \textbf{(39–5b)}$$

que disminuye exponencialmente con r. Advierta que ψ_{100}, como todas las demás funciones de onda que se estudian, se normalizó:

$$\int_{\text{todo el espacio}} |\psi_{100}|^2\, dV = 1.$$

La cantidad $|\psi|^2 dV$ indica la probabilidad de encontrar al electrón en un volumen dV alrededor de un punto dado. Con frecuencia es más útil especificar la **distribución de probabilidad radial**, P_r, que se define de manera que $P_r dr$ es la probabilidad de encontrar al electrón a una distancia radial entre r y $r + dr$ del núcleo. Esto es, $P_r dr$ especifica la probabilidad de encontrar al electrón dentro de un delgado cascarón de grosor dr con radio interior r y radio exterior $r + dr$, sin importar la dirección (véase la figura 39-6). El volumen de este cascarón es el producto de su área superficial, $4\pi r^2$, y su grosor, dr:

$$dV = 4\pi r^2\, dr.$$

En consecuencia,

$$|\psi|^2\, dV = |\psi|^2 4\pi r^2\, dr$$

y la distribución de probabilidad radial es

$$P_r = 4\pi r^2 |\psi|^2. \qquad \textbf{(39–6)}$$

Para el estado fundamental del hidrógeno, P_r se convierte en

$$P_r = 4\frac{r^2}{r_0^3} e^{-\frac{2r}{r_0}} \qquad \textbf{(39–7)}$$

y se grafica en la figura 39-7. El pico de la curva es el valor "más probable" de r y se presenta para $r = r_0$, el radio de Bohr, lo que se demuestra en el siguiente ejemplo.

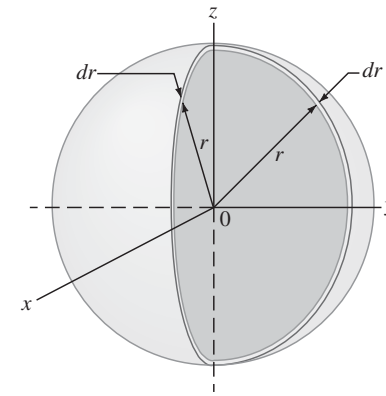
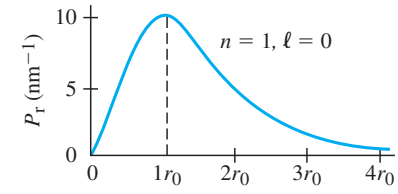


FIGURA 39–6 Un cascarón esférico de grosor dr, radio interior r y radio exterior $r + dr$. Su volumen es $dV = 4\pi r^2\, dr$.

FIGURA 39–7 Distribución de probabilidad radial P_r para el estado fundamental del hidrógeno, $n = 1$, $\ell = 0$. El pico se presenta en $r = r_0$, el radio de Bohr.



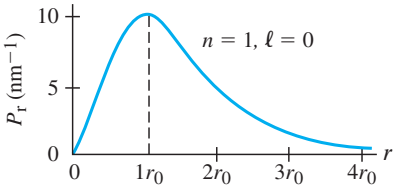


FIGURA 39–7 (Repetida). Distribución de probabilidad radial P_r para el estado fundamental del hidrógeno, $n = 1, \ell = 0$. El pico se presenta en $r = r_0$, el radio de Bohr.

EJEMPLO 39–3 **Radio electrónico más probable en el hidrógeno.** Determine la distancia más probable r desde el núcleo a la que se puede encontrar el electrón en el estado fundamental del hidrógeno.

PLANTEAMIENTO El pico de la curva en la figura 39-7 corresponde al valor más probable de r. En este punto la curva tiene pendiente cero, de manera que se obtiene la derivada de la ecuación 39-7, se iguala a cero y se despeja r.

SOLUCIÓN Se encuentra

$$\frac{d}{dr}\left(4\frac{r^2}{r_0^3}e^{-\frac{2r}{r_0}}\right) = 0$$

$$\left(8\frac{r}{r_0^3} - \frac{8r^2}{r_0^4}\right)e^{-\frac{2r}{r_0}} = 0.$$

Puesto que $e^{-\frac{2r}{r_0}}$ tiende a cero sólo en $r = \infty$, el término entre paréntesis es el que debe ser cero:

$$8\frac{r}{r_0^3} - 8\frac{r^2}{r_0^4} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{r}{r_0^3} = \frac{r^2}{r_0^4}$$

o

$$r = r_0.$$

La distancia radial más probable del electrón desde el núcleo, de acuerdo con la mecánica cuántica, está en el radio de Bohr, una interesante coincidencia.

EJERCICIO C Regrese a la primera pregunta de inicio de capítulo, página 1044, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO 39–4 **Cálculo de probabilidad.** Determine la probabilidad de encontrar el electrón en el estado fundamental del hidrógeno dentro de dos radios de Bohr desde el núcleo.

PLANTEAMIENTO Necesita integrar P_r desde $r = 0$ hasta $r = 2r_0$.

SOLUCIÓN Se quiere encontrar

$$P = \int_{r=0}^{2r_0} |\psi|^2\, dV = \int_0^{2r_0} 4\frac{r^2}{r_0^3}\, e^{-\frac{2r}{r_0}}\, dr.$$

Primero realice la sustitución

$$x = 2\frac{r}{r_0}$$

y luego integre por partes ($\int u\, dv = uv - \int v\, du$) y deje que $u = x^2$ y $dv = e^{-x}dx$ (advierta que $dx = 2\, dr/r_0$, y que el límite superior es $x = 2(2r_0)/r_0 = 4$):

$$P = \tfrac{1}{2}\int_{x=0}^{4} x^2 e^{-x}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[-x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\, dx\right]\Bigg|_0^4.$$

El segundo término también se integra por partes con $u = 2x$ y $dv = e^{-x}dx$:

$$P = \tfrac{1}{2}\left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\, dx\right]\Bigg|_0^4$$

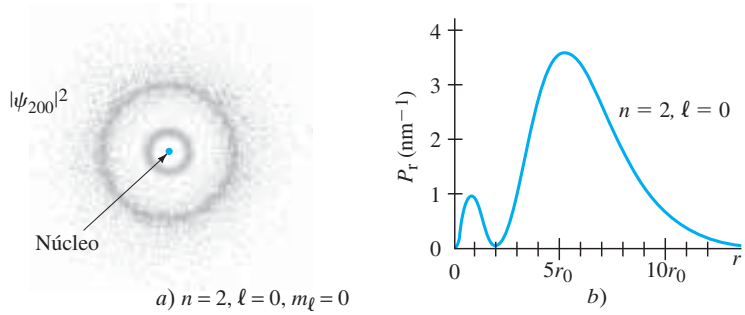
$$= \left(-\tfrac{1}{2}x^2 - x - 1\right)e^{-x}\Bigg|_0^4.$$

Esto se evalúa a $x = 0$ y en $x = 4$:

$$P = (-8 - 4 - 1)e^{-4} + e^0 = 0.76$$

o 76%. Por lo tanto, el electrón se encontraría el 76% del tiempo dentro de 2 radios de Bohr del núcleo y el 24% del tiempo más lejos.

NOTA Este resultado depende de la función de onda adecuadamente normalizada, que es, como se demuestra fácilmente al dejar que $r \to \infty$ y al integrar sobre todo el espacio: $\int_0^\infty |\psi|^2\, dV = 1$; esto es, permita que el límite superior en la ecuación anterior sea ∞.



a) $n = 2, \ell = 0, m_\ell = 0$ *b*)

FIGURA 39–8 *a*) Nube de electrones o distribución de probabilidad para el estado $n = 2, \ell = 0$ en el hidrógeno. *b*) Distribución de probabilidad radial P_r para el estado $n = 2, \ell = 0$ en el hidrógeno.

El primer estado excitado en el hidrógeno tiene $n = 2$. Para $\ell = 0$, la solución de la ecuación de Schrödinger (ecuación 39-1) es una función de onda que de nuevo tiene simetría esférica:

$$\psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{32\pi r_0^3}}\left(2 - \frac{r}{r_0}\right)e^{-\frac{r}{2r_0}}. \qquad \textbf{(39–8)}$$

La figura 39-8a ilustra la distribución de probabilidad $|\psi_{200}|^2$ y la figura 39-8b muestra[†] una gráfica de la distribución de probabilidad radial

$$P_r = 4\pi r^2|\psi|^2 = \frac{1}{8}\frac{r^2}{r_0^3}\left(2 - \frac{r}{r_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{r_0}}.$$

En esta curva existen dos picos; el segundo, en $r \approx 5r_0$, es mayor y corresponde al valor más probable para r en el estado $n = 2, \ell = 0$. Se observa que el electrón tiende a estar un poco más alejado del núcleo en el estado $n = 2, \ell = 0$ que en el estado $n = 1, \ell = 0$. (Compare con el modelo de Bohr que dio $r_2 = 4r_0$).

Para el estado con $n = 2, \ell = 1$, existen tres posibles funciones de onda, que corresponden a $m_\ell = +1, 0$ o -1:

$$\begin{aligned}
\psi_{210} &= \frac{z}{\sqrt{32\pi r_0^5}}\, e^{-\frac{r}{2r_0}} \\
\psi_{211} &= \frac{x + iy}{\sqrt{64\pi r_0^5}}\, e^{-\frac{r}{2r_0}} \qquad \textbf{(39–9)} \\
\psi_{21-1} &= \frac{x - iy}{\sqrt{64\pi r_0^5}}\, e^{-\frac{r}{2r_0}}
\end{aligned}$$

donde i es el número imaginario $i = \sqrt{-1}$. Estas funciones de onda *no* tienen simetría esférica. Las distribuciones de probabilidad, $|\psi|^2$, se muestran en la figura 39-9a, donde se aprecia su orientación direccional.

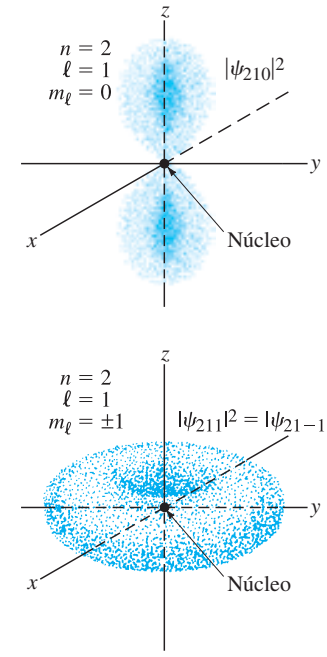
Tal vez usted se pregunte cómo surgen tales funciones de onda sin simetría esférica cuando la energía potencial en la ecuación de Schrödinger tiene simetría esférica. De hecho, ¿cómo un electrón podría seleccionar uno de estos estados? En ausencia de alguna influencia externa, como un campo magnético en una dirección particular, estos tres estados tienen igual probabilidad, y todos tienen la misma energía. Por lo tanto, se puede considerar que un electrón pasa un tercio de su tiempo en cada uno de estos estados. Entonces, el efecto neto es la suma de estas tres funciones de onda al cuadrado:

$$|\psi_{210}|^2 + |\psi_{211}|^2 + |\psi_{21-1}|^2,$$

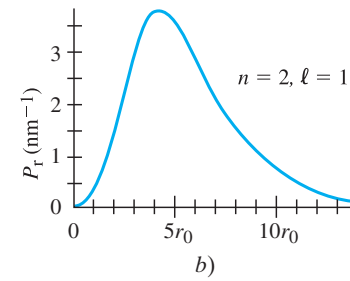
que tiene simetría esférica, pues $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. La distribución de probabilidad radial para esta suma se ilustra en la figura 39-9b.

Aunque las distribuciones espaciales del electrón se pueden calcular para los diversos estados, es difícil medirlos de manera experimental. De hecho, la mayor parte de la información experimental acerca de los átomos proviene de un cuidadoso examen de los espectros de emisión en varias condiciones.

FIGURA 39–9 *a*) Distribución de probabilidad para los tres estados con $n = 2, \ell = 1$. *b*) Distribución de probabilidad radial para la suma de los tres estados con $n = 2, \ell = 1$ y $m_\ell = +1, 0$ o -1.



a)



b)

[†]Al igual que en el caso de una partícula en un pozo cuadrado de potencial profundo (véanse las figuras 38-9 y 38-10), cuanto más alta sea la energía, más nodos hay en ψ y $|\psi|^2$ también para el átomo H.

39–4 Átomos complejos; el principio de exclusión

El átomo de hidrógeno se estudió con detalle porque es el más simple con el que se puede tratar. Ahora se estudiarán brevemente átomos más complejos, aquellos que contienen más de un electrón. Es posible determinar experimentalmente sus niveles de energía a partir de un análisis de sus espectros de emisión. Los niveles de energía *no* son los mismos como en el átomo H, pues los electrones interactúan unos con otros, así como con el núcleo. Cada electrón en un átomo complejo todavía ocupa un estado particular caracterizado por los mismos números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s. Para átomos con más de un electrón, los niveles de energía dependen tanto de n como de ℓ.

El número de electrones en un átomo neutro se llama **número atómico**, Z; y Z también es el número de cargas positivas (protones) en el núcleo y determina qué tipo de átomo es. Esto es, Z determina las propiedades fundamentales que distinguen un tipo de átomo de otro.

La mecánica cuántica en los años posteriores a 1925 probó tener éxito también para tratar con átomos complejos. Sin embargo, las matemáticas se volvieron más complejas, pues en los átomos de muchos electrones, cada electrón no sólo se ve atraído hacia el núcleo, sino que también lo repelen otros electrones.

Para entender los posibles arreglos de los electrones en un átomo, se necesitaba un nuevo principio. Fue Wolfgang Pauli (1900- 1958; figura 38-2) quien lo introdujo, por lo que se le llamó **principio de exclusión de Pauli**. En él se afirma:

No hay dos electrones en un átomo que ocupen el mismo estado cuántico.

Por consiguiente, no hay dos electrones en un átomo que tengan exactamente el mismo conjunto de números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s. El principio de exclusión de Pauli forma la base no sólo para comprender átomos complejos, sino también para entender las moléculas y los enlaces, así como otros fenómenos.

Ahora se observará la estructura de algunos átomos más simples cuando están en el estado fundamental. Después del hidrógeno, el siguiente átomo más sencillo es el *helio*, con dos electrones. Ambos electrones pueden tener $n = 1$, pues uno puede tener espín hacia arriba $\left(m_s = +\frac{1}{2}\right)$ y el otro espín hacia abajo $\left(m_s = -\frac{1}{2}\right)$, de manera que se satisface el principio de exclusión. Puesto que $n = 1$, entonces ℓ y m_ℓ deben ser cero (tabla 39-1, página 1047). Así, los dos electrones tienen los números cuánticos que se indican en la tabla 39-2.

El litio tiene tres electrones, dos de los cuales pueden tener $n = 1$. Pero el tercero no puede tener $n = 1$ sin violar el principio de exclusión. Así que el tercer electrón debe tener $n = 2$. Sucede que el nivel $n = 2$, $\ell = 0$ tiene una energía menor que $n = 2$, $\ell = 1$. De manera que los electrones en el estado fundamental tienen los números cuánticos indicados en la tabla 39-2. Los números cuánticos del tercer electrón podrían ser también, digamos, $(n, \ell, m_\ell, m_s) = \left(3, 1, -1, \frac{1}{2}\right)$. Pero el átomo en este caso estaría en un estado excitado, pues tendría mayor energía. No pasaría mucho tiempo antes de que saltara hacia el estado fundamental con la emisión de un fotón. A temperatura ambiente, a menos que se suministre energía adicional (como en un tubo de descarga), la inmensa mayoría de los átomos se encuentran en el estado fundamental.

Se continuará de esta forma para describir los números cuánticos de cada electrón en el estado fundamental de átomos cada vez más grandes. Los números cuánticos para el sodio, con sus 11 electrones, se indican en la tabla 39-2.

La figura 39-10 muestra un diagrama de nivel energético sencillo donde los estados ocupados se representan como flechas hacia arriba o hacia abajo ($m_s = +\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$), y los posibles estados vacíos se representan como un pequeño círculo.

TABLA 39–2 Números cuánticos en estado fundamental

n	ℓ	m_ℓ	m_s
Helio, $Z = 2$			
1	0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	$-\frac{1}{2}$
Litio, $Z = 3$			
1	0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	$-\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$
Sodio, $Z = 11$			
1	0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	$-\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$
2	0	0	$-\frac{1}{2}$
2	1	1	$\frac{1}{2}$
2	1	1	$-\frac{1}{2}$
2	1	0	$\frac{1}{2}$
2	1	0	$-\frac{1}{2}$
2	1	−1	$\frac{1}{2}$
2	1	−1	$-\frac{1}{2}$
3	0	0	$\frac{1}{2}$

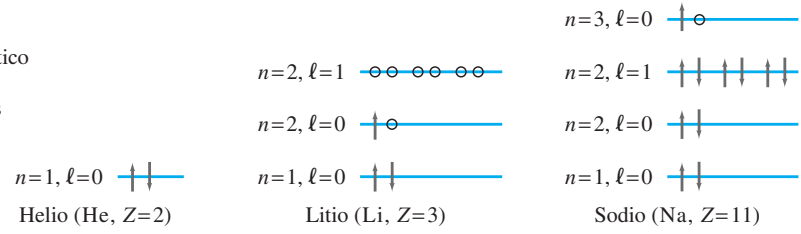


FIGURA 39–10 Diagrama de nivel energético (no a escala) que muestra estados ocupados (flechas) y estados no ocupados (○) para los estados fundamentales de He, Li y Na. Note que se ilustra el nivel $n = 2, \ell = 1$ de Li aun cuando esté vacío.

En la tabla periódica se incluye la configuración de estado fundamental para todos los átomos; la tabla se presenta la tercera de forros de este libro y se estudia en la siguiente sección.

EJERCICIO D Construya una tabla de los números cuánticos del estado fundamental para el berilio, $Z = 4$ (como los de la tabla 39-2).

El principio de exclusión se aplica a partículas idénticas cuyo número cuántico de espín es la mitad de un entero ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, etcétera), incluyendo electrones, protones y neutrones; tales partículas se llaman **fermiones**, en honor de Enrico Fermi, quien elaboró una teoría estadística que los describe. Una suposición básica es que todos los electrones son **idénticos**, indistinguibles uno de otro. De igual modo, todos los protones son idénticos, todos los neutrones son idénticos, y así sucesivamente. El principio de exclusión no se aplica a partículas con espín entero (0, 1, 2, etcétera), como el fotón y el mesón π, todos ellos conocidos como **bosones** (en honor de Satyendranath Bose, quien elaboró una teoría estadística para ellos).

EJERCICIO E Regrese a la segunda pregunta de inicio de capítulo, página 1044, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

TABLA 39–3 Valor de ℓ

Valor de ℓ	Símbolo	Máximo número de electrones en el subnivel
0	s	2
1	p	6
2	d	10
3	f	14
4	g	18
5	h	22
⋮	⋮	⋮

TABLA 39–4 Configuración electrónica de algunos elementos

Z (Número de electrones)	Elemento†	Configuración de estado fundamental (electrones exteriores)
1	H	$1s^1$
2	He	$1s^2$
3	Li	$2s^1$
4	Be	$2s^2$
5	B	$2s^2 2p^1$
6	C	$2s^2 2p^2$
7	N	$2s^2 2p^3$
8	O	$2s^2 2p^4$
9	F	$2s^2 2p^5$
10	Ne	$2s^2 2p^6$
11	Na	$3s^1$
12	Mg	$3s^2$
13	Al	$3s^2 3p^1$
14	Si	$3s^2 3p^2$
15	P	$3s^2 3p^3$
16	S	$3s^2 3p^4$
17	Cl	$3s^2 3p^5$
18	Ar	$3s^2 3p^6$
19	K	$4s^1$
20	Ca	$4s^2$
21	Sc	$3d^1 4s^2$
22	Ti	$3d^2 4s^2$
23	V	$3d^3 4s^2$
24	Cr	$3d^5 4s^1$
25	Mn	$3d^5 4s^2$
26	Fe	$3d^6 4s^2$

† Los nombres de los elementos se encuentran en el Apéndice F.

39–5 Tabla periódica de los elementos

Hace más de un siglo, Dmitri Mendeleev (1834-1907) ordenó los elementos conocidos (hasta entonces) en lo que ahora se llama **tabla periódica** de los elementos. Los átomos se ordenaron de acuerdo con masa creciente, pero también de manera que los elementos con propiedades químicas similares quedaran incluidos en la misma columna. La versión actual aparece en la tercera de forros de este libro. Cada cuadro contiene el número atómico Z, el símbolo para el elemento y la masa atómica (en unidades de masa atómica). Finalmente, la esquina inferior izquierda indica la configuración del estado fundamental del átomo. Esto requiere cierta explicación. Se dice que los electrones con el mismo valor de n están en el mismo **nivel**. Los electrones con $n = 1$ están en un nivel (el nivel K), los que tienen $n = 2$ están en un segundo nivel (el nivel L), los que tienen $n = 3$ están en el tercer nivel (M), etcétera. Se dice que los electrones con los mismos valores de n y ℓ están en el mismo **subnivel**. Con frecuencia se usan letras para especificar el valor de ℓ, como se observa en la tabla 39-3. Esto es, $\ell = 0$ es el subnivel s; $\ell = 1$ es el subnivel p; $\ell = 2$ es el subnivel d; a partir de $\ell = 3$ las letras siguen el abecedario, f, g, h, i, etcétera. [Las primeras letras, s, p, d, f originalmente fueron abreviaturas de "nítido" (*sharp*), "principal", "difuso" y "fundamental", términos experimentales que se refieren a los espectros].

El principio de exclusión de Pauli limita el número de electrones posible en cada nivel y subnivel. Para cualquier valor de ℓ, existen $2\ell + 1$ posibles valores m_ℓ (m_ℓ puede ser cualquier entero de 1 a ℓ, de -1 a $-\ell$, o cero) y dos posibles valores m_s. Por lo tanto, puede haber cuando mucho $2(2\ell + 1)$ electrones en cualquier subnivel ℓ. Por ejemplo, para $\ell = 2$, son posibles cinco valores m_ℓ (2, 1, 0, -1, -2), y para cada uno de éstos, m_s puede ser $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$ para dar un total de $2(5) = 10$ estados. La tabla 39-3 indica el número máximo de electrones que pueden ocupar cada subnivel.

Como los niveles energéticos dependen casi por completo de los valores de n y ℓ, es habitual especificar la configuración electrónica al dar simplemente el valor n y la letra apropiada para ℓ, con el número de electrones en cada subnivel como un superíndice. La configuración de estado fundamental del sodio, por ejemplo, se escribe $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Esto se simplifica en la tabla periódica al especificar sólo la configuración de los electrones exteriores y cualquier otro subnivel no lleno (véase la tabla 39-4 aquí y la tabla periódica en la tercera de forros).

EJEMPLO CONCEPTUAL 39–5 **Configuraciones electrónicas.** ¿Cuáles de las siguientes configuraciones electrónicas son posibles y cuáles no lo son? *a*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^3$; *b*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2$; *c*) $1s^2 2s^2 2p^6 2d^1$

RESPUESTA *a*) Ésta no se permite, pues en el subnivel *s* hay demasiados electrones (tres) del nivel M ($n = 3$). El subnivel *s* tiene $m_\ell = 0$, con dos espacios solamente, para electrones "espín hacia arriba" y "espín hacia abajo". *b*) Ésta se permite, pero se encuentra en un estado excitado. Uno de los electrones del subnivel 3*p* saltó hacia el subnivel 4*s*. Como hay 19 electrones, el elemento es potasio. *c*) Ésta no se permite, pues no hay subnivel *d* ($\ell = 2$) en el nivel $n = 2$ (tabla 39-1). El electrón exterior tendrá que estar en (al menos) el nivel $n = 3$.

EJERCICIO F Escriba la configuración de estado fundamental completa para el galio, con sus 31 electrones.

El agrupamiento de átomos en la tabla periódica se hace de acuerdo con el número atómico Z creciente. También hay una fuerte regularidad de acuerdo con las propiedades químicas. Aunque esto se explica en libros de química, se estudia aquí brevemente porque se trata de un resultado de la mecánica cuántica. Véase la tabla periódica en la tercera de forros de este libro.

Todos los **gases nobles** (en la columna VIII de la tabla periódica) tienen niveles o subniveles completamente llenos. Esto es, su subnivel externo está completamente lleno, y la distribución de electrones tiene simetría esférica. Con tal simetría esférica llena, otros electrones ni son atraídos ni se pierden fácilmente (la energía de ionización es alta). Por eso, los gases nobles son químicamente inertes (se verá más acerca de esto cuando se estudien las moléculas y los enlaces en el capítulo 40). La columna VII incluye los **halógenos**, a los cuales les falta un electrón para llenar por completo un nivel energético. Debido a las formas de las órbitas (véase la sección 40-1), pueden aceptar un electrón adicional de otro átomo y, por eso, estos elementos son bastante reactivos. Tienen una valencia de -1, lo que significa que, cuando adquieren un electrón adicional, el ion resultante tiene una carga neta de $-1e$. La columna I de la tabla periódica contiene los **metales alcalinos**, todos los cuales tienen un solo electrón externo *s*. Este electrón pasa la mayor parte de su tiempo afuera de los niveles y subniveles internos cerrados que lo apantallan de la mayor parte de la carga nuclear. De hecho, está relativamente lejos del núcleo y se ve atraído hacia éste mediante una carga neta de sólo aproximadamente $+1e$, debido al efecto de apantallamiento de los otros electrones. En consecuencia, este electrón exterior se remueve fácilmente y puede pasar mucho de su tiempo alrededor de otro átomo, lo que forma una molécula. Por esa razón, los metales alcalinos son químicamente activos y tienen una valencia de $+1$. Las otras columnas de la tabla periódica se pueden tratar de manera similar.

La presencia de los **elementos de transición** en el centro de la tabla, así como los lantánidos (tierras raras) y los actínidos abajo, es resultado de niveles internos incompletos. Para los elementos de Z más bajo, los subniveles están llenos en un orden simple: primero 1*s*, luego 2*s*, seguido por 2*p*, 3*s* y 3*p*. Tal vez usted piense que 3*d* ($n = 3, \ell = 2$) se llenaría a continuación, pero no es así. En vez de ello, en realidad el nivel 4*s* tiene una energía ligeramente menor que 3*d* (ya que los electrones interactúan unos con otros), así que se llena primero (K y Ca). Sólo entonces el nivel 3*d* empieza a llenarse, comenzando con Sc, como se observa en la tabla 39-4. (Los niveles 4*s* y 3*d* están cerca, así que algunos elementos tienen sólo un electrón 4*s*, como el Cr). La mayoría de las propiedades químicas de estos elementos de transición están gobernadas por los electrones 4*s* que se mantienen relativamente holgados, y por ello, en general, tienen valencias de $+1$ o $+2$. Un efecto similar es responsable de los *lantánidos* y *actínidos*, que por comodidad se presentan en la parte inferior de la tabla periódica. Todos tienen propiedades químicas muy similares, determinadas por sus dos electrones 6*s* o 7*s* exteriores, mientras que los diferentes números de electrones en los niveles internos sin llenar tienen poco efecto.

⚠ **CUIDADO**
Los subniveles no siempre se llenan en "orden"

39–6 Espectros de rayos X y el número atómico

Los espectros de líneas de los átomos en las regiones IR, visible y UV del espectro EM se deben principalmente a transiciones entre estados de los electrones externos. Buena parte de la carga del núcleo está apantallada ante estos electrones mediante la carga negativa en los electrones internos. Pero los electrones más internos en el nivel $n = 1$ "ven" la carga completa del núcleo. Puesto que la energía de un nivel es proporcional a Z^2 (véase la ecuación 37-14), para un átomo con $Z = 50$, se esperarían longitudes de onda aproximadamente $50^2 = 2500$ veces más corta que las que se encuentran en la serie de Lyman del hidrógeno (alrededor de 100 nm), o de 10^{-2} a 10^{-1} nm. Tales longitudes de onda cortas se encuentran en la región de rayos X del espectro.

Los rayos X se producen cuando los electrones acelerados por un alto voltaje inciden sobre el blanco metálico dentro del tubo de rayos X (sección 35-10). Si se observa el espectro de longitudes de onda emitido por un tubo de rayos X, se observa que el espectro consta de dos partes: un espectro continuo con un corte en alguna λ_0 que sólo depende del voltaje a través del tubo, y una serie superpuesta de picos. Un ejemplo común se presenta en la figura 39-11. La curva suave y la longitud de onda de corte λ_0 se mueven hacia la izquierda conforme aumenta el voltaje a través del tubo. Sin embargo, las líneas o los picos agudos (denotados como K_α y K_β en la figura 39-11) permanecen a la misma longitud de onda cuando cambia el voltaje, aunque se ubican en longitudes de onda diferentes cuando se emplean distintos materiales como blanco. Esta observación sugiere que los picos son característicos del material utilizado como blanco. De hecho, los picos se explican imaginando que los electrones acelerados por el alto voltaje del tubo pueden alcanzar energías suficientes y que, cuando chocan con los átomos del blanco, logran extraer uno de los electrones internos sujetos muy firmemente. Entonces, estos **rayos X característicos** (los picos en la figura 39-11) se explican como fotones emitidos cuando un electrón en un estado superior decae para llenar el estado inferior vacante. Las líneas K resultan de transiciones *hacia* el nivel K ($n = 1$). La línea K_α consiste en fotones emitidos en una transición que se origina en el nivel $n = 2$ (L) hacia el nivel $n = 1$ (K), mientras que la línea K_β refleja una transición del nivel $n = 3$ (M) hacia el nivel K. Una línea L, por otra parte, se debe a una transición hacia el nivel L, etcétera.

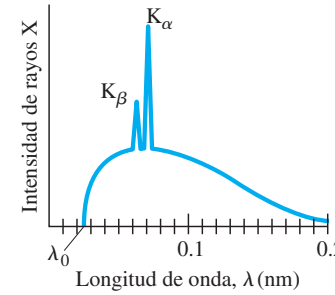
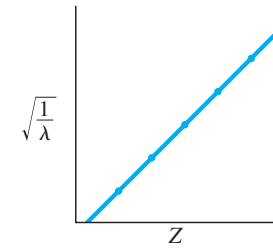


FIGURA 39–11 Espectro de rayos X emitidos a partir de un blanco de molibdeno en un tubo de rayos X que opera a 50 kV.

La medición de los espectros de rayos X característicos permitió determinar los niveles energéticos internos de los átomos. También permitió determinar los valores Z para muchos átomos, pues (como se vio) la longitud de onda de los rayos X característicos más cortos emitidos será inversamente proporcional a Z^2. En realidad, para un electrón que salta, por ejemplo, del nivel $n = 2$ al $n = 1$ (línea K_α), la longitud de onda es inversamente proporcional a $(Z - 1)^2$, porque el núcleo está apantallado por el electrón que todavía permanece en el nivel 1*s*. En 1914, H. G. J. Moseley (1887-1915) encontró que una gráfica de $\sqrt{1/\lambda}$ contra Z producía una línea recta (figura 39-12), donde λ es la longitud de onda de la línea K_α. Los valores Z de algunos elementos se determinaron al ajustarlos a tal **gráfica Moseley**. La obra de Moseley colocó el concepto de número atómico sobre una firme base experimental.

FIGURA 39–12 Gráfica de $\sqrt{1/\lambda}$ contra Z para líneas de rayos X K_α.



EJEMPLO 39–6 **Longitud de rayos X.** Estime la longitud de onda para una transición de $n = 2$ a $n = 1$ en molibdeno ($Z = 42$). ¿Cuál es la energía de tal fotón?

PLANTEAMIENTO Se emplea la fórmula de Bohr, ecuación 37-15, para $1/\lambda$, con $(Z - 1)^2 = (41)^2$ en sustitución de Z^2.

SOLUCIÓN La ecuación 37-15 da

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^3 c}\right)(Z - 1)^2\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

donde $n = 2$ y $n' = 1$. Al sustituir valores:

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^7\,\mathrm{m^{-1}})\,(41)^2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = 1.38 \times 10^{10}\,\mathrm{m^{-1}}.$$

De manera que

$$\lambda = \frac{1}{1.38 \times 10^{10}\,\mathrm{m^{-1}}} = 0.072\,\mathrm{nm}.$$

Esto está cerca del valor medido (figura 39-11) de 0.071 nm. Cada uno de estos fotones tendría energía (en eV) de

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})(3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s})}{(7.2 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})(1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})} = 17\,\mathrm{keV}.$$

El denominador incluye el factor de conversión de joules a eV.

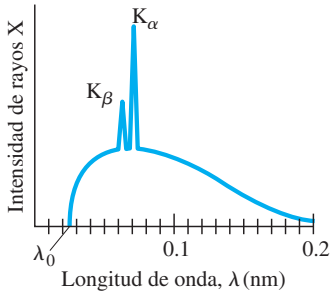


FIGURA 39–11 (Repetida) Espectro de rayos X emitidos a partir de un blanco de molibdeno en un tubo de rayos X que opera a 50 kV.

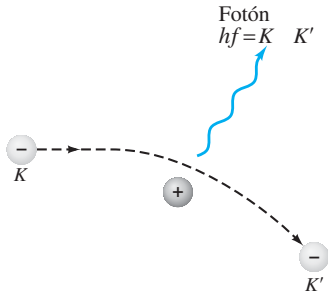


FIGURA 39–13 Fotón *bremsstrahlung* emitido por un electrón desacelerado por interacción con un átomo blanco.

EJEMPLO 39–7 **Determinación del número atómico.** Para bombardear un material desconocido se utilizan electrones de alta energía. El pico más pronunciado se presenta para los rayos X emitidos con una energía de 66.3 keV. Determine de qué material se trata.

PLANTEAMIENTO La más alta intensidad de rayos X por lo general es para la línea K_α (véase la figura 39-11), que se presenta cuando electrones externos de alta energía extraen electrones del nivel K (la órbita más interna, $n = 1$) y su lugar lo ocupan electrones del nivel L ($n = 2$). Emplee el modelo de Bohr y suponga que los electrones "ven" una carga nuclear de $Z - 1$ (apantallada por un electrón).

SOLUCIÓN La transición del hidrógeno de $n = 2$ a $n = 1$ produciría aproximadamente 10.2 eV (véase la figura 37-26 o el ejemplo 37-13). La energía E es proporcional a Z^2 (ecuación 37-14) o más bien $(Z - 1)^2$, porque el núcleo está apantallado por un electrón en el estado 1*s* (véase líneas arriba), así que podemos utilizar las proporciones:

$$\frac{(Z-1)^2}{1^2} = \frac{66.3 \times 10^3\,\text{eV}}{10.2\,\text{eV}} = 6.50 \times 10^3,$$

de manera que $Z - 1 = \sqrt{6500} = 81$ y $Z = 82$, que corresponde al plomo.

Ahora se analizará brevemente la parte continua de un espectro de rayos X (figura 39-11) con base en la teoría fotónica de la luz. Cuando los electrones inciden sobre el blanco, chocan con átomos del material y ceden la mayor parte de su energía como calor (aproximadamente el 99%, por lo que los tubos de rayos X se deben enfriar). Los electrones también pueden ceder energía al emitir un fotón: un electrón desacelerado por interacción con átomos del blanco (figura 39-13) emite radiación debido a su desaceleración (capítulo 31) y en este caso se llama **bremsstrahlung** (término del alemán que significa "radiación de frenado"). Como la energía se conserva, la energía del fotón emitido, hf, debe ser igual a la pérdida de energía cinética del electrón, $\Delta K = K - K'$, de manera que

$$hf = \Delta K.$$

Un electrón puede perder toda su energía o parte de ella en tal colisión. El espectro continuo de rayos X (figura 39-11) se explica como debida a tales colisiones *bremsstrahlung*, en las que los electrones pierden cantidades variables de energía. El rayo X con longitud de onda más corta (la frecuencia más alta) se debe a un electrón que cede *toda* su energía cinética para producir un fotón en una sola colisión. Como la energía cinética inicial de un electrón es igual a la energía otorgada por el voltaje de aceleración, V, entonces $K = eV$. En una sola colisión en la que el electrón se lleve al reposo ($K' = 0$), entonces $\Delta K = eV$ y

$$hf_0 = eV.$$

Se establece que $f_0 = c/\lambda_0$, donde λ_0 es la longitud de onda de corte (figura 39-11) y se encuentra que

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV}. \qquad \textbf{(39–10)}$$

Esta predicción para λ_0 corresponde precisamente a la que se observa de forma experimental. Este resultado es una mayor evidencia de que los rayos X son una forma de radiación electromagnética (luz)[†] y de que la teoría fotónica de la luz es válida.

EJEMPLO 39–8 **Longitud de onda de corte.** ¿Cuál es la longitud de onda más corta del fotón de rayos X emitido en un tubo de rayos X sometido a 50 kV?

PLANTEAMIENTO Los electrones que inciden sobre el blanco tendrán una energía cinética de 50 keV. Los fotones con longitud de onda más corta se deben a colisiones en las cuales toda la energía cinética del electrón se cede al fotón, de manera que $K = eV = hf_0$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la ecuación 39-10,

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^8\,\text{m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(5.0 \times 10^4\,\text{V})} = 2.5 \times 10^{-11}\,\text{m},$$

o 0.025 nm.

NOTA Este resultado concuerda bien con los experimentos, figura 39-11.

[†]Si los rayos X no fueran fotones, sino más bien partículas neutras con masa m, la ecuación 39-10 no se sostendría.

*39–7 Momento dipolar magnético; cantidad de movimiento angular total

*Momento dipolar magnético y el magnetón de Bohr

Un electrón que gira en órbita alrededor del núcleo de un átomo se puede considerar como una espira de corriente, desde el punto de vista clásico, y por ende se espera que tenga un **momento dipolar magnético**, como se estudió en el capítulo 27. De hecho, en el ejemplo 27-12 se hizo un cálculo clásico del momento dipolar magnético del electrón en el estado fundamental del hidrógeno, con base, en esencia, en el modelo de Bohr, y se encontró que da

$$\mu = IA = \tfrac{1}{2}evr.$$

Aquí, v es la velocidad orbital del electrón y, para una partícula que se desplaza en un círculo de radio r, su cantidad de movimiento angular es

$$L = mvr.$$

Así que se puede escribir

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{e}{m}L.$$

La dirección de la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular al plano de la espira de corriente. Así es la dirección del vector de momento dipolar magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$, aunque en el sentido opuesto, pues la carga del electrón es negativa. En consecuencia, se puede escribir la ecuación vectorial

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}\vec{\mathbf{L}}. \qquad \textbf{(39–11)}$$

Esta derivación semiclásica aproximada se basó en la teoría de Bohr. El mismo resultado (ecuación 39-11) se obtiene con la mecánica cuántica. Puesto que $\vec{\mathbf{L}}$ está cuantizada en la mecánica cuántica, el momento dipolar magnético también debe estar cuantizado. La magnitud del momento dipolar está dada por (véase la ecuación 39-3)

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m}\sqrt{\ell(\ell+1)}.$$

Cuando un momento dipolar magnético está en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$, experimenta una torca, como se vio en la sección 27-5, y la energía potencial U de tal sistema depende de $\vec{\mathbf{B}}$ y la orientación de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ relativa a $\vec{\mathbf{B}}$ (ecuación 27-12):

$$U = -\vec{\boldsymbol{\mu}}\cdot\vec{\mathbf{B}}.$$

Si el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ está en la dirección z, entonces

$$U = -\mu_z B_z$$

y de acuerdo con la ecuación 39-4 $\left(L_z = m_\ell \hbar\right)$ y la ecuación 39-11, se obtiene

$$\mu_z = -\frac{e\hbar}{2m}m_\ell.$$

(Tenga cuidado aquí de no confundir la masa del electrón m con el número cuántico magnético, m_ℓ.) Es útil definir la cantidad

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \qquad \textbf{(39–12)}$$

que se llama **magnetón de Bohr** y tiene el valor $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}\,\text{J/T}$ (joule/tesla). De esta forma, se escribe

$$\mu_z = -\mu_B m_\ell, \qquad \textbf{(39–13)}$$

donde m_ℓ tiene valores enteros desde 0 hasta $\pm\ell$ (véase la tabla 39-1). Un átomo colocado en un campo magnético tendría su energía dividida en niveles que difieren por $\Delta U = \mu_B B$; éste es el *efecto Zeeman*, que se mostró en la figura 39-4.

*Experimento de Stern y Gerlach y el factor *g* para el espín del electrón

La primera evidencia de esta *cuantización espacial* (sección 39-2) provino en 1922 de un famoso experimento conocido como el **experimento de Stern y Gerlach**. Átomos de plata (y más tarde algunos otros) se calentaron en un horno del cual escaparon, como se ilustra en la figura 39-14. Los átomos se hicieron pasar a través de un colimador, que eliminó todo salvo un estrecho haz. Luego, el haz pasó hacia un campo magnético

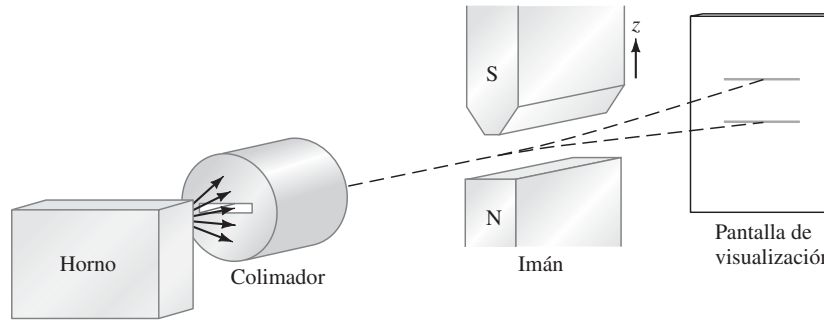


FIGURA 39–14 El experimento de Stern y Gerlach, que se realizó dentro de una cámara de vacío.

no homogéneo. El campo se hizo deliberadamente no homogéneo, de manera que ejercería una fuerza sobre momentos magnéticos atómicos: recuerde que la energía potencial (en este caso $-\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$) debe cambiar en el espacio si debe haber una fuerza ($F_x = -dU/dx$, etcétera, sección 8-2). Si $\vec{\mathbf{B}}$ tiene un gradiente a lo largo del eje z, como en la figura 39-14, entonces la fuerza es a lo largo de z:

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = \mu_z \frac{dB_z}{dz}.$$

En consecuencia, los átomos de plata se desviarían hacia arriba o hacia abajo dependiendo del valor de μ para cada átomo. Desde el punto de vista clásico, se esperaría ver una distribución continua en la pantalla de visualización, pues se esperaría que los átomos tuvieran momentos magnéticos con orientación aleatoria. Pero, en vez de ello, Stern y Gerlach vieron dos líneas distintas para plata (y para otros átomos, a veces más de dos líneas). Estas observaciones fueron la primera evidencia de la cuantización espacial, aunque no se explicaría por completo sino años más tarde. Si las líneas se debieran a la cantidad de movimiento angular orbital, se habría presentado un número impar de ellas, que corresponden a los posibles valores de m_l (pues $\mu_z = -\mu_B m_\ell$). Para $\ell = 0$, sólo hay una posibilidad, $m_\ell = 0$. Para $\ell = 1$, m_l puede ser 1, 0 o -1, y se esperarían tres líneas, etcétera. El hecho de que sólo hubiera dos líneas se explicó tiempo después mediante el concepto de espín del electrón. Con un espín de $\frac{1}{2}$, el espín del electrón puede tener sólo dos orientaciones en el espacio, como se vio en la figura 39-5. Por lo tanto, un momento dipolar magnético asociado con el espín tendría sólo dos posiciones. Por ende, los dos estados en el caso de la plata vistos en el experimento de Stern y Gerlach deben ser producto del espín de su único electrón de valencia. Los átomos de plata, entonces, deben tener cero cantidad de movimiento angular orbital, pero un espín total de $\frac{1}{2}$ debido a este único electrón de valencia. (De los 47 electrones de la plata, los espines de los primeros 46 se cancelan). Para el átomo H en su estado fundamental, de nuevo sólo se observaron dos líneas en la pantalla de la figura 39-14: debido al espín $\frac{1}{2}$ de su electrón, ya que la cantidad de movimiento angular orbital es cero.

La desviación Stern-Gerlach es proporcional al momento dipolar magnético, μ_z, y para una partícula con espín $\frac{1}{2}$ se espera $\mu_z = -\mu_B m_s = -(\frac{1}{2})(e\hbar/2m)$ como para el caso de la cantidad de movimiento angular orbital, ecuación 39-13. En vez de ello, se encontró que μ_z para el espín es aproximadamente el doble:

$$\mu_z = -g\mu_B m_s, \qquad \text{[espín del electrón]} \quad \textbf{(39–14)}$$

donde g, el llamado **factor *g*** o **razón giromagnética**, se midió y resultó ser ligeramente mayor que 2: $g = 2.0023\ldots$ para un electrón libre. Este inesperado factor de (aproximadamente) 2 indica sin duda que el espín no se puede ver como una cantidad de movimiento angular clásica. Es un efecto puramente mecánico-cuántico. La ecuación 39-14 es la misma que la ecuación 39-13 para cantidad de movimiento angular orbital con m_s en sustitución de m_ℓ. Pero, para el caso orbital, $g = 1$.

*Cantidad de movimiento angular total $\vec{\mathbf{J}}$

Un átomo puede tener cantidades de movimiento angulares tanto orbital como de espín. Por ejemplo, en el estado $2p$ del hidrógeno, $\ell = 1$ y $s = \frac{1}{2}$. En el estado $4d$, $\ell = 2$ y $s = \frac{1}{2}$. La **cantidad de movimiento angular total** es la suma vectorial de la cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\mathbf{L}}$ y el espín $\vec{\mathbf{S}}$:

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}.$$

De acuerdo con la mecánica cuántica, la magnitud de la cantidad de movimiento angular total $\vec{\mathbf{J}}$ está cuantizada:

$$J = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar. \qquad \textbf{(39–15)}$$

Para el único electrón en el átomo H, la mecánica cuántica da el resultado de que j puede ser

$$j = \ell + s = \ell + \tfrac{1}{2}$$

o

$$j = \ell - s = \ell - \tfrac{1}{2}$$

pero nunca menor que cero, tal como para ℓ y s. Para el estado $1s$, $\ell = 0$ y $j = \frac{1}{2}$ es la única posibilidad. Para estados p, por ejemplo, el estado $2p$, $\ell = 1$ y j puede ser $\frac{3}{2}$ o $\frac{1}{2}$. La componente z para j está cuantizada en la forma habitual:

$$m_j = j, j-1, \cdots, -j.$$

Para un estado $2p$ con $j = \frac{1}{2}$, m_j puede ser $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$; para $j = \frac{3}{2}$, m_j puede ser $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, para dar un total de cuatro estados. Advierta que el estado de un solo electrón se especifica al dar n, ℓ, m_ℓ, m_s, o al dar n, j, ℓ, m_j (sólo una de estas descripciones a la vez).

EJERCICIO G ¿Cuáles son las posibilidades para j en el estado $3d$ del hidrógeno? *a*) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$; *b*) $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$; *c*) $\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$; *d*) $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$; *e*) $\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$.

La interacción de los campos magnéticos con los átomos, como en el efecto Zeeman y el experimento de Stern y Gerlach, implica la cantidad de movimiento angular *total*. Por ende, el experimento de Stern y Gerlach con átomos H en el estado fundamental muestra dos líneas (para $m_j = +\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$), pero para el primer estado excitado muestra cuatro líneas que corresponden a los cuatro posibles valores de m_j $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

*Notación espectroscópica

Es posible especificar el estado de un átomo, incluido el número cuántico de la cantidad de movimiento angular total j, mediante la siguiente **notación espectroscópica**. Para un estado de un solo electrón se puede escribir

$$nL_j,$$

donde el valor de L (el número cuántico orbital) se especifica usando las mismas letras que en la tabla 39-3, pero en mayúsculas:

$$L = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots$$
$$\text{letra} = \text{S} \quad \text{P} \quad \text{D} \quad \text{F} \quad \text{G} \quad \cdots$$

De manera que el estado $2P_{3/2}$ tiene $n = 2$, $\ell = 1$, $j = \frac{3}{2}$, mientras que $1S_{1/2}$ especifica el estado fundamental del hidrógeno.

*Estructura fina; interacción espín-órbita

Un efecto magnético también produce la división de la *estructura fina* que se mencionó en la sección 39-2, pero ocurre en ausencia de cualquier campo externo. En este caso, se debe a un campo magnético producido por el mismo átomo. Se puede ver cómo ocurre al colocarse uno mismo en el marco de referencia del electrón, en cuyo caso se ve que el núcleo gira en torno a uno como una carga en movimiento o una corriente eléctrica que produce un campo magnético, B_n. El electrón tiene un momento dipolar magnético intrínseco μ_s (ecuación 39-14) y, por lo tanto, su energía se alterará mediante una cantidad (ecuación 27-12)

$$\Delta U = -\vec{\boldsymbol{\mu}}_s \cdot \vec{\mathbf{B}}_n .$$

Puesto que μ_s toma valores cuantizados de acuerdo con los valores de m_s, la energía del estado de un solo electrón se dividirá en dos niveles energéticos cercanos entre sí (para $m_s = +\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$). Esta pequeña división de los niveles de energía produce una pequeña división en las líneas espectrales. Por ejemplo, en el átomo H, la transición $2P \rightarrow 1S$ se divide en dos líneas que corresponden a $2P_{1/2} \rightarrow 1S_{1/2}$ y $2P_{3/2} \rightarrow 1S_{1/2}$. La diferencia en energía entre estos dos sólo es de aproximadamente 5×10^{-5} eV, la cual es muy pequeña comparada con la energía de la transición $2P \rightarrow 1S$, que es de 13.6 eV − 3.4 eV = 10.2 eV.

El campo magnético $\vec{\mathbf{B}}_n$ producido por el movimiento orbital es proporcional a la cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\mathbf{L}}$, y puesto que $\vec{\boldsymbol{\mu}}_s$ es proporcional al espín $\vec{\mathbf{S}}$, entonces $\Delta U = -\vec{\boldsymbol{\mu}}_s \cdot \vec{\mathbf{B}}_n$ se puede escribir

$$\Delta U \propto \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}}.$$

Esta interacción, que produce la estructura fina, se llama en consecuencia la **interacción espín-órbita**. Su magnitud se relaciona con una constante adimensional conocida como la **constante de estructura fina**,

$$\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 hc} \approx \frac{1}{137},$$

que también aparece con frecuencia dentro de la física atómica.

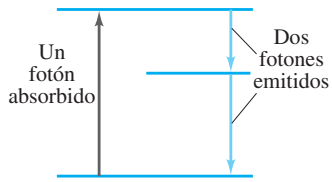
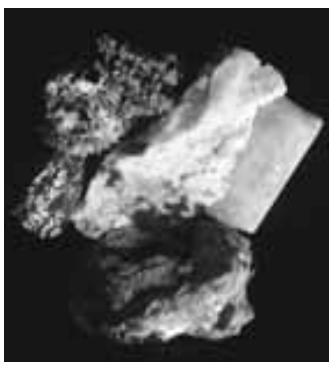


FIGURA 39–15 Fluorescencia.

FIGURA 39–16 Cuando luz UV (un intervalo de longitudes de onda) ilumina estas rocas "fluorescentes", que emiten luz en la región visible del espectro.



39–8 Fluorescencia y fosforescencia

Cuando un átomo se excita de un estado energético a uno superior mediante la absorción de un fotón, puede regresar al nivel inferior en una serie de dos (o más) saltos si hay un nivel de energía entre ambos (figura 39-15). En consecuencia, los fotones emitidos tendrán menor energía y frecuencia que el fotón absorbido. Cuando el fotón absorbido está en la región UV y los fotones emitidos están en la región visible del espectro, este fenómeno se llama **fluorescencia** (figura 39-16).

La longitud de onda para la que ocurrirá fluorescencia depende de los niveles energéticos de los átomos particulares. Como las frecuencias son diferentes para distintas sustancias, y puesto que muchas sustancias son fluorescentes con facilidad, la fluorescencia es una poderosa herramienta para la identificación de compuestos. También se usa para analizar (determinar qué cantidad de una sustancia está presente) y para rastrear sustancias a lo largo de una ruta natural, como en plantas y animales. Para detectar un compuesto dado, la luz estimulante debe ser monocromática y los solventes u otros materiales presentes no deben emitir fluorescencia en la misma región del espectro. En ocasiones la observación de la luz fluorescente emitida es suficiente para detectar un compuesto. En otros casos, se utilizan espectrómetros para medir las longitudes de onda e intensidades de la luz emitida.

Las **lámparas fluorescentes** funcionan en un proceso de dos pasos. El voltaje aplicado acelera electrones que golpean átomos del gas en el tubo y los excitan. Cuando los átomos excitados saltan hacia sus niveles normales, emiten fotones UV que inciden sobre un recubrimiento fluorescente en el interior del tubo. La luz que se ve es resultado de la fluorescencia de este material en respuesta a la luz UV que incide sobre él.

Se dice que los materiales que se usan en las carátulas luminosas de los relojes son **fosforescentes**. Cuando un átomo es llevado hacia un estado excitado normal, cae de nuevo dentro de aproximadamente 10^{-8} s. En las sustancias fosforescentes, los átomos se pueden excitar mediante la absorción de fotones a niveles energéticos, llamados **metaestables**, que son estados que duran mucho más tiempo, porque saltar hacia abajo es una transición "prohibida", como se estudió en la sección 39-2. Los estados metaestables pueden durar incluso algunos segundos o más. En una colección de tales átomos, muchos de los átomos descenderán al estado inferior muy rápido, pero muchos permanecerán en el estado excitado durante más de una hora. Así, se emitirá luz incluso durante largos periodos. Cuando un reloj con carátula luminosa se coloca cerca de una lámpara brillante, muchos átomos se excitan a estados metaestables, y se puede ver el brillo durante mucho tiempo después.

39–9 Láseres

Un **láser** es un dispositivo que produce un intenso haz muy estrecho de luz coherente monocromática. (*Coherente* significa que, a través de cualquier sección transversal del haz, todas las partes tienen la misma fase). El haz emitido es una onda plana casi perfecta. Por otra parte, una fuente de luz ordinaria emite luz en todas direcciones (así que la intensidad disminuye rápidamente con la distancia), y la luz emitida es incoherente (las diferentes partes del haz no están en fase unas con otras). Los átomos excitados que emite la luz en una bombilla ordinaria actúan independientemente, de manera que cada fotón emitido se puede considerar como un tren de onda corto que dura aproximadamente 10^{-8} s. Diferentes trenes de onda no tienen relación de fase entre sí. Justo lo opuesto es cierto para los láseres.

La acción de un láser se basa en la teoría cuántica. Se vio que un átomo puede absorber un fotón si (y sólo si) la energía fotónica hf corresponde a la diferencia de energía entre un nivel energético ocupado del átomo y un estado excitado disponible, figura 39-17a. Si el átomo ya está en el estado excitado, desde luego puede saltar de manera espontánea (es decir, sin estímulo aparente) al estado inferior con la emisión de un fotón. Sin embargo, si un fotón con esta misma energía choca con el átomo excitado, puede estimular al átomo para realizar la transición más rápido hacia el estado inferior, figura 39-17b. Este fenómeno se llama **emisión estimulada**: no sólo se tiene todavía el fotón original, sino también un segundo de la misma frecuencia como resultado de la transición del átomo. Estos dos fotones están exactamente *en fase*, y se desplazan en la misma dirección. Es así como se produce luz coherente en un láser. De ahí el nombre "láser", que es un acrónimo de las palabras **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation (amplificación de luz mediante emisión estimulada de radiación).

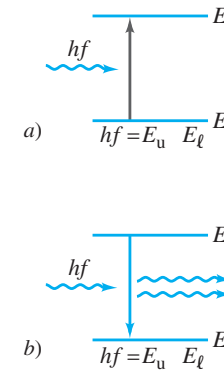


FIGURA 39–17 *a*) Absorción de un fotón. *b*) Emisión estimulada. E_u y E_ℓ se conocen como estados "superior" e "inferior" de energía.

La población natural en los estados energéticos de los átomos en equilibrio térmico a cualquier temperatura T (en K) está dada por la **distribución de Boltzmann** (o **factor Boltzmann**):

$$N_n = Ce^{-\frac{E_n}{kT}}, \qquad \textbf{(39–16a)}$$

donde N_n es el número de átomos en el estado con energía E_n. Para dos estados n y n', la razón del número de átomos en los dos estados es

$$\frac{N_n}{N_{n'}} = e^{-\left(\frac{E_n - E_{n'}}{kT}\right)}. \qquad \textbf{(39–16b)}$$

Por consiguiente, la mayoría de los átomos están en el estado fundamental a menos que la temperatura sea muy alta. En el sistema de dos niveles de la figura 39-17, la mayoría de los átomos por lo general están en el estado inferior, de manera que la mayoría de los fotones incidentes se absorberán. Para obtener la luz coherente de la emisión estimulada, se deben satisfacer dos condiciones. Primero, los átomos se deben excitar al estado superior, de manera que se produzca una **inversión de población**, en la que hay más átomos en el estado superior que en el inferior (figura 39-18). De esta forma, la *emisión* de fotones dominará sobre la absorción. Por lo tanto, el sistema no estará en equilibrio térmico. La segunda condición es que el estado superior debe ser un **estado metaestable**, un estado donde los electrones permanezcan más tiempo de lo habitual,[†] de manera que la transición hacia el estado inferior ocurra mediante emisión estimulada y no espontáneamente. (Dentro de poco se estudiará cómo se produce una inversión de población).

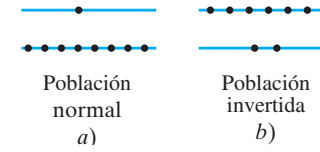


FIGURA 39–18 Dos niveles energéticos para una colección de átomos. Cada punto representa el estado energético de un átomo. *a*) Situación normal; *b*) inversión de población.

[†]Un átomo excitado en tal estado puede saltar a un estado inferior sólo mediante una llamada transición prohibida (que se describió en la sección 39-2), por lo que su tiempo de vida es más largo que lo normal.

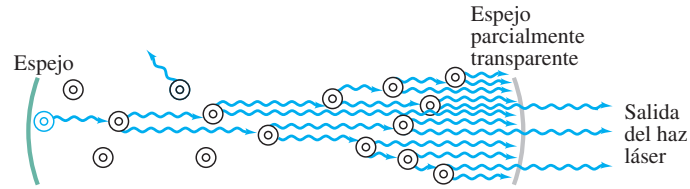


FIGURA 39–19 Diagrama de láser, que muestra átomos excitados estimulados para emitir luz.

La figura 39-19 es un diagrama de un láser: el material que formará el "láser" se coloca en un largo tubo estrecho en cuyos extremos hay dos espejos, uno de los cuales es parcialmente transparente (que quizá transmite el 1 o 2%). Algunos de los átomos excitados caen bastante rápido después de excitarse. Uno de éstos es el átomo azul que se representa en el extremo izquierdo de la figura 39-19. Si el fotón emitido incide sobre otro átomo en el estado excitado, lo estimula a emitir un fotón de la *misma* frecuencia, que se mueve en la *misma* dirección y se encuentra *en fase* con él. Luego, estos dos fotones se desplazan para chocar con otros átomos, lo que causa más emisión estimulada. Conforme el proceso continúa, el número de fotones se multiplica. Cuando los fotones inciden sobre los espejos en los extremos, la mayoría se refleja de regreso y, conforme se desplazan en sentido opuesto, continúan estimulando más átomos para emitir fotones. Conforme los fotones se mueven de ida y vuelta entre los espejos, un pequeño porcentaje pasa a través del espejo parcialmente transparente en un extremo. Estos fotones constituyen el estrecho haz láser coherente externo.

Dentro del tubo, algunos fotones emitidos espontáneamente se emitirán en un ángulo con el eje, y éstos simplemente saldrán por el lado del tubo y no afectarán la estrechez del haz principal. En un láser bien diseñado, la dispersión del haz se limita sólo mediante difracción, de manera que la dispersión angular es $\approx \lambda/D$ (véase la ecuación 35-1 o 35-10), donde D es el diámetro del espejo final. La dispersión por difracción puede ser increíblemente pequeña. La energía luminosa, en vez de dispersarse hacia el espacio como sucede con una fuente de luz ordinaria, se convierte en un haz del grosor de un lápiz.

Creación de una población invertida

La excitación de los átomos en un láser se puede realizar de varias formas para producir la inversión de población necesaria. En un **láser de rubí**, el material que formará el láser es una varilla de rubí que consiste en Al_2O_3 con un pequeño porcentaje de átomos de aluminio (Al) sustituidos por átomos de cromo (Cr). Los átomos de Cr son los que intervienen en la creación del láser. En un proceso llamado **bombeo óptico**, los átomos se excitan mediante fuertes destellos de luz con longitud de onda de 550 nm, que corresponde a una energía fotónica de 2.2 eV. Como se muestra en la figura 39-20, los átomos se excitan desde el estado E_0 hasta el estado E_2. Los átomos rápidamente decaen de regreso a E_0 o al estado intermedio E_1, que es metaestabale con una vida de aproximadamente 3×10^{-3} s (en comparación con 10^{-8} s para niveles ordinarios). Con una fuerte acción de bombeo, se encontrarán más átomos en el estado E_1 que en el estado E_0. Así, se tiene la inversión de población necesaria para la formación del láser. Tan pronto como algunos átomos en el estado E_1 saltan hacia E_0, emiten fotones que producen emisión estimulada de los otros átomos, y comienza la acción de formación del láser. En consecuencia, un láser de rubí emite un haz cuyos fotones tienen energía de 1.8 eV y una longitud de onda de 694.3 nm (o luz "rojo rubí")

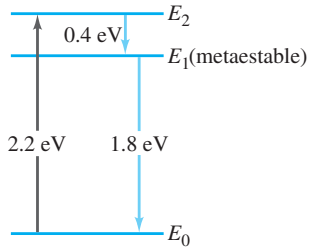
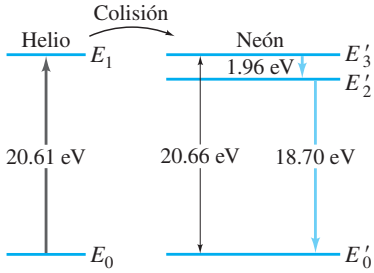


FIGURA 39–20 Niveles de energía de cromo en un cristal de rubí. Fotones de energía de 2.2 eV "bombean" átomos desde E_0 hasta E_2, que luego decaen hacia el estado metaestable E_1. La acción de formación de láser ocurre mediante emisión estimulada de fotones en transición de E_1 a E_0.

FIGURA 39–21 Niveles de energía para He y Ne. El He se excita en la descarga eléctrica hacia el estado E_1. Esta energía se transfiere al nivel E'_3 del Ne mediante la colisión. E'_3 es metaestable y decae a E'_2 mediante emisión estimulada.



En un láser de helio-neón (He-Ne), el material que formará el láser es un gas, una mezcla de aproximadamente un 85% de He y un 15% de Ne. Los átomos se excitan al aplicar un alto voltaje al tubo, de manera que dentro del gas tiene lugar una descarga eléctrica. En el proceso, parte de los átomos de He se elevan al estado metaestable E_1 que se ilustra en la figura 39-21, lo cual corresponde a un salto de 20.61 eV, casi exactamente igual para un estado excitado en neón, 20.66 eV. Los átomos de He no regresan rápidamente al estado fundamental mediante emisión espontánea, sino que, en vez de ello, a menudo ceden su energía excedente a un átomo de Ne cuando chocan (véase la figura 39-21). En tal colisión, el He desciende al estado fundamental y el átomo de Ne se excita al estado E'_3 (la prima se refiere a estados de neón). La ligera diferencia en energía (0.05 eV) la suministra la energía cinética de los átomos en movimiento. De esta forma, el estado E'_3 en Ne, que es metaestable, se vuelve más poblado que el nivel E'_2. Esta inversión de población entre E'_3 y E'_2 es lo que se necesita para crear el láser.

Ahora son muy comunes los **láseres de diodo semiconductor**, también llamados **láseres de unión pn**, que utilizan una inversión de población de electrones entre la banda de conducción del lado *n* del diodo y la banda de valencia de energía inferior del lado *p* (secciones 40-7 a 40-9). Cuando un electrón salta hacia abajo, se puede emitir un fotón, que a la vez puede estimular a otro electrón a realizar la transición y emitir otro fotón en fase. Los espejos necesarios (como en la figura 39-19) se fabrican mediante los extremos pulidos del cristal *pn*. Los láseres semiconductores se utilizan en reproductores de CD y DVD (véase abajo) y en muchas otras aplicaciones.

Otros tipos de láser incluyen: *láseres químicos*, en los que la entrada de energía proviene de la reacción química de gases sumamente reactivos; *láser de colorante*, cuya frecuencia es ajustable; *láseres de gas* CO_2, capaces de entregar una salida de alta potencia en el infrarrojo; y *láseres de estado sólido de tierra rara*, como el láser de alta potencia Nd:YAG.

La excitación de los átomos en un láser se puede realizar de manera continua o en pulsos. En un **láser de pulsos** los átomos se excitan mediante entradas periódicas de energía. En un **láser continuo**, la entrada de energía, como su nombre lo indica, es continua: conforme los átomos se ven estimulados a saltar hacia el nivel inferior, pronto se excitan de regreso hacia el nivel superior, de manera que la salida es un haz láser continuo.

Ningún láser es fuente de energía. Se debe poner energía, y el láser convierte una parte de ella en una intensa salida de haz estrecho.

⚠ CUIDADO
El láser no es una fuente de energía

*Aplicaciones

La única característica de la luz proveniente de un láser, que es un haz estrecho coherente, tiene muchas aplicaciones. En la vida cotidiana, los láseres se usan como lectores de códigos de barras (en las cajas registradoras de los supermercados) y en reproductores de discos compactos (CD) y discos de video digital (DVD). El haz láser se refleja en las tiras y los espacios de un código de barras, y en las pequeñas depresiones (*pits*) de un CD o DVD, como se ilustra en la figura 39-22a. La información grabada en un CD o DVD es una serie de *pits* y espacios que representan ceros y unos (o "apagado" y "encendido") de un código binario que se decodifica electrónicamente antes de enviarse al sistema de audio o video. El láser de un reproductor de CD comienza a leer en el interior del disco que al principio gira aproximadamente a 500 rpm. Conforme el disco gira, el láser sigue la pista espiral (figura 39-22b) y, conforme se mueve hacia fuera, el disco debe frenar porque cada circunferencia sucesiva ($C = 2\pi r$) es ligeramente mayor conforme r aumenta; en el borde exterior, el disco gira aproximadamente a 200 rpm. Un CD de 1 hora tiene una pista de aproximadamente 5 km de largo; el ancho de la pista es de alrededor de 1600 nm (= 1.6 μm) y la distancia entre *pits* es de alrededor de 80 nm. Los DVD contienen mucha más información. Los DVD estándar utilizan una pista más delgada (0.7 μm) y una menor longitud de *pit* (400 nm). Los nuevos DVD de alta definición emplean un láser "azul" con una longitud de onda corta (405 nm) y un haz más estrecho, lo que permite que una pista más estrecha (0.3 μm) pueda almacenar muchos más datos para alta definición. Los DVD también pueden tener dos capas, una bajo la otra. Cuando el láser se enfoca sobre la segunda capa, la luz pasa a través de la capa superficial semitransparente. La segunda capa comienza a leer en el borde exterior y no en el interior. Los DVD también pueden tener una o dos capas en *ambas* superficies del disco.

FÍSICA APLICADA
Reproductores de DVD y CD, códigos de barras

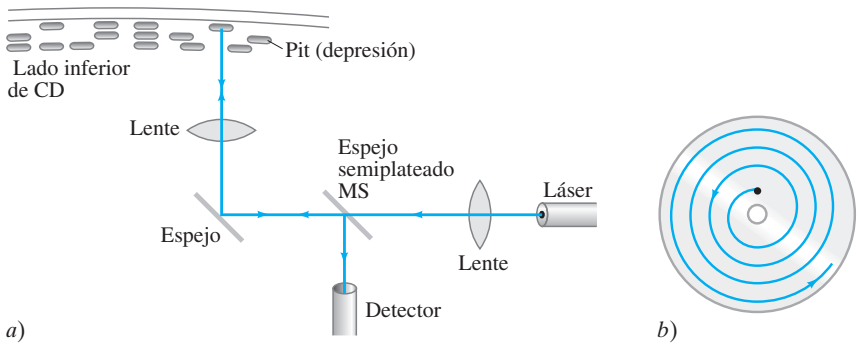


FIGURA 39–22 *a*) Lectura de un CD (o DVD). El fino haz de un láser, enfocado incluso de manera más fina con la ayuda de lentes, se dirige hacia la superficie inferior de un disco compacto giratorio. El haz se refleja de regreso en las áreas entre *pits*, pero se refleja mucho menos en éstos. La luz que se refleja se detecta como se muestra, reflejada mediante un espejo semirreflector MS. Las reflexiones intensas y débiles corresponden a los 0 y 1 del código binario que representa la señal de audio y video. *b*) Un láser sigue la pista de CD que comienza cerca del centro y gira en espiral hacia fuera.

FÍSICA APLICADA
Usos médicos y algunos otros de los láseres

FIGURA 39–23 Láser que se utiliza en cirugía ocular.

Los láseres son útiles herramientas quirúrgicas. El intenso haz estrecho sirve para destruir tejido en una zona localizada, o para desintegrar cálculos en la vesícula y los riñones. En virtud del calor producido, un haz láser es capaz de "soldar" tejido roto, como en el caso de un desprendimiento de retina, figura 39-23, o de moldear la córnea del ojo (al vaporizar pequeños trozos de material) y corregir miopía y otros defectos oculares (cirugía LASIK). El haz láser se puede conducir mediante fibra óptica (sección 32-7) hasta el punto de cirugía, en ocasiones como una trayectoria adicional de fibra óptica en un endoscopio (de nuevo, sección 32-7). Un ejemplo es la remoción de la placa que obstruye las arterias humanas. Algunos investigadores destruyen pequeños organelos dentro de una célula viva para estudiar cómo la ausencia de tal organelo afecta el comportamiento de la célula. Los rayos láser se utilizan para destruir células cancerosas y precancerosas; el calor sella capilares y vasos linfáticos, lo que "cauteriza" la herida para evitar dispersión de la enfermedad.

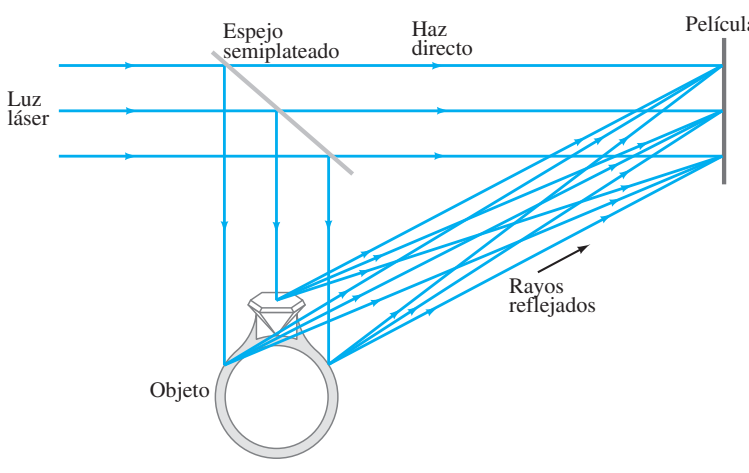
El intenso calor producido en una pequeña área mediante un haz láser se utiliza para soldar y troquelar metales, y para taladrar pequeños orificios en materiales duros. Puesto que un haz láser es coherente, monocromático, estrecho y en esencia paralelo, se emplean lentes para enfocar la luz en áreas todavía más pequeñas. La notable rectitud de un haz láser también es útil para que los topógrafos alineen con precisión su equipo, especialmente en lugares inaccesibles.

*39–10 Holografía

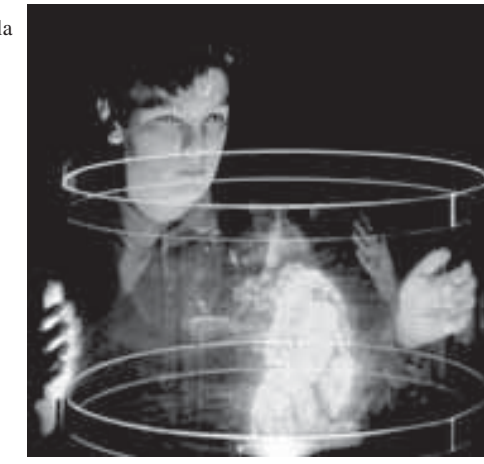
FÍSICA APLICADA
Holografía

Una de las aplicaciones más interesantes de la luz láser es la producción de imágenes tridimensionales llamadas **hologramas** (véase la figura 39-24). En una fotografía ordinaria, la película simplemente registra la intensidad de la luz que llega a ella en cada punto. Cuando se ve la fotografía o transparencia, la luz que se refleja en ella o pasa a través de ella permite observar una imagen bidimensional. En la holografía, las imágenes se forman mediante interferencia, sin lentes. Cuando un holograma láser se forma sobre una película, un haz láser ensanchado se divide en dos partes mediante un espejo semiplateado, figura 39-24a. Una parte pasa directamente hacia la película; el resto pasa hacia el objeto a fotografiar, desde donde se refleja hacia la película. La luz proveniente de cada punto del objeto alcanza cada punto de la película, y la interferencia de los dos haces permite a la película registrar tanto la intensidad como la fase relativa de la luz en cada punto. Es crucial que la luz incidente sea coherente (esto es, que esté en fase en todos los puntos), por lo que se usa un láser. Después de revelar la película, se coloca de nuevo en un haz láser y se crea una imagen tridimensional del objeto. Uno puede caminar alrededor de tal imagen y verla desde diferentes lados como si fuera el objeto original (figura 39-24b). Sin embargo, si uno intenta tocarla, no habrá nada material ahí.

FIGURA 39–24 *a*) Elaboración de un holograma. La luz que se refleja desde varios puntos del objeto interfiere (en la película) con la luz que proviene del haz directo. *b*) Un chico observa un holograma de dos mujeres que hablan por teléfono. Los hologramas no se fotografían bien, se deben ver directamente.



a)



b)

Los detalles de cómo se forma la imagen son bastante complicados, pero es posible obtener la idea básica al considerar un solo punto del objeto. En la figura 39-25a los rayos OA y OB se reflejan en un punto del objeto. Los rayos CA y DB llegan directamente desde la fuente e interfieren con OA y OB en los puntos A y B sobre la película. Como se muestra en la figura 39-25b, se produce un conjunto de franjas de interferencia. La separación entre las franjas cambia de la parte superior a la inferior, como se muestra. La razón de esto se presenta en la figura 39-26. El holograma de un solo objeto puntual tendría el patrón de franjas que se ilustra en la figura 39-25b. La película en este caso parece una rejilla de difracción con espaciamiento variable. De esta forma, cuando luz láser coherente pasa de nuevo a través de la película revelada para reconstruir la imagen, los rayos difractados en los máximos de primer orden se presentan a ángulos ligeramente diferentes porque el espaciamiento cambia. (Recuerde la ecuación 35-13, sen $\theta = \lambda/d$: donde la separación d es mayor, el ángulo θ es menor). En consecuencia, los rayos difractados hacia arriba (en el primer orden) parecen divergir de un solo punto, figura 39-27. Ésta es una imagen virtual del objeto original, que se puede ver. Los rayos difractados en primer orden *hacia abajo* convergen para formar una imagen real, que se puede ver y también fotografiar. (Advierta que no son de interés los rayos no difractados que pasan rectos). Desde luego, los objetos reales consisten en muchos puntos, de manera que un holograma será un patrón de interferencia complejo que, cuando incida luz sobre él, reproducirá una imagen del objeto. Cada punto de la imagen estará en la posición correcta (tridimensional) con respecto a otros puntos, de manera que la imagen representa con precisión el objeto original, y se puede ver desde diferentes ángulos, como si se observara el objeto original. Es posible hacer hologramas en los que el observador pueda caminar por completo alrededor de la imagen (360°) y ver todos sus lados.

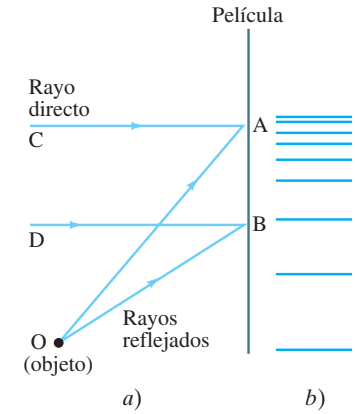


FIGURA 39–25 *a*) Luz proveniente del punto O en el objeto interfiere con la luz de haz directo (rayos CA y DB). *b*) Franjas de interferencia producidas.

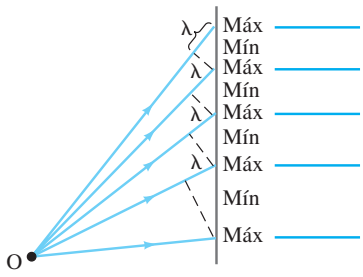


FIGURA 39–26 Cada uno de los rayos que salen del punto O es una longitud de onda más corto que el que está arriba de él. Si el rayo superior está en fase con el haz directo (no se muestra), que tiene la misma fase en todos los puntos de la pantalla, cada uno de los rayos mostrados produce una franja de interferencia constructiva. A partir de este diagrama se observa que la separación entre las franjas aumenta en la parte inferior.

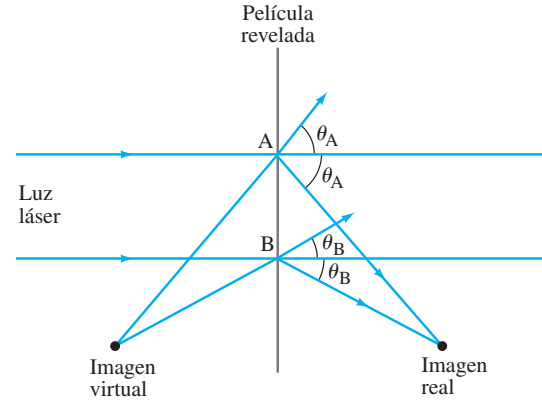


FIGURA 39–27 Reconstrucción de la imagen de un punto del objeto. El haz láser incide sobre la película revelada, que es como una rejilla de difracción de espaciamiento variable. Se muestra la salida de los rayos que corresponden a los primeros máximos de difracción. El ángulo $\theta_A > \theta_B$ porque el espaciamiento en B es mayor que en A (sen $\theta = \lambda/d$). Por lo tanto, las imágenes real y virtual del punto se reproducen como se indica.

Los **hologramas de volumen** o **luz blanca** no requieren de un láser para que se pueda ver la imagen, ya que se ven con luz blanca ordinaria (de preferencia una fuente casi puntual, como el Sol o una bombilla clara con un pequeño filamento brillante). Sin embargo, tales hologramas deben hacerse con un láser. No se elaboran sobre una delgada película, sino sobre una *gruesa* emulsión. El patrón de interferencia en la emulsión de la película se puede considerar como un arreglo de bandas o listones donde ocurre la interferencia constructiva. Este arreglo y la reconstrucción de la imagen son comparables con la dispersión de Bragg de rayos X provenientes de los átomos de un cristal (véase la sección 35-10). La luz blanca logra reconstruir la imagen porque la condición de Bragg ($m\lambda = 2d$ sen θ) selecciona la longitud de onda individual adecuada. Si el holograma se produce originalmente mediante láseres que emiten los tres colores primarios aditivos (rojo, verde y azul), la imagen tridimensional se verá a todo color cuando se observe con luz blanca.

Resumen

Desde la perspectiva mecánico-cuántica del átomo, los electrones no tienen órbitas bien definidas, sino más bien existen como una "nube". Las nubes de electrones se pueden interpretar como una onda de electrones que se dispersa en el espacio, o como una **distribución de probabilidad** para electrones considerados como partículas.

Para el átomo más sencillo, el de hidrógeno, la ecuación de Schrödinger incluye la energía potencial

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Las soluciones dan los mismos valores de energía que la antigua teoría de Bohr.

De acuerdo con la mecánica cuántica, el estado de un electrón en un átomo se especifica mediante cuatro **números cuánticos**: n, ℓ, m_ℓ y m_s:

1. n, el **número cuántico principal**, puede tomar cualquier valor entero (1, 2, 3,...) y corresponde al número cuántico de la antigua teoría de Bohr;
2. ℓ, el **número cuántico orbital**, puede tomar valores enteros desde 0 hasta $n - 1$;
3. m_ℓ, el **número cuántico magnético**, puede tomar valores enteros desde $-\ell$ hasta $+\ell$;
4. m_s, el **número cuántico de espín**, puede ser $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

Los niveles de energía en el átomo de hidrógeno dependen de n, mientras que en otros átomos dependen de n y ℓ.

La cantidad de movimiento (o momento) angular orbital de un átomo tiene magnitud $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$ y componente $L_z = m_\ell\hbar$. La cantidad de movimiento angular de espín tiene magnitud $S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar$ y componente $S_z = m_s\hbar$ donde $s = \frac{1}{2}$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Cuando se aplica un campo magnético externo, las líneas espectrales se dividen (el **efecto Zeeman**), lo que indica que en este caso la energía también depende de m_ℓ.

Incluso en ausencia de un campo magnético, mediciones precisas de líneas espectrales muestran una pequeña división de las líneas que constituyen la **estructura fina**, cuya explicación es que la energía depende muy ligeramente de m_ℓ y m_s.

Las transiciones entre estados que obedecen la **regla de selección** $\Delta\ell = \pm 1$ son mucho más probables que las llamadas transiciones **prohibidas**.

La función de onda del estado fundamental en el hidrógeno tiene simetría esférica, como los otros estados $\ell = 0$. Los estados con $\ell > 0$ tienen cierta direccionalidad en el espacio.

La **densidad de probabilidad** (o distribución de probabilidad), $|\psi|^2$, y la **densidad de probabilidad radial**, $P_r = 4\pi r^2|\psi|^2$, son útiles para ilustrar la extensión espacial de la nube de electrones.

El ordenamiento de los electrones en átomos con múltiples electrones está gobernado por el **principio de exclusión de Pauli**, el cual afirma que no hay dos electrones que ocupen el mismo estado cuántico; esto es, no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s.

Como resultado, los electrones en átomos de muchos electrones se agrupan en **niveles** (de acuerdo con el valor de n) y **subniveles** (de acuerdo con ℓ).

Las configuraciones de electrones se especifican mediante valores numéricos de n, y se usan letras para ℓ: s, p, d, f, etcétera, para $\ell = 0, 1, 2, 3$, etcétera, más un superíndice para el número de electrones en ese subnivel. Así, el estado fundamental del hidrógeno es $1s^1$, mientras que para el oxígeno es $1s^2 2s^2 2p^4$.

En la **tabla periódica**, los elementos se ordenan en hileras horizontales de acuerdo con número atómico creciente (número de electrones en el átomo neutro). La estructura en niveles da lugar a una periodicidad en las propiedades de los elementos, de manera que cada columna vertical contiene elementos con similares propiedades químicas.

Los rayos X, que son una forma de radiación electromagnética con longitud de onda muy corta, se producen cuando electrones de alta rapidez inciden sobre un blanco. El espectro de rayos X que se produce consiste en dos partes: un espectro continuo que se produce cuando los electrones se desaceleran mediante los átomos del blanco, y picos que representan fotones emitidos por los átomos del blanco al excitarse después de chocar con los electrones de alta rapidez. La medición de estos picos permite la determinación de los niveles de energía internos de los átomos y la determinación del número atómico Z.

[*Un átomo tiene un **momento dipolar magnético** $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ que se relaciona con su cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\mathbf{L}}$, que produce una energía potencial cuando está en un campo magnético, $U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\vec{\mathbf{B}}$. El espín del electrón también produce un momento magnético, pero la energía en un campo magnético es un factor $g = 2.0023...$ veces mayor que lo esperado, según se determinó en los experimentos de Stern y Gerlach].

[*Los átomos tienen una cantidad de movimiento angular total $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$ que está cuantizada para L y S, a saber $J = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar$ donde j es un semientero igual a $\ell \pm \frac{1}{2}$ en el caso del hidrógeno].

La **fluorescencia** ocurre cuando la absorción de fotones UV va seguida por la emisión de luz visible, debido al ordenamiento especial de los niveles de energía de los átomos del material. Los materiales **fosforescentes** tienen estados **metaestables** (de larga vida) que emiten luz segundos o minutos después de la absorción de luz.

Los **láseres** producen un estrecho haz de luz coherente monocromática (ondas de luz *en fase*). [*Los **hologramas** son imágenes con una calidad tridimensional, formadas mediante interferencia de luz láser].

Preguntas

1. Discuta las diferencias entre la visión de Bohr del átomo y la visión mecánico-cuántica.
2. La densidad de probabilidad $|\psi|^2$ es un máximo en el centro del átomo de H ($r = 0$) para el estado fundamental, mientras que la densidad de probabilidad radial $P_r = 4\pi r^2|\psi|^2$ es cero en este punto. Explique por qué.
3. ¿Cuál modelo del átomo de hidrógeno, el modelo de Bohr o el modelo mecánico-cuántico, predice que el electrón pasa más tiempo cerca del núcleo?
4. El tamaño de los átomos varía sólo por un factor aproximado de tres, de mayor a menor, aunque el número de electrones varía desde uno a más de 100. ¿Por qué?
5. Átomos de hidrógeno y helio excitados irradian luz mientras descienden al estado $n = 1, \ell = 0, m_\ell = 0$. Sin embargo, los dos elementos tienen espectros de emisión muy diferentes. ¿Por qué?
6. En la figura 39-4, ¿por qué los niveles superior e inferior tienen diferentes divisiones de energía en un campo magnético?
7. ¿Por qué resultan tres números cuánticos de la teoría de Schrödinger (y no, por ejemplo, dos o cuatro)?
8. La línea amarilla de 589 nm en el sodio en realidad está constituida por dos líneas muy cercanas entre sí. Esta división se debe a un efecto Zeeman "interno". ¿Puede explicar esto? [*Sugerencia:* Póngase en el marco de referencia del electrón].

9. ¿Cuáles de las siguientes configuraciones electrónicas no se permiten? *a*) $1s^2 2s^2 2p^4 3s^2 4p^2$; *b*) $1s^2 2s^2 2p^8 3s^1$; *c*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2 4d^5 4f^4$. Si no se permiten, explique por qué.

10. Dé la configuración electrónica completa para un átomo de uranio (la revisión cuidadosa de la tabla periódica en la tercera de forros le dará sugerencias útiles).

11. ¿En qué columna de la tabla periódica esperaría encontrar el átomo con cada una de las siguientes configuraciones? *a*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$; *b*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$; *c*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$; *d*) $1s^2 2s^2 2p^5$.

12. ¿De qué factores depende la periodicidad de la tabla periódica? Considere el principio de exclusión, la cuantización de la cantidad de movimiento angular, el espín y cualquier otro.

13. ¿Cómo se vería la tabla periódica si no hubiera espín de electrón pero al mismo tiempo fuera válida, de algún modo, la mecánica cuántica? Considere los primeros 20 elementos.

14. La energía de ionización para el neón ($Z = 10$) es de 21.6 eV y la del sodio ($Z = 11$) es 5.1 eV. Explique la gran diferencia.

15. ¿Por qué el cloro y el yodo manifiestan propiedades similares?

16. Explique por qué el potasio y el sodio manifiestan propiedades similares.

17. ¿Por qué las propiedades químicas de las tierras raras son tan similares?

18. ¿Por qué no se espera concordancia perfecta entre los valores medidos de las longitudes de onda características de las líneas de los rayos X y los calculados mediante la teoría de Bohr, como en el ejemplo 39-6?

19. ¿Por qué la teoría de Bohr, que no funciona muy bien para transiciones normales que implican los electrones externos del He y átomos más complejos, predice razonablemente bien los espectros de rayos X atómicos para transiciones en el interior del átomo?

20. ¿Por qué la longitud de onda de corte en la figura 39-11 implica una naturaleza fotónica de la luz?

21. ¿Cómo sabría cuáles líneas en un espectro de rayos X corresponden a transiciones K_α, K_β, L, etcétera?

22. ¿Por qué los espectros característicos de rayos X varían en una forma sistemática con Z, mientras que los espectros visibles (figura 35-22) no lo hacen así?

23. ¿Por qué espera que las transiciones electrónicas en el interior del átomo produzcan longitudes de onda más cortas que las transiciones mediante electrones exteriores?

***24.** ¿Por qué la dirección del momento dipolar magnético de un electrón es opuesta a la de su cantidad de movimiento angular orbital?

***25.** ¿Por qué en el experimento de Stern y Gerlach se usa un campo no homogéneo?

26. Compare la emisión espontánea con la emisión estimulada.

27. ¿La intensidad de la luz proveniente de un láser disminuye como el cuadrado inverso de la distancia?

28. ¿Cómo difiere la luz láser de la luz ordinaria? ¿En qué se parecen?

29. Explique cómo un haz láser de 0.0005 W, fotografiado a cierta distancia, puede parecer mucho más intenso que una luminaria de 1000 W a la misma distancia.

Problemas

39–2 Números cuánticos del átomo de hidrógeno

1. (I) Para $n = 7$, ¿qué valores puede tener ℓ?

2. (I) Para $n = 6$, $\ell = 3$, ¿cuáles son los posibles valores de m_ℓ y m_s?

3. (I) ¿Cuántos estados diferentes son posibles para un electrón cuyo número cuántico principal es $n = 5$? Escriba los números cuánticos para cada estado.

4. (I) Si un átomo de hidrógeno tiene $m_\ell = -4$, ¿cuáles son los posibles valores de n, ℓ y m_s?

5. (I) Un átomo de hidrógeno tiene $\ell = 5$. ¿Cuáles son los posibles valores para n, m_ℓ y m_s?

6. (I) Calcule la magnitud de la cantidad de movimiento angular de un electrón en el estado $n = 5$, $\ell = 3$ del hidrógeno.

7. (II) Un átomo de hidrógeno está en el estado 7*g*. Determine: *a*) el número cuántico principal, *b*) la energía del estado, *c*) la cantidad de movimiento angular orbital y su número cuántico ℓ, y *d*) los posibles valores para el número cuántico magnético.

8. (II) *a*) Demuestre que el número de diferentes estados electrónicos posibles para un valor dado de ℓ es igual a $2(2\ell + 1)$. *b*) ¿Cuál es este número para $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6?

9. (II) Demuestre que el número de diferentes estados electrónicos posibles para un valor dado de n es $2n^2$. (Véase el problema 8).

10. (II) Un átomo H excitado está en un estado 5*d*. *a*) Mencione todos los estados a los que al átomo se le "permite" saltar con la emisión de un fotón. *b*) ¿Cuántas longitudes de onda diferentes existen? (Ignore la estructura fina).

11. (II) La magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital en un estado excitado del hidrógeno es 6.84×10^{-34} J·s y la componente z es 2.11×10^{-34} J·s. ¿Cuáles son todos los posibles valores de n, ℓ y m_ℓ para ese estado?

39–3 Funciones de onda del átomo de hidrógeno

12. (I) Demuestre que la función de onda del estado fundamental, ecuación 39-5, está normalizada. [*Sugerencia:* Véase el ejemplo 39-4].

13. (II) Para el estado fundamental del hidrógeno, ¿cuál es el valor de *a*) ψ, *b*) $|\psi|^2$ y *c*) P_r, en $r = 1.5r_0$?

14. (II) Para el estado $n = 2$, $\ell = 0$ del hidrógeno, ¿cuál es el valor de *a*) ψ, *b*) $|\psi|^2$ y *c*) P_r en $r = 4r_0$?

15. (II) ¿En qué factor es más probable encontrar al electrón en el estado fundamental del hidrógeno en el radio de Bohr (r_0) que en el doble del radio de Bohr ($2r_0$)?

16. (II) *a*) Demuestre que la probabilidad de encontrar al electrón en el estado fundamental del hidrógeno a menos de un radio de Bohr desde el núcleo es 32%. *b*) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un electrón 1*s* entre $r = r_0$ y $r = 2r_0$?

17. (II) Determine el radio r de una esfera con centro en el núcleo, dentro del cual la probabilidad de encontrar al electrón para el estado fundamental del hidrógeno es *a*) 50%, *b*) 90%, *c*) 99%.

18. (II) *a*) Estime la probabilidad de encontrar un electrón, en el estado fundamental del hidrógeno, dentro del núcleo, suponiendo que es una esfera de radio $r = 1.1$ fm. *b*) Repita la estimación pero suponga que el electrón se sustituye con un muón, que es muy similar a un electrón (capítulo 43), excepto que su masa es 207 veces mayor.

19. (II) Demuestre que el valor medio de r para un electrón en el estado fundamental del hidrógeno es $\bar{r} = \frac{3}{2}r_0$, al calcular

$$\bar{r} = \int_{\text{todo el espacio}} r|\psi_{100}|^2\,dV = \int_0^\infty r|\psi_{100}|^2 4\pi r^2\,dr.$$

20. (II) Demuestre que ψ_{200}, dada por la ecuación 39-8, está normalizada.

21. (II) Determine la distribución de probabilidad radial promedio P_r para el estado $n = 2, \ell = 1$ en hidrógeno, al calcular

$$P_r = 4\pi r^2\left[\tfrac{1}{3}|\psi_{210}|^2 + \tfrac{1}{3}|\psi_{211}|^2 + \tfrac{1}{3}|\psi_{21-1}|^2\right].$$

22. (II) Con base en el resultado del problema 21, demuestre que la distancia más probable r desde el núcleo para un electrón en el estado $2p$ del hidrógeno es $r = 4r_0$, que es justo el segundo radio de Bohr (ecuación 37-11, figura 37-25).

23. (II) Para el estado fundamental del hidrógeno, ¿cuál es la probabilidad de encontrar al electrón dentro de un cascarón esférico con radio interior $0.99r_0$ y radio exterior $1.01r_0$?

24. (III) Para el estado $n = 2, \ell = 0$ del hidrógeno, ¿cuál es la probabilidad de encontrar al electrón dentro de un cascarón esférico con radio interior $4.00r_0$ y radio exterior $5.00r_0$? [*Sugerencia:* Integre por partes].

25. (III) Demuestre que ψ_{100} (ecuación 39-5a) satisface la ecuación de Schrödinger (ecuación 39-1) con el potencial de Coulomb, para energía $E = -me^4/8\epsilon_0^2h^2$.

26. (III) Demuestre que la probabilidad de encontrar al electrón dentro de 1 radio de Bohr del núcleo en el átomo de hidrógeno es *a*) 3.4% para el estado $n = 2, \ell = 0$, y *b*) 0.37% para el estado $n = 2, \ell = 1$. (Véase el problema 21).

27. (III) La función de onda para el estado $n = 3, \ell = 0$ en el hidrógeno es

$$\psi_{300} = \frac{1}{\sqrt{27\pi r_0^3}}\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)e^{-\frac{r}{3r_0}}.$$

a) Determine la distribución de probabilidad radial P_r para ese estado y *b*) dibuje su curva en una gráfica. *c*) Determine la distancia más probable desde el núcleo para un electrón en ese estado.

39–4 y 39–5 Átomos complejos

28. (I) Mencione los números cuánticos para cada electrón en el estado fundamental del oxígeno ($Z = 8$).

29. (I) Mencione los números cuánticos para cada electrón en el estado fundamental de *a*) carbono ($Z = 6$), *b*) aluminio ($Z = 13$).

30. (I) ¿Cuántos electrones puede haber en el subnivel $n = 6, \ell = 4$?

31. (II) Un electrón tiene $m_\ell = 2$ y se encuentra en su estado energético más bajo posible. ¿Cuáles son los valores de n y ℓ para ese electrón?

32. (II) Si el número cuántico principal n estuviera limitado al intervalo de 1 a 6, ¿cuántos elementos se encontrarían en la naturaleza?

33. (II) ¿Cuál es la configuración electrónica completa para *a*) níquel (Ni), *b*) plata (Ag), *c*) uranio (U)? [*Sugerencia:* Consulte la tabla periódica en la tercera de forros de este libro].

34. (II) Con base en la teoría de Bohr, estime la energía de enlace del tercer electrón en litio. [*Sugerencia:* Considere que este electrón tiene $n = 2$ y "ve" una carga neta de aproximadamente $+1e$]. El valor medido es 5.36 eV.

35. (II) Con la fórmula de Bohr para el radio de la órbita de un electrón, estime la distancia promedio desde el núcleo para un electrón en la órbita más interna ($n = 1$) en uranio ($Z = 92$). ¿Aproximadamente cuánta energía se requeriría para remover este electrón más interno?

36. (II) Aplique el principio de exclusión a un pozo cuadrado infinitamente alto (sección 38-8). Sean cinco electrones confinados a esta caja rígida cuyo ancho es ℓ. Encuentre el estado de menor energía de este sistema, al colocar los electrones en los niveles disponibles más bajos, en congruencia con el principio de exclusión de Pauli.

37. (II) Demuestre que la cantidad de movimiento angular total es cero para un subnivel lleno.

39–Rayos X

38. (I) Si los rayos X *bremsstrahlung* con longitud de onda más corta emitidos desde un tubo de rayos X tienen $\lambda = 0.027$ nm, ¿cuál es el voltaje a través del tubo?

39. (I) ¿Cuáles son los rayos X con longitud de onda más corta emitidos por los electrones que inciden sobre la cara de un cinescopio de televisión de 32.5 kV? ¿Cuáles son las longitudes de onda más largas?

40. (I) Demuestre que la longitud de onda de corte λ_0 en un espectro de rayos X está dada por

$$\lambda_0 = \frac{1240}{V}\text{ nm},$$

donde V es el voltaje, en volts, en el tubo de rayos X.

41. (II) Estime la longitud de onda para una transición en hierro ($Z = 26$) desde $n = 2$ hasta $n = 1$.

42. (II) Con base en el resultado del ejemplo 39-6, estime la longitud de onda del rayo X emitido cuando un átomo de cobalto ($Z = 27$) realiza una transición de $n = 2$ a $n = 1$.

43. (II) Una mezcla de hierro y un material desconocido se bombardea con electrones. La longitud de onda de las líneas K_α son 194 pm para hierro y 229 pm para el material desconocido. ¿Cuál es el material desconocido?

44. (II) Con base en la teoría de Bohr, estime la longitud de onda para una transición en molibdeno ($Z = 42$) desde $n = 3$ hasta $n = 1$. El valor medido es 0.063 nm. ¿Por qué no se espera concordancia perfecta?

45. (II) Con base en la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal, demuestre que un electrón en movimiento no puede ceder un fotón de rayos X a menos que haya un tercer objeto presente, como un átomo o núcleo.

*39–7 Momento dipolar magnético; $\vec{J}$

***46.** (I) Verifique que el magnetón de Bohr tiene el valor $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ J/T (véase la ecuación 39-12).

***47.** (I) Si el estado cuántico de un electrón se especifica mediante (n, ℓ, m_ℓ, m_s), estime la diferencia de energía entre los estados $(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$ y $(1, 0, 0, +\frac{1}{2})$ de un electrón en el estado $1s$ del helio en un campo magnético externo de 2.5 T.

***48.** (II) Átomos de plata (espín $= \frac{1}{2}$) se colocan en un campo magnético 1.0 T que divide el estado fundamental en dos niveles cercanos. *a*) ¿Cuál es la diferencia en energía entre estos dos niveles y *b*) qué longitud de onda de fotón podría causar una transición desde el nivel inferior hasta el superior? *c*) ¿Cómo diferiría su respuesta si los átomos fueran de hidrógeno?

***49.** (II) En un experimento de Stern y Gerlach, átomos de Ag salen del horno con una rapidez promedio de 780 m/s y pasan a través de un gradiente de campo magnético $dB/dz = 1.8 \times 10^3$ T/m en una distancia de 5.0 cm. *a*) ¿Cuál es la separación de los dos haces conforme salen del imán? *b*) ¿Cuál sería la separación si el factor g fuera 1 para el espín del electrón?

***50.** (II) Para un electrón en un estado $5g$, ¿cuáles son todos los posibles valores de j, m_j, J y J_Z?

*51. (II) ¿Cuáles son los posibles valores de j para un electrón en el estado *a*) $4p$, *b*) $4f$ y *c*) $3d$ del hidrógeno? *d*) ¿Cuál es J en cada caso?

*52. (II) *a*) Escriba los números cuánticos para cada electrón en el átomo de galio. *b*) ¿Cuáles subniveles se llenan? *c*) El último electrón está en el estado $4p$; ¿cuáles son los posibles valores del número cuántico de cantidad de movimiento angular total, j, para este electrón? *d*) Explique por qué la cantidad de movimiento el angular de este último electrón también representa la cantidad de movimiento angular total para todo el átomo (ignore cualquier cantidad de movimiento angular del núcleo). *e*) ¿Cómo podría usar un experimento de Stern y Gerlach para determinar cuál valor de j tiene el átomo?

*53. (III) La diferencia entre los niveles de energía $2P_{3/2}$ y $2P_{1/2}$ en hidrógeno es aproximadamente 5×10^{-5} eV, debido a la interacción espín-órbita. *a*) Considerando el momento magnético (orbital) del electrón como 1 magnetón de Bohr, estime el campo magnético interno debido al movimiento orbital del electrón. *b*) Estime el campo magnético interno con un modelo simple del núcleo que da vueltas en círculo en torno al electrón.

39–9 Láseres

54. (II) Un láser que se utiliza para soldar retinas desprendidas emite pulsos de 23 ms de duración de luz de 640 nm que promedian 0.63 W de salida durante un pulso. ¿Cuánta energía se puede depositar por pulso y cuántos fotones contiene cada pulso?

55. (II) Estime la dispersión angular de un haz láser debido a difracción, si el haz sale a través de un espejo de 3.6 mm de diámetro. Suponga que $\lambda = 694$ nm. ¿Cuál sería el diámetro de este haz si incide sobre *a*) un satélite a 380 km sobre la Tierra, *b*) la Luna? [*Sugerencia:* Consulte el capítulo 35].

56. (II) Un láser de baja potencia que se usa en un laboratorio de física tiene una potencia de 0.50 mW y un diámetro de haz de 3.0 mm. Calcule *a*) la intensidad de luz promedio del rayo láser y *b*) compárela con la intensidad de una bombilla que emite 15 W de luz vista a una distancia de 2.0 m.

57. (II) Calcule la longitud de onda de un láser He-Ne.

58. (II) Suponga que el sistema de niveles energéticos de la figura 39-20 no se bombea y que está en equilibrio térmico. Determine la fracción de átomos en los niveles E_2 y E_1 en relación con E_0 a $T = 300$ K.

59. (II) ¿A qué temperatura tendría que elevarse el sistema de la figura 39-20 (véase el problema 58) de manera que, en equilibrio térmico, el nivel E_2 tuviera la mitad de átomos que E_0? (Note que los mecanismos de bombeo no mantienen equilibrio térmico).

60. (II) Demuestre que una inversión de población para dos niveles (como en el láser bombeado) corresponde a una temperatura Kelvin negativa en la distribución de Boltzmann. Explique por qué tal situación no contradice la idea de que la temperatura Kelvin negativa no se puede alcanzar en el sentido normal de temperatura.

Problemas generales

61. La energía de ionización (enlace) del electrón exterior del boro es 8.26 eV. *a*) Con base en el modelo de Bohr, estime la "carga efectiva", Z_{ef}, "vista" por este electrón. *b*) Estime el radio orbital promedio.

62. ¿Cuántos electrones puede haber en un subnivel "h"?

63. ¿Cuál es la configuración electrónica completa en el estado fundamental para elementos con Z igual a *a*) 25, *b*) 34, *c*) 39? [*Sugerencia:* Consulte la tabla periódica en la tercera de forros del libro].

64. ¿Cuáles son los valores más grande y más pequeño posibles para la cantidad de movimiento angular L de un electrón en el nivel $n = 6$?

65. Estime *a*) el número cuántico ℓ para la cantidad de movimiento angular orbital de la Tierra en torno al Sol, y *b*) el número de posibles orientaciones para el plano de la órbita de la Tierra.

66. Con base en la teoría de Bohr (en especial la ecuación 37-15), demuestre que la gráfica de Moseley (figura 39-12) se puede expresar como

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = a(Z - b),$$

donde $b \approx 1$, y evalúe a.

67. Determine la distancia más probable desde el núcleo, de un electrón en el estado $n = 2, \ell = 0$ del hidrógeno.

68. Demuestre que la dispersión difractiva de un haz láser, $\approx \lambda/D$, como se describe en la sección 39-9, es precisamente la que se esperaría a partir del principio de incertidumbre. [*Sugerencia:* Considere que como el ancho del haz se restringe por las dimensiones de la apertura D, la componente de la cantidad de movimiento lineal de la luz perpendicular al eje del láser es incierta].

69. En el llamado **modelo vectorial** del átomo, la cuantización espacial de la cantidad de movimiento angular (figura 39-3) se ilustra como en la figura 39-28. El vector de cantidad de movimiento angular, con magnitud $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$ se considera como una precesión en torno al eje z (como una peonza o un trompo que gira o un giroscopio) en tal forma que la componente z de la cantidad de movimiento angular, $L_z = m_\ell \hbar$, también permanece constante. Calcule los posibles valores para el ángulo θ, entre $\vec{\mathbf{L}}$ y el eje z, para *a*) $\ell = 1$, *b*) $\ell = 2$ y *c*) $\ell = 3$. *d*) Determine el valor mínimo de θ para $\ell = 100$ y $\ell = 10^6$. ¿Es esto congruente con el principio de correspondencia?

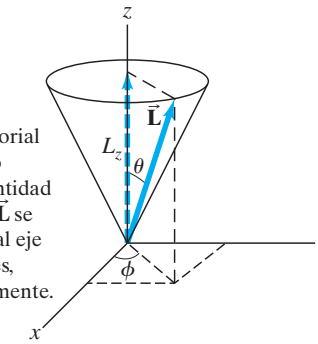


FIGURA 39–28 Modelo vectorial para la cantidad de movimiento angular orbital. El vector de cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\mathbf{L}}$ se imagina en precesión en torno al eje z; L y L_z permanecen constantes, pero L_x y L_y cambian continuamente. Problemas 69 y 70.

70. El modelo vectorial (problema 69) brinda cierta comprensión del principio de incertidumbre para la cantidad de movimiento angular, que es

$$\Delta L_z \, \Delta\phi \geq \hbar$$

para la componente z. Aquí ϕ es la posición angular medida en el plano perpendicular al eje z. Una vez conocido m_ℓ para un átomo, L_z se conoce con precisión, de manera que $\Delta L_z = 0$. *a*) ¿Qué dice esto acerca de ϕ? *b*) ¿Qué podría usted decir acerca de L_x y L_y, que *no* están cuantizados (sólo L y L_z lo están)? *c*) Demuestre que, aunque L_x y L_y no están cuantizados, $\left(L_x^2 + L_y^2\right)^{1/2} = \left[\ell(\ell+1) - m_\ell^2\right]^{1/2} \hbar$ sí lo está.

71. *a*) Demuestre que el valor medio para $1/r$ de un electrón en el estado fundamental del hidrógeno es igual a $1/r_0$ y, a partir de esto, concluya que el valor medio de la energía potencial es

$$\overline{U} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0}.$$

b) A partir de $E = \overline{U} + \overline{K}$, encuentre una relación entre la energía cinética promedio y la energía potencial promedio en el estado fundamental. [*Sugerencia:* Para *a*), consulte el problema 19 o el ejemplo 38-9].

72. La cantidad de movimiento angular en el átomo de hidrógeno está dada tanto por el modelo de Bohr como por la mecánica cuántica. Compare los resultados para $n = 2$.

73. Para cada una de las siguientes transiciones atómicas, establezca si la transición se *permite* o se *prohíbe* y por qué *a*) $4p \rightarrow 3p$; *b*) $3p \rightarrow 1s$; *c*) $4d \rightarrow 3d$; *d*) $4d \rightarrow 3s$; *e*) $4s \rightarrow 2p$.

74. Es posible que los átomos se exciten hacia estados con valores muy altos del número cuántico principal. Los electrones en estos llamados *estados de Rydberg* tienen energías de ionización muy pequeñas y enormes radios orbitales. Esto los hace particularmente sensibles a las perturbaciones externas, como sería el caso si el átomo estuviera en un campo eléctrico. Considere el estado $n = 45$ del átomo de hidrógeno. Determine la energía de enlace, el radio de la órbita y el área transversal efectiva de este estado de Rydberg.

75. Suponga que el espectro de un elemento desconocido presenta una serie de líneas donde una de cada cuatro coincide con una línea de la serie de Lyman del hidrógeno. Suponiendo que el elemento desconocido es un ion con Z protones y un electrón, determine Z y el elemento en cuestión.

∗**76.** Suponga que la división de los niveles de energía que se ilustra en la figura 39-4 fue producto de un campo magnético de 1.6 T. *a*) ¿Cuál es la separación en energía entre niveles m_ℓ adyacentes para el mismo ℓ? *B*) ¿Cuántas longitudes de onda diferentes habrá para transiciones $3d$ a $2p$, si m_ℓ puede cambiar sólo por ± 1 o 0? *C*) ¿Cuál es la longitud de onda para cada una de estas transiciones?

77. *Poblaciones en el átomo H.* Use el factor de Boltzmann (ecuación 39-16) para estimar la fracción de átomos H en los niveles $n = 2$ y $n = 3$ (relativos al estado fundamental) para equilibrio térmico a *a*) $T = 300$ K y *b*) $T = 6000$ K. [Nota: Puesto que hay ocho estados con $n = 2$ y sólo dos con $n = 1$, multiplique su resultado para $n = 2$ por $\frac{8}{2} = 4$; haga lo mismo para $n = 3$]. *c*) Dado 1.0 g de hidrógeno, estime el número de átomos en cada estado a $T = 6000$ K. *d*) Estime el número de fotones $n = 3$ a $n = 1$ y $n = 2$ a $n = 1$ que se emitirán por segundo a $T = 6000$ K. Suponga que la vida de cada estado excitado es 10^{-8} s. [*Sugerencia:* Para evaluar un gran exponente, puede usar logaritmos base 10, Apéndice A].

Respuestas a los ejercicios

A: 2, 1, 0, −1, −2.

B: *b*).

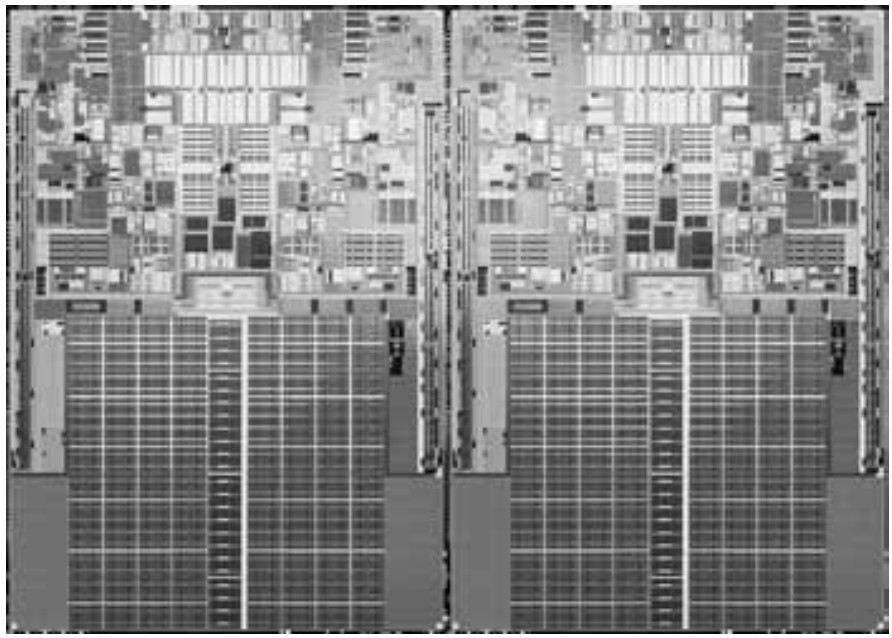
C: *d*).

D: Sume una línea a Li en la tabla 39-2: $2, 0, 0, -\frac{1}{2}$.

E: *b*), *c*).

F: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1$.

G: *d*).



Este chip de un procesador de computadora contiene más de 800 millones de transistores, además de diodos y otros elementos electrónicos semiconductores, todos en un espacio más pequeño que una moneda.

Antes de estudiar los semiconductores y sus aplicaciones, se estudiará la descripción que la teoría cuántica hace de los enlaces entre átomos para formar moléculas, y cómo explica el comportamiento molecular. Luego se examinará cómo los átomos y las moléculas forman sólidos, con especial atención en la formación de metales; también se examinarán los semiconductores y su uso en electrónica.

CAPÍTULO 40

Moléculas y sólidos

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Conforme un metal se calienta, ¿cómo cambia la rapidez rms (v_{rms}) de los electrones? Suponga un cambio de temperatura de aproximadamente 30C° cerca de la temperatura ambiente.

a) la v_{rms} aumenta linealmente con la temperatura.
b) la v_{rms} disminuye linealmente con la temperatura.
c) la v_{rms} aumenta exponencialmente con la temperatura.
d) la v_{rms} disminuye exponencialmente con la temperatura.
e) la v_{rms} cambia muy poco conforme la temperatura aumenta.

Desde su desarrollo en la década de 1920, la mecánica cuántica ha tenido una profunda influencia en la vida diaria, tanto intelectual como tecnológicamente. Incluso nuestra forma de ver el mundo cambió, como se constató en los últimos capítulos. Ahora veremos cómo la mecánica cuántica ha ayudado a comprender la estructura de las moléculas y la materia; también examinaremos algunas aplicaciones importantes, incluidos los dispositivos semiconductores.

CONTENIDO

40–1 Enlaces de moléculas
40–2 Diagramas de energía potencial para moléculas
40–3 Enlaces débiles (de van der Waals)
40–4 Espectros moleculares
40–5 Enlaces en sólidos
40–6 Teoría de los electrones libres en los metales; energía de Fermi
40–7 Teoría de bandas en sólidos
40–8 Semiconductores y dopado
40–9 Diodos semiconductores
40–10 Transistores y circuitos integrados (chips)

40–1 Enlaces de moléculas

Uno de los grandes éxitos de la mecánica cuántica fue brindar a los científicos, al fin, una comprensión de la naturaleza de los enlaces químicos. Puesto que esta comprensión es tan importante en muchos campos y se basa en la física, se le discute aquí.

Por una molécula se entiende un grupo de dos o más átomos que se mantienen fuertemente unidos para funcionar como una sola unidad. Cuando los átomos realizan tal unión, se dice que se formó un **enlace** químico. Existen dos tipos principales de enlace químico fuerte: covalente y iónico. En realidad, muchos enlaces son intermedios entre estos dos tipos.

Enlaces covalentes

Para entender cómo se forman los *enlaces covalentes*, tomaremos el caso más sencillo, el enlace que mantiene unidos a dos átomos de hidrógeno para formar la molécula de hidrógeno, H_2. El mecanismo básicamente es el mismo para otros enlaces covalentes. Conforme dos átomos de H se aproximan uno hacia el otro, la nube de electrones comienza a traslaparse y los electrones de cada átomo pueden "orbitar" ambos núcleos. (A veces a esto se le llama "compartir" electrones). Si ambos electrones están en el estado fundamental ($n = 1$) de sus respectivos átomos, existen dos posibilidades: sus espines pueden ser paralelos (ambos hacia arriba o ambos hacia abajo), en cuyo caso el espín total es $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; o sus espines pueden ser opuestos ($m_s = +\frac{1}{2}$ para uno, $m_s = -\frac{1}{2}$ para el otro), de manera que el espín total es $S = 0$. Ahora se verá que un enlace sólo se forma para el estado $S = 0$, cuando los espines son opuestos.

Consideremos primero el estado $S = 1$, para el cual los espines son iguales. No es posible que los dos electrones estén en el estado energético más bajo y estén unidos al mismo átomo, porque entonces tendrían números cuánticos idénticos, lo que viola el principio de exclusión. El principio de exclusión dice que, puesto que no hay dos electrones que ocupen el mismo estado cuántico, si dos electrones tienen los mismos números cuánticos, deben ser diferentes en alguna otra forma, por ejemplo, al estar en diferentes lugares en el espacio (unidos a diferentes átomos). Por ende, para $S = 1$, cuando los dos átomos se aproximan entre sí, los electrones permanecerán alejados uno del otro como se muestra mediante la distribución de probabilidad de la figura 40-1. Los electrones pasan muy poco tiempo entre los dos núcleos, de manera que los núcleos con carga positiva se repelen entre sí y no se forma enlace.

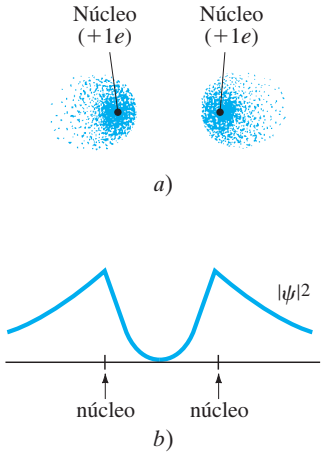


FIGURA 40–1 Distribución de probabilidad electrónica (nube de electrones) para dos átomos de H cuando los espines son iguales ($S = 1$): *a*) nube de electrones; *b*) proyección de $|\psi|^2$ a lo largo de la línea a través de los centros de los dos átomos.

Por otra parte, para el estado $S = 0$, los espines son opuestos y los dos electrones consecuentemente están en diferentes estados cuánticos (m_s es diferente, $+\frac{1}{2}$ para uno, $-\frac{1}{2}$ para el otro). De esta forma, los dos electrones se acercan y la distribución de probabilidad se parece a la figura 40-2: los electrones pasan buena parte de su tiempo entre los dos núcleos. Los dos núcleos con carga positiva son atraídos hacia la nube de electrones con carga negativa entre ellos, y ésta es la atracción que mantiene a los átomos de hidrógeno juntos para formar una molécula de hidrógeno. Se trata de un **enlace covalente**.

Las distribuciones de probabilidad de las figuras 40-1 y 40-2 tal vez se comprendan mejor sobre la base de ondas. Lo que requiere el principio de exclusión es que, cuando los espines son iguales, existe interferencia destructiva de las funciones de onda de los electrones en la región entre los dos átomos. Pero cuando los espines son opuestos, ocurre interferencia constructiva en la región entre los dos átomos, lo que da por resultado una gran cantidad de carga negativa ahí. De esta forma, se puede decir que un enlace covalente es el resultado de la interferencia constructiva de las funciones de onda de los electrones en el espacio entre los dos átomos, y de la atracción electrostática de los dos núcleos positivos debido a la concentración de carga negativa entre ellos.

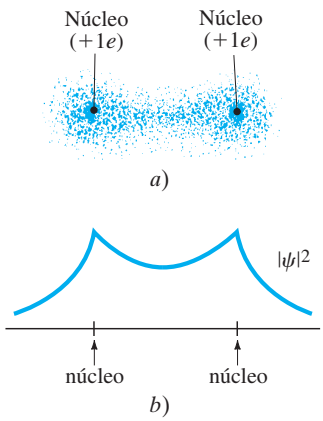


FIGURA 40–2 Distribución de probabilidad electrónica para dos átomos de H cuando los espines son opuestos ($S = 0$): *a*) nube de electrones; *b*) proyección de $|\psi|^2$ a lo largo de la línea a través de los centros de los átomos. En este caso se forma un enlace porque los núcleos positivos son atraídos hacia la concentración de carga negativa entre ellos. Ésta es una molécula de hidrógeno, H_2.

Las razones por las que se forma un enlace también se comprenden desde el punto de vista energético. Cuando los dos átomos de H se aproximan uno hacia el otro, y los espines de sus electrones son opuestos, los electrones pueden ocupar el mismo espacio, como se estudió anteriormente. Esto significa que cada electrón ahora puede moverse en el espacio de dos átomos y no en el volumen de uno solo. Puesto que cada electrón ahora ocupa más espacio, está menos localizado. A partir del principio de incertidumbre con Δx más grande, se ve que Δp y la cantidad de movimiento mínima puede ser menor. Con menos cantidad de movimiento, cada electrón tiene menos energía cuando los dos átomos se combinan que cuando están separados. Esto es, la molécula tiene menos energía que los dos átomos separados, y por lo tanto es más estable. Para romper la molécula H_2 en dos átomos H separados se requiere adicionar energía, de manera que la molécula H_2 es una entidad estable. Esto es lo que se entiende por

enlace. La energía requerida para romper un enlace se llama **energía de enlace** o **energía de disociación**. Para la molécula de hidrógeno, H_2, la energía de enlace es 4.5 eV.

Enlaces iónicos

Un *enlace iónico* es, en cierto sentido, un caso especial del enlace covalente. En lugar de que los electrones se compartan equitativamente, se comparten de manera desigual. Por ejemplo, en el cloruro de sodio (NaCl), el electrón externo del sodio pasa casi todo su tiempo alrededor del cloro (figura 40-3). El átomo de cloro adquiere una carga negativa neta como resultado del electrón adicional, mientras que el átomo de sodio queda con una carga positiva neta. La atracción electrostática entre estos dos átomos cargados los mantiene juntos. El enlace resultante se llama **enlace iónico** porque se crea mediante la atracción entre los dos iones (Na^+ y Cl^-). Pero, para entender el enlace iónico, es necesario comprender por qué el electrón adicional del sodio pasa la mayor parte de su tiempo alrededor del cloro. Después de todo, el átomo de cloro es neutro; ¿por qué debería atraer a otro electrón?

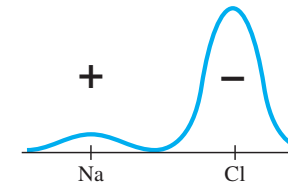
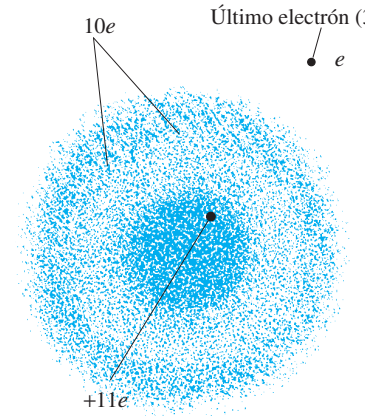


FIGURA 40–3 Distribución de probabilidad $|\psi|^2$ para el electrón externo de Na en NaCl.

La respuesta se encuentra en las distribuciones de probabilidad de los dos átomos neutros. El sodio contiene 11 electrones, 10 de los cuales están en niveles cerrados con simetría esférica (figura 40-4). El último electrón pasa la mayor parte de su tiempo más allá de estos niveles cerrados. Puesto que los niveles cerrados tienen una carga total de $-10e$ y el núcleo tiene carga $+11e$, el electrón exterior en el sodio "siente" una atracción neta hacia el de $+1e$. No se sostiene con mucha firmeza. Por otra parte, 12 de los 17 electrones del cloro forman niveles o subniveles cerrados (que corresponden a $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$). Estos 12 electrones forman un escudo con simetría esférica en torno al núcleo. Los otros cinco electrones están en estados $3p$ cuyas distribuciones de probabilidad no tienen simetría esférica y adquieren una forma similar a la de los estados $2p$ en el hidrógeno que se muestra en la figura 39-9. Cuatro de estos electrones $3p$ pueden tener distribuciones simétricas con "forma de rosquilla" en torno al eje z, como se ilustra en la figura 40-5. El quinto puede tener una distribución con forma de "mancuerna" (como para $m_\ell = 0$ en la figura 39-9), que en la figura 40-5 se muestra sólo en contorno con línea punteada porque está medio vacío. Esto es, el principio de exclusión permite que un electrón más esté en ese estado (tendrá espín opuesto al del electrón que ya se encuentra ahí). Si sucede que un electrón adicional —por ejemplo, de un átomo Na— se encuentra en la cercanía, puede estar en ese estado, quizás en el punto x en la figura 40-5. Podría experimentar una atracción que se debe a los $+5e$, porque los $+17e$ del núcleo está parcialmente apantallados en este punto por los 12 electrones internos. Por ende, el electrón externo de un átomo de sodio se sentirá más fuertemente atraído por los $+5e$ del átomo de cloro que por el $+1e$ de su propio átomo. Esto, combinado con la fuerte atracción entre los dos iones cuando el electrón adicional permanece con el Cl^-, produce la distribución de carga de la figura 40-3, y en consecuencia el enlace iónico.

FIGURA 40–4 En un átomo de sodio neutro, los 10 electrones interiores apantallan el núcleo, de manera que el único electrón externo es atraído por una carga neta de $+1e$.



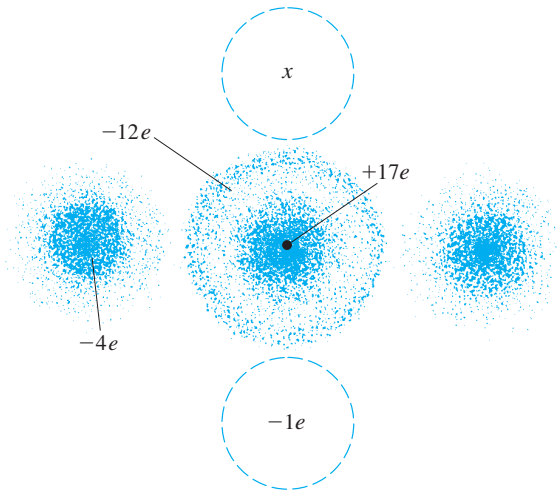


FIGURA 40–5 Átomo de cloro neutro. Los $+17e$ del núcleo están apantallados por los 12 electrones en los niveles y subniveles internos. Cuatro de los cinco electrones $3p$ se muestran en las nubes con forma de rosquilla (vistas en sección transversal a izquierda y derecha), y el quinto está en la nube con líneas punteadas que se concentra en torno al eje z (vertical). Un electrón adicional en x será atraído por una carga neta que puede ser hasta de $+5e$.

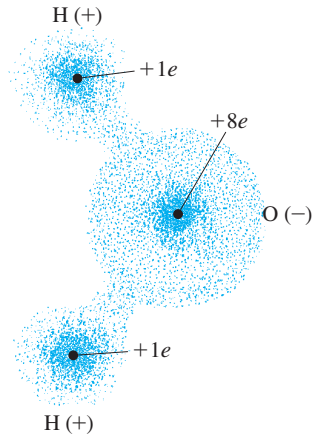
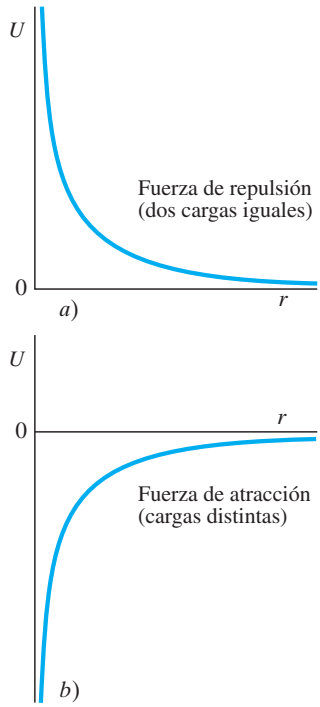


FIGURA 40–6 La molécula del agua H_2O es polar.

FIGURA 40–7 Energía potencial U como función de la separación r para dos cargas puntuales de *a*) signo igual y *b*) signo opuesto.



Carácter iónico parcial de los enlaces covalentes

Un enlace covalente puro en el que los electrones se comparten de forma equitativa ocurre sobre todo en moléculas simétricas como H_2, O_2 y Cl_2. Cuando los átomos implicados son diferentes entre sí, es común encontrar que es más probable que los electrones compartidos estén en la cercanía de un átomo que del otro. El caso extremo es un enlace iónico; en casos intermedios, se dice que el enlace covalente tiene un *carácter iónico parcial*. Las moléculas en sí son **polares,** esto es, una parte (o partes) de la molécula tiene una carga positiva neta y las otras partes una carga negativa neta. Un ejemplo es la molécula de agua, H_2O (figura 40-6). Los electrones compartidos tienen más probabilidad de encontrarse alrededor del átomo de oxígeno que en torno a los dos hidrógenos. La razón es similar a la que se discutió anteriormente en relación con los enlaces iónicos. El oxígeno tiene ocho electrones ($1s^2 2s^2 2p^4$), de los cuales cuatro forman un núcleo con simetría esférica y los otros cuatro podrían tener, por ejemplo, una distribución con forma de rosquilla. La distribución con forma de mancuerna en el eje z (como la que se ilustra con líneas punteadas en la figura 40-5) podría estar vacía, de manera que los electrones de los átomos de hidrógeno se pueden atraer mediante una carga neta de $+4e$. También son atraídos por los núcleos H, así que parcialmente orbitan los átomos H, así como el átomo O. El efecto neto es que hay una carga positiva neta sobre cada átomo H (menos que $+1e$), porque los electrones sólo pasan ahí parte de su tiempo. Y existe una carga negativa neta en el átomo O.

40–2 Diagramas de energía potencial para moléculas

Es útil analizar la interacción entre dos objetos (por ejemplo, entre dos átomos o moléculas) utilizando un diagrama de energía potencial, que es una gráfica de la energía potencial contra la distancia de separación.

Para el caso sencillo de dos cargas puntuales, q_1 y q_2, la energía potencial U está dada por (véase el capítulo 23)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r},$$

donde r es la distancia entre las cargas y la constante $(1/4\pi\epsilon_0)$ es aproximadamente $9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$. Si las dos cargas tienen el mismo signo, la energía potencial U es positiva para todos los valores de r, y en la figura 40-7a se presenta una gráfica de U contra r en este caso. La fuerza es de repulsión (las cargas tienen el *mismo* signo) y la curva se eleva conforme r disminuye; esto tiene sentido pues se realiza trabajo para juntar las cargas, lo que aumenta su energía potencial. Si, por otra parte, las dos cargas son de signo *opuesto*, la energía potencial es negativa porque el producto $q_1 q_2$ es negativo. La fuerza es de atracción en este caso, y la gráfica de U ($\propto -1/r$) contra r se parece a la figura 40-7b. La energía potencial se vuelve más *negativa* conforme r disminuye.

Ahora observe el diagrama de energía potencial para la formación de un enlace covalente, como para la molécula de hidrógeno, H_2. La energía potencial U de un átomo H en presencia del otro se grafica en la figura 40-8. A partir de r grande, U disminuye conforme los átomos se aproximan, porque los electrones se concentran entre los dos núcleos (figura 40-2), así que ocurre atracción. Sin embargo, a distancias muy cortas, los electrones se "sacarían a la fuerza": no hay espacio para ellos entre los dos núcleos. Sin los electrones entre ellos, cada núcleo sentiría una fuerza de repulsión debida

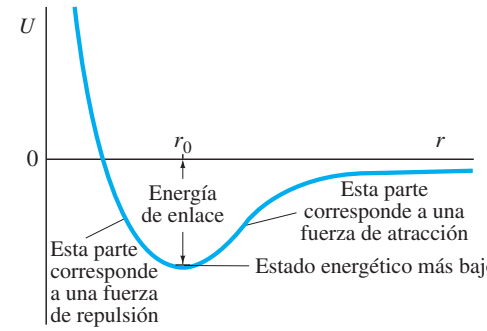


FIGURA 40–8 (derecha) Diagrama de energía potencial para la molécula H_2; r es la separación de los dos átomos H. La energía de enlace (la diferencia de energía entre $U = 0$ y el estado energético más bajo cerca del fondo del pozo) es 4.5 eV y $r_0 = 0.074$ nm.

al otro, de manera que la curva se eleva conforme r disminuye todavía más. Existe una separación óptima de los átomos, r_0 en la figura 40-8, a la cual la energía es más baja. Éste es el punto de mayor estabilidad para la molécula de hidrógeno, y r_0 es la separación promedio de los átomos en la molécula H_2. La profundidad de este "pozo" es la *energía de enlace*,[†] como se muestra. Esto indica cuánta energía se debe poner en el sistema para separar los dos átomos hasta el infinito, donde $U = 0$. Para la molécula H_2, la energía de enlace es aproximadamente 4.5 eV y $r_0 = 0.074$ nm.

En moléculas formadas por átomos más grandes, por ejemplo, oxígeno o nitrógeno, la repulsión también ocurre a distancias cortas, porque los cerrados niveles electrónicos internos comienzan a traslaparse y el principio de exclusión prohíbe que se acerquen demasiado. La parte de repulsión de la curva se eleva de manera todavía más pronunciada que $1/r$. Una aproximación razonable a la energía potencial, al menos en la cercanía de r_0, es

$$U = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}, \qquad \textbf{(40–1)}$$

donde A y B son constantes asociadas con las partes atractiva y repulsiva de la energía potencial, y los exponentes m y n son enteros pequeños. Para enlaces iónicos y algunos covalentes, el término atractivo con frecuencia se puede escribir con $m = 1$ (potencial de Coulomb).

Para muchos enlaces, la curva de energía potencial tiene la forma que se ilustra en la figura 40-9. Todavía existe una distancia óptima r_0 a la que la molécula es estable. Pero cuando los átomos se aproximan desde una gran distancia, la fuerza inicialmente es de repulsión y no de atracción. Por consiguiente, los átomos no interactúan espontáneamente. En vez de ello, en el sistema se inyecta cierta energía adicional para superar la "joroba" (o barrera) en el diagrama de energía potencial. Esta energía requerida se llama **energía de activación**.

La curva de la figura 40-9 es mucho más común que la de la figura 40-8. Con frecuencia, la energía de activación refleja una necesidad de romper otros enlaces, antes de poder formar el que está bajo discusión. Por ejemplo, para formar agua a partir de O_2 y H_2, las moléculas de H_2 y O_2 primero deben romperse en átomos H y O mediante adición de energía; esto es lo que representa la energía de activación. Luego se pueden combinar los átomos H y O para formar H_2O con la liberación de mucha más energía de la que se aportó inicialmente. La energía de activación inicial se puede impartir al aplicar una chispa eléctrica a una mezcla de H_2 y O_2, lo que rompe algunas de estas moléculas en átomos H y O. La resultante liberación explosiva de energía cuando estos átomos se combinan para formar H_2O rápidamente suministra la energía de activación necesaria para posteriores reacciones, de manera que las moléculas H_2 y O_2 adicionales se rompen y se vuelven a combinar para formar H_2O.

Los diagramas de energía potencial para enlaces iónicos pueden tener formas similares. En el NaCl, por ejemplo, los iones Na^+ y Cl^- se atraen mutuamente a distancias un poco mayores que cierto r_0, pero a distancias más cortas el traslape de los niveles electrónicos internos origina repulsión. En consecuencia, los dos átomos son más estables a cierta separación intermedia, r_0, y para muchos enlaces hay una energía de activación.

[†]La energía de enlace no corresponde muy bien a la parte inferior de la curva de energía potencial, sino al estado energético cuántico más bajo, ligeramente arriba de la parte inferior, como se muestra en la figura 40-8.

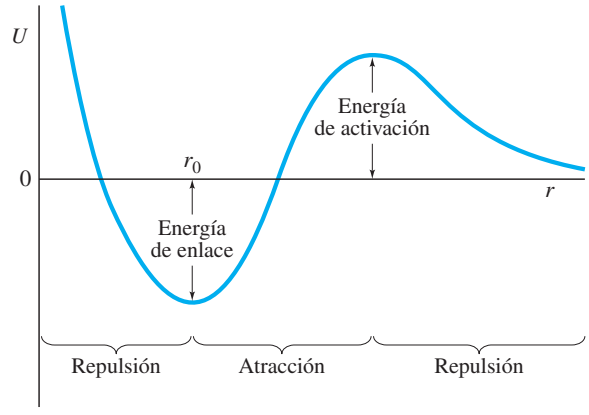


FIGURA 40–9 Diagrama de energía potencial para un enlace que requiere una energía de activación.

EJEMPLO 40–1 ESTIMACIÓN **Enlace de cloruro de sodio.** En la figura 40-10 se presenta un diagrama de energía potencial para el enlace iónico NaCl, donde se estableció que $U = 0$ para átomos neutros libres Na y Cl (que se representan a la derecha en la figura 40-10). Las mediciones indican que se requieren 5.14 eV para remover un electrón de un átomo neutro Na para producir el ion Na^+, y se liberan 3.61 eV de energía cuando un átomo de Cl "atrapa" un electrón para formar el ion Cl^-. Por lo tanto, formar iones Na^+ y Cl^- a partir de átomos neutros Na y Cl requiere 5.14 eV − 3.61 eV = 1.53 eV de energía, una forma de energía de activación. Esto se muestra como la "joroba" en la figura 40-10. Pero note que el diagrama de energía potencial desde ahí hacia la derecha en realidad no es una función de la distancia; se dibuja con línea punteada para recordar que sólo representa la diferencia de energía entre los iones y los átomos neutros (para los cuales se eligió $U = 0$). *a*) Calcule la distancia de separación, r_1, a la que el potencial de los iones Na^+ y Cl^- cae a cero (el valor medido es $r_1 = 0.94$ nm). *b*) Estime la energía de enlace para el NaCl, que ocurre a una separación $r_0 = 0.24$ nm. Ignore la repulsión del traslape de los niveles de electrones que ocurre a esta distancia (y provoca la elevación de la curva de energía potencial para $r < r_0$, figura 40-10).

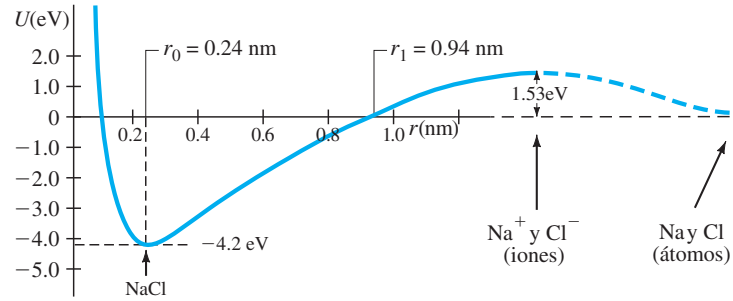


FIGURA 40–10 Ejemplo 40-1. Diagrama de energía potencial para el enlace NaCl. Más allá de aproximadamente $r = 1.2$ nm, el diagrama sólo es esquemático, y representa la diferencia de energía entre iones y átomos neutros. $U = 0$ se elige para los dos átomos separados Na y Cl (no para los iones). [Para los dos iones, Na^+ y Cl^-, el cero de energía potencial en $r = \infty$ corresponde a $U \approx 1.53$ eV en este diagrama].

SOLUCIÓN *a*) La energía potencial de dos cargas puntuales está dada por la ley de Coulomb:

$$U' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r},$$

donde se distingue U' de la U en la figura 40-10. Esta fórmula funciona para los dos iones si se establece que $U' = 0$ en $r = \infty$, lo cual en la gráfica de la figura 40-10 corresponde a $U = +1.53$ eV (la figura 40-10 se dibuja para $U = 0$ en el caso de los *átomos* libres). El punto r_1 en la figura 40-10 corresponde a $U' = -1.53$ eV con respecto a los dos iones libres. Despejamos r en la ecuación U' anterior estableciendo $q_1 = +e$ y $q_2 = -e$:

$$r_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{U'} = \frac{(9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(-1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(+1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})}{(-1.53\,\mathrm{eV})(1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})}$$
$$= 0.94\,\mathrm{nm},$$

que es justo el valor medido.

b) En $r_0 = 0.24$ nm, la energía potencial de los dos iones (en relación con $r = \infty$ para los dos iones) es

$$U' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$
$$= \frac{(9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(-1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(+1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})}{(0.24 \times 10^{-9}\,\mathrm{m})(1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})} = -6.0\,\mathrm{eV}.$$

Por lo tanto, se estima que se entregan 6.0 eV de energía cuando los iones Na^+ y Cl^- forman un enlace NaCl. Dicho de otra forma, se requieren 6.0 eV para romper el enlace NaCl y formar los iones Na^+ y Cl^-. Para obtener la energía de enlace, la energía para separar el NaCl en *átomos* Na y Cl, se necesita restar los 1.53 eV (la "joroba" en la figura 40-10) necesarios para ionizarlos:

$$\text{energía de enlace} = 6.0\,\mathrm{eV} + 1.53\,\mathrm{eV} = 4.5\,\mathrm{eV}.$$

El valor medido (que se muestra en la figura 40-10) es 4.2 eV. La diferencia se atribuye a la energía asociada con la repulsión de los niveles electrónicos a esta distancia.

FÍSICA APLICADA
ATP y energía en la célula

En ocasiones, la energía potencial de un enlace se parece a la de la figura 40-11. En este caso, la energía de enlace de la molécula, a una separación r_0, es mayor que cuando no hay enlace ($r = \infty$). Esto es, se requiere *adicionar* energía para formar el enlace (por lo tanto, la energía de enlace es negativa) y hay liberación de energía cuando se rompe el enlace. Tal enlace es estable sólo porque existe la barrera de la energía de ac-

tivación. Este tipo de enlace es importante en las células vivas, porque en tales enlaces la energía se puede almacenar de manera eficiente en ciertas moléculas, en particular ATP (adenosín trifosfato). El enlace que conecta el último grupo fosfato (que se designa Ⓟ en la figura 40-11) con el resto de la molécula (ADP, que significa adenosín difosfato, pues sólo contiene dos fosfatos) tiene energía potencial de la forma que se muestra en la figura 40-11. En este enlace se almacena energía. Cuando el enlace se rompe (ATP $\rightarrow$ ADP + Ⓟ), la energía se libera y esta energía queda disponible para hacer que otras reacciones químicas "marchen".

En las células vivas, las reacciones químicas tienen energías de activación que con frecuencia son del orden de varios eV. Tales barreras de energía no son fáciles de superar en la célula. Aquí es donde intervienen las enzimas. Las enzimas actúan como *catalizadores*, lo cual significa que actúan para reducir la energía de activación de manera que puedan ocurrir las reacciones que, de otro modo, no se efectuarían. Las enzimas actúan por medio de la fuerza electrostática para distorsionar las nubes de electrones de enlace, de manera que los enlaces iniciales se rompan con facilidad.

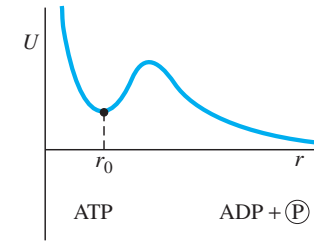


FIGURA 40–11 Diagrama de energía potencial para la formación de ATP a partir de ADP y fosfato (Ⓟ).

EJEMPLO 40–2 **Longitud de enlace.** Suponga que una molécula diatómica tiene una energía potencial dada por $U = -(1/4\pi\epsilon_0)(e^2/r) + B/r^6$ donde $B = 1.0 \times 10^{-78}\,\text{J}\cdot\text{m}^6$ y r es la distancia entre los centros de los dos átomos. Determine la separación de equilibrio esperada de los dos átomos (longitud de enlace de la molécula).

PLANTEAMIENTO La fuerza entre los dos átomos está dada por $F = -dU/dr$ (análoga a la ecuación 8-7). La separación de equilibrio clásica se encuentra al establecer que $F = 0$.

SOLUCIÓN

$$F = -dU/dr = (1/4\pi\epsilon_0)(-e^2/r^2) - B(-6/r^7) = -(1/4\pi\epsilon_0)(e^2/r^2) + 6B/r^7 = 0.$$

Luego,

$$r^5 = 6B(4\pi\epsilon_0)/e^2 = 2.6 \times 10^{-50}\,\text{m}^5.$$

De manera que $r = 1.2 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0.12\,\text{nm}$.

NOTA Es posible demostrar que éste es un punto de equilibrio estable al comprobar el signo de d^2U/dr^2, o al evaluar F en posiciones ligeramente mayores y menores que la posición de equilibrio.

40–3 Enlaces débiles (de van der Waals)

Una vez formado un enlace entre dos átomos o iones, por lo general se debe suministrar energía para romper el enlace y separar los átomos. Como se mencionó en la sección 40-1, esta energía se llama *energía de enlace*. La energía de enlace para los enlaces covalentes y iónicos generalmente es de 2 a 5 eV. Estos enlaces, que mantienen unidos a los átomos para *formar* moléculas, con frecuencia se llaman **enlaces fuertes** para distinguirlos de los llamados "enlaces débiles". El término **enlace débil**, como se le utiliza aquí, se refiere a uniones *entre* moléculas por simple atracción electrostática, como *entre* moléculas polares (y no *dentro* de una molécula polar, que es un enlace fuerte). La fortaleza de la unión es mucho menor que para los enlaces fuertes. Las energías de enlace por lo general están en el rango de 0.04 a 0.3 eV, de ahí el nombre de "enlaces débiles".

Los enlaces débiles por lo general son resultado de la atracción entre dipolos (secciones 21-11, 23-6). Por ejemplo, la figura 40-12 muestra dos moléculas, que tienen momentos dipolares permanentes y se atraen mutuamente. Además de tales **enlaces dipolo-dipolo**, también existen los **enlaces dipolo-dipolo inducido**, en los que una molécula polar con un momento dipolar permanente puede inducir un momento dipolar en una molécula que, de otro modo, estaría en equilibrio eléctrico (no polar), al igual que una sola carga es capaz de inducir una separación de carga en un objeto cercano (véase la figura 21-7). Incluso es posible que haya atracción entre dos moléculas no polares, porque sus electrones están en movimiento: en cualquier instante puede haber una separación transitoria de carga, lo que crea un breve momento dipolar y una atracción débil. Todos estos enlaces débiles se conocen como **enlaces de van der Waals**, y las fuerzas implicadas como **fuerzas de van der Waals**. La energía potencial tiene la forma general que se ilustra en la figura 40-8, con la energía potencial de atracción de van der Waals que varía como $1/r^6$.

Cuando uno de los átomos en un enlace dipolo-dipolo es hidrógeno, como en la figura 40-12, se forma un **puente de hidrógeno**. Un puente de hidrógeno por lo general es el más fuerte de los enlaces débiles, porque el átomo de hidrógeno es el átomo más pequeño y es posible acercarse más hacia él. Los puentes de hidrógeno también tienen un carácter "covalente" parcial: esto es, los electrones entre los dos dipolos se pueden compartir en cierta medida, lo que forma un enlace más fuerte y más duradero.

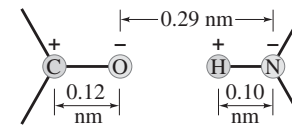
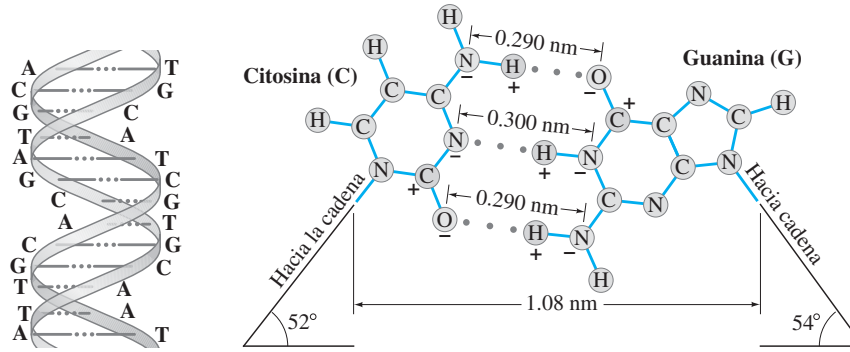


FIGURA 40–12 Los dipolos $C^+ - O^-$ y $H^+ - N^-$ se atraen mutuamente. (Estos dipolos pueden ser parte de, por ejemplo, las bases nucleótidas citosina y guanina en las moléculas de ADN. Véase la figura 40-13.) Las cargas + y − generalmente tienen magnitudes de una fracción de *e*.



a) *b*)

FIGURA 40–13 *a*) Sección de una doble hélice de ADN. Los puntos rojos representan puentes de hidrógeno entre las dos hebras. *b*) Un acercamiento: las moléculas de citosina (C) y guanina (G) en hebras separadas de una doble hélice de ADN se mantienen unidas mediante los puentes de hidrógeno (puntos rojos) que implican un H^+ en una molécula atraído hacia un N^- o $C^+ - O^-$ de una molécula en la cadena adyacente. Véase también la sección 21-12 y las figuras 21-47 y 21-48.

FÍSICA APLICADA
ADN

Los enlaces débiles son importantes en líquidos y sólidos cuando no hay enlaces fuertes (véase la sección 40-5). También son muy importantes para comprender las actividades de las células, como la forma de doble hélice del ADN (figura 40-13) y la duplicación del ADN. La energía cinética promedio de las moléculas en una célula viviente a temperaturas normales ($T \approx 300$ K) es de alrededor de $\frac{3}{2}kT \approx 0.04$ eV, aproximadamente la magnitud de los enlaces débiles. Esto significa que un enlace débil puede romperse con facilidad sólo por una colisión molecular. En consecuencia, los enlaces débiles no son permanentes; de hecho, son uniones breves. Esto los ayuda a desempeñar papeles particulares en la célula. Por otra parte, los enlaces fuertes, los que mantienen unidas a las moléculas, casi nunca se rompen simplemente por una colisión molecular. Por ende, son relativamente permanentes. Se rompen mediante acción química (la formación de enlaces todavía más fuertes) y esto generalmente sucede en la célula con la ayuda de una enzima, que es una molécula de proteína.

EJEMPLO 40–3 **Energía de nucleótido.** Calcule la energía potencial entre un dipolo C═O de la base nucleótico citosina y el dipolo cercano H—N de la guanina, suponiendo que los dos dipolos se alinean como se muestra en la figura 40-12. Mediciones del momento dipolar ($= q\ell$) (véase la tabla 23-2 y la figura 40-12) dan

$$q_H = -q_N = \frac{3.0 \times 10^{-30}\,\text{C}\cdot\text{m}}{0.10 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 3.0 \times 10^{-20}\,\text{C} = 0.19e,$$

y

$$q_C = -q_O = \frac{8.0 \times 10^{-30}\,\text{C}\cdot\text{m}}{0.12 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 6.7 \times 10^{-20}\,\text{C} = 0.42e.$$

PLANTEAMIENTO Se quiere encontrar la energía potencial de las dos cargas en un dipolo con respecto a las dos cargas en la otra, pues esto será igual al trabajo necesario para separar los dos dipolos infinitamente. La energía potencial U de una carga q_1 en presencia de una carga q_2 es $U = (1/4\pi\epsilon_0)(q_1 q_2/r_{12})$ donde $1/4\pi\epsilon_0 = 9.0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ y r_{12} es la distancia entre las dos cargas.

SOLUCIÓN La energía potencial U consiste en cuatro términos:

$$U = U_{CH} + U_{CN} + U_{OH} + U_{ON},$$

donde U_{CH} significa la energía potencial de C en presencia de H, y de igual modo para los otros términos. No se tienen términos correspondientes a C y O, o N y H, porque se supone que los dos dipolos son entidades estables. Luego, con las distancias que se indican en la figura 40-12, se obtiene:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_C q_H}{r_{CH}} + \frac{q_C q_N}{r_{CN}} + \frac{q_O q_H}{r_{OH}} + \frac{q_O q_N}{r_{ON}}\right]$$

$$= (9.0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(6.7)(3.0)\left(\frac{1}{0.31} - \frac{1}{0.41} - \frac{1}{0.19} + \frac{1}{0.29}\right)\frac{(10^{-20}\,\text{C})^2}{(10^{-9}\,\text{m})}$$

$$= -1.86 \times 10^{-20}\,\text{J} = -0.12\,\text{eV}.$$

La energía potencial es negativa, lo que significa que se requieren 0.12 eV de trabajo (o adicionar energía) para separar los dipolos. Esto es, la energía de enlace de este enlace "débil" o puente de hidrógeno es 0.12 eV. Desde luego, esto sólo es una estimación, pues otras cargas en los alrededores también tendrían una influencia.

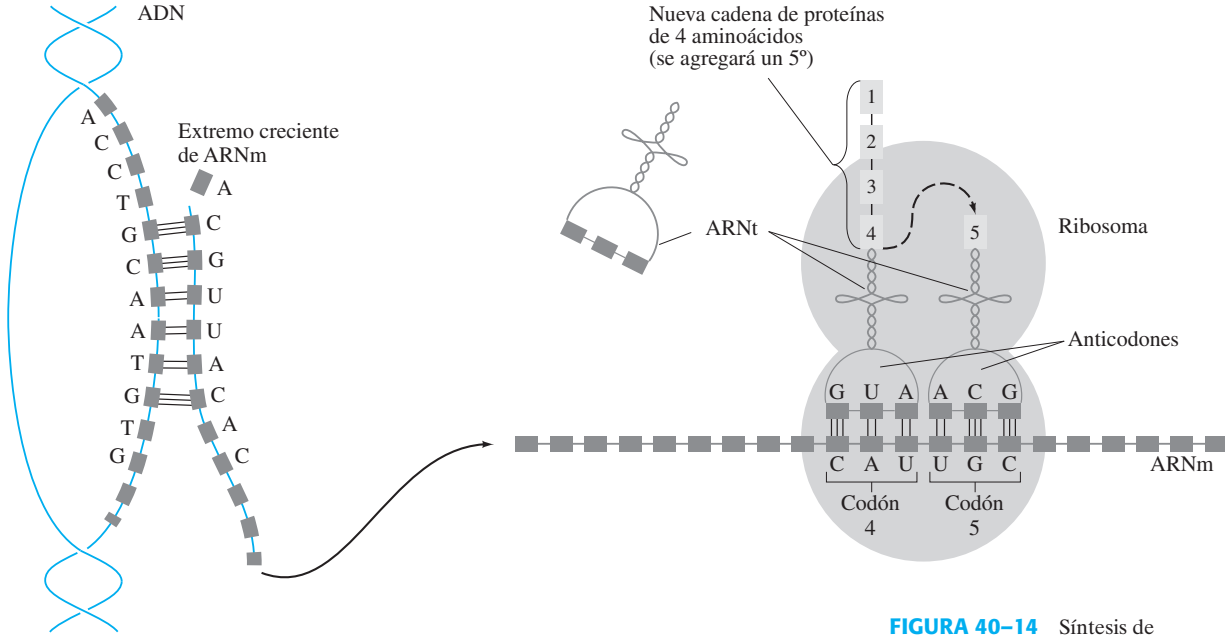


FIGURA 40–14 Síntesis de proteínas. Véase el texto para detalles.

*Síntesis de proteínas

Los enlaces débiles, en especial los puentes de hidrógeno, son cruciales para los procesos de síntesis de proteína. Las proteínas sirven como partes estructurales de la célula y, como enzimas, catalizan reacciones químicas necesarias para el crecimiento y la supervivencia del organismo. Una molécula proteica consiste en una o más cadenas de pequeñas moléculas conocidas como *aminoácidos*. Existen 20 aminoácidos diferentes, y una sola cadena de proteína puede contener cientos de ellos en un orden específico. En la figura 40-14 se muestra esquemáticamente el modelo de cómo se conectan los aminoácidos en el orden correcto para formar una molécula de proteína.

FÍSICA APLICADA
Síntesis de proteínas

Comienza en la doble hélice del ADN: cada gen en un cromosoma contiene la información para producir una proteína. El orden de las cuatro bases, A, C, G y T, proporciona el "código", el **código genético**, para el orden de los aminoácidos en la proteína. Primero, la doble hélice del ADN se desenrolla y una nueva molécula, llamada ARN *mensajero* (ARNm), se sintetiza empleando como "plantilla" una hebra del ADN. El ARNm es una cadena de moléculas que contiene cuatro bases diferentes, como las del ADN (sección 21-12), excepto que la timina (T) se sustituye con la molécula similar uracilo (U). Cerca de la parte superior izquierda de la figura 40-14, una C se acaba de agregar a la creciente cadena de ARNm de manera muy similar a como se duplica el ADN; y una A, atraída y mantenida cerca de la T en la cadena de ADN por la fuerza electrostática, pronto se unirá a la C mediante una enzima. El orden de las bases, y por lo tanto la información genética, se conserva en el ARNm porque las formas de las moléculas sólo permiten que la "adecuada" se acerque lo suficiente para que la fuerza electrostática pueda actuar y formar enlaces débiles.

A continuación, el ARNm se sacude alrededor de la célula (teoría cinética) hasta que queda cerca de un pequeño organelo llamado *ribosoma*, al que se puede unir mediante atracción electrostática (a la derecha en la figura 40-14). También por la fuerza electrostática se unen al ribosoma una o dos moléculas de ARN *de transferencia* (ARNt). Estas moléculas de ARNt "traducen" de la siguiente forma el código genético de las bases de nucleótidos en aminoácidos. Existe una molécula de ARNt diferente para cada aminoácido y cada combinación de tres bases. En un extremo de una molécula de ARNt hay un aminoácido. En el otro extremo de la molécula de ARNt está el "anticodón" apropiado, un conjunto de tres bases de nucleótidos que "codifican" ese aminoácido. Si las tres bases en un anticodón coinciden con las tres bases del "codón" en el ARNm (en el sentido de G a C y A a U), el codón ARNm atrae electrostáticamente al anticodón y esa molécula de ARNt se mantiene ahí brevemente. El ribosoma tiene dos sitios de unión particulares que mantienen dos moléculas de ARNt mientras las enzimas unen sus aminoácidos para alargar la cadena de aminoácidos (cuadros numerados en la figura 40-14). Conforme cada aminoácido se une mediante una enzima (en la figura 40-14 ya se unieron cuatro, arriba a la derecha, y un quinto está a punto de unirse), la antigua molécula de ARNt se remueve, quizás mediante una colisión aleatoria con alguna molécula en el fluido celular. Pronto, una nueva se verá atraída conforme el ribosoma se mueve a lo largo del ARNm.

Este proceso de síntesis de proteínas a menudo se presenta como si ocurriera en forma de mecanismo de relojería, como si cada molécula supiera su papel y se dirigiera a su lugar asignado. Pero éste no es el caso. Las fuerzas de atracción entre las cargas eléctricas de las moléculas son más bien débiles y se vuelven significativas sólo cuando las moléculas se acercan y se forman muchos enlaces débiles. De hecho, si las formas no son las correctas, casi no hay atracción electrostática, de manera que existen pocos errores. El hecho de que los enlaces sean débiles es muy importante. Si fueran fuertes, las colisiones con otras moléculas no permitirían que una molécula de ARNt se liberara del ribosoma, o que el ARNm se liberara del ADN. Si no hubiera encuentros temporales, el metabolismo llegaría a detenerse.

Conforme cada aminoácido se agrega al siguiente, la molécula de proteína crece en longitud hasta que se completa. Incluso conforme se elabora, esta cadena vaga por el mar celular: se puede considerar como un gusano que se contonea. Pero una molécula de proteína tiene grupos polares con carga eléctrica a todo lo largo. Y conforme toma varias formas, las fuerzas eléctricas de atracción entre diferentes partes de la molécula finalmente conducirán a una configuración particular que es bastante estable. Cada tipo de proteína tiene su propia forma especial, dependiendo de la ubicación de los átomos con carga. En el último análisis, la forma final depende del orden de los aminoácidos.

40–4 Espectros moleculares

Cuando los átomos se combinan para formar moléculas, las distribuciones de probabilidad de los electrones externos se traslapan y esta interacción altera los niveles de energía. No obstante, las moléculas pueden experimentar transiciones entre niveles de energía electrónicos al igual que sucede con los átomos. Por ejemplo, la molécula H_2 puede absorber un fotón justo de la frecuencia correcta para excitar uno de sus electrones del estado fundamental. El electrón excitado regresará a su estado fundamental y emitirá un fotón. La energía de los fotones emitidos por las moléculas puede ser del mismo orden de magnitud que para los átomos, por lo general de 1 a 10 eV, o menos.

Los niveles de energía adicionales se vuelven posibles para moléculas (mas no para átomos) porque la molécula como un todo es capaz de girar, y los átomos de la molécula pueden vibrar unos en relación con los otros. Los niveles de energía para niveles rotacionales y vibracionales están cuantizados, y por lo general están mucho más cerca entre sí (10^{-3} a 10^{-1} eV) que los niveles electrónicos. Por lo tanto, cada nivel atómico de energía se convierte en un conjunto de niveles muy cercanos entre sí que corresponden a los movimientos vibracional y rotacional, figura 40-15. Las transiciones de un nivel a otro aparecen como muchas líneas muy cercanas. De hecho, las líneas no siempre son distinguibles, y estos espectros se llaman **espectros de bandas**. Cada tipo de molécula tiene su propio espectro característico, que permite identificar y determinar su estructura. Ahora se examinarán con más detalle los estados rotacional y vibracional en las moléculas.

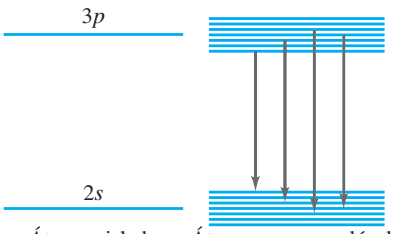


FIGURA 40–15 *a*) Los niveles de energía individuales de un átomo aislado se convierten en *b*) bandas de niveles cercanamente espaciados en las moléculas, así como en sólidos y líquidos.

Niveles de energía rotacional en moléculas

A continuación se considerarán sólo moléculas diatómicas, aunque el análisis se puede extender a moléculas poliatómicas. Cuando una molécula diatómica gira en torno a su centro de masa, como se ilustra en la figura 40-16, su energía cinética de rotación (véase la sección 10-8) es

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I},$$

donde $I\omega$ es la cantidad de movimiento angular (sección 11-1). La mecánica cuántica predice cuantización de cantidad de movimiento angular tal como en los átomos (véase la ecuación 39-3):

$$I\omega = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar, \qquad \ell = 0, 1, 2, \cdots,$$

donde ℓ es un entero llamado **número cuántico de cantidad de movimiento angular rotacional**. Por lo tanto, la energía rotacional está cuantizada:

$$E_{\text{rot}} = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \ell(\ell+1)\frac{\hbar^2}{2I}. \qquad \ell = 0, 1, 2, \cdots. \qquad \textbf{(40–2)}$$

Las transiciones entre niveles de energía rotacional están sujetas a la **regla de selección** (como en la sección 39-2):

$$\Delta\ell = \pm 1.$$

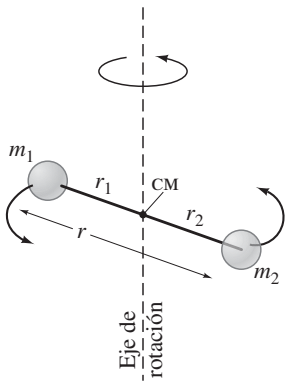


FIGURA 40–16 Molécula diatómica que gira en torno a un eje vertical.

La energía de un fotón emitido o absorbido para una transición entre estados rotacionales con número cuántico de cantidad de movimiento angular ℓ y $\ell - 1$ será

$$\Delta E_{\text{rot}} = E_\ell - E_{\ell-1} = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1) - \frac{\hbar^2}{2I}(\ell-1)(\ell)$$
$$= \frac{\hbar^2}{I}\ell. \quad \left[\begin{array}{c}\ell \text{ es para el estado superior} \\ \text{de energía}\end{array}\right] \quad \textbf{(40–3)}$$

Como se ve, la energía de transición aumenta directamente con ℓ. La figura 40-17 muestra algunos de los niveles energéticos rotacionales y transiciones permitidos. Las líneas de absorción medidas caen en la región de microondas o en la región lejana de infrarrojo del espectro, y sus frecuencias por lo general son 2, 3, 4,… veces mayores que la más baja, como predice la ecuación 40-3.

EJERCICIO A Determine los tres estados más bajos de energía rotacional (en eV) para una molécula de nitrógeno que tiene un momento de inercia $I = 1.39 \times 10^{-46}$ kg·m^2.

El momento de inercia de la molécula en la figura 40-16, que gira en torno a su centro de masa (sección 10-5), es

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2,$$

donde r_1 y r_2 son las distancias de cada átomo desde su centro de masa común. Es posible demostrar (en el ejemplo 40-4 a continuación) que I se expresa como

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2, \quad \textbf{(40–4)}$$

donde $r = r_1 + r_2$ es la distancia entre los dos átomos de la molécula y $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ se llama la **masa reducida**. Si $m_1 = m_2$, entonces $\mu = \frac{1}{2}m_1 = \frac{1}{2}m_2$.

EJEMPLO 40–4 **Masa reducida.** Demuestre que el momento de inercia de una molécula diatómica que gira en torno a su centro de masa se expresa como

$$I = \mu r^2,$$

donde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

es la masa reducida, ecuación 40-4, y r es la distancia entre los átomos.

SOLUCIÓN El momento de inercia de una sola partícula de masa m a una distancia r del eje de rotación es $I = mr^2$ (ecuaciones 10-11 o 10-13). Para la molécula diatómica (figura 40-16),

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

Ahora, $r = r_1 + r_2$ y $m_1 r_1 = m_2 r_2$ porque el eje de rotación pasa a través del centro de masa. Por lo tanto,

$$r_1 = r - r_2 = r - \frac{m_1}{m_2} r_1.$$

Al despejar r_1 se obtiene

$$r_1 = \frac{r}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}} = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}.$$

De igual modo,

$$r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}.$$

Entonces (véase la primera ecuación de esta solución),

$$I = m_1\left(\frac{m_2 r}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1 r}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) r^2}{(m_1 + m_2)^2}$$
$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2,$$

donde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

que es lo que se quería demostrar.

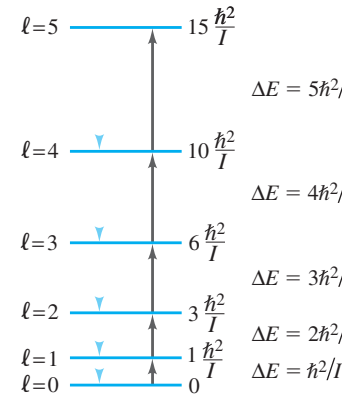


FIGURA 40–17 Niveles de energía rotacional y transiciones permitidas (emisión y absorción) para una molécula diatómica. Las flechas que apuntan hacia arriba representan absorción de un fotón, y las flechas hacia abajo representan emisión de un fotón.

EJEMPLO 40–5 **Transición rotacional.** Una transición rotacional $\ell = 1$ a $\ell = 0$ para la molécula CO tiene una longitud de onda de absorción medida $\lambda_1 = 2.60$ mm (en la región de microondas). Con base en esto, calcule *a*) el momento de inercia de la molécula CO y *b*) la longitud del enlace CO, *r*. *c*) Calcule las longitudes de onda de las siguientes tres transiciones rotacionales y las energías del fotón emitido para cada una de estas cuatro transiciones.

PLANTEAMIENTO La longitud de onda de absorción permite encontrar la energía del fotón absorbido. El momento de inercia I se encuentra a partir de la ecuación 40-3, y la longitud de enlace r a partir de la ecuación 40-4.

SOLUCIÓN *a*) La energía del fotón, $E = hf = hc/\lambda$, es igual a la diferencia de nivel de energía rotacional, ΔE_{rot}. De acuerdo con la ecuación 40-3, se escribe

$$\frac{\hbar^2}{I}\ell = \Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda_1}.$$

Con $\ell = 1$ (el estado superior) en este caso, se despeja I:

$$I = \frac{\hbar^2\ell}{hc}\lambda_1 = \frac{h\lambda_1}{4\pi^2 c} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(2.60 \times 10^{-3}\,\text{m})}{4\pi^2(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}$$
$$= 1.46 \times 10^{-46}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

b) Las masas de C y O son 12.0 u y 16.0 u, respectivamente, donde $1\ \text{u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg. Por lo tanto, la masa reducida es

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(12.0)(16.0)}{28.0}(1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg}) = 1.14 \times 10^{-26}\,\text{kg}$$

o 6.86 u. Entonces, a partir de la ecuación 40-4, la longitud del enlace es

$$r = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.46 \times 10^{-46}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}{1.14 \times 10^{-26}\,\text{kg}}} = 1.13 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0.113\,\text{nm}.$$

c) De acuerdo con la ecuación 40-3, $\Delta E \propto \ell$. En consecuencia, $\lambda = c/f = hc/\Delta E$ es proporcional a $1/\ell$. Por lo tanto, para transiciones de $\ell = 2$ a $\ell = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 = 1.30$ mm. Para $\ell = 3$ a $\ell = 2$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1 = 0.87$ mm. Y para $\ell = 4$ a $\ell = 3$, $\lambda_4 = 0.65$ mm. Todas están cerca de los valores medidos. Las energías de los fotones, $hf = hc/\lambda$, son, respectivamente, 4.8×10^{-4} eV, 9.5×10^{-4} eV, 1.4×10^{-3} eV, y 1.9×10^{-3} eV.

Niveles de energía vibracional en moléculas

La energía potencial de los dos átomos en una molécula diatómica común tiene la forma que se ilustra en la figura 40-8 o 40-9, y la figura 40-18 de nuevo muestra la energía potencial para la molécula H_2. Advierta que la energía potencial, al menos cerca de la separación de equilibrio r_0, recuerda mucho a la energía potencial de un oscilador armónico simple, $U = \frac{1}{2}kx^2$, que se ilustra como una línea punteada superpuesta. Por lo tanto, para pequeños desplazamientos de r_0, cada átomo experimenta una fuerza restauradora aproximadamente proporcional al desplazamiento, y la molécula vibra como un oscilador armónico simple (OAS). La frecuencia clásica de vibración es

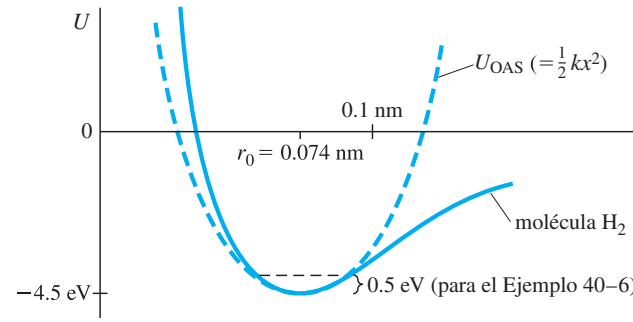


FIGURA 40–18 Energía potencial para la molécula H_2 y para un oscilador armónico simple ($U_{\text{OAS}} = \frac{1}{2}kx^2$, con $|x| = |r - r_0|$). La altura de la energía 0.50 eV marcada se utiliza en el ejemplo 40-6 para estimar k. [Advierta que $U_{\text{OAS}} = 0$ no es igual que $U = 0$ para la molécula].

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}, \qquad \textbf{(40–5)}$$

donde k es la "constante de rigidez" (como para un resorte, capítulo 14) y, en lugar de la masa m, de nuevo se debe usar la masa reducida $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Esto se

ilustra en el problema 19.) La ecuación de Schrödinger para la energía potencial OAS da soluciones para energía que están cuantizadas de acuerdo con

$$E_{\text{vib}} = (v + \tfrac{1}{2})hf \qquad v = 0, 1, 2, \cdots, \tag{40–6}$$

donde f está dada por la ecuación 40-5 y v es un entero llamado **número cuántico vibracional**. El estado energético más bajo ($v = 0$) no es cero (como en el caso de la rotación), sino que tiene $E = \frac{1}{2}hf$. A esto se le llama **energía punto cero**.† Los estados energéticos más altos tienen energía $\frac{3}{2}hf$, $\frac{5}{2}hf$, etcétera, como se indica en la figura 40-19. Las transiciones están sujetas a la **regla de selección**

$$\Delta v = \pm 1,$$

así que las transiciones permitidas sólo ocurren entre estados adyacentes y todas emiten fotones de energía

$$\Delta E_{\text{vib}} = hf. \tag{40–7}$$

Esto está muy cerca de los valores experimentales para v pequeña; pero para energías más altas, la curva de energía potencial (figura 40-18) comienza a desviarse de una curva OAS perfecta, lo que afecta a las longitudes de onda y frecuencias de las transiciones. Las energías de transición típicas son del orden de 10^{-1} eV, alrededor de 10 a 100 veces mayores que para transiciones rotacionales, con longitudes de onda en la región infrarroja del espectro ($\approx 10^{-5}$ m).‡

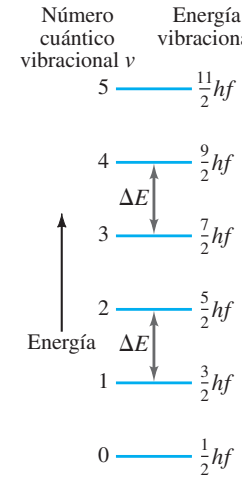


FIGURA 40–19 Energías vibracionales permitidas de una molécula diatómica, donde f es la frecuencia fundamental de vibración, dada por la ecuación 40-5. Los niveles de energía están igualmente espaciados. Las transiciones sólo se permiten entre niveles adyacentes ($\Delta v = \pm 1$).

EJEMPLO 40–6 **ESTIMACIÓN** **Longitud de onda para H_2.** *a*) Con base en la curva de la figura 40-18, estime el valor de la constante de rigidez k para la molécula H_2, y luego *b*) estime la longitud de onda fundamental para transiciones vibracionales.

PLANTEAMIENTO Para encontrar k, se elige arbitrariamente una altura de energía de 0.50 eV que se indica en la figura 40-18. Al medir directamente sobre la gráfica, se encuentra que esta energía corresponde a una vibración a cada lado de $r_0 = 0.074$ nm de aproximadamente $x = \pm 0.017$ nm.

SOLUCIÓN *a*) Para OAS, $U_{\text{OAS}} = \frac{1}{2}kx^2$ y $U_{\text{OAS}} = 0$ en $x = 0$ $(r = r_0)$; así,

$$k = \frac{2U_{\text{OAS}}}{x^2} \approx \frac{2(0.50\,\text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})}{(1.7 \times 10^{-11}\,\text{m})^2} \approx 550\,\text{N/m}.$$

NOTA Este valor de k también sería razonable para un resorte macroscópico.

b) La masa reducida es $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2) = m_1/2 = \frac{1}{2}(1.0\,\text{u})(1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg}) = 0.83 \times 10^{-27}$ kg. En consecuencia, al usar la ecuación 40-5,

$$\lambda = \frac{c}{f} = 2\pi c\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi(3.0 \times 10^8\,\text{m/s})\sqrt{\frac{0.83 \times 10^{-27}\,\text{kg}}{550\,\text{N/m}}} = 2300\,\text{nm},$$

que se localiza en la región infrarroja del espectro.

Experimentalmente, se hace el proceso inverso: se miden las longitudes de onda de transiciones vibracionales para una molécula dada, y a partir de esto se calcula la constante de rigidez k. Los valores de k calculados de esta forma son una medida de la intensidad del enlace molecular.

EJEMPLO 40–7 **Niveles de energía vibracional en el hidrógeno.** Las vibraciones de la molécula de hidrógeno emiten radiación infrarroja con longitud de onda aproximada de 2300 nm. *a*) ¿Cuál es la separación en términos de energía entre niveles vibracionales adyacentes? *b*) ¿Cuál es el estado energético vibracional más bajo?

PLANTEAMIENTO La separación de energía entre niveles vibracionales adyacentes es $\Delta E_{\text{vib}} = hf = hc/\lambda$. La energía más baja (ecuación 40-6) tiene $v = 0$.

SOLUCIÓN *(a)*

$$\Delta E_{\text{vib}} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{(2300 \times 10^{-9}\,\text{m})(1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} = 0.54\,\text{eV},$$

donde el denominador incluye el factor de conversión de joules a eV.

b) La energía vibracional más baja tiene $v = 0$ en la ecuación 40-6:

$$E_{\text{vib}} = (v + \tfrac{1}{2})hf = \tfrac{1}{2}hf = 0.27\,\text{eV}.$$

†Recuerde este fenómeno para un pozo cuadrado, figura 38-8.

‡Las transiciones prohibidas con $\Delta v = 2$ se emiten un poco más débilmente, pero su observación resulta importante en algunos casos, como en astronomía.

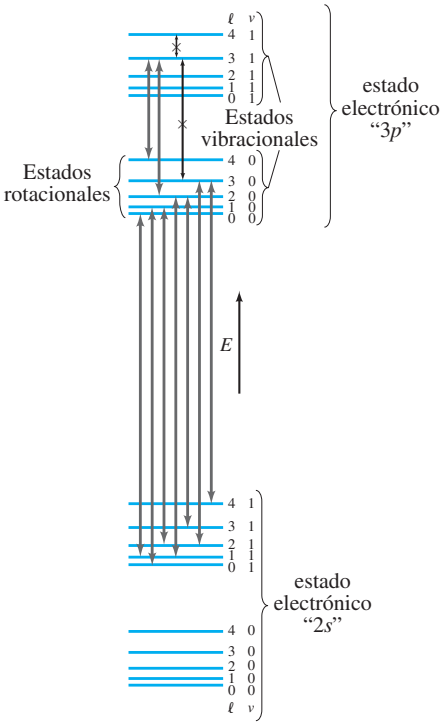


FIGURA 40–20 Niveles energéticos electrónico, vibracional y rotacional combinados. Las transiciones marcadas con una × no están permitidas de acuerdo con las reglas de selección.

Nivel rotacional más nivel vibracional

Cuando se adiciona energía a una molécula, los modos rotacional y vibracional se pueden excitar. Puesto que las energías rotacionales son más o menos de un orden de magnitud menor que las energías vibracionales, las cuales a la vez son menores que los niveles energéticos electrónicos, el agrupamiento de niveles se puede representar como se muestra en la figura 40-20. Las transiciones entre niveles energéticos, con emisión de un fotón, están sujetas a las **reglas de selección**:

$$\Delta\nu = \pm 1 \qquad \text{y} \qquad \Delta\ell = \pm 1.$$

En la figura 40-20 se indican algunas transiciones permitidas y prohibidas (marcadas como ×). No se muestran todas las transiciones ni todos los niveles, y se exageró la separación entre niveles vibracionales así como entre niveles rotacionales (incluso más). Pero se distingue claramente el origen de las líneas muy cercanas entre sí que originan los espectros de banda, como se mencionó con referencia a la figura 40-15 antes en esta sección.

Los espectros son bastante complicados, así que brevemente sólo se consideran transiciones dentro del mismo nivel electrónico, como las de la parte superior de la figura 40-20. Una transición desde un estado con números cuánticos ν y ℓ, a uno con números cuánticos $\nu + 1$ y $\ell \pm 1$ (véanse las reglas de selección anteriores), absorberá[†] un fotón de energía:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta E_{\text{vib}} + \Delta E_{\text{rot}} \\ &= hf + (\ell + 1)\frac{\hbar^2}{I} \qquad \begin{bmatrix}\ell \to \ell + 1 \\ (\Delta\ell = +1)\end{bmatrix}, \quad \ell = 0, 1, 2, \cdots \qquad \textbf{(40–8a)} \\ &= hf - \ell\frac{\hbar^2}{I} \qquad \begin{bmatrix}\ell \to \ell - 1 \\ (\Delta\ell = -1)\end{bmatrix}, \quad \ell = 1, 2, 3, \cdots, \qquad \textbf{(40–8b)}\end{aligned}$$

donde se usaron las ecuaciones 40-3 y 40-7. Note que, para transiciones $\ell \to \ell - 1$, ℓ no puede ser cero porque entonces no hay estado con $\ell = -1$. Las ecuaciones 40-8 predicen un espectro de absorción como el que se muestra de manera esquemática en la figura 40-21, con transiciones $\ell \to \ell - 1$ a la izquierda y $\ell \to \ell + 1$ a la derecha. La figura 40-22 ilustra el espectro de absorción molecular del HCl, que sigue muy bien este

[†]Las ecuaciones 40-8 son para absorción; para emisión de un fotón, la transición sería $\nu \to \nu - 1$, $\ell \to \ell \pm 1$.

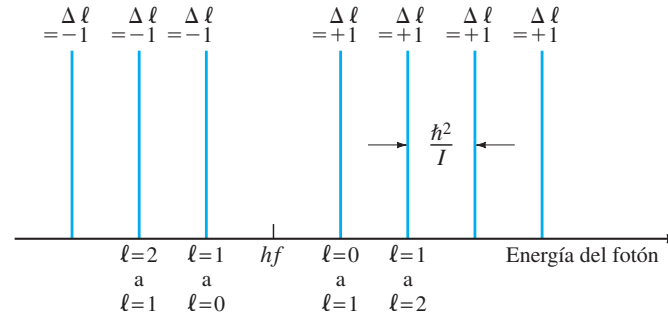


FIGURA 40–21 Espectro esperado para transiciones entre estados rotacional y vibracional combinados.

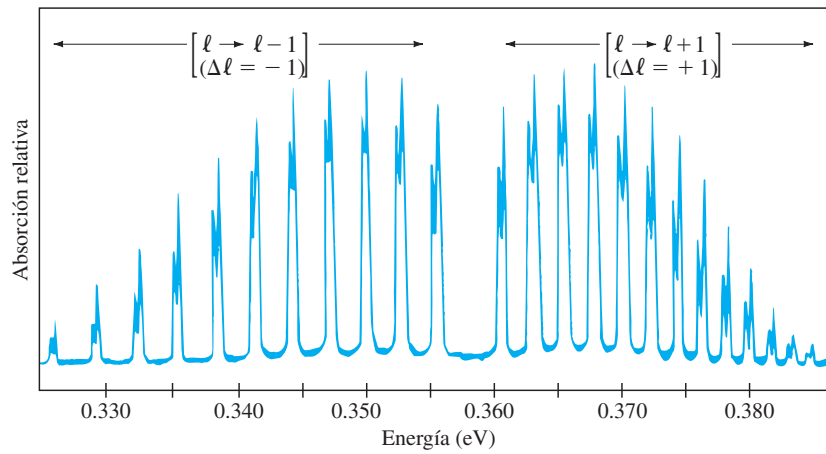


FIGURA 40–22 Espectro de absorción para moléculas HCl. Las líneas a la izquierda corresponden a transiciones donde $\ell \to \ell - 1$; las que están a la derecha son para $\ell \to \ell + 1$. Cada línea tiene un pico doble porque el cloro tiene dos isótopos de diferente masa y diferente momento de inercia.

patrón. (Cada línea en el espectro de la figura 40-22 se divide en dos porque el Cl consiste en dos isótopos de diferente masa; por lo tanto, existen dos tipos de molécula HCl con diferentes momentos de inercia I).

EJEMPLO 40–8 ESTIMACIÓN **La molécula de HCl.** Estime el momento de inercia de la molécula de HCl utilizando el espectro de absorción que se muestra en la figura 40-22. Para propósitos de una estimación aproximada, ignore la diferencia entre los dos isótopos.

PLANTEAMIENTO Las ubicaciones de los picos en la figura 40-22 deben corresponder a las ecuaciones 40-8. No se sabe a qué valor de ℓ corresponde cada pico en la figura 40-22, pero se puede estimar la diferencia de energía entre picos como de aproximadamente $\Delta E' = 0.0025$ eV.

SOLUCIÓN De acuerdo con las ecuaciones 40-8, la diferencia de energía entre dos picos está dada por

$$\Delta E' = \Delta E_{\ell+1} - \Delta E_\ell = \frac{\hbar^2}{I}.$$

Así,

$$I = \frac{\hbar^2}{\Delta E'} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}/2\pi)^2}{(0.0025\,\text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} = 2.8 \times 10^{-47}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

NOTA Para tener una idea de lo que significa este número, escriba $I = \mu r^2$ (ecuación 40-4), donde μ es la masa reducida (ejemplo 40-4); luego, se calcula μ:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1.0\,\text{u})(35\,\text{u})}{36\,\text{u}}(1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg/u}) = 1.6 \times 10^{-27}\,\text{kg};$$

la longitud de enlace está dada por (ecuación 40-4)

$$r = \left(\frac{I}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2.8 \times 10^{-47}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}{1.6 \times 10^{-27}\,\text{kg}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.3 \times 10^{-10}\,\text{m},$$

que es el orden de magnitud esperado para una longitud de enlace.

40–5 Enlaces en sólidos

La mecánica cuántica es una gran herramienta para comprender la estructura de los sólidos. Este campo activo de investigación en la actualidad se llama **física de estado sólido** o **física de materia condensada** para incluir también a los líquidos. El resto de este capítulo se dedica a este tema, y comenzaremos con un breve vistazo a la estructura de los sólidos y los enlaces que los mantienen unidos.

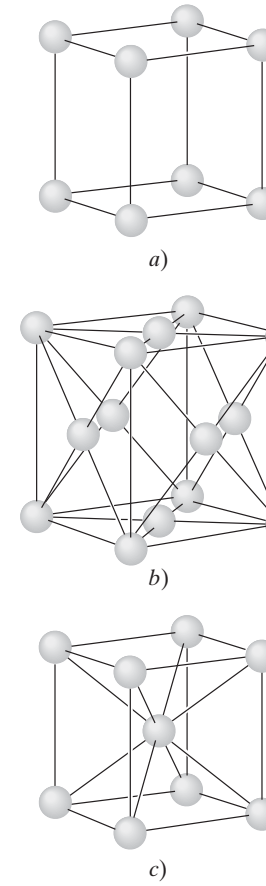
Aunque algunos materiales sólidos son *amorfos* en estructura, en tanto que los átomos y las moléculas no presentan orden de largo alcance, el texto se enfocará en la gran clase de sustancias *cristalinas* cuyos átomos, iones o moléculas por lo general forman un arreglo ordenado conocido como **red**. La figura 40-23 muestra tres posibles ordenamientos de átomos en un cristal: cúbico simple, cúbico centrado en las caras y cúbico centrado en el cuerpo. El cristal NaCl es cúbico centrado en las caras (véase la figura 40-24), con un ion Na^+ o un ion Cl^- en cada punto de la red (es decir, considerando el Na y el Cl por separado).

Las moléculas de un sólido se mantienen unidas en varias formas. La más común es la de los enlaces *covalentes* (como entre los átomos de carbono del cristal de diamante) o los enlaces *iónicos* (como en un cristal de NaCl). Con frecuencia los enlaces son parcialmente covalentes y parcialmente iónicos. El estudio de estos enlaces para moléculas, que se realizó antes en este capítulo, se aplica igualmente bien a los sólidos.

Observe por un momento el cristal de NaCl de la figura 40-24. Cada ion de Na^+ siente un potencial de Coulomb de atracción debido a cada uno de los seis iones de Cl^- que son los "vecinos más cercanos" que lo rodean. Advierta que un Na^+ no "pertenece" exclusivamente a un Cl^-, así que no se debe pensar en los sólidos iónicos como constituidos por moléculas individuales. Cada Na^+ también siente un potencial de Coulomb repulsivo que se debe a otros iones Na^+, aunque éste es más débil pues los otros iones de Na^+ están más alejados. Por consiguiente, se espera un potencial de atracción neto

$$U = -\alpha \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

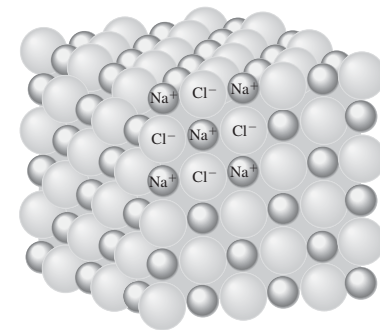
El factor α se llama *constante de Madelung*. Si cada Na^+ estuviera rodeado sólo por los seis iones Cl^-, α sería 6, pero la influencia de todos los otros iones lo reduce a un valor $\alpha = 1.75$ para el cristal NaCl. El potencial también debe incluir un término que represente la fuerza de repulsión cuando las funciones de onda de los niveles y subniveles



a) *b)* *c)*

FIGURA 40–23 Ordenamiento de átomos en *a*) un cristal cúbico simple, *b*) un cristal cúbico centrado en las caras (observe el átomo en el centro de cada cara) y *c*) un cristal cúbico centrado en el cuerpo. Cada uno muestra la relación de los enlaces. Cada una de estas "celdas" se repite en tres dimensiones en los bordes del cristal macroscópico.

FIGURA 40–24 Diagrama de un cristal NaCl, que revela el "empaquetado" de los átomos.



internos se traslapan, y tiene la forma $U = B/r^m$, donde m es un entero pequeño. La suma de estos dos términos sugiere una energía potencial

$$U = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} + \frac{B}{r^m}, \tag{40–9}$$

que tiene la misma forma que la ecuación 40-1 para moléculas (sección 40-2). Es posible demostrar (problema 25) que, a la distancia de equilibrio r_0,

$$U = U_0 = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Esta U_0 se conoce como la *energía de cohesión*; es una especie de "energía de enlace", la energía (por ion) necesaria para dividir el sólido en iones separados, uno por uno.

Un tipo diferente de enlace se presenta en los metales. Los átomos metálicos tienen electrones externos que se mantienen relativamente holgados. Las teorías actuales de **enlace metálico** proponen que, en un sólido metálico, estos electrones externos vagan de manera más bien libre entre todos los átomos metálicos que, sin sus electrones externos, actuarían como iones positivos. La atracción electrostática entre los iones metálicos y este "gas" electrónico negativo es lo que se cree que, al menos en parte, mantiene unido al sólido. La energía de enlace de los enlaces metálicos por lo general es de 1 a 3 eV, un poco más débil que los enlaces iónicos o covalentes (de 5 a 10 eV en sólidos). Los "electrones libres", de acuerdo con esta teoría, son responsables de la alta conductividad eléctrica y térmica de los metales (véanse las secciones 40-6 y 40-7). Esta teoría también explica bastante bien el brillo de las superficies metálicas lisas: los electrones están libres y pueden vibrar a cualquier frecuencia, de manera que, cuando luz de un rango de frecuencias incide sobre un metal, los electrones vibran en respuesta y vuelven a emitir luz de estas mismas frecuencias. Así, la luz reflejada consistirá principalmente en las mismas frecuencias que la luz incidente. Compare esto con los materiales no metálicos que tienen un color distintivo: los electrones atómicos sólo existen en ciertos estados de energía y, cuando sobre ellos incide luz blanca, los átomos absorben a ciertas frecuencias mientras reflejan otras frecuencias que constituyen el color que se ve.

He aquí un breve resumen de importantes enlaces fuertes:

- iónico: un átomo roba un electrón de otro átomo;
- covalente: los átomos dentro de una sola molécula comparten electrones;
- metálico: todos los átomos en el metal comparten los electrones.

Los átomos o las moléculas de algunos materiales, como los gases nobles, sólo pueden formar *enlaces débiles* unos con otros. Como se vio en la sección 40-3, los enlaces débiles tienen energías de enlace muy bajas y no se esperaría que los átomos se mantuvieran unidos como líquidos o sólidos a temperatura ambiente. Los gases nobles sólo se condensan a temperaturas muy bajas, donde la energía cinética atómica es pequeña y la atracción débil entonces puede mantener unidos a los átomos.

40–6 Teoría de los electrones libres en los metales; energía de Fermi

Examinemos con más detenimiento la teoría de electrones libres en los metales mencionada en la sección anterior. Imagine a los electrones atrapados dentro del metal como si estuvieran en un pozo de potencial: dentro del metal, la energía potencial es cero, pero en los bordes del metal hay paredes de alto potencial. Como muy pocos electrones salen del metal a temperatura ambiente, es posible imaginar las paredes como infinitamente altas (como en la sección 38-8). A temperaturas más altas, los electrones sí salen del metal (se sabe que ocurre emisión termoiónica, sección 23-9), así que se debe reconocer que el pozo es de profundidad finita. En este modelo simple, los electrones están atrapados dentro del metal, pero tienen libertad de moverse dentro del pozo cuyo tamaño es macroscópico, el tamaño del trozo de metal. La energía estará cuantizada, pero la separación entre niveles de energía será muy pequeña (véase la ecuación 38-13) porque el ancho del pozo de potencial ℓ es muy grande. De hecho, para un cubo de 1 cm de lado, el número de estados con energía entre 5.0 y 5.5 eV, por ejemplo, es del orden de 10^{22} (véase el ejemplo 40-9).

Para lidiar con un número tan grande de estados, que están tan cercanos entre sí como para parecer continuos, es necesario usar métodos estadísticos. Se define una cantidad conocida como **densidad de estados**, $g(E)$, cuyo significado es similar a la distribución de Maxwell, ecuación 18-6 (véase la sección 18-2). Esto es, la cantidad $g(E)\,dE$ representa el número de estados por unidad de volumen que tienen energía entre E y $E + dE$. Un cálculo cuidadoso (véase el problema 41), que debe considerar el pozo de potencial como tridimensional, demuestra que

$$g(E) = \frac{8\sqrt{2}\,\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \qquad \textbf{(40–10)}$$

donde m es la masa del electrón. Esta función se grafica en la figura 40-25.

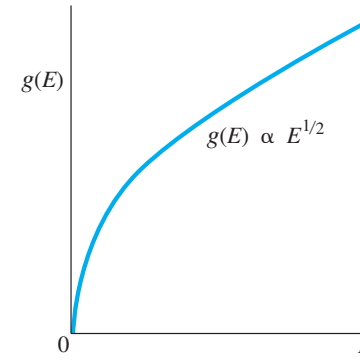


FIGURA 40–25 Densidad de estados $g(E)$ como función de la energía E (ecuación 40-10).

EJEMPLO 40–9 **ESTIMACIÓN** **Estados electrónicos en el cobre.** Estime el número de estados en el intervalo de 5.0 a 5.5 eV disponible para los electrones en un cubo de cobre de 1.0 cm.

PLANTEAMIENTO Puesto que $g(E)$ es el número de estados por unidad de volumen por unidad de intervalo de energía, el número N de estados es aproximadamente (es aproximado porque ΔE no es pequeño)

$$N \approx g(E)V\,\Delta E,$$

donde el volumen $V = 1.0\,\text{cm}^3 = 1.0 \times 10^{-6}\,\text{m}^3$ y $\Delta E = 0.50\,\text{eV}$.

SOLUCIÓN Evalúe $g(E)$ en 5.25 eV y encuentre (ecuación 40-10):

$$N \approx g(E)V\,\Delta E = \frac{8\sqrt{2}\,\pi(9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg})^{\frac{3}{2}}}{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^3}\sqrt{(5.25\,\text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} \times (1.0 \times 10^{-6}\,\text{m}^3)(0.50\,\text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})$$

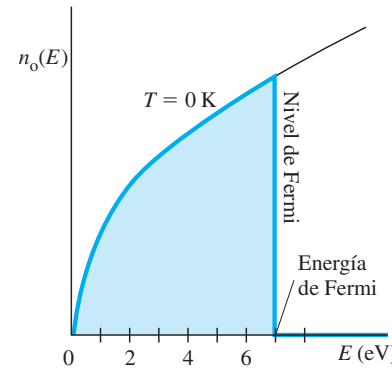
$$\approx 8 \times 10^{21}$$

estados en 1.0 cm^3. Advierta que el tipo de metal no entró en el cálculo.

La ecuación 40-10 da la densidad de estados. Ahora debe preguntarse: ¿cómo se pueblan realmente los estados disponibles en un gas de electrones? Considere primero la situación con cero absoluto, $T = 0$ K. Para un gas ideal clásico, todas las partículas estarían en el estado más bajo, con energía cinética cero $(= \frac{3}{2}kT = 0)$. Pero la situación es enormemente diferente para un gas de electrones porque los electrones obedecen el principio de exclusión. Los electrones no obedecen la estadística clásica, sino más bien una estadística cuántica llamada **estadística de Fermi-Dirac**[†] que toma en cuenta el principio de exclusión. Todas las partículas que tienen espín $\frac{1}{2}$ (u otro espín de medio entero: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etcétera), como electrones, protones y neutrones, obedecen la estadística de Fermi-Dirac y se conocen como **fermiones**.[‡] El gas de electrones en un metal con frecuencia se llama **gas de Fermi**. De acuerdo con el principio de exclusión, no hay dos electrones en el metal que tengan el mismo conjunto de números cuánticos. Por lo tanto, en cada uno de los estados del pozo de potencial, puede haber cuando mucho dos electrones: uno con espín hacia arriba $(m_s = +\frac{1}{2})$ y uno con espín hacia abajo $(m_s = -\frac{1}{2})$. (Este factor de 2 ya se incluyó en la ecuación 40-10). Por lo tanto, a $T = 0$ K, los posibles niveles de energía estarán llenos, dos electrones cada uno, hasta un nivel máximo llamado **nivel de Fermi**. Esto se ilustra en la figura 40-26, donde el eje vertical se denota como $n_0(E)$ para "densidad de estados ocupados". La energía del estado en el nivel de Fermi se llama **energía de Fermi**, E_F. Para determinar E_F, se integra la ecuación 40-10 desde $E = 0$ hasta $E = E_F$ (todos los estados hasta E_F están llenos a $T = 0$ K):

$$\frac{N}{V} = \int_0^{E_F} g(E)\,dE, \qquad \textbf{(40–11)}$$

FIGURA 40–26 A $T = 0$ K, todos los estados hasta la energía E_F, llamada energía de Fermi, están llenos.



[†]Desarrollada de manera independiente por Enrico Fermi (figuras 41-8, 38-2, 37-10) a principios de 1926, y por P. A. M. Dirac pocos meses después.

[‡]Las partículas con espín entero (0, 1, 2, etcétera), como los fotones, obedecen la estadística de *Bose-Einstein* y se llaman *bosones*, como se mencionó en la sección 39-4.

donde N/V es el número de electrones de conducción por unidad de volumen en el metal. Entonces, al despejar E_F, el resultado (véase el ejemplo 40-10 más adelante) es

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad \textbf{(40–12)}$$

La energía promedio en esta distribución (véase el problema 35) es

$$\overline{E} = \tfrac{3}{5}E_F. \qquad \textbf{(40–13)}$$

Para el cobre, $E_F = 7.0$ eV (véase el ejemplo 40-10) y $\overline{E} = 4.2$ eV. Esto es mucho mayor que la energía del movimiento térmico a temperatura ambiente $\left(\frac{3}{2}kT \approx 0.04\text{ eV}\right)$. Claramente, no todo movimiento cesa a cero absoluto.

Por ende, a $T = 0$, todos los estados con energía por debajo de E_F están ocupados, y todos los estados por arriba de E_F están vacíos. ¿Qué ocurre para $T > 0$? Se espera que (al menos) algunos de los electrones aumenten en energía a causa del movimiento térmico. De manera clásica, la distribución de estados ocupados estaría dada por el factor de Boltzmann, $e^{-E/kT}$ (véanse las ecuaciones 39-16). Pero para el gas de electrones, un sistema mecánico-cuántico que obedece el principio de exclusión, la probabilidad de que un determinado estado de energía E se encuentre ocupado está dada por la **función de probabilidad de Fermi-Dirac** (o **factor de Fermi**):

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}, \qquad \textbf{(40–14)}$$

donde E_F es la energía de Fermi. Esta función se grafica en la figura 40-27 para dos temperaturas, $T = 0$ K y $T = 1200$ K (justo abajo del punto de fusión del cobre). A $T = 0$ (o conforme T tiende a cero) el factor $e^{(E-E_F)/kT}$ en la ecuación 40-14 es cero si $E < E_F$, y es ∞ si $E > E_F$. Por lo tanto,

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E < E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases} \quad \text{en} \quad T = 0.$$

Esto es lo que se grafica en negro en la figura 40-27 y es congruente con la figura 40-26: todos los estados hasta el nivel de Fermi están ocupados [probabilidad $f(E) = 1$] y todos los estados por arriba están desocupados. Para $T = 1200$ K, el factor de Fermi cambia sólo un poco, lo que se indica en la figura 40-27 como la curva naranja. Note que, a cualquier temperatura T, cuando $E = E_F$, entonces la ecuación 40-14 da $f(E) = 0.50$, lo que significa que el estado en $E = E_F$ tiene un 50% de probabilidad de estar ocupado. Para ver cómo $f(E)$ afecta la distribución real de electrones en los estados de energía, se debe ponderar la densidad de los posibles estados, $g(E)$, por la probabilidad de que esos estados estén ocupados, $f(E)$. El producto de estas dos funciones da la **densidad de estados ocupados**,

$$n_o(E) = g(E)f(E) = \frac{8\sqrt{2}\,\pi m^{3/2}}{h^3}\frac{E^{1/2}}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}. \qquad \textbf{(40–15)}$$

Así, $n_o(E)dE$ representa el número de electrones por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$ en equilibrio térmico a temperatura T. Esto se grafica en la figura 40-28 para $T = 1200$ K, una temperatura a la cual un metal se encontraría tan caliente que brillaría. Inmediatamente se ve que la distribución difiere muy poco de la de $T = 0$. También se ve que los cambios que ocurren se concentran en torno al nivel de Fermi. Algunos electrones ligeramente abajo del nivel de Fermi se mueven a estados de energía ligeramente arriba de él. La energía promedio de los electrones aumenta sólo muy levemente cuando la temperatura aumenta de $T = 0$ K a $T = 1200$ K. Esto es muy diferente del comportamiento de un gas ideal, para el cual la energía cinética aumenta directamente con T. No obstante, este comportamiento se entiende fácilmente del modo siguiente. La energía del movimiento térmico a $T = 1200$ K es aproximadamente $\frac{3}{2}kT \approx 0.1$ eV. El nivel de Fermi, por otra parte, está en el orden de varios eV: en el caso del cobre, es $E_F \approx 7.0$ eV. Un electrón a $T = 1200$ K puede tener 7 eV de energía, pero puede adquirir cuando mucho sólo unas cuantas veces 0.1 eV de energía mediante una colisión (térmica) con la red. Sólo electrones muy cerca del nivel de Fermi encontrarían estados vacantes suficientemente cercanos para hacer tal transición. En esencia, ninguno de los electrones podría aumentar en energía, por ejemplo, en 3 eV, de manera que los electrones mucho más abajo en el gas de electrones no resultan afectados. Sólo los electrones cerca de la parte superior de la distribución de energía pueden excitarse térmicamente hacia estados superiores. Y su nueva energía está en promedio sólo ligeramente más arriba que sus antiguas energías.

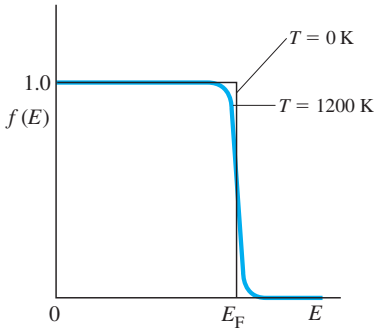


FIGURA 40–27 Función de probabilidad de Fermi-Dirac para dos temperaturas, $T = 0$ K (línea negra) y $T = 1200$ K (curva naranja). Para $f(E) = 1$, un estado con energía E, desde luego, está ocupado. Para $f(E) = 0.5$, que ocurre a $E = E_F$, el estado con E_F tiene un 50% de probabilidad de estar ocupado.

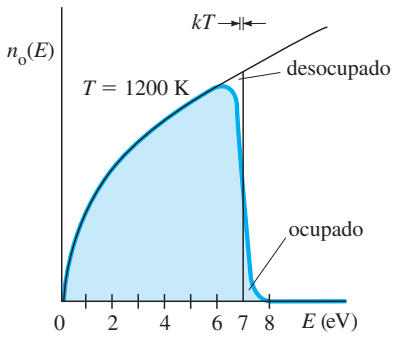


FIGURA 40–28 Densidad de estados ocupados para el gas de electrones en el cobre. El ancho kT que se muestra arriba de la gráfica representa energía térmica a $T = 1200$ K.

EJERCICIO B Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 1071, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO 40–10 **El nivel de Fermi.** Para el cobre metálico, determine *a*) la energía de Fermi, *b*) la energía promedio de los electrones y *c*) la rapidez de los electrones en el nivel de Fermi (lo que se conoce como *rapidez de Fermi*).

PLANTEAMIENTO Primero se deduce la ecuación 40-12, al combinar las ecuaciones 40-10 y 40-12:

$$\frac{N}{V} = \frac{8\sqrt{2}\,\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F} E^{1/2}\,dE = \frac{8\sqrt{2}\,\pi m^{3/2}}{h^3}\frac{2}{3}E_F^{3/2}.$$

Al despejar E_F se obtiene

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

[advierta que: $(2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 2$], y esto es la ecuación 40-12. En el ejemplo 25-14 se calculó N/V, el número de electrones de conducción por unidad de volumen en el cobre, como $N/V = 8.4 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$.

SOLUCIÓN *a*) Por lo tanto, la energía de Fermi para el cobre es

$$E_F = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})}\left[\frac{3(8.4 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})}{\pi}\right]^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 7.0\ \text{eV}.$$

b) De acuerdo con la ecuación 40-13,

$$\overline{E} = \tfrac{3}{5}E_F = 4.2\ \text{eV}.$$

c) En el modelo, se tomó $U = 0$ dentro del metal (suponiendo un pozo de potencial infinito tridimensional, sección 38-8, ecuación 40-10 y problema 41). Entonces E sólo es energía cinética $= \frac{1}{2}mv^2$. Por lo tanto, en el nivel de Fermi, la rapidez de Fermi es

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \sqrt{\frac{2(7.0\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}{9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.6 \times 10^6\ \text{m/s},$$

una rapidez muy alta. La temperatura de un gas clásico tendría que ser extremadamente alta para producir una rapidez promedio de partícula de esa magnitud.

EJEMPLO 40–11 **Cálculo clásico incorrecto.** Veamos qué resultado se obtiene si los electrones se tratan como un gas ideal clásico. Esto es, estime la energía cinética promedio de los electrones a temperatura ambiente empleando la teoría cinética de los gases, capítulo 18.

PLANTEAMIENTO La energía cinética promedio de las partículas en un gas ideal está dada por la ecuación 18-4, del capítulo 18, como

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}kT,$$

donde k es la constante de Boltzmann y $T \approx 300$ K.

SOLUCIÓN El modelo de gas ideal da

$$\overline{K} = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})\left(\frac{1}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}}\right) = 0.039\ \text{eV}.$$

Este resultado está lejos de ser correcto. Está corrido por un factor de 100: el ejemplo 40-10 dio como resultado 4.2 eV. El modelo de gas ideal no funciona para electrones que obedecen el principio de exclusión. De hecho, aquí se ve cuán importante y poderoso es el principio de exclusión.

EJERCICIO C Determine la energía de Fermi para el oro (densidad = 19,300 kg/m^3). *a*) 5.5 eV, *b*) 6.2 eV, *c*) 7.2 eV, *d*) 8.1 eV, *e*) 8.4 eV.

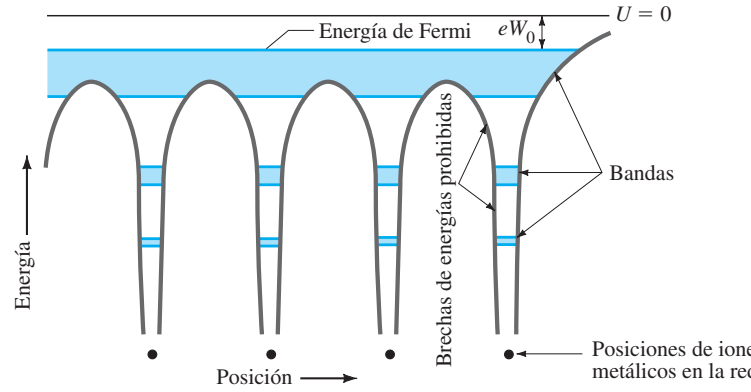


FIGURA 40–29 Energía potencial para un electrón en un cristal metálico, con pozos de potencial profundos en la cercanía de cada ion en la red del cristal.

El modelo sencillo de un gas de electrones que se presentó aquí ofrece una buena explicación para las propiedades eléctricas y térmicas de los conductores, pero no explica por qué algunos materiales son buenos conductores y otros son buenos aislantes. Para dar una explicación, el modelo de electrones dentro de un metal que se mueven en un pozo de potencial uniforme necesita refinarse para incluir el efecto de la red. La figura 40-29 muestra un potencial "periódico" que toma en cuenta la atracción de los electrones para cada ion atómico en la red. Aquí se tomó $U = 0$ para un electrón libre del metal; así que, dentro del metal, las energías de los electrones son menores que cero (tal como para moléculas o para el átomo H en el que el estado fundamental tiene $E = -13.6$ eV). La cantidad eW_0 representa la energía mínima para remover un electrón del metal, donde W_0 es la *función trabajo* (véase la sección 37-2). El resultado crucial de poner un potencial periódico (que se aproxima más fácilmente con pozos cuadrados estrechos) en la ecuación de Schrödinger es que los estados de energía permitidos se dividen en *bandas*, con brechas de energías prohibidas entre ellos. Sólo los electrones en la banda más alta, cerca del nivel de Fermi, son capaces de moverse libremente dentro del cristal metálico. En la siguiente sección se verá físicamente por qué hay bandas y cómo éstas explican las propiedades de conductores, aislantes y semiconductores.

40–7 Teoría de bandas en sólidos

En la sección 40-1 se vio que, cuando dos átomos de hidrógeno se aproximan uno al otro, las funciones de onda se traslapan, y los dos estados 1*s* (uno para cada átomo) se dividen en dos estados de diferente energía. (Como se vio, sólo uno de esos estados, $S = 0$, tiene energía suficientemente baja para enlazar una molécula de H_2). La figura 40-30a ilustra esta situación para los estados 1*s* y 2*s* de dos átomos: conforme los dos átomos se acercan más (hacia la izquierda en la figura 40-30a), los estados 1*s* y 2*s* se dividen en dos niveles. Si seis átomos se acercan, como en la figura 40-30b, cada uno de los estados se divide en seis niveles. Si un gran número de átomos se unen para formar un sólido, entonces cada uno de los niveles atómicos originales se convierte en una **banda**, como se muestra en la figura 40-30c. Los niveles de energía están tan cercanos en cada banda que, en esencia, parecen continuos. Por esa razón, el espectro de los sólidos que se calientan (sección 37-1) parece continuo. (Véase también la figura 40-15 y su explicación al principio de la sección 40-4).

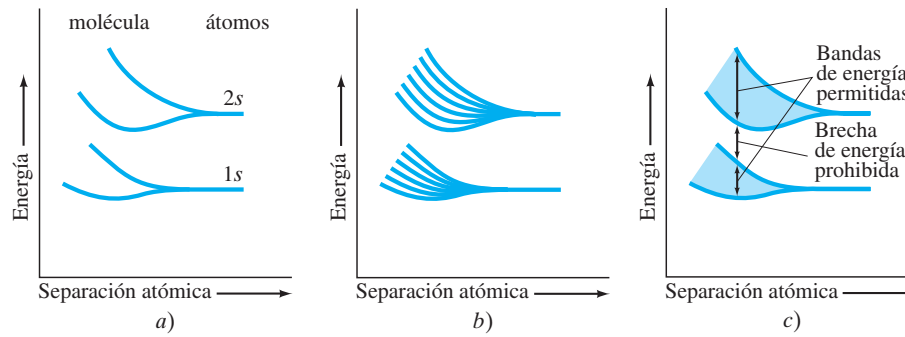


FIGURA 40–30 La división de los niveles de energía atómicos 1*s* y 2*s* conforme *a*) dos átomos se aproximan uno al otro (la separación atómica disminuye hacia la izquierda en la gráfica), *b*) lo mismo para seis átomos y *c*) para muchos átomos cuando se unen para formar un sólido.

El aspecto crucial de un buen **conductor** es que la banda de energía más alta que contiene electrones sólo está parcialmente llena. Considere el metal sodio, por ejemplo, cuyas bandas de energía se representan en la figura 40-31. Las bandas 1*s*, 2*s* y 2*p* están llenas (justo como en un átomo de sodio) y no son de interés. Sin embargo, la banda 3*s* sólo está medio llena. Para ver por qué, recuerde que el principio de exclusión establece que, en un átomo, sólo dos electrones pueden estar en el estado 3*s*, uno con espín hacia arriba y uno con espín hacia abajo. Estos dos estados tienen energía ligeramente diferente. Para un sólido que consiste en N átomos, la banda 3*s* contendrá $2N$ posibles estados de energía. Un átomo de sodio tiene un solo electrón 3*s*, así que, en una muestra de metal sodio que contenga N átomos, habrá N electrones en la banda 3*s*, y N estados desocupados. Cuando a través del metal se aplica una diferencia de potencial, los electrones pueden responder al acelerar y aumentar sus energías, ya que están disponibles muchos estados desocupados de energía ligeramente más elevada. Por lo tanto, una corriente fluye con facilidad y el sodio es un buen conductor. La característica de todo buen conductor es que la banda de energía más alta sólo está parcialmente llena, o dos bandas se traslapan de manera que están disponibles estados desocupados. Un ejemplo de lo último es el magnesio, que tiene dos electrones 3*s*, de manera que su banda 3*s* está llena. Pero la banda no llena 3*p* se traslapa con la banda 3*s* en energía, así que habrá muchos estados disponibles para que los electrones se muden. Por consiguiente, el magnesio también es un buen conductor.

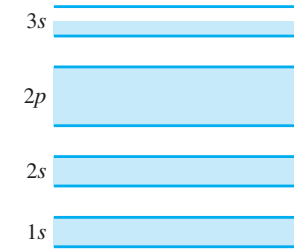


FIGURA 40–31 Bandas de energía para el sodio (Na).

Por otra parte, en un material que es buen **aislante**, la banda más alta que contiene electrones, llamada **banda de valencia**, está completamente llena. La siguiente banda más alta de energía, llamada **banda de conducción**, está separada de la banda de valencia por una **brecha de energía** (o **brecha de banda**) "prohibida", E_g, por lo general de 5 a 10 eV. De manera que a temperatura ambiente (300 K), donde las energías térmicas (esto es, la energía cinética promedio; véase el capítulo 18) son del orden de $\frac{3}{2}kT \approx 0.04$ eV, casi ningún electrón puede adquirir los 5 eV necesarios para llegar a la banda de conducción. Cuando a través del material se aplica una diferencia de potencial, ningún estado disponible es accesible a los electrones, y no fluye corriente. En tal caso, el material es un buen aislante.

La figura 40-32 compara las bandas de energía relevantes *a*) para conductores, *b*) para aislantes y *c*) para la importante clase de materiales conocidos como **semiconductores**. Las bandas para un semiconductor puro (o **intrínseco**), como silicio o germanio, son como las de un aislante, excepto que la banda de conducción no llena está separada de la banda de valencia llena por una brecha de energía prohibida mucho más pequeña, E_g, por lo general del orden de 1 eV. A temperatura ambiente, algunos electrones adquieren suficiente energía térmica para llegar a la banda de conducción, y por lo tanto puede fluir una corriente muy pequeña cuando se aplica un voltaje. A temperaturas más altas, más electrones tienen suficiente energía para saltar la brecha. Con frecuencia, este efecto logra más que compensar los efectos de colisiones más frecuentes debidas a un desorden creciente a temperatura más alta, de manera que la resistividad de los semiconductores *disminuye* con temperatura creciente (véase la tabla 25-1). Pero ésta no es toda la historia de la conducción en semiconductores. Cuando a un semiconductor se le aplica una diferencia de potencial, los pocos electrones en la banda de conducción se mueven hacia el electrodo positivo. Los electrones en la banda de valencia intentan hacer lo mismo, y algunos pueden hacerlo porque hay un pequeño número de estados desocupados que quedan vacíos por los electrones que llegan a la banda de conducción. Tales estados electrónicos no llenos se llaman **huecos**. Cada electrón en la banda de valencia que llena un hueco de esta forma conforme se mueve hacia el electrodo positivo deja tras de sí su propio hueco, de manera que los huecos migran hacia el electrodo negativo. Conforme los electrones tienden a acumularse en un lado del material, los huecos tienden a acumularse en el lado opuesto. En la siguiente sección se observará este fenómeno con más detalle.

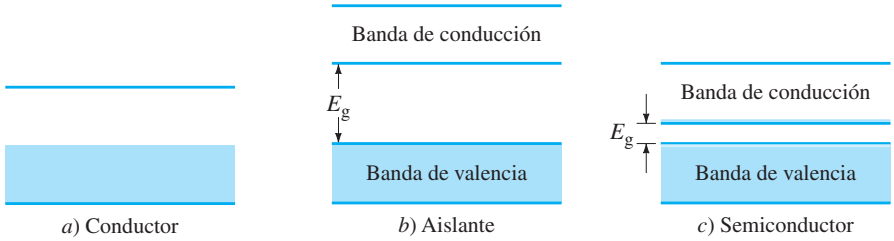


FIGURA 40–32 Bandas de energía para *a*) un conductor, *b*) un aislante, que tiene una brecha de energía prohibida grande E_g, y *c*) un semiconductor, que tiene una brecha de energía prohibida pequeña E_g. Los sombreados representan estados ocupados. El sombreado pálido en *c*) representa electrones que pueden pasar desde la parte superior de la banda de valencia hacia la parte inferior de la banda de conducción debido a agitación térmica a temperatura ambiente (exagerado).

EJEMPLO 40–12 **Cálculo de la brecha de energía prohibida.** Se encontró que la conductividad de cierto semiconductor aumenta cuando luz con longitud de onda de 345 nm o menor incide sobre él, lo que sugiere que los electrones pasan de la banda de valencia hacia la banda de conducción. ¿Cuál es la brecha de energía prohibida, E_g, de este semiconductor?

PLANTEAMIENTO El fotón con longitud de onda más larga (energía más baja) que causa un aumento en la conductividad tiene $\lambda = 345$ nm, y su energía ($= hf$) es igual a la brecha de energía prohibida.

SOLUCIÓN La brecha de energía prohibida es igual a la energía de un fotón $\lambda = 345$ nm:

$$E_g = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{(345 \times 10^{-9}\,\text{m})(1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} = 3.6\,\text{eV}.$$

EJEMPLO 40–13 **ESTIMACIÓN** **Electrones libres en semiconductores y aislantes.** Con base en la función de probabilidad de Fermi-Dirac, ecuación 40-14, estime el orden de magnitud de los números de electrones libres en la banda de conducción de un sólido que contiene 10^{21} átomos, suponiendo que el sólido está a temperatura ambiente ($T = 300$ K) y es *a*) un semiconductor con $E_g \approx 1.1$ eV, *b*) un aislante con $E_g \approx 5$ eV. Compare con un conductor.

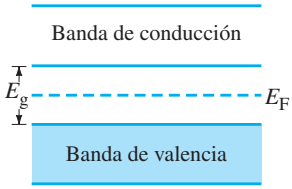


FIGURA 40–33 La energía de Fermi está a medio camino entre la banda de valencia y la banda de conducción.

PLANTEAMIENTO A $T = 0$, todos los estados por arriba de la energía de Fermi E_F están vacíos, y todos los que están debajo están llenos. De manera que para los semiconductores y aislantes se puede considerar E_F como aproximadamente a la mitad del camino entre las bandas de valencia y de conducción, figura 40-33, y esto no cambia significativamente conforme se pasa a temperatura ambiente. Por ende, se utiliza la ecuación 40-14 para encontrar la fracción de electrones en la banda de conducción a temperatura ambiente para los dos casos.

SOLUCIÓN *a*) Para el semiconductor, la brecha $E_g \approx 1.1$ eV, de manera que $E - E_F \approx 0.55$ eV para los estados más bajos en la banda de conducción. Puesto que a temperatura ambiente se tiene $kT \approx 0.026$ eV, entonces $(E - E_F)/kT \approx 0.55\,\text{eV}/0.026\,\text{eV} \approx 21$ y

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \approx \frac{1}{e^{21}} \approx 10^{-9}.$$

Por lo tanto, aproximadamente 1 átomo en 10^9 aporta un electrón a la conductividad. *b*) Para el aislante con $E - E_F \approx 5.0\,\text{eV} - \frac{1}{2}(5.0\,\text{eV}) = 2.5$ eV, se tiene

$$f(E) \approx \frac{1}{e^{2.5/0.026} + 1} \approx \frac{1}{e^{96}} \approx 10^{-42}.$$

Por lo tanto, en una muestra ordinaria que contiene 10^{21} átomos, no habría electrones libres en un aislante ($10^{21} \times 10^{-42} = 10^{-21}$), aproximadamente 10^{12} ($10^{21} \times 10^{-9}$) electrones libres en un semiconductor, y alrededor de 10^{21} electrones libres en un buen conductor.

FÍSICA APLICADA
Transparencia

EJEMPLO CONCEPTUAL 40–14 **¿Cuál es transparente?** La brecha de energía prohibida para el silicio es de 1.14 eV a temperatura ambiente, mientras que para el sulfuro de cinc (ZnS) es de 3.6 eV. ¿Cuál de éstos es opaco a la luz visible y cuál es transparente?

RESPUESTA Los fotones de luz visible abarcan energías que van aproximadamente de 1.8 eV a 3.1 eV ($E = hf = hc/\lambda$, donde $\lambda = 400$ nm a 700 nm y $1\,\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}$ J). Los electrones en un material absorben luz. La brecha de energía prohibida del silicio es suficientemente pequeña para absorber estos fotones, y por ende bombea electrones hacia la banda de conducción, de manera que el silicio es opaco. Por otra parte, la brecha de energía prohibida del sulfuro de cinc es tan grande que ningún fotón de luz visible podría absorberse; los fotones pasarían directamente a través del material que, por consiguiente, sería transparente.

40–8 Semiconductores y dopado

Casi todos los dispositivos electrónicos actuales usan semiconductores. Los más comunes son el silicio (Si) y el germanio (Ge). Un átomo de silicio o germanio tiene cuatro electrones externos que actúan para mantener a los átomos en la estructura cristalina regular, que se muestra de manera esquemática en la figura 40-34a. El germanio y el silicio adquieren propiedades útiles para la electrónica cuando una pequeña cantidad de impurezas se introducen en la estructura cristalina (quizás 1 parte en 10^6 o 10^7). A esto se le llama **dopar** el semiconductor. Es posible hacer dos tipos de semiconductor dopado, dependiendo del tipo de impureza que se utilice. Si la impureza es un elemento cuyos átomos tienen cinco electrones exteriores, como el arsénico, se presenta la situación que se ilustra en la figura 40-34b, con los átomos de arsénico manteniendo las posiciones en la red cristalina donde normalmente estarían átomos de silicio. Sólo cuatro electrones de arsénico encajan en la estructura enlazada. El quinto no encaja y se puede mover con relativa libertad, un poco como los electrones en un conductor. Debido a este pequeño número de electrones adicionales, un semiconductor dopado se vuelve ligeramente conductor. La densidad de los electrones de conducción en un semiconductor intrínseco (no dopado) a temperatura ambiente es muy baja, generalmente menor que 1 por 10^9 átomos. Con una concentración de impurezas de 1 en 10^6 o 10^7 cuando está dopado, la conductividad será mucho mayor y se puede controlar con gran precisión. Un cristal de silicio dopado con arsénico se llama **semiconductor tipo *n***, porque cargas *negativas* (electrones) portan la corriente eléctrica.

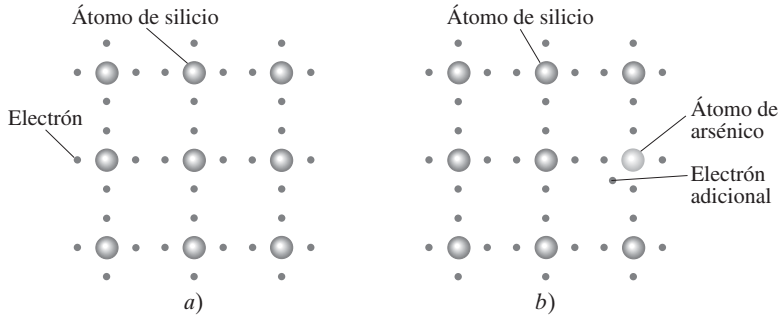


FIGURA 40–34 Representación bidimensional de un cristal de silicio. *a*) Cuatro electrones (externos) rodean a cada átomo de silicio. *b*) Cristal de silicio dopado con un pequeño porcentaje de átomos de arsénico: el electrón adicional no encaja en la red cristalina y, por lo tanto, tiene libertad para moverse. Éste es un semiconductor tipo *n*.

En un **semiconductor tipo *p***, un pequeño porcentaje de átomos de los semiconductores se sustituyen por átomos con tres electrones exteriores, como el galio. Como se muestra en la figura 40-35a, hay un "hueco" en la estructura de la red cerca de un átomo de galio, pues sólo tiene tres electrones exteriores. Los electrones de los átomos de silicio cercanos pueden saltar hacia este hueco y llenarlo. Pero esto deja un hueco donde ese electrón estuvo anteriormente, figura 40-35b. La gran mayoría de los átomos son de silicio, de manera que los huecos casi siempre están junto a un átomo de silicio. Como los átomos de silicio requieren cuatro electrones externos para ser neutros, esto significa que hay una carga positiva neta en el hueco. Siempre que un electrón se mueve para llenar un hueco, entonces el hueco positivo está en la posición previa de ese electrón. Entonces otro electrón puede llenar ese hueco, y por lo tanto el hueco se mueve hacia una nueva ubicación; y así sucesivamente. Este tipo de semiconductor se llama *tipo p* porque los huecos positivos son los que parecen conducir la corriente eléctrica. Sin embargo, note que ni los semiconductores *tipo p* ni los semiconductores *tipo n* tienen *carga neta* en ellos.

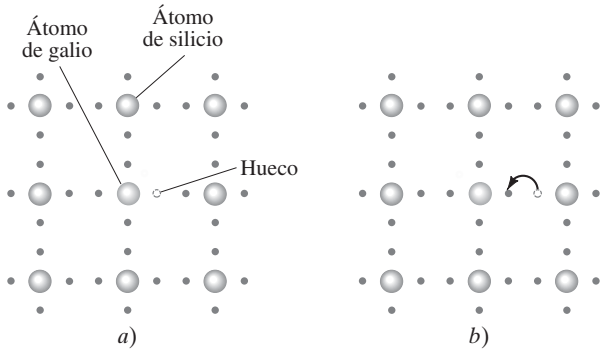


FIGURA 40–35 Un semiconductor tipo *p*, silicio dopado con galio. *a*) El galio sólo tiene tres electrones exteriores, así que hay una mancha vacía, o *hueco*, en la estructura. *b*) Los electrones de los átomos de silicio pueden saltar hacia el hueco y llenarlo. Como resultado, el hueco se mueve hacia una nueva ubicación (hacia la derecha en esta figura), hacia donde el electrón solía estar.

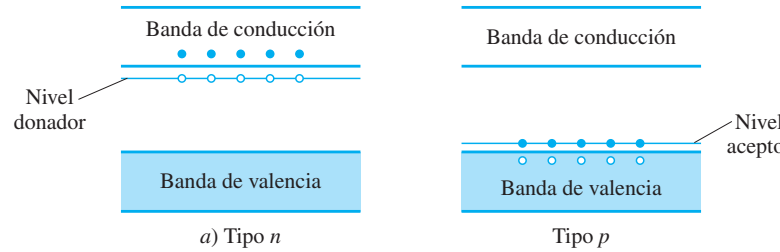


FIGURA 40–36 Niveles de energía de impureza en semiconductores dopados.

De acuerdo con la teoría de bandas (sección 40-7), en un semiconductor dopado la impureza ofrece estados de energía adicionales entre las bandas, como se aprecia en la figura 40-36. En un semiconductor tipo n, el nivel de energía de la impureza se encuentra justo debajo de la banda de conducción, figura 40-36a. Los electrones en este nivel de energía sólo necesitan alrededor de 0.05 eV en el Si (incluso menos en el Ge) para llegar a la banda de conducción; esto se encuentra en el orden de la energía térmica, $\frac{3}{2}kT$ ($= 0.04$ eV a 300 K), así que las transiciones ocurren fácilmente a temperatura ambiente. Por lo tanto, este nivel de energía puede suministrar electrones a la banda de conducción, por lo que se le llama nivel **donador**. En los semiconductores tipo p, el nivel de energía de impureza está justo arriba de la banda de valencia (figura 40-36b). Se llama nivel **aceptor** porque los electrones de la banda de valencia pueden saltar fácilmente hacia ella. Los huecos positivos se quedan detrás en la banda de valencia y, conforme otros electrones se mueven hacia los huecos, éstos se mueven como se explicó anteriormente.

EJERCICIO D ¿Cuál de los siguientes átomos impuros produciría un semiconductor tipo p? *a*) Ge; *b*) Ne; *c*) Al; *d*) As; *e*) ninguno de los anteriores.

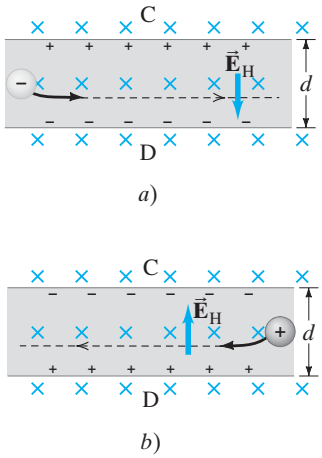


FIGURA 27–32 (Repetida.) El efecto Hall. *a*) Cargas negativas se mueven hacia la derecha como la corriente. *b*) La misma corriente, pero conforme cargas positivas se mueven hacia la izquierda.

EJEMPLO CONCEPTUAL 40–15 **Determinación de la carga de conductores.** ¿Cómo se podría determinar si un semiconductor tipo p tiene una corriente que en realidad se debe al movimiento de huecos? ¿O es éste sólo un modelo conveniente?

RESPUESTA Recuerde de la sección 27-8 que el efecto Hall permite distinguir el signo de las cargas implicadas en una corriente. Cuando se coloca en un campo magnético, la corriente en una dirección particular puede dar por resultado un voltaje perpendicular a esa corriente debido a la fuerza magnética sobre las cargas en movimiento (figura 27-32, aquí repetida). La dirección de este *voltaje Hall* depende del signo de las cargas que conducen la corriente. De esta forma, se demostró que los huecos en movimiento realmente son responsables de la corriente en un semiconductor tipo p.

40–9 Diodos semiconductores

Los diodos y transistores semiconductores son componentes esenciales de los modernos dispositivos electrónicos. La miniaturización lograda en la actualidad permite que muchos miles de diodos, transistores, resistores, etcétera, se coloquen en un solo *chip* que mide menos de un milímetro por lado. Ahora se estudiará, brevemente y en términos cualitativos, la operación de diodos y transistores.

Cuando un semiconductor tipo n se une a uno tipo p, se forma un **diodo de unión *pn***. Por separado, los dos semiconductores son eléctricamente neutros. Cuando se unen, algunos electrones cerca de la unión se difunden desde el semiconductor tipo n hacia el tipo p, donde llenan algunos de los huecos. El tipo n queda con carga positiva y el tipo p adquiere una carga negativa neta. Por consiguiente, se establece una diferencia de potencial, con el lado n positivo en relación con el lado p, y esto evita mayor difusión de electrones.

Si una batería se conecta a un diodo con la terminal positiva en el lado p y la terminal negativa en el lado n, como en la figura 40-37a, el voltaje aplicado externamente se opone a la diferencia de potencial interno y se dice que el diodo tiene **polarización directa**. Si el voltaje es suficientemente grande (alrededor de 0.3 V para el Ge, 0.6 V para el Si a temperatura ambiente), fluirá una corriente. Los huecos positivos en el semiconductor tipo p se repelen mediante la terminal positiva de la batería, y los electrones en el tipo n se repelen por la terminal negativa de la batería. Los huecos y electrones se encuentran en la unión, y los electrones cruzan y llenan los huecos. Fluye una corriente. Mientras tanto, la terminal positiva de la batería continuamente atrae electrones del extremo p, lo que forma nuevos huecos, y la terminal negativa en el extremo n suministra electrones. En consecuencia, una gran corriente fluye a través del diodo.

Cuando el diodo tiene **polarización invertida**, como en la figura 40-37b, los huecos en el extremo p son atraídos hacia la terminal negativa de la batería y los electrones en el extremo n son atraídos hacia la terminal positiva. Los portadores de corriente no se encuentran cerca de la unión e idealmente no fluye corriente.

En la figura 40-38 se presenta una gráfica de la corriente contra el voltaje para un diodo común. Como se observa, un diodo real sí permite el flujo de una pequeña cantidad de corriente inversa. Para la mayoría de los propósitos prácticos, es insignificante. (A temperatura ambiente, la corriente inversa es de unos cuantos μA en el Ge y de unos cuantos pA en el Si; pero aumenta rápidamente con la temperatura, y puede volver ineficaz un diodo arriba de 200°C).

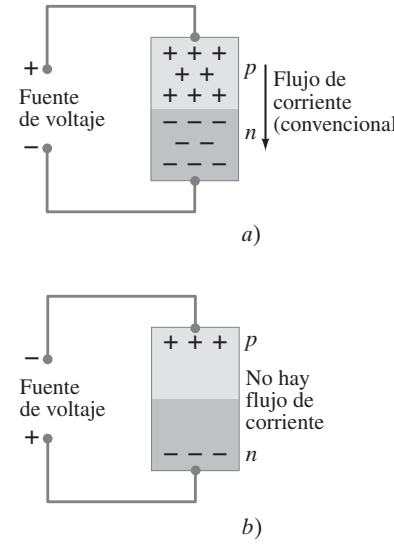


FIGURA 40–37 Diagrama que muestra cómo opera un diodo semiconductor. Cuando el voltaje se conecta en polarización directa, como en *a*), fluye corriente, pero no cuando se conecta en polarización invertida, como en *b*).

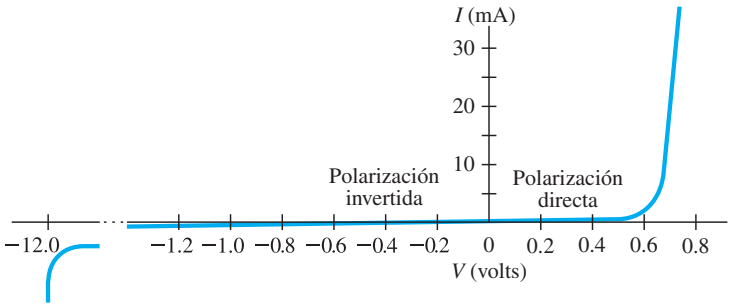


FIGURA 40–38 Corriente a través de un diodo *pn* de silicio, como función del voltaje aplicado.

EJEMPLO 40–16 **Un diodo.** El diodo cuyas características de corriente y voltaje se muestran en la figura 40-38 se conecta en serie con una batería de 4.0 V en polarización directa y un resistor. Si a través del diodo pasará una corriente de 15 mA, ¿qué resistencia debe tener el resistor?

PLANTEAMIENTO Empleamos la figura 40-38, donde se ve que la caída de voltaje a través del diodo es de aproximadamente 0.7 V cuando la corriente es de 15 mA. Luego se hace un análisis de circuito simple y se utiliza la ley de Ohm (capítulos 25 y 26).

SOLUCIÓN La caída de voltaje a través del resistor es 4.0 V − 0.7 V = 3.3 V, de manera que $R = V/I = (3.3\text{ V})/(1.5 \times 10^{-2}\text{ A}) = 220\ \Omega$.

El símbolo para diodo es

[diodo]

donde la flecha representa la dirección convencional (+) en que fluye la corriente con facilidad.

Si el voltaje a través de un diodo conectado en polarización invertida aumenta rápidamente, se llega a un punto donde ocurre ruptura. El campo eléctrico a través de la unión se vuelve tan grande que se produce ionización de los átomos. En consecuencia, los electrones que se retiran de sus átomos contribuyen a una corriente cada vez más grande conforme continúa la ruptura. El voltaje permanece constante sobre un amplio rango de corrientes. Esto se demuestra en el extremo izquierdo de la figura 40-38. Esta propiedad de los diodos se utiliza para regular con exactitud una fuente de voltaje. Un diodo diseñado para este propósito se llama **diodo Zener**. Cuando se coloca a través de la salida de una fuente de poder no regulada, un diodo Zener permite mantener el voltaje a su propio voltaje de ruptura en tanto el suministro de voltaje siempre esté por arriba de ese punto. Es posible obtener diodos Zener correspondientes a voltajes que van desde algunos volts hasta cientos de volts.

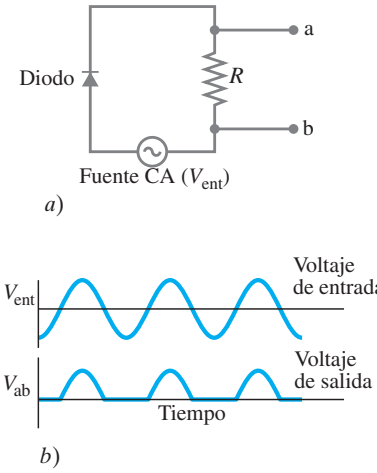


FIGURA 40–39 *a*) Circuito rectificador simple (de media onda) que utiliza un diodo semiconductor. *b*) Voltaje de entrada de fuente CA y voltaje de salida a través de *R*, como funciones del tiempo.

Puesto que un diodo de unión *pn* permite el flujo de corriente sólo en una dirección (en tanto el voltaje no sea muy alto), sirve como **rectificador**, para cambiar ca a cd. En la figura 40-39a se ilustra un circuito rectificador sencillo. La fuente de ca aplica un voltaje a través del diodo, alternativamente positivo y negativo. Sólo durante la mitad de cada ciclo pasará corriente a través del diodo; sólo entonces habrá una corriente a través del resistor *R*. Por lo tanto, una gráfica del voltaje V_{ab} a través de *R* como función del tiempo se parece al voltaje de salida que se muestra en la figura 40-39b. Esta **rectificación de media onda** no es exactamente cd, pero es unidireccional. Más útil aún es un **rectificador de onda completa**, que utiliza dos diodos (o en ocasiones cuatro) como se aprecia en la figura 40-40a. En cualquier instante dado, ya sea un diodo o el otro conducirá corriente hacia la derecha. Por lo tanto, la salida a través del resistor de carga *R* será como se muestra en la figura 40-40b. En realidad éste es el voltaje si el capacitor *C* no estuviera en el circuito. El capacitor tiende a almacenar carga y, si la constante de tiempo *RC* es suficientemente larga, ayuda a suavizar la corriente como se muestra en la figura 40-40c. (La variación en la salida que se indica en la figura 40-40c se llama **voltaje de rizado**).

Los circuitos rectificadores son importantes porque la mayoría de las líneas de voltaje en edificios es ca, y la mayoría de los dispositivos electrónicos requieren un voltaje de cd para su operación. En consecuencia, los diodos se encuentran casi en todos los dispositivos electrónicos, incluidos radios y televisores, calculadoras y computadoras.

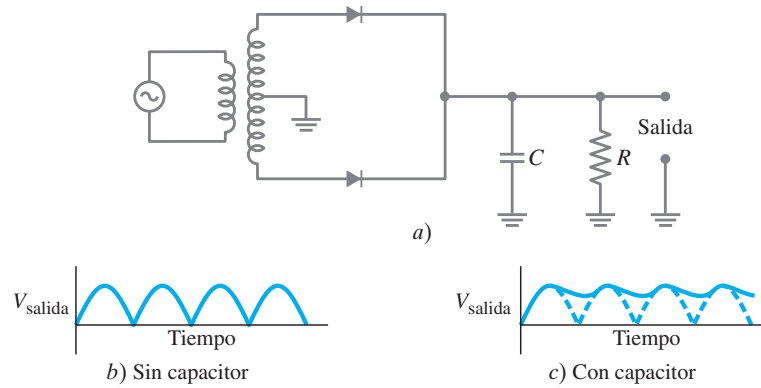


FIGURA 40–40 *a*) Circuito rectificador de onda completa (incluido un transformador de manera que la magnitud del voltaje se pueda cambiar). *b*) Voltaje de salida en ausencia de un capacitor *C*. *c*) Voltaje de salida con el capacitor en el circuito.

FÍSICA APLICADA
LED y aplicaciones
Seguridad de automóviles (frenos)

Otro dispositivo útil es el **diodo emisor de luz** (LED, por las siglas de *light-emitting diode*), que se inventó en la década de 1960. Cuando una unión *pn* tiene polarización directa, comienza a fluir una corriente. Los electrones cruzan de la región *n* a la región *p* y se combinan con los huecos, y se puede emitir un fotón con una energía aproximadamente igual a la brecha de banda prohibida, E_g (véanse las figuras 40-32c y 40-36). Con frecuencia, la energía y, por lo tanto, la longitud de onda están en la región roja del espectro visible, lo que produce las conocidas pantallas LED en los dispositivos electrónicos, paneles de instrumentos automotores, relojes digitales, etcétera. Los LED infrarrojos (esto es, no visibles) se utilizan en controles remotos para televisores, reproductores de DVD y estéreos. Nuevos tipos de LED emiten otros colores, y las "bombillas" LED comienzan a sustituir otros tipos de iluminación en aplicaciones como linternas, señales de tránsito, luces de frenos en automóviles y señales exteriores, anuncios espectaculares y pantallas de cine. Las bombillas LED, en ocasiones llamadas luces de **estado sólido**, son costosas, pero ofrecen ventajas: son de larga duración, eficientes y resistentes. Las luces de los semáforos de LED, por ejemplo (figura 40-41), duran de 5 a 10 veces más que las bombillas incandescentes tradicionales, y requieren sólo el 20% de la energía que utilizan estas últimas para entregar la misma salida de luz. Como luces de frenos en los automóviles, encienden una fracción de segundo más pronto, lo que ofrece a un conductor 5 o 6 metros adicionales de distancia de frenado cuando conduce a rapidez de autopista.

FIGURA 40–41 Semáforo LED.

Las **celdas solares** y los **fotodiodos** (sección 37-2) son uniones *pn* que se usan en el sentido inverso: absorben fotones, lo que crea pares electrón-hueco si la energía del fotón es mayor que la brecha de energía prohibida, E_g. Los electrones y huecos que se crean producen una corriente que, cuando se conecta a un circuito externo, se convierte en una fuente de fem y potencia. Los *detectores de partículas* (sección 41-11) operan de manera similar.

Un diodo se llama **dispositivo no lineal** porque la corriente no es proporcional al voltaje. Esto es, una gráfica de corriente contra voltaje (figura 40-38) no es una línea recta, como lo es para un resistor (que idealmente *es* lineal). Los transistores también son dispositivos *no lineales*.

40–10 Transistores y circuitos integrados (chips)

Un **transistor de unión** simple consiste en un cristal de un tipo de semiconductor dopado colocado entre dos cristales del tipo opuesto. Se fabrican transistores tanto *npn* como *pnp*, y ambos se ilustran de manera esquemática en la figura 40-42a. Los tres semiconductores reciben los nombres de *colector, base* y *emisor*. En la figura 40-42b se presentan los símbolos para los transistores *npn* y *pnp*. La flecha siempre se coloca en el emisor e indica la dirección de flujo de corriente (convencional) en operación normal.

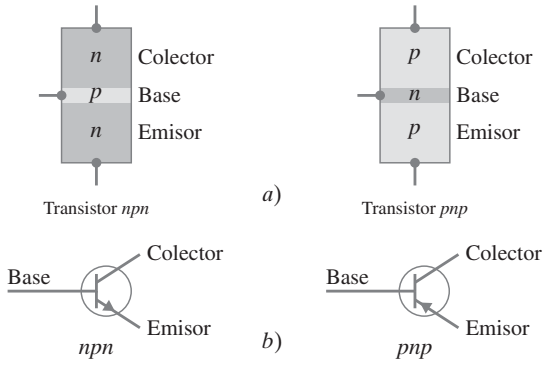


FIGURA 40–42 *a*) Diagrama de transistores *npn* y *pnp*. *b*) Símbolos para los transistores *npn* y *pnp*.

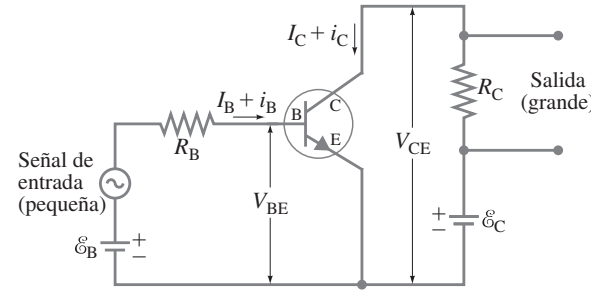


FIGURA 40–43 Un transistor *npn* que se utiliza como amplificador. I_B es la corriente producida por $\mathscr{E}_B$ (en ausencia de una señal), i_B es la corriente señal de ca (= cambios en I_B).

La operación de un transistor se puede analizar cualitativamente, de manera muy breve, del modo siguiente. Considere un transistor *npn* conectado como se indica en la figura 40-43. Entre el colector y el emisor se mantiene un voltaje V_{CE} que suministra la batería $\mathscr{E}_C$. El voltaje que se aplica a la base se llama *voltaje de polarización de la base*, V_{BE}. Si V_{BE} es positivo, la base atrae electrones de conducción en el emisor. Como la región de la base es muy pequeña (menos de 1 μm, mucho menos si está en un chip), la mayoría de estos electrones fluyen cruzando en línea recta hacia el colector, que se mantiene a un voltaje positivo. Una gran corriente, I_C, fluye entre colector y emisor, y una corriente mucho menor, I_B, fluye a través de la base. En el estado en equilibrio, I_A e I_B se pueden considerar cd. Una pequeña variación en el voltaje de la base debida a una señal de entrada provoca un gran cambio en la corriente del colector y, por lo tanto, un gran cambio en la caída de voltaje a través del resistor de salida R_C. En consecuencia, un transistor es capaz de *amplificar* una pequeña señal.

Por lo general, una pequeña señal de ca (llamada i_B) se amplificará y, cuando se agrega a la corriente y el voltaje de polarización de la base, hace que el voltaje y la corriente en el colector varíen a la misma tasa, pero amplificada. Por ende, lo que es importante para la amplificación es el *cambio* en la corriente del colector para un *cambio* de entrada dado en la corriente de la base. Estas corrientes de señal de ca (= cambios en I_C e I_B) se denotan como i_C e i_B. La **ganancia de corriente** se define como la razón

$$\beta_I = \frac{\text{corriente ca de salida (colector)}}{\text{corriente ca de entrada (base)}} = \frac{i_C}{i_B}.$$

β_1 por lo general es del orden de 10 a 100. De igual modo, la **ganancia de voltaje** es

$$\beta_V = \frac{\text{voltaje de ca de salida (collector)}}{\text{voltaje de ca de entrada (base)}}.$$

Los transistores son los elementos básicos en los modernos **amplificadores** electrónicos de todo tipo.

Un transistor *pnp* opera como uno *npn*, excepto que los huecos se mueven en lugar de los electrones. El voltaje del colector es negativo, al igual que el voltaje de la base en operación normal.

En los **circuitos digitales**, incluidas las computadoras, donde "apagado" y "encendido" (o cero y uno) constituyen el código binario, los transistores actúan como **compuerta** o interruptor. Esto es, dejan pasar corriente ("encendido") o la bloquean ("apagado").

Los transistores fueron un gran avance en la miniaturización de los circuitos electrónicos. Aunque los transistores individuales son muy pequeños en comparación con los tubos de vacío alguna vez utilizados, son enormes comparados con los **circuitos integrados** o **chips** (véase la fotografía al inicio de este capítulo). Pequeñas cantidades de impurezas se pueden colocar en ubicaciones particulares dentro de un solo cristal de silicio. Éstos se ordenan para formar diodos, transistores y resistores (semiconductores no dopados). También es posible formar capacitores e inductores, aunque con frecuencia se conectan por separado. Un pequeño chip, de algunos milímetros por lado, contiene millones de transistores y otros elementos de circuito. Los circuitos integrados son el corazón de computadoras, televisores, calculadoras, cámaras e instrumentos electrónicos que controlan aviones, vehículos espaciales y automóviles. La "miniaturización" producto de los circuitos integrados no sólo permite que circuitos extremadamente complicados se coloquen en un pequeño espacio, sino que también permite un gran aumento en la rapidez de operación de las computadoras, entre otros dispositivos, pues las distancias que recorren las señales electrónicas son muy pequeñas.

Resumen

La mecánica cuántica explica el enlace de átomos para formar **moléculas**. En un **enlace covalente**, las nubes de electrones de dos o más átomos se traslapan debido a interferencia constructiva entre las ondas de electrones. Los núcleos positivos son atraídos a esta concentración de carga negativa entre ellos, lo que forma el enlace.

Un **enlace iónico** es un caso extremo de enlace covalente en el que uno o más electrones de un átomo pasan mucho más tiempo alrededor del otro átomo que alrededor del propio. Así, los átomos actúan como iones con carga opuesta que se atraen mutuamente, lo que forma el enlace.

Estos **enlaces fuertes** mantienen a las moléculas unidas, y también mantienen a los átomos y las moléculas unidos en los sólidos. También son importantes los **enlaces débiles** (o **enlaces de van der Waals**), que por lo general son atracciones dipolares entre moléculas.

Cuando los átomos se combinan para formar moléculas, los niveles energéticos de los electrones exteriores se alteran porque ahora interactúan unos con otros. También se vuelven posibles niveles de energía adicionales, porque los átomos pueden vibrar unos con respecto a otros, y la molécula como un todo puede girar. Los niveles de energía para movimiento vibracional y rotacional están cuantizados, y están muy juntos (por lo general, separados de 10^{-1} eV a 10^{-3} eV). Por lo tanto, cada nivel atómico de energía se convierte en un conjunto de niveles muy cercanos que corresponden a los movimientos vibracional y rotacional. Las transiciones de un nivel a otro aparecen como muchas líneas muy cercanas entre sí. Los espectros resultantes se llaman **espectros de bandas**.

Los niveles de energía rotacional cuantizados están dados por

$$E_{\text{rot}} = \ell(\ell+1)\frac{\hbar^2}{2I}, \qquad \ell = 0, 1, 2, \cdots, \qquad \textbf{(40–2)}$$

donde I es el momento de inercia de la molécula.

Los niveles de energía para el movimiento vibracional están dados por

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \tfrac{1}{2}\right)hf, \qquad v = 0, 1, 2, \cdots, \qquad \textbf{(40–6)}$$

donde f es la frecuencia natural clásica de vibración para la molécula. Las transiciones entre niveles de energía están sujetas a las reglas de selección $\Delta\ell = \pm 1$ y $\Delta v = \pm 1$.

Algunos **sólidos** se enlazan mediante enlaces covalentes y iónicos, tal como las moléculas. En los metales, la fuerza electrostática entre electrones libres y iones positivos ayuda a formar el **enlace metálico**.

En la teoría de electrones libres en los metales, los electrones ocupan los posibles estados de energía de acuerdo con el principio de exclusión. A $T = 0$ K, todos los posibles estados se encuentran llenos hasta un nivel máximo de energía llamado **energía de Fermi**, E_{F}, cuya magnitud es generalmente de unos cuantos eV. Todos los estados por arriba de E_{F} están vacantes a $T = 0$ K. A temperaturas normales (300 K), la distribución de estados ocupados sólo se altera ligeramente y está dada por la **función de probabilidad de Fermi-Dirac**

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_{\text{F}})/kT} + 1}. \qquad \textbf{(40–14)}$$

En un sólido cristalino, los posibles estados de energía para los electrones están ordenados en **bandas**. Dentro de cada banda los niveles están muy cercanos, pero entre las bandas puede haber **brechas de energía** prohibidas. Los buenos conductores se caracterizan porque la banda ocupada más alta (la **banda de conducción**) está parcialmente llena, de manera que hay muchos estados accesibles disponibles a los electrones para que se muevan y aceleren cuando se aplica un voltaje. En un buen aislante, la banda de energía ocupada más alta (la **banda de valencia**) está completamente llena y hay una gran brecha de energía prohibida (de 5 a 10 eV) hacia la siguiente banda más alta, la *banda de conducción*. A temperatura ambiente, la energía cinética molecular (energía térmica) disponible debido a colisiones sólo es de aproximadamente 0.04 eV, así que casi ningún electrón logra saltar desde la banda de valencia hacia la banda de conducción. En un **semiconductor**, la brecha entre bandas de valencia y de conducción es mucho menor, del orden de 1 eV, de manera que algunos electrones logran hacer la transición desde la banda de valencia en esencia llena, hacia la banda de conducción casi vacía.

En un semiconductor **dopado**, un pequeño porcentaje de átomos de impurezas, con cinco o tres electrones de valencia, sustituyen a algunos de los átomos de silicio normales con sus cuatro electrones de valencia. Una impureza de cinco electrones produce un semiconductor **tipo *n*** con electrones negativos como portadores de corriente. Una impureza de tres electrones produce un semiconductor **tipo *p***, en el que **huecos** positivos conducen la corriente. El nivel energético de los átomos de impurezas se encuentra ligeramente abajo de la banda de conducción en un semiconductor tipo n, y actúa como un **donador** por el cual los electrones pasan fácilmente hacia la banda de conducción. El nivel energético de los átomos de impurezas en un semiconductor tipo p se encuentra ligeramente arriba de la banda de valencia y actúa como un nivel **aceptor**, pues los electrones provenientes de la banda de valencia fácilmente llegan a ella, dejando huecos tras de sí que actúan como portadores de carga.

Un **diodo** semiconductor consiste en una **unión *pn*** y permite que la corriente fluya sólo en una dirección; se puede usar como **rectificador** para cambiar ca a cd. Los **transistores** comunes consisten en tres secciones de semiconductores, ya sea como ***pnp*** o como ***npn***. Los transistores permiten amplificar señales eléctricas y en computadoras sirven como interruptores o **compuertas** para los 1 y 0. Un circuito integrado consiste en un pequeño cristal semiconductor o **chip** sobre el cual se pueden instalar muchos transistores, diodos, resistores y otros elementos de circuito, colocando impurezas con cuidado.

Preguntas

1. ¿Qué tipo de enlace esperaría para *a*) la molécula N_2, *b*) la molécula HCl, *c*) átomos Fe en un sólido?
2. Describa cómo se podría formar la molécula $CaCl_2$.
3. ¿La molécula H_2 tiene un momento dipolar permanente? ¿Lo tiene O_2? ¿Lo tiene H_2O? Explique.
4. Aunque la molécula H_3 no es estable, el ion H_3^+ sí lo es. Explique esto mediante el principio de exclusión de Pauli.
5. La energía de una molécula se puede dividir en cuatro categorías. ¿Cuáles son?
6. ¿Usted esperaría que la molécula H_2^+ fuera estable? Si es así, ¿dónde pasaría más tiempo el electrón solo?
7. Explique por qué el átomo de carbono ($Z = 6$) generalmente forma cuatro enlaces con átomos hidrogenoides.
8. Explique, sobre la base de las bandas de energía, por qué el cristal de cloruro de sodio es un buen aislante. [*Sugerencia:* Considere los niveles de los iones Na^+ y Cl^-].
9. Si los electrones de conducción tienen libertad de "deambular" en un metal, ¿por qué no abandonan el metal por completo?
10. Explique por qué la resistividad de los metales aumenta cuando la temperatura aumenta, mientras que la resistividad de los semiconductores puede disminuir con la temperatura creciente.
11. La figura 40-44 ilustra un rectificador de onda completa "tipo puente". Explique cómo se rectifica la corriente y cómo fluye la corriente durante cada medio ciclo.

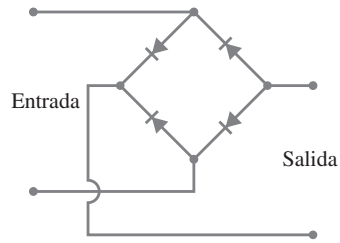


FIGURA 40–44
Pregunta 11.

12. Discuta las diferencias entre un gas ideal y un gas de electrones de Fermi.
13. Compare la resistencia de un diodo de unión *pn* conectado en polarización directa con su resistencia cuando se conecta en polarización invertida.
14. ¿Qué aspectos de la figura 40-28 son peculiares al cobre, y cuáles son válidos en general para otros metales?
15. Explique cómo un transistor se puede usar como interruptor.
16. ¿Cuál es la principal diferencia entre los semiconductores tipo *n* y tipo *p*?
17. Dibuje un diagrama de circuito que indique cómo un transistor *pnp* puede operar como amplificador.
18. En un transistor, la unión base-emisor y la unión base-colector en esencia son diodos. ¿Estas uniones tienen polarización invertida o directa en la aplicación que se ilustra en la figura 40-43?
19. Un transistor es capaz de amplificar una señal electrónica, lo cual significa que puede aumentar la potencia de una señal de entrada. ¿De dónde obtiene la energía para aumentar la potencia?
20. Un semiconductor de silicio se dopa con fósforo. ¿Estos átomos serán donadores o aceptores? ¿Qué tipo de semiconductor será éste?
21. ¿Los diodos y transistores cumplen la ley de Ohm? Explique.
22. ¿Es posible utilizar un diodo para amplificar una señal? Explique.
23. Si $\mathscr{E}_C$ se invierte en la figura 40-43, ¿cómo se alteraría la amplificación?

Problemas

40–1 a 40–3 Enlaces moleculares

1. (I) Estime la energía de enlace de una molécula de KCl al calcular la energía potencial electrostática cuando los iones K^+ y Cl^- están a su separación estable de 0.28 nm. Suponga que cada uno tiene una carga de $1.0e$ de magnitud.
2. (II) La energía de enlace medida del KCl es 4.43 eV. A partir del resultado del problema 1, estime la contribución a la energía de enlace de las nubes de electrones a la distancia de equilibrio $r_0 = 0.28$ nm.
3. (II) Estime la energía de enlace de la molécula H_2, suponiendo que los dos núcleos H están separados 0.074 nm y que los dos electrones pasan el 33% de su tiempo a medio camino entre ellos.
4. (II) La distancia de equilibrio r_0 entre dos átomos en una molécula se llama **longitud de enlace**. Con las longitudes de enlace de moléculas homogéneas (como H_2, O_2 y N_2), es posible estimar la longitud de enlace de moléculas heterogéneas (como CO, CN y NO). Esto se hace al sumar la mitad de cada longitud de enlace de las moléculas homogéneas para estimar la de las moléculas heterogéneas. Dadas las siguientes longitudes de enlace: H_2 (= 74 pm), N_2 (= 145 pm), O_2 (= 121 pm), C_2 (= 154 pm), estime las longitudes de enlace para: HN, CN y NO.
5. (II) Estime la energía asociada con la repulsión de los niveles de electrones de una molécula de fluoruro de litio (LiF). La energía de ionización del litio es 5.39 eV y se requieren 3.41 eV para remover el electrón adicional de un ion F^-. La longitud de enlace es 0.156 nm y la energía de enlace del LiF es 5.95 eV.
6. (II) Con frecuencia, las energías de enlace se miden experimentalmente en kcal por mol, y luego, a partir de este resultado, se calcula la energía de enlace en eV por molécula. ¿Cuál es el factor de conversión al convertir de kcal por mol a eV por molécula? ¿Cuál es la energía de enlace del KCl (= 4.43 eV) en kcal por mol?
7. (III) *a*) Aplique un razonamiento similar al del texto para los estados $S = 0$ y $S = 1$ en la formación de la molécula H_2, para demostrar por qué *no* se forma la molécula He_2. *b*) Explique por qué se *podría* formar el ion molecular He_2^+. (Los experimentos indican que tiene una energía de enlace de 3.1 eV a $r_0 = 0.11$ nm).

40–4 Espectros moleculares

8. (I) Demuestre que la cantidad $\hbar^2/I$ tiene unidades de energía.
9. (I) ¿Cuál es la masa reducida de las moléculas *a*) KCl; *b*) O_2; *c*) HCl?
10. (II) *a*) Calcule la "energía rotacional característica", $\hbar^2/2I$, para la molécula de O_2 cuya longitud de enlace es 0.121 nm. *b*) ¿Cuáles son la energía y longitud de onda de los fotones emitidos en una transición de $\ell = 2$ a $\ell = 1$?

11. (II) La "energía rotacional característica", $\hbar^2/2I$, para N_2 es 2.48×10^{-4} eV. Calcule la longitud de enlace del N_2.

12. (II) Estime la longitud de onda más larga emitida por una molécula de hidruro de litio (LiH) para un cambio en su estado rotacional, si su separación de equilibrio es 0.16 nm.

13. (II) La separación de equilibrio de los átomos H en la molécula H_2 es 0.074 nm (figura 40-8). Calcule las energías y longitudes de onda de los fotones para las transiciones rotacionales *a*) $\ell = 1$ a $\ell = 0$, *b*) $\ell = 2$ a $\ell = 1$, y *c*) $\ell = 3$ a $\ell = 2$.

14. (II) Explique por qué no hay transición para $\Delta E = hf$ en la figura 40-21 (y la figura 40-22). Véase las ecuaciones 40-8.

15. (II) La frecuencia de vibración fundamental para la molécula CO es 6.42×10^{13} Hz. Determine *a*) la masa reducida y *b*) el valor efectivo de la constante de "rigidez" k. Compare con k para la molécula H_2.

16. (II) Li y Br forman una molécula para la cual la frecuencia vibracional más baja es 1.7×10^{13} Hz. ¿Cuál es la constante de rigidez efectiva k?

17. (II) Calcule la longitud de enlace para la molécula de NaCl, si tres longitudes de onda sucesivas para transiciones rotacionales son 23.1 mm, 11.6 mm y 7.71 mm.

18. (II) *a*) Con base en la curva de la figura 40-18, estime la constante de rigidez k para la molécula H_2. (Recuerde que $U = \frac{1}{2}kx^2$.) *b*) Luego estime la longitud de onda fundamental para transiciones vibracionales, a partir de la fórmula clásica (capítulo 14), pero use sólo $\frac{1}{2}$ de la masa de un átomo H (porque ambos átomos de H se mueven).

19. (III) Imagine los dos átomos de una molécula diatómica como si estuvieran conectados mediante un resorte, figura 40-45. Demuestre que la frecuencia de vibración clásica está dada por la ecuación 40-5. [*Sugerencia:* Sean x_1 y x_2 los desplazamientos de cada masa desde posiciones de equilibrio iniciales; entonces $m_1 d^2x_1/dt^2 = -kx$, y $m_2 d^2x_2/dt^2 = -kx$, donde $x = x_1 + x_2$. Encuentre otra relación entre x_1 y x_2, suponiendo que el centro de masa del sistema permanece en reposo, y luego demuestre que $\mu d^2x/dt^2 = -kx$].

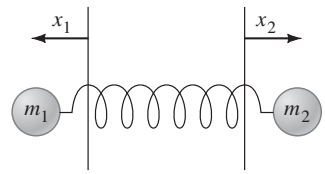


FIGURA 40–45
Problema 19.

40–5 Enlace en sólidos

20. (I) Estime la energía de cohesión para NaCl considerando que $\alpha = 1.75$, $m = 8$ y $r_0 = 0.28$ nm.

21. (II) La sal común, NaCl, tiene una densidad de 2.165 g/cm^3. El peso molecular de NaCl es 58.44. Estime la distancia entre iones Na y Cl que son vecinos más cercanos. [*Sugerencia:* Se puede considerar que *cada* ion tiene asociado un "cubo" o "celda" de lado s (la incógnita)].

22. (II) Repita el problema anterior para KCl, cuya densidad es 1.99 g/cm^3.

23. (II) La separación entre iones Na y Cl "vecinos más cercanos" en un cristal de NaCl es 0.24 nm. ¿Cuál es la separación entre dos iones Na que son vecinos más cercanos?

24. (III) Para una larga cadena unidimensional de iones positivos y negativos alternados, demuestre que la constante de Madelung sería $\alpha = 2 \ln 2$. [*Sugerencia:* Use una serie de expansión para $\ln(1 + x)$].

25. (III) *a*) A partir de la ecuación 40-9, demuestre que la energía de cohesión está dada por $U_0 = -(\alpha e^2/4\pi\epsilon_0 r_0)(1 - 1/m)$. Determine U_0 para *b*) NaI ($r_0 = 0.33$ nm) y *c*) MgO ($r_0 = 0.21$ nm). Suponga que $m = 10$. *d*) Si en vez de ello considera que $m = 8$, ¿cómo diferiría su respuesta? Suponga que $\alpha = 1.75$.

40–6 Teoría de electrones libres en los metales

26. (II) Estime el número de posibles estados electrónicos en un cubo de plata de 1.00 cm^3, entre $0.985E_F$ y E_F (= 5.48 eV).

27. (II) Estime el número de estados entre 7.00 eV y 7.05 eV que están disponibles para electrones en un cubo de cobre de 1.0 cm^3.

28. (II) ¿Cuál, aproximadamente, es la razón de la densidad de las moléculas en un gas ideal a 285 K y 1 atm (por ejemplo, O_2) a la densidad de electrones libres (suponga uno por átomo) en un metal (cobre) también a 285 K?

29. (II) Calcule la energía que tiene el 85.0% de probabilidad de ocupación para el cobre a *a*) $T = 295$ K, *b*) $T = 750$ K.

30. (II) Calcule la energía que tiene el 15.0% de probabilidad de ocupación para el cobre a *a*) $T = 295$ K, *b*) $T = 950$ K.

31. (II) ¿Cuál es la probabilidad de ocupación para un electrón de conducción en cobre a $T = 295$ K para una energía $E = 1.015E_F$?

32. (II) Los átomos en metal cinc ($\rho = 7.1 \times 10^3$ kg/m^3) tienen, cada uno, dos electrones libres. Calcule *a*) la densidad de electrones de conducción, *b*) su energía de Fermi y *c*) su rapidez de Fermi.

33. (II) Calcule la energía de Fermi y la rapidez de Fermi para el sodio, que tiene una densidad de 0.97×10^3 kg/m^3 y tiene un electrón de conducción por átomo.

34. (II) La energía de Fermi del aluminio es 11.63 eV. *a*) Calcule la densidad de electrones libres con la ecuación 40-12, y *b*) estime la valencia del aluminio usando este modelo y la densidad (2.70×10^3 kg/m^3) y masa atómica (27.0) conocidas del aluminio.

35. (II) Demuestre que la energía promedio de los electrones de conducción en un metal a $T = 0$ K es $\overline{E} = \frac{3}{5}E_F$ (ecuación 40-13) al calcular

$$\overline{E} = \frac{\int E\, n_o(E)\, dE}{\int n_o(E)\, dE}.$$

36. (II) Los neutrones en una estrella de neutrones (capítulo 44) se pueden tratar como un gas de Fermi con neutrones en lugar de los electrones en el modelo de un gas de electrones. Determine la energía de Fermi para una estrella de neutrones de 12 km de radio y 2.5 veces la masa del Sol. Suponga que la estrella está hecha por completo de neutrones y es de densidad uniforme.

37. (II) Para un pozo de potencial unidimensional de ancho ℓ, comience con la ecuación 38-13 y demuestre que el número de estados por intervalo de unidad de energía para un gas de electrones está dado por

$$g_\ell(E) = \sqrt{\frac{8m\ell^2}{h^2 E}}.$$

Recuerde que puede haber dos electrones (espín hacia arriba y espín hacia abajo) para cada valor de n. [*Sugerencia:* Escriba el número cuántico n en términos de E. Entonces $g_\ell(E) = 2\, dn/dE$ donde dn es el número de niveles de energía entre E y $E + dE$.]

38. (II) Demuestre que la probabilidad para que el estado a la energía de Fermi esté ocupado es exactamente $\frac{1}{2}$, independiente de la temperatura.

39. (II) Un modelo muy sencillo de un metal "unidimensional" consiste en N electrones confinados a una caja rígida de ancho ℓ. Desprecie la interacción de Coulomb entre los electrones. *a*) Calcule la energía de Fermi para este metal unidimensional (E_F = la energía del electrón más energético a $T = 0$ K), tomando en cuenta el principio de exclusión de Pauli. Por simplicidad, suponga que N es par. *b*) ¿Cuál es la menor cantidad de energía, ΔE, que puede absorber este metal unidimensional? *c*) Encuentre el límite de $\Delta E/E_F$ para N grande. ¿Qué dice este resultado acerca de la eficiencia de conducción de los metales?

40. (II) *a*) Para cobre a temperatura ambiente ($T = 293$ K), calcule el factor de Fermi, ecuación 40-14, para un electrón con energía de 0.12 eV sobre la energía de Fermi. Esto representa la probabilidad de que ese estado esté ocupado. ¿Es razonable? *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que esté ocupado un estado 0.12 eV por debajo de la energía de Fermi? *c*) ¿Cuál es la probabilidad de que el estado en el inciso *b*) esté desocupado?

41. (III) Proceda del modo siguiente para derivar la densidad de estados, $g(E)$, el número de estados por unidad de volumen por unidad de intervalo de energía, ecuación 40-10. Sea el metal un cubo de lado ℓ. Extienda la discusión de la sección 38-8 para un pozo infinito a tres dimensiones, dados los niveles de energía

$$E = \frac{h^2}{8m\ell^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

(Explique el significado de n_1, n_2, n_3.) Cada conjunto de valores para los números cuánticos n_1, n_2, n_3 corresponde a un estado. Imagine un espacio donde n_1, n_2, n_3 son los ejes, y cada estado se representa mediante un punto sobre una red cúbica en este espacio, cada uno separado por 1 unidad a lo largo de un eje. Considere el octante $n_1 > 0, n_2 > 0, n_3 > 0$. Demuestre que el número de estados N dentro de un radio $R = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{1}{2}}$ es $2(\frac{1}{8})(\frac{4}{3}\pi R^3)$. Luego, para obtener la ecuación 40-10, se establece que $g(E) = (1/V)(dN/dE)$, donde $V = \ell^3$ es el volumen del metal.

40–7 Teoría de bandas de sólidos

42. (I) Luz con frecuencia ligeramente creciente incide sobre un semiconductor y éste comienza a conducir cuando la longitud de onda de la luz es 580 nm; estime el tamaño de la brecha de energía prohibida, E_g.

43. (I) Calcule el fotón con longitud de onda más larga que pueda hacer que un electrón en silicio ($E_g = 1.14$ eV) salte desde la banda de valencia hasta la banda de conducción.

44. (II) La brecha de energía entre bandas de valencia y de conducción en germanio es 0.72 eV. ¿Qué rango de longitudes de onda puede tener un fotón para excitar un electrón desde la parte superior de la banda de valencia hacia la banda de conducción?

45. (II) Se vio que hay $2N$ estados electrónicos posibles en la banda $3s$ de Na, donde N es el número total de átomos. ¿Cuántos estados electrónicos posibles hay en *a*) la banda $2s$, *b*) la banda $2p$, y *c*) la banda $3p$? *d*) Establezca una fórmula general para el número total de estados posibles en cualquier banda electrónica dada.

46. (II) La brecha de energía prohibida E_g en germanio es 0.72 eV. Cuando se usa como detector de fotones, ¿aproximadamente cuántos electrones pueden saltar desde la banda de valencia hasta la banda de conducción, mediante el paso de un fotón de 730 keV que pierde toda su energía de esta forma?

40–8 Semiconductores y dopado

47. (II) Suponga que un semiconductor de silicio se dopa con fósforo, de manera que un átomo de silicio en 1.2×10^6 se sustituye con un átomo de fósforo. Suponiendo que el electrón "adicional" en cada átomo de fósforo se dona a la banda de conducción, ¿en qué factor aumenta la densidad de los electrones de conducción? La densidad del silicio es 2330 kg/m^3 y la densidad de los electrones de conducción en silicio puro es de aproximadamente 10^{16} m^{-3} a temperatura ambiente.

40–9 Diodos

48. (I) ¿A qué longitud de onda irradiará un LED si se elabora con un material cuya brecha de energía prohibida es $E_g = 1.6$ eV?

49. (I) Si un LED emite luz con longitud de onda $\lambda = 680$ nm, ¿cuál es la brecha de energía (en eV) entre bandas de valencia y de conducción?

50. (II) Un diodo de silicio, cuyas características de corriente y voltaje se presentan en la figura 40-38, se conecta en serie con una batería y un resistor de 860 Ω. ¿Qué voltaje de batería se necesita para producir una corriente de 12 mA?

51. (II) Suponga que el diodo de la figura 40-38 se conecta en serie con un resistor de 150 Ω y una batería de 2.0 V. ¿Qué corriente fluye en el circuito? [*Sugerencia:* Dibuje una línea en la figura 40-38 que represente la corriente en el resistor como función del voltaje a través del diodo; la intersección de esta línea con la curva característica dará la respuesta].

52. (II) Bosqueje la resistencia como función de la corriente, si $V > 0$, para el diodo que se muestra en la figura 40-38.

53. (II) Es necesario rectificar un voltaje de ca de 120 V rms. Estime de manera aproximada la corriente promedio en el resistor de salida R (35 kΩ) para *a*) un rectificador de media onda (figura 40-39) y *b*) un rectificador de onda completa (figura 40-40) sin capacitor.

54. (II) Un láser de diodo semiconductor emite luz de 1.3 μm. Suponiendo que la luz proviene de electrones y huecos en recombinación, ¿cuál es la brecha de banda prohibida en este material láser?

55. (II) Un diodo de silicio pasa corriente significativa sólo si el voltaje de polarización directa supera aproximadamente 0.6 V. Realice una estimación de la corriente promedio en el resistor de salida R de *a*) un rectificador de media onda (figura 40-39) y *b*) un rectificador de onda completa (figura 40-40) sin un capacitor. Suponga que $R = 120$ Ω en cada caso y que el voltaje de ca es 9.0 V rms en cada caso.

56. (III) Un voltaje 120 V rms y 60 Hz se rectificará con un rectificador de onda completa como en la figura 40-40, donde $R = 28$ kΩ y $C = 37$ μF. *a*) Realice una estimación de la corriente promedio. *b*) ¿Qué ocurre si $C = 0.10$ μF? [*Sugerencia:* Consulte la sección 26-5].

40–10 Transistores

57. (II) Si la ganancia de corriente del amplificador transistor en la figura 40-43 es $\beta = i_C/i_B = 95$, ¿qué valor debe tener R_C si una corriente base de ca de 1.0 μA producirá un voltaje de salida de ca de 0.35 V?

58. (II) Suponga que la ganancia de corriente del transistor en la figura 40-43 es $\beta = i_C/i_B = 85$. Si $R_C = 4.3$ kΩ, calcule el voltaje de salida de ca para una corriente de entrada ca de 2.0 μA.

59. (II) Un amplificador tiene una ganancia de voltaje de 65 y una resistencia de carga (salida) de 25 kΩ. ¿Cuál es la corriente de salida pico a través del resistor de carga si el voltaje de entrada es una señal de ca con un pico de 0.080 V?

60. (II) Un transistor, cuya ganancia de corriente $\beta = i_C/i_B = 75$, se conecta como en la figura 40-43, con $R_B = 3.8\ \text{k}\Omega$ y $R_C = 7.8\ \text{k}\Omega$. Calcule *a*) la ganancia de voltaje y *b*) la amplificación de potencia

61. (II) A partir de la figura 40-43, escriba una ecuación para la relación entre la corriente de la base (I_B), la corriente del colector (I_C) y la corriente del emisor (I_E, no marcada en la figura 40-43). Suponga que $i_B = i_C = 0$.

Problemas generales

62. Con base en el principio de incertidumbre, estime la energía de enlace de la molécula H_2 calculando la diferencia en energía cinética de los electrones cuando están en átomos separados y cuando están en la molécula. Considere que Δx para los electrones en los átomos separados como el radio de la primera órbita de Bohr, 0.053 nm, y para la molécula considere Δx como la separación de los núcleos, 0.074 nm. [*Sugerencia:* Sea $\Delta p \approx \Delta p_x$].

63. La energía cinética traslacional promedio de un átomo o una molécula es de aproximadamente $\overline{K} = \frac{3}{2}kT$ (véase el capítulo 18), donde $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann. ¿A qué temperatura T $\overline{K}$ será del orden de la energía de enlace (y, por lo tanto, el enlace se rompe fácilmente mediante movimiento térmico) para *a*) un enlace covalente (por ejemplo, H_2) con 4.0 eV de energía de enlace y *b*) un puente de hidrógeno "débil" con 0.12 eV de energía de enlace?

64. En la sal iónica KF, la distancia de separación entre iones es de aproximadamente de 0.27 nm. *a*) Estime la energía potencial electrostática entre los iones, suponiendo que son cargas puntuales (magnitud 1*e*). *b*) Cuando el F "atrapa" un electrón, libera 3.41 eV de energía, mientras que se requieren 4.34 eV para ionizar K. Encuentre la energía de enlace de KF en relación con los átomos de K y F libres, y desprecie la energía de repulsión.

65. Una molécula diatómica tiene una energía de activación de 1.4 eV. Cuando la molécula se disocia, se liberan 1.6 eV de energía. Dibuje una curva de energía potencial para esta molécula.

66. Una posible forma para la energía potencial (U) de una molécula diatómica (figura 40-8) se llama *potencial de Morse*:

$$U = U_0\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]^2.$$

a) Demuestre que r_0 representa la distancia de equilibrio y U_0 la energía de disociación. *b*) Grafique U desde $r = 0$ hasta $r = 4r_0$, suponiendo que $a = 18\ \text{nm}^{-1}$, $U_0 = 4.6$ eV y $r_0 = 0.13$ nm.

67. La frecuencia de vibración fundamental para la molécula HCl es 8.66×10^{13} Hz. Determine *a*) la masa reducida y *b*) el valor efectivo de la constante de rigidez k. Compare con la k para la molécula H_2.

68. Para H_2, estime cuántos estados rotacionales hay entre estados vibracionales.

69. Explique, con el factor de Boltzmann (ecuación 39-16), por qué las alturas de los picos en la figura 40-22 son diferentes entre sí. Explique también por qué las líneas no están igualmente separadas. [*Sugerencia:* ¿El momento de inercia necesariamente permanece constante?]

70. El espectro de absorción rotacional de una molécula muestra picos separados aproximadamente 8.4×10^{11} Hz. Determine el momento de inercia de esta molécula.

71. Un control remoto de televisión emite luz IR. Si el detector en el televisor *no* debe reaccionar a la luz visible, ¿podría utilizarse silicio como "ventana", con su brecha de energía prohibida $E_g = 1.14$ eV? ¿Cuál es la luz con longitud de onda más corta que puede incidir sobre el silicio sin hacer que los electrones salten desde la banda de valencia hacia la banda de conducción?

72. ¿Es necesario considerar efectos cuánticos para objetos cotidianos en rotación? Estime las diferencias entre niveles energéticos rotacionales para un bastón que gira, comparado con la energía del bastón. Suponga que el bastón consiste en una barra larga uniforme de 32 cm, con una masa de 260 g y dos pequeñas masas terminales, cada una de 380 g de masa, y que gira a 1.6 rev/s en torno al centro de la barra.

73. Considere un sólido monoatómico con una red cúbica enlazada débilmente, con cada átomo conectado a seis vecinos, y donde cada enlace tiene una energía de enlace de 3.9×10^{-3} eV. Cuando este sólido se funde, su calor latente de fusión se ocupa directamente en romper los enlaces entre los átomos. Estime el calor latente de fusión para este sólido, en J/mol. [*Sugerencia:* Demuestre que, en una red cúbica simple (figura 40-46), existen *tres* veces tantos enlaces como átomos, cuando el número de átomos es grande].

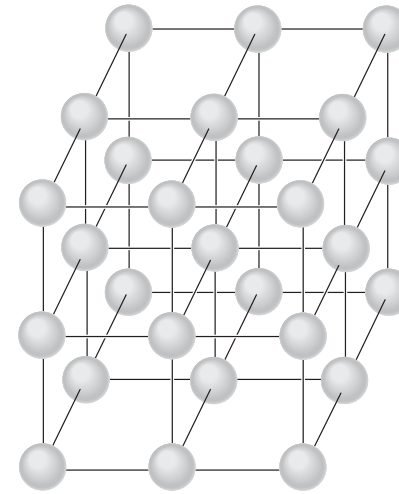


FIGURA 40–46
Problema 73.

74. La brecha de energía entre bandas de valencia y conducción en el sulfuro de cinc es 3.6 eV. ¿Qué rango de longitudes de onda puede tener un fotón para excitar un electrón desde la parte superior de la banda de valencia hacia la banda de conducción?

75. Cuando radiación EM incide sobre diamante, se descubre que luz con longitudes de onda más cortas que 226 nm hará que el diamante sea conductor. ¿Cuál es la brecha de energía entre la banda de valencia y la banda de conducción para el diamante?

76. La **temperatura de Fermi** T_F se define como aquella temperatura a la cual la energía térmica kT (sin los $\frac{3}{2}$) es igual a la energía de Fermi: $kT_F = E_F$. *a*) Determine la temperatura de Fermi para el cobre. *b*) Demuestre que, para $T \gg T_F$, el factor de Fermi (ecuación 40-14) tiende al factor de Boltzmann. (Nota: Este último resultado no es muy útil para comprender los conductores. ¿Por qué?)

77. Estime el número de estados, desde 4.0 eV hasta 6.2 eV, disponibles a los electrones en un cubo de hierro de 10 cm.

78. La brecha de banda del silicio es 1.14 eV. *a*) ¿Para qué rango de longitudes de onda el silicio será transparente? (Véase el ejemplo 40-14.) ¿En qué región del espectro electromagnético comienza este rango transparente? *b*) Si el vidrio de las ventanas es transparente para todas las longitudes de onda visibles, ¿cuál es la mínima brecha de banda posible para el vidrio? (Suponga que $\lambda = 450$ nm a 750 nm.) [*Sugerencia:* Considere que si el fotón tiene menos energía que la brecha de banda prohibida, el fotón pasará a través del sólido sin que éste lo absorba].

79. Para cierto semiconductor, la radiación con longitud de onda más larga que se puede absorber es 1.92 mm. ¿Cuál es la brecha de energía prohibida en este semiconductor?

80. Suponga que los electrones de conducción en un semiconductor se comportan como un gas ideal. (Esto no es cierto para electrones de conducción en un metal). *a*) Si se considera que la masa $m = 9 \times 10^{-31}$ kg y la temperatura $T = 300$ K, determine la longitud de onda de De Broglie de los electrones de conducción de un semiconductor. *b*) Si la separación entre átomos en la red atómica de un semiconductor está en el orden de 0.3 nm, ¿esperaría usted que electrones de conducción a temperatura ambiente viajaran en líneas rectas o se difractaran al viajar a través de esta red? Explique.

81. La mayor parte de la radiación del Sol tiene longitudes de onda más cortas que 1100 nm. Para que una celda solar absorba todo esto, ¿qué brecha de energía prohibida debe tener el material?

82. LED de color verde y azul estuvieron disponibles muchos años después de que se desarrollara por primera ocasión el LED rojo. ¿Aproximadamente qué brechas de energía prohibida esperaría encontrar en LED verde (525 nm) y azul (465 nm)?

83. Para un átomo donador de arsénico en un semiconductor de silicio dopado, suponga que el electrón "adicional" se mueve en una órbita de Bohr alrededor del ion arsénico. Para este electrón en el estado fundamental, tome en cuenta la constante dieléctrica $K = 12$ de la red de silicio (que representa la debilidad de la fuerza de Coulomb debida a todos los otros átomos o iones en la red) y estime *a*) la energía de enlace y *b*) el radio de la órbita para este electrón adicional. [*Sugerencia:* Sustituya $\epsilon = K\epsilon_0$ en la ley de Coulomb; véase la sección 24-5].

84. Una tira de silicio de 1.8 cm de ancho y 1.0 mm de grosor se introduce en un campo magnético de 1.3 T de intensidad, perpendicular a la tira (figura 40-47). Cuando una corriente de 0.28 mA corre a través de la tira, hay un voltaje de efecto Hall resultante de 18 mV a través de la tira (sección 27-8). ¿Cuántos electrones por átomo de silicio hay en la banda de conducción? La densidad del silicio es 2330 kg/m^3.

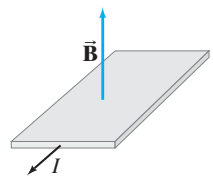


FIGURA 40–47 Problema 84.

85. En la figura 40-48 se muestra un regulador de voltaje de diodo Zener. Suponga que $R = 2.80$ kΩ y que el diodo descompone un voltaje inverso de 130 V. (La corriente aumenta rápidamente en este punto, como se muestra en el lado izquierdo de la figura 40-38, a un voltaje de −12 V en ese diagrama.) El diodo se clasifica a una corriente máxima de 120 mA. *A*) Si $R_{carga} = 18.0$ kΩ, ¿en qué rango de voltajes de suministro el circuito mantendrá el voltaje de salida a 130 V? *b*) Si el voltaje de suministro es de 245 V, ¿en qué rango de resistencia de carga se regulará el voltaje?

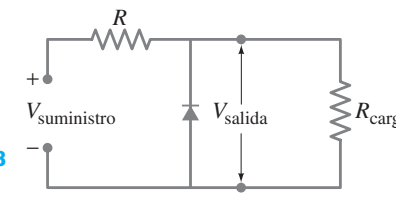


FIGURA 40–48 Problema 85.

86. Un rectificador de onda completa (figura 40-40) usa dos diodos para rectificar un voltaje de ca de 95 V rms y 60 Hz. Si $R = 7.8$ kΩ y $C = 36$ μF, ¿cuál será la variación porcentual aproximada en el voltaje de salida? La variación en el voltaje de salida (figura 40-40c) se llama *voltaje de rizado*. [*Sugerencia:* Consulte la sección 26-5 y suponga que la descarga del capacitor es aproximadamente lineal].

*Problemas numéricos/por computadora

***87.** (II) Escriba un programa que determine la función de probabilidad de Fermi-Dirac (ecuación 40-14). Realice gráficas separadas de esta función contra E/E_F para cobre a *a*) $T = 500$ K, *b*) $T = 1000$ K, *c*) $T = 5000$ K, y *d*) $T = 10{,}000$ K. Para el cobre, $E_F = 7.0$ eV. Interprete cada gráfica en concordancia.

***88.** (III) En la figura 40-49 se presenta una imagen sencilla de una molécula H_2 que comparte dos electrones. Suponga que los electrones se ubican simétricamente entre los dos protones, que están separados por $r_0 = 0.074$ nm. *A*) Cuando los electrones se separan una distancia d, escriba la energía potencial total U en términos de d y r_0. *B*) Elabore una gráfica de U en eV como función de d en nm y establezca en su gráfica dónde tiene U un mínimo, y para qué rango de valores d, U es negativa. *C*) Determine analíticamente el valor de d que da la U mínima (mayor estabilidad).

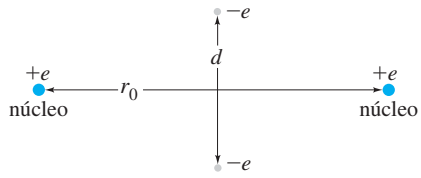


FIGURA 40–49 Problema 88.

***89.** (III) Estime la corriente que se produce por cm^2 de área en un semiconductor de silicio plano, que se coloca en forma perpendicular a la luz solar. Suponga que la luz solar tiene una intensidad de 1000 W/m^2 y que sólo los fotones que tengan más energía que la brecha de banda prohibida pueden crear un par electrón-hueco en el semiconductor. Suponga que el Sol es un emisor de cuerpo negro (a 6000 K), y encuentre la fracción de fotones que tienen energía por arriba de la brecha de banda prohibida (1.14 eV). Consulte la sección 37-1 e integre numéricamente la fórmula de Planck.

Respuestas a los ejercicios

A: 0, 5.00×10^{-4} eV, 1.50×10^{-3} eV.

B: *e*).

C: *a*).

D: *c*).

Esta arqueóloga desentierra los restos de una tortuga marina dentro de un antiguo círculo de piedra hecho por el hombre. El fechamiento con carbono de los restos puede decirle cuándo habitaron los humanos ese sitio.

En este capítulo comienza el estudio de la física nuclear. Se estudiarán las propiedades de los núcleos, las diversas formas de radiactividad y cómo se utiliza el decaimiento radiactivo en varios campos para determinar la edad de objetos antiguos, desde huesos y árboles hasta rocas y otras sustancias minerales, para así obtener información acerca de la historia de la Tierra.

CAPÍTULO 41

Física nuclear y radiactividad

CONTENIDO

41–1 Estructura y propiedades del núcleo
41–2 Energía de enlace y fuerzas nucleares
41–3 Radiactividad
41–4 Decaimiento alfa
41–5 Decaimiento beta
41–6 Decaimiento gamma
41–7 Conservación del número de nucleones y otras leyes de conservación
41–8 Vida media y tasa de decaimiento
41–9 Series de decaimiento
41–10 Fechamiento radiactivo
41–11 Detección de radiación

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Si la mitad de una muestra de 80 μg de $^{60}_{27}$Co decae en 5.3 años, ¿cuánto $^{60}_{27}$Co quedará en 15.9 años?

a) 10 μg.
b) 20 μg.
c) 30 μg.
d) 40 μg.
e) 0 μg.

En la primera parte del siglo XX, los experimentos de Rutherford condujeron a la idea de que, en el centro de un átomo, había un pequeño núcleo masivo. Al mismo tiempo que la teoría cuántica se desarrollaba y los científicos intentaban comprender la estructura del átomo y sus electrones, también comenzaron las investigaciones del núcleo mismo. En este capítulo y el siguiente, se dará un breve vistazo a la *física nuclear*.

41–1 Estructura y propiedades del núcleo

Una importante pregunta para los físicos era si el núcleo tenía una estructura, y cuál podría ser ésta. Ahora se sabe que el núcleo es una entidad complicada que aún no se comprende por completo. Hacia principios de la década de 1930 se desarrolló un modelo del núcleo que todavía es útil. De acuerdo con ese modelo, un núcleo se considera como un agregado de dos tipos de partículas: protones y neutrones. (Estas "partículas" también tienen propiedades ondulatorias, pero para facilitar su visualización y su mención, con frecuencia se les llama simplemente "partículas".) Un **protón** es el núcleo del átomo más simple, el hidrógeno. Tiene una carga positiva ($= +e = +1.60 \times 10^{-19}$ C, la misma magnitud que para el electrón) y una masa

$$m_p = 1.67262 \times 10^{-27}\,\text{kg}.$$

En 1932 el físico inglés James Chadwick (1891-1974) determinó la existencia del **neutrón**, que es eléctricamente neutro ($q = 0$), como indica su nombre. Su masa es apenas ligeramente mayor que la del protón:

$$m_n = 1.67493 \times 10^{-27}\,\text{kg}.$$

Estos dos constituyentes de un núcleo, neutrones y protones, se conocen de manera colectiva como **nucleones**.

Aunque el núcleo de hidrógeno consiste en un solo protón, los núcleos de todos los demás elementos constan tanto de neutrones como de protones. Los diferentes núcleos con frecuencia se conocen como **núclidos**. El número de protones en un núcleo (o núclido) se llama **número atómico** y se designa mediante el símbolo Z. El número total de nucleones, neutrones más protones, se designa mediante el símbolo A y se llama **número de masa atómica**, o en ocasiones simplemente **número de masa**. Se utiliza este nombre porque la masa de un núcleo es muy cercano a A veces la masa de un nucleón. Así, un núclido con 7 protones y 8 neutrones tiene $Z = 7$ y $A = 15$. El **número de neutrones** N es $N = A - Z$.

Para especificar un núclido dado, sólo es necesario indicar A y Z. Generalmente se usa un símbolo especial que tiene la forma

$${}^{A}_{Z}\text{X},$$

donde X es el símbolo químico para el elemento (véase el Apéndice F y la tabla periódica en la tercera de forros), A es el número de masa atómica y Z es el número atómico. Por ejemplo, ${}^{15}_{7}\text{N}$ significa un núcleo de nitrógeno que contiene 7 protones y 8 neutrones para dar un total de 15 nucleones. En un átomo neutro, el número de electrones que giran en torno al núcleo es igual al número atómico Z (pues la carga en un electrón tiene la misma magnitud pero signo opuesto que la de un protón). Las propiedades fundamentales de un átomo y la forma como interactúa con otros átomos están determinadas en gran medida por el número de electrones en el átomo neutro. En consecuencia, Z determina de qué tipo de átomo se trata: carbono, oxígeno, oro o cualquier otro. Es redundante especificar tanto el símbolo de un núcleo como su número atómico Z, como se describió líneas arriba. Si el núcleo es nitrógeno, por ejemplo, inmediatamente se sabe que $Z = 7$. Por lo tanto, en ocasiones se elimina el subíndice Z y entonces ${}^{15}_{7}\text{N}$ se escribe simplemente como ${}^{15}\text{N}$ y se lee "nitrógeno quince".

Para un tipo particular de átomo (por ejemplo, carbono), los núcleos contienen diferentes números de neutrones, aunque todos tienen el mismo número de protones. Por ejemplo, los núcleos de carbono siempre tienen 6 protones, pero pueden tener 5, 6, 7, 8, 9 o 10 neutrones. Los núcleos que contienen el mismo número de protones pero diferente número de neutrones se llaman **isótopos**. Así, ${}^{11}_{6}\text{C}$, ${}^{12}_{6}\text{C}$, ${}^{13}_{6}\text{C}$, ${}^{14}_{6}\text{C}$, ${}^{15}_{6}\text{C}$ y ${}^{16}_{6}\text{C}$ son todos isótopos del carbono. Los isótopos de un elemento dado no son todos igualmente comunes. Por ejemplo, el 98.9% del carbono que existe en la naturaleza (sobre la Tierra) es el isótopo ${}^{12}_{6}\text{C}$, y aproximadamente el 1.1% es ${}^{13}_{6}\text{C}$. Estos porcentajes se conocen como **abundancias naturales**.[†] Incluso el hidrógeno tiene isótopos: el 99.99% del hidrógeno natural es ${}^{1}_{1}\text{H}$, un protón simple, como el núcleo; también existe ${}^{2}_{1}\text{H}$, llamado **deuterio**, y ${}^{3}_{1}\text{H}$, **tritio**, que además del protón contienen 1 o 2 neutrones, respectivamente.

[†]El valor de masa para cada elemento que se menciona en la tabla periódica (en la tercera de forros) es un promedio ponderado de acuerdo con las abundancias naturales de sus isótopos.

Muchos isótopos que no se presentan de manera natural se pueden producir en el laboratorio mediante reacciones nucleares (esto se tratará más adelante). De hecho, todos los elementos más allá del uranio ($Z > 92$) no se presentan naturalmente en la Tierra y sólo se producen de manera artificial (esto es, en el laboratorio), como muchos núclidos con $Z \leq 92$.

El tamaño aproximado de los núcleos lo determinó originalmente Rutherford a partir de la dispersión de partículas cargadas mediante delgadas hojas metálicas (figura 37-17). No se puede hablar acerca de un tamaño definido para los núcleos debido a la dualidad onda-partícula: su extensión espacial es indefinida. No obstante, es posible medir un "tamaño" aproximado al dispersar electrones de alta rapidez de los núcleos. Se encontró que los núcleos tienen una forma más o menos esférica, con un radio que aumenta con A de acuerdo con la fórmula aproximada

$$r \approx (1.2 \times 10^{-15}\,\text{m})(A^{\frac{1}{3}}). \qquad \textbf{(41–1)}$$

Puesto que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, se ve que el volumen de un núcleo es aproximadamente proporcional al número de nucleones, $V \propto A$. Esto es lo que se esperaría si los nucleones fueran como bolas de billar impenetrables: si se duplica el número de bolas, se duplica el volumen total. Por lo tanto, todos los núcleos tienen casi la misma densidad y ésta es enorme (véase el ejemplo 41-1).

La abreviatura métrica para 10^{-15} m es el fermi (en honor a Enrico Fermi) o el femtómetro, fm (tabla 1-4 o en la segunda de forros de este libro). Por consiguiente, 1.2×10^{-15} m = 1.2 fm o 1.2 fermis.

Puesto que los radios nucleares varían como $A^{\frac{1}{3}}$, los núcleos más grandes, como el uranio, con $A = 238$, tienen un radio de sólo aproximadamente $\sqrt[3]{238} \approx 6$ veces el del más pequeño, hidrógeno ($A = 1$).

EJEMPLO 41–1 ESTIMACIÓN **Densidad nuclear y atómica.** Compare la densidad de la materia nuclear con la densidad de los sólidos normales.

PLANTEAMIENTO La densidad de los líquidos y sólidos normales está en el orden de 10^3 a 10^4 kg/m^3 (véase la tabla 13-1), y puesto que los átomos están cercanamente empacados, los átomos también tienen aproximadamente esta densidad. Por lo tanto, se compara la densidad (masa por volumen) de un núcleo con la de su átomo como un todo.

SOLUCIÓN La masa de un protón es mayor que la masa de un electrón por un factor

$$\frac{1.7 \times 10^{-27}\,\text{kg}}{9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg}} \approx 2 \times 10^3.$$

De esta forma, más del 99.9% de la masa de un átomo está en el núcleo, y para la estimación se puede decir que la masa del átomo es igual a la masa del núcleo, $m_{\text{núcleo}}/m_{\text{átomo}} = 1$. Los átomos tienen un radio aproximado de 10^{-10} m (capítulo 37) y los núcleos están en el orden de 10^{-15} m (ecuación 41-1). Por lo tanto, la razón entre la densidad nuclear y la densidad atómica es aproximadamente

$$\frac{\rho^3_{\text{núcleo}}}{\rho_{\text{átomo}}} = \frac{(m^3_{\text{núcleo}}/V^3_{\text{núcleo}})}{(m_{\text{átomo}}/V_{\text{átomo}})} = \left(\frac{m^3_{\text{núcleo}}}{m_{\text{átomo}}}\right)\frac{\frac{4}{3}\pi r^3_{\text{átomo}}}{\frac{4}{3}\pi r^3_{\text{núcleo}}} \approx (1)\frac{(10^{-10})^3}{(10^{-15})^3} = 10^{15}.$$

El núcleo es 10^{15} veces más denso que la materia ordinaria.

Las masas de los núcleos se pueden determinar a partir del radio de curvatura de núcleos con movimiento rápido (como iones) en un campo magnético conocido mediante un espectrómetro de masas, como se estudió en la sección 27-9. De hecho, la existencia de diferentes isótopos del mismo elemento (diferente número de neutrones) se descubrió con este dispositivo. Las masas nucleares se especifican en **unidades de masa atómica** (u). En esta escala, a un átomo $^{12}_{6}$C neutro se le asigna el valor exacto de 12.000000 u. Entonces, un neutrón tiene una masa medida de 1.008665 u, un protón 1.007276 u, y un átomo de hidrógeno neutro $^{1}_{1}$H (protón más electrón) 1.007825 u. Las masas de muchos núclidos se especifican en el Apéndice F. Se debe notar que las masas en esta tabla, como es costumbre, son para el *átomo neutro* (incluyendo electrones) y no para un núcleo solo.

⚠ **CUIDADO**
Las masas son para átomo neutro (núcleo más electrones)

Con frecuencia, las masas se especifican en la unidad de energía electrón volt. Esto es posible porque masa y energía se relacionan, y la relación precisa está dada por la ecuación de Einstein $E = mc^2$ (capítulo 36). Puesto que la masa de un protón es 1.67262×10^{-27} kg, o 1.007276 u, entonces

$$1.0000\ \text{u} = (1.0000\ \text{u})\left(\frac{1.67262 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{1.007276\ \text{u}}\right) = 1.66054 \times 10^{-27}\ \text{kg};$$

esto es equivalente a una energía (véase tabla en la segunda de forros) en MeV ($= 10^6$ eV) de

$$E = mc^2 = \frac{(1.66054 \times 10^{-27}\ \text{kg})(2.9979 \times 10^8\ \text{m/s})^2}{(1.6022 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})} = 931.5\ \text{MeV}.$$

Por lo tanto,

$$1\ \text{u} = 1.6605 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 931.5\ \text{MeV}/c^2.$$

En la tabla 41-1 se presentan las masas de algunas de las partículas básicas.

TABLA 41–1 Masas en kilogramos, unidades de masa, y MeV/c^2

	Masa		
Objeto	**kg**	**u**	**MeV/c^2**
Electrón	9.1094×10^{-31}	0.00054858	0.51100
Protón	1.67262×10^{-27}	1.007276	938.27
Átomo $^1_1$H	1.67353×10^{-27}	1.007825	938.78
Neutrón	1.67493×10^{-27}	1.008665	939.57

Tal como un electrón tiene números cuánticos de cantidad de movimiento angular orbital y de espín (momento angular intrínseco), también los tienen los núcleos y sus constituyentes, el protón y el neutrón. Protón y neutrón son partículas de espín $\frac{1}{2}$, como el electrón. Un núcleo, hecho de protones y neutrones, tiene un número cuántico de **espín nuclear** I que es la suma vectorial de los espines de todos sus nucleones (más cualquier cantidad de movimiento angular orbital) y puede ser entero o semientero, dependiendo de si está hecho de un número par o impar de nucleones. [La cantidad de movimiento angular orbital es un entero y no afecta el semientero o el entero de I.] La **cantidad de movimiento angular nuclear total** de un núcleo está dada, como se esperaría (véanse la sección 39-2 y la ecuación 39-15), por $\sqrt{I(I+1)}\,\hbar$.

Los *momentos magnéticos nucleares* se miden en términos del **magnetón nuclear**

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}, \qquad \textbf{(41–2)}$$

que se define por analogía con el magnetón de Bohr para electrones ($\mu_B = e\hbar/2m_e$, sección 39-7). Puesto que μ_N contiene la masa del protón, m_p, en lugar de la masa del electrón, es aproximadamente 2000 veces menor. El momento magnético de espín del electrón es aproximadamente de 2 magnetones de Bohr. El momento magnético del protón μ_p se midió en

$$\mu_p = 2.7928\,\mu_N.$$

No hay una explicación satisfactoria para este gran factor. El neutrón tiene un momento magnético

$$\mu_n = -1.9135\,\mu_N,$$

que sugiere que, aunque el neutrón no porta carga neta, puede tener estructura interna (quarks, como se estudiará más adelante). El signo menos para μ_n indica que su momento magnético es opuesto a su espín.

Importantes aplicaciones que se basan en el espín nuclear son la resonancia magnética nuclear (RMN) y la formación de imágenes por resonancia magnética (IRM), que se estudiarán en el siguiente capítulo (sección 42-10).

41–2 Energía de enlace y fuerzas nucleares

Energías de enlace

La masa total de un núcleo estable siempre es menor que la suma de las masas de sus protones y neutrones separados, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 41–2 **Masa del $^4_2$He comparada con sus constituyente.** Compare la masa de un átomo $^4_2$He con la masa total de sus partículas constituyentes.

PLANTEAMIENTO El núcleo del $^4_2$He contiene 2 protones y 2 neutrones. Las tablas por lo general dan las masas de átomos neutros; esto es, el núcleo más sus Z electrones, pues es así como se miden las masas. Así que debemos asegurarnos de balancear los electrones al comparar masas. Por ende, se usa la masa de $^1_1$H en lugar de la de un protón solo. Busque la masa del átomo $^4_2$He en el Apéndice F (incluye la masa de 2 electrones), así como la masa para los 2 neutrones y 2 átomos de hidrógeno (= 2 protones + 2 electrones).

SOLUCIÓN La masa de un átomo $^4_2$He neutro, según el Apéndice F, es 4.002603 u. La masa de dos neutrones y dos átomos H (2 protones que incluyen 2 electrones) es

$$\begin{aligned} 2m_{\text{n}} &= 2(1.008665\,\text{u}) = 2.017330\,\text{u} \\ 2m(^1_1\text{H}) &= 2(1.007825\,\text{u}) = \underline{2.015650\,\text{u}} \\ &\qquad \text{suma} = 4.032980\,\text{u}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la masa de $^4_2$He al medirse, resulta ser menor que las masas de sus constituyentes por una cantidad 4.032980 u − 4.002603 u = 0.030377 u.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Rastreo de las masas de los electrones

¿A dónde se fue esta masa perdida de 0.030377 u? Debe ser $E = mc^2$.

Si los cuatro nucleones súbitamente se juntan para formar un núcleo $^4_2$He la masa "perdida" aparecería como energía de otro tipo (como radiación γ, o energía cinética). La diferencia de masa (o energía) en el caso del $^4_2$He, dada en unidades de energía, es $(0.030377\,\text{u})(931.5\,\text{MeV/u}) = 28.30\,\text{MeV}$. A esta diferencia se le conoce como **energía de enlace** del núcleo y representa la cantidad de energía que se debe poner *en* el núcleo para descomponerlo en sus constituyentes. Si, por ejemplo, la masa de un núcleo de $^4_2$He fuera exactamente igual a la masa de dos neutrones más dos protones, el núcleo podría separarse sin entrada alguna de energía. Para ser estable, la masa de un núcleo *debe* ser menor que la de sus nucleones constituyentes, de manera que la entrada de energía *es necesaria* para separarlo. Note que la energía de enlace no es algo que tenga el núcleo: lo que "falta" es energía relativa a la masa total de sus constituyentes separados.

En el capítulo 37 se vio que la energía de enlace de un electrón en el átomo de hidrógeno es 13.6 eV; de manera que la masa de un átomo $^1_1$H es menor que la de un solo protón más un solo electrón por 13.6 eV/c^2. Comparada con la masa total del átomo de hidrógeno (939 MeV/c^2), esto es un valor increíblemente pequeño, 1 parte en 10^8. Las energías de enlace de los núcleos están en el orden de MeV, de manera que las energías de enlace eV de electrones se pueden ignorar. Note que las energías de enlace nuclear, comparadas con las masas nucleares, están en el orden de (28 MeV/4000 MeV) $\approx 1 \times 10^{-2}$, donde se usó la energía de enlace (véase líneas arriba) y la masa $\approx 4 \times 940$ MeV ≈ 4000 MeV del helio.

EJERCICIO A Determine cuánto menor es la masa del núcleo de $^7_3$Li, en comparación con la de sus constituyentes.

La **energía de enlace por nucleón** se define como la energía de enlace de un núcleo, dividida entre A, el número total de nucleones. Anteriormente se calculó que la energía de enlace del $^4_2$He es 28.3 MeV, de manera que su energía de enlace por nucleón es 28.3 MeV/4 = 7.1 MeV. La figura 41-1 muestra la energía de enlace por nucleón como función de A para núcleos estables. La curva se eleva conforme A aumenta y describe una especie de meseta a aproximadamente a 8.7 MeV por nucleón, arriba de $A \approx 40$. Más allá de $A \approx 80$, la curva disminuye lentamente, lo que indica que los núcleos más grandes se mantienen unidos con un poco menos de firmeza que aquellos que están a mitad de la tabla periódica. Más adelante se verá que estas características permiten la liberación de energía nuclear en los procesos de fisión y fusión.

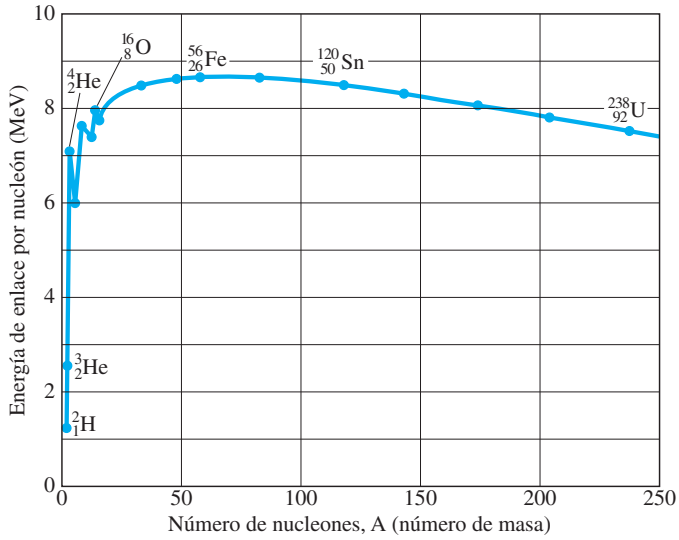


FIGURA 41–1 Energía de enlace por nucleón para los núclidos más estables, como función del número de masa A.

EJEMPLO 41–3 **Energía de enlace para el hierro.** Calcule la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón para $^{56}_{26}$Fe, el isótopo estable más común del hierro.

PLANTEAMIENTO Se resta la masa de un átomo de $^{56}_{26}$Fe de la masa total de 26 átomos de hidrógeno y 30 neutrones; todo se encuentra en el Apéndice F. Luego, convierta unidades de masa a unidades de energía; finalmente, divida entre $A = 56$, el número total de nucleones.

SOLUCIÓN $^{56}_{26}$Fe tiene 26 protones y 30 neutrones, cuyas masas separadas son

$$\begin{aligned} 26\,m(^1_1\text{H}) &= (26)(1.007825\text{ u}) = 26.20345\text{ u (incluye 26 electrones)} \\ 30\,m_\text{n} &= (30)(1.008665\text{ u}) = \underline{30.25995\text{ u}} \\ \text{sum} &= 56.46340\text{ u.} \\ \text{Se resta la masa de } ^{56}_{26}\text{Fe:} &= \underline{-55.93494\text{ u}}\ \text{(Apéndice F)} \\ \Delta m &= 0.52846\text{ u.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía de enlace es

$$(0.52846\text{ u})(931.5\text{ MeV/u}) = 492.26\text{ MeV}$$

y la energía de enlace por nucleón es

$$\frac{492.26\text{ MeV}}{56\text{ nucleones}} = 8.79\text{ MeV.}$$

NOTA La gráfica de energía de enlace por nucleón (figura 41-1) tiene un pico más o menos aquí, para el hierro, de manera que el núcleo de hierro (y sus vecinos) es el más estable de los núcleos.

EJERCICIO B Determine la energía de enlace por nucleón para $^{16}_{8}$O.

EJEMPLO 41–4 **Energía de enlace del último neutrón.** ¿Cuál es la energía de enlace del último neutrón en $^{13}_{6}$C?

PLANTEAMIENTO Si $^{13}_{6}$C perdió un neutrón, sería $^{12}_{6}$C. Restamos la masa de $^{13}_{6}$C de las masas de $^{12}_{6}$C y un neutrón libre.

SOLUCIÓN Al obtener las masas del Apéndice F, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Masa } ^{12}_{6}\text{C} &= 12.000000\text{ u} \\ \text{Masa } ^{1}_{0}\text{n} &= \underline{1.008665\text{ u}} \\ \text{Total} &= 13.008665\text{ u.} \\ \text{Se resta la masa de } ^{13}_{6}\text{C:} &\quad \underline{-13.003355\text{ u}} \\ \Delta m &= 0.005310\text{ u} \end{aligned}$$

que en energía es $(931.5\text{ MeV/u})(0.005310\text{ u}) = 4.95\text{ MeV}$. Esto es, se requerirían 4.95 MeV de entrada de energía para remover un neutrón de $^{13}_{6}$C.

Fuerzas nucleares

Los núcleos se pueden analizar no sólo desde el punto de vista de la energía, sino también desde el punto de vista de las fuerzas que los mantienen unidos. No se esperaría que una colección de protones y neutrones se juntara de manera espontánea, pues todos los protones tienen carga positiva y, por consiguiente, ejercen fuerzas eléctricas de repulsión unos sobre otros. Como los núcleos estables *sí* permanecen unidos, es claro que debe actuar otra fuerza. Puesto que esta nueva fuerza es más fuerte que la fuerza eléctrica, se le llamó **fuerza nuclear fuerte**. La fuerza nuclear fuerte es una fuerza de atracción que actúa entre todos los nucleones, protones y neutrones por igual. Así, los protones se atraen mutuamente mediante la fuerza nuclear fuerte al mismo tiempo que se repelen unos a otros mediante la fuerza eléctrica. Los neutrones, en virtud de que son eléctricamente neutros, sólo atraen a otros neutrones o protones mediante la fuerza nuclear fuerte.

La fuerza nuclear fuerte resulta ser mucho más complicada que la fuerza gravitacional y la electromagnética. Un aspecto importante de la fuerza nuclear fuerte es que es una fuerza de **corto alcance**: sólo actúa sobre una distancia muy corta. Es muy fuerte entre dos nucleones si están separados menos de aproximadamente 10^{-15} m, pero en esencia es cero si están separados por una distancia mayor que ésta. Compare esto con las fuerzas eléctrica y gravitacional, que disminuyen como $1/r^2$ pero continúan actuando a través de cualquier distancia, por lo que se llaman fuerzas de **largo alcance**.

La fuerza nuclear fuerte tiene algunas características extrañas. Por ejemplo, si un núclido contiene demasiados o muy pocos neutrones en relación con el número de protones, el enlace de los nucleones se reduce; los núclidos que están muy desequilibrados en este aspecto son inestables. Como se muestra en la figura 41-2, los núcleos estables tienden a tener el mismo número de protones y neutrones ($N = Z$) hasta aproximadamente $A = 30$. Más allá de esto, los núcleos estables contienen más neutrones que protones. Esto tiene sentido pues, conforme Z aumenta, la repulsión eléctrica aumenta, de manera que se requiere un mayor número de neutrones, que sólo ejercen la fuerza nuclear fuerte de atracción, para mantener estabilidad. Para Z muy grande, ningún número de neutrones logra superar la repulsión eléctrica enormemente aumentada. De hecho, arriba de $Z = 82$ no hay núclidos completamente estables.

Un *núcleo estable* es aquel que permanece unido de manera indefinida. Entonces, ¿qué es un *núcleo inestable*? Es aquel que se separa; y esto da por resultado decaimiento radiactivo. Antes de estudiar el importante tema de la radiactividad (siguiente sección), cabe mencionar que hay un segundo tipo de fuerza nuclear que es mucho más débil que la fuerza nuclear fuerte. Se llama **fuerza nuclear débil**, y uno está al tanto de su existencia sólo porque se manifiesta en ciertos tipos de decaimiento radiactivo. Estas dos fuerzas nucleares, la fuerte y la débil, junto con las fuerzas gravitacional y electromagnética, comprenden las cuatro fuerzas básicas de la naturaleza.

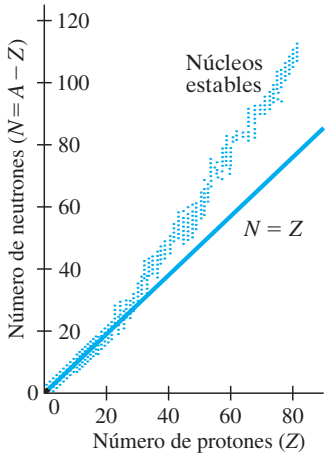


FIGURA 41–2 Número de neutrones contra número de protones para núclidos estables, que se representan mediante puntos. La línea recta representa $N = Z$.

41–3 Radiactividad

La física nuclear comenzó en 1896. En ese año, Henri Becquerel (1852-1908) hizo un importante descubrimiento: en sus estudios de fosforescencia, encontró que cierto material (que resultó contener uranio) oscurecía una placa fotográfica aun cuando la placa se envolviera para evitar la luz. Era claro que el mineral emitía algún tipo de radiación que, a diferencia de los rayos X, se producía sin ningún estímulo externo. Este nuevo fenómeno se llamó **radiactividad**.

Poco después del descubrimiento de Becquerel, Marie Curie (1867-1934) y su esposo, Pierre Curie (1859-1906), aislaron dos elementos para entonces desconocidos que eran enormemente radiactivos (figura 41-3). Estos elementos se llamaron polonio y radio. Pronto también se descubrieron otros elementos radiactivos. Se descubrió que la radiactividad en cada caso no se veía afectada por los más fuertes tratamientos físicos y químicos, incluidos el calentamiento o enfriamiento excesivos, o la acción de fuertes reactivos químicos. Se sospechaba que la fuente de radiactividad debía estar en las profundidades del átomo y que emanaba del núcleo. Se hizo evidente que la radiactividad era resultado de la **desintegración** o el **decaimiento** de un núcleo inestable. Ciertos isótopos no son estables y decaen con la emisión de algún tipo de radiación o "rayos".

FIGURA 41–3 Marie y Pierre Curie en su laboratorio (alrededor de 1906), donde descubrieron el radio.

En la naturaleza existen muchos isótopos inestables y tal radiactividad se llama "radiactividad natural". Es posible producir otros isótopos inestables en el laboratorio mediante reacciones nucleares (sección 42-1); se dice que éstos se producen "artificialmente" y que tienen "radiactividad artificial". Los isótopos radiactivos en ocasiones se conocen como **radioisótopos** o **radionúclidos**.

Rutherford y otros investigadores comenzaron a estudiar la naturaleza de los rayos emitidos en el fenómeno de la radiactividad alrededor de 1898. Clasificaron los rayos en tres tipos distintos, de acuerdo con su poder de penetración. Un tipo de radiación apenas lograba penetrar un trozo de papel. El segundo tipo era capaz de pasar a través de hasta 3 mm de aluminio. El tercero era extremadamente penetrante: podía pasar a través de varios centímetros de plomo y todavía detectarse en el otro lado. Llamaron a estos tres tipos de radiación alfa (α), beta (β) y gamma (γ), respectivamente, como las tres primeras letras del alfabeto griego.

Descubrieron que cada tipo de rayo tenía una carga diferente y, por lo tanto, se desviaba de manera diferente en un campo magnético, figura 41-4; los rayos α tenían carga positiva, los rayos β tenían carga negativa y los rayos γ eran neutros. Pronto se descubrió que los tres tipos de radiación consistían en tipos conocidos de partículas. Los rayos gamma son fotones de muy alta energía, la cual incluso era mayor que la de los rayos X. Los rayos beta son electrones, idénticos a los que giran en torno al núcleo, pero se crean dentro del mismo núcleo. Los rayos alfa (o partículas α) simplemente son núcleos de átomos de helio, ${}^4_2\text{He}$; esto es, un rayo α consiste en dos protones y dos neutrones enlazados.

Ahora se estudiará cada uno de estos tres tipos de radiactividad, o decaimiento, con más detalle.

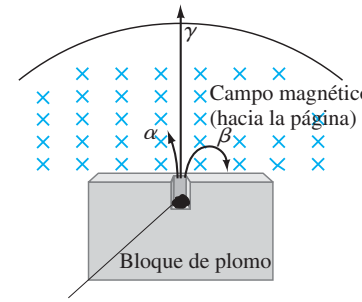


FIGURA 41–4 Los rayos alfa y beta se desvían en direcciones opuestas mediante un campo magnético, mientras que los rayos gamma no se desvían en absoluto.

41–4 Decaimiento alfa

Los experimentos demuestran que, cuando un núcleo decae, se conserva el número de nucleones (= número de masa A), así como la carga eléctrica (= Ze). Cuando un núcleo emite una partícula α (${}^4_2\text{He}$), el núcleo restante será diferente del original: perdió dos protones y dos neutrones. El radio 226 (${}^{226}_{88}\text{Ra}$), por ejemplo, es un emisor α. Decae a un núcleo con $Z = 88 - 2 = 86$ y $A = 226 - 4 = 222$. El núcleo con $Z = 86$ es radón (Rn), véase el Apéndice F o la tabla periódica. Así, el radio decae a radón con la emisión de una partícula α. Esto se escribe

$$ {}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He}. $$

Véase la figura 41-5.

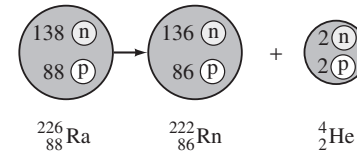
Cuando ocurre un decaimiento α, se forma un elemento diferente. El **núcleo hijo** o **núcleo derivado** (${}^{222}_{86}\text{Rn}$ en este caso) es diferente del **núcleo padre** o **núcleo precursor** (${}^{226}_{88}\text{Ra}$ en este caso). Esta transformación de un elemento en otro se llama **transmutación**.

El decaimiento alfa se expresa en general como

$$ {}^A_Z\text{N} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{N}' + {}^4_2\text{He} \qquad \text{[decaimiento } \alpha\text{]} $$

donde N es el padre, N' el hijo, y Z y A son el número atómico y el número de masa atómica, respectivamente, del padre.

FIGURA 41–5 Decaimiento radiactivo de radio a radón con emisión de una partícula alfa.



EJERCICIO C ¿A qué elemento decae el ${}^{154}_{66}\text{Dy}$ mediante emisión α? *a*) Pb, *b*) Gd, *c*) Sm, *d*) Er, *e*) Yb.

El decaimiento alfa ocurre porque la fuerza nuclear fuerte no es capaz de mantener juntos núcleos muy grandes. La fuerza nuclear es una fuerza de corto alcance: sólo actúa entre nucleones vecinos. Pero la fuerza eléctrica actúa siempre a través de un núcleo grande. Para núcleos muy grandes, Z grande significa que la fuerza eléctrica de repulsión se vuelve tan grande (ley de Coulomb) que la fuerza nuclear fuerte es incapaz de mantener unido al núcleo.

La inestabilidad del núcleo padre se expresa en términos de energía (o masa): la masa del núcleo padre es mayor que la masa del núcleo hijo más la masa de la partícula α. La diferencia de masa aparece como la energía cinética, que se lleva la partícula α y el núcleo hijo que retrocede. La energía total liberada se llama **energía de desintegración**, Q, o **valor Q**, del decaimiento. De acuerdo con la conservación de la energía

$$M_P c^2 = M_D c^2 + m_\alpha c^2 + Q,$$

donde Q es igual a la energía cinética del núcleo hijo y la partícula α, y M_P, M_D y m_α son las masas del núcleo padre, núcleo hijo y partícula α, respectivamente. Por ende,

$$Q = M_P c^2 - (M_D + m_\alpha)c^2. \qquad \textbf{(41–3)}$$

Si el padre tiene *menos* masa que el hijo más la partícula α (de manera que $Q < 0$), el decaimiento no podría ocurrir de manera espontánea, pues se violaría la ley de conservación de la energía.

EJEMPLO 41–5 **Energía liberada en el decaimiento del uranio.** Calcule la energía de desintegración cuando $^{232}_{92}$U (masa = 232.037156 u) decae a $^{228}_{90}$Th (228.028741 u) con la emisión de una partícula α. (Como siempre, las masas se dan para átomos neutros.)

PLANTEAMIENTO Se utiliza la conservación de la energía que se expresa en la ecuación 41-3. $^{232}_{92}$U es el padre, $^{228}_{90}$Th es el hijo.

SOLUCIÓN Dado que la masa del $^{4}_{2}$He es 4.002603 u (Apéndice F), la masa total en el estado final es

$$228.028741\text{ u} + 4.002603\text{ u} = 232.031344\text{ u}.$$

La pérdida de masa cuando el $^{232}_{92}$U decae es

$$232.037156\text{ u} - 232.031344\text{ u} = 0.005812\text{ u}.$$

Puesto que 1 u = 931.5 MeV, la energía Q que se libera es

$$Q = (0.005812\text{ u})(931.5\text{ MeV/u}) = 5.4\text{ MeV}$$

y esta energía aparece como energía cinética de la partícula α y del núcleo hijo o derivado.

EJEMPLO 41–6 **Energía cinética de la α en decaimiento del $^{232}_{92}$U.** Para el decaimiento del $^{232}_{92}$U del ejemplo 41-5, ¿cuánto de los 5.4 MeV de la energía de desintegración se llevará la partícula α?

PLANTEAMIENTO En cualquier reacción, la cantidad de movimiento se debe conservar, al igual que la energía.

SOLUCIÓN Antes de la desintegración, se puede suponer que el núcleo está en reposo, de manera que la cantidad de movimiento total era cero. Después de la desintegración, la cantidad de movimiento vectorial total todavía debe ser cero, de manera que la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula α debe ser igual a la magnitud de la cantidad de movimiento del núcleo hijo (figura 41-6):

$$m_\alpha v_\alpha = m_D v_D.$$

Por lo tanto, $v_\alpha = m_D v_D / m_\alpha$ y la energía cinética de α es

$$K_\alpha = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \tfrac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{m_D v_D}{m_\alpha}\right)^2 = \tfrac{1}{2} m_D v_D^2 \left(\frac{m_D}{m_\alpha}\right) = \left(\frac{m_D}{m_\alpha}\right) K_D$$

$$= \left(\frac{228.028741\text{ u}}{4.002603\text{ u}}\right) K_D = 57 K_D.$$

La energía de desintegración total es $Q = K_\alpha + K_D = 57K_D + K_D = 58K_D$. En consecuencia,

$$K_\alpha = \frac{57}{58} Q = 5.3\text{ MeV}.$$

La partícula α más ligera se lleva (57/58) o el 98% de la energía cinética total.

FIGURA 41–6 Conservación de la cantidad de movimiento en el ejemplo 41-6.

Teoría del decaimiento α: Tunelamiento

Si la masa del núcleo hijo más la masa de la partícula α es menor que la masa del núcleo padre (de manera que energéticamente se permite decaer a este último), ¿por qué existen aún núcleos padres? Esto es, ¿por qué no todos los núcleos radiactivos decayeron hace tiempo, justo después de que se formaron (en supernovas)? El decaimiento se puede entender si se usa el modelo de un núcleo que tenga una partícula alfa atrapada dentro de él. La energía potencial que "ve" la partícula α tendría una forma parecida a lo que muestra la figura 41-7. El pozo de energía potencial (aproximadamente cuadrado) entre $r = 0$ y $r = R_0$ representa la fuerza nuclear atractiva de corto alcance. Más

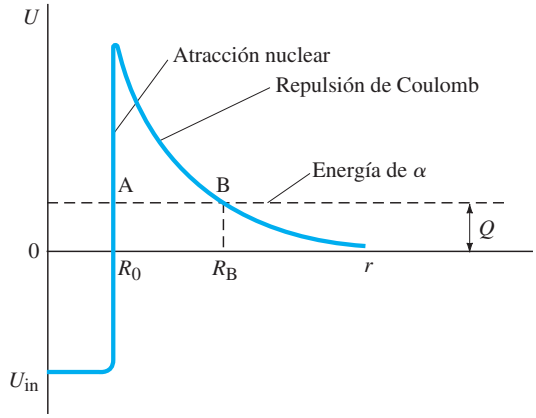


FIGURA 41–7 Energía potencial para partícula alfa y núcleo (hijo o derivado), que muestra la barrera de Coulomb a través de la cual la partícula α debe hacer tunelamiento para escapar. También se muestra el valor Q de la reacción. Esta gráfica supone simetría esférica, de manera que el pozo central tiene diámetro $2R_0$.

allá del radio nuclear, R_0, la repulsión de Coulomb domina (pues la fuerza nuclear cae a cero) y se ve la característica dependencia $1/r$ del potencial de Coulomb. La partícula α, atrapada dentro del núcleo, se puede considerar como en movimiento de ida y vuelta entre las paredes de potencial. Puesto que la energía potencial justo más allá de $r = R_0$ es mayor que la energía de la partícula α (línea punteada), la partícula α no podría escapar del núcleo si estuviera gobernada por la física clásica. Pero, de acuerdo con la mecánica cuántica, existe una probabilidad distinta de cero de que la partícula α puede realizar **tunelamiento** a través de la barrera de Coulomb, desde el punto A hasta el punto B en la figura 41-7, como se estudió en la sección 38-10. La altura y el ancho de la barrera afectan la tasa a la que decaen los núcleos (sección 41-8). Debido a esta barrera, los tiempos de vida de los núcleos inestables α pueden ser bastante largos, desde una fracción de microsegundo hasta aproximadamente 10^{10} años. Note en la figura 41-7 que el valor Q representa la energía cinética total cuando la partícula α está lejos del núcleo.

Una forma simple de observar el tunelamiento es mediante el principio de incertidumbre, el cual dice que la conservación de la energía se puede violar por una cantidad ΔE para una longitud de tiempo Δt dada por

$$(\Delta E)(\Delta t) \approx \frac{h}{2\pi}.$$

En consecuencia, la mecánica cuántica permite que se viole la conservación de la energía durante breves periodos que pueden ser suficientemente largos para que una partícula α efectúe tunelamiento a través de la barrera. ΔE representaría la diferencia de energía entre la altura promedio de la barrera y la energía de la partícula, y Δt el tiempo para pasar a través de la barrera. Cuanto más alta y ancha sea la barrera, menos tiempo tendrá la partícula α para escapar y menos probabilidad tendrá de hacerlo. De esta forma, la altura y el ancho de esta barrera controlan la tasa de decaimiento y la vida media de un isótopo.

¿Por qué partículas α?

Tal vez se pregunte por qué los núcleos emiten esta combinación de cuatro nucleones que se conoce como partícula α. ¿Por qué no sólo cuatro nucleones separados, o incluso uno? La respuesta es que la partícula α está muy firmemente unida, de manera que su masa es significativamente menor que la de cuatro nucleones separados. Como se vio en el ejemplo 41-2, dos protones y dos neutrones por separado tienen una masa total de aproximadamente 4.032980 u (electrones incluidos). Para el decaimiento del $^{232}_{92}\text{U}$ que se estudió en el ejemplo 41-5, la masa total del hijo $^{228}_{90}\text{Th}$ más cuatro nucleones separados es 232.061721 u, que es mayor que la masa del padre $^{232}_{92}\text{U}$ (232.037156). Tal decaimiento podría no ocurrir porque violaría la conservación de la energía. De hecho, nunca se ha visto que $^{232}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{228}_{90}\text{Th} + 2\text{n} + 2\text{p}$. De igual modo, casi siempre es cierto que la emisión de un solo nucleón es energéticamente imposible.

Una aplicación: Detectores de humo

FÍSICA APLICADA
Detector de humo

Una aplicación muy difundida de la física nuclear está presente en muchos hogares en la forma de un ordinario **detector de humo**. El tipo más común de detector contiene alrededor de 0.2 mg del isótopo radiactivo de americio, $^{241}_{95}\text{Am}$, en la forma de AmO_2. La radiación continuamente ioniza las moléculas de nitrógeno y oxígeno en el espacio de aire entre dos placas con carga positiva. La conductividad resultante permite una pequeña corriente eléctrica estable. Si entra humo, las partículas de humo, y no las moléculas del aire, absorben la radiación, por lo que se reduce la corriente. La electrónica del dispositivo detecta la caída de corriente y activa la alarma. La dosis de radiación que escapa de un detector de humo de americio intacto es mucho menor que el entorno radiactivo natural, y por ende se puede considerar relativamente inocua. No hay duda de que los detectores de humo salvan vidas y reducen el daño a los inmuebles.

41–5 Decaimiento beta

Decaimiento β^-

La transmutación de los elementos también ocurre cuando un núcleo decae mediante decaimiento β; esto es, con la emisión de un electrón o partícula β^-. El núcleo $^{14}_{6}\text{C}$, por ejemplo, emite un electrón cuando decae:

$$^{14}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\text{N} + \text{e}^- + \text{neutrino},$$

donde e^- es el símbolo para el electrón. La partícula conocida como neutrino, cuya carga $q = 0$ y cuya masa es muy pequeña o cero, inicialmente no se detectó y sólo más tarde se supuso su existencia, como se estudiará más adelante en esta sección. Cuando se emite un electrón no se pierden nucleones, y el número total de nucleones, A, es el mismo en el núcleo hijo que en el padre. Pero, puesto que se emite un electrón del núcleo en sí, la carga en el núcleo hijo es $+1e$ mayor que el del padre. El núcleo padre en el decaimiento descrito anteriormente tiene $Z = +6$, de manera que, a partir de la conservación de la carga, el núcleo restante debe tener una carga $+7e$. Así que el núcleo hijo tiene $Z = 7$, que es nitrógeno.

CUIDADO
El e^- del decaimiento β proviene del núcleo (no es un electrón orbital)

Se debe notar cuidadosamente que el electrón emitido en el decaimiento β *no* es un electrón orbital. En vez de ello, el electrón se crea *dentro del mismo núcleo*. Lo que ocurre es que uno de los neutrones cambia a un protón y en el proceso (para conservar carga) emite un electrón. De hecho, los neutrones libres en realidad decaen de esta forma:

$$\text{n} \rightarrow \text{p} + \text{e}^- + \text{neutrino}.$$

Para recordar su origen en el núcleo, los electrones que se emiten en el decaimiento β con frecuencia se conocen como "partículas β". No obstante, son indistinguibles de los electrones orbitales.

EJEMPLO 41–7 **Liberación de energía en decaimiento de $^{14}_{6}C$.** ¿Cuánta energía se libera cuando el $^{14}_{6}C$ decae a $^{14}_{7}N$ por emisión β?

PLANTEAMIENTO Encuentre la diferencia de masa antes y después del decaimiento, Δm. La energía liberada es $E = (\Delta m)c^2$. Las masas que se proporcionan en el Apéndice F son las del átomo neutro, y se debe seguir la pista de los electrones implicados. Suponga que el núcleo padre tiene seis electrones en órbita, de manera que es neutro; su masa es 14.003242 u. El hijo en este decaimiento, $^{14}_{7}N$, no es neutro pues tiene los mismos seis electrones orbitales que giran en torno a él, pero el núcleo tiene una carga de $+7e$. Sin embargo, la masa de este hijo con sus seis electrones, más la masa del electrón emitido (que hace un total de siete electrones), es justo la masa de un átomo de nitrógeno neutro.

SOLUCIÓN La masa total en el estado final es

$$(\text{masa de núcleo } ^{14}_{7}N + 6 \text{ electrones}) + (\text{masa de 1 electrón}),$$

y esto es igual a

$$\text{masa de } ^{14}_{7}N \text{ neutro(incluye 7 electrones)},$$

que, de acuerdo con el Apéndice F, es una masa de 14.003074 u. De manera que la diferencia de masa es 14.003242 u − 14.003074 u = 0.000168 u, lo cual es equivalente a un cambio en energía $\Delta m\, c^2 = (0.000168 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 0.156 \text{ MeV}$ o 156 keV.

NOTA El neutrino no contribuye a la masa ni al equilibrio de carga, pues tiene $q = 0$, y $m \approx 0$.

⚠ CUIDADO

Tenga cuidado con las masas atómicas y del electrón en el decaimiento β

De acuerdo con el ejemplo 41-7, se esperaría que el electrón emitido tuviera una energía cinética de 156 keV. (El núcleo hijo, en virtud de su masa mucho mayor que la del electrón, retrocede con velocidad muy baja y, por lo tanto, obtiene muy poco de la energía cinética; véase el ejemplo 41-6.) De hecho, mediciones muy cuidadosas indican que algunas partículas β emitidas sí tienen energía cinética cercana a este valor calculado. Pero la gran mayoría de los electrones emitidos tienen un poco menos de energía. De hecho, la energía del electrón emitido puede estar en alguna parte entre cero y el valor máximo que se calculó anteriormente. Este rango de energía cinética del electrón se encontró para cualquier decaimiento β. Fue como si se violara la ley de conservación de la energía, y de hecho Bohr realmente consideró esta posibilidad. Experimentos cuidadosos indicaban que la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular tampoco parecen conservarse. Los físicos tenían problemas ante la posibilidad de renunciar a estas leyes, que funcionaron tan bien en todas las situaciones anteriores.

En 1930 Wolfgang Pauli propuso una solución alternativa: durante el decaimiento β, además del electrón, quizá se emitía una nueva partícula que era muy difícil de detectar. Esta partícula hipotética tal vez tenía la energía, cantidad de movimiento lineal y cantidad de movimiento angular requeridos para mantener vigentes las leyes de conservación. El gran físico italiano Enrico Fermi (1901-1954; figura 41-8) llamó **neutrino** (que significa "el pequeño neutro") a esta nueva partícula. En 1934 Fermi elaboró una detallada teoría del decaimiento β. (Fue Fermi quien, en esta teoría, postuló la existencia de la cuarta fuerza en la naturaleza, que se llama *fuerza nuclear débil*.) El neutrino del electrón tiene carga cero, espín de $\frac{1}{2}\hbar$, y durante mucho tiempo se consideró que tenía masa cero, aunque en la actualidad se tiene la certeza de que su masa es muy pequeña ($< 0.14 \text{ eV}/c^2$). Si su masa fuera cero, se parecería mucho a un fotón, en tanto que sería neutro y viajaría a la rapidez de la luz. Pero el neutrino es muy difícil de detectar. En 1956 experimentos complejos produjeron mayor evidencia para la existencia del neutrino; pero para entonces, la mayoría de los físicos ya aceptaban su existencia.

FIGURA 41–8 Enrico Fermi, como se le retrata en una estampilla postal estadounidense. Fermi contribuyó significativamente tanto a la física teórica como a la física experimental, una hazaña casi única en los tiempos modernos.

El símbolo para el neutrino es la letra griega nu (ν). La forma correcta de escribir el decaimiento del $^{14}_{6}C$ es entonces

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}.$$

La barra ($\bar{}$) sobre el símbolo del neutrino es para indicar que es un "antineutrino". (La razón por la que se llama antineutrino en lugar de simplemente neutrino no tiene que preocuparle por ahora; se estudiará en el capítulo 43.)

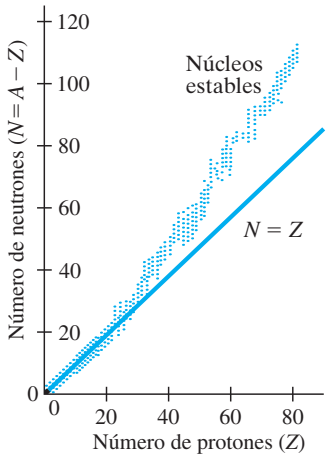


FIGURA 41–2 (Repetida.) Número de neutrones contra número de protones para núclidos estables, que se representan mediante puntos. La línea recta representa $N = Z$.

Decaimiento β^+

Muchos isótopos decaen mediante emisión de electrones. Siempre son isótopos que tienen demasiados neutrones en comparación con el número de protones. Esto es, son isótopos que se encuentran arriba de los isótopos estables que se grafican en la figura 41-2. Pero, ¿qué hay de los isótopos inestables que tienen muy pocos neutrones en comparación con su número de protones, aquellos que caen por debajo de los isótopos estables de la figura 41-2? Resulta que éstos decaen por emisión de un **positrón** en lugar de un electrón. Un positrón (en ocasiones llamado partícula e^+ y β^+) tiene la misma masa que el electrón, pero tiene una carga positiva de $+1e$. Como es tan parecido a un electrón, excepto por su carga, el positrón se llama **antipartícula**[†] del electrón. Un ejemplo de decaimiento β^+ es el de ${}^{19}_{10}\text{Ne}$:

$$ {}^{19}_{10}\text{Ne} \rightarrow {}^{19}_{9}\text{F} + \text{e}^+ + \nu, $$

donde e^+ representa un positrón. Note que el ν emitido aquí es un neutrino, mientras que el emitido en el decaimiento β^- se llama antineutrino. Por ende, se emite un antielectrón (= positrón) con un neutrino, mientras que un antineutrino se emite con un electrón; esto da cierto equilibrio, como se estudiará en el capítulo 43.

Los decaimientos β^- y β^+, en general, se pueden expresar del modo siguiente:

$$ {}^{A}_{Z}\text{N} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\text{N}' + \text{e}^- + \bar{\nu} \qquad \text{[decaimiento } \beta^-\text{]} $$
$$ {}^{A}_{Z}\text{N} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{N}' + \text{e}^+ + \nu, \qquad \text{[decaimiento } \beta^+\text{]} $$

donde N es el núcleo padre y N′ es el hijo.

Captura electrónica

Además de la emisión β^- y β^+, existe un tercer proceso relacionado. Es la **captura electrónica** (abreviado CE en el Apéndice F) y ocurre cuando un núcleo absorbe uno de sus electrones en órbita. Un ejemplo es el ${}^{7}_{4}\text{Be}$, que como resultado se convierte en ${}^{7}_{3}\text{Li}$. El proceso se escribe

$$ {}^{7}_{4}\text{Be} + \text{e}^- \rightarrow {}^{7}_{3}\text{Li} + \nu, $$

o, en general,

$$ {}^{A}_{Z}\text{N} + \text{e}^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{N}' + \nu. \qquad \text{[captura electrónica]} $$

Por lo general, se captura un electrón del nivel más interno (K), en cuyo caso el proceso se llama **captura K**. El electrón desaparece en el proceso, y un protón en el núcleo se convierte en neutrón; como resultado, se emite un neutrino. Este proceso se infiere experimentalmente mediante la detección de los rayos X emitidos (debido a otros electrones que saltan hacia abajo para llenar el estado vacío) justo de la energía adecuada.

En el decaimiento β, la fuerza nuclear débil desempeña un papel crucial. El neutrino es único en que interactúa con la materia sólo mediante la fuerza débil, por lo que es muy difícil de detectar.

41–6 Decaimiento gamma

Los rayos gamma son fotones que poseen muy alta energía. Tienen su origen en el decaimiento de un núcleo, en forma muy parecida a la emisión de fotones mediante átomos excitados. Al igual que un átomo, un núcleo puede encontrarse en un estado excitado. Cuando salta hacia un estado de energía inferior, o hacia el estado fundamental, emite un fotón que se llama rayo γ. Los posibles niveles de energía de un núcleo están mucho más separados que los de un átomo: en el orden de keV o MeV, en comparación con unos cuantos eV en el caso de los electrones en un átomo. Así, los fotones emitidos tienen energías que pueden variar desde unos cuantos keV hasta varios MeV. Para un decaimiento dado, el rayo γ siempre tiene la misma energía. Puesto que un rayo γ no conduce carga, no hay cambio en el elemento como resultado de un decaimiento γ.

¿Cómo es que llega un núcleo a un estado excitado? En ocasiones, por una colisión violenta con otra partícula. De manera más común, el núcleo que permanece después de un decaimiento radiactivo previo, puede estar en un estado excitado. En el diagrama de niveles de energía de la figura 41-9 se presenta un ejemplo típico. El ${}^{12}_{5}\text{B}$

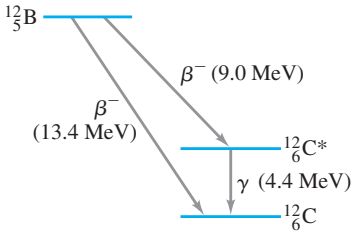


FIGURA 41–9 Diagrama de niveles de energía que muestra cómo el ${}^{12}_{5}\text{B}$ decae al estado fundamental de ${}^{12}_{6}\text{C}$ mediante decaimiento β (energía total liberada = 13.4 MeV), o, en vez de ello, puede experimentar un decaimiento β hacia un estado excitado del ${}^{12}_{6}\text{C}$ (que se indica mediante *), que posteriormente decae a su estado fundamental al emitir un rayo γ de 4.4 MeV.

[†]Este concepto se estudia en el capítulo 43. Brevemente, una antipartícula tiene la misma masa que su partícula correspondiente, pero carga opuesta. Una partícula y su antipartícula pueden aniquilarse una a otra rápidamente, lo que libera energía (rayos γ).

puede decaer mediante decaimiento β directamente al estado fundamental del $^{12}_{6}C$; o sufrir decaimiento β hacia un estado excitado del $^{12}_{6}C$, que entonces decae mediante emisión de un rayo γ de 4.4 MeV al estado fundamental.

El decaimiento γ se expresa como

$$^{A}_{Z}N^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}N + \gamma, \qquad \text{[decaimiento } \gamma\text{]}$$

donde el asterisco significa "estado excitado" de ese núcleo.

Tal vez usted se pregunte cuál es la diferencia entre un rayo γ y un rayo X. Ambos son radiación electromagnética (fotones) y, aunque los rayos γ por lo general tienen mayor energía que los rayos X, su rango de energías se traslapa en cierta medida. La diferencia no es intrínseca. El término rayo X se usa si el fotón se produce mediante una interacción electrón-átomo, y rayo γ si el fotón se produce en un proceso nuclear.

Isómeros; conversión interna

En algunos casos, un núcleo permanece en un estado excitado durante algún tiempo antes de emitir un rayo γ. Se dice entonces que el núcleo está en un **estado metaestable** y se llama **isómero**.

En ocasiones, un núcleo excitado puede regresar al estado fundamental mediante otro proceso conocido como **conversión interna**, sin rayo γ emitido. En este proceso, el núcleo excitado interactúa con uno de los electrones orbitales y expulsa este electrón del átomo con la misma energía cinética (menos la energía de enlace del electrón) que tendría un rayo γ emitido.

41–7 Conservación del número de nucleones y otras leyes de conservación

En los tres tipos de decaimiento radiactivo, las leyes de conservación clásicas se sostienen. Energía, cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular y carga eléctrica se conservan. Estas cantidades son las mismas antes y después del decaimiento. Pero también se revela una nueva ley de conservación, la **ley de conservación de número de nucleones**. De acuerdo con esta ley, el número total de nucleones (A) permanece constante en cualquier proceso, aunque un tipo puede cambiar en el otro tipo (protones en neutrones o viceversa). Esta ley se sostiene en los tres tipos de decaimiento. La tabla 41-2 brinda un resumen de los decaimientos α, β y γ. [En el capítulo 43 se generalizará esto y se le llamará conservación de número bariónico.]

TABLA 41–2 Los tres tipos de decaimiento radiactivo

Decaimiento α:
$^{A}_{Z}N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}N' + {}^{4}_{2}He$
Decaimiento β:
$^{A}_{Z}N \rightarrow {}^{A}_{Z+1}N' + e^{-} + \bar{\nu}$
$^{A}_{Z}N \rightarrow {}^{A}_{Z-1}N' + e^{+} + \nu$
$^{A}_{Z}N + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}N' + \nu$ [EC][†]
Decaimiento γ:
$^{A}_{Z}N^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}N + \gamma$

[†] Captura electrónica.
*Indica el estado excitado de un núcleo.

41–8 Vida media y tasa de decaimiento

Una muestra macroscópica de cualquier isótopo radiactivo consiste en un gran número de núcleos radiactivos. Estos núcleos no decaen todos al mismo tiempo. En vez de ello, decaen uno por uno a lo largo de cierto periodo. Éste es un proceso aleatorio: no es posible predecir exactamente cuándo decaerá un núcleo determinado. Pero sí se puede determinar, sobre una base probabilística, aproximadamente cuántos núcleos en una muestra decaerán en un periodo dado, suponiendo que cada núcleo tiene la misma probabilidad de decaer en cada segundo de su existencia.

De esta forma, el número de decaimientos ΔN que ocurren en un intervalo de tiempo muy corto Δt es proporcional a Δt y al número total N de núcleos radiactivos presentes:

$$\Delta N = -\lambda N\, \Delta t \qquad \textbf{(41–4a)}$$

donde el signo menos significa que N disminuye. Esto se rescribe para obtener la tasa de decaimiento:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N. \qquad \textbf{(41–4b)}$$

En estas ecuaciones, λ es una constante de proporcionalidad llamada **constante de decaimiento**, que es diferente para distintos isótopos. Cuanto más grande sea λ, mayor será la tasa de decaimiento y se dice que ese isótopo es más "radiactivo". El número

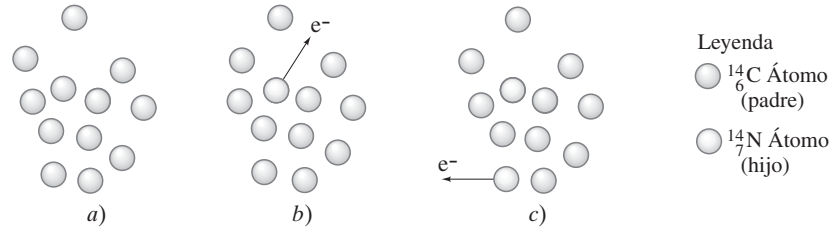


FIGURA 41–10 Los núcleos radiactivos decaen uno por uno. De esta forma, el número de núcleos padres en una muestra disminuye continuamente. Cuando un núcleo de $^{14}_{6}$C emite un electrón, el núcleo se convierte en un núcleo $^{14}_{7}$N.

de decaimientos que ocurren en el corto intervalo de tiempo Δt se designa ΔN porque cada decaimiento que ocurre corresponde a una disminución de uno en el número N de núcleos presentes. Esto es, el decaimiento radiactivo es un proceso de "un tiro", figura 41-10. Una vez que un núcleo padre particular decae en el núcleo hijo, no puede hacerlo de nuevo.

Si se toma el límite $\Delta t \to 0$ en la ecuación 41-4, ΔN será pequeño en comparación con N, y se puede escribir la ecuación en forma infinitesimal como

$$dN = -\lambda N\, dt. \qquad \textbf{(41–5)}$$

Es posible determinar N como función de t al reordenar esta ecuación como

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$$

y luego integrar desde $t = 0$ hasta $t = t$:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int_0^t \lambda\, dt,$$

donde N_0 es el número de núcleos padres presentes en $t = 0$, y N es el número que queda en el tiempo t. La integración da

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

o

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad \textbf{(41–6)}$$

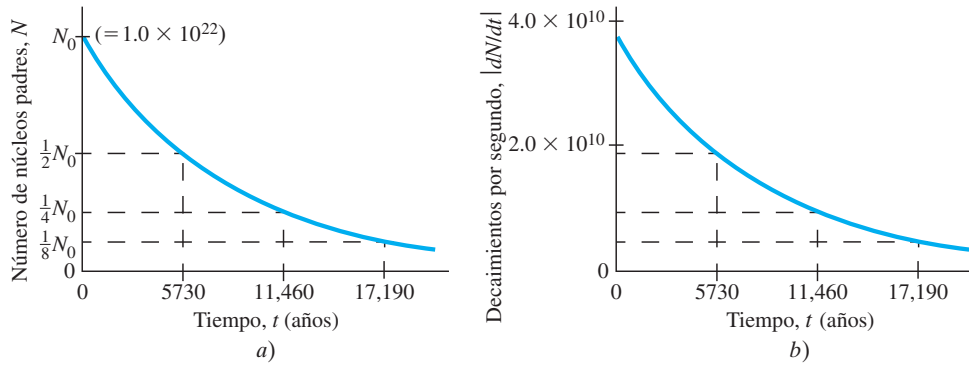
La ecuación 41-6 se llama **ley de decaimiento radiactivo**, y establece que el número de núcleos radiactivos en una muestra dada disminuye exponencialmente en el tiempo. Esto se muestra en la figura 41-11a para el caso del $^{14}_{6}$C cuya constante de decaimiento es $\lambda = 3.83 \times 10^{-12}\ \text{s}^{-1}$.

La tasa de decaimiento en una muestra pura, o número de decaimientos por segundo, es

$$\left|\frac{dN}{dt}\right|,$$

que también se llama **actividad** de la muestra. Se usan signos de valor absoluto para convertir la actividad en un número positivo (dN/dt es negativo porque el número de núcleos padres N disminuye). El símbolo R también se usa para actividad, $R = |dN/dt|$.

FIGURA 41–11 *a*) El número N de núcleos padres en una muestra dada de $^{14}_{6}$C disminuye exponencialmente. Aquí se establece que $N_0 = 1.00 \times 10^{22}$, como se verá en el texto dentro de poco. *b*) El número de decaimientos por segundo también disminuye exponencialmente. La vida media (ecuación 41-8) del $^{14}_{6}$C es de aproximadamente 5730 años, lo que significa que el número de núcleos padres, N, y la tasa de decaimiento, $|dN/dt|$, disminuyen a la mitad cada 5730 años.



A partir de las ecuaciones 41-5 y 41-6,

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \qquad \textbf{(41–7a)}$$

En $t = 0$, la actividad es

$$\left|\frac{dN}{dt}\right|_0 = \lambda N_0. \qquad \textbf{(41–7b)}$$

Por lo tanto, a cualquier otro tiempo t, la actividad es

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|\frac{dN}{dt}\right|_0 e^{-\lambda t}, \qquad \textbf{(41–7c)}$$

de manera que la actividad disminuye exponencialmente en el tiempo a la misma tasa que para N (figura 41-11b). La ecuación 41-7c a veces se conoce como **ley de decaimiento radiactivo** (al igual que la ecuación 41-6), y se puede escribir con R para representar la actividad, $R = |dNvdt|$, como

$$R = R_0 e^{-\lambda t}. \qquad \textbf{(41–7d)}$$

La tasa de decaimiento de cualquier isótopo con frecuencia se especifica al indicar su vida media en vez de la constante de decaimiento λ. La **vida media** de un isótopo se define como el tiempo que tarda en decaer la mitad de la cantidad original de isótopo en una muestra dada. Por ejemplo, la vida media del $^{14}_{6}$C es de aproximadamente 5730 años. Si en algún tiempo un trozo de madera petrificada contiene, por ejemplo, 1.00×10^{22} núcleos de $^{14}_{6}$C entonces 5730 años después contendrá sólo 0.50×10^{22} núcleos. Después de otros 5730 años contendrá 0.25×10^{22} núcleos, y así sucesivamente. Esto es característico de la función exponencial, y se muestra en la figura 41-11a. Puesto que la tasa de decaimiento $|dN/dt|$ es proporcional a N, también disminuye en un factor de 2 cada vida media, figura 41-11b.

EJERCICIO D La vida media del $^{22}_{11}$Na es de 2.6 años. ¿Cuánto quedará de una muestra de 1.0 μg de $^{22}_{11}$Na después de 5.2 años? *a*) Nada. *b*) $\frac{1}{8}\,\mu$g. *c*) $\frac{1}{4}\,\mu$g. *d*) $\frac{1}{2}\,\mu$g. *e*) 0.693 μg.

EJERCICIO E Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, página 1104, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Las vidas medias de los isótopos radiactivos conocidos varían desde un lapso tan corto como 10^{-22} s hasta alrededor de 10^{28} s (aproximadamente 10^{21} años). En el Apéndice F se indican las vidas medias de muchos isótopos. Debe quedar claro que la vida media (que se designa $T_{\frac{1}{2}}$) tiene una relación inversa con la constante de decaimiento. Cuanto más larga es la vida media de un isótopo, más lentamente decaerá y, por lo tanto, λ será menor. La relación precisa se obtiene a partir de la ecuación 41-6 al establecer que $N = N_0/2$ en $t = T_{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}} \quad \text{o} \quad e^{\lambda T_{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Obtenemos los logaritmos naturales de ambos lados ["ln" y "e" son operaciones inversas, lo que significa que $\ln(e^x) = x$] y resulta

$$\ln\left(e^{\lambda T_{\frac{1}{2}}}\right) = \ln 2, \quad \text{de manera que} \quad \lambda T_{\frac{1}{2}} = \ln 2$$

y

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \qquad \textbf{(41–8)}$$

Entonces la ecuación 41-6 se puede escribir como

$$N = N_0 e^{-0.693 t/T_{\frac{1}{2}}}.$$

En ocasiones se cita la **vida media τ** de un isótopo, que se define como $\tau = 1/\lambda$ (véase también el problema 80); de este modo, la ecuación 41-6 se expresa como

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

tal como para los circuitos RC y LR (capítulos 26 y 30, donde τ se llama constante de tiempo). Puesto que

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{0.693} \qquad \textbf{(41–9a)}$$

la vida promedio y la vida media difieren en un factor de 0.693; confundirlas conduce a serios errores. La *ley de decaimiento radiactivo*, ecuación 41-7d, se escribe simplemente como

$$R = R_0 e^{-t/\tau}. \qquad \textbf{(41–9b)}$$

EJEMPLO 41–8 **Actividad de una muestra.** El isótopo $^{14}_{6}C$ tiene una vida media de 5730 años. Si una muestra contiene 1.00×10^{22} núcleos de carbono 14, ¿cuál es la actividad de la muestra?

PLANTEAMIENTO Primero nos basamos en la vida media para encontrar la constante de decaimiento (ecuación 41-8) y esto nos permite encontrar la actividad, ecuación 41-7b o 41-5. El número de segundos en un año es (60 s/min)(60 min/h)(24 h/día) $\left(365\frac{1}{4}\text{ d/año}\right) = 3.156 \times 10^7$ s.

SOLUCIÓN La constante de decaimiento λ es, a partir de la ecuación 41-8,

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{0.693}{(5730\text{ año})(3.156 \times 10^7\text{ s/año})} = 3.83 \times 10^{-12}\text{ s}^{-1}.$$

De acuerdo con la ecuación 41-7b, la actividad o tasa de decaimiento es

$$\left|\frac{dN}{dt}\right|_0 = \lambda N_0 = (3.83 \times 10^{-12}\text{ s}^{-1})(1.00 \times 10^{22}) = 3.83 \times 10^{10}\text{ decaimientos/s}.$$

Observe que la gráfica de la figura 41-11b comienza en este valor, que corresponde al valor original de $N = 1.0 \times 10^{22}$ núcleos en la figura 41-11a.

NOTA La unidad "decaimientos/s" con frecuencia se escribe simplemente como s^{-1} pues "decaimientos" no es una unidad, sino que se refiere solamente al número. Esta unidad simple de actividad se llama becquerel: 1 Bq = 1 decaimiento/s, como se estudiará en el capítulo 42.

EJERCICIO F Determine la constante de decaimiento para el radio $\left(T_{\frac{1}{2}} = 1600\text{ años}\right)$.

EJEMPLO CONCEPTUAL 41–9 **Seguridad: actividad frente a vida media.** Uno podría pensar que un material con vida media corta es más seguro que un material con vida media larga, porque no durará tanto. ¿Es cierto esto?

RESPUESTA No. Una vida media más corta significa que la actividad es más alta y que, por ende, el material es más "radiactivo" y puede causar más daño biológico. Por otra parte, una vida media más larga para la misma muestra de tamaño N significa una actividad más baja, pero uno tiene que preocuparse por tal muestra más tiempo y encontrar un almacenamiento adecuado hasta que se llegue a un nivel de actividad seguro (bajo).

EJEMPLO 41–10 **Una muestra de $^{13}_{7}N$ radiactivo.** Un laboratorio tiene 1.49 μg de $^{13}_{7}N$, puro, con una vida media de 10.0 min (600 s). *a*) ¿Cuántos núcleos están presentes inicialmente? *b*) ¿Cuál es la actividad inicialmente? *c*) ¿Cuál es la actividad después de 1.00 h? *d*) ¿Después de aproximadamente cuánto tiempo la actividad disminuye a menos de uno por segundo $(= 1\text{ s}^{-1})$?

PLANTEAMIENTO Empleamos la definición de mol y el número de Avogadro (secciones 17-7 y 17-9) para encontrar el número de núcleos. Para *b*), λ se obtiene a partir de la vida media dada y se utiliza la ecuación 41-7b para la actividad. Para *c*) y *d*), empleamos la ecuación 41-7c y/o elaboramos una tabla de los tiempos.

SOLUCIÓN *a*) La masa atómica es 13.0, de manera que 13.0 g contendrán 6.02×10^{23} núcleos (número de Avogadro). Sólo se tiene 1.49×10^{-6} g, de manera que el número de núcleos N_0 que se tienen inicialmente está dado por la razón

$$\frac{N_0}{6.02 \times 10^{23}} = \frac{1.49 \times 10^{-6}\text{ g}}{13.0\text{ g}}.$$

Al resolver, se encuentra que $N_0 = 6.90 \times 10^{16}$ núcleos.

b) A partir de la ecuación 41-8,

$$\lambda = 0.693/T_{\frac{1}{2}} = (0.693)/(600\text{ s}) = 1.155 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}.$$

Así, en $t = 0$ (ecuación 41-7b),

$$\left|\frac{dN}{dt}\right|_0 = \lambda N_0 = (1.155 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1})(6.90 \times 10^{16}) = 7.97 \times 10^{13}\text{ decaimientos/s}.$$

c) Después de 1.00 h = 3600 s, la magnitud de la actividad será (ecuación 41-7c)

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|\frac{dN}{dt}\right|_0 e^{-\lambda t} = (7.97 \times 10^{13}\text{ s}^{-1})e^{-(1.155\times10^{-3}\text{ s}^{-1})(3600\text{ s})} = 1.25 \times 10^{12}\text{ s}^{-1}.$$

d) Se quiere determinar el tiempo t cuando $|dN/dt| = 1.00\text{ s}^{-1}$. A partir de la ecuación 41-7c, se tiene

$$e^{-\lambda t} = \frac{|dN/dt|}{|dN/dt|_0} = \frac{1.00\text{ s}^{-1}}{7.97 \times 10^{13}\text{ s}^{-1}} = 1.25 \times 10^{-14}.$$

Se obtiene el logaritmo natural (ln) de ambos lados ($\ln e^{-\lambda t} = -\lambda t$) y se divide entre λ para encontrar

$$t = -\frac{\ln(1.25 \times 10^{-14})}{\lambda} = 2.77 \times 10^4\,\text{s} = 7.70\,\text{h}.$$

Solución alternativa sencilla para c) 1.00 h = 60.0 minutos representa 6 vidas medias, de manera que la actividad disminuirá a $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ de su valor original, o $(7.97 \times 10^{13})/(64) = 1.25 \times 10^{12}$ por segundo.

EJERCICIO G El tecnecio $^{98}_{43}$Tc tiene una vida media de 4.2×10^6 años. El estroncio $^{90}_{38}$Sr tiene una vida media de 28.79 años. ¿Cuáles enunciados son verdaderos?

a) La constante de decaimiento del Sr es mayor que la constante de decaimiento del Tc.
b) La actividad de 100 g de Sr es menor que la actividad de 100 g de Tc.
c) La larga vida media del Tc significa que experimenta decaimiento alfa.
d) Un átomo de Tc tiene una mayor probabilidad de decaer en 1 año que un átomo Sr.
e) 28.79 g de Sr tienen la misma actividad que 4.2×10^6 g de Tc.

41–9 Series de decaimiento

Con frecuencia se presenta el caso de que un isótopo radiactivo decae a otro isótopo que también es radiactivo. En ocasiones este núcleo hijo decae a un tercer isótopo que también es radiactivo. Se dice que tales decaimientos sucesivos forman una **serie de decaimiento**. En la figura 41-12 se presenta un ejemplo importante. Como se observa, el, $^{238}_{92}$U decae por emisión α a $^{234}_{90}$Th, el cual a su vez sufre un decaimiento β para convertirse en $^{234}_{91}$Pa. La serie continúa como se indica, con muchas posibles ramificaciones cerca de la parte inferior, para terminar en un isótopo de plomo estable, $^{206}_{82}$Pb. Los últimos dos decaimientos pueden ser

$$^{206}_{81}\text{Tl} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + e^- + \bar{\nu}, \qquad (T_{\frac{1}{2}} = 4.2\,\text{min})$$

o

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + \alpha. \qquad (T_{\frac{1}{2}} = 138\,\text{días})$$

También existen otras series radiactivas.

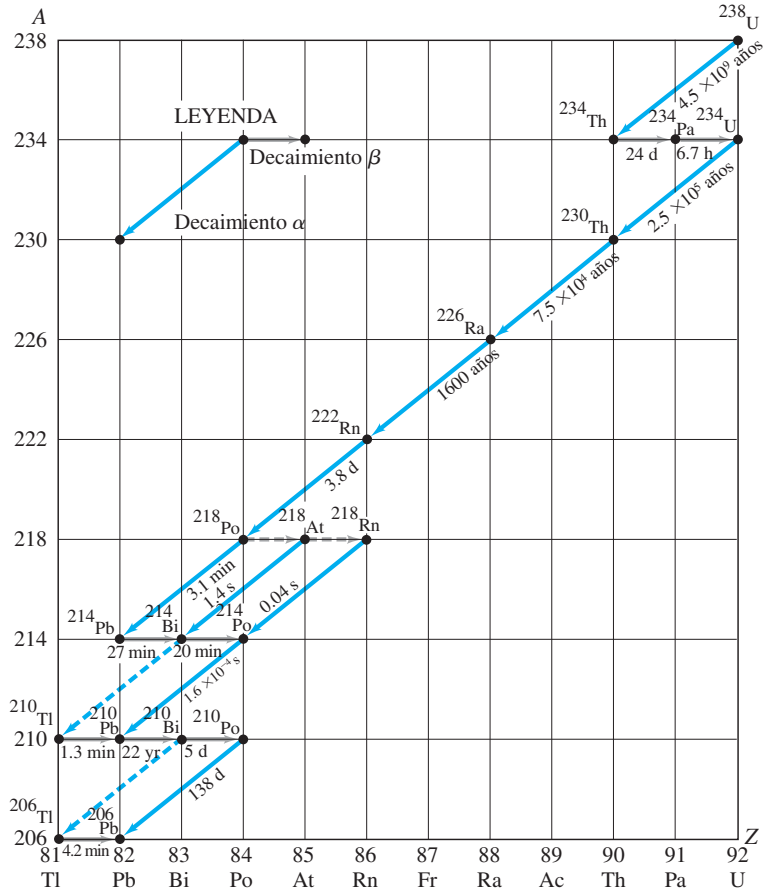


FIGURA 41–12 Series de decaimiento que comienzan con $^{238}_{92}$U. Los núcleos en la serie se especifican mediante un punto que representa valores A y Z. Las vidas medias están dadas en segundos (s), minutos (min), horas (h), días (d) o años (a). Observe que una flecha horizontal representa decaimiento β (A no cambia), mientras que una línea diagonal representa decaimiento α (A cambia por 4, Z cambia por 2). Para los cuatro núclidos mostrados que pueden decaer mediante decaimientos α y β, el decaimiento más prominente (en estos cuatro casos, $> 99.9\%$) se indica como una flecha sólida y el decaimiento menos común ($< 0.1\%$) como una flecha punteada.

A causa de tales series de decaimientos, en la naturaleza se encuentran ciertos elementos radiactivos que, de otro modo, no existirían. Cuando el Sistema Solar (incluida la Tierra) se formó hace aproximadamente 5 mil millones de años, se cree que casi todos los núclidos estaban presentes, y que se formaron (mediante fusión y captura de neutrones, secciones 42-4 y 44-2) en una explosión supernova cercana (sección 44-2). Muchos isótopos con vidas medias cortas decayeron rápidamente y ya no se detectan en la naturaleza en la actualidad. Pero los isótopos de larga vida, como el $^{238}_{92}\text{U}$ con una vida media de 4.5×10^9 años, aún existen en la naturaleza actualmente. De hecho, casi la mitad del $^{238}_{92}\text{U}$ original todavía permanece. Sin embargo, se podría esperar que el radio ($^{226}_{88}\text{Ra}$), con una vida media de 1600 años, hubiera desaparecido de la Tierra hace mucho. De hecho, los núcleos originales de $^{226}_{88}\text{Ra}$ habrían decaído todos para los tiempos actuales. No obstante, puesto que $^{238}_{92}\text{U}$ decae (en muchos pasos) a $^{226}_{88}\text{Ra}$, el suministro de $^{226}_{88}\text{Ra}$ se reabastece continuamente, por lo que aún se encuentra en la Tierra en la actualidad. Lo mismo puede decirse de muchos otros núclidos radiactivos.

EJEMPLO CONCEPTUAL 41–11 **Cadena de decaimiento.** En la cadena de decaimiento de la figura 41-12, si comenzamos por observar abajo de $^{234}_{92}\text{U}$, se ven cuatro núclidos sucesivos con vidas medias de 250,000 años, 75,000 años, 1600 años y un poco abajo de 4 días. Cada decaimiento en la cadena tiene una partícula alfa de una energía característica, y por lo tanto se puede rastrear la tasa de decaimiento radiactivo de cada núclido. Dada una muestra que fue puro $^{234}_{92}\text{U}$ hace millones de años, ¿cuál decaimiento alfa esperaría que tuviera la mayor actividad en la muestra?

RESPUESTA El primer impulso es decir que el proceso con la vida media más corta mostrará la mayor actividad. De manera sorprendente, las actividades de los cuatro núclidos en esta muestra son todas iguales. La razón es que, en cada caso, el decaimiento del núcleo padre actúa como un cuello de botella para el decaimiento del núcleo hijo. En comparación con la vida media de 1600 años del $^{226}_{88}\text{Ra}$, por ejemplo, su hijo $^{222}_{86}\text{Rn}$ decae casi de inmediato, pero no puede decaer sino hasta que se produce. (Es como una línea de ensamblaje de automóviles: si el trabajador A tarda 20 minutos en terminar una tarea y luego el trabajador B tarda sólo 1 minuto en hacer la siguiente tarea, el trabajador B fabrica sólo un automóvil cada 20 minutos.)

41–10 Fechamiento radiactivo

FÍSICA APLICADA
Fechamiento con carbono 14

El decaimiento radiactivo tiene muchas aplicaciones interesantes. Una es la técnica de *fechamiento radiactivo* mediante la cual se puede determinar la edad de materiales antiguos.

La edad de cualquier objeto hecho a partir de materia alguna vez viva, como la madera, se puede determinar mediante la radiactividad natural del $^{14}_{6}\text{C}$. Todas las plantas vivas absorben dióxido de carbono (CO_2) del aire y lo usan para sintetizar moléculas orgánicas. La gran mayoría de los átomos de carbono son $^{12}_{6}\text{C}$, pero una pequeña fracción, alrededor de 1.3×10^{-12}, corresponde al isótopo radiactivo $^{14}_{6}\text{C}$. La razón entre $^{14}_{6}\text{C}$ y $^{12}_{6}\text{C}$ en la atmósfera ha permanecido más o menos constante durante muchos miles de años, a pesar del hecho de que el $^{14}_{6}\text{C}$ decae con una vida media de aproximadamente 5730 años. Por esa razón, los núcleos energéticos en la radiación cósmica, que incide sobre la Tierra desde el espacio exterior, chocan con los núcleos de los átomos en la atmósfera y los rompen en trozos, lo que desprende neutrones libres. Esos neutrones pueden chocar con núcleos de nitrógeno en la atmósfera para producir la transformación nuclear $\text{n} + {}^{14}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\text{C} + \text{p}$. Esto es, un neutrón choca con un núcleo de $^{14}_{7}\text{N}$ y éste lo absorbe, y en el proceso se desprende un protón. El núcleo restante es $^{14}_{6}\text{C}$. Esta producción continua de $^{14}_{6}\text{C}$ en la atmósfera equilibra más o menos la pérdida de $^{14}_{6}\text{C}$ por decaimiento radiactivo.

Mientras una planta o un árbol están vivos, utilizan continuamente el carbono del dióxido de carbono en el aire para construir nuevo tejido y sustituir el viejo. Los animales comen plantas, así que de manera continua también reciben un suministro fresco de carbono para sus tejidos. Los organismos no pueden distinguir[†] el $^{14}_{6}\text{C}$ del $^{12}_{6}\text{C}$, y puesto que la proporción de $^{14}_{6}\text{C}$ a $^{12}_{6}\text{C}$ en la atmósfera permanece casi constante, la proporción de los dos isótopos dentro de los organismos vivos también permanece casi constante. Cuando un organismo muere, ya no absorbe ni utiliza el dióxido de carbono. Puesto que el $^{14}_{6}\text{C}$ decae radiactivamente, la proporción de $^{14}_{6}\text{C}$ a $^{12}_{6}\text{C}$ en un organismo muerto disminuye con el tiempo. Como la vida media del $^{14}_{6}\text{C}$ es de aproximada-

[†]Los organismos operan casi exclusivamente mediante reacciones químicas, que sólo implican los electrones orbitales externos del átomo; los neutrones adicionales en el núcleo, en esencia, no tienen efecto.

mente 5730 años, la razón $^{14}_{6}C/^{12}_{6}C$ disminuye a la mitad cada 5730 años. Si, por ejemplo, la razón $^{14}_{6}C/^{12}_{6}C$ de una herramienta de madera antigua es la mitad de la que hay en los árboles vivos, entonces el objeto se fabricó de un árbol que cayó hace aproximadamente 5730 años.

En realidad, se deben hacer correcciones por el hecho de que la razón $^{14}_{6}C/^{12}_{6}C$ en la atmósfera no permaneció precisamente constante con el tiempo. La determinación de cómo fue esta proporción en siglos pasados requiere técnicas tales como la comparación de la proporción esperada con la proporción real para objetos cuya antigüedad se conoce, como árboles muy viejos cuyos anillos anuales se pueden contar con razonable precisión.

EJEMPLO 41–12 **Un animal antiguo.** La masa del carbono en un fragmento de hueso animal, que se encontró en un sitio arqueológico, es de 200 g. Si el hueso registra una actividad de 16 decaimientos/s, ¿cuál es su antigüedad?

FÍSICA APLICADA
Fechamiento arqueológico

PLANTEAMIENTO Primero determinamos cuántos átomos de $^{14}_{6}C$ había en la muestra de 200 g cuando vivía el animal, dada la fracción conocida de $^{14}_{6}C$, 1.3×10^{-12}. Luego utilizamos la ecuación 41-7b para encontrar la actividad de ese entonces, y la ecuación 41-7c para encontrar hace cuánto tiempo fue así, despejando el tiempo t.

SOLUCIÓN Los 200 g de carbono son casi todos $^{12}_{6}C$; 12.0 g de $^{12}_{6}C$ contienen 6.02×10^{23} átomos, de manera que 200 g contienen

$$\left(\frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{12\ \text{g/mol}}\right)(200\ \text{g}) = 1.00 \times 10^{25}\ \text{átomos}.$$

Cuando el animal vivía, la proporción de $^{14}_{6}C$ a $^{12}_{6}C$ en el hueso era 1.3×10^{-12}. El número de núcleos de $^{14}_{6}C$ en esa época era

$$N_0 = (1.00 \times 10^{25}\ \text{átomos})(1.3 \times 10^{-12}) = 1.3 \times 10^{13}\ \text{átomos}.$$

A partir de la ecuación 41-7b, con $\lambda = 3.83 \times 10^{-12}\ \text{s}^{-1}$ para $^{14}_{6}C$ (ejemplo 41-8), la magnitud de la actividad cuando el animal estaba vivo ($t = 0$) era

$$\left|\frac{dN}{dt}\right|_0 = \lambda N_0 = (3.83 \times 10^{-12}\ \text{s}^{-1})(1.3 \times 10^{13}) = 50\ \text{s}^{-1}.$$

De acuerdo con la ecuación 41-7c,

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|\frac{dN}{dt}\right|_0 e^{-\lambda t},$$

donde $|dN/dt|$ está dada como $16\ \text{s}^{-1}$. Así,

$$e^{\lambda t} = \frac{|dN/dt|_0}{|dN/dt|} = \frac{50\ \text{s}^{-1}}{16\ \text{s}^{-1}}.$$

Sacamos el logaritmo natural (ln) de ambos lados (y dividimos entre λ) para obtener

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{|dN/dt|_0}{|dN/dt|}\right] = \frac{1}{3.83 \times 10^{-12}\ \text{s}^{-1}}\ln\left[\frac{50\ \text{s}^{-1}}{16\ \text{s}^{-1}}\right]$$
$$= 2.98 \times 10^{11}\ \text{s} = 9400\ \text{años},$$

que es el tiempo transcurrido desde la muerte del animal.

Fechamiento en escala de tiempo geológico

El fechamiento con carbono es útil sólo para determinar la edad de los objetos menores de aproximadamente 60,000 años de antigüedad. La cantidad de $^{14}_{6}C$ que permanece en los objetos aún más antiguos por lo general es muy pequeña para medirse con precisión, aunque nuevas técnicas permiten la detección de cantidades de $^{14}_{6}C$, todavía menores, lo que extiende el marco temporal hacia atrás. Por otra parte, los isótopos radiactivos con vidas medias más largas se pueden usar en ciertas circunstancias para conocer la edad de objetos más antiguos. Por ejemplo, el decaimiento del $^{238}_{92}U$, en virtud de su larga vida media de 4.5×10^{9} años, es útil para determinar la edad de las rocas en una escala de tiempo geológico. Cuando el material fundido de la Tierra hace mucho tiempo se solidificó en roca conforme disminuyó la temperatura, diferentes compuestos se solidificaron de acuerdo con los puntos de fusión y, por consiguiente, diferentes compuestos se separaron en alguna medida. El uranio presente en un material quedó

FÍSICA APLICADA
Fechamiento geológico

fijado en su posición y los núcleos hijos que resultaron del decaimiento del uranio también quedaron fijados en esa posición. De esta forma, al medir la cantidad de $^{238}_{92}$U restante en el material en relación con la cantidad de núcleos hijos, es posible determinar el momento en que la roca se solidificó.

FÍSICA APLICADA

Las rocas más antiguas de la Tierra y la vida más temprana

Los métodos de fechamiento radiactivo mediante $^{238}_{92}$U y otros isótopos mostraron que la antigüedad de las rocas más antiguas de la Tierra es de aproximadamente 4×10^9 años. La edad de las rocas más antiguas donde quedaron incrustados organismos fosilizados indica que la vida apareció hace más de 3500 millones de años. Los restos de mamíferos fosilizados más tempranos se encuentran en rocas con 200 millones de años de antigüedad, y parece que los homínidos aparecieron hace aproximadamente 2 millones de años. El fechamiento radiactivo es indispensable para la reconstrucción de la historia de la Tierra.

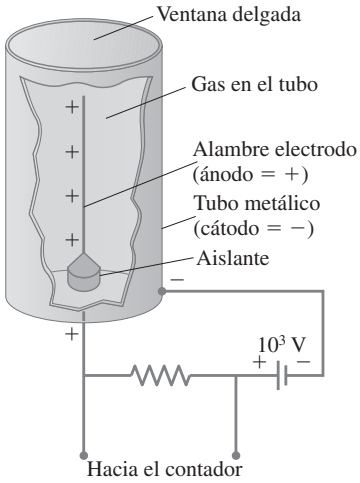


FIGURA 41–13 Diagrama de un contador Geiger.

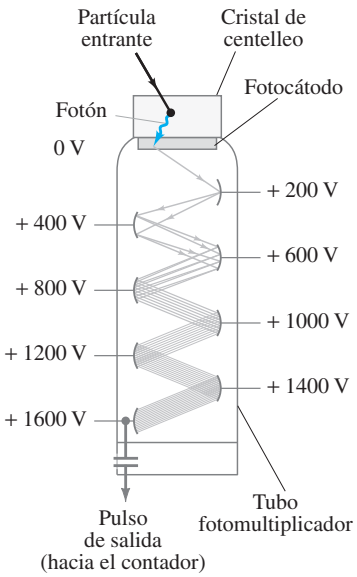
41–11 Detección de radiación

Las partículas individuales como electrones, protones, partículas α, neutrones y rayos γ no se detectan directamente mediante los sentidos. En consecuencia, se desarrollaron muchos instrumentos para detectarlas.

Contadores

Uno de los más comunes es el **contador Geiger**. Como se muestra en la figura 41-13, consiste en un tubo metálico cilíndrico lleno con cierto tipo de gas. Un largo alambre corre por el centro y se mantiene a un alto voltaje positivo ($\approx 10^3$ V) con respecto al cilindro exterior. El voltaje apenas es ligeramente menor que el requerido para ionizar los átomos de gas. Cuando una partícula cargada entra a través de la delgada "ventana" en un extremo del tubo, ioniza algunos átomos del gas. El alambre positivo atrae los electrones liberados y, conforme éstos se aceleran, chocan con átomos adicionales y los ionizan. Rápidamente se produce una "avalancha" de electrones que, cuando llega al alambre ánodo, produce un pulso de voltaje. El pulso, luego de amplificarse, se puede enviar hacia un contador electrónico, que cuenta cuántas partículas se detectaron. O bien, los pulsos se envían a un altavoz y cada detección de una partícula se escucha como un "clic". Sólo una fracción de la radiación emitida por una muestra se detecta mediante cualquier dispositivo.

FIGURA 41–14 Contador de centelleo con un tubo fotomultiplicador.



Un **contador de centelleo** utiliza un sólido, líquido o gas conocido como **centelleador,** cuyos átomos se excitan fácilmente cuando los golpea una partícula entrante y emiten luz visible cuando regresan a su estado fundamental. Los centelleadores comunes son cristales de NaI y ciertos plásticos. Una cara de un centelleador sólido se pega a un tubo fotomultiplicador y el conjunto se envuelve con material opaco para evitar que entre luz (en la oscuridad) o se coloca dentro de un contenedor a prueba de luz. El **tubo fotomultiplicador** (FM) convierte la energía del fotón emitido por el centelleador en una señal eléctrica. Un tubo FM es un tubo al vacío que contiene muchos electrodos (por lo general de 8 a 14), llamados *dinodos*, que se mantienen a voltajes sucesivamente más altos, como se muestra en la figura 41-14. En su superficie superior hay una superficie fotoeléctrica, llamada *fotocátodo*, cuya función trabajo (sección 37-2) es suficientemente baja como para que un electrón se libere con facilidad cuando un fotón, proveniente del centelleador, incide sobre él. Tal electrón se acelera hacia el voltaje positivo del primer dinodo. Cuando incide sobre el primer dinodo, el electrón adquiere suficiente energía cinética como para expulsar de dos a cinco electrones más. Éstos, a la vez, se aceleran hacia el segundo dinodo de voltaje más alto, y comienza un proceso de multiplicación. El número de electrones que golpean el último dinodo puede ser de 10^6 o más. Por ende, el paso de una partícula a través de un centelleador da por resultado una señal eléctrica en la salida del tubo FM, que se puede enviar a un contador electrónico al igual que en un tubo Geiger. Los centelleadores sólidos son mucho más densos que el gas de un contador Geiger, y por lo tanto son detectores mucho más eficientes, en especial para rayos γ, que interactúan menos con la materia que las partículas α o β. En la actualidad se usan mucho los centelleadores que permiten medir la energía total depositada y se llaman **calorímetros**.

En las funciones de rastreo (sección 42-8), con frecuencia se usan **centelleadores líquidos**. Las muestras radiactivas tomadas en diferentes momentos o de diferentes partes de un organismo se colocan directamente en pequeñas botellas que contienen el centelleador líquido. Esto es particularmente conveniente para la detección de rayos β de ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ y ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, que tienen energías muy bajas y presentan dificultad para pasar a través de la cubierta exterior de un cristal centelleador o tubo Geiger. Se utiliza un tubo FM para producir la señal eléctrica del centelleador líquido.

Un **detector semiconductor** consiste en un diodo de unión *pn* con polarización invertida (secciones 40-8 y 40-9). Una partícula que pasa a través de la unión puede excitar electrones en la banda de conducción, lo que deja huecos en la banda de valencia. Las cargas liberadas producen un breve pulso eléctrico que se pueden contar al igual que en el caso de contadores Geiger y de centelleo.

Es recomendable que las personas que trabajan en hospitales y quienes trabajan alrededor de radiación porten *dosímetros de película* que detectan la acumulación de la exposición a la radiación. La película interna se sustituye y revela periódicamente, y la oscuridad se relaciona con la exposición total (véase la sección 42-6).

Visualización

Los dispositivos estudiados hasta el momento se usan para contar el número de partículas (o decaimientos de un isótopo radiactivo). También existen dispositivos que permiten *ver* la trayectoria de las partículas cargadas. Son muy importantes los detectores semiconductores. Los **semiconductores de oblea de silicio** tienen su superficie grabada en pequeños pixeles separados, y cada uno da información de la posición de la partícula. Se usan mucho en física de partículas elementales (capítulo 43) para rastrear las posiciones de las partículas producidas y determinar su punto de origen y/o su cantidad de movimiento (con la ayuda de un campo magnético). El ordenamiento de pixeles puede ser CCD o CMOS (sección 33-5); este último permite incorporar electrónica en su interior, lo que facilita una lectura rápida.

Uno de los dispositivos rastreadores más antiguos es la **emulsión fotográfica**, que puede ser pequeña y portátil, y que ahora se usa particularmente para estudios de rayos cósmicos desde globos. Una partícula cargada que pasa a través de una emulsión ioniza los átomos a lo largo de su trayectoria. Estos puntos experimentan un cambio químico y, cuando la emulsión se revela (como película), se distingue la trayectoria de la partícula.

En una **cámara de niebla**, que se usó en los primeros días de la física nuclear, un gas se enfría a una temperatura ligeramente por debajo de su punto de condensación habitual ("se superenfría") y moléculas de gas se condensan sobre cualquier molécula ionizada presente. Cuando pasa una partícula cargada, alrededor de los iones producidos se forman gotitas (figura 41-15). La luz que se dispersa en estas gotitas exhibe la trayectoria de la partícula.

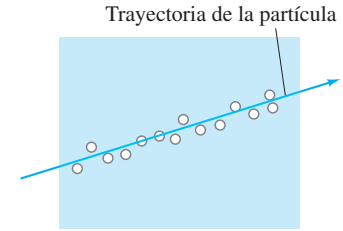


FIGURA 41–15 En una cámara de niebla o cámara de burbujas, alrededor de los iones producidos por el paso de una partícula cargada se forman gotitas o burbujas.

La **cámara de burbujas**, que inventó en 1952 D. A. Glaser (n. 1926), emplea un líquido supercalentado que se mantiene cerca de su punto de ebullición normal. Alrededor de los iones, producidos por el paso de una partícula cargada, se forman las burbujas características de ebullición, las cuales indican las trayectorias de las partículas que recientemente pasaron por ahí. Puesto que una cámara de burbujas usa un líquido, con frecuencia hidrógeno líquido, pueden ocurrir muchas más interacciones que en una cámara de niebla. Por lo general se aplica un campo magnético a través de la cámara, de manera que es posible determinar la cantidad de movimiento de las partículas a partir del radio de curvatura de sus trayectorias.

Una **cámara de arrastre por alambre** consiste en un conjunto de finos alambres muy cercanos entre sí que se introducen en un gas (figura 41-16). Muchos alambres están conectados a tierra y los demás se mantienen a muy alto voltaje. Una partícula cargada que pase a través de la cámara produce iones en el gas. Los electrones liberados se mueven hacia el alambre de alto voltaje más cercano, lo que crea una "avalancha" de muchos más iones y produce un pulso o una señal eléctrica en ese alambre. Las posiciones de las partículas se determinan electrónicamente mediante la posición del alambre y por el tiempo que el pulso tarda en llegar a la electrónica "de lectura" en los extremos de los alambres. Las trayectorias de las partículas se reconstruyen electrónicamente mediante computadoras que pueden "dibujar" una imagen de las rutas, como se aprecia en la fotografía al inicio del capítulo 43. Un campo magnético externo curva las trayectorias, lo que permite medir la cantidad de movimiento de las partículas.

FIGURA 41–16 Cámara de arrastre por alambre dentro del Colisionador-Detector en el Fermilab (CDF). La fotografía al inicio del capítulo 43 (página 1164) se tomó con este detector.

En muchos detectores, la energía de las partículas se mide mediante la intensidad de la señal electrónica; a tales detectores se les conoce como **calorímetros**, como ya se mencionó.

Resumen

La **física nuclear** es el estudio de los núcleos atómicos. Los núcleos contienen **protones** y **neutrones**, que colectivamente se conocen como **nucleones**. El número total de nucleones, A, es el **número de masa atómica** del núcleo. El número de protones, Z, es el **número atómico**. El número de neutrones es igual a $A - Z$. Los **isótopos** son núcleos con el mismo Z, pero con diferente número de neutrones. Para un elemento X, un isótopo de Z y A dados se representa como

$$^{A}_{Z}\mathrm{X}.$$

El radio nuclear es aproximadamente proporcional a $A^{\frac{1}{3}}$, lo que indica que todos los núcleos tienen más o menos la misma densidad. Las masas nucleares se especifican en **unidades de masa atómica**(u), donde la masa de $^{12}_{6}$C (incluidos sus 6 electrones) se define como exactamente 12.000000 u. En términos del equivalente de energía (puesto que $E = mc^2$),

$$1\,\mathrm{u} = 931.5\,\mathrm{MeV}/c^2 = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}.$$

La masa de un núcleo estable es menor que la suma de las masas de sus nucleones constituyentes. La diferencia en masa (por c^2) es la **energía de enlace**. Representa la energía necesaria para romper el núcleo en sus nucleones constituyentes. La **energía de enlace por nucleón** promedia alrededor de 8 MeV por nucleón, y es la más baja para núcleos de masa baja y masa elevada.

Los núcleos inestables experimentan **decaimiento radiactivo**; cambian a otros núcleos con la emisión de una partícula α, β o γ. Una partícula α es un núcleo de $^{4}_{2}$He; una partícula β es un electrón o positrón; y un rayo γ es un fotón de alta energía. En el decaimiento β, también se emite un **neutrino**. La transformación del núcleo **padre** (o precursor) al núcleo **hijo** (o derivado) se llama **transmutación** de los elementos. El decaimiento radiactivo ocurre de manera espontánea sólo cuando la masa de los productos es menor que la masa del núcleo padre. La pérdida en masa aparece como energía cinética de los productos.

El decaimiento alfa ocurre mediante el proceso meramente mecánico-cuántico de **tunelamiento** a través de una barrera.

Los núcleos se mantienen unidos mediante la **fuerza nuclear fuerte**. La **fuerza nuclear débil** se hace evidente en el decaimiento β. Estas dos fuerzas, más las fuerzas gravitacional y electromagnética, son los cuatro tipos de fuerzas conocidos.

La carga eléctrica, las cantidades de movimiento lineal y angular, la masa-energía y el **número de nucleones** se **conservan** en todos los decaimientos.

El decaimiento radiactivo es un proceso estadístico. Para un tipo dado de núcleo radiactivo, el número de núcleos que decaen (ΔN) en un tiempo Δt es proporcional al número de N de núcleos padres presentes:

$$\Delta N = -\lambda N\,\Delta t; \qquad \textbf{(41–4a)}$$

El signo menos significa que N *disminuye* con el tiempo.

La constante de proporcionalidad λ se llama **constante de decaimiento** y es característica del núcleo dado. El número N de núcleos que permanecen después de un tiempo t disminuye exponencialmente

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad \textbf{(41–6)}$$

como lo hace la **actividad**, $R = |dN/dt|$:

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|\frac{dN}{dt}\right|_0 e^{-\lambda t}. \qquad \textbf{(41–7c)}$$

La **vida media**, $T_{\frac{1}{2}}$, es el tiempo que se requiere para que decaiga la mitad de los núcleos de una muestra radiactiva. Se relaciona con la constante de decaimiento mediante

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{0.693}{\lambda}. \qquad \textbf{(41–8)}$$

El decaimiento radiactivo permite determinar la antigüedad de ciertos objetos, como el material biológico alguna vez vivo ($^{14}_{6}$C) o formaciones geológicas ($^{238}_{92}$U).

Los **detectores** de partículas incluyen **contadores Geiger**, de **centelleo** o **centelleadores** con **tubos fotomultiplicadores** unidos, y los **detectores semiconductores**. Los detectores que pueden mostrar imágenes de las trayectorias de partículas incluyen **semiconductores**, **emulsiones** fotográficas, **cámaras de burbujas** y **cámaras de arrastre por alambre**.

Preguntas

1. ¿Qué tienen en común diferentes isótopos de un elemento dado? ¿En qué son diferentes?
2. ¿Cuáles son los elementos representados por la X en las siguientes notaciones? *a)* $^{232}_{92}$X; *b)* $^{18}_{7}$X; *c)* $^{1}_{1}$X; *d)* $^{82}_{38}$X; *e)* $^{247}_{97}$X?
3. ¿Cuántos protones y cuántos neutrones tiene cada uno de los isótopos de la pregunta 2?
4. Identifique el elemento que tiene 88 nucleones y 50 neutrones.
5. ¿Por qué las masas atómicas de muchos elementos (véase la tabla periódica) no se acercan a números enteros?
6. ¿Cómo se sabe que existe la fuerza nuclear fuerte?
7. ¿Cuáles son las semejanzas y las diferencias entre la fuerza nuclear fuerte y la fuerza eléctrica?
8. ¿Cuál es la evidencia experimental en favor de que la radiactividad es un proceso nuclear?
9. El isótopo $^{64}_{29}$Cu es inusual en cuanto a que puede decaer mediante emisión γ, β^- y β^+. ¿Cuál es el núclido resultante para cada caso?
10. Un núcleo de $^{238}_{92}$U experimenta decaimiento α hacia un núcleo que contiene, ¿cuántos neutrones?
11. Describa, en tantas formas como sea posible, la diferencia entre rayos α, β y γ.
12. ¿Qué elemento se forma mediante el decaimiento radiactivo de *a)* $^{24}_{11}$Na (β^-); *b)* $^{22}_{11}$Na (β^+); *c)* $^{210}_{84}$Po (α)?
13. ¿Qué elemento se forma mediante el decaimiento de $^{32}_{15}$P (β^-); *b)* $^{35}_{16}$S (β^-); *c)* $^{211}_{83}$Bi (α)?
14. Encuentre la partícula o núcleo faltante:
    a) $^{45}_{20}\mathrm{Ca} \rightarrow ? + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}$
    b) $^{58}_{29}\mathrm{Cu}^* \rightarrow ? + \gamma$
    c) $^{46}_{24}\mathrm{Cr} \rightarrow {}^{46}_{23}\mathrm{V} + ?$
    d) $^{234}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow ? + \alpha$
    e) $^{239}_{93}\mathrm{Np} \rightarrow {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + ?$
15. Inmediatamente después de que un núcleo de $^{238}_{92}$U decae a $^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$, el núcleo hijo torio aún puede tener 92 electrones a su alrededor. Como el torio normalmente tiene sólo 90 electrones, ¿qué supone que ocurre con los dos adicionales?
16. Cuando un núcleo experimenta decaimiento o β^- o β^+, ¿qué sucede con los niveles de energía de los electrones atómicos? ¿Qué es probable que ocurra con estos electrones después del decaimiento?

17. Las partículas alfa de un núclido dado que emite partículas alfa por lo general son monoenergéticas; esto es, todas tienen la misma energía cinética. Pero las partículas beta provenientes de un núclido que emite partículas beta tiene un espectro de energías. Explique la diferencia entre estos dos casos.
18. Los isótopos que experimentan captura electrónica por lo general se encuentran, ¿arriba o abajo de los núclidos estables de la figura 41-2?
19. ¿El hidrógeno o el deuterio pueden emitir una partícula α? Explique.
20. ¿Por qué muchos isótopos radiactivos producidos artificialmente son raros en la naturaleza?
21. Un isótopo tiene una vida media de un mes. Después de dos meses, ¿una muestra dada de este isótopo decaerá por completo? Si no, ¿cuánto permanece?
22. ¿Por qué ninguno de los elementos con $Z > 92$ es estable?
23. Un protón choca con un núcleo de $^{6}_{3}$Li. Como resultado, se liberan una partícula α y otra partícula. ¿Cuál es esa otra partícula?
24. ¿El fechamiento con $^{14}_{6}$C se podría usar para medir la antigüedad de las paredes y los tableros de piedra de civilizaciones antiguas? Explique.
25. Tanto en la conversión interna como en el decaimiento β, se emite un electrón. ¿Cómo podría determinar cuál proceso de decaimiento ocurrió?
26. Describa cómo difiere la curva de energía potencial para una partícula α en un núcleo que emite α de la de un núcleo estable.
27. Explique la ausencia de emisores β^+ en la serie de decaimiento radiactivo de la figura 41-12.
28. Conforme el $^{222}_{86}$Rn decae en $^{206}_{82}$Pb, ¿cuántas partículas alfa y beta se emiten? ¿Importa cuál trayectoria se elija en la serie de decaimiento? ¿Por qué?

Problemas

41–1 Propiedades nucleares

1. (I) Un mesón pi tiene una masa de 139 MeV/c^2. ¿Cuánto es esto en unidades de masa atómica?
2. (I) ¿Cuál es el radio aproximado de una partícula alfa $\left(^{4}_{2}\text{He}\right)$?
3. (I) ¿En qué porcentaje el radio de $^{238}_{92}$U es mayor que el radio de $^{232}_{92}$U?
4. (II) *a*) ¿Cuál es el radio aproximado de un núcleo $^{112}_{48}$Cd? *b*) ¿Aproximadamente cuál es el valor de A para un núcleo cuyo radio es 3.7×10^{-15} m?
5. (II) ¿Cuál es la masa de una partícula α sola (sin electrones) en MeV/c^2?
6. (II) Suponga que dos partículas alfa se mantienen unidas de manera que apenas se tocan. Estime la fuerza electrostática de repulsión que cada una ejercería sobre la otra. ¿Cuál sería la aceleración de una partícula alfa sometida a esta fuerza?
7. (II) *a*) Demuestre que la densidad de la materia nuclear es esencialmente la misma para todos los núcleos. *b*) ¿Cuál sería el radio de la Tierra si tuviera su masa actual pero la densidad de los núcleos? *c*) ¿Cuál sería el radio de un núcleo de $^{238}_{92}$U si tuviera la densidad de la Tierra?
8. (II) ¿Qué núcleo estable tiene aproximadamente la mitad del radio de un núcleo de uranio? [*Sugerencia:* Encuentre A y use el Apéndice F para obtener Z.]
9. (II) Si una partícula alfa se liberara desde el reposo cerca de la superficie de un núcleo $^{257}_{100}$Fm, ¿cuál sería su energía cinética cuando esté lejos?
10. (II) *a*) ¿Cuál es la fracción de la masa del átomo de hidrógeno que está en el núcleo? *b*) ¿Cuál es la fracción del volumen del átomo de hidrógeno que ocupa el núcleo?
11. (II) ¿Aproximadamente cuántos nucleones hay en un objeto de 1.0 kg? ¿Importa de qué esté hecho el objeto? ¿Por qué?
12. (II) ¿Cuánta energía cinética debe tener una partícula α para apenas "tocar" la superficie de un núcleo de $^{238}_{92}$U?

41–2 Energía de enlace

13. (I) Estime la energía de enlace para el $^{63}_{29}$Cu, a partir de la figura 41-1
14. (II) Consulte el Apéndice F para calcular la energía de enlace del $^{2}_{1}$H (deuterio).
15. (II) Determine la energía de enlace del último neutrón en un núcleo $^{32}_{15}$P.
16. (II) Calcule la energía de enlace, y la energía de enlace por nucleón, para *a*) $^{7}_{3}$Li, *b*) $^{197}_{79}$Au. Consulte el Apéndice F.
17. (II) Compare la energía de enlace promedio de un nucleón en el $^{23}_{11}$Na con uno en el $^{24}_{11}$Na.
18. (III) ¿Cuánta energía se requiere para remover *a*) un protón, *b*) un neutrón de $^{15}_{7}$N? Explique la diferencia en sus respuestas.
19. (III) *a*) Demuestre que el núcleo $^{8}_{4}$Be (masa = 8.005305 u) es inestable y decaerá en dos partículas α. *b*) ¿El $^{12}_{6}$C es estable contra el decaimiento en tres partículas α? Demuestre por qué.

41–3 a 41–7 Decaimiento radiactivo

20. (I) ¿Cuánta energía se libera cuando el tritio, $^{3}_{1}$H, decae mediante emisión β^-?
21. (I) ¿Cuál es la máxima energía cinética de un electrón emitido en el decaimiento β de un neutrón libre?
22. (I) Demuestre que el decaimiento $^{11}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{10}_{5}\text{B} + \text{p}$ no es posible porque no se conservaría la energía.
23. (I) El núcleo de $^{7}_{3}$Li tiene un estado excitado 0.48 MeV arriba del estado fundamental. ¿Qué longitud de onda de fotón gamma se emite cuando el núcleo decae desde el estado excitado hasta el estado fundamental?
24. (II) Dé el resultado de un cálculo que demuestre si los siguientes decaimientos son posibles o no:
    a) $^{233}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{232}_{92}\text{U} + \text{n}$;
    b) $^{14}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{13}_{7}\text{N} + \text{n}$;
    c) $^{40}_{19}\text{K} \rightarrow {}^{39}_{19}\text{K} + \text{n}$.
25. (II) El $^{24}_{11}$Na es radiactivo. *a*) ¿Es un emisor β^- o β^+? *b*) Escriba la reacción de decaimiento y estime la máxima energía cinética de la β emitida.
26. (II) Cuando el $^{23}_{10}$Ne (masa = 22.9945 u) decae a $^{23}_{11}$Na (masa = 22.9898 u), ¿cuál es la máxima energía cinética del electrón emitido? ¿Cuál es su energía cinética mínima? ¿Cuál es la energía del neutrino en cada caso? Ignore el retroceso del núcleo hijo.
27. (II) Un núcleo $^{238}_{92}$U emite una partícula α con energía cinética = 4.20 MeV. *a*) ¿Cuál es el núcleo hijo y *b*) cuál es la masa atómica aproximada (en u) del átomo hijo? Ignore el retroceso del núcleo hijo.
28. (II) ¿Cuál es la máxima energía cinética de la partícula β emitida durante el decaimiento del $^{60}_{27}$Co?

29. (II) Un núcleo de 256 u de masa, inicialmente en reposo, emite una partícula α con una energía cinética de 5.0 MeV. ¿Cuál es la energía cinética del núcleo hijo que retrocede?

30. (II) El isótopo $^{218}_{84}$Po puede decaer por emisión α o β^-. ¿Cuál es la energía que se libera en cada caso? La masa del $^{218}_{84}$Po es 218.008965.

31. (II) El núclido $^{32}_{15}$P decae por emisión de un electrón cuya máxima energía cinética puede ser 1.71 MeV. *a*) ¿Cuál es el núcleo hijo? *b*) Calcule la masa atómica (en u) del núcleo hijo.

32. (II) Un átomo expulsa un fotón con longitud de onda de 1.00×10^{-13} m. Calcule su energía y explique por qué es un rayo γ desde el núcleo o un fotón desde el átomo.

33. (II) ¿Cuánta energía se libera en la captura electrónica por berilio: $^{7}_{4}\text{Be} + e^- \rightarrow {}^{7}_{3}\text{Li} + \nu$?

34. (II) ¿Cuánta energía de retroceso obtiene un núcleo de $^{40}_{19}$K cuando emite un rayo gamma de 1.46 MeV?

35. (II) Determine la máxima energía cinética de las partículas β^+ que se liberan cuando $^{11}_{6}$C decae a $^{11}_{5}$B. ¿Cuál es la máxima energía que puede tener el neutrino? ¿Cuál es la mínima energía de cada uno?

36. (III) La partícula α que se emite cuando el $^{238}_{92}$U decae tiene 4.20 MeV de energía cinética. Calcule la energía cinética de retroceso del núcleo hijo y el valor Q del decaimiento.

37. (III) ¿Cuál es la energía de la partícula α que se emite en el decaimiento $^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + \alpha$? Tome en cuenta el retroceso del núcleo hijo.

38. (III) Demuestre que, cuando un núcleo experimenta decaimiento β^+, la energía total liberada es igual a

$$(M_\text{P} - M_\text{D} - 2m_\text{e})c^2,$$

donde M_P y M_D son las masas de los átomos padre e hijo (neutro), y m_e es la masa de un electrón o positrón.

41–8 a 41–10 Vida media, tasas de decaimiento, series de decaimiento, fechamiento

39. (I) *a*) ¿Cuál es la constante de decaimiento del $^{238}_{92}$U cuya vida media es 4.5×10^9 años? *b*) La constante de decaimiento de un núcleo dado es 3.2×10^{-5} s^{-1}. ¿Cuál es su vida media?

40. (I) Un material radiactivo produce 1280 decaimientos por minuto en un momento, y 3.6 h después produce 320 decaimientos por minuto. ¿Cuál es su vida media?

41. (I) ¿Qué fracción de una muestra de $^{68}_{32}$Ge, cuya vida media es de aproximadamente 9 meses, permanecerá después de 2.0 años?

42. (I) ¿Cuál es la actividad de una muestra de $^{14}_{6}$C que contiene 8.1×10^{20} núcleos?

43. (I) ¿Qué fracción de una muestra queda después de exactamente 6 vidas medias?

44. (II) Tanto una muestra de $^{60}_{27}$Co como una muestra de $^{131}_{53}$I tienen N_0 átomos en $t = 0$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que ambas tengan la misma actividad? (Consulte los datos de la vida media en el Apéndice F).

45. (II) ¿Cuántos núcleos de $^{238}_{92}$U permanecen en una roca si la actividad registra 340 decaimientos por segundo?

46. (II) En una serie de decaimientos, el núclido $^{235}_{92}$U se convierte en $^{207}_{82}$Pb. ¿Cuántas partículas α y β^- se emiten en esta serie?

47. (II) El isótopo yodo $^{131}_{53}$I se usa en hospitales para diagnóstico del funcionamiento de la tiroides. Si un paciente ingiere 782 μg, determine la actividad *a*) inmediatamente, *b*) 1.00 h después, cuando la tiroides se examina y *c*) 4.0 meses después. Consulte el Apéndice F.

48. (II)El $^{124}_{55}$Cs tiene una vida media de 30.8 s. *a*) Si inicialmente se tienen 7.8 μg, ¿cuántos núcleos de Cs están presentes? *b*) ¿Cuántos están presentes 2.6 min después? *c*) ¿Cuál es la actividad en este tiempo? *d*) ¿Después de cuánto tiempo la actividad disminuirá a menos de aproximadamente 1 por segundo?

49. (II) Calcule la masa de una muestra de $^{40}_{19}$K puro con una tasa de decaimiento inicial de 2.0×10^5 s^{-1}. La vida media del $^{40}_{19}$K es de 1.265×10^9 años.

50. (II) Calcule la actividad de una muestra pura de 8.7 μg de $^{32}_{15}$P $\left(T_{\frac{1}{2}} = 1.23 \times 10^6 \text{ s}\right)$.

51. (II) La actividad de una muestra de $^{35}_{16}$S $\left(T_{\frac{1}{2}} = 87.32 \text{ días}\right)$ es 3.65×10^4 decaimientos por segundo. ¿Cuál es la masa de la muestra?

52. (II) Una muestra de $^{233}_{92}$U $\left(T_{\frac{1}{2}} = 1.59 \times 10^5 \text{ años}\right)$ contiene 5.50×10^{18} núcleos. *a*) ¿Cuál es la constante de decaimiento? *b*) ¿Aproximadamente cuántas desintegraciones ocurrirán por minuto?

53. (II) La actividad de una muestra cae en un factor 4.0 en 8.6 minutos. ¿Cuál es su vida media?

54. (II) Una muestra de 385 g de carbono puro contiene 1.3 partes en 10^{12} (átomos) de $^{14}_{6}$C. ¿Cuántas desintegraciones ocurren por segundo?

55. (II) Una muestra de $^{238}_{92}$U decae a una tasa de 3.70×10^2 decaimientos/s. ¿Cuál es la masa de la muestra?

56. (II) **Fechamiento con rubidio-estroncio**. El isótopo rubidio $^{87}_{37}$Rb, un emisor β con una vida media de 4.75×10^{10} años, se usa para determinar la edad de rocas y fósiles. Las rocas con fósiles de animales antiguos contienen una proporción de $^{87}_{38}$Sr a $^{87}_{37}$Rb de 0.0260. Suponiendo que no había $^{87}_{38}$Sr cuando las rocas se formaron, estime la edad de estos fósiles.

57. (II) La actividad de una fuente radiactiva disminuye en 2.5% en 31.0 horas. ¿Cuál es la vida media de esta fuente?

58. (II) El $^{7}_{4}$Be decae con una vida media de aproximadamente 53 días. Se produce en la atmósfera superior y se filtra hacia la superficie de la Tierra. Si se detecta que una hoja de planta experimenta 350 decaimientos/s de $^{7}_{4}$Be, *a*) ¿cuánto se tendrá que esperar para que la tasa de decaimiento caiga a 15 por segundo? *b*) Estime la masa inicial del $^{7}_{4}$Be en la hoja.

59. (II) Dos de las cadenas de decaimiento radiactivo que ocurren en la naturaleza comienzan con $^{232}_{90}$Th y con $^{235}_{92}$U. Los primeros cinco decaimientos de estas secuencias son:

$$\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha$$

y

$$\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha.$$

Determine los núcleos hijos intermedios resultantes en cada caso.

60. (II) Un antiguo mazo de madera contiene 85 g de carbono y tiene una actividad de 7.0 decaimientos por segundo. Determine su antigüedad suponiendo que, en los árboles vivos, la proporción de átomos $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ es aproximadamente 1.3×10^{-12}.

61. (III) En $t = 0$, una muestra pura de núcleos radiactivos contiene núcleos N_0 cuya constante de decaimiento es λ. Determine una fórmula para el número de núcleos hijos, N_D, como función del tiempo; suponga que el núcleo hijo es estable y que $N_\text{D} = 0$ en $t = 0$.

Problemas generales

62. ¿Cuál isótopo radiactivo de plomo se produce si la actividad medida de una muestra disminuye al 1.050% de su actividad original en 4.00 h?

63. Una antigua herramienta de madera contiene sólo el 6.0% del $^{14}_{6}$C que tendría una masa igual de madera fresca. ¿Cuál es la antigüedad de la herramienta?

64. Una estrella de neutrones consiste en neutrones aproximadamente a la densidad nuclear. Para una estrella de neutrones de 10 km de diámetro, estime *a*) su número de masa, *b*) su masa (en kg) y *c*) la aceleración de la gravedad en su superficie.

65. **Fechamiento con tritio**. El isótopo de hidrógeno $^{3}_{1}$H que se llama *tritio* (porque contiene tres nucleones), tiene una vida media de 12.3 años. Se emplea para medir la antigüedad de objetos de hasta aproximadamente 100 años. Se produce en la atmósfera superior mediante rayos cósmicos y llega a la Tierra con la lluvia. Como aplicación, determine aproximadamente la antigüedad de una botella de vino cuya radiación $^{3}_{1}$H es de aproximadamente $\frac{1}{10}$ de la presente en vino nuevo.

66. Algunas teorías de partículas elementales (sección 43-11) sugieren que el protón puede ser inestable, con una vida media $\geq 10^{33}$ años. ¿Cuánto tiempo habría que esperar para que un protón en su cuerpo decayera (aproxime su cuerpo como si estuviera todo formado de agua)?

67. Demuestre, con los decaimientos dados en la sección 41-5, que el neutrino tiene espín $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$.

68. Los experimentos originales que establecieron que un átomo tenía un pesado núcleo positivo se realizaron mediante el disparo de partículas alfa a través de una hoja de oro. Las partículas alfa utilizadas tenían una energía cinética de 7.7 MeV. ¿Cuál es la distancia más cercana a la que podían llegar a un núcleo de oro? ¿Cómo se compara esto con el tamaño del núcleo?

69. ¿Cuánto habrá que esperar (en vidas medias) para que una muestra radiactiva caiga al 1.00% de su actividad original?

70. Si el isótopo de potasio $^{40}_{19}$K efectúa 45 decaimientos/s en un litro de leche, estime cuánto $^{40}_{19}$K y $^{39}_{19}$K regular hay en un litro de leche. Consulte el Apéndice F.

71. *a*) En un decaimiento α de un núcleo de $^{226}_{88}$Ra por ejemplo, demuestre que el núcleo se lleva una fracción $1/\left(1 + \frac{1}{4}A_{\mathrm{D}}\right)$ de la energía total disponible, donde A_{D} es el número de masa del núcleo hijo. [*Sugerencia:* Considere la conservación de la cantidad de movimiento , así como la conservación de la energía.] *b*) ¿Aproximadamente qué porcentaje de la energía disponible se lleva la partícula α cuando decae el $^{226}_{88}$Ra?

72. El estroncio 90 es producto de la fisión nuclear del uranio tanto en reactores como en bombas atómicas. Busque su ubicación en la tabla periódica para ver qué otros elementos son químicamente similares, y diga por qué cree que resulta peligroso ingerirlo. Tiene muchos neutrones y decae con una vida media de aproximadamente 29 años. ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar para que la cantidad de $^{90}_{38}$Sr sobre la superficie de la Tierra llegue al 1% de su nivel actual, suponiendo que no se esparce nuevo material? Escriba la reacción de decaimiento, incluido el núcleo hijo que es radiactivo: escriba su decaimiento.

73. Con el principio de incertidumbre y el radio de un núcleo, estime, por ejemplo, la mínima energía cinética posible de un nucleón en hierro. Ignore correcciones relativistas. [*Sugerencia:* Una partícula puede tener una cantidad de movimiento al menos tan grande como su incertidumbre de cantidad de movimiento .]

74. *a*) Calcule la energía cinética de la partícula α emitida cuando decae el $^{236}_{92}$U. *b*) Con base en la ecuación 41-1, estime el radio de una partícula α y un núcleo de $^{232}_{90}$Th. Con base en esto, estime *c*) la máxima altura de la barrera de Coulomb y *d*) su ancho AB en la figura 41-7.

75. El núclido $^{191}_{76}$Os decae con energía β^- de 0.14 MeV acompañado por rayos γ con 0.042 MeV y 0.129 MeV de energía. *a*) ¿Cuál es el núcleo hijo? *b*) Dibuje un diagrama de nivel de energía que muestre los estados fundamentales del núcleo padre y del núcleo hijo, así como estados excitados de este último. *c*) ¿A cuáles estados del núcleo hijo ocurre decaimiento β^- de $^{191}_{76}$Os?

76. Determine las actividades de *a*) 1.0 g de $^{131}_{53}$I $\left(T_{\frac{1}{2}} = 8.02 \text{ días}\right)$ y *b*) 1.0 g de $^{238}_{92}$U $\left(T_{\frac{1}{2}} = 4.47 \times 10^{9} \text{ años}\right)$.

77. Con base en la figura 41-1 estime la energía de enlace para el cobre y luego estime la energía, en joules, necesaria para desintegrar una moneda de cobre de 3.0 g en sus nucleones constituyentes.

78. En vez de dar las masas atómicas para núclidos, como en el Apéndice F, algunas tablas mencionan el **exceso de masa**, Δ, que se define como $\Delta = M - A$, donde A es el número de masa atómica y M es la masa en u. Determine el exceso de masa en u y en MeV/c^2 para: *a*) $^{4}_{2}$He; *b*) $^{12}_{6}$C; *c*) $^{86}_{38}$Sr; *d*) $^{235}_{92}$U. *e*) A partir de un vistazo al Apéndice F, ¿podría hacer una generalización acerca del signo de Δ como función de Z o A?

79. Cuando se coloca agua cerca de una intensa fuente de neutrones, estos últimos pueden frenarse mediante colisiones con las moléculas de agua y finalmente quedar atrapados por un núcleo de hidrógeno para formar el isótopo estable llamado deuterio, $^{2}_{1}$H, y emitir un rayo gamma. ¿Cuál es la energía del rayo gamma?

80. *a*) Demuestre que la **vida media** de un núclido radiactivo, que se define como

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t\, N(t)\, dt}{\int_0^\infty N(t)\, dt},$$

es $\tau = 1/\lambda$. *b*) ¿Qué fracción del número original de núcleos permanece después de una vida media?

81. *a*) Una muestra de 72 gramos de carbono natural contiene la fracción habitual de $^{14}_{6}$C. Estime cuánto tiempo transcurrirá antes de que sólo quede un núcleo de $^{14}_{6}$C. *b*) ¿Cómo cambia la respuesta en *a*) si la muestra es de 270 gramos? ¿Qué dice esto acerca de los límites de fechamiento con carbono?

82. Si la masa del protón estuviera apenas un poco más cerca de la masa del neutrón, la siguiente reacción sería posible incluso a bajas energías de colisión:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu.$$

a) ¿Por qué esta situación podría ser catastrófica? *b*) ¿En qué porcentaje tendría que aumentar la masa del protón para hacer posible esta reacción?

83. ¿Cuál es la proporción de las energías cinéticas para una partícula alfa y una partícula beta, si ambas describen trayectorias con el mismo radio de curvatura en un campo magnético, con orientación perpendicular a las trayectorias de las partículas?

84. Una muestra de 1.00 g de samario natural emite partículas α a una tasa de 120 s^{-1} debido a la presencia de $^{147}_{62}Sm$. La abundancia natural del $^{147}_{62}Sm$ es del 15%. Calcule la vida media para este proceso de decaimiento.

85. Casi todo el uranio que existe en la naturaleza es $^{238}_{92}U$ con una vida media de 4.468×10^9 años. La mayoría del resto del uranio natural es $^{235}_{92}U$ con una vida media de 7.04×10^8 años. En la actualidad, una muestra contiene 0.720% de $^{235}_{92}U$. *a*) ¿Cuánto fue este porcentaje hace mil millones de años? *b*) ¿Qué porcentaje de $^{235}_{92}U$ permanecerá dentro de 100 millones de años?

86. En general, un plátano contiene 400 mg de potasio, de los cuales una pequeña fracción es el isótopo radiactivo $^{40}_{19}K$ (véase el Apéndice F). Estime la actividad de un plátano promedio que se debe al $^{40}_{19}K$.

87. Algunos isótopos radiactivos tienen vidas medias que son mayores que la edad del Universo (como el gadolinio o el samario). La única forma de determinar estas vidas medias es monitorear la tasa de decaimiento de una muestra que contenga estos isótopos. Por ejemplo, suponga que se encuentra un asteroide que en la actualidad contiene aproximadamente 15,000 kg de $^{152}_{64}Gd$ (gadolinio) y se detecta una actividad de 1 decaimiento/s. ¿Cuál es la vida media del gadolinio (en años)?

88. Las series de decaimiento, como la que se muestra en la figura 41-12, se pueden clasificar en cuatro familias, dependiendo de si los números de masa tienen la forma $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$, o $4n + 3$, donde n es un entero. Justifique este enunciado y demuestre que, para un núclido en cualquier familia, todos sus núcleos hijos estarán en la misma familia.

* Problemas numéricos/por computadora

***89.** (I) Un laboratorio tiene una muestra de 1.80 μg de $^{13}_{7}N$ cuya constante de decaimiento $\lambda = 1.16 \times 10^{-3}\ s^{-1}$. Calcule el número inicial de núcleos, N_0, presente en la muestra. Con base en la ley de decaimiento radiactivo, $N = N_0 e^{-\lambda t}$, determine el número de núcleos N presentes en el momento t para $t = 0$ a 30 minutos (1800 s) en incrementos de 0.5 min (30 s). Elabore una gráfica de N contra t y a partir de ésta determine la vida media de la muestra.

***90.** (II) Construya una hoja de cálculo (u otra herramienta numérica) que reproduzca la figura 41-1, la gráfica de energía de enlace por nucleón (en MeV) contra el número de masa A. Con ayuda del Apéndice F, calcule la energía de enlace por nucleón para el isótopo más estable de cada posible número de masa $A \geq 2$. [Los primeros valores serán para $^{2}_{1}H$, $^{3}_{2}He$ es más estable que $^{3}_{1}H$), $^{4}_{2}He$, $^{6}_{3}Li$, y $^{7}_{3}Li$ (pues es más estable que el $^{7}_{4}Be$).] Para reducir la cantidad de datos, para A $\geq$ 20 grafique sólo puntos para valores pares de A, y grafique hasta un máximo de A = 142.

Respuestas a los ejercicios

A: 0.042130 u.
B: 7.98 MeV/nucleón.
C: *b*).
D: *c*).
E: *a*).
F: $1.37 \times 10^{-11}\ s^{-1}$.
G: *a*).

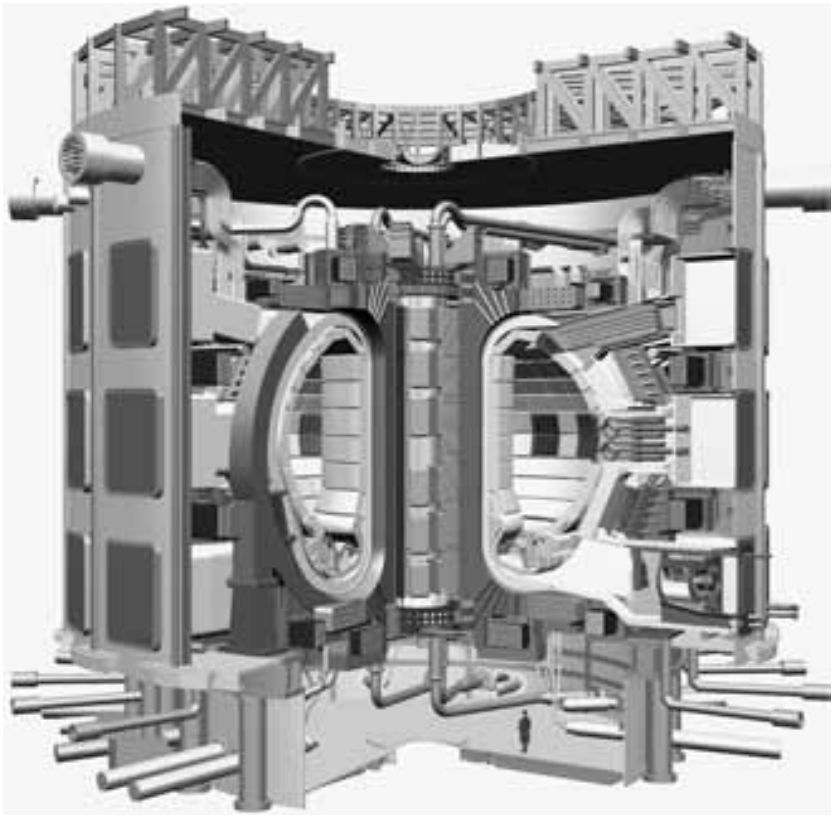


Diagrama del Reactor Experimental Termonuclear Internacional (ITER), que comenzará a operar alrededor de 2016. Dentro de su cavidad, de más de 12 m de diámetro, un plasma de electrones y núcleos ligeros se calentará a altas temperaturas que rivalizarán con las del Sol. Confinar un plasma mediante campos magnéticos resulta difícil, y se requiere intensa investigación para que la fusión de los núcleos ligeros cumpla su promesa de ser una fuente de energía en abundancia y relativamente limpia.

Este capítulo cubre los temas básicos de la física de las reacciones nucleares, fisión y fusión nucleares, y cómo obtener energía nuclear. También se estudian los aspectos de salud de la dosimetría, la terapia con radiación, y la visualización de imágenes mediante TAC, TEP, SPET e IRM.

CAPÍTULO 42

Energía nuclear; efectos y usos de la radiación

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

1. El Sol obtiene su energía a partir de
- ***a)*** decaimiento nuclear alfa.
- ***b)*** decaimiento nuclear beta.
- ***c)*** decaimiento nuclear gamma.
- ***d)*** fisión nuclear.
- ***e)*** fusión nuclear.

2. ¿Cuál radiación induce más daño biológico con una cantidad dada de energía depositada en el tejido?
- ***a)*** Partículas alfa.
- ***b)*** Radiación gamma.
- ***c)*** Radiación beta.
- ***d)*** Todas causan el mismo daño con la misma energía depositada.
- ***e)*** Depende del tipo de tejido.

En este capítulo continuaremos el estudio de la física nuclear. Comenzaremos con una discusión de las reacciones nucleares y luego examinaremos los importantes procesos de fisión y fusión que liberan gran cantidad de energía. Este capítulo también examina los efectos de la radiación nuclear que pasa a través de la materia, en particular la materia biológica, y cómo se usa la radiación en el área médica para terapia, diagnóstico y técnicas para obtener imágenes del cuerpo humano.

CONTENIDO

- 42–1 Reacciones nucleares y la transmutación de los elementos
- 42–2 Sección eficaz
- 42–3 Fisión nuclear; reactores nucleares
- 42–4 Fusión nuclear
- 42–5 Paso de la radiación a través de la materia; daño por radiación
- 42–6 Medición de la radiación: Dosimetría
- * 42–7 Terapia con radiación
- * 42–8 Trazadores en investigación y medicina
- * 42–9 Formación de imágenes mediante tomografía: Exploración TAC y tomografía por emisión
- * 42–10 Resonancia magnética nuclear (RMN); formación de imágenes mediante resonancia magnética (IRM)

42–1 Reacciones nucleares y la transmutación de los elementos

Cuando un núcleo experimenta un decaimiento α o β, el núcleo hijo (o derivado) es un elemento diferente del núcleo padre (o precursor). La transformación de un elemento en otro, llamada **transmutación**, también se realiza mediante reacciones nucleares. Se dice que una **reacción nuclear** ocurre cuando un núcleo dado es golpeado por otro núcleo, o por una partícula más simple como un rayo γ o un neutrón, y tiene lugar una interacción. Ernest Rutherford fue el primero que reportó haber presenciado una reacción nuclear. En 1919 observó que algunas partículas α, al pasar a través de gas de nitrógeno, eran absorbidas y emitían protones. Concluyó que los núcleos de nitrógeno se transformaban en núcleos de oxígeno mediante la reacción

$$^{4}_{2}\text{He} + {}^{14}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{17}_{8}\text{O} + {}^{1}_{1}\text{H},$$

donde $^{4}_{2}\text{He}$ es una partícula α y $^{1}_{1}\text{H}$ es un protón.

Desde entonces se han observado muchas reacciones nucleares. De hecho, muchos de los isótopos radiactivos que se usan en el laboratorio se obtienen mediante reacciones nucleares. Las reacciones nucleares se pueden generar en el laboratorio, pero también ocurren regularmente en la naturaleza. En el capítulo 41 se vio un ejemplo: el $^{14}_{6}\text{C}$ se elabora de manera continua en la atmósfera mediante la reacción $\text{n} + {}^{14}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\text{C} + \text{p}$.

En ocasiones las reacciones nucleares se escriben en forma abreviada: por ejemplo, la reacción

$$\text{n} + {}^{14}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\text{C} + \text{p}$$

se puede escribir

$$^{14}_{7}\text{N}\ (\text{n}, \text{p})\ {}^{14}_{6}\text{C}.$$

Los símbolos afuera de los paréntesis a la izquierda y derecha representan el núcleo inicial y final, respectivamente. Los símbolos adentro de los paréntesis representan (el primero) la partícula que bombardea y (el segundo) la pequeña partícula emitida.

En cualquier reacción nuclear se conservan tanto la carga eléctrica como el número de nucleones. Estas leyes de conservación con frecuencia son útiles, como se verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO CONCEPTUAL 42–1 **Reacción de deuterio.** Se observa que un neutrón golpea un núcleo de $^{16}_{8}\text{O}$ y cede un deuterón. (Un **deuterón**, o **deuterio**, es el isótopo de hidrógeno que contiene un protón y un neutrón, $^{2}_{1}\text{H}$; en ocasiones se le asigna el símbolo d o D.) ¿Cuál es el núcleo que resulta?

RESPUESTA Se tiene la reacción $\text{n} + {}^{16}_{8}\text{O} \rightarrow ? + {}^{2}_{1}\text{H}$. El número total de nucleones inicialmente es $1 + 16 = 17$, y la carga total es $0 + 8 = 8$. Los mismos totales se aplican después de la reacción. Por lo tanto, el núcleo producto debe tener $Z = 7$ y $A = 15$. A partir de la tabla periódica, se encuentra que el nitrógeno es el que tiene $Z = 7$, de manera que el núcleo producido es $^{15}_{7}\text{N}$.

EJERCICIO A Determine el núcleo resultante en la reacción $\text{n} + {}^{137}_{56}\text{Ba} \rightarrow ? + \gamma$.

En las reacciones nucleares también se conservan la energía y la cantidad de movimiento (o momento lineal) y sirven como indicio para determinar si una reacción dada puede o no ocurrir. Por ejemplo, si la masa total de los productos finales es menor que la masa total de las partículas iniciales, esta disminución en masa (recuerde $\Delta E = \Delta mc^2$) se convierte en energía cinética (K) de las partículas resultantes. Pero si la masa total de los productos es mayor que la masa total de los reactantes iniciales, la reacción requiere energía. Entonces la reacción no ocurrirá a menos que la partícula que bombardea tenga suficiente energía cinética. Considere una reacción nuclear de la forma general

$$\text{a} + \text{X} \rightarrow \text{Y} + \text{b}, \qquad \textbf{(42–1)}$$

donde a representa una partícula proyectil (o núcleo pequeño) que choca con el núcleo X, lo que produce el núcleo Y y la partícula b (por lo general, p, n, α, γ). La **energía de reacción**, o **valor** $\boldsymbol{Q}$, se define en términos de las masas implicadas, como

$$Q = (M_a + M_X - M_b - M_Y)c^2. \quad \textbf{(42–2a)}$$

Para un rayo γ, $M = 0$.

Puesto que la energía se conserva, Q tiene que ser igual al cambio en energía cinética (final menos inicial):

$$Q = K_b + K_Y - K_a - K_X. \quad \textbf{(42–2b)}$$

Si X es un núcleo blanco en reposo (o casi) al que golpea la partícula entrante a, entonces $K_X = 0$. Para $Q > 0$, se dice que la reacción es *exotérmica* o *exoérgica*; en la reacción se libera energía, de manera que la energía cinética total es mayor después de la reacción que antes. Si Q es negativo ($Q < 0$), se dice que la reacción es *endotérmica* o *endoérgica*: la energía cinética total final es menor que la energía cinética inicial, y se requiere de una entrada de energía para lograr que ocurra la reacción. La entrada de energía proviene de la energía cinética de las partículas iniciales que chocan (a y X).

EJEMPLO 42–2 **Una reacción de neutrón lento.** La reacción nuclear

$$n + {}^{10}_{5}B \rightarrow {}^{7}_{3}Li + {}^{4}_{2}He$$

ocurre incluso cuando neutrones con movimiento muy lento (masa $M_n = 1.0087$ u) chocan con un átomo de boro en reposo. Para una reacción particular en la cual $K_n \approx 0$, se observa que el helio resultante ($M_{He} = 4.0026$ u) tiene una rapidez de 9.30×10^6 m/s. Determine *a*) la energía cinética del litio ($M_{Li} = 7.0160$ u) y *b*) el valor Q de la reacción.

PLANTEAMIENTO Como el neutrón y el boro en esencia están en reposo, la cantidad de movimiento total antes de la reacción es cero; la cantidad de movimiento se conserva y, por lo tanto, también debe ser cero después. En consecuencia,

$$M_{Li} v_{Li} = M_{He} v_{He}.$$

Se despeja v_{Li} y se sustituye en la ecuación para energía cinética. En *b*), utilice la ecuación 42-2b.

SOLUCIÓN *a*) Podemos usar energía cinética clásica con escaso error, en lugar de fórmulas relativistas, porque $v_{He} = 9.30 \times 10^6$ m/s no está cerca de la rapidez de la luz c, y v_{Li} incluso será menor, pues $M_{Li} > M_{He}$. Por lo tanto, se puede escribir:

$$K_{Li} = \frac{1}{2} M_{Li} v_{Li}^2 = \frac{1}{2} M_{Li} \left(\frac{M_{He} v_{He}}{M_{Li}} \right)^2$$

$$= \frac{M_{He}^2 v_{He}^2}{2 M_{Li}}.$$

Colocamos los números, convertimos la masa de u a kg, y recordamos que 1.60×10^{-13} J = 1 MeV:

$$K_{Li} = \frac{(4.0026\,\text{u})^2 (1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg/u})^2 (9.30 \times 10^6\,\text{m/s})^2}{2(7.0160\,\text{u})(1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg/u})}$$

$$= 1.64 \times 10^{-13}\,\text{J} = 1.02\,\text{MeV}.$$

b) Se proporcionan los datos $K_a = K_X = 0$ en la ecuación 42-2b, de manera que $Q = K_{Li} + K_{He}$, donde

$$K_{He} = \tfrac{1}{2} M_{He} v_{He}^2$$

$$= \tfrac{1}{2} (4.0026\,\text{u})(1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg/u})(9.30 \times 10^6\,\text{m/s})^2$$

$$= 2.87 \times 10^{-13}\,\text{J} = 1.80\,\text{MeV}.$$

Por lo tanto, $Q = 1.02\,\text{MeV} + 1.80\,\text{MeV} = 2.82\,\text{MeV}$.

EJEMPLO 42–3 **¿La reacción procederá?** ¿La reacción

$$p + {}^{13}_{6}C \rightarrow {}^{13}_{7}N + n$$

podrá ocurrir cuando ${}^{13}_{6}C$ se bombardea con protones de 2.0 MeV?

PLANTEAMIENTO La reacción "procederá" si la reacción es exotérmica ($Q > 0$) e incluso si $Q < 0$ siempre que la cantidad de movimiento de entrada y la energía cinética sean suficientes. Primero calcule Q a partir de la diferencia entre la masa final y la inicial empleando la ecuación 42-2a y de acuerdo con las masas que se indican en el Apéndice F.

SOLUCIÓN Las masas totales antes y después de la reacción son:

Antes		Después	
$M({}^{13}_{6}C) =$	13.003355	$M({}^{13}_{7}N) =$	13.005739
$M({}^{1}_{1}H) =$	1.007825	$M(n) =$	1.008665
	14.011180		14.014404

(Debemos usar la masa del átomo ${}^{1}_{1}H$ en lugar de la masa del protón solo porque las masas de ${}^{13}_{6}C$ y ${}^{13}_{7}N$ incluyen los electrones, y debemos incluir un número igual de masas de electrón en cada lado de la ecuación, pues ninguno se crea ni se destruye.) Los productos tienen un exceso de masa de

$$(14.014404 - 14.011180)\,u = 0.003224\,u \times 931.5\,MeV/u = 3.00\,MeV.$$

Por lo tanto, $Q = -3.00$ MeV y la reacción es endotérmica. Esta reacción requiere energía, y los protones de 2.0 MeV no tienen suficiente energía para generarla.

NOTA El protón entrante en este ejemplo debería tener un poco más de 3.00 MeV de energía cinética para producir esta reacción; 3.00 MeV serían suficientes para conservar la energía, pero un protón de esta energía produciría el ${}^{13}_{7}N$ y n sin energía cinética y, por lo tanto, sin cantidad de movimiento. Puesto que un protón incidente de 3.0 MeV tiene cantidad de movimiento, se violaría la conservación de la cantidad de movimiento. Un cálculo empleando la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, como se hizo en los ejemplos 41-6 y 42-2, indica que la energía de protón mínima, llamada **energía umbral**, es 3.23 MeV en este caso (= problema 16).

Física de neutrones

La transmutación artificial de los elementos dio un gran salto hacia delante en la década de 1930, cuando Enrico Fermi se dio cuenta de que los neutrones serían los proyectiles más efectivos para causar reacciones nucleares y, en particular, para producir nuevos elementos. Puesto que los neutrones no tienen carga eléctrica neta, los núcleos con carga positiva no los repelen como a los protones o las partículas alfa. Así, la probabilidad de que un neutrón llegue al núcleo y cause una reacción es mucho mayor que para proyectiles con carga,[†] en particular a bajas energías. Entre 1934 y 1936, Fermi y sus colaboradores en Roma produjeron muchos isótopos anteriormente desconocidos al bombardear diferentes elementos con neutrones. Fermi notó que, si el elemento conocido más pesado, el uranio, se bombardea con neutrones, sería posible producir nuevos elementos con números atómicos mayores que el del uranio. Después de varios años de arduo trabajo, se sospechó la producción de dos nuevos elementos, neptunio ($Z = 93$) y plutonio ($Z = 94$). La confirmación plena de que era posible producir tales elementos "transuránicos" llegó muchos años después en la Universidad de California, en Berkeley. Las reacciones se presentan en la figura 42-1.

Pronto se demostró que lo que Fermi realmente observó cuando bombardeó uranio fue un proceso todavía más extraño, un proceso que estuvo destinado a desempeñar un papel extraordinario en todo el mundo. Esto se discutirá en la sección 42-3.

a) $\text{n} + {}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{239}_{92}\text{U}$

Neutrón capturado por ${}^{238}_{92}U$.

b) ${}^{239}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{239}_{93}\text{Np} + \text{e}^- + \bar{\nu}$

El ${}^{239}_{92}U$ experimenta decaimiento β para convertirse en neptunio 239.

c) ${}^{239}_{93}\text{Np} \rightarrow {}^{239}_{94}\text{Pu} + \text{e}^- + \bar{\nu}$

El ${}^{239}_{93}Np$ experimenta decaimiento β para producir plutonio 239.

FIGURA 42–1 En esta serie de reacciones se producen neptunio y plutonio, después de bombardear ${}^{238}_{92}U$ con neutrones.

[†]Esto es, partículas con carga positiva. Los electrones rara vez causan reacciones nucleares porque no interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte.

42–2 Sección eficaz

Algunas reacciones tienen una mayor probabilidad de ocurrir que otras. La probabilidad de reacción se especifica mediante una cantidad llamada **sección eficaz**. Aunque el tamaño de un núcleo, al igual que el de un átomo, no es una cantidad claramente definida, pues los bordes no son distintivos como los de una pelota de tenis o de béisbol; no obstante, mediante una analogía, es posible definir una *sección eficaz* para núcleos que experimentan colisiones. Suponga que las partículas inciden sobre un blanco estacionario con área total A y grosor ℓ, como se ilustra en la figura 42-2. Suponga también que el blanco está hecho con objetos idénticos (como canicas o núcleos), cada uno de los cuales tiene una sección transversal de área σ, e imagine que los proyectiles incidentes son pequeños en comparación. Suponga que los objetos que constituyen el blanco están bastante separados y que el grosor ℓ es tan pequeño que no debe preocuparse por el hecho de que exista traslape. Con frecuencia ésta es una suposición razonable, porque los núcleos tienen diámetros en el orden de 10^{-14} m, pero están separados al menos por 10^{-10} m (tamaño atómico) incluso en el caso de los sólidos. Si hubiera n núcleos por unidad de volumen, el área transversal total de todos estos pequeños blancos sería

$$A' = nA\ell\sigma$$

pues $nA\ell = (n)(\text{volumen})$ es el número total de blancos y σ es el área transversal de cada uno. Si $A' \ll A$, la mayoría de las partículas proyectiles incidentes pasarán a través del blanco sin chocar. Si R_0 es la tasa a la que las partículas proyectiles golpean el blanco (número/segundo), la rapidez a la que ocurren las colisiones, R, es

$$R = R_0 \frac{A'}{A} = R_0 \frac{nA\ell\sigma}{A}$$

de manera que

$$R = R_0 n\ell\sigma.$$

Por ende, al medir la rapidez de colisión, R, se puede determinar σ:

$$\sigma = \frac{R}{R_0 n\ell}. \qquad \textbf{(42–3)}$$

Si los núcleos fueran simples bolas de billar, y R el número de partículas que se desvían por segundo, σ representaría el área transversal real de cada bola. Pero los núcleos son objetos complicados que no se pueden considerar con fronteras distintivas. Más aún, las colisiones pueden ser elásticas o inelásticas, y es posible que se efectúen reacciones en las que cambie la naturaleza de las partículas. Al medir R para cada proceso posible, podemos determinar una **sección eficaz efectiva**, σ, para cada proceso. Ninguna de estas secciones eficaces necesariamente se relaciona con una área transversal geométrica. En vez de ello, σ es una área de blanco "efectiva". Es una *medida de la probabilidad de una colisión o de que ocurra una reacción particular* por cada núcleo que constituye el blanco, y es independiente de las dimensiones de todo el blanco. El concepto de sección eficaz es útil porque σ sólo depende de las propiedades de las partículas que interactúan, mientras que R depende del grosor y el área del blanco físico (macroscópico), del número de partículas en el haz incidente, etcétera.

Cuando un par dado de partículas interactúan, se define su **sección eficaz elástica** σ_{el} a partir de la ecuación 42-3, donde R para una configuración experimental dada es la tasa de colisiones elásticas (o **dispersión elástica**), con lo que nos referimos a las colisiones para las cuales las partículas finales son las mismas que las partículas iniciales (a = b, X = Y, en la ecuación 42-1) y $Q = 0$. De igual modo, la sección eficaz inelástica, σ_{inel}, se relaciona con la tasa de colisiones inelásticas, o **dispersión inelástica**, que implica a las mismas partículas finales e iniciales, pero $Q \neq 0$, generalmente porque están implicados estados excitados. Para cada reacción en la cual las partículas finales son diferentes de las partículas iniciales, existe una sección eficaz particular. Para protones (p) incidentes sobre ${}^{13}_{6}\text{C}$, por ejemplo, podrían darse varias reacciones, como $\text{p} + {}^{13}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{13}_{7}\text{N} + \text{n}$ ó $\text{p} + {}^{13}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{10}_{5}\text{B} + {}^{4}_{2}\text{He}$, etcétera. La suma de todas las secciones eficaces de las reacciones separadas (para un par dado de partículas iniciales) se llama **sección eficaz total de las reacciones**, σ_R. La **sección eficaz total**, σ_T, es

$$\sigma_T = \sigma_{el} + \sigma_{inel} + \sigma_R$$

y es una medida de todas las posibles interacciones o colisiones que comienzan con partículas iniciales dadas. Dicho de otra forma, σ_T es una medida de cuántas de las partículas incidentes interactúan de alguna forma y, por lo tanto, se eliminan del haz incidente.

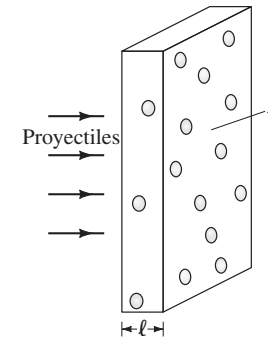


FIGURA 42–2 Partículas proyectiles que inciden sobre un blanco de área A y grosor ℓ, constituido con n núcleos por unidad de volumen.

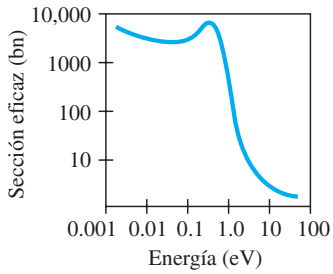


FIGURA 42–3 Sección eficaz del neutrón para el cadmio 114 como función de la energía cinética del neutrón incidente. Es extraordinariamente grande para $K \lesssim 1$ eV. Note que ambas escalas son logarítmicas.

También se pueden definir **secciones eficaces diferenciales**, que representan la probabilidad de reacción de las partículas desviadas (o emitidas) que salen con ángulos particulares.

Se dice que cuando se midió una de las primeras secciones eficaces nucleares, un físico, sorprendido por lo grande que era este valor ($\approx 10^{-28}$ m^2), apuntó: "Es tan grande como un granero". Desde entonces, las secciones eficaces nucleares se miden en "barns" (graneros), y 1 barn (bn) $= 10^{-28}$ m^2.

El valor de σ para una reacción dada depende, entre otras cosas, de la energía cinética incidente. Las secciones eficaces nucleares típicas son del orden de barns, pero pueden variar de milibarns a kilobarns o más. La figura 42-3 muestra la sección eficaz para captura de neutrones en el cadmio $\left(\mathrm{n} + {}^{114}_{48}\mathrm{Cd} \rightarrow {}^{115}_{48}\mathrm{Cd} + \gamma\right)$ como función de la energía cinética del neutrón. Las secciones eficaces de neutrones para la mayoría de los materiales son mayores a bajas energías, como se observa en la figura 42-3. Por lo tanto, para producir reacciones nucleares a una alta tasa, es deseable que los neutrones que bombardean tengan baja energía. Los neutrones que se frenan y alcanzan el equilibrio con la materia a temperatura ambiente $\left(\frac{3}{2}kT \approx 0.04\ \mathrm{eV}\ \text{en}\ T = 300\ \mathrm{K}\right)$ se llaman **neutrones térmicos**.

EJEMPLO 42–4 **Uso de la sección eficaz.** La reacción

$$\mathrm{p} + {}^{56}_{26}\mathrm{Fe} \rightarrow {}^{56}_{27}\mathrm{Co} + \mathrm{n}$$

tiene una sección eficaz de 0.65 bn para una energía de protón incidente particular. Suponga que el blanco de hierro tiene una área de 1.5 cm^2 y 2.0 μm de grosor. La densidad del hierro es 7.8×10^3 kg/m^3. Si los protones inciden a una tasa de 2.0×10^{13} partículas/s, calcule la tasa a la que se producen neutrones.

PLANTEAMIENTO Utilice la ecuación 42-3 en la forma $R = R_0\, n\ell\sigma$.

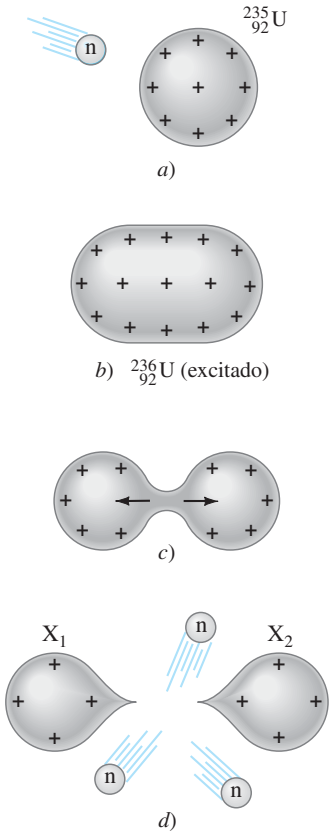
SOLUCIÓN Se sabe que $R_0 = 2.0 \times 10^{13}$ partículas/s, $\ell = 2.0 \times 10^{-6}$ m y $\sigma = 0.65$ bn. Recuerde del capítulo 17 que un mol (masa = 56 g para hierro) contiene 6.02×10^{23} átomos, entonces el número de átomos de hierro por unidad de volumen es

$$n = (6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol})\frac{(7.8 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3})}{(56 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol})} = 8.4 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3.$$

Luego se determina que la tasa a la que se producen neutrones es

$$\begin{aligned} R &= R_0\, n\ell\sigma \\ &= (2.0 \times 10^{13}\ \text{partículas/s})(8.4 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3)(2.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m})(0.65 \times 10^{-28}\ \mathrm{m^2}) \\ &= 2.2 \times 10^8\ \text{partículas/s}. \end{aligned}$$

FIGURA 42–4 Fisión de un núcleo de ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ después de la captura de un neutrón, de acuerdo con el modelo de gota líquida.



42–3 Fisión nuclear; reactores nucleares

En 1938 los científicos alemanes Otto Hahn y Fritz Strassmann hicieron un sorprendente descubrimiento. Al seguir el trabajo de Fermi, encontraron que el uranio bombardeado con neutrones en ocasiones produce núcleos más pequeños que tienen aproximadamente la mitad del tamaño del núcleo de uranio original. Lise Meitner y Otto Frisch rápidamente se dieron cuenta de lo que ocurría: el núcleo de uranio, después de absorber un neutrón, en realidad se dividía en dos piezas aproximadamente iguales. Esto era sorprendente, porque hasta entonces las reacciones nucleares conocidas implicaban sólo el desprendimiento de un pequeño fragmento (por ejemplo, n, p ó α) de un núcleo.

Fisión nuclear y reacciones en candena

Este nuevo fenómeno se llamó **fisión nuclear** por su similitud con la fisión biológica (división celular). Ocurre mucho más fácilmente para el ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ que para el más común ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. El proceso se puede visualizar al imaginar el núcleo de uranio como una gota líquida. De acuerdo con este **modelo de gota líquida**, el neutrón que absorbe el núcleo de ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ otorga al núcleo energía interna adicional (como al calentar una gota de agua). Este estado intermedio, o **núcleo compuesto**, es ${}^{236}_{92}\mathrm{U}$ (debido al neutrón absorbido). La energía adicional de este núcleo (se encuentra en un estado excitado) aparece como movimiento creciente de los nucleones individuales, lo que hace que el núcleo tome formas alargadas anormales, figura 42-4. Cuando el núcleo se estira (en este modelo) a la forma que se ilustra en la figura 42-4c, la atracción de los dos extremos mediante la fuerza nuclear de corto alcance se debilita enormemente por la creciente distancia de separación, la fuerza eléctrica de repulsión se vuelve dominante, y el núcleo se divide en dos (figura 42-4d). Los dos núcleos resultantes, X_1 y X_2, se llaman **fragmentos de fi-**

sión, y en el proceso también se ceden algunos neutrones (por lo general dos o tres). La reacción se puede escribir

$$n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U \rightarrow X_1 + X_2 + \text{neutrones}. \qquad \textbf{(42–4)}$$

El núcleo compuesto, ${}^{236}_{92}U$, existe durante menos de 10^{-12} s, de manera que el proceso ocurre muy rápidamente. Los dos fragmentos de fisión, X_1 y X_2, con más frecuencia dividen la masa de uranio original en fragmentos de aproximadamente el 40% y el 60%, y no en mitades exactas. Una reacción de fisión común es

$$n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3n, \qquad \textbf{(42–5)}$$

aunque también ocurren muchas otras.

EJEMPLO CONCEPTUAL 42–5 **Conteo de nucleones.** Identifique el elemento X en la reacción de fisión $n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{93}_{38}Sr + 2n$.

RESPUESTA El número de nucleones se conserva (sección 41-7). El núcleo de uranio con 235 nucleones más el neutrón entrante hacen 235 + 1 = 236 nucleones. De manera que debe haber 236 nucleones después de la reacción. El Sr tiene 93 nucleones, que con los dos neutrones hacen 95 nucleones, de manera que X tiene $A = 236 - 95 = 141$. La carga eléctrica también se conserva: antes de la reacción, la carga total es $92e$. Después de la reacción, la carga total es $(Z + 38)e$ y debe ser igual a $92e$. Por consiguiente, $Z = 92 - 38 = 54$. El elemento con $Z = 54$ es xenón (véase el Apéndice F o la tabla periódica en la tercera de forros), de manera que el isótopo es ${}^{141}_{54}Xe$.

La figura 42-5 muestra la distribución de los fragmentos de fisión del ${}^{235}_{92}U$ de acuerdo con la masa. Sólo rara vez (aproximadamente 1 en 10^4 veces) una fisión da por resultado iguales fragmentos de masa (flecha en la figura 42-5).

En una reacción de fisión se libera una enorme cantidad de energía, porque la masa del ${}^{235}_{92}U$ es considerablemente mayor que la masa total de los fragmentos de fisión más los neutrones liberados. Esto se puede ver a partir de la curva de energía de enlace por nucleón de la figura 41-1; la energía de enlace por nucleón para el uranio es de aproximadamente 7.6 MeV/nucleón, pero en el caso de los fragmentos de fisión que tienen masa intermedia (en la porción central de la gráfica, $A \approx 100$), la energía de enlace promedio por nucleón es de aproximadamente 8.5 MeV/nucleón. Puesto que los fragmentos de fisión están más firmemente enlazados, la suma de sus masas es menor que la masa del uranio. La diferencia en masa, o energía, entre el núcleo de uranio original y los fragmentos de fisión es aproximadamente 8.5 − 7.6 = 0.9 MeV por nucleón. Puesto que en cada fisión hay 236 nucleones implicados, la energía total liberada por fisión es

$$(0.9 \text{ MeV/nucleón})(236 \text{ nucleones}) \approx 200 \text{ MeV}. \qquad \textbf{(42–6)}$$

Ésta es una enorme cantidad de energía para un solo evento nuclear. En un nivel práctico, la energía de una fisión es pequeña. Pero si muchas de tales fisiones pudieran ocurrir en un breve lapso, estaría disponible una enorme cantidad de energía a nivel macroscópico. Algunos físicos, incluido Fermi, reconocieron que los neutrones liberados en cada fisión (ecuaciones 42-4 y 42-5) se podrían utilizar para crear una **reacción en cadena**. Esto es, un neutrón inicialmente provoca una fisión de un núcleo de uranio; los dos o tres neutrones liberados provocarían fisiones adicionales, de manera que el proceso se multiplica, como se ilustra de manera esquemática en la figura 42-6.

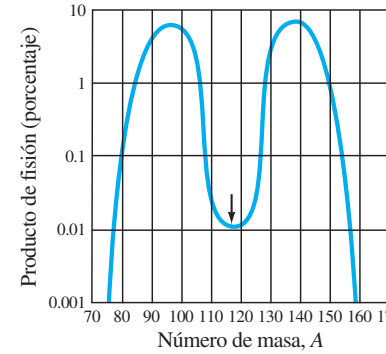


FIGURA 42–5 Distribución de masa de los fragmentos de fisión para ${}^{235}_{92}U + n$. La pequeña flecha indica fragmentos iguales de masa $(\frac{1}{2} \times (236 - 2) = 117$, suponiendo la liberación de 2 neutrones]. Note que la escala vertical es logarítmica.

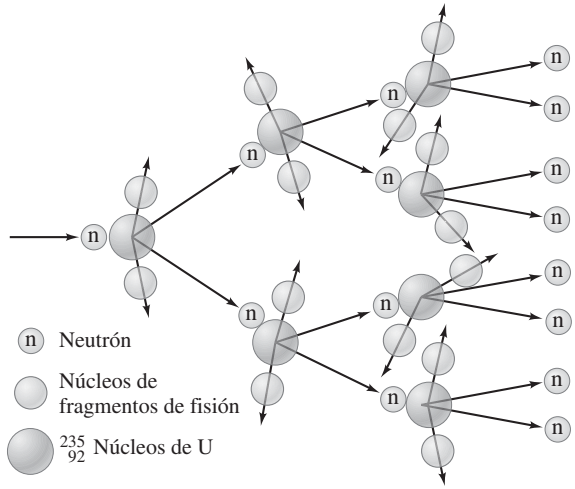


FIGURA 42–6 Reacción en cadena.

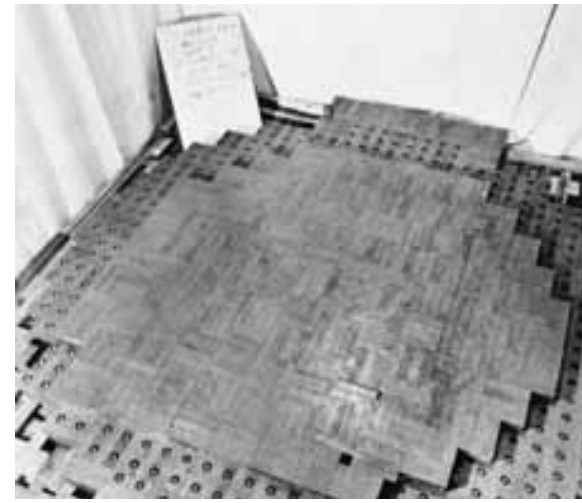


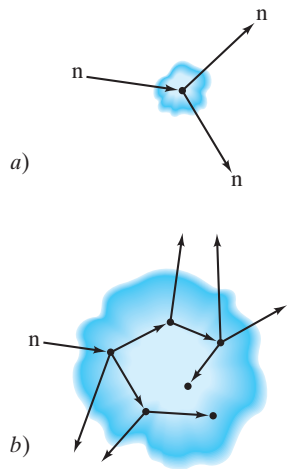
FIGURA 42–7 Ésta es la única fotografía del primer reactor nuclear, construido por Fermi bajo las tribunas del Stagg Field en la Universidad de Chicago. Aquí se muestra en construcción como una capa de grafito (que se utilizaba como moderador) que se colocó sobre una capa de uranio natural. El 2 de diciembre de 1942, Fermi retiró las varillas de control de cadmio y el reactor inició una reacción en cadena. Esta primera reacción en cadena autosostenida la anunció a Washington, vía telefónica, Arthur Compton, quien atestiguó el suceso y reportó: "El navegante italiano acaba de llegar al Nuevo Mundo".

Si en la práctica una **reacción en cadena autosostenida** realmente fuera posible, la enorme energía disponible en fisión se podría liberar a mayor escala. Fermi y sus colaboradores (en la Universidad de Chicago) demostraron que esto era posible al construir el primer **reactor nuclear** en 1942 (figura 42-7).

Reactores nucleares

Para que cualquier reactor nuclear pueda funcionar se tienen que superar muchos obstáculos. En primer término, la probabilidad de que núcleos de $^{235}_{92}\text{U}$ absorban un neutrón sólo es grande en el caso de neutrones lentos, pero los neutrones emitidos durante una fisión (que se necesitan para mantener una reacción en cadena) se mueven muy rápido. Se debe usar una sustancia conocida como **moderador** para frenar los neutrones. El moderador más efectivo consistirá en átomos cuya masa esté tan cerca como sea posible de la de los neutrones. (Para ver por qué esto es cierto, recuerde del capítulo 9 que una bola de billar que choca con una pelota de igual masa, la cual se encuentra en reposo, puede detenerse luego de una colisión; pero una bola de billar que choca con un objeto pesado rebota con rapidez casi invariable.) En consecuencia, el mejor moderador contiene átomos de $^{1}_{1}\text{H}$ átomos. Por desgracia, el $^{1}_{1}\text{H}$ tiende a absorber neutrones. Pero el isótopo de hidrógeno llamado *deuterio*, $^{2}_{1}\text{H}$, no absorbe muchos neutrones y, por consiguiente, casi es un moderador ideal. Tanto $^{1}_{1}\text{H}$ como $^{2}_{1}\text{H}$ se pueden usar en la forma de agua. En el último caso, es **agua pesada**, en la que los átomos de hidrógeno se sustituyeron con deuterio. Otro moderador común es el *grafito*, que consiste en átomos de $^{12}_{6}\text{C}$.

FIGURA 42–8 Si la cantidad de uranio excede la masa crítica, como en *b*), es posible una reacción en cadena sostenida. Si la masa es menor que la masa crítica, como en *a*), demasiados neutrones escaparán antes de que ocurran fisiones adicionales y la reacción en cadena no se sostendrá.



Un segundo problema es que los neutrones producidos en una fisión pueden absorberse y generar otras reacciones nucleares con otros núcleos en el reactor, en vez de producir más fisiones. En un reactor de "agua ligera", los núcleos de $^{1}_{1}\text{H}$ absorben neutrones, como lo hace el $^{238}_{92}\text{U}$ para formar $^{239}_{92}\text{U}$ en la reacción $\text{n} + {}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{239}_{92}\text{U} + \gamma$. El uranio† que se presenta naturalmente contiene un 99.3% de $^{238}_{92}\text{U}$ y sólo un 0.7% de $^{235}_{92}\text{U}$ fisionable. Para aumentar la probabilidad de fisión de núcleos de $^{235}_{92}\text{U}$ el uranio natural se puede **enriquecer** para aumentar el porcentaje de $^{235}_{92}\text{U}$ utilizando procesos tales como difusión o centrifugación. Por lo general, el enriquecimiento no es necesario para los reactores que usan agua pesada como moderador, pues el agua pesada no absorbe neutrones.

El tercer problema es que algunos neutrones escaparán a través de la superficie del núcleo del reactor antes de que puedan provocar más fisiones (figura 42-8). Por ende, la masa del combustible debe ser suficientemente grande para que tenga lugar una reacción en cadena autosostenida. La masa mínima de uranio necesaria se llama **masa crítica**. El valor de la masa crítica depende del moderador, el combustible (se puede usar ($^{239}_{94}\text{Pu}$ en lugar de $^{235}_{92}\text{U}$), y de cuánto se enriquezca el combustible, si es que se enriquece. Los valores comunes están en el orden de algunos kilogramos (esto es, ni gramos ni miles de kilogramos).

Para tener una reacción en cadena autosostenida, en promedio, al menos un neutrón producido en cada fisión debe provocar otra fisión. El número promedio de neutrones por fisión que producen más fisiones se llama **factor de multiplicación**, *f*. Para una reacción en cadena autosostenida, se debe tener $f \geq 1$. Si $f < 1$, el reactor es "sub-

† El $^{238}_{92}\text{U}$ se fisionará, pero sólo con neutrones rápidos (el $^{238}_{92}\text{U}$ es más estable que el $^{235}_{92}\text{U}$). La probabilidad de absorber un neutrón rápido y producir una fisión es muy baja e insuficiente para producir una reacción en cadena autosostenida.

crítico". Si $f > 1$, es "supercrítico" (y podría volverse peligrosamente explosivo). Los reactores están equipados con **varillas de control** móviles (buenos absorbedores de neutrones como cadmio y boro), cuya función es absorber neutrones y mantener el reactor justo en su nivel "crítico", $f = 1$. La liberación de neutrones y sus posteriores fisiones ocurren tan rápidamente que la manipulación de las varillas de control para mantener $f = 1$ no sería posible si no fuera por el pequeño porcentaje ($\approx 1\%$) de los llamados **neutrones retrasados**. Estos neutrones provienen del decaimiento de fragmentos de fisión (o sus derivados) ricos en neutrones, que tienen vidas en el orden de segundos, suficiente para permitir el tiempo necesario de reacción para operar las varillas de control y mantener $f = 1$.

Se han construido reactores nucleares con fines de investigación y para producir energía eléctrica. La fisión produce muchos neutrones y un "reactor de investigación" básicamente es una intensa fuente de neutrones. Estos neutrones se pueden usar como proyectiles en reacciones nucleares para producir núclidos que no se encuentran en la naturaleza, incluidos isótopos que se utilizan como trazadores y para terapia. Un "reactor de potencia" se utiliza para producir energía eléctrica. La energía liberada en el proceso de fisión aparece como calor, que se emplea para poner agua en ebullición y producir vapor para así impulsar una turbina conectada a un generador eléctrico (figura 42-9). El **núcleo** de un reactor nuclear consiste en el combustible y un moderador (agua, en la mayoría de los reactores comerciales estadounidenses). El combustible generalmente es uranio enriquecido, de manera que contiene del 2 al 4% de $^{235}_{92}$U. Agua a alta presión u otro líquido (como sodio líquido) fluyen a través del núcleo. La energía térmica que absorbe se utiliza para producir vapor en el intercambiador térmico, de manera que el combustible fisionable actúa como la entrada de calor para una máquina térmica (capítulo 20).

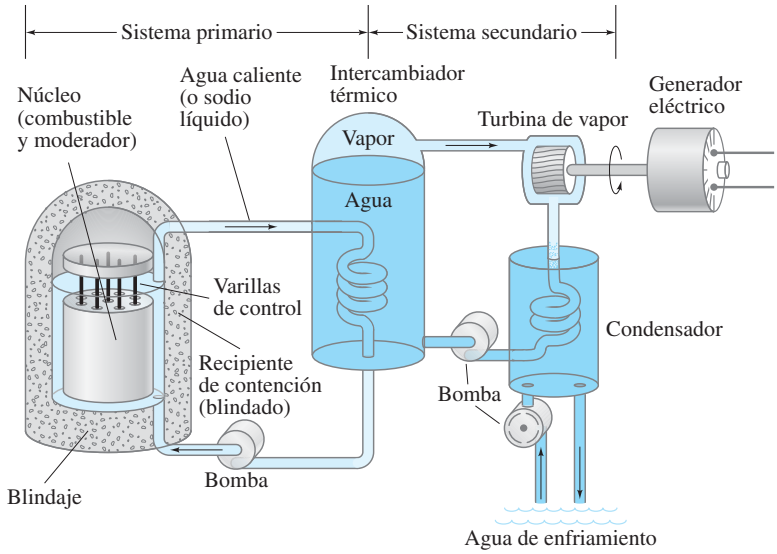


FIGURA 42–9 Un reactor nuclear. El calor generado por el proceso de fisión en las varillas de combustible se retira con agua caliente o sodio líquido y se utiliza para poner agua en ebullición en el intercambiador térmico hasta obtener vapor. Este último impulsa una turbina para generar electricidad y luego se enfría en el condensador.

Existen problemas asociados con las plantas de energía nuclear. Además de la habitual contaminación por calor asociada con cualquier máquina térmica (sección 20-11), existe el serio problema del desecho de los fragmentos de fisión radiactivos que se producen en el reactor, más los núclidos radiactivos que producen los neutrones que interactúan con las partes estructurales del reactor. Los fragmentos de fisión, como sus precursores uranio o plutonio, tienen aproximadamente un 50% más neutrones que protones. Los núcleos con números atómicos en el rango común de fragmentos de fisión ($Z \approx 30$ a 60) sólo son estables si tienen números casi iguales de protones y neutrones (véase la figura 41-2). Por lo tanto, los fragmentos de fisión enormemente ricos en neutrones son muy inestables y decaen de manera radiactiva. La liberación accidental de fragmentos de fisión enormemente radiactivos en la atmósfera plantea una seria amenaza a la salud humana (sección 42-5), al igual que la posible fuga de los desechos radiactivos cuando se eliminan. Los accidentes en Three Mile Island, Pennsylvania (1979), y en Chernobyl, Rusia (1986), ilustraron algunos de esos peligros y mostraron que las plantas nucleares se deben construir, mantener y operar con gran cuidado y precisión (figura 42-10).

FIGURA 42–10 Devastación alrededor de Chernobyl, en Rusia, después del accidente en la planta nuclear en 1986.

Finalmente, el tiempo de la vida de las plantas de energía nuclear está limitada a unos 30 años, debido a la acumulación de radiactividad y al hecho de que los materiales estructurales se debilitan a causa de las intensas condiciones internas. La "clausura" de una planta podría tomar diversas modalidades, pero el costo de cualquier método de clausura de una planta grande es muy alto.

Los llamados **reactores reproductores** se propusieron como solución al problema de suministros limitados de uranio $^{235}_{92}\text{U}$ fisionable. Un reactor reproductor es aquél donde algunos de los neutrones producidos en la fisión de $^{235}_{92}\text{U}$ se absorben mediante $^{238}_{92}\text{U}$, y se produce $^{239}_{94}\text{Pu}$ mediante el conjunto de reacciones que se muestran en la figura 42-1. El $^{239}_{94}\text{Pu}$ es fisionable con neutrones lentos, de manera que, después de separarse, se puede usar como combustible en un reactor nuclear. Por ende, un reactor reproductor "reproduce" nuevo combustible $\left(^{239}_{94}\text{Pu}\right)$ a partir del $^{238}_{92}\text{U}$ que de otra forma sería inservible. Puesto que el uranio natural es $^{238}_{92}\text{U}$, en un 99.3%, esto significa que el suministro de combustible fisionable podría aumentar por más de un factor de 100. Pero los reactores reproductores tienen los mismos problemas que los otros reactores, además de otros serios inconvenientes. El plutonio no sólo se considera un serio peligro para la salud en sí mismo (es radiactivo con una vida media de 24,000 años), sino que el plutonio producido en un reactor fácilmente puede usarse en una bomba, lo que aumenta el riesgo de proliferación de armas nucleares y el robo de combustible por parte de terroristas para fabricar una bomba.

La energía nuclear supone riesgos. Otros métodos de conversión de energía a gran escala, como el petróleo convencional y las plantas de vapor que queman carbón, también presentan peligros a la salud y ambientales; algunos de ellos se estudiaron en la sección 20-11, e incluyen contaminación del aire, derrames de petróleo y la liberación de gas CO_2 que atrapa el calor como en un invernadero para elevar la temperatura de la Tierra. La solución a las necesidades energéticas del mundo no sólo es tecnológica, sino también de carácter económico y político. Desde luego, un factor primordial es "conservar" para minimizar el uso de energía. Esto implica "reducir, reutilizar y reciclar".

EJEMPLO 42–6 **Cantidad de combustible de uranio.** Estime la cantidad mínima de $^{235}_{92}\text{U}$ que se necesita para provocar fisión con la finalidad de operar un reactor eléctrico de 1000 MW durante un año de operación continua. Suponga una eficiencia (capítulo 20) de aproximadamente 33%.

PLANTEAMIENTO Para obtener un 33% de eficiencia, se necesita una entrada de $3 \times 1000\,\text{MW} = 3000 \times 10^6\,\text{J/s}$. Cada fisión libera aproximadamente 200 MeV (ecuación 42-6), así que dividimos la energía para un año entre 200 MeV, para obtener el número de fisiones necesarias por año. Luego se multiplica por la masa de un átomo de uranio.

SOLUCIÓN Para una salida de 1000 MW, la generación de potencia total necesaria es de 3000 MW, de los cuales 2000 MW se emiten como calor "de desecho". Por ende, la energía total liberada en 1 año (3×10^7 s) a partir de fisión debe ser aproximadamente

$$(3 \times 10^9\,\text{J/s})(3 \times 10^7\,\text{s}) \approx 10^{17}\,\text{J}.$$

Si cada fisión libera 200 MeV de energía, el número de fisiones requeridas en un año es

$$\frac{(10^{17}\,\text{J})}{(2 \times 10^8\,\text{eV/fisión})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} \approx 3 \times 10^{27}\,\text{fisiones}.$$

La masa de un solo átomo de uranio es aproximadamente de $(235\text{ u})(1.66 \times 10^{-27}/\text{u}) \approx 4 \times 10^{-25}$ kg, así que la masa total de uranio necesaria es

$$(4 \times 10^{-25}\,\text{kg/fisión})(3 \times 10^{27}\,\text{fisiones}) \approx 1000\,\text{kg},$$

o aproximadamente una tonelada de $^{235}_{92}\text{U}$.

NOTA Como el $^{235}_{92}\text{U}$ constituye sólo el 0.7% del uranio natural, el requerimiento anual de uranio está en el orden de cien toneladas. Esto representa un orden de magnitud menor que en el caso del carbón, tanto en masa como en volumen. El carbón libera 2.8×10^7 J/kg, mientras que el $^{235}_{92}\text{U}$ puede liberar $10^{17}\,\text{J}/10^3\,\text{kg} = 10^{14}\,\text{J/kg}$. En el caso del uranio natural, la cifra es 100 veces menor, 10^{12} J/kg.

FÍSICA APLICADA
Energía en carbón contra energía en uranio

EJERCICIO B Un submarino nuclear necesita una potencia de entrada de 6000 kW. ¿Cuántas fisiones de $^{235}_{92}U$ representa esto por segundo?

Bomba atómica

Sin embargo, el primer uso de la fisión no fue la producción de energía eléctrica. En vez de ello, primero se usó como bomba de fisión (llamada "bomba atómica"). A principios de la década de 1940, con Europa ya en guerra, el líder alemán Adolfo Hitler prohibió la venta de uranio de las minas checoslovacas de las que recientemente había tomado el control. Súbitamente, la investigación del proceso de fisión se guardó en absoluto secreto. Los físicos en Estados Unidos estaban alarmados. Un grupo de ellos se acercó a Einstein —quien para entonces ya gozaba de gran renombre— para enviar una carta al presidente Franklin Roosvelt acerca de las posibilidades de usar la fisión nuclear con la finalidad de fabricar una bomba mucho más potente que cualquier otra conocida anteriormente, e informarle que Alemania probablemente habría iniciado el desarrollo de tal bomba. Roosevelt respondió con la autorización del programa conocido como Proyecto Manhattan, con el objetivo de construir una bomba. El trabajo comenzó en serio después de la demostración de Fermi en 1942 de que era posible una reacción en cadena sostenida. En una meseta aislada de Nuevo México, conocida como Los Álamos, se desarrolló un nuevo laboratorio secreto. Bajo la dirección de J. Robert Oppenheimer (1904-1967; figura 42-11), se convirtió en hogar de famosos científicos de toda Europa y Estados Unidos.

Para construir una bomba que fuera subcrítica durante el transporte pero que se pudiera hacer supercrítica (para producir una reacción en cadena) justo en el momento preciso, se usaron dos piezas de uranio, cada una con una masa menor que la masa crítica, pero que, en conjunto, tenían una masa mayor que la crítica. Las dos masas, las cuales se mantuvieron separadas hasta el momento de la detonación, se forzaron a juntarse rápidamente mediante un tipo de cañón, y ocurrió una reacción en cadena de proporciones explosivas. Una bomba alternativa detonó explosivos convencionales (TNT) que rodeaban una esfera de plutonio para comprimirla mediante implosión al doble de su densidad, lo que la hizo más que crítica y provocó una explosión nuclear. La primera bomba de fisión se probó en el desierto de Nuevo México en julio de 1945, con el resultado previsto. A principios de agosto, una bomba de fisión que usaba uranio se soltó sobre Hiroshima y una segunda, que usaba plutonio, se soltó sobre Nagasaki (figura 42-12), ambas en Japón. La Segunda Guerra Mundial terminó poco tiempo después.

Además de su gran poder destructivo, una bomba de fisión produce muchos fragmentos de fisión enormemente radiactivos, al igual que un reactor nuclear. Cuando una bomba de fisión estalla, esos isótopos radiactivos se liberan en la atmósfera y forman lo que se conoce como **precipitación radiactiva**.

Las pruebas de bombas nucleares en la atmósfera después de la Segunda Guerra Mundial fueron motivo de gran preocupación, pues el movimiento de las masas de aire dispersaba las precipitaciones por todo el planeta. Con el tiempo, la precipitación radiactiva se asienta sobre la Tierra, particularmente por medio de las lluvias; de esta forma, es absorbida por las plantas y los pastos y entra así a la cadena alimenticia. Éste es un problema mucho más serio que la misma radiactividad en el exterior del cuerpo, pues las partículas α y β se absorben principalmente en la ropa y la capa exterior (muerta) de la piel. Pero cuando la radiactividad entra al cuerpo a través de los alimentos, los isótopos entran en contacto directo con las células vivas. Un isótopo radiactivo particularmente peligroso es el $^{90}_{38}Sr$, que es químicamente muy parecido al calcio y se concentra en los huesos, donde causa cáncer y destrucción de la médula ósea. En 1963 más de 100 naciones firmaron un tratado que prohíbe las pruebas de armas nucleares en la atmósfera, con la finalidad de evitar los peligros que implica la precipitación radiactiva.

FIGURA 42–11 J. Robert Oppenheimer, a la izquierda, con el general Leslie Grovers, quien fue el encargado administrativo de Los Álamos durante la Segunda Guerra Mundial. La fotografía se tomó en Trinity, en el desierto de Nuevo México, donde estalló la primera bomba atómica.

FIGURA 42–12 Fotografía tomada un mes después de que la bomba se lanzó sobre Nagasaki. Las chozas se construyeron después con desechos de las ruinas.

42–4 Fusión nuclear

La masa de todo núcleo estable es menor que la suma de las masas de sus protones y neutrones constitutivos. Por ejemplo, la masa del isótopo helio $^{4}_{2}He$ es menor que la masa de dos protones más la masa de dos neutrones, como se vio en el ejemplo 41-2. Por lo tanto, si dos protones y dos neutrones se unen para formar un núcleo de helio, habría pérdida de masa. Esta pérdida de masa se manifiesta en la liberación de una gran cantidad de energía.

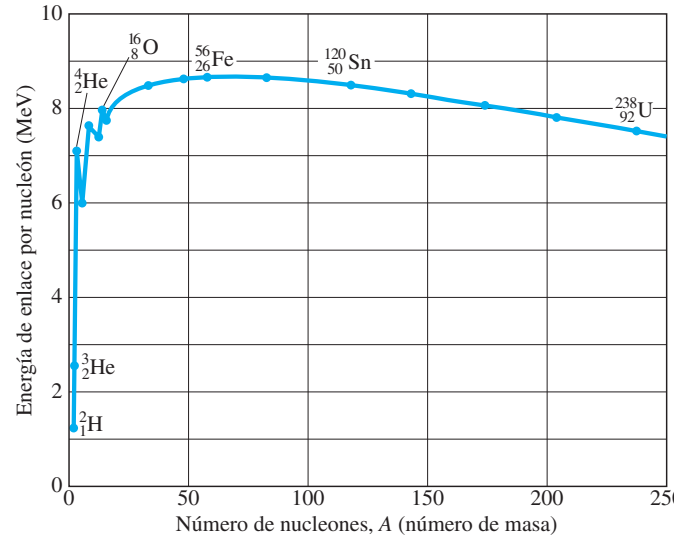


FIGURA 42–13 Energía de enlace promedio por nucleón como función del número de masa A para núcleos estables. Igual que la figura 41-1.

Fusión nuclear; estrellas

El proceso de formar núcleos colocando juntos protones y neutrones, o la formación de núcleos más grandes mediante la combinación de núcleos pequeños, se llama **fusión nuclear**. Un vistazo a la figura 42-13 (que es igual a la figura 41-1) revela por qué pequeños núcleos se pueden combinar para formar unos más grandes con la liberación de energía: es porque la energía de enlace por nucleón es menor para núcleos ligeros que para los de masa creciente (arriba de aproximadamente $A \approx 60$). Se cree que muchos de los elementos en el Universo originalmente se formaron a través del proceso de fusión (véase el capítulo 44) y que la fusión actualmente tiene lugar de manera continua dentro de las estrellas, incluido el Sol, que producen las prodigiosas cantidades de energía radiante que emiten.

EJEMPLO 42–7 **Liberación de energía por fusión.** Una de las reacciones de fusión más sencillas implica la producción de deuterio, $^{2}_{1}\text{H}$, a partir de un neutrón y un protón: $^{1}_{1}\text{H} + \text{n} \rightarrow {}^{2}_{1}\text{H} + \gamma$. ¿Cuánta energía se libera en esta reacción?

PLANTEAMIENTO La energía liberada es igual a la diferencia en masa (por c^2) entre las masas inicial y final.

SOLUCIÓN De acuerdo con el Apéndice F, la masa inicial es

$$1.007825\ \text{u} + 1.008665\ \text{u} = 2.016490\ \text{u},$$

y después de la reacción la masa es la del $^{2}_{1}\text{H}$, a saber, 2.014082 u (la γ no tiene masa). La diferencia de masa es

$$2.016490\ \text{u} - 2.014082\ \text{u} = 0.002408\ \text{u},$$

de manera que la energía liberada es

$$(\Delta m)c^2 = (0.002408\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 2.24\ \text{MeV},$$

y la llevan los núcleos de $^{2}_{1}\text{H}$ y el rayo γ.

Se cree que la salida de energía del Sol se debe principalmente a la siguiente secuencia de reacciones de fusión:

$$^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{2}_{1}\text{H} + \text{e}^{+} + \nu \qquad (0.44\ \text{MeV}) \qquad \textbf{(42–7a)}$$

$$^{1}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + \gamma \qquad (5.48\ \text{MeV}) \qquad \textbf{(42–7b)}$$

$$^{3}_{2}\text{He} + {}^{3}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H} \qquad (12.86\ \text{MeV}) \qquad \textbf{(42–7c)}$$

donde la energía liberada (valor Q) para cada reacción aparece entre paréntesis. El efecto neto de esta secuencia, que se llama **ciclo protón-protón**, es que cuatro protones

se combinan para formar un núcleo de ^4_2He más dos positrones, dos neutrinos y dos rayos gamma:

$$4\,{}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2\text{e}^+ + 2\nu + 2\gamma. \qquad \textbf{(42–8)}$$

Note que se requieren dos de cada una de las primeras dos reacciones (ecuaciones 42-7a y b) para producir los dos ^3_2He para la tercera reacción. Así que la liberación de energía total para la reacción neta, ecuación 42-8, es $(2 \times 0.44\ \text{MeV} + 2 \times 5.48\ \text{MeV} + 12.86\ \text{MeV}) = 24.7\ \text{MeV}$. Además, cada uno de los dos e^+ (ecuación 42-7a) rápidamente se aniquila con un electrón para producir $2m_e c^2 = 1.02\ \text{MeV}$; de manera que la energía total liberada es $(24.7\ \text{MeV} + 2 \times 1.02\ \text{MeV}) = 26.7\ \text{MeV}$. La primera reacción, la formación de deuterio a partir de dos protones (ecuación 42-7a), tiene una probabilidad muy baja, y la escasa frecuencia de tal reacción sirve para limitar la tasa a la que el Sol produce energía.

EJERCICIO C Regrese a la primera pregunta de inicio de capítulo, página 1131, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO D Si el Sol genera una cantidad constante de energía mediante fusión, la masa del Sol debe *a*) aumentar, *b*) disminuir, *c*) permanecer constante, *d*) ser irregular.

EJEMPLO 42–8 **ESTIMACIÓN** **Estimación de energía por fusión.** Estime la energía que se libera si ocurre la siguiente reacción:

$${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He}.$$

PLANTEAMIENTO Con base en la figura 42-13, haga una estimación rápida.

SOLUCIÓN En la figura 42-13 se ve que cada ^2_1H tiene una energía de enlace de aproximadamente $1\frac{1}{4}$ MeV/nucleón, que para 2 núcleos de masa 2 es $4 \times \left(1\frac{1}{4}\right) \approx 5$ MeV. El ^4_2He tiene una energía de enlace por nucleón de aproximadamente 7 MeV para un total de $4 \times 7\ \text{MeV} = 28\ \text{MeV}$. Por lo tanto, la energía liberada es aproximadamente $28\ \text{MeV} - 5\ \text{MeV} = 23\ \text{MeV}$.

En las estrellas más calientes que el Sol, es más probable que la salida de energía provenga principalmente del **ciclo del carbono** (o **CNO**), el cual comprende la siguiente secuencia de reacciones:

$$\begin{aligned}
{}^{12}_6\text{C} + {}^1_1\text{H} &\rightarrow {}^{13}_7\text{N} + \gamma \\
{}^{13}_7\text{N} &\rightarrow {}^{13}_6\text{C} + \text{e}^+ + \nu \\
{}^{13}_6\text{C} + {}^1_1\text{H} &\rightarrow {}^{14}_7\text{N} + \gamma \\
{}^{14}_7\text{N} + {}^1_1\text{H} &\rightarrow {}^{15}_8\text{O} + \gamma \\
{}^{15}_8\text{O} &\rightarrow {}^{15}_7\text{N} + \text{e}^+ + \nu \\
{}^{15}_7\text{N} + {}^1_1\text{H} &\rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^4_2\text{He}.
\end{aligned}$$

Es fácil distinguir (véase el problema 47) que se consume carbono en este ciclo (véanse la primera y última ecuaciones) y que el efecto neto es el mismo que el ciclo protón-protón, ecuación 42-8 (más un γ adicional). La teoría del ciclo protón-protón y del ciclo del carbono como la fuente de energía para el Sol y las estrellas la trabajó por primera vez Hans Bethe (1906-2005) en 1939.

EJEMPLO CONCEPTUAL 42–9 **Fusión estelar.** ¿Cuál es el elemento más pesado que probablemente se produce en los fenómenos de fusión en las estrellas?

RESPUESTA La fusión es posible si los productos finales tienen más energía de enlace (menos masa) que los reactantes, porque entonces hay una liberación neta de energía. Puesto que la curva de energía de enlace en la figura 42-13 (o figura 41-1) tiene un punto máximo cerca de $A \approx 56$ a 58, que corresponde a hierro o níquel, no sería energéticamente favorable producir elementos más pesados que esto. No obstante, en el centro de las estrellas masivas o en las explosiones de supernovas, hay suficiente energía cinética inicial disponible para impulsar reacciones endotérmicas que produzcan, también, elementos más pesados.

FÍSICA APLICADA
Reactores de energía de fusión

Posibles reactores de fusión

La posibilidad de utilizar la energía liberada en la fusión para elaborar un reactor de potencia es muy atractiva. Las reacciones de fusión con más probabilidad de triunfar en un reactor implican los isótopos de hidrógeno, ${}^2_1\text{H}$ (deuterio) y ${}^3_1\text{H}$ (tritio), y son las siguientes, con la energía liberada entre paréntesis:

$$ {}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \qquad (4.00\ \text{MeV}) \qquad \textbf{(42–9a)} $$

$$ {}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \text{n} \qquad (3.23\ \text{MeV}) \qquad \textbf{(42–9b)} $$

$$ {}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \text{n}. \qquad (17.57\ \text{MeV}) \qquad \textbf{(42–9c)} $$

Al comparar estas producciones de energía con las de la fisión del ${}^{235}_{92}\text{U}$, se ve que la energía liberada en las reacciones de fusión puede ser mayor para una masa dada de combustible que en la fisión. Más aún, como combustible, un reactor de fusión podría usar deuterio, que es muy abundante en el agua de los océanos (la abundancia natural del ${}^2_1\text{H}$ es 0.0115% en promedio, o alrededor de 1 g de deuterio por cada 80 L de agua). La reacción protón-protón simple de la ecuación 42-7a, que podría utilizar una fuente de combustible mucho más abundante, ${}^1_1\text{H}$, tiene una probabilidad tan pequeña de ocurrir que no se le puede considerar una posibilidad sobre la Tierra.

Aunque todavía no se logra un reactor de fusión útil, se han hecho considerables avances para superar las dificultades inherentes. Los problemas se asocian con el hecho de que todos los núcleos tienen una carga positiva y se repelen mutuamente. Sin embargo, si se logra acercarlos lo suficiente de manera que entre en juego la fuerza nuclear fuerte de atracción de corto alcance, ésta atraerá los núcleos para juntarlos y ocurrirá la fusión. Para que los núcleos se acerquen lo suficiente, deben tener energías cinéticas grandes de manera que logren superar la repulsión eléctrica. Con los aceleradores de partículas (capítulo 43) se alcanzan con facilidad altas energías cinéticas, pero el número de partículas implicadas es muy pequeño. Para producir cantidades realistas de energía, se debe lidiar con materia en volumen, en este caso, alta energía significa mayores temperaturas. De hecho, para que ocurra la fusión, se requieren temperaturas muy elevadas, y los dispositivos de fusión con frecuencia se conocen como **dispositivos termonucleares**. El interior del Sol y de otras estrellas es muy caliente, de muchos millones de grados, de manera que los núcleos se mueven suficientemente rápido para que tenga lugar la fusión, y la energía que se libera mantiene la temperatura alta, así que pueden ocurrir posteriores reacciones de fusión. El Sol y las estrellas representan enormes reactores termonucleares autosostenidos que permanecen unidos en virtud de su gran masa gravitacional; pero en la Tierra, el confinamiento de los núcleos de rápido movimiento a las altas temperaturas y densidades requeridas resulta bastante difícil.

Después de la Segunda Guerra Mundial se observó que la temperatura producida dentro de una bomba de fisión (o "atómica") estaba cerca de los 10^8 K. Esto sugirió que se podía usar una bomba de fisión para encender una bomba de fusión (conocida como bomba termonuclear o de hidrógeno) y así liberar la gran energía de la fusión. La incontrolable liberación de energía por fusión en una bomba H (en 1952) fue relativamente fácil de obtener. Pero obtener energía útil a partir de la fusión a una tasa lenta y controlada resultó ser un serio desafío.

EJEMPLO 42–10 ESTIMACIÓN **Temperatura necesaria para la fusión d-t.** Estime la temperatura que se requiere para que ocurra la fusión deuterio-tritio (d-t).

PLANTEAMIENTO Suponga que los núcleos se aproximan frontalmente, cada uno con energía cinética K, y que la fuerza nuclear entra en juego cuando la distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios nucleares. La energía potencial electrostática (capítulo 23) de las dos partículas a esta distancia es igual a la energía cinética total mínima de las dos partículas cuando están separadas. La energía cinética promedio se relaciona con la temperatura Kelvin mediante la ecuación 18-4.

SOLUCIÓN Los radios de los dos núcleos ($A_\text{d} = 2$ y $A_\text{t} = 3$) se determinan mediante la ecuación 41-1: $r_\text{d} \approx 1.5\ \text{fm}$, $r_\text{t} \approx 1.7\ \text{fm}$, de manera que $r_\text{d} + r_\text{t} = 3.2 \times 10^{-15}\ \text{m}$. Iguale la energía cinética de las dos partículas iniciales con la energía potencial cuando están a esta distancia:

$$ 2K \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{(r_\text{d} + r_\text{t})} $$

$$ \approx \left(9.0 \times 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(3.2 \times 10^{-15}\ \text{m})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})} \approx 0.45\ \text{MeV}. $$

Por lo tanto, $K \approx 0.22$ MeV, y si se pide que la energía cinética promedio sea así de alta, entonces, a partir de la ecuación 18-4, $\frac{3}{2}kT = \bar{K}$, se tiene una temperatura de

$$T = \frac{2\bar{K}}{3k} = \frac{2(0.22\,\text{MeV})(1.6 \times 10^{-13}\,\text{J/MeV})}{3(1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})} \approx 2 \times 10^{9}\,\text{K}.$$

NOTA Cálculos más minuciosos demuestran que la temperatura requerida para la fusión en realidad está aproximadamente en un orden de magnitud menor que esta estimación, en parte porque no es necesario que la energía cinética *promedio* sea 0.22 MeV, ya que un pequeño porcentaje con esta energía (partículas en el extremo de alta energía de la distribución de Maxwell, figura 18-3) sería suficiente. Estimaciones razonables para un reactor de fusión útil están en el rango de $T \gtrsim 1$ a 4×10^8 K.

No sólo se requiere una alta temperatura para un reactor de fusión. También debe haber una alta densidad de núcleos para garantizar una tasa de colisión suficientemente elevada. Una dificultad real con la fusión controlada es confinar los núcleos el tiempo suficiente y a una densidad suficientemente alta para que ocurran suficientes reacciones y se obtenga una cantidad razonable de energía útil. A las temperaturas necesarias para la fusión, los átomos están ionizados, y a la colección de núcleos y electrones resultantes se le conoce como **plasma**. Los materiales ordinarios se vaporizan a algunos miles de grados cuando mucho, y por lo tanto no se pueden usar para confinar un plasma de alta temperatura. Las dos principales técnicas de confinamiento son el *confinamiento magnético* y el *confinamiento inercial*.

En el **confinamiento magnético**, se emplean campos magnéticos para tratar de contener el plasma caliente. Un enfoque simple es el de la "botella magnética" que se ilustra en la figura 42-14. Las trayectorias de las partículas cargadas en el plasma se desvían mediante el campo magnético; ahí donde las líneas de campo magnético están más juntas, la fuerza sobre las partículas las refleja de regreso hacia el centro. Por desgracia, las botellas magnéticas desarrollan "fugas" y las partículas cargadas salen antes de que tenga lugar suficiente fusión. El más prometedor diseño actual es el **tokamak**, que se desarrolló primero en Rusia. Un tokamak (figura 42-15) tiene forma de toroide e implica complicados campos magnéticos: conductores portadores de corriente producen un campo magnético que se dirige a lo largo del eje del toroide (campo "toroidal"); un campo adicional se produce mediante corrientes dentro del mismo plasma (campo "poloidal"). La combinación produce un campo helicoidal, como se aprecia en la figura 42-15, que confina el plasma, al menos brevemente, de manera que éste no toque las paredes metálicas de la cámara de vacío.

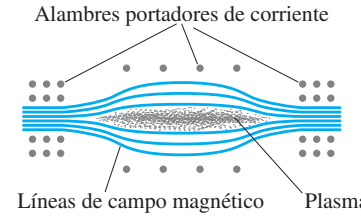


FIGURA 42–14 "Botella magnética" que se usa para confinar un plasma.

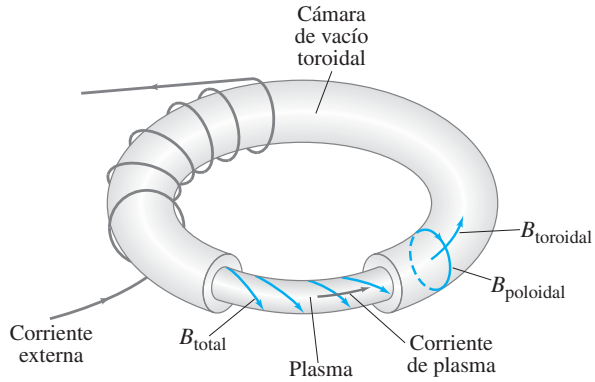


FIGURA 42–15 Configuración de tokamak, que muestra el campo total $\vec{\mathbf{B}}$ debido a la corriente externa más la corriente en el plasma en sí.

En 1957 J. D. Lawson demostró que el producto de la densidad de iones n y el tiempo de confinamiento τ debe superar un valor mínimo de aproximadamente

$$n\tau \gtrsim 3 \times 10^{20}\,\text{s/m}^3.$$

Este **criterio de Lawson** debe alcanzarse para producir **ignición**, lo cual significa que la fusión que continúa después de todo el calentamiento externo se apaga. Prácticamente, se espera lograrlo con $n \approx 1$ a 3×10^{20} m^{-3} y $\tau \approx 1$-3 s. Para llegar al **punto de equilibrio**, el punto donde la salida de energía debida a la fusión es igual a la entrada de energía para calentar el plasma, se requiere un $n\tau$ de aproximadamente un orden de magnitud menor. El punto de equilibrio estuvo muy cerca de alcanzarse en la década de 1990 en el Reactor de prueba de fusión Tokamak (TFTR, por las siglas de *Tokamak Fusion Test Reactor*) en Princeton, y se superó la muy alta temperatura necesaria para el encendido (4×10^8 K), aunque no se logró sincronizar ambos hechos.

La investigación de fusión tokamak continúa a lo largo del mundo, desde el laboratorio de física de plasma en Princeton (PPPL) en Estados Unidos, hasta el tokamak KSTAR en Corea del Sur. Esta investigación ayudará a desarrollar el enorme dispositivo de prueba multinacional (Unión Europea, India, Japón, Corea del Sur, Rusia, China y Estados Unidos) llamado Reactor Experimental Termonuclear Internacional (ITER). Se espera que el ITER quede terminado e inicie operaciones en 2016, en el sureste de Francia, con una salida de potencia de aproximadamente 500 MW, 10 veces la energía de entrada. El ITER (véase la fotografía de apertura del capítulo en la página 1131) será el último paso de investigación antes de construir un reactor comercial.

El segundo método para contener el combustible para fusión es el **confinamiento inercial**: sobre una pequeña pastilla o cápsula de deuterio y tritio se hacen incidir simultáneamente, desde muchas direcciones, rayos láser muy intensos. El intenso influjo de energía calienta y ioniza la pastilla en un plasma, la comprime y calienta a temperaturas a las que puede ocurrir la fusión. El tiempo de confinamiento está en el orden de 10^{-11} a 10^{-9} s, tiempo durante el cual los iones no se mueven considerablemente debido a su propia inercia, y la fusión puede tener lugar.

42–5 Paso de la radiación a través de la materia; daño por radiación

Cuando se habla de *radiación*, se incluyen los rayos α, β, γ y X, así como protones, neutrones y otras partículas como los piones (véase el capítulo 43). Puesto que las partículas cargadas pueden ionizar los átomos o las moléculas de cualquier material por el que pasan, se les conoce como **radiación ionizante**. Y como la radiación produce ionización, causa considerable daño a los materiales, en particular al tejido biológico.

Las partículas con carga, como los rayos α y β y los protones, causan ionización debido a fuerzas eléctricas. Esto es, cuando pasan a través de un material, pueden atraer o repeler electrones con suficiente fuerza para removerlos de los átomos del material. Puesto que los rayos α y β emitidos por las sustancias radiactivas tienen energías en el orden de 1 MeV (10^4 a 10^7 eV), mientras que la ionización de los átomos y las moléculas requiere energía en el orden de 10 eV, es claro que una sola partícula α o β es capaz de causar miles de ionizaciones.

Las partículas neutras también producen ionización cuando pasan a través de los materiales. Por ejemplo, los fotones de rayos X y γ pueden ionizar átomos al desprender electrones mediante los efectos fotoeléctrico y de Compton (capítulo 37). Más aún, si un rayo γ tiene suficiente energía (mayor que 1.02 MeV), puede experimentar producción de pares: se producen un electrón y un positrón (sección 37-5). Las partículas cargadas que se producen en todos estos procesos pueden, por sí mismas, producir mayor ionización. Por otra parte, los neutrones interactúan con la materia sobre todo mediante colisiones con núcleos, con los que interactúan fuertemente. Con frecuencia el núcleo se rompe mediante tales colisiones, lo que altera la molécula de la que era parte. Los fragmentos producidos, a la vez, pueden causar ionización.

La radiación que pasa a través de la materia causa considerable daño. Los metales y otros materiales estructurales se vuelven quebradizos y su resistencia se debilita si la radiación es muy intensa, como en las plantas de energía nuclear y en el caso de los vehículos espaciales que deben pasar por áreas de intensa radiación cósmica.

* Daño biológico

FÍSICA APLICADA
Daño biológico por radiación

El daño por radiación producido en los organismos biológicos se debe principalmente a la ionización que se produce en las células. Es posible que ocurran muchos procesos relacionados. Se producen iones o radicales que son enormemente reactivos y toman parte en reacciones químicas que interfieren con el funcionamiento normal de la célula. Todas las formas de radiación pueden ionizar átomos al desprender electrones. Si éstos son electrones de enlace, la molécula se rompe, o su estructura se altera de manera que se vea imposibilitada para desempeñar sus funciones normales, o bien, que realice una función dañina. En el caso de las proteínas, la pérdida de una molécula no es grave si hay otras copias de ella en la célula y a partir del gen que las codifica se pueden hacer copias adicionales. Sin embargo, grandes dosis de radiación son capaces

de dañar tantas moléculas que no sea posible elaborar nuevas copias con suficiente rapidez; en tal caso, la célula muere. El daño al ADN es más grave, pues una célula puede tener sólo una copia. Cada alteración en el ADN afecta un gen y altera la molécula que codifica (sección 40-3), de manera que tal vez las proteínas necesarias u otros materiales no se elaboren en absoluto. En este caso también muere la célula. La muerte de una sola célula normalmente no representa un problema, ya que el cuerpo es capaz de reemplazarla con una nueva. (Existen excepciones, como las neuronas, que en su mayoría no son reemplazables, así que su pérdida es grave.) Pero si muchas células mueren, es posible que el organismo no logre recuperarse. Por otra parte, tal vez una célula sobreviva, pero podría estar defectuosa. También es posible que se divida y produzca muchas más células defectuosas, en detrimento de todo el organismo. Por eso la radiación puede causar cáncer, que es la rápida producción descontrolada de células.

El posible daño resultado del uso médico de rayos X y otra radiación se debe equilibrar con los beneficios médicos y la prolongación de la vida como resultado de su uso.

42–6 Medición de la radiación: Dosimetría

Aunque el paso de radiación ionizante a través del cuerpo humano puede causar considerable daño, la radiación también sirve para tratar ciertas enfermedades, particularmente el cáncer, con frecuencia utilizando haces muy estrechos que se dirigen hacia un tumor canceroso con la finalidad de destruirlo (sección 42-7). Por lo tanto, es importante poder cuantificar la cantidad, o **dosis**, de radiación. Éste es el tema de la **dosimetría**.

FÍSICA APLICADA
Dosimetría

La intensidad de una fuente se especifica en un tiempo dado al establecer la **actividad de la fuente**: cuántos decaimientos nucleares (o desintegraciones) ocurren por segundo. La unidad tradicional es el **curie** (Ci), que se define como

$$1\ \text{Ci} = 3.70 \times 10^{10}\ \text{decaimientos por segundo.}$$

(Este número proviene de la definición original como la actividad de exactamente un gramo de radio.) Aunque el curie todavía es de uso común, la unidad del SI para la actividad de la fuente es el **becquerel** (Bq), que se define como

$$1\ \text{Bq} = 1\ \text{decaimiento por segundo.}$$

Los proveedores comerciales de **radionúclidos** (núclidos radiactivos) especifican la actividad en un tiempo dado. Puesto que la actividad disminuye con el tiempo, más en el caso de los isótopos de vida corta, es importante tomar esto en cuenta.

La magnitud de la actividad de la fuente $|dN/dt|$ se relaciona con el número de núcleos radiactivos presentes, N, y con la vida media, $T_{\frac{1}{2}}$, mediante (véase la sección 41-8):

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \frac{0.693}{T_{\frac{1}{2}}} N.$$

EJEMPLO 42–11 **Radiactividad que toman las células.** En cierto experimento, se inyectan 0.016 μCi de $^{32}_{15}$P en un medio que contiene un cultivo de bacterias. Después de 1.0 h las células se lavan y un detector con una eficiencia del 70% (esto es, cuenta el 70% de los rayos β emitidos) registra 720 conteos por minuto de las células. ¿Qué porcentaje del $^{32}_{15}$P original tomaron las células?

PLANTEAMIENTO La vida media del $^{32}_{15}$P es de aproximadamente 14 días (Apéndice F), así que se puede ignorar cualquier pérdida de actividad durante 1 hora. A partir de la actividad dada, se determina cuántos rayos β se emiten. Podemos comparar el 70% de esto con los (720/min)/(60 s/min) = 12 por segundo detectados.

SOLUCIÓN El número total de decaimientos por segundo originalmente fue $(0.016 \times 10^{-6})(3.7 \times 10^{10}) = 590$. Se espera que el contador cuente el 70% de esto, o 410 por segundo. Como contó 720/60 = 12 por segundo, entonces 12/410 = 0.029 o 2.9% se incorporó a las células.

Otro tipo de medición es la exposición o **dosis absorbida**; esto es, el efecto que la radiación tiene sobre el material absorbente. La unidad inicial de dosis fue el **roentgen** (R), que se definió en términos de la cantidad de ionización producida por la radiación (1 R $= 1.6 \times 10^{12}$ pares de iones por gramo de aire seco en condiciones estándar). En la actualidad, 1 R se define como la cantidad de radiación X o γ que deposita 0.878×10^{-2} J de energía por kilogramo de aire. El roentgen se sustituyó en gran parte por otra unidad de dosis absorbida aplicable a cualquier tipo de radiación, el **rad**: *1 rad es aquella cantidad de radiación que deposita energía por unidad de masa de 1.00×10^{-2} J/kg en cualquier material absorbente.* (Esto está muy cerca del roentgen para rayos X y γ.) La unidad del SI apropiada para dosis absorbida es el **gray** (Gy):

$$1\,\text{Gy} = 1\,\text{J/kg} = 100\,\text{rad}. \qquad \textbf{(42–10)}$$

La dosis absorbida depende no sólo de la intensidad de un haz de radiación dado (número de partículas por segundo) y de la energía por partícula, sino también del tipo de material que absorbe la radiación. El hueso, por ejemplo, absorbe más radiación de la que absorbe normalmente el músculo, así que el mismo haz que pasa a través de un cuerpo humano deposita una mayor dosis (en rads o grays) en el hueso que en el músculo.

El gray y el rad son unidades físicas de dosis: la energía depositada por unidad de masa de material. Sin embargo, no son las unidades más significativas para medir el daño biológico producido por la radiación porque dosis iguales de diferentes tipos de radiación causan diferentes magnitudes de daño. Por ejemplo, 1 rad de radiación α causa de 10 a 20 veces la cantidad de daño que 1 rad de rayos β o γ. Esta diferencia surge en gran medida porque los rayos α (y otras partículas pesadas como los protones y neutrones) se desplazan mucho más lentamente que los rayos β y γ de igual energía en virtud de sus masas más grandes. Por lo tanto, las colisiones ionizantes ocurren con más cercanía, así que se puede causar más daño irreparable. La **eficacia biológica relativa** (EBR) o **factor de calidad** (QF) de un tipo dado de radiación se define como el número de rads de radiación X o γ que produce el mismo daño biológico que 1 rad de la radiación dada. La tabla 42-1 especifica los QF para varios tipos de radiación. Los números son aproximados, pues dependen de la energía de las partículas y del tipo de daño que se usó como criterio.

TABLA 42–1 Factor de calidad (QF) de diferentes tipos de radiación

Tipo	QF
Rayos X y γ	1
β (electrones)	$\approx$1
Protones rápidos	1
Neutrones lentos	$\approx$3
Neutrones rápidos	Hasta 10
Partículas α y iones pesados	Hasta 20

La **dosis efectiva** se puede expresar como el producto de la dosis en rad y el QF, y esta unidad se conoce como **rem** (por las siglas de *rad equivalent man*, que significa *rad equivalente para el hombre*):

$$\text{dosis efectiva (en rem)} = \text{dosis (en rad)} \times \text{QF}. \qquad \textbf{(42–11a)}$$

Esta unidad se sustituyó por la unidad del SI para "dosis efectiva", el **sievert** (Sv):

$$\text{dosis efectiva (Sv)} = \text{dosis (Gy)} \times \text{QF}. \qquad \textbf{(42–11b)}$$

De acuerdo con estas definiciones, 1 rem (o 1 Sv) de cualquier tipo de radiación causa aproximadamente la misma cantidad de daño biológico. Por ejemplo, 50 rem de neutrones rápidos causan el mismo daño que 50 rem de rayos γ. Pero note que 50 rem de neutrones rápidos sólo representan 5 rads, mientras que 50 rem de rayos γ representan 50 rad.

EJERCICIO E Regrese a la segunda pregunta de inicio de capítulo, página 1131, y respóndala de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Exposición de los seres humanos a la radiación

FÍSICA APLICADA
Radón

Los humanos constantemente estamos expuestos a radiación de bajo nivel procedente de fuentes naturales: rayos cósmicos, radiactividad natural en rocas y suelo, e isótopos radiactivos que se presentan naturalmente en los alimentos, como el $^{40}_{19}$K. El **radón**, $^{222}_{86}$Rn, es fuente de considerable preocupación en la actualidad. Es el producto del decaimiento del radio y es un intermediario en la serie de decaimiento del uranio (véase la figura 41-12). La mayoría de los intermediarios permanecen en las rocas donde se formaron, pero el radón es un gas que puede escapar de la roca (y del material de los edificios como el concreto) para entrar al aire que se respira y ataca el interior de los pulmones.

FÍSICA APLICADA
Exposición de los humanos a la radiación

El **entorno radiactivo natural** promedia aproximadamente 0.30 rem (300 mrem) por año por persona en Estados Unidos, aunque existen grandes variaciones. A partir de rayos X médicos y escaneos, el individuo promedio recibe alrededor de 50 a 60 mrem por año, lo que da una dosis total promedio de unos 360 mrem (3.6 mSv) por persona. Los reguladores gubernamentales estadounidenses sugieren un límite superior de radiación permitida para un individuo en la población general de aproximada-

mente 100 mrem (1 mSv) por año además del entorno natural. Se cree que incluso dosis bajas de radiación aumentan las posibilidades de contraer cáncer o de provocar defectos genéticos; no hay un nivel seguro o umbral para la exposición a la radiación.

El límite superior para las personas que trabajan en entornos con radiación (en hospitales, plantas eléctricas, centros de investigación) se estableció más alto, un máximo de 5 rem (50 mSv) de dosis en todo el cuerpo en un año, y significativamente menos promediado a través de los años (por debajo de 2 rem/año promediado sobre 5 años). Para monitorear la exposición, las personas que trabajan alrededor de radiación por lo general portan algún tipo de dosímetro; uno muy común es el **dosímetro de película**, que es un trozo de película enrollado en material a prueba de luz. El paso de radiación ionizante a través de la película la cambia de manera que la película se oscurece cuando se revela, y de esta manera indica la dosis recibida. Los tipos más recientes incluyen el *dosímetro termoluminiscente* (TLD). Los dosímetros y las películas no protegen al trabajador, pero los altos niveles detectados sugieren la reasignación o modificación de las prácticas laborales para reducir la exposición a la radiación a niveles aceptables.

FÍSICA APLICADA
Exposición de los trabajadores a la radiación
Dosímetro de película

Grandes dosis de radiación pueden causar síntomas desagradables como náuseas, fatiga y pérdida del cabello. Tales efectos a veces se conocen como **enfermedad por radiación**. Dosis grandes pueden ser fatales, aunque el lapso de tiempo de la dosis es importante. Una dosis corta de 1000 rem (10 Sv) casi siempre es mortal. Una dosis de 400 rem (4 Sv) en un corto periodo es fatal en el 50% de los casos. Sin embargo, el cuerpo posee notables procesos de reparación, de manera que una dosis de 400 rem dispersa a lo largo de varias semanas generalmente no es mortal. No obstante, causará considerable daño al cuerpo.

FÍSICA APLICADA
Enfermedad por radiación

Los efectos de dosis bajas sobre un largo periodo son difíciles de determinar y no se conocen bien todavía.

EJEMPLO 42–12 **Dosis de todo el cuerpo.** ¿Qué dosis de todo el cuerpo recibe un empleado de laboratorio de 70 kg expuesto a una fuente de 40 mCi de $^{60}_{27}$Co suponiendo que el cuerpo de la persona tiene una área de sección transversal de 1.5 m^2 y por lo general está aproximadamente a 4.0 m de la fuente durante 4.0 h al día? El $^{60}_{27}$Co emite rayos γ de 1.33 MeV de energía y 1.17 MeV en rápida sucesión. Aproximadamente el 50% de los rayos γ interactúan en el cuerpo y depositan toda su energía. (El resto pasa a través del cuerpo sin interactuar.)

PLANTEAMIENTO De la energía emitida dada, sólo una fracción pasa a través de la persona, que es igual a *su* área dividida entre el área total sobre una esfera completa de 4.0 m de radio (figura 42-16).

SOLUCIÓN La energía total de rayos γ por decaimiento es (1.33 + 1.17) MeV = 2.50 MeV, de manera que la energía total emitida por la fuente por segundo es

$$(0.040\ \text{Ci})(3.7 \times 10^{10}\ \text{decaimientos/Ci}\cdot\text{s})(2.50\ \text{MeV}) = 3.7 \times 10^{9}\ \text{MeV/s}.$$

La proporción de esta energía interceptada por el cuerpo es su área de 1.5 m^2 dividida entre el área de una esfera de 4.0 m de radio (figura 42-16):

$$\frac{1.5\ \text{m}^2}{4\pi r^2} = \frac{1.5\ \text{m}^2}{4\pi(4.0\ \text{m})^2} = 7.5 \times 10^{-3}.$$

De manera que la tasa de energía que se deposita en el cuerpo (recuerde que sólo 50% de los rayos γ interactúan en el cuerpo) es

$$E = \left(\tfrac{1}{2}\right)(7.5 \times 10^{-3})(3.7 \times 10^{9}\ \text{MeV/s})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV}) = 2.2 \times 10^{-6}\ \text{J/s}.$$

Como 1 Gy = 1 J/kg, la tasa de dosis de todo el cuerpo para esta persona de 70 kg es $(2.2 \times 10^{-6}\ \text{J/s})/(70\ \text{kg}) = 3.1 \times 10^{-8}\ \text{Gy/s}$. En 4.0 h, esto representa una dosis de

$$(4.0\ \text{h})(3600\ \text{s/h})(3.1 \times 10^{-8}\ \text{Gy/s}) = 4.5 \times 10^{-4}\ \text{Gy}.$$

Puesto que QF $\approx$ 1 para rayos gamma, la dosis efectiva es 450 μSv (ecuaciones 42-11b y 42-10) o

$$(100\ \text{rad/Gy})(4.5 \times 10^{-4}\ \text{Gy})(1\ \text{rem/rad}) = 45\ \text{mrem} = 0.45\ \text{mSv}.$$

NOTA Esta dosis efectiva de 45 mrem es casi el 50% de la dosis permitida normal para todo un año (100 mrem/año) o 1% del máximo permitido en un año para trabajadores en entornos con radiación. Este empleado no debe recibir dosis tan grandes cada día y debe buscar formas de reducirla (blindar la fuente, variar el trabajo, trabajar más lejos de la fuente o trabajar menos tiempo a esa distancia de la fuente).

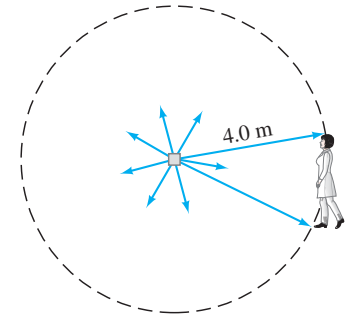


FIGURA 42–16 La radiación se dispersa en todas direcciones. Una persona a 4.0 m de distancia intercepta sólo una fracción: su área de sección transversal dividida entre el área de una esfera de 4.0 m de radio. Ejemplo 42-12.

FÍSICA APLICADA
Exposición a radón

EJEMPLO 42–13 **Exposición a radón.** En Estados Unidos, las muertes anuales por exposición a radón (la segunda causa de cáncer pulmonar) se estima que superan las muertes anuales por conducir en estado de ebriedad. La Agencia de Protección Ambiental (EPA) estadounidense recomienda tomar acciones para reducir la concentración de radón en las áreas habitadas si supera 4 pCi/L de aire. En algunas áreas, el 50% de las casas superan este nivel del radón que se presenta naturalmente en el suelo. Estime la masa de radón que emite 4.0 pCi de radiación $^{222}_{86}\text{Rn}$.

PLANTEAMIENTO Podemos utilizar la definición del curie para determinar cuántos decaimientos por segundo corresponden a 4 pCi, luego la ecuación 41-7b para determinar cuántos núcleos de radón se requieren para tener esta actividad $|dN/dt|$.

SOLUCIÓN Al comienzo de la sección 42-6 se vio que 1 Ci $= 3.70 \times 10^{10}$ decaimientos/s. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{dN}{dt}\right| &= 4.0\,\text{pCi} \\ &= (4.0 \times 10^{-12}\,\text{Ci})(3.70 \times 10^{10}\,\text{decaimientos/s/Ci}) \\ &= 0.148\,\text{s}^{-1}.\end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones 41-7 y 41-8,

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \frac{0.693}{T_{\frac{1}{2}}} N.$$

El apéndice F dice que $T_{\frac{1}{2}} = 3.8232$ días, de manera que

$$\begin{aligned}N &= \left|\frac{dN}{dt}\right| \frac{T_{\frac{1}{2}}}{0.693} \\ &= (0.148\,\text{s}^{-1})\frac{(3.8232\,\text{días})(8.64 \times 10^4\,\text{s/día})}{0.693} \\ &= 7.05 \times 10^4\,\text{átomos de radón-222.}\end{aligned}$$

Para determinar la masa, se utilizan la masa molar (222 u) y el número de Avogadro:

$$m = \frac{(7.05 \times 10^4\,\text{átomos})(222\,\text{g/mol})}{6.02 \times 10^{23}\,\text{átomos/mol}} = 2.6 \times 10^{-17}\,\text{g}$$

o 26 attogramos en 1 L de aire. Estos 2.6×10^{-17} g/L $= 2.6 \times 10^{-14}$ g/m^3 de radón son aproximadamente 150 átomos que decaen por segundo en cada metro cúbico de aire en el límite de 4 pCi/L.

NOTA Cada átomo de radón emite 4 partículas α y 4 partículas β antes de que la cadena de decaimiento alcance un elemento estable, cada uno capaz de causar muchas ionizaciones dañinas.

*42–7 Terapia con radiación

La aplicación médica de la radiactividad y la radiación en los seres humanos implica dos aspectos básicos: **1.** la **terapia con radiación**, el tratamiento de enfermedades (principalmente cáncer), que se estudia en esta sección; y **2.** el *diagnóstico* de enfermedades, que se estudia en las siguientes secciones de este capítulo.

FÍSICA APLICADA
Terapia con radiación

La radiación puede causar cáncer, pero también se emplea para tratarlo. Las células de rápido crecimiento son especialmente susceptibles a la destrucción mediante radiación. No obstante, se necesitan grandes dosis para matar las células cancerosas, y algunas de las células normales circundantes inevitablemente también mueren. Por eso, los pacientes cancerosos que reciben terapia con radiación con frecuencia sufren efec-

tos colaterales característicos de la enfermedad por radiación. Para minimizar la destrucción de células normales, a menudo se utiliza un haz estrecho de rayos γ o X cuando un tumor canceroso está bien localizado. El haz se dirige hacia el tumor y la fuente (o el cuerpo) se hace girar de manera que el haz pase a través de varias partes del cuerpo para mantener la dosis tan baja como sea posible, excepto en el tumor y sus alrededores inmediatos, donde el haz pasa en todo momento (figura 42-17). La radiación proviene de una fuente radiactiva como $^{60}_{27}$Co, o de una máquina de rayos X que produce fotones en el intervalo de 200 keV a 5 MeV. En la terapia del cáncer también se utilizan protones, neutrones, electrones y piones, que se producen en aceleradores de partículas (sección 43-1).

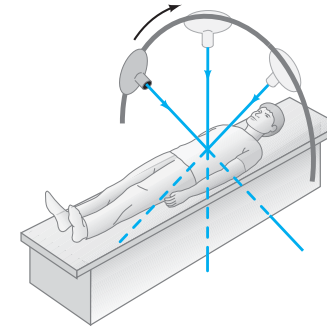


FIGURA 42–17 La fuente de radiación se hace girar de manera que el rayo siempre pase a través del tejido enfermo, pero reduce al mínimo la dosis en el resto del cuerpo.

Los protones que se utilizan para matar tumores tienen una propiedad especial que los hace particularmente útiles. Como se muestra en la figura 42-18, cuando los protones entran al tejido, la mayor parte de su energía se deposita al final de sus trayectorias. La energía cinética inicial de los protones puede seleccionarse de manera que la mayor parte de la energía se deposite en la profundidad del tumor para destruirlo. Los protones entrantes sólo depositan una pequeña cantidad de energía en el tejido enfrente del tumor y ninguna en absoluto detrás del tumor, lo que representa menos efectos negativos para el tejido sano que los rayos X o γ. Puesto que los tumores tienen tamaño físico, en ocasiones incluso varios centímetros de diámetro, con frecuencia se usa un rango de energías de protón. Los iones más pesados, como las partículas α o iones de carbono, son igualmente útiles. Esta técnica de **terapia de protones** tiene más de medio siglo de antigüedad, pero la necesidad de contar con un gran acelerador significa que pocos hospitales emplean esta técnica actualmente. Ahora se construyen muchos de tales "centros de protones".

FÍSICA APLICADA
Terapia de protón

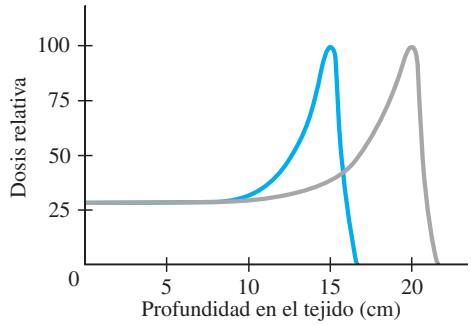


FIGURA 42–18 Energía depositada en tejido como función de la profundidad para protones de 170 MeV (curva anaranjada) y protones de 190 MeV (gris). El pico de cada curva con frecuencia se llama pico de Bragg.

Otra forma de tratamiento es insertar una pequeña fuente radiactiva directamente dentro de un tumor, lo que con el tiempo exterminará a la mayoría de las células que lo conforman. Una técnica similar se usa para tratar cáncer de la tiroides con el isótopo radiactivo $^{131}_{53}$I. La glándula tiroides concentra el yodo presente en el torrente sanguíneo, particularmente en cualquier área donde tenga lugar crecimiento anormal. Su intensa radiactividad destruye las células defectuosas.

Otra aplicación de la radiación es para esterilizar vendajes, equipo quirúrgico e incluso comida empacada, pues las bacterias y los virus mueren o quedan inactivos mediante grandes dosis de radiación.

*42–8 Trazadores en investigación y medicina

Los isótopos radiactivos se usan comúnmente en investigación biológica y médica como **trazadores**. Un compuesto dado se sintetiza de manera artificial empleando un isótopo radiactivo como el $^{14}_{6}$C o el $^{3}_{1}$H. Tales moléculas "marcadas" se pueden rastrear entonces conforme se mueven a través de un organismo o conforme experimentan reacciones químicas. La presencia de estas moléculas marcadas (o partes de ellas, si experimentan cambio químico) se puede detectar mediante un detector Geiger o de centelleo, que detecta la radiación emitida (véase la sección 41-11). De esta forma es posible rastrear cómo se digieren las moléculas de alimento y hacia qué partes del cuerpo se dirigen.

FÍSICA APLICADA
Trazadores en medicina y biología

a)

b)

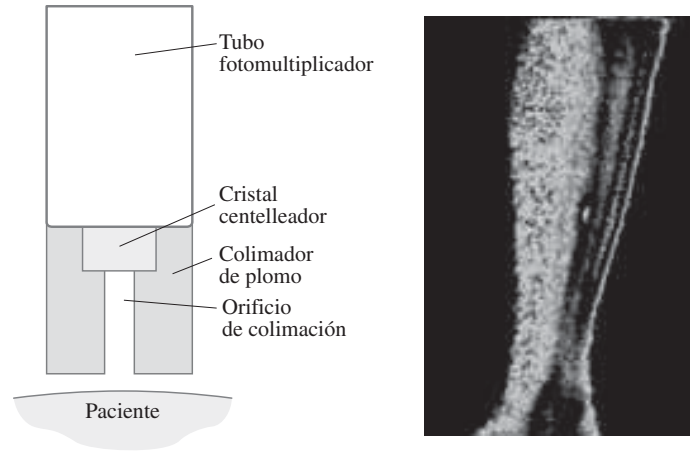
FIGURA 42–19 *a*) Autorradiografía de una hoja expuesta durante 30 s a $^{14}CO_2$. El tejido fotosintético (oscuro) se vuelve radiactivo; el tejido no fotosintético de las nervaduras está libre de $^{14}_{6}C$ por lo tanto, no ennegrece la placa de rayos X. Esta técnica es útil para seguir patrones de transporte de nutrientes en las plantas. *b*) Autorradiografía de ADN cromosómico. Los patrones punteados de granos de película indican el punto creciente, con forma de Y, de la duplicación del ADN.

Los trazadores radiactivos se emplean para determinar cómo los aminoácidos y otros compuestos esenciales se sintetizan en el organismo. La permeabilidad de las paredes celulares a varias moléculas y iones se determina utilizando isótopos radiactivos: la molécula o el ion marcado se inyectan en el fluido extracelular y la radiactividad presente dentro y fuera de las células se mide como función del tiempo.

En una técnica conocida como **autorradiografía**, la posición de los isótopos radiactivos se detecta en película. Por ejemplo, la distribución de carbohidratos que se producen en las hojas de las plantas a partir de la absorción del CO_2 se puede observar al dejar la planta en una atmósfera donde el átomo de carbono en el CO_2 sea $^{14}_{6}C$. Después de un tiempo, una hoja se coloca firmemente sobre una placa fotográfica y la radiación emitida oscurece la película con más intensidad donde el isótopo se concentró con más fuerza (figura 42-19a). La autorradiografía con nucleótidos (componentes del ADN) etiquetados revela mucho acerca de los detalles de la duplicación del ADN (figura 42-19b).

Para diagnóstico médico, el radionúclido de uso más común en la actualidad es el $^{99m}_{43}Tc$, un estado excitado de larga vida del tecnecio 99 (la "m" en el símbolo significa estado "metaestable"). Se forma cuando decae el $^{99}_{42}Mo$ La gran utilidad del $^{99m}_{43}Tc$ deriva de su conveniente vida media de 6 h (corta, pero no demasiado) y del hecho de que se puede combinar con una gran variedad de compuestos. El compuesto a marcar con el radionúclido se elige porque se concentra en el órgano o la región de la anatomía que se va a estudiar. Entonces, detectores afuera del cuerpo registran, o hacen visible, la distribución del compuesto con la marca radiactiva. La detección se podría realizar mediante un solo detector (figura 42-20a) que se mueva a través del cuerpo y mida la intensidad de la radiactividad en un gran número de puntos. La imagen representa la intensidad relativa de la radiactividad en cada punto. La radiactividad relativa es una herramienta de diagnóstico. Por ejemplo, la radiactividad alta o baja puede representar actividad excesiva o inactividad de un órgano o de una parte de un órgano, o en otro caso podría representar una lesión o un tumor. Las más complejas **cámaras gamma** utilizan muchos detectores que registran simultáneamente la radiactividad en diversos puntos. Las intensidades medidas aparecen en un monitor de televisión o computadora. En ocasiones la imagen se llama escintilograma, figura 42-20b. Las cámaras gamma son relativamente baratas, aunque su resolución es limitada (debido a colimación no perfecta†). Sin embargo, tienen la ventaja de que permiten el desarrollo de estudios "dinámicos" (esto es, imágenes que cambian con el tiempo, como una película).

† "Colimar" significa "hacer paralelo", generalmente al bloquear los rayos no paralelos con un tubo estrecho dentro de plomo, como en la figura 42-20a.



a)

b)

FIGURA 42–20 *a*) Detector de rayos gamma colimados por escaneo (que se mueven) sobre un paciente. El colimador selecciona rayos γ que entran en una línea (casi) recta desde el paciente. Sin el colimador, los rayos γ de todas partes del cuerpo podrían golpear el centelleador, lo que produce una imagen deficiente. Los detectores actuales por lo general tienen muchos tubos colimadores y se llaman *cámaras gamma*. *b*) Imagen de cámara gamma (escintilograma) de una pierna con una fractura por fatiga que detecta los rayos γ del $^{99m}_{43}Tc$. La imagen es en escala de grises, pero se colorea para tener mayor visibilidad. (Véase pliego a color al final del libro.)

*42–9 Formación de imágenes mediante tomografía: Exploración TAC y tomografía por emisión

*Imagen normal de rayos X

FÍSICA APLICADA
La imagen normal de rayos X es una especie de sombra (sin emplear lentes)

Para una fotografía de rayos X médica o dental convencionales, los rayos X que salen del tubo (sección 35-10) pasan a través del cuerpo y se detectan en una película fotográfica o una pantalla fluorescente, figura 42-21. Los rayos viajan en líneas casi rectas a través del cuerpo con mínima desviación, pues a las longitudes de onda de los rayos X hay poca difracción o refracción. Sin embargo, existe absorción (y dispersión); y la diferencia en absorción por diferentes estructuras en el cuerpo es lo que genera la imagen producida por los rayos transmitidos. Cuanto menor absorción haya, mayor será la transmisión y más oscura será la película. La imagen es, en cierto sentido, una "sombra" del objeto por el que pasaron los rayos. La imagen de rayos X *no* se produce al enfocar los rayos con lentes como en el caso de los instrumentos que se estudiaron en el capítulo 33.

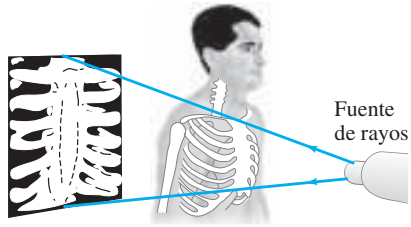


FIGURA 42–21 Formación de imagen de rayos X convencionales, que en esencia es la proyección de una sombra.

*Formación de imágenes mediante tomografía computarizada (TC)

FÍSICA APLICADA
Imágenes mediante tomografía computarizada

En las imágenes de rayos X convencionales, todo el grosor del cuerpo se proyecta sobre la película; las estructuras se traslapan y en muchos casos son difíciles de distinguir. En la década de 1970 se desarrolló una técnica de rayos X novedosa y revolucionaria llamada **tomografía computarizada** (TC), que produce una imagen de una "rebanada" a través del cuerpo. (La palabra **tomografía** proviene del griego: *tomos* = corte, *grafos* = descripción o representación.) Las estructuras y lesiones anteriormente imposibles de visualizar ahora se pueden ver con notable claridad. El principio detrás de la TC se describe en la figura 42-22: un delgado haz colimado de rayos X ("colimar" significa "hacer paralelo") pasa a través del cuerpo hasta un detector que mide la intensidad transmitida. Las mediciones se realizan en un gran número de puntos conforme la fuente y el detector se mueven en conjunto sobre el cuerpo. Entonces el aparato gira ligeramente en torno al eje del cuerpo y explora (escanea) de nuevo; esto se repite a intervalos de (quizá) 1° a lo largo de 180°. La intensidad del haz transmitido para los muchos puntos de cada escaneo, y para cada ángulo, se envían a una computadora que reconstruye la imagen del corte. Observe que el corte que se visualiza es perpendicular al eje largo del cuerpo. Por esta razón, la TC en ocasiones se llama **tomografía axial computarizada** (TAC), aunque la abreviatura TAC, como en exploración TAC, también se interpreta como **tomografía asistida por computadora**.

El uso de un solo detector, como en la figura 42-22, requeriría algunos minutos para los muchos escaneos necesarios para formar una imagen completa. Los escáneres más rápidos usan un haz en abanico, figura 42-23a, en el que los haces que pasan a tra-

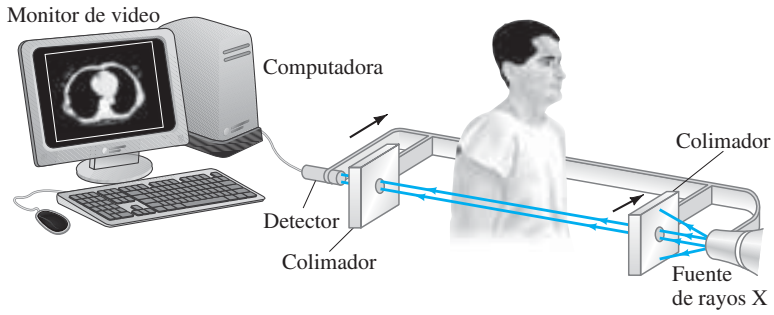
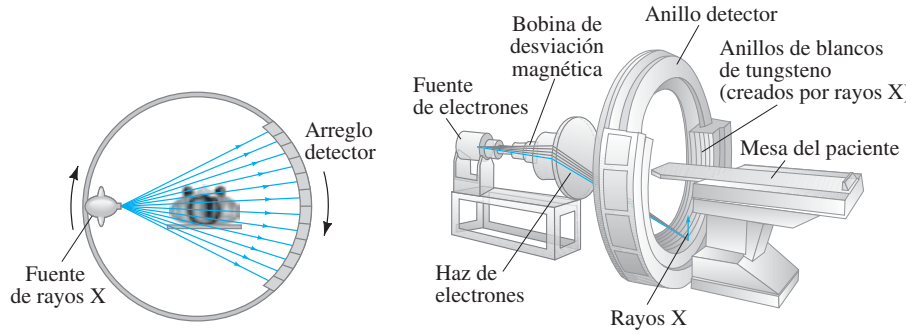


FIGURA 42–22 Formación de imágenes tomográficas: la fuente de rayos X y el detector se mueven en conjunto a través del cuerpo, y la intensidad transmitida se mide en gran número de puntos. Entonces el sistema fuente-detector gira ligeramente (por ejemplo, 1°) y se realiza otro escaneo. Este proceso se repite tal vez a lo largo de 180°. La computadora reconstruye la imagen del corte que se presenta sobre un monitor de televisión o computadora.



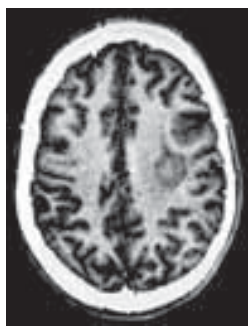
a) *b*)

FIGURA 42–23 *a*) Escáner de haz en abanico. Los rayos que se transmiten a través de todo el cuerpo se miden simultáneamente en cada ángulo. La fuente y el detector giran para tomar mediciones a diferentes ángulos. En otro tipo de escáner de haz en abanico, existen detectores alrededor de los 360º del círculo que permanece fijo conforme la fuente se mueve. *b*) En otro tipo, un haz de electrones de una fuente se dirige mediante campos magnéticos a blancos de tungsteno que rodean al paciente.

vés de toda la sección transversal del cuerpo se detectan simultáneamente mediante muchos detectores. La fuente y los detectores giran entonces en torno al paciente, y una imagen requiere sólo algunos segundos para formarse. Todavía más rápidas, y por lo tanto útiles para exploraciones cardiacas, son las máquinas fuente fijas donde un haz de electrones se dirige (mediante campos magnéticos) hacia blancos de tungsteno que rodean al paciente, lo que crea los rayos X. Véase la figura 42-23b.

FIGURA 42–24 Dos imágenes TC, con diferentes grados de resolución, que muestran cada una la sección transversal de un cerebro. La fotografía *a*) es de baja resolución. La fotografía *b*) de alta resolución, muestra un tumor cerebral y usa un falso color para resaltarlo. (Véase el pliego a color al final del libro).

a)



b)

*Formación de imágenes

Pero, ¿cómo se forma la imagen? El corte se puede considerar dividido en muchos pequeños elementos de imagen (o **pixeles**), que podrían ser cuadrados. (Véase la figura 35-42.) En el caso de la TC, el ancho de cada pixel se elige de acuerdo con el ancho de los detectores y/o el ancho de los haces de rayos X, y esto determina la resolución de la imagen, que puede ser de 1 mm. Un detector de rayos X mide la intensidad del haz transmitido. Cuando este valor se resta de la intensidad del haz en la fuente, se obtiene la absorción total (llamada "proyección") a lo largo de esa línea de haz. Para analizar todas las proyecciones de absorción se usan complicadas técnicas matemáticas para el gran número de escaneos de haz que se miden (véase el siguiente apartado), obteniendo la absorción en cada pixel y asignando a cada uno un "valor de gris" de acuerdo con cuánta radiación absorbió. La imagen se constituye con pequeñas manchas (pixeles) de variadas sombras de gris. Con frecuencia la cantidad de absorción tiene código de color. Sin embargo, los colores en la imagen de **falso color** resultante no tienen nada que ver con el color real del objeto. Las imágenes médicas reales son monocromáticas (con varios tonos de gris). Sólo la luz *visible* tiene color, los rayos X y los rayos γ no lo tienen.

La figura 42-24 ilustra cómo se ven en realidad las imágenes TC. En general, existe consenso acerca de que el escaneo TC revolucionó algunas áreas de la medicina, al permitir diagnósticos mucho menos invasivos y/o más exactos.

La tomografía computarizada también se aplica a la formación de imágenes mediante ultrasonido (sección 16-9) y a emisiones de radioisótopos y resonancia magnética nuclear, que se estudian en la sección 42-10.

*Reconstrucción de imágenes tomográficas

¿Cómo se puede determinar el tono gris de cada pixel, aun cuando todo lo que se puede medir es la absorción total a lo largo de cada línea de haz en el corte? Sólo se logra haciendo muchos escaneos de haz que se efectúan en muchos ángulos diferentes. Suponga que la imagen será un arreglo de 100×100 elementos para un total de 10^4 pixeles. Si se tienen 100 detectores y se miden las proyecciones de absorción a 100 ángulos diferentes, entonces se obtienen 10^4 piezas de información. A partir de esta información, es posible reconstruir una imagen, pero no con mucha precisión. Si se miden más ángulos, la reconstrucción de la imagen se realiza con mayor exactitud.

Para comprender cómo se realiza la reconstrucción matemática, considere un caso muy simple con el uso de la técnica "iterativa" (la palabra "iterar" viene del latín y significa "repetir"). Suponga que el corte de muestra se divide en los pixeles simples de 2×2, como se ilustra en la figura 42-25. El número dentro de cada pixel representa la cantidad que absorbe el material en esa área (por ejemplo, en décimas de un porcentaje): esto es, 4 representa el doble de absorción que 2. Pero no se pueden medir directamente estos valores, ya que son las incógnitas que se van a despejar. Todo lo que se puede medir son las proyecciones, la absorción total a lo largo de cada línea de haz, y éstas se muestran en el diagrama como la suma de la absorción para los pixeles a lo largo de cada línea en cuatro ángulos diferentes. Estas proyecciones (indicadas en la punta de cada flecha) son lo que se puede medir y ahora se quiere trabajar en regresión a partir de ellas para ver qué tan cerca se puede llegar al verdadero valor de absorción para cada pixel. Comenzamos el análisis con la asignación de valor 0 a cada pixel, figura 42-26a. En la técnica iterativa, usamos las proyecciones para estimar el valor de absorción en cada cuadrado, y repetimos para cada ángulo. Las proyecciones para el ángulo 1 son 7 y 13. Dividimos cada uno de éstos igualmente entre sus dos cuadrados: cada cuadrado en la columna izquierda obtiene $3\frac{1}{2}$ (la mitad de 7) y cada cuadrado en la columna derecha obtiene $6\frac{1}{2}$ (la mitad de 13); véase la figura 42-26b. A continuación se toman las proyecciones en el ángulo 2 y se calcula la diferencia entre las proyecciones medidas en el ángulo 2 (6 y 14) y las proyecciones con base en la estimación anterior (hilera superior: $3\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} = 10$; igual para la hilera inferior). Luego se distribuye esta diferencia equitativamente a los cuadrados en esa hilera. Para la hilera superior se tiene

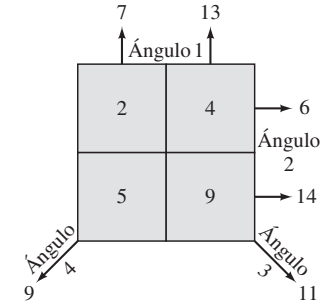
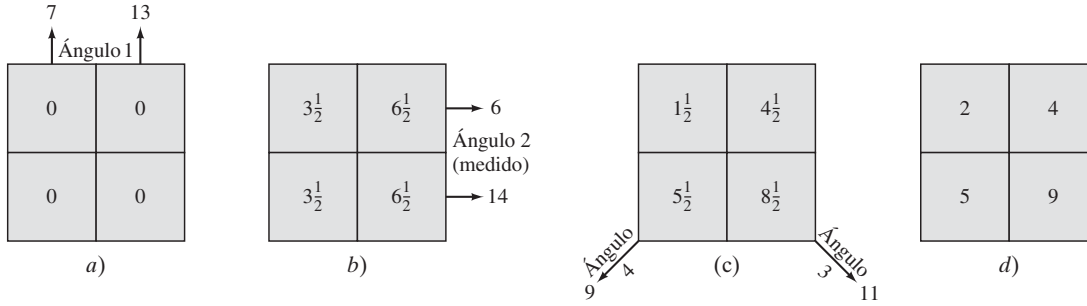


FIGURA 42–25 Una imagen simple de 2×2 que muestra verdaderos valores de absorción y proyecciones medidas.

FIGURA 42–26 Reconstrucción de la imagen usando proyecciones en un procedimiento iterativo.



$$3\tfrac{1}{2} + \frac{6 - 10}{2} = 1\tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad 6\tfrac{1}{2} + \frac{6 - 10}{2} = 4\tfrac{1}{2};$$

y para la hilera inferior,

$$3\tfrac{1}{2} + \frac{14 - 10}{2} = 5\tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad 6\tfrac{1}{2} + \frac{14 - 10}{2} = 8\tfrac{1}{2}.$$

Estos valores se insertan como se muestra en la figura 42-26c. A continuación, la proyección en el ángulo 3 da

$$(\text{superior izquierda})1\tfrac{1}{2} + \frac{11 - 10}{2} = 2 \text{ y } (\text{inferior derecha})8\tfrac{1}{2} + \frac{11 - 10}{2} = 9;$$

y para el ángulo 4 se tien

$$(\text{inferior izquierda})\ 5\tfrac{1}{2} + \frac{9 - 10}{2} = 5 \text{ y } (\text{superior derecha})\ 4\tfrac{1}{2} + \frac{9 - 10}{2} = 4.$$

El resultado, que se presenta en la figura 42-26d, corresponde exactamente a los valores reales. (En situaciones reales, los valores verdaderos no se conocen, por lo que se requieren estas técnicas de computadora.) Para obtener estos números con exactitud, se usan seis piezas de información (dos para cada uno de los ángulos 1 y 2, una para cada uno de los ángulos 3 y 4). Para el número mucho más grande de pixeles que se usan con imágenes reales, por lo general no se logran valores exactos. Es posible que se requieran muchas iteraciones, y el cálculo se considera suficientemente preciso cuando la diferencia entre proyecciones calculadas y medidas es suficientemente pequeña. El ejemplo anterior ilustra la "convergencia" del proceso: la primera iteración (b hasta c en la figura 42-26) cambió los valores por 2, la última iteración (c hasta d) por sólo $\frac{1}{2}$.

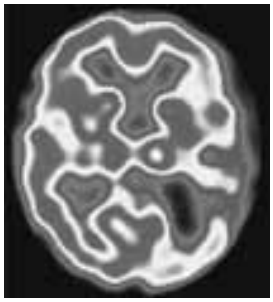
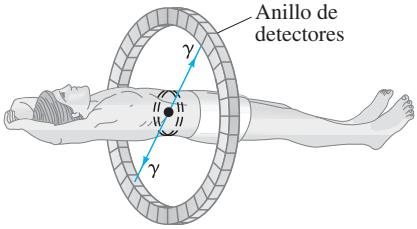


FIGURA 42–27 Escaneo SPECT del cerebro (falso color) con síndrome de Mesulam, marcado con $^{99m}_{43}$Tc. (Véase el pliego a color al final del libro).

FÍSICA APLICADA

Tomografía por emisión (SPECT, TEP)

FIGURA 42–28 Sistema de tomografía por emisión de positrón (TEP) que muestra un anillo que detecta las dos aniquilaciones de rayos $\gamma\,(e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma)$ emitidos a 180° uno con respecto al otro.



*Tomografía por emisión

Es posible ver las emisiones de un trazador radiactivo (véase la sección 42-8) en un solo plano o corte a través del cuerpo mediante técnicas de tomografía computarizada. Un detector gamma básico (figura 42-20a) se puede mover alrededor del paciente para medir la intensidad radiactiva del trazador en muchos puntos y ángulos; los datos se procesan en gran medida como los escaneos TC de rayos X. Esta técnica se conoce como **tomografía por emisión de un solo fotón** (SPET, por las siglas de *single photon emission tomography*) o tomografía computarizada por emisión de un solo fotón (SPECT, por las siglas de *single photon emission computed tomography*); véase la figura 42-27.

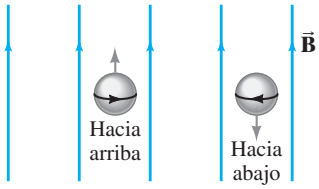
Otra importante técnica es la **tomografía por emisión de positrones** (TEP), que utiliza emisores de positrones como $^{11}_{6}$C, $^{13}_{7}$N, $^{15}_{8}$O y $^{18}_{9}$F. Estos isótopos se incorporan en moléculas que, cuando se inhalan o inyectan, se acumulan en el órgano o la región del cuerpo a estudiar. Cuando tales núclidos experimentan decaimiento β^+, el positrón emitido recorre cuando mucho algunos milímetros antes de chocar con un electrón normal. En esta colisión, el positrón y el electrón se aniquilan, lo que produce dos rayos γ $(e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma)$. Los dos rayos γ salen en sentidos opuestos (180° ± 0.25°) pues deben tener cantidades de movimiento casi exactamente iguales y opuestas para conservar la cantidad de movimiento (las cantidades de movimiento iniciales de los e^+ y e^- en esencia son cero en comparación con las cantidades de movimiento de los rayos γ). Puesto que los fotones viajan a lo largo de la misma línea en sentidos opuestos, la detección en coincidencia que realizan los anillos de detectores que rodean al paciente (figura 42-28) establece con facilidad la línea a lo largo de la cual tuvo lugar la emisión. Si se pudiera determinar con precisión la diferencia en tiempo de llegada de los dos fotones, se podría calcular la posición real del núclido emisor a lo largo de esa línea. La electrónica actual puede medir los tiempos cuando mucho con un intervalo de ±300 ps, así que, a la rapidez de los rayos γ ($c = 3 \times 10^8$ m/s), la posición real se podría determinar con una exactitud en el orden de aproximadamente $d = vt \approx (3 \times 10^8\ \text{m/s})(300 \times 10^{-12}\ \text{s}) \approx 10$ cm, que no es muy útil. Aunque puede haber en un futuro potencial para hacer mediciones del tiempo de trayectoria y así determinar la posición, en la actualidad se usan en su lugar técnicas de tomografía computarizada, similares a las de la TC de rayos X, que permiten reconstruir imágenes TEP con una resolución en el orden de 3 a 5 mm. Una gran ventaja de la TEP es que no se necesitan colimadores (como en el caso de la detección de un solo fotón, véase la figura 42-20a). En consecuencia, con la TEP se "desperdician" menos fotones y se pueden administrar dosis más bajas al paciente.

Los sistemas TEP y SPET brindan imágenes relacionadas con la bioquímica, el metabolismo y la fisiología del paciente. Esto se comparará con escaneos TC de rayos X, cuyas imágenes reflejan forma y estructura, esto es, la anatomía de la región observada.

*42–10 Resonancia magnética nuclear (RMN); formación de imágenes mediante resonancia magnética (IRM)

La *resonancia magnética nuclear* (RMN) es un fenómeno que, poco después de su descubrimiento en 1946, se convirtió en una poderosa herramienta de investigación en varios campos, como física, química y bioquímica. También es una importante técnica de formación de imágenes médicas. Primero se estudiará brevemente el fenómeno, y luego se observarán sus aplicaciones.

FIGURA 42–29 Esquema de un protón en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ (que apunta hacia arriba) con los dos posibles estados de espín del protón, hacia arriba y hacia abajo.



*Resonancia magnética nuclear (RMN)

En el capítulo 39 se vio que los niveles de energía en los átomos se dividen cuando se colocan en un campo magnético B (el efecto Zeeman) de acuerdo con la cantidad de movimiento angular o el espín del estado. La división es proporcional a B y al momento magnético, μ. Los núcleos también tienen momentos magnéticos (sección 41-1) y sólo se examina el más sencillo, el núcleo de hidrógeno $\left(^1_1\text{H}\right)$ que consiste en un solo protón. Su cantidad de movimiento angular de espín (y su momento magnético), como el del electrón, sólo pueden tomar dos valores cuando se colocan en un campo magnético: espín hacia arriba (paralelo al campo) y espín hacia abajo (antiparalelo al campo), como se sugiere en la figura 42-29.

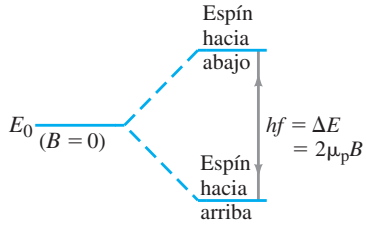


FIGURA 42–30 La energía E_0 en ausencia de un campo magnético se divide en dos niveles en presencia de un campo magnético.

Cuando está presente un campo magnético, un estado de energía se divide en dos niveles, como se ilustra en la figura 42-30, donde el estado espín hacia arriba (paralelo al campo) tiene menor energía. El estado espín hacia abajo adquiere una energía adicional $\mu_p B_T$ y el estado espín hacia arriba cambia su energía por $-\mu_p B_T$ (ecuación 27-12 y sección 39-7), donde B_T es el campo magnético total en el núcleo. La diferencia en energía entre los dos estados (figura 42-30) es, por lo tanto,

$$\Delta E = 2\,\mu_p B_T,$$

donde μ_p es el momento magnético del protón.

En una configuración de resonancia magnética nuclear estándar (RMN), la muestra a examinar se coloca en un campo magnético estático. Un pulso de radiofrecuencia (RF) de radiación electromagnética (esto es, fotones) se aplica a la muestra. Si la frecuencia, f, de este pulso corresponde precisamente a la diferencia de energía entre los dos niveles de energía (figura 42-30), de manera que

$$hf = \Delta E = 2\mu_p B_T, \qquad \textbf{(42–12)}$$

entonces se absorberán los fotones del haz de RF, lo que excitará a muchos de los núcleos desde el estado más bajo al estado superior. Éste es un fenómeno de resonancia pues sólo hay una absorción significativa si f está muy cerca de $f = 2\mu_p B_T/h$. De ahí el nombre de "resonancia magnética nuclear". En el caso de núcleos libres de $^1_1$H, la frecuencia es 42.58 MHz para un campo $B_T = 1.0$ T (ejemplo 42-14). Si los átomos H se enlazan en una molécula, el campo magnético total B_T en los núcleos H será la suma del campo aplicado externo (B_{ext}) más el campo magnético local (B_{loc}) debido a electrones y núcleos de átomos vecinos. Puesto que f es proporcional a B_T, el valor de f para un campo externo dado será ligeramente diferente para átomos H enlazados que para átomos libres:

$$hf = 2\mu_p(B_{ext} + B_{loc}).$$

Este cambio en frecuencia, que se puede medir, se llama "corrimiento químico". Con esta técnica de RMN se ha aprendido mucho acerca de la estructura de moléculas y enlaces.

EJEMPLO 42–14 **RMN para protones libres.** Calcule la frecuencia resonante para protones libres en un campo magnético de 1.000 T.

PLANTEAMIENTO Empleamos la ecuación 42-12, donde el momento magnético del protón (sección 41-1) es

$$\mu_p = 2.7928\mu_N = 2.7928\left(\frac{e\hbar}{2m_p}\right) = 2.7928\left(\frac{eh}{4\pi m_p}\right).$$

SOLUCIÓN Se despeja f en la ecuación 42-12 y se encuentra

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2\mu_p B}{h}$$

$$= (2.7928)\left(\frac{eB}{2\pi m_p}\right) = 2.7928\left[\frac{(1.6022\times10^{-19}\,\text{C})(1.000\,\text{T})}{2\pi(1.6726\times10^{-27}\,\text{kg})}\right]$$

$$= 42.58\ \text{MHz}.$$

* Formación de imágenes mediante resonancia magnética (IRM)

FÍSICA APLICADA
Formación de imágenes mediante RMN (IRM)

Para producir imágenes RMN con utilidad médica (ahora comúnmente llamada IRM o **formación de imágenes mediante resonancia magnética**), el elemento más utilizado es el hidrógeno, pues es el elemento más común en el cuerpo humano y produce las señales RMN más fuertes. El aparato experimental se aprecia en la figura 42-31. Las grandes bobinas establecen el campo magnético estático, y las bobinas RF producen el pulso RF de ondas electromagnéticas (fotones) que hacen que los núcleos salten desde el estado más bajo hasta el superior (figura 42-30). Estas mismas bobinas (u otra bobina) pueden detectar la absorción de energía o la radiación emitida (también de frecuencia $f = \Delta E/h$) cuando los núcleos saltan de regreso hacia abajo, al estado inferior.

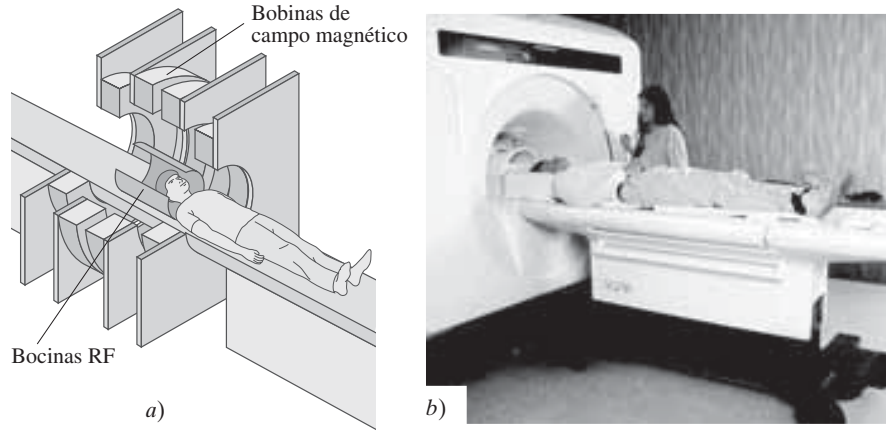


FIGURA 42–31 Configuración típica para formación de imágenes IRM: *a*) diagrama; *b*) fotografía.

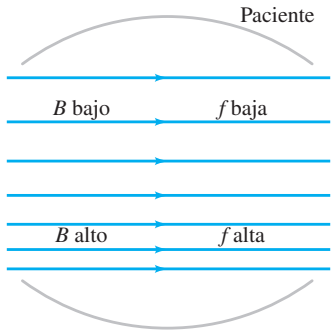
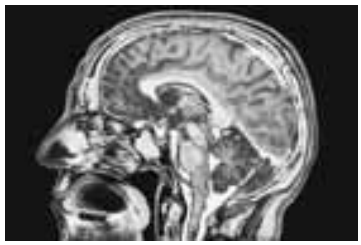


FIGURA 42–32 Un campo estático que es más fuerte en la parte inferior que en la parte superior. La frecuencia de la radiación absorbida o emitida es proporcional a B en RMN.

FIGURA 42–33 Imagen de RMN (IRM) en falso color de una sección vertical a través de la cabeza, que muestra estructuras en el cerebro normal. (Véase el pliego a color al final del libro.)



La formación de una imagen bidimensional o tridimensional se puede realizar con técnicas similares a las de la tomografía computarizada (sección 42-9). El elemento más simple de medir para crear una imagen es la intensidad de la radiación absorbida y/o emitida desde muchos puntos diferentes del cuerpo, y esto sería una medida de la densidad de los átomos H en cada punto. Pero, ¿cómo se sabe desde cuál parte del cuerpo proviene un fotón determinado? Una técnica es dar al campo magnético estático un gradiente; esto es, en lugar de aplicar un campo magnético uniforme, B_T, se varía el campo con la posición a través del ancho de la muestra (o paciente). Como la frecuencia que absorben los núcleos de H es proporcional a B_T (ecuación 42-12), sólo un plano dentro del cuerpo tendrá el valor adecuado de B_T para absorber fotones de una frecuencia particular f. Al variar f, se puede medir la absorción de diferentes planos. Alternativamente, si el gradiente de campo se aplica *después* del pulso *Rf*, la frecuencia de los fotones emitidos será una medida de dónde se emitieron. Véase la figura 42-32. Si durante la excitación (absorción de fotones) se aplica un gradiente de campo magnético en una dirección y se transmiten fotones de una sola frecuencia, sólo se excitarán núcleos de H en un delgado corte. Al aplicar un gradiente al volver a emitir en una dirección perpendicular a la primera, la frecuencia f de la radiación reemitida representará la profundidad en esa "rebanada". Es posible usar otras formas de variar el campo magnético a lo largo del volumen del cuerpo para correlacionar la frecuencia RMN con la posición.

Una imagen que se reconstruye con base en la densidad de átomos H (esto es, la intensidad de la radiación absorbida o emitida) no es muy interesante. Más útiles son las imágenes que se basan en la tasa a la que decaen los núcleos de regreso al estado fundamental, y tales imágenes tienen una resolución de 1 mm o mejor. Esta técnica de RMN (en ocasiones llamada **eco de espín**) produce imágenes de gran valor diagnóstico, tanto en la delineación de estructura (anatomía) como en el estudio de procesos metabólicos. En la figura 42-33 se muestra una imagen RMN, mejorada con color: ninguna imagen médica usa luz visible, de manera que los colores que se muestran aquí son agregados (véase el pliego a color al final del libro). Las imágenes originales, como las que observan los médicos, son varias sombras de gris, que representan intensidad (o conteos).

La formación de imágenes RMN se considera no invasiva. Es posible calcular la energía de los fotones implicados: como se determinó en el ejemplo 42-14, en un campo magnético de 1.0 T, $f = 42.58$ MHz para $^1_1$H. Esto corresponde a una energía de $hf = (6.6 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(43 \times 10^6\,\text{Hz}) \approx 3 \times 10^{-26}$ J o aproximadamente 10^{-7} eV. Puesto que los enlaces moleculares están en el orden de 1 eV, es claro que los fotones RF pueden causar poca perturbación celular. Esto se debe comparar con los rayos X o γ, cuyas energías son de 10^4 a 10^6 eV y, por consiguiente, pueden causar daño significativo. Se cree que los campos magnéticos estáticos, aunque con frecuencia grandes (~0.1 a 1 T), son inocuos (excepto para personas que usan marcapasos cardiacos).

La tabla 42-2 menciona las principales técnicas que se estudiaron para la formación de imágenes del interior del cuerpo humano, junto con la resolución óptima que se logra en la actualidad. La resolución apenas es un factor que se debe considerar, pues las diversas técnicas de formación de imágenes ofrecen diferentes tipos de información, útil para distintos tipos de diagnóstico.

TABLA 42–2 Técnicas para formación de imágenes médicas

Técnica	Resolución
Rayos X convencionales	$\frac{1}{2}$ mm
Exploración TC, rayos X	$\frac{1}{2}$ mm
Medicina nuclear (trazadores)	1 cm
SPET (emisión de un solo fotón)	1 cm
TEP (emisión de positrón)	3–5 mm
RMN (IRM)	$\frac{1}{2}$–1 mm
Ultrasonido (sección 16-9)	2 mm

Resumen

Una **reacción nuclear** ocurre cuando dos núcleos chocan y se producen otros dos o más núcleos (o partículas). En este proceso, como en la radiactividad, ocurre **transmutación** (o transformación) de elementos.

La **energía de reacción** o **valor *Q*** de una reacción a + X → Y + b es

$$Q = (M_a + M_X - M_b - M_Y)c^2 \qquad \textbf{(42–2a)}$$

$$= K_b + K_Y - K_a - K_X. \qquad \textbf{(42–2b)}$$

La **sección eficaz** σ para una reacción es una medida de la probabilidad de interacción con núcleos blanco.

En la **fisión**, un núcleo pesado como el uranio se divide en dos núcleos de tamaño intermedio después de que un neutrón choca con él. El $^{235}_{92}$U es fisionable por neutrones lentos, mientras que algunos núcleos fisionables requieren neutrones rápidos. En la fisión se libera mucha energía (≈ 200 MeV por fisión) porque la energía de enlace por nucleón es más baja para núcleos pesados que para núcleos de tamaño intermedio, de manera que la masa de un núcleo pesado es mayor que la masa total de sus productos de fisión. El proceso de fisión libera neutrones, de manera que es posible una **reacción en cadena**. La **masa crítica** es la masa mínima de combustible necesaria para sostener una reacción en cadena. En un **reactor nuclear** o en una bomba nuclear, se usa un **moderador** para frenar los neutrones liberados.

El proceso de **fusión**, en el cual núcleos pequeños se combinan para formar unos más grandes, también libera energía. La energía proveniente del Sol se origina en las reacciones de fusión conocidas como **ciclo protón-protón**, en las que cuatro protones se fusionan para formar un núcleo $^4_2$He, lo que produce 25 meV de energía. Todavía no resulta posible un reactor de fusión útil para generación de energía, debido a la dificultad para confinar el combustible (por ejemplo, deuterio) el tiempo suficiente a la temperatura extremadamente alta requerida (≈ 10^8 K). No obstante, se han hecho grandes progresos para confinar la colección de iones cargados conocidos como **plasma**. Los dos métodos principales son **confinamiento magnético**, que usa un campo magnético en un dispositivo como el **tokamak** con forma toroidal, y el **confinamiento interno**, en el que intensos rayos láser comprimen una pastilla de combustible de deuterio y tritio.

La radiación puede causar daño a los materiales, incluido el tejido biológico. Cuantificar las cantidades de radiación es el tema de la **dosimetría**. El **curie** (Ci) y el **becquerel** (Bq) son unidades que miden la **actividad de la fuente** o tasa de decaimiento de una muestra: 1 Ci = 3.70×10^{10} decaimientos por segundo, mientras que 1 Bq = 1 decaimiento/s. La **dosis absorbida**, que con frecuencia se especifica en **rads**, mide la cantidad de energía depositada por unidad de masa de material absorbente: 1 rad es la cantidad de radiación que deposita energía a la tasa de 10^{-2} J/kg de material. La unidad del SI de dosis absorbida es el **gray**: 1 Gy = 1 J/kg = 100 rad. La **dosis efectiva** con frecuencia se especifica por el **rem** = rad × QF, donde QF es el "factor de calidad" de un tipo dado de radiación; 1 rem de cualquier tipo de radiación causa aproximadamente la misma cantidad de daño biológico. La dosis promedio anual recibida por persona en Estados Unidos es aproximadamente de 360 mrem. La unidad del SI para dosis efectiva es el **sievert**: 1 Sv = 10^2 rem.

[*La radiación nuclear se usa en medicina para terapia del cáncer y para formar imágenes de estructuras y procesos biológicos. La **formación de imágenes tomográficas** del cuerpo humano, que permite obtener detalles tridimensionales, incluye muchos tipos: escaneos TC, TEP, SPET (= SPECT) e IRM; esta última modalidad utiliza **resonancia magnética nuclear** (RMN).]

Preguntas

(NOTA: Las masas se encuentran en el Apéndice F.)

1. Encuentre las partículas o núcleos faltantes:
   a) n + $^{137}_{56}$Ba → ? + γ;
   b) n + $^{137}_{56}$Ba → $^{137}_{55}$Cs + ?;
   c) d + $^2_1$H → $^4_2$He + ?;
   d) α + $^{197}_{79}$Au → ? + d
   donde d representa deuterio.
2. El isótopo $^{32}_{15}$P se produce mediante la reacción: n + ? → $^{32}_{15}$P + p. ¿Cuál debe ser el núcleo blanco?
3. Cuando el $^{22}_{11}$Na se bombardea con deuterones ($^2_1$H), se emite una partícula α. ¿Cuál es el núclido resultante?
4. ¿Por qué los neutrones son tan buenos proyectiles para producir reacciones nucleares?
5. Un protón golpea un núcleo $^{20}_{10}$Ne y se observa que sale una partícula α. ¿Cuál es el núcleo residual? Escriba la ecuación de la reacción.
6. ¿Los fragmentos de fisión son emisores β^+ o β^-? Explique.
7. La energía de fisión nuclear aparece en la forma de energía térmica, ¿pero la energía térmica de qué?

8. El $^{238}_{92}$U libera un promedio de 2.5 neutrones por fisión, en comparación con 2.9 en el caso del $^{239}_{94}$Pu. ¿Cuál de estos dos núcleos cree que tendría la menor masa crítica? Explique.
9. Si el $^{235}_{92}$U libera en promedio sólo 1.5 neutrones por fisión, ¿sería posible una reacción en cadena? Si es así, ¿cómo diferiría la reacción en cadena si 3 neutrones se liberan por fisión?
10. ¿Por qué el uranio no se puede enriquecer por medios químicos?
11. ¿Cómo es posible que un neutrón, prácticamente sin energía cinética, excite un núcleo en la medida que se muestra en la figura 42-4?
12. ¿Por qué un bloque poroso de uranio tendría más probabilidad de explotar si se mantiene bajo el agua que si se mantiene en el aire?
13. Un reactor que usa uranio ligeramente enriquecido puede usar agua ordinaria (en lugar de agua pesada) como moderador y todavía tener una reacción en cadena autosostenida. Explique.
14. ¿Por qué el proceso de fisión debe liberar neutrones para ser útil?
15. ¿Por qué se liberan neutrones en una reacción de fisión?
16. ¿Cuál es la razón para el "sistema secundario" en un reactor nuclear, figura 42-9? Esto es, ¿por qué el agua que se calienta mediante el combustible en un reactor nuclear no se usa directamente para impulsar las turbinas?
17. ¿Cuál es la diferencia básica entre fisión y fusión?
18. Discuta los méritos y las desventajas relativos, incluyendo contaminación y seguridad, de la generación de potencia mediante combustibles fósiles, fisión nuclear y fusión nuclear.
19. Para la ignición deuterio-deuterio se requiere una temperatura más alta que para deuterio-tritio. Explique.
20. La energía luminosa emitida por el Sol y las estrellas proviene del proceso de fusión. ¿Qué condiciones en el interior de las estrellas hacen esto posible?
21. ¿Cómo es que las estrellas, y el Sol, mantienen confinamiento del plasma para fusión?
22. ¿Por qué la dosis de radiación máxima recomendada es más alta para mujeres más allá de la edad de crianza infantil que para las mujeres más jóvenes?
23. Las personas que trabajan alrededor de metales que emiten partículas alfa reciben la indicación de que hay poco peligro por la proximidad o por tocar el material, pero deben tener precauciones extremas en relación con su posible ingestión. ¿Por qué? (Está prohibido comer y beber mientras trabajan.)
24. ¿Cuál es la diferencia entre dosis absorbida y dosis efectiva? ¿Cuáles son las unidades del SI para cada una?
25. En ocasiones se usa la radiación para esterilizar instrumentos médicos e incluso alimentos. Explique cómo funciona.
* 26. ¿Cómo se pueden usar los trazadores radiactivos para localizar una fuga en una tubería?

Problemas

(NOTA: Las masas se encuentran en el Apéndice F.)

42–1 Reacciones nucleares, transmutación

1. (I) El aluminio natural es todo $^{27}_{13}$Al. Si absorbe un neutrón, ¿en qué se convierte? ¿Experimenta decaimiento β^+ o β^-? ¿Cuál será el núcleo resultante?
2. (I) Determine si la reacción $^{2}_{1}\text{H} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{3}_{2}\text{He} + \text{n}$ requiere una energía umbral.
3. (I) ¿La reacción $\text{n} + ^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{239}_{92}\text{U} + \gamma$ es posible con neutrones lentos? Explique.
4. (II) ¿La reacción $\text{p} + ^{7}_{3}\text{Li} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + \alpha$ requiere energía o libera energía? ¿Cuánta energía?
5. (II) Calcule la energía liberada (o entrada de energía requerida) para la reacción $\alpha + ^{9}_{4}\text{Be} \rightarrow ^{12}_{6}\text{C} + \text{n}$.
6. (II) *a*) ¿La reacción $\text{n} + ^{24}_{12}\text{Mg} \rightarrow ^{23}_{11}\text{Na} + \text{d}$ puede ocurrir si las partículas que bombardean tienen 16.00 MeV de energía cinética? (d representa deuterio $^{2}_{1}$H.) *b*) Si es así, ¿cuánta energía se libera? Si no, ¿cuánta energía cinética se necesita?
7. (II) *a*) ¿La reacción $\text{p} + ^{7}_{3}\text{Li} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + \alpha$ puede ocurrir si el protón incidente tiene energía cinética = 3500 keV? *b*) Si es así, ¿cuál es la energía cinética total de los productos? Si no, ¿qué energía cinética se necesita?
8. (II) En la reacción $\alpha + ^{14}_{7}\text{N} \rightarrow ^{17}_{8}\text{O} + \text{p}$, las partículas α incidentes tienen 9.68 MeV de energía cinética. La masa del $^{17}_{8}$O es 16.999132 u. *a*) ¿Puede ocurrir esta reacción? *b*) Si es posible que ocurra, ¿cuál es la energía cinética total de los productos? Si no, ¿qué energía cinética se necesita?
9. (II) Calcule el valor Q para la reacción de "captura" $\alpha + ^{16}_{8}\text{O} \rightarrow ^{20}_{10}\text{Ne} + \gamma$.
10. (II) Calcule la energía cinética total de los productos de la reacción $\text{d} + ^{13}_{6}\text{C} \rightarrow ^{14}_{7}\text{N} + \text{n}$ si el deuterón entrante tiene energía cinética K = 44.4 MeV.
11. (II) El $^{14}_{6}$C radiactivo se produce en la atmósfera cuando el $^{14}_{7}$N absorbe un neutrón. Escriba la reacción y encuentre su valor Q.
12. (II) Un ejemplo de reacción nuclear **stripping** (de extracción) es $\text{d} + ^{6}_{3}\text{Li} \rightarrow \text{X} + \text{p}$. *a*) ¿Cuál es X, el núcleo resultante? *b*) ¿Por qué se llama reacción "de extracción"? *c*) ¿Cuál es el valor Q de esta reacción? ¿La reacción es endotérmica o exotérmica?
13. (II) Un ejemplo de una reacción nuclear **pick-up** (de captura) es $^{3}_{2}\text{He} + ^{12}_{6}\text{C} \rightarrow \text{X} + \alpha$. *a*) ¿Por qué se llama reacción "de captura"? *b*) ¿Cuál es el núcleo resultante? *c*) ¿Cuál es el valor Q de esta reacción? ¿La reacción es endotérmica o exotérmica?
14. (II) *a*) Complete la siguiente reacción nuclear: $\text{p} + ? \rightarrow ^{32}_{16}\text{S} + \gamma$. *b*) ¿Cuál es el valor Q?
15. (II) La reacción $\text{p} + ^{18}_{8}\text{O} \rightarrow ^{18}_{9}\text{F} + \text{n}$ requiere una entrada de energía igual a 2.438 MeV. ¿Cuál es la masa del $^{18}_{9}$F?
16. (III) Con base en la conservación de energía y de cantidad de movimiento, demuestre que un protón que bombardea debe tener una energía de 3.23 MeV para hacer que ocurra la reacción $^{13}_{6}\text{C(p, n)}^{13}_{7}\text{N}$. (Véase el ejemplo 42-3.)
17. (III) ¿Cuánta energía cinética (si acaso alguna) requeriría el protón para que ocurra la reacción $^{14}_{6}\text{C(p, n)}^{14}_{7}\text{N}$?

42–2 Sección eficaz

18. (I) La sección eficaz para la reacción $\text{n} + ^{10}_{5}\text{B} \rightarrow ^{7}_{3}\text{Li} + ^{4}_{2}\text{He}$ es de aproximadamente 40 bn para un neutrón incidente de baja energía (energía cinética ≈ 0). El boro se confina en un gas con $n = 1.7 \times 10^{21}$ núcleos/m^3 y el blanco tiene grosor ℓ = 12.0 cm. ¿Qué fracción de neutrones incidentes se dispersará?
19. (I) ¿Cuál es la sección eficaz efectiva para la colisión de dos esferas duras de radios R_1 y R_2?

20. (II) Cuando el blanco es grueso, la tasa a la que las partículas proyectiles chocan con los núcleos en la parte trasera del blanco es menor que en el frente del blanco, pues en las capas frontales tiene lugar cierta dispersión (es decir, colisiones). Sea R_0 la tasa a la que las partículas incidentes chocan con el frente del blanco, y R_x la tasa a una distancia x dentro del blanco ($R_x = R_0$ en $x = 0$). Demuestre entonces que la tasa a la que se dispersan las partículas (y por lo tanto se pierden del haz incidente) en un grosor dx es $-dR_x = R_x n\sigma\, dx$, donde el signo menos significa que R_x disminuye y n es el número de núcleos por unidad de volumen. Luego demuestre que $R_x = R_0 e^{-n\sigma x}$, donde σ es la sección eficaz total. Si el grosor del blanco es ℓ, ¿qué representa $R_x = R_0 e^{-n\sigma\ell}$?

21. (II) Un blanco de plomo de 1.0 cm de grosor reduce un haz de rayos gamma al 25% de su intensidad original. ¿Qué grosor de plomo permitirá que sólo un γ en 10^6 penetre (véase el problema 20)?

22. (II) Con base en la figura 42-3, estime qué grosor de $^{114}_{48}$Cd (ρ = 8650 kg/m^3) causará una tasa de reacción del 2.0% (R/R_0 = 0.020) para *a*) neutrones de 0.10 eV, *b*) neutrones de 5.0 eV.

42–3 Fisión nuclear

23. (I) ¿Cuál es la energía que se libera en la reacción de fisión de la ecuación 42-5? (Las masas del $^{141}_{56}$Ba y del $^{92}_{36}$Kr son 140.914411 u y 91.926156 u, respectivamente).

24. (I) Calcule la energía que se libera en la reacción de fisión $n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{88}_{38}Sr + {}^{136}_{54}Xe + 12n$. Consulte el Apéndice F y suponga que la energía cinética inicial del neutrón es muy pequeña.

25. (I) ¿Cuántas fisiones tienen lugar por segundo en un reactor de 200 MW? Suponga que se liberan 200 MeV por fisión.

26. (I) La energía producida por un reactor de fisión es aproximadamente 200 MeV por fisión. ¿Qué fracción de la masa de un núcleo de $^{235}_{92}$U es esto?

27. (II) Suponga que el consumo de energía eléctrica promedio, día y noche, en una casa común es de 880 W. ¿Qué masa inicial de $^{235}_{92}$U tendría que experimentar fisión para cubrir las necesidades de electricidad de esa casa durante un año? (Suponga que se liberan 200 MeV por fisión, y que la eficiencia es del 100%.)

28. (II) Considere la reacción de fisión

$$^{235}_{92}U + n \rightarrow {}^{133}_{51}Sb + {}^{98}_{41}Nb + ?n.$$

a) ¿Cuántos neutrones se producen en esta reacción? *b*) Calcule la energía liberada. Las masas atómicas para isótopos Sb y Nb son 132.915250 u y 97.910328 u, respectivamente.

29. (II) ¿Cuánta masa de $^{238}_{92}$U se requiere para producir la misma cantidad de energía que al quemar 1.0 kg de carbón (aproximadamente 3×10^7 J)?

30. (II) ¿Qué masa inicial de $^{235}_{92}$U se requiere para operar un reactor de 950 MW durante 1 año? Suponga que la eficiencia es del 38%.

31. (II) Si un neutrón de 1.0 MeV emitido en una reacción de fisión pierde la mitad de su energía cinética en cada colisión con núcleos moderadores, ¿cuántas colisiones debe realizar para alcanzar energía térmica ($\frac{3}{2}kT = 0.040$ eV)?

32. (II) Suponiendo una fisión del $^{236}_{92}$U en dos fragmentos aproximadamente iguales, estime la energía potencial eléctrica justo cuando los fragmentos se separan uno del otro. Suponga que los fragmentos son esféricos (véase la ecuación 41-1) y compare su cálculo con la energía de fisión nuclear liberada, aproximadamente 200 meV.

33. (II) Estime la razón entre la altura de la barrera de Coulomb para decaimiento α y la de la fisión del $^{236}_{92}$U. (Ambas se describen mediante un diagrama de energía potencial de la forma que se muestra en la figura 41-7.)

34. (II) Suponga que el factor de multiplicación de neutrones es 1.0004. Si el tiempo promedio entre fisiones sucesivas en una cadena de reacciones es 1.0 ms, ¿en qué factor aumentará la tasa de reacción en 1.0 s?

42–4 Fusión nuclear

35. (I) ¿Cuál es la energía cinética promedio de los protones en el centro de una estrella donde la temperatura es 2×10^7 K? [*Sugerencia:* Véase la ecuación 18-4.]

36. (II) Demuestre que la energía liberada en la reacción de fusión ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + n$ es 17.57 MeV.

37. (II) Demuestre que la energía que se libera cuando dos núcleos de deuterio se fusionan para formar $^{3}_{2}$He, con la liberación de un neutrón, es 3.23 MeV.

38. (II) Verifique el valor Q que se enuncia para cada una de las reacciones de las ecuaciones 42-7. [*Sugerencia:* Tenga cuidado con los electrones.]

39. (II) *a*) Calcule la energía liberada por gramo de combustible para las reacciones de las ecuaciones 42-9a, b y c. *b*) Calcule la energía liberada por gramo de uranio $^{235}_{92}$U en fisión e indique su proporción para cada reacción en *a*).

40. (II) ¿Cuánta energía se libera cuando el $^{238}_{92}$U absorbe un neutrón lento (energía cinética ≈ 0) y se convierte en $^{239}_{92}$U?

41. (II) Si una casa común requiere en promedio 850 W de energía eléctrica, ¿qué cantidad mínima de combustible deuterio tendría que usarse durante un año para suministrar estas necesidades de electricidad? Suponga la reacción de la ecuación 42-9b.

42. (II) Si un neutrón lento golpea al $^{6}_{3}$Li puede formar $^{4}_{2}$He y otro isótopo. *a*) ¿Cuál es el segundo isótopo? (Éste es un método para generar tal isótopo.) *b*) ¿Cuánta energía se libera en el proceso?

43. (II) Suponga que un reactor de fusión puede operar con base en reacciones "d-d", ecuaciones 42-9a y b en iguales cantidades. Estime cuánta agua natural, para combustible, se necesitarían por hora para operar un reactor de 1250 MW, suponiendo una eficiencia del 33%.

44. (II) Demuestre que las energías que transportan el núcleo $^{4}_{2}$He y el neutrón para la reacción de la ecuación 42-9c son de alrededor de 3.5 MeV y 14 MeV, respectivamente. ¿Éstos son valores fijos, independientes de la temperatura del plasma?

45. (II) ¿Cuánta energía (J) está contenida en 1.00 kg de agua si su deuterio natural se usa en la reacción de fusión de la ecuación 42-9a? Compare con la energía que se obtiene al quemar 1.0 kg de gasolina, aproximadamente 5×10^7 J.

46. (III) *a*) Indique la razón entre la energía necesaria para la primera reacción del *ciclo del carbono* y la energía necesaria para una reacción deuterio-tritio (ejemplo 42-10). *b*) Si una reacción deuterio-tritio requiere $T \approx 3 \times 10^8$ K, estime la temperatura necesaria para la primera reacción del ciclo del carbono.

47. (III) Se cree que la salida de energía de las estrellas masivas se debe al *ciclo del carbono* (véase el texto). *a*) Demuestre que en este ciclo no se consume carbono y que el efecto neto es el mismo que para el ciclo protón-protón. *b*) ¿Cuál es la energía total liberada? *c*) Determine la salida de energía para cada reacción y decaimiento. *d*) ¿Por qué el ciclo de carbono podría requerir una temperatura más alta ($\approx 2 \times 10^7$ K) que el ciclo protón-protón ($\approx 1.5 \times 10^7$ K)?

42–6 Dosimetría

48. (I) ¿A cuántos rads de rayos X en términos de daño biológico equivalen 250 rads de una radiación de partículas α?

49. (I) Una dosis de 4.0 Sv de rayos γ en un corto periodo sería mortal para casi la mitad de las personas expuestas a ellos. ¿A cuántos grays equivale esto?

50. (I) ¿Cuánta energía se deposita en el cuerpo de un adulto de 65 kg expuesto a una dosis de 3.0 Gy?

51. (I) ¿Cuántos rads de neutrones lentos harán tanto daño biológico como 65 rads de neutrones rápidos?

52. (II) Un paciente canceroso se somete a terapia con radiación en la que protones con una energía de 1.2 MeV inciden sobre un tumor de 0.25 kg. *a*) Si el paciente recibe una dosis efectiva de 1.0 rem, ¿cuál es la dosis absorbida? *b*) ¿Cuántos protones absorbe el tumor? Suponga que QF ≈ 1.

53. (II) Una muestra de 0.035 μCi de $^{32}_{15}$P se inyecta en un animal para estudios de rastreo. Si un contador Geiger intercepta el 25% de las partículas β emitidas, ¿cuál será la tasa de conteo, suponiendo una eficiencia del 85%?

54. (II) Para producir un par de iones en aire se requieren aproximadamente 35 eV. Demuestre que esto es congruente con las dos definiciones del roentgen que se expusieron en el texto.

55. (II) Una fuente de 1.6 mCi de $^{32}_{15}$P (en $NaHPO_4$), un emisor β, se implanta en un tumor donde administra 36 Gy. La vida media del $^{32}_{15}$P es de 14.3 días y 1.0 mCi entrega más o menos 10 mGy/min. ¿Aproximadamente cuánto tiempo debe permanecer implantada la fuente?

56. (II) ¿Cuál es la masa de una fuente de 2.00 μCi de $^{14}_{6}$C?

57. (II) Enormes cantidades de $^{131}_{53}$I radiactivo se liberaron en el accidente de Chernobyl en 1986. Químicamente, el yodo se dirige a la tiroides humana. (Los médicos pueden usarlo para diagnosticar y tratar problemas tiroideos.) En una tiroides normal, la absorción del $^{131}_{53}$I puede causar daño en esta glándula. *a*) Escriba la reacción para el decaimiento del $^{131}_{53}$I. Su vida media es de 8.0 d; ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el $^{131}_{53}$I ingerido se reduzca al 7.0% del valor inicial? *c*) Absorber 1 mCi de $^{131}_{53}$I puede ser dañino; ¿qué masa de yodo es ésta?

58. (II) Suponga que un litro de leche por lo general tiene una actividad de 2000 pCi debido al $^{40}_{19}$K. Si una persona bebe dos vasos (0.5 L) diarios, estime la dosis efectiva total (en Sv y en rem) que recibe en un año. Como modelo, suponga que la leche permanece en el estómago 12 h y luego se libera. Suponga también que el cuerpo absorbe aproximadamente el 10% de los 1.5 MeV liberados por decaimiento. Compare su resultado con la dosis normal permitida de 100 mrem por año. Haga su estimación para *a*) un adulto de 60 kg y *b*) un bebé de 6 kg.

59. (II) El $^{57}_{27}$Co emite 122 keV de rayos γ. Si una persona de 58 kg ingiere 1.55 μCi de $^{57}_{27}$Co, ¿cuál sería la tasa de dosis (Gy/día) promediada sobre todo el cuerpo? Suponga que el 50% de la energía de los rayos γ se deposita en el cuerpo. [*Sugerencia:* Determine la tasa de energía que se deposita en el cuerpo y use la definición de gray.]

60. (II) La radiación ionizante se utiliza en los productos cárnicos para reducir los niveles de microorganismos patógenos. La carne refrigerada se limita a 4.5 kGy. Si 5 kg de carne se irradian con electrones de 1.2 MeV, ¿cuántos electrones se necesitarían para alcanzar el límite permitido?

61. (II) El gas radón, $^{222}_{86}$Ra, se considera un serio peligro para la salud (véase la explicación en el texto). Decae mediante emisión α. *a*) ¿Cuál es el núcleo hijo? *b*) ¿El núcleo hijo es estable o radiactivo? Si es esto último, ¿cómo decae y cuál es su vida media? (Véase la figura 41-12.) *c*) ¿El núcleo hijo también es un gas noble o es químicamente reactivo? *d*) Suponga que 1.6 ng de $^{222}_{86}$Ra se filtran en un sótano. ¿Cuál será su actividad? Si luego se sella el sótano, ¿cuál será la actividad 1 mes después?

*42–9 Formación de imágenes mediante tomografía

***62.** (II) *a*) Suponga que para formar una imagen de rayos X convencionales, el haz de rayos X consiste en rayos paralelos. ¿Cuál sería la amplificación de la imagen? *b*) Suponga, en vez de ello, que los rayos X provienen de una fuente puntual (como en la figura 42-21) la cual está 15 cm enfrente de un cuerpo humano que mide 25 cm de grosor, y que la película se presiona contra la espalda del sujeto. Determine y discuta el rango de amplificaciones que resulta.

*42–10 RMN

***63.** (I) Calcule la longitud de onda de los fotones que se necesitan para producir transiciones RMN en protones libres en un campo de 1.000 T. ¿En qué región del espectro se localiza esta longitud de onda?

***64.** (II) El carbono 13 tiene un momento magnético $\mu = 0.7023\ \mu_N$. ¿Qué campo magnético se necesitaría si se quiere detectar $^{13}_{6}$C en un espectrómetro RMN de protones que opera a 42.58 MHz? (¿Este gran campo necesita que un espectrómetro de $^{13}_{6}$C opere a una frecuencia más baja?

Problemas generales

65. J. Chadwick descubrió el neutrón al bombardear $^{9}_{4}$Be con un proyectil consistente en partículas alfa. *a*) Si uno de los productos de la reacción era el entonces desconocido neutrón, ¿cuál fue el otro producto? *b*) ¿Cuál es el valor Q de esta reacción?

66. Las temperaturas de fusión con frecuencia se mencionan en keV. Determine el factor de conversión de kelvin a keV empleando, como es común en este campo, $\overline{K} = kT$ sin el factor $\frac{3}{2}$.

67. Un medio de enriquecer el uranio es por difusión del gas UF_6. Calcule la razón de las rapideces de las moléculas de este gas que contiene $^{235}_{92}$U y $^{238}_{92}$U, de los cuales depende este proceso.

68. *a*) ¿Qué masa del $^{235}_{92}$U realmente se fisionó en la primera bomba atómica, cuya energía fue el equivalente de aproximadamente 20 kilotones de TNT (1 kilotón de TNT libera 5×10^{12} J)? *b*) ¿Cuál fue la masa real transformada a energía?

69. La radiación anual promedio del entorno en cierta ciudad es de 29 mrad de rayos X y rayos γ más 3.6 mrad de partículas que tienen un QF de 10. ¿Cuántos rem recibirá una persona por año, en promedio?

70. El deuterio constituye, en promedio, el 0.0115% del hidrógeno natural. Haga una estimación del deuterio total en los océanos de la Tierra y estime la energía total liberada si todo el deuterio se utilizara en reactores de fusión.

71. Una fuente blindada de rayos γ produce una dosis a una razón de 0.052 rad/h a una distancia de 1.0 m de una persona de complexión media. Si a los empleados se les permite una dosis máxima de 5.0 rem en 1 año, ¿qué tan cerca de la fuente pueden operar, suponiendo una semana laboral de 35 h? Suponga que la intensidad de la radiación disminuye como el cuadrado de la distancia. (En realidad disminuye más rápidamente que $1/r^2$ debido a la absorción en el aire, así que su respuesta dará un valor mejor que lo permisible.)

72. El gas radón, $^{222}_{86}$Rn, se forma mediante decaimiento α. *a*) Escriba la ecuación de decaimiento. *b*) Ignorando la energía cinética del núcleo hijo (muy masivo), estime la energía cinética de la partícula α producida. *c*) Estime la cantidad de movimiento de la partícula alfa y de los núcleos derivados. *d*) Estime la energía cinética del derivado, y demuestre que su aproximación en *b*) fue válida.

73. Considere un sistema de plantas de energía nuclear que producen 2400 MW. *a*) ¿Qué masa total de combustible $^{235}_{92}$U se requeriría para operar estas plantas durante 1 año, suponiendo que se liberan 200 MeV por fisión? *b*) Por lo general, el 6% de los núcleos del $^{235}_{92}$U que se fisionan producen $^{90}_{38}$Sr, un emisor β^- con una vida media de 29 años. ¿Cuál es la radiactividad total del $^{90}_{38}$Sr, en curies, que se produce en 1 año? (Desprecie el hecho de que parte de este elemento decae durante el periodo de 1 año.)

74. En la reacción neta, ecuación 42-8, para el ciclo protón-protón en el Sol, los neutrinos escapan del Sol con energía de aproximadamente 0.5 meV. La energía restante, 26.2 MeV, está disponible dentro del Sol. Use este valor para calcular el "calor de combustión" por kilogramo de combustible hidrógeno y compárelo con el calor de combustión del carbón, aproximadamente 3×10^7 J/kg.

75. La energía llega a la Tierra desde el Sol a una tasa de aproximadamente 1300 W/m^2. Calcule *a*) la salida de potencia total del Sol y *b*) el número de protones consumidos por segundo en la reacción de la ecuación 42-8, suponiendo que ésta es la fuente de toda la energía del Sol. *c*) Si se supone que la masa del Sol, de 2.0×10^{30} kg, originalmente estaba constituida en su totalidad por protones y que toda podría participar en reacciones nucleares en el núcleo del Sol, ¿cuánto tiempo esperaría usted que el Sol "brille" a su tasa actual? Véase el problema 74.

76. Estime cuántos neutrinos solares pasan a través del techo de una habitación de 180 m^2, localizada en los 38° de latitud, durante una hora alrededor de medianoche en una noche a mediados de verano. [*Sugerencia:* Véanse los problemas 74 y 75.]

77. Estime cuánta energía total se liberaría mediante fisión si 2.0 kg de uranio se enriquecieran al 5% del isótopo $^{235}_{92}$U.

78. Algunas estrellas, en una etapa final de evolución, pueden comenzar a fusionar dos núcleos de $^{12}_{6}$C en un núcleo de $^{24}_{12}$Mg. *a*) ¿Cuánta energía se liberaría en tal reacción? *b*) ¿Qué energía cinética debe tener cada uno de dos núcleos de carbono cuando están separados, si luego pueden aproximarse entre sí hasta una distancia de 6.0 fm, de centro a centro? *c*) ¿Aproximadamente qué temperatura requeriría esto?

79. El cuerpo de un adulto promedio contiene alrededor de 0.10 μCi de $^{40}_{19}$K, que proviene de los alimentos. *a*) ¿Cuántos decaimientos ocurren por segundo? *b*) El decaimiento del potasio produce partículas beta con energía de alrededor de 1.4 MeV. Estime la dosis por año en sieverts para un adulto de 55 kg. ¿Es ésta una fracción significativa de la tasa del entorno de 3.6 mSv/año?

80. Cuando ocurrió el accidente del reactor nuclear en Chernobyl en 1986, se liberaron a la atmósfera 2.0×10^7 Ci. Suponiendo que esta radiación se distribuyó de manera uniforme sobre la superficie de la Tierra, ¿cuál fue la actividad por metro cuadrado? (La actividad real no fue uniforme; incluso dentro de Europa hubo áreas que recibieron más radiactividad que otras por medio de la lluvia.)

81. Una estrella con gran abundancia de helio puede quemar helio en la reacción $^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C}$. ¿Cuál es el valor Q para esta reacción?

82. Un empleado de 65 kg usa una fuente de 1.2 μCi $^{137}_{55}$Cs durante 1.6 horas. El $^{137}_{55}$Cs radiactivo experimenta decaimiento β^- con una vida media de 30 años. La energía promedio de los rayos beta emitidos es de alrededor de 190 keV por decaimiento. El decaimiento β va seguido rápidamente de un rayo γ con una energía de 660 keV. Suponiendo que la persona absorbe *toda* la energía emitida, ¿qué dosis efectiva (en rems) recibe?

83. En 1986 se liberó una gran cantidad de $^{90}_{38}$Sr durante el accidente del reactor nuclear en Chernobyl. El $^{90}_{38}$Sr entra al cuerpo a través de la cadena alimenticia. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que decaiga el 85% del $^{90}_{38}$Sr liberado durante el accidente? Véase el Apéndice F.

84. Tres fuentes radiactivas tienen la misma actividad, 35 mCi. La fuente A emite rayos γ de 1.0 MeV, la fuente B emite rayos γ de 2.0 MeV, y la fuente C emite alfas de 2.0 MeV. ¿Cuál es el peligro relativo que implican estas fuentes?

85. Un paciente de 60 kg se someterá a una prueba médica que implica la ingestión de $^{99m}_{43}$Tc (sección 42-8) que decae mediante emisión gamma de 140 keV. La vida media de este decaimiento es de 6 horas. Suponiendo que aproximadamente la mitad de los fotones gamma salen del cuerpo sin interactuar con nada, ¿cuál debe ser la actividad inicial de la muestra de Tc si la dosis de todo el cuerpo no puede superar 50 mrem? Haga la aproximación de que la eliminación biológica del Tc se puede ignorar.

86. Hace siglos, la pintura por lo general contenía una cantidad diferente de cobalto $\left(^{59}_{27}\text{Co}\right)$ que la pintura actual. Se sospecha que cierta pintura "antigua" puede ser una nueva falsificación, y un examinador decide usar **análisis de activación de neutrones** para probar esta hipótesis. Después de colocar la pintura en un flujo de neutrones de 5.0×10^{12} neutrones/cm^2/s durante 5.0 minutos, se observa una actividad de 55 decaimientos/s de $^{60}_{27}$Co $\left(T_{\frac{1}{2}} = 5.27 \text{ años}\right)$. Suponiendo que el $^{59}_{27}$Co tiene una sección eficaz de 19 bn, ¿cuánto cobalto (en gramos) contiene la pintura?

87. Demuestre, empleando las leyes de conservación de la energía y la cantidad de movimiento que, para una reacción nuclear requiere energía, la mínima energía cinética de la partícula que bombardea (la **energía de umbral**) es igual $[-Qm_{\text{pr}}/(m_{\text{pr}} - m_{\text{b}})]$, donde $-Q$ es la energía requerida (diferencia en masa total entre productos y reactivos), m_{b} es la masa de la partícula que bombardea y m_{pr} es la masa total de los productos. Suponga que el núcleo blanco está en reposo antes de que tenga lugar una interacción y que la rapidez es no relativista.

88. Los primeros experimentos de dispersión realizados alrededor de 1910 en el laboratorio de Ernest Rutherford en Inglaterra produjeron la primera evidencia de que un átomo consiste en un núcleo pesado rodeado por electrones. En uno de tales experimentos, partículas α incidían sobre un blanco de hoja de oro de 4.0×10^{-5} cm de grosor en el que había 5.9×10^{28} átomos de oro por metro cúbico. Aunque la mayoría de las partículas α pasaban en línea recta a través de la hoja o se dispersaban en ángulos pequeños, aproximadamente 1.6×10^{-3} por ciento se dispersaba en ángulos mayores que 90°; esto es, en sentido hacia atrás. *a*) Calcule la sección eficaz, en barns, para dispersión hacia atrás. *b*) Rutherford concluyó que tal dispersión hacia atrás podría ocurrir sólo si un átomo consistía en un núcleo pequeño, masivo y con carga positiva, con electrones en órbita a cierta distancia. Suponiendo que la dispersión hacia atrás ocurre para colisiones casi directas (es decir, $\sigma \approx$ área del núcleo), estime el diámetro de un núcleo de oro.

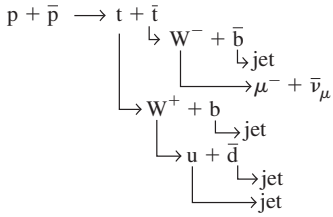
Respuestas a los ejercicios

A: $^{138}_{56}$Ba.
B: 2×10^{17}.
C: *e*).
D: *b*).
E: *a*).

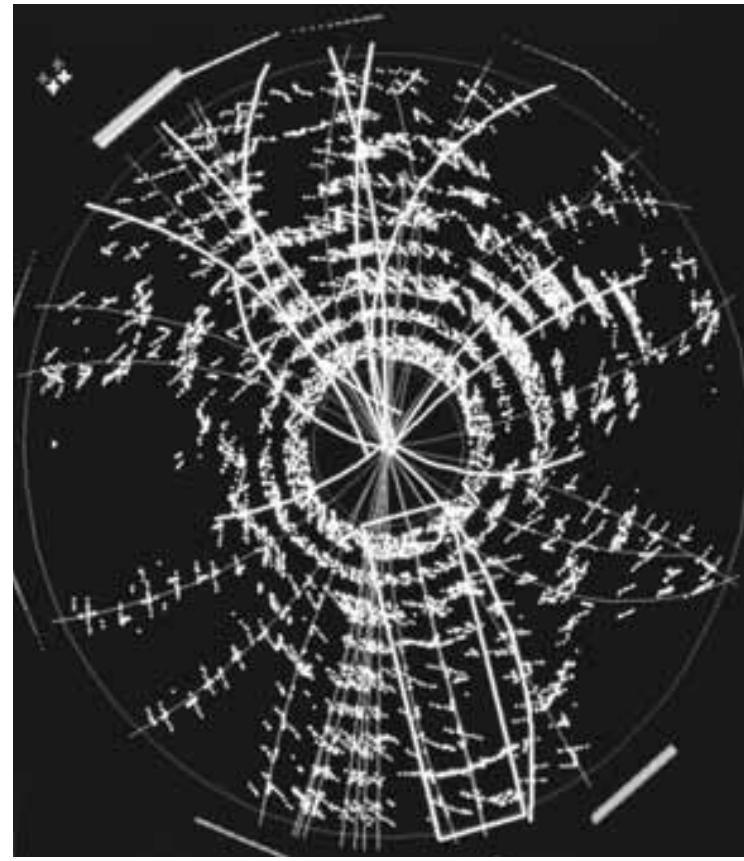
Esta reconstrucción generada por computadora de una colisión protón-antiprotón en el Fermilab (figura 43-3) ocurrió a una energía combinada de casi 2 TeV. Es uno de los hechos que dieron evidencia del quark cima (1995). La cámara de arrastre por alambre (sección 41-11) está en un campo magnético, y el radio de curvatura de las trayectorias de la partícula cargada es una medida de la cantidad de movimiento de cada partícula (sección 27-4).

Los puntos blancos representan las señales que se ven en los alambres eléctricos de la cámara de arrastre. Las líneas de color son las trayectorias de las partículas. (Véase el pliego a color al final del libro).

El quark cima o verdad (t) tiene una vida muy breve ($\approx 10^{-23}$ s) para detectarse directamente, así que se buscan sus posibles productos de decaimiento. Los análisis indican la siguiente interacción y los posteriores decaimientos:



Las trayectorias en la fotografía incluyen jets (chorros de partículas que se desplazan aproximadamente en la misma dirección) y un muón (μ^-) cuya trayectoria es la rosa que se encierra mediante un rectángulo amarillo para destacarla (véase el pliego a color al final del libro). Después de leer este capítulo, intente dar el nombre de cada símbolo de los que aparecen arriba y comente acerca de si se cumplen todas las leyes de conservación.



CAPÍTULO

43

Partículas elementales

CONTENIDO

43–1 Partículas de alta energía y aceleradores
43–2 Comienzos de la física de partículas elementales: Intercambio de partículas
43–3 Partículas y antipartículas
43–4 Interacciones de partículas y leyes de conservación
43–5 Neutrinos: Resultados recientes
43–6 Clasificación de las partículas
43–7 Estabilidad de las partículas y resonancias
43–8 ¿Partículas extrañas? ¿Encanto? Hacia un nuevo modelo
43–9 Quarks
43–10 El "modelo estándar": Cromodinámica cuántica (QCD) y la teoría electrodébil
43–11 Teorías de la gran unificación
43–12 Cuerdas y supersimetría

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

1. Los electrones todavía se consideran partículas fundamentales (en el grupo llamado leptones), pero los protones y neutrones ya no se consideran fundamentales; tienen subestructura y están constituidos por
   - ***a)*** piones.
   - ***b)*** leptones.
   - ***c)*** quarks.
   - ***d)*** bosones.
   - ***e)*** fotones.
2. Por consiguiente, las partículas elementales como se conciben en la actualidad son
   - ***a)*** átomos y electrones.
   - ***b)*** protones, neutrones y electrones.
   - ***c)*** protones, neutrones, electrones y fotones.
   - ***d)*** quarks, leptones y bosones de norma.
   - ***e)*** hadrones, leptones y bosones de norma.

En los dos capítulos finales de este libro se estudian dos de las áreas más interesantes de la física contemporánea: las partículas elementales en este capítulo, y cosmología y astrofísica en el capítulo 44. Éstos son temas a la vanguardia del conocimiento: las partículas elementales se refieren a los objetos más pequeños en el Universo; la cosmología trata los aspectos más grandes (y más antiguos) del Universo.

En este penúltimo capítulo se estudia la física de *partículas elementales*, que representa el esfuerzo de la humanidad por comprender los bloques constructores básicos de toda la materia y las fuerzas fundamentales que rigen sus interacciones. Hacia mediados de la década de 1930, se reconoció que todos los átomos se pueden considerar como constituidos por neutrones, protones y electrones. Ya no se consideraba que los constituyentes básicos del Universo eran los átomos, sino el protón, el neutrón y el electrón. Además de estas tres "partículas elementales", también se conocían algunas otras: el positrón (un electrón positivo), el neutrino y la partícula γ (o fotón), para dar un total de seis partículas elementales.

En las décadas de 1950 y 1960 se descubrieron muchos nuevos tipos de partículas similares al neutrón y el protón, así como muchas partículas "de tamaño medio" llamadas *mesones*, cuyas masas por lo común eran menores que las masas de nucleón, pero mayores que la masa del electrón. (Otros mesones, que se encontraron más tarde, tienen masas más grandes que los nucleones). Los físicos creían que todas estas partículas no podían ser fundamentales y que debían estar formadas por constituyentes todavía más pequeños (lo que más tarde se confirmó experimentalmente), a las que dieron el nombre de *quarks*.

En la actualidad se considera que los constituyentes básicos de la materia son los **quarks** (éstos forman protones y neutrones, así como mesones) y los **leptones** (una clase que incluye electrones, positrones y neutrinos). Además, existen "portadores de fuerza", incluidos los **gluones**, los fotones y otros "bosones de norma". La teoría que describe la visión actual se llama **modelo estándar**. El tema de este capítulo es cómo se llegó a la actual comprensión de las partículas elementales.

Uno de los más interesantes avances de los últimos años es una síntesis que surge del estudio de las partículas elementales y la astrofísica (capítulo 44). De hecho, observaciones recientes en astrofísica condujeron a la conclusión de que la mayor parte del contenido masa-energía del Universo no es materia ordinaria, sino dos formas misteriosas e invisibles conocidas como "materia oscura" y "energía oscura", que no se pueden explicar mediante el modelo estándar en su forma actual.

De hecho, ahora se tiene conciencia de que el modelo estándar no es suficiente. Existen problemas e importantes preguntas todavía sin respuesta, y en este capítulo se mencionarán algunos de ellos y cómo se espera responderlos.

43–1 Partículas de alta energía y aceleradores

En los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, se descubrió que si la partícula incidente en una reacción nuclear tenía suficiente energía, se podían producir nuevos tipos de partículas. Los primeros experimentos usaron **rayos cósmicos**, partículas que inciden sobre la Tierra desde el espacio. En el laboratorio, se construyeron varios tipos de aceleradores de partículas para acelerar protones o electrones a altas energías, aunque también es posible acelerar iones pesados. Estos **aceleradores de alta energía** se usan para sondear con mayor profundidad en la materia, para producir y estudiar nuevas partículas y para obtener información acerca de las fuerzas y constituyentes básicos de la naturaleza. Puesto que las partículas proyectiles tienen alta energía, este campo a veces se llama **física de alta energía**.

Longitud de onda y resolución

Las partículas aceleradas a alta energía pueden sondear el interior de los núcleos y nucleones u otras partículas con las que choquen. Un importante factor es que los proyectiles de rápido movimiento pueden revelar más detalles. La longitud de onda de las partículas proyectiles está dada por la fórmula de longitud de onda de De Broglie (ecuación 37-7),

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad \textbf{(43–1)}$$

donde se muestra que cuanto mayor sea la cantidad de movimiento p de la partícula proyectil, más corta es su longitud de onda. Como se estudió en el capítulo 35 acerca de la difracción, la resolución de los detalles en las imágenes está limitada por la longitud de onda: cuanto más corta sea la longitud de onda, más fino será el detalle que se puede obtener. Ésta es una razón por la que en años recientes se construyeron aceleradores de partículas con energías cada vez más altas: para sondear todavía con mayor profundidad en la estructura de la materia, a dimensiones cada vez menores.

EJEMPLO 43–1 **Alta resolución con electrones.** ¿Cuál es la longitud de onda y, en consecuencia, la resolución esperada para electrones de 1.3 GeV?

PLANTEAMIENTO Puesto que 1.3 GeV es mucho mayor que la masa del electrón, se debe lidiar con valores de rapidez relativista. La cantidad de movimiento (o momento lineal) de los electrones se encuentra a partir de la ecuación 36-13, y la longitud de onda es $\lambda = h/p$.

SOLUCIÓN Cada electrón tiene $K = 1.3$ GeV $= 1300$ MeV, que es aproximadamente 2500 veces la energía en reposo del electrón ($mc^2 = 0.51$ MeV). Por ende, se puede ignorar el término $(mc^2)^2$ en la ecuación 36-13, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, y se despeja p:

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2}} \approx \sqrt{\frac{E^2}{c^2}} = \frac{E}{c}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda de De Broglie es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E},$$

donde $E = 1.3$ GeV. En consecuencia,

$$\lambda = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{(1.3 \times 10^{9}\,\text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} = 0.96 \times 10^{-15}\,\text{m},$$

o 0.96 fm. Esta resolución de aproximadamente 1 fm está en el orden del tamaño de los núcleos (véase la ecuación 41-1).

NOTA La máxima resolución posible de este haz de electrones es mucho mayor que para un haz de luz en un microscopio óptico ($\lambda \approx 500$ nm).

EJERCICIO A ¿Cuál es la longitud de onda de un protón con $K = 1.00$ TeV?

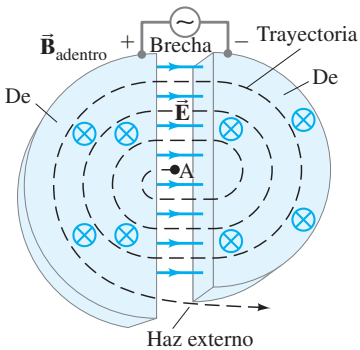
FIGURA 43–1 Ernest O. Lawrence, alrededor de 1930, quien sostiene el primer ciclotrón (se ve la cámara de vacío que lo contiene).

Otra importante razón para construir aceleradores de alta energía es que a altas energías se pueden producir nuevas partículas con mayor masa, al transformar la energía cinética de las partículas que chocan en partículas masivas mediante $E = mc^2$, como se estudiará dentro de poco. Ahora se describirán los aceleradores de partículas.

Ciclotrón

El ciclotrón lo desarrolló en 1930 E. O. Lawrence (1901-1958; figura 43-1) en la Universidad de California, Berkeley. Usó un campo magnético para mantener iones cargados, por lo general protones, en trayectorias casi circulares. Aunque los físicos de partículas ya no usan ciclotrones simples, se usan en medicina para tratar cáncer, y sus principios operativos son útiles para entender los aceleradores modernos. Los protones se mueven en un vacío dentro de dos cavidades con forma de D, como se muestra en la figura 43-2. Cada vez que pasan hacia la brecha entre las "des", un voltaje las acelera (la fuerza eléctrica), lo que aumenta su rapidez y el radio de curvatura de su trayectoria en el campo magnético. Después de muchas revoluciones, los protones adquieren alta energía cinética y llegan al borde exterior del ciclotrón, donde inciden sobre un blanco. Los protones aceleran sólo cuando están en la brecha *entre* las "des", y el voltaje debe ser alterno. Cuando los protones se mueven hacia la derecha a través de la brecha en la figura 43-2, la "de" derecha debe ser eléctricamente negativa y la izquierda, positiva. Medio ciclo después, los protones se mueven hacia la izquierda, de manera que la "de" izquierda debe ser negativa para acelerarlas.

FIGURA 43–2 Diagrama de un ciclotrón. El campo magnético, que se aplica mediante un gran electroimán, apunta hacia la página. Los protones parten de A, la fuente de iones. Las líneas de campo eléctrico color naranja que se muestran son para el campo eléctrico alterno en la brecha en cierto momento.



La frecuencia, f, del voltaje aplicado debe ser igual a la de los protones que circulan. Cuando iones con carga q circulan *dentro* de las "des" huecas, la fuerza neta F sobre cada uno se debe al campo magnético B, de manera que $F = qvB$, donde v es la rapidez del ion en un momento dado (ecuación 27-5). La fuerza magnética es perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{v}}$ como a $\vec{\mathbf{B}}$ y hace que los iones se muevan en círculos; por lo tanto, la aceleración dentro de las "des" es centrípeta e igual a v^2/r, donde r es el radio de la trayectoria del ion en un momento dado.

Se usa la segunda ley de Newton, $F = ma$, y se encuentra que

$$F = ma$$
$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

cuando los protones están dentro de las "des" (no de la brecha), de manera que

$$v = \frac{qBr}{m}.$$

El tiempo que se requiere para una revolución completa es el periodo T y es igual a

$$T = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \frac{2\pi r}{qBr/m} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Por lo tanto, la frecuencia de revolución f es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}. \qquad \textbf{(43–2)}$$

Esto se conoce como la **frecuencia del ciclotrón**.

EJEMPLO 43–2 **Ciclotrón.** Un pequeño ciclotrón, con radio máximo $R = 0.25$ m, acelera protones en un campo magnético de 1.7 T. Calcule *a*) la frecuencia necesaria para el voltaje alterno aplicado y *b*) la energía cinética de los protones cuando salen del ciclotrón.

PLANTEAMIENTO La frecuencia de los protones que giran dentro de las "des" (ecuación 43-2) debe ser igual a la frecuencia del voltaje aplicado a través de la brecha si los protones van a aumentar su rapidez.

SOLUCIÓN *a*) De acuerdo con la ecuación 43-2,

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$
$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(1.7\,\text{T})}{(6.28)(1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg})} = 2.6 \times 10^7\,\text{Hz} = 26\,\text{MHz},$$

que está en la región de ondas de radio del espectro EM (figura 31-12).

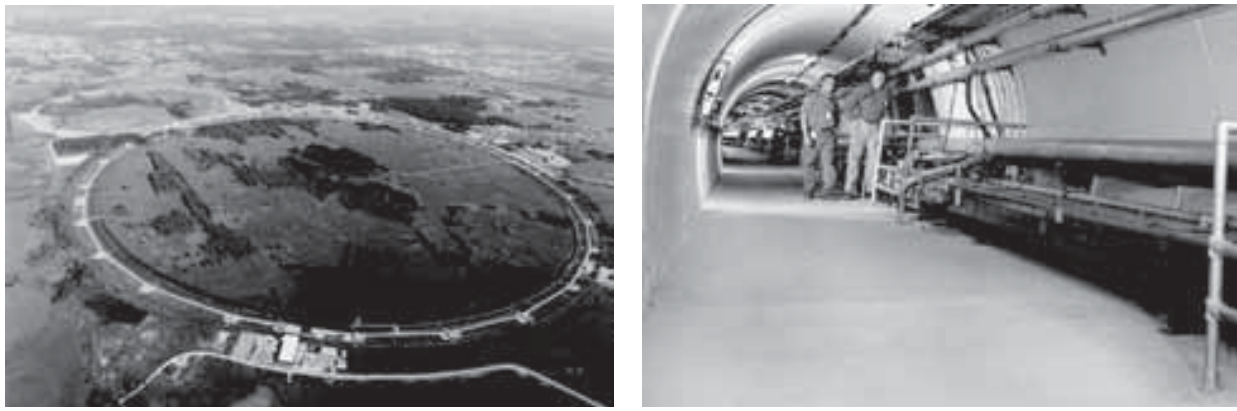
b) Los protones salen del ciclotrón en $r = R = 0.25$ m. A partir de $qvB = mv^2/r$ (véase líneas arriba), se tiene $v = qBr/m$, de manera que su energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{q^2B^2R^2}{m^2} = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$$
$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})^2(1.7\,\text{T})^2(0.25\,\text{m})^2}{(2)(1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg})} = 1.4 \times 10^{-12}\,\text{J} = 8.7\,\text{MeV}.$$

La energía cinética es mucho menor que la energía en reposo del protón (938 MeV), así que no se necesita relatividad.

NOTA La magnitud del voltaje aplicado a las "des" no aparece en la fórmula para K, y por lo tanto no afecta la energía final. Pero cuanto mayor sea este voltaje, menos revoluciones se requieren para llevar los protones a la energía total.

Un aspecto importante del ciclotrón es que la frecuencia del voltaje aplicado, como se presenta en la ecuación 43-2, no depende del radio r de la trayectoria de la partícula. Por ende, la frecuencia no tiene que cambiar conforme los protones o iones partan desde la fuente y se aceleren a trayectorias con radios cada vez mayores. Pero esto sólo es cierto a energías no relativistas. A rapideces mayores, la cantidad de movimiento (ecuación 36-8) es $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, así que m en la ecuación 43-2 se tiene que sustituir con γm y la frecuencia del ciclotrón f (ecuación 43-2) depende de la rapidez v. Para hacer que las partículas se mantengan en sincronía, máquinas llamadas **sincrociclotrones** reducen su frecuencia en tiempo para que corresponda con la ecuación 43-2 conforme m aumenta, así como un paquete de partículas cargadas aumenta en rapidez a órbitas más grandes.



a) *b*)

FIGURA 43–3 *a*) Vista aérea del Fermilab, cerca de Chicago, en Illinois; el acelerador principal es un anillo circular de 1.0 km de radio. *b*) Interior del túnel del acelerador principal en el Fermilab, que muestra el anillo (en la parte inferior a lo largo del túnel) de imanes superconductores para el Tevatrón de 1 TeV.

Sincrotrón

Otra forma de acelerar partículas relativistas es aumentar el campo magnético B en el tiempo para mantener f (ecuación 43-2) constante conforme las partículas aceleran. Tales dispositivos se llaman **sincrotrones**; las partículas se mueven en un círculo de radio fijo, que puede ser muy grande. En el Centro Europeo para Investigación Nuclear (CERN) en Ginebra, Suiza, el nuevo (2008) Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por las siglas de *Large Hadron Collider*) tiene 4.3 km de radio y acelera protones a 7 TeV. El acelerador *Tevatrón* en el Fermilab (el Laboratorio Acelerador Nacional Fermi) en Batavia, Illinois, tiene un radio de 1.0 km.[†] El Tevatrón usa imanes superconductores para acelerar los protones a aproximadamente 1000 GeV = 1 TeV (de ahí su nombre); 1 TeV = 10^{12} eV. Estos grandes sincrotrones usan un estrecho anillo de imanes (véase la figura 43-3) y cada imán se coloca en el mismo radio desde el centro del círculo. Los imanes se interrumpen mediante brechas donde alto voltaje acelera las partículas. Otra forma de describir la aceleración es decir que las partículas "hacen *surfing*" sobre una onda electromagnética viajera dentro de cavidades de radiofrecuencia (RF). (Primero se imparte a las partículas considerable energía en un acelerador más pequeño, "el inyector", antes de inyectarse en el gran anillo del sincrotrón grande).

Un problema de cualquier acelerador es que acelerar cargas eléctricas irradia energía electromagnética (véase el capítulo 31). Puesto que los iones o electrones se aceleran en un acelerador, es posible esperar que se pierda considerable energía mediante radiación. El efecto aumenta con la energía y es especialmente importante en máquinas circulares donde está presente aceleración centrípeta, como en los sincrotrones, y por lo tanto se llama **radiación de sincrotrón**. Sin embargo, la radiación de sincrotrón es útil. En ocasiones se necesitan intensos haces de fotones (rayos γ), y por lo general se obtienen a partir de un sincrotrón de electrones.

EJERCICIO B ¿En qué factor el diámetro del Tevatrón del Fermilab (figura 43-3) es mayor que el ciclotrón original de Lawrence? (Estime a partir de la figura 43-1.)

[†]Robert Wilson, quien ayudó a diseñar el Tevatrón y fundó el campo de la terapia con protones (sección 42-7), expresó su visión de los aceleradores y la seguridad nacional en este diálogo con el senador John Pastore durante su comparecencia frente a un comité del Congreso de Estados Unidos en 1969:

> Pastore: ¿Existe algún asunto vinculado con las expectativas en torno a este acelerador [el Tevatrón] que en alguna forma involucre la seguridad nacional?
>
> Robert Wilson: No, señor. No lo creo.
>
> Pastore: ¿Nada en absoluto?
>
> Wilson: Nada en absoluto.
>
> Pastore: ¿No tiene valor en ese sentido?
>
> Wilson: Sólo tiene que ver con el respeto que cada uno debe al otro, con la dignidad del hombre, el amor a la cultura… ¿Tiene que ver con que seamos buenos pintores, buenos escultores, grandes poetas? Me refiero a todas las cosas que realmente veneramos en nuestro país y por lo que somos patriotas… no tiene nada que ver directamente con defender a nuestro país, excepto contribuir a que valga la pena defenderlo.

Aceleradores lineales

En un **acelerador lineal** (linac) los electrones o iones se aceleran a lo largo de una trayectoria rectilínea, figura 43-4, que pasan a través de una serie de conductores tubulares. El voltaje que se aplica a los tubos es alterno, de manera que cuando los electrones llegan a una brecha (por ejemplo), el tubo frente a ellos es positivo y el que acaban de dejar es negativo. A baja rapidez, las partículas cubren menos distancia en la misma cantidad de tiempo, así que los tubos son más cortos al principio. Los electrones, con su masa pequeña, se acercan a la rapidez de la luz, $v \approx c$, y los tubos casi tienen igual longitud. Los aceleradores lineales son particularmente importantes para acelerar electrones y evitar pérdidas de energía debidas a la radiación de sincrotrón. El acelerador lineal de electrones más grande estuvo en la Universidad de Stanford (Stanford Linear Accelerator Center, o SLAC), medía 3 km de largo y aceleraba electrones a 50 GeV. Ahora está fuera de servicio. Los linacs que aceleran protones se utilizan como inyectores en máquinas circulares para impartir energía cinética inicial. Muchos hospitales tienen linacs de electrones de 10 MeV que inciden sobre una hoja metálica para producir fotones de rayos γ con la finalidad de irradiar tumores.

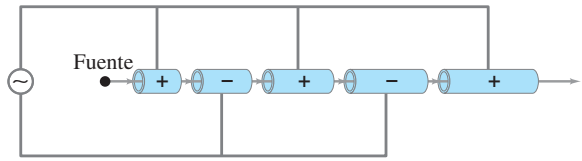


FIGURA 43–4 Diagrama de un acelerador lineal simple.

Haces colisionantes

Los experimentos de física de alta energía alguna vez se realizaron al apuntar un haz de partículas desde un acelerador hacia un blanco fijo. Pero, para obtener la máxima energía de colisión posible de un acelerador dado, ahora dos haces de partículas se aceleran a muy alta energía y se dirigen de manera que choquen de frente. Una forma de lograr tales **haces colisionantes** con un solo acelerador es mediante el uso de **anillos de almacenamiento**, donde haces que circulan en sentidos opuestos se pueden llevar repetidamente a que choquen entre sí en puntos particulares. Por ejemplo, en los experimentos que proporcionaron fuerte evidencia para el quark cima (fotografía de apertura del capítulo y sección 43-9), el Tevatrón del Fermilab aceleró tanto protones como antiprotones a 900 GeV, de manera que la energía combinada de las colisiones frontales era de 1.8 TeV.

Actualmente, el mayor colisionador es el Gran Colisionador de Hadrones (LCH) en el CERN, con una circunferencia de 26.7 km (figura 43-5). Los dos haces colisionantes portarán, cada uno, protones de 7 TeV para dar una energía total de interacción de 14 TeV.

FIGURA 43–5 El círculo grande representa la posición del túnel, aproximadamente 100 m bajo el suelo en el CERN (cerca de Ginebra) en la frontera franco-suiza, que alberga al LHC. El círculo más pequeño indica la posición del *Super Proton Synchrotron* (supersincrotrón de protones) que se usará para acelerar protones antes de inyectarlos en el LHC.

FIGURA 43–6 ATLAS, uno de muchos grandes detectores complejos en el LHC, se observa aquí durante su construcción. Se espera que el LHC brinde evidencia sobre el bosón de Higgs (para ayudar a comprender el modelo estándar) y tal vez para encontrar partículas supersimétricas que son candidatas para la desconocida materia oscura que constituye gran parte de la masa-energía del Universo. Más adelante, en este capítulo, se tocarán estos temas.

La figura 43-6 muestra parte de uno de los detectores (ATLAS) mientras se construía en el LHC. Los detectores dentro del ATLAS incluyen detectores semiconductores de silicio con enorme número de pixeles que se usan para rastrear trayectorias de partículas, para encontrar su punto de interacción y medir su radio de curvatura en un campo magnético y, de esta forma, determinar su cantidad de movimiento (sección 27-4). Su energía se determina en "calorímetros" que utilizan centelleadores (materiales que exhiben la propiedad de luminiscencia cuando se excitan por radiación ionizante) plásticos, líquidos o de cristal compuesto con metal denso (sección 41-11).

Aún en etapa de planeación se encuentra el Colisionador lineal internacional (International Linear Collider, ILC) que tendría haces colisionantes de e^- y e^+ de aproximadamente 0.3 a 1 TeV, con detectores semiconductores que usan CMOS (sección 33-5) con transistores incrustados para permitir una rápida lectura.

EJEMPLO 43–3 **Protones a rapideces relativistas.** Determine la energía que se requiere para acelerar un protón en un acelerador de alta energía *a*) desde el reposo hasta $v = 0.900c$, y *b*) desde $v = 0.900c$ hasta $v = 0.999c$. *c*) ¿Cuál es la energía cinética que alcanza el protón en cada caso?

PLANTEAMIENTO Use el principio trabajo-energía, que todavía es válido en relatividad, como se mencionó en la sección 36-11: $W = \Delta K$.

SOLUCIÓN La energía cinética de un protón de masa m está dada por la ecuación 36-10,

$$K = (\gamma - 1)mc^2,$$

donde el factor relativista γ es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

El teorema trabajo-energía se convierte en

$$W = \Delta K = (\Delta\gamma)mc^2$$

ya que m y c son constantes.

a) Para $v = 0$, $\gamma = 1$; y para $v = 0.900c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.900)^2}} = 2.29.$$

Para un protón, $mc^2 = 938$ MeV, así que el trabajo (o energía) que se necesita para acelerarlo desde el reposo hasta $v = 0.900c$ es

$$W = \Delta K = (\Delta\gamma)mc^2$$
$$= (2.29 - 1.00)(938\,\text{MeV}) = 1.21\,\text{GeV}.$$

b) Para $v = 0.999c$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.999)^2}} = 22.4.$$

De manera que el trabajo necesario para acelerar un protón desde $0.900c$ hasta $0.999c$ es

$$W = \Delta K = (\Delta\gamma)mc^2$$
$$= (22.4 - 2.29)(938\,\text{MeV}) = 18.9\,\text{GeV},$$

que es 15 veces mayor.

c) La energía cinética que alcanza el protón en *a*) es justo igual al trabajo realizado sobre él, $K = 1.21$ GeV. La energía cinética final del protón en *b*), al desplazarse a $v = 0.999c$, es

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = (21.4)(938\,\text{MeV}) = 20.1\,\text{GeV},$$

lo cual tiene sentido pues, desde el reposo, sobre él se efectuó trabajo $W = 1.21$ GeV $+ 18.9$ GeV $= 20.1$ GeV.

EJEMPLO 43–4 **Rapidez de un protón de 1.0 TeV.** ¿Cuál es la rapidez de un protón de 1.0 TeV que se produce en el Fermilab?

PLANTEAMIENTO La energía cinética $K = 1.0\,\text{TeV} = 1.0 \times 10^{12}\,\text{eV}$ es mucho mayor que la masa del protón, 0.938×10^9 eV, así que se deben efectuar cálculos relativistas. En particular, empleamos la ecuación 39-10:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2.$$

SOLUCIÓN En comparación con $K = 1.0 \times 10^{12}$ eV, la energía en reposo ($\approx 10^{-3}$ TeV) se puede despreciar, así que escribimos

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Luego,

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2}{K}\right)^2$$

o

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{K}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{938 \times 10^6\,\text{eV}}{1.0 \times 10^{12}\,\text{eV}}\right)^2}$$

$$v = 0.9999996\,c.$$

El protón viaja con una rapidez extremadamente cercana a c, la rapidez de la luz.

43–2 Comienzos de la física de partículas elementales: Intercambio de partículas

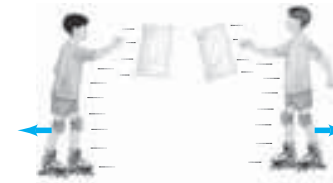
El modelo aceptado en la actualidad para partículas elementales considera a los *quarks* y a los *leptones* como los constituyentes básicos de la materia ordinaria. Para entender la concepción actual de las partículas elementales, es necesario comprender las ideas que condujeron a su formulación.

Puede decirse que la física de partículas elementales comenzó en 1935, cuando el físico japonés Hideki Yukawa (1907-1981) predijo la existencia de una nueva partícula que en alguna forma mediaría la fuerza nuclear fuerte. Para comprender la idea de Yukawa, considere primero la fuerza electromagnética. Cuando estudiamos la electricidad, vimos que la fuerza eléctrica actúa a través de una distancia, sin que exista contacto. Para percibir mejor cómo una fuerza puede actuar a través de una distancia, se usó la idea de **campo**. La fuerza que una partícula cargada ejerce sobre una segunda se debe al campo eléctrico que establece la primera. De igual modo, se puede decir que el campo magnético es portador de la fuerza magnética. Más tarde (capítulo 31), se vio que los campos electromagnéticos (EM) pueden viajar a través del espacio como ondas. Finalmente, en el capítulo 37, vimos que la radiación electromagnética (luz) se puede considerar como una onda o como una colección de partículas llamadas *fotones*. En virtud de esta dualidad onda-partícula, es posible imaginar que la fuerza electromagnética entre partículas cargadas se debe a

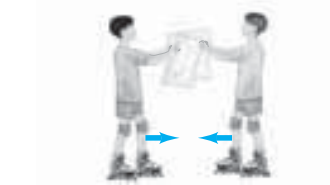
1) el campo EM que crea una partícula cargada y que la otra "siente", o a
2) un intercambio de fotones (partículas γ) entre ellas.

Aquí nos enfocaremos en el caso 2. En la figura 43-7 se sugiere una analogía que ayudará a comprender cómo un intercambio de partículas podría dar lugar a una fuerza. En el inciso *a*), dos niños comienzan a lanzar pesadas almohadas uno hacia el otro; cada lanzamiento y cada atrapada da por resultado que cada niño se mueva hacia atrás por el impulso. Éste es el equivalente de una fuerza de repulsión. Por otra parte, si los dos niños intercambian almohadas tirando de la almohada en la mano del otro, se acercarán uno al otro, como cuando actúa una fuerza de atracción.

FIGURA 43–7 Fuerzas equivalentes al intercambio de partículas. *a*) Fuerza de repulsión (niños en patines se lanzan almohadas mutuamente). *b*) Fuerza de atracción (niños que tiran de la almohada en la mano del otro).



a) Fuerza de repulsión (niños que se lanzan almohadas)



b) Fuerza de atracción (niños que tiran de la almohada en la mano del otro)

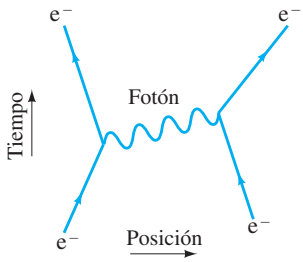
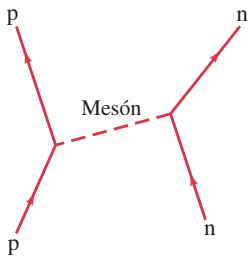


FIGURA 43–8 Diagrama de Feynman que muestra un fotón que actúa como el portador de la fuerza electromagnética entre dos electrones. Ésta es una especie de gráfica x contra t, con t que aumenta hacia arriba. Partiendo del extremo inferior, dos electrones se aproximan entre sí (la distancia entre ellos disminuye con el tiempo). Conforme se acercan, cantidad de movimiento y energía se transfieren de uno hacia el otro, transportadas por un fotón (o, quizá, por más de uno) y los dos electrones rebotan para separarse.

FIGURA 43–9 Modelo inicial que muestra el intercambio de mesón cuando un protón y un neutrón interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte. (En la actualidad, como se verá dentro de poco, se considera que la fuerza fuerte es transportada por gluones entre quarks).



Para la fuerza electromagnética, los fotones que se intercambian entre dos partículas cargadas dan lugar a la fuerza entre ellas. En la figura 43-8 se presenta un diagrama sencillo que describe este intercambio de fotones. Tal diagrama, llamado **diagrama de Feynman**, en honor de su inventor, el físico estadounidense Richard Feynman (1918-1988), se basa en la teoría de la **electrodinámica cuántica** (QED).

La figura 43-8 representa el caso más simple en QED, en el que se intercambia un solo fotón. Una de las partículas cargadas emite el fotón y retrocede un poco como resultado; y la segunda partícula absorbe el fotón. En cualquier colisión o *interacción*, energía y cantidad de movimiento se transfieren de una partícula con carga a la otra, transportadas por el fotón. La segunda partícula absorbe el fotón después de que lo emite la primera y no es observable. En consecuencia, se le conoce como fotón **virtual**, en contraste con aquel que es libre y se puede detectar con instrumentos. Se dice que el fotón **media**, o **porta**, la fuerza electromagnética.

Por analogía con el intercambio de fotón que media la fuerza electromagnética, Yukawa argumentó que debía existir una partícula que mediara la fuerza nuclear fuerte, la fuerza que mantiene unidos a los nucleones en el núcleo. Yukawa llamó a esta partícula predicha **mesón** (que significa "masa media"). La figura 43-9 es un diagrama de Feynman que muestra el modelo original de intercambio de mesón: un mesón que porta la fuerza fuerte entre un neutrón y un protón.

Una estimación de la masa del mesón se puede hacer del modo siguiente. Suponga que el protón a la izquierda de la figura 43-9 está en reposo. Para que emita un mesón requeriría energía (para formar la masa del mesón), la cual, al venir de ninguna parte, violaría la conservación de la energía. Pero el principio de incertidumbre permite la no conservación de la energía por una cantidad ΔE si sólo ocurre durante un tiempo Δt dado por $(\Delta E)(\Delta t) \approx h/2\pi$. Sea ΔE igual a la energía necesaria para crear la masa m del mesón: $\Delta E = mc^2$. La conservación de la energía se viola sólo en tanto el mesón exista, que es el tiempo ΔE requerido para que el mesón pase de un nucleón al otro, donde se absorbe y desaparece. Si suponemos que el mesón viaja con rapidez relativista, cercana a la rapidez de la luz c, entonces Δt necesita ser, cuando mucho, aproximadamente $\Delta t = d/c$, donde d es la distancia máxima que puede separar los nucleones en interacción. Por ende, podemos escribir

$$\Delta E\,\Delta t \approx \frac{h}{2\pi}$$

$$mc^2\left(\frac{d}{c}\right) \approx \frac{h}{2\pi}$$

o

$$mc^2 \approx \frac{hc}{2\pi d}. \qquad \textbf{(43–3)}$$

El rango de la fuerza nuclear fuerte (la máxima distancia a la que se puede sentir) es pequeño, no mucho más que el tamaño de un nucleón o núcleo pequeño (véase la ecuación 41-1), así que considérelo como $d \approx 1.5 \times 10^{-15}$ m. De esta forma, de acuerdo con la ecuación 43-3,

$$mc^2 \approx \frac{hc}{2\pi d} = \frac{(6.6 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{(6.28)(1.5 \times 10^{-15}\,\text{m})} \approx 2.1 \times 10^{-11}\,\text{J} = 130\,\text{MeV}.$$

La masa del mesón predicho, alrededor de 130 MeV/c^2, es aproximadamente 250 veces la masa del electrón de 0.51 MeV/c^2.

EJERCICIO C ¿Qué efecto tiene un aumento en la masa de la partícula de intercambio virtual sobre el rango de la fuerza que media? *a*) Lo reduce; *b*) lo aumenta; *c*) no tiene efecto apreciable; *d*) disminuye el rango para las partículas con carga y aumenta el rango para partículas neutras.

Advierta que, puesto que la fuerza electromagnética tiene rango infinito, la ecuación 43-3 con $d = \infty$ dice que la partícula de intercambio para la fuerza electromagnética, el fotón, tendrá masa cero, como sucede.

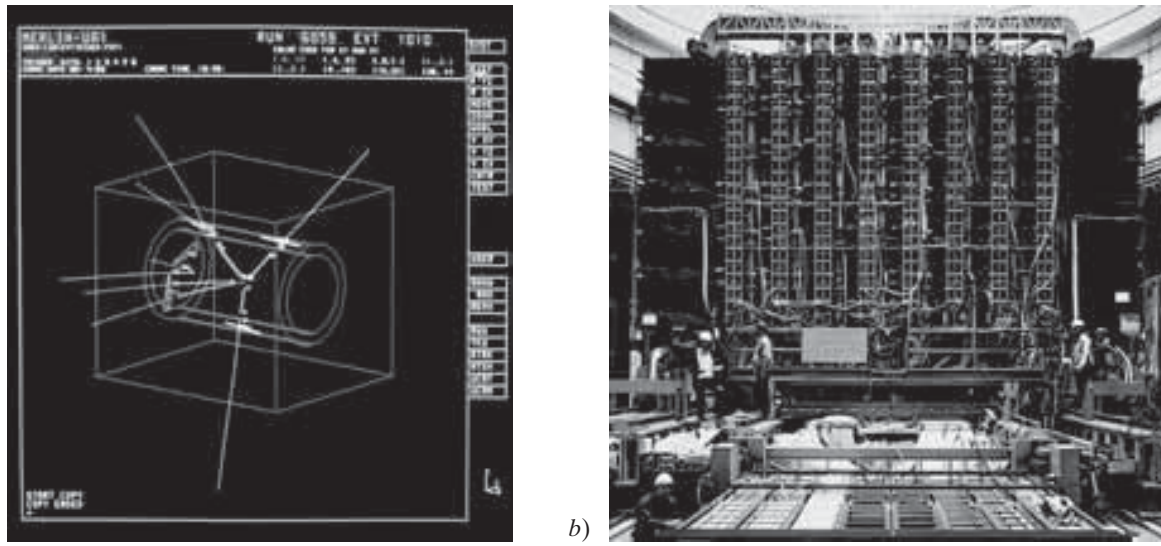
En 1947 C. F. Powell y G. Occhialini descubrieron en los rayos cósmicos la partícula que predijo Yukawa; ésta se llama "π" o mesón pi, o simplemente **pión**. Se presenta en tres estados de carga: $+e$, $-e$ ó 0, donde $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. El π^+ y el π^- tienen masa de 139.6 MeV/c^2, mientras que el π^0 tiene una masa de 135.0 MeV/c^2, cifras muy cercanas a la predicción de Yukawa. Las tres interactúan fuertemente con la materia. Las reacciones observadas en el laboratorio, empleando un acelerador de partículas, incluyen

$$\begin{aligned} \mathrm{p} + \mathrm{p} &\rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^0, \\ \mathrm{p} + \mathrm{p} &\rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{n} + \pi^+. \end{aligned} \qquad \textbf{(43–4)}$$

El protón incidente del acelerador debe tener suficiente energía para producir la masa adicional del pión libre.

La teoría de Yukawa del intercambio de pión como portador de la fuerza fuerte se sustituyó con la *cromodinámica cuántica*, la cual sostiene que protones, neutrones y otras partículas de fuerte interacción se componen de entidades básicas llamadas *quarks*, y que los portadores básicos de la fuerza fuerte son los *gluones*, como se estudiará dentro de poco. Pero la idea básica de la teoría precedente de que las fuerzas se pueden comprender como el intercambio de partículas sigue siendo válida.

Existen cuatro tipos de fuerza (o interacciones) en la naturaleza. La fuerza electromagnética es transportada por el fotón, y la fuerza fuerte por los gluones. ¿Qué pasa con las otras dos: la fuerza débil y la gravedad? Se cree que estas dos son mediadas por partículas. Las partículas que transmiten la fuerza débil se conocen como W^+, W^- y Z^0, y se detectaron en 1983 (figura 43.10). El cuanto (o portador) de la fuerza gravitacional se llama **gravitón** y, si existe, aún no se le ha observado.



a) *b*)

FIGURA 43–10 *a*) Reconstrucción computarizada de un decaimiento de partícula Z en un electrón y un positrón ($Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$) cuyas trayectorias se muestran en blanco (véase el pliego a color al final del libro); la reconstrucción computarizada tuvo lugar en el detector UA1 en el CERN. *b*) Fotografía del detector UA1 en el CERN mientras se construía.

En la tabla 43-1 se hace una comparación de las cuatro fuerzas, donde se mencionan de acuerdo con sus intensidades relativas (aproximadas). Advierta que, aunque la gravedad es la fuerza más obvia en la vida diaria (a causa de la enorme masa de la Tierra), a escala nuclear es, sin duda, la más débil de las cuatro fuerzas, y su efecto a nivel de partículas casi siempre se puede ignorar.

TABLA 43–1 Las cuatro fuerzas de la naturaleza

Tipo	Intensidad relativa (aprox., para 2 protones en el núcleo)	Partícula de campo
Fuerte	1	Gluones
Electromagnética	10^{-2}	Fotón
Débil	10^{-6}	$W^{\pm}$ y Z^0
Gravitacional	10^{-38}	Gravitón (?)

43–3 Partículas y antipartículas

El positrón, como se estudió en las secciones 37-5 (producción de pares) y 41-5 (decaimiento β^+), en esencia es un electrón positivo. Esto es, muchas de sus propiedades —como la masa— son las mismas que las del electrón, pero tiene carga eléctrica opuesta ($+e$). Otros números cuánticos que se estudiarán dentro de poco también están invertidos. Se dice que el positrón es la **antipartícula** del electrón.

La idea original para las antipartículas provino de una ecuación de onda relativista que desarrolló en 1928 el inglés P. A. M. Dirac (1902-1984). Recuerde que la ecuación de Schrödinger no relativista consideró la conservación de la energía como un punto de partida. La ecuación de Dirac también se basó en parte en la conservación de la energía. En el capítulo 36 se vio que la energía total E de una partícula con masa m y cantidad de movimiento p y energía potencial cero está dada por la ecuación 36-13, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Por lo tanto,

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Dirac aplicó su nueva ecuación y descubrió que incluía soluciones con signos + y −. No podía ignorar la solución con el signo negativo, la cual podía considerarse como fuera de la física. Si tales estados de energía negativos son reales, entonces se esperaría que electrones libres normales caigan hacia esos estados y emitan fotones, alguno nunca visto experimentalmente. Para lidiar con esta dificultad, Dirac postuló que todos esos estados de energía negativos *normalmente están ocupados*. Esto es, lo que se pensaba que era el **vacío** más bien era un vasto **mar de electrones** en estados de energía negativos (figura 43-11a). Estos electrones por lo general no son observables. Pero si un fotón incide sobre uno de estos electrones de energía negativa, ese electrón se puede desprender hacia un estado de energía normal ($E > mc^2$), como se muestra en la figura 43-11b. (Observe en la figura 43-11 que no hay estados de energía entre $E = -mc^2$ y $E = +mc^2$, porque p^2 no puede ser negativo en la ecuación $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$). El fotón que desprende un e^- del mar negativo hacia un estado normal (figura 43-11b) debe tener una energía mayor que $2mc^2$. Lo que queda atrás es un hueco (como en los semiconductores, secciones 40-7 y 40-8) con carga positiva. A este "hueco" se le llama **positrón** y se puede mover como una partícula libre con energía positiva. Así, la figura 43-11b representa (sección 37-5) **producción de pares**: $\gamma \rightarrow e^-e^+$.

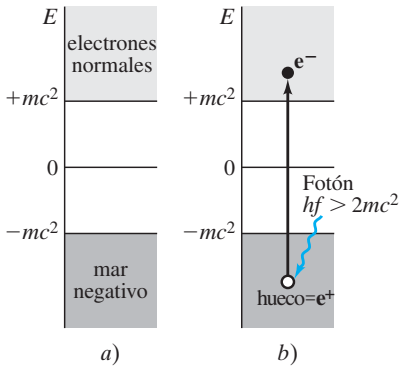
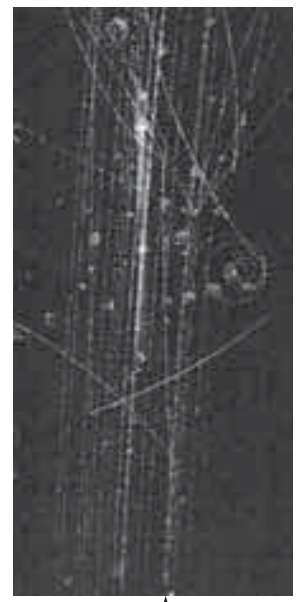


FIGURA 43–11 *a*) Posibles estados de energía para un electrón. Note el enorme mar de estados electrónicos completamente ocupados en $E < -mc^2$. *b*) Un fotón ($E > 2mc^2$) choca con un electrón en el mar negativo y lo desprende hacia un estado de energía positiva normal. El "hueco" positivo que queda detrás actúa como un electrón positivo: es un positrón.

En 1932 Carl Anderson detectó por primera vez el positrón como una trayectoria curva en una cámara de niebla en un campo magnético. Se predijo que otras partículas también tendrían antipartículas. Esto fue décadas antes de que se encontrara otro tipo. Finalmente, en 1955, Emilio Segrè (1905-1989, figura 43-13) y Owen Chamberlain (1920-2006) descubrieron en la Universidad de California, en Berkeley, la antipartícula del protón, el **antiprotón** ($\bar{p}$), el cual porta una carga negativa (figura 43-12). En gene-



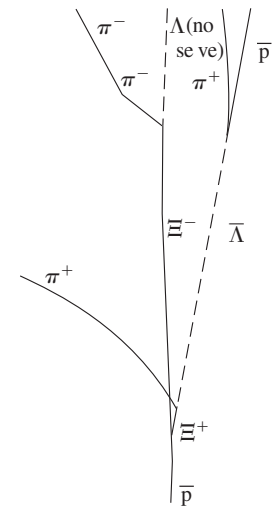


FIGURA 43–12 Fotografía de una cámara de burbujas de hidrógeno líquido de un antiprotón ($\bar{p}$) que choca con un protón en reposo, lo que produce un par Xi-anti Xi($\bar{p} + p \rightarrow \Xi^- + \Xi^+$) el cual posteriormente decae en otras partículas. El dibujo indica la asignación de partículas a cada trayectoria, que se basa en cómo decae esa partícula o si decae, y en los valores de masa estimados a partir de la medición de la cantidad de movimiento (curvatura de la trayectoria en el campo magnético) y la energía (grosor de la trayectoria, por ejemplo). Las trayectorias de las partículas neutras se muestran mediante líneas punteadas, pues las partículas neutras no producen burbujas y, en consecuencia, tampoco trayectorias.

ral, se usa una barra, como la que está sobre la p, para indicar la antipartícula ($\bar{p}$). Poco después, se descubrió el antineutrón ($\bar{n}$) Todas las partículas tienen antipartículas. Pero algunas, como el fotón y el π^0, no tienen antipartículas distintivas; se dice que son sus propias antipartículas.

En las reacciones nucleares se producen antipartículas cuando hay suficiente energía disponible para producir la masa requerida, y no viven mucho tiempo en presencia de materia. Por ejemplo, un positrón es estable cuando está solo; pero si encuentra un electrón, se aniquilan uno al otro. La energía de su masa desaparecida, más cualquier energía cinética que posesen, se convierte en la energía de rayos γ o de otras partículas. La aniquilación también ocurre para todos los demás pares partícula-antipartícula.

El vasto mar de electrones con energía negativa en la figura 43-11 es el vacío (o **estado vacío**). De acuerdo con la mecánica cuántica, el vacío no es exactamente tal, sino que contiene electrones y también otras partículas. El principio de incertidumbre permite a una partícula saltar brevemente hacia un estado de energía normal, lo que por lo tanto crea un par **partícula-antipartícula**. Es posible que puedan ser la fuente de la recientemente descubierta *energía oscura* que llena el Universo (capítulo 44). Todavía hay mucho por aprender.

Antimateria es un término que se refiere a material que estaría constituido por "antiátomos", en la que antiprotones y antineutrones formarían el núcleo en torno al cual se moverían positrones (antielectrones). El término también se usa para antipartículas en general. Si hubiera bolsitas de antimateria en el Universo, ocurriría una enorme explosión si encontrara materia normal. Se cree que la antimateria predominaba en los primeros tiempos del Universo (sección 44-7).

FIGURA 43–13 Emilio Segrè, quien trabajó con Fermi en la década de 1930 y quien más tarde descubriría el primer elemento "hecho por el hombre", el tecnecio, así como otros elementos, y luego el antiprotón. La inscripción bajo la fotografía es de un libro que Segrè regaló al autor de este libro.

43–4 Interacciones de partículas y leyes de conservación

Uno de los importantes usos de los aceleradores de alta energía es que permiten estudiar las interacciones de las partículas elementales. Como medio para ordenar este mundo subnuclear, las leyes de conservación son indispensables. Las leyes de conservación de la energía, de cantidad de movimiento, de cantidad de movimiento angular y de carga eléctrica se cumplen de manera precisa en todas las interacciones de partículas.

Un estudio de las interacciones de partículas reveló algunas nuevas leyes de conservación que (al igual que las anteriores) son principios ordenadores: ayudan a explicar por qué algunas reacciones ocurren y otras no. Por ejemplo, la siguiente reacción nunca se ha observado:

$$p + n \nrightarrow p + p + \bar{p}$$

aun cuando carga, energía, etcétera, se conservan ($\nrightarrow$ significa que la reacción no ocurre). Para entender por qué tal reacción no ocurre, los físicos postularon la hipótesis de una nueva ley de conservación, la conservación de **número bariónico**. (El número bariónico es una generalización del número de nucleones, que, como vimos anteriormente, se conserva en reacciones nucleares y decaimientos). Todos los nucleones se definen como poseedores de número bariónico $B = +1$, y todos los antinucleones (antiprotones, antineutrones) tienen $B = -1$. Todos los demás tipos de partículas, como fotones, mesones, electrones y otros leptones, tienen $B = 0$. La reacción que se representa al inicio de este párrafo no conserva número bariónico pues el lado izquierdo tiene $B = (+1) + (+1) = +2$, y el derecho tiene $B = (+1) + (+1) + (-1) = +1$. Por otra parte, la siguiente reacción sí conserva B y *sí* ocurre cuando el protón incidente tiene suficiente energía:

$$p + p \rightarrow p + p + \bar{p} + p,$$
$$B = +1 + 1 = +1 + 1 - 1 + 1.$$

Como se indica, $B = +2$ en ambos lados de esta ecuación. A partir de éstas y otras reacciones, la **conservación de número bariónico** se estableció como un principio básico de la física.

También son útiles las leyes de conservación para los tres **números leptónicos**, asociados con interacciones débiles, incluidos los decaimientos. En el decaimiento β ordinario, se emite un electrón o un positrón junto con un neutrino o un antineutrino. En otro tipo de decaimiento, una partícula conocida como "μ" o mesón mu, o **muón**, se puede emitir en vez de un electrón. El muón (descubierto en 1937) se parece mucho a un electrón, excepto que su masa es 207 veces mayor (106 MeV/c^2). El neutrino (ν_e) que acompaña a un electrón emitido es diferente del neutrino (ν_μ) que acompaña a un

⚠ **CUIDADO**
Los diferentes tipos de neutrinos no son idénticos

muón emitido. Cada uno de estos neutrinos tiene una antipartícula: $\bar{\nu}_e$ y $\bar{\nu}_\mu$.En el decaimiento β ordinario se tiene, por ejemplo,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

pero no $n \not\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_\mu$. Para explicar por qué esto no ocurre, se inventó el concepto de **número leptónico de electrón**, L_e. Si al electrón (e^-) y al neutrino electrón (ν_e) se les asigna $L_e = +1$, y a e^+ y $\bar{\nu}_e$ se les asigna $L_e = -1$, mientras que todas las otras partículas tienen $L_e = 0$, entonces todos los decaimientos observados conservan L_e. Por ejemplo, en $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, inicialmente $L_e = 0$, y más adelante $L_e = 0 + (+1) + (-1) = 0$. Los decaimientos que no conservan L_e, aun cuando obedecerían las otras leyes de conservación, no se observa que ocurran.

En un decaimiento que implica muones, como

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

se conserva un segundo número cuántico, el **número leptónico de muón** (L_μ). A μ^- y ν_μ se les asigna $L_\mu = +1$, y sus antipartículas μ^+ y $\bar{\nu}_\mu$ tienen $L_\mu = -1$, mientras que todas las demás partículas tienen $L_\mu = 0$. L_μ también se conserva en interacciones y decaimientos. Asignaciones similares se pueden hacer para el **número leptónico de tau**, L_τ, que se asocia con el leptón τ (descubierto en 1976 con más de 3000 veces la masa del electrón) y su neutrino, ν_τ.

Tenga en mente que las antipartículas no sólo tienen carga eléctrica opuesta a la de sus partículas, sino también B, L_e, L_μ y L_τ opuestos. Por ejemplo, un neutrón tiene $B = +1$, un antineutrón tiene $B = -1$ (y todas las L son cero).

EJEMPLO CONCEPTUAL 43–5 **Número leptónico en decaimiento de muón.** ¿Cuál de los siguientes esquemas de decaimiento es posible para el decaimiento del muón? *a*) $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$; *b*) $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$; *c*) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e$? Todas estas partículas tienen $L_\tau = 0$.

RESPUESTA Un μ^- tiene $L_\mu = +1$ y $L_e = 0$. Éste es el estado inicial para todos los decaimientos dados, y el estado final también debe tener $L_\mu = +1$, $L_e = 0$. En *a*), el estado final tiene $L_\mu = 0 + 0 = 0$, y $L_e = +1 - 1 = 0$; L_μ no se conservaría y, de hecho, este decaimiento no se observa que ocurra. El estado final de *b*) tiene $L_\mu = 0 + 0 + 1 = +1$ y $L_e = +1 - 1 + 0 = 0$, así que tanto L_μ como L_e se conservan. Éste es de hecho el modo de decaimiento más común del μ^-. Finalmente, *c*) no ocurre porque L_e (= +2 en el estado final) no se conserva, ni L_μ.

EJEMPLO 43–6 **Energía y cantidad de movimiento se conservan.** Además de las leyes de conservación de "número" que ayudan a explicar los esquemas de decaimiento de las partículas, también se pueden aplicar las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento . El decaimiento de una partícula Σ^+ en reposo con una masa de 1189 MeV/c^2 (tabla 43-2 en la sección 43-6) por lo general produce un protón (masa = 938 MeV/c^2) y un pión neutro, π^0 (masa = 135 MeV/c^2).

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0.$$

¿Cuáles son las energías cinéticas de los productos de decaimiento, suponiendo que la partícula Σ^+ precursora estaba en reposo?

PLANTEAMIENTO Encontramos que existe liberación de energía por el cambio en masa ($E = mc^2$), como sucedió en los procesos nucleares (ecuaciones 41-3 o 42-2a), y aplicamos la conservación de energía y de cantidad de movimiento.

SOLUCIÓN La energía liberada, o valor Q, es el cambio en masa por c^2:

$$Q = \left[m_{\Sigma^+} - (m_p + m_{\pi^0})\right]c^2 = \left[1189 - (938 + 135)\right]\text{MeV} = 116\,\text{MeV}.$$

Esta energía Q se convierte en la energía cinética de las partículas resultantes del decaimiento, p y π^0:

$$Q = K_p + K_{\pi^0}$$

donde la energía cinética de cada partícula se relaciona con su cantidad de movimiento mediante (ecuaciones 36-11 y 13):

$$K_p = E_p - m_p c^2 = \sqrt{(p_p c)^2 + (m_p c^2)^2} - m_p c^2,$$

y de igual modo para el pión. A partir de la conservación de la cantidad de movimiento, el protón y el pión tienen la misma magnitud de cantidad de movimiento, pues la Σ^+ original estaba en reposo: $p_p = p_{\pi^0} = p$. Luego, $Q = K_p + K_{\pi^0}$ da 116 MeV = $\left[\sqrt{(pc)^2 + (938\,\text{MeV})^2} - 938\,\text{MeV}\right] + \left[\sqrt{(pc)^2 + (135\,\text{MeV})^2} - 135\,\text{MeV}\right]$. Se despeja pc, para obtener pc = 189 MeV. Al sustituir en la expresión anterior para la energía cinética, primero para el protón y luego para el pión, se obtiene $K_p = 19$ MeV y $K_{\pi^0} = 97$ MeV.

43–5 Neutrinos: Resultados recientes

En la sección 41-5 se mencionaron por primera vez los neutrinos en relación con el decaimiento β^-. El estudio de los neutrinos es un tema "candente" en la actualidad. Se realizan experimentos en profundos laboratorios subterráneos, en ocasiones en socavones de minas profundas. La gruesa capa de tierra que los cubre filtra todas las otras partículas "del entorno", permitiendo que los neutrinos, los cuales interactúan muy débilmente, lleguen a los detectores.

En años recientes se obtuvieron algunos resultados muy importantes. Primero existió el **problema del neutrino solar**. Se cree que la salida de energía del Sol se debe a las reacciones de fusión nuclear que se examinaron en el capítulo 42, ecuaciones 42-7 y 42-8. Los neutrinos emitidos en estas reacciones son todos ν_e (acompañados por e^+). Pero la tasa medida a la cual llega ν_e a la Tierra es mucho menor que la esperada con base en la salida de potencia del Sol. Entonces se propuso que quizá en el largo viaje entre el Sol y la Tierra, ν_e podría convertirse en ν_μ o ν_τ. Experimentos posteriores confirmaron esta hipótesis. Por ende, los tres neutrinos, ν_e, ν_μ, ν_τ, pueden transformarse uno en otro en ciertas circunstancias, un fenómeno llamado **oscilación de sabor de neutrino** (a cada uno de los tres tipos de neutrinos se les nombra, caprichosamente, con un "sabor" diferente). Este resultado sugiere que los números leptónicos L_e, L_μ y L_τ no se conservan perfectamente. Pero se cree que la suma, $L_e + L_\mu + L_\tau$, siempre se conserva.

Durante mucho tiempo se especuló acerca del segundo resultado excepcional: ¿los neutrinos carecen de masa, como originalmente se creyó, o tienen una masa distinta de cero? Se han impuesto límites superiores aproximados sobre las masas. Los experimentos actuales en astrofísica demuestran que la suma de las masas de los tres neutrinos es menor que aproximadamente 0.14 eV/c^2. ¿Pero las masas pueden ser cero? No, si existen las oscilaciones de sabor que se mencionaron anteriormente. Parece probable que al menos un tipo de neutrino tenga una masa de por lo menos 0.04 eV/c^2.

Como resultado de las oscilaciones de neutrino, los tres tipos de neutrinos pueden no ser exactamente los que se creían (e, μ, τ). Si no, los tres neutrinos básicos, llamados 1, 2 y 3, son combinaciones lineales de ν_e, ν_μ y ν_τ.

Otra pregunta sorprendente es si los neutrinos están o no en la categoría llamada **partículas de Majorana**,[†] lo que significa que serían sus propias antipartículas. Si es así, aparecerían muchas otras preguntas (y respuestas).

*Estimación de la masa del neutrino a partir de una supernova

La supernova de 1987 ofreció una oportunidad para estimar la masa del neutrino electrón. Si los neutrinos tienen masa, entonces $v < c$, y neutrinos de diferente energía tardarían diferentes tiempos en recorrer los 170,000 años luz desde la supernova hacia la Tierra. Para tener una idea de cómo se podría realizar tal medición, suponga que dos neutrinos de la "SN1987a" se emitieran al mismo tiempo y se detectaran en la Tierra (mediante la reacción $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$) con 10 segundos de diferencia, con energías cinéticas medidas de aproximadamente 20 MeV y 10 MeV. Puesto que se espera que la masa del neutrino seguramente será menor que 100 eV (a partir de otras mediciones de laboratorio), y puesto que los neutrinos tienen energía cinética de 20 MeV y 10 MeV, se puede hacer la aproximación $m_\nu c^2 \ll E$, de manera que E (la energía total) es en esencia igual a la energía cinética. Empleamos la ecuación 36-11, que dice

$$E = \frac{m_\nu c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Se despeja v, la velocidad de un neutrino con energía E:

$$v = c\left(1 - \frac{m_\nu^2 c^4}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}} = c\left(1 - \frac{m_\nu^2 c^4}{2E^2} + \cdots\right),$$

donde se usó el desarrollo binomial $(1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots$, y se ignoran los términos de orden superior pues $m_\nu^2 c^4 \ll E^2$. El tiempo t para que un neutrino recorra una distancia d (= 170,000 años luz) es

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{c\left(1 - \dfrac{m_\nu^2 c^4}{2E^2}\right)} \approx \frac{d}{c}\left(1 + \frac{m_\nu^2 c^4}{2E^2}\right),$$

[†]El brillante joven físico Ettore Majorana (1906-1938) desapareció de un barco en condiciones misteriosas en 1938, a la edad de 31 años.

donde de nuevo se usó la expansión binomial $[(1 - x)^{-1} = 1 + x + \cdots]$. La diferencia en los tiempos de llegada de los dos neutrinos de energías $E_1 = 20$ MeV y $E_2 = 10$ MeV es

$$t_2 - t_1 = \frac{d}{c}\frac{m_\nu^2 c^4}{2}\left(\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_1^2}\right).$$

Se despeja $m_\nu c^2$ y se establece que $t_2 - t_1 = 10$ s:

$$\begin{aligned} m_\nu c^2 &= \left[\frac{2c(t_2 - t_1)}{d}\frac{E_1^2 E_2^2}{E_1^2 - E_2^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{2(3.0 \times 10^8\,\text{m/s})(10\,\text{s})}{(1.7 \times 10^5\,\text{ly})(1.0 \times 10^{16}\,\text{m/ly})}\frac{(400\,\text{MeV}^2)(100\,\text{MeV}^2)}{(400\,\text{MeV}^2 - 100\,\text{MeV}^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 22 \times 10^{-6}\,\text{MeV} = 22\,\text{eV}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se estima que la masa del neutrino es 22 eV/c^2, pero desde luego habría incertidumbres experimentales, por no mencionar la suposición no garantizada de que los dos neutrinos se emitieron al mismo tiempo.

Los modelos teóricos de las explosiones de supernovas sugieren que los neutrinos se emiten en una ráfaga que dura de un segundo o dos hasta quizá 10 s. Si se supone que los neutrinos no se emiten simultáneamente, sino más bien en cualquier momento de un intervalo de 10 s, ¿entonces qué se podría decir acerca de la masa del neutrino con base en los datos indicados anteriormente? La diferencia de 10 s en sus tiempos de llegada se podría deber a una diferencia de 10 s en sus tiempos de emisión. En este caso los datos serían congruentes con una masa cero, y esto pone un *límite superior* aproximado a la masa del neutrino en 22 eV/c^2.

La detección real de estos neutrinos fue brillante: se trató de un extraño suceso que permitió detectar algo más que radiación EM desde más allá del Sistema Solar, y fue una confirmación excepcional de la teoría. En los experimentos, el detector más sensible consistió en varios miles de toneladas de agua en una cámara subterránea. Detectó 11 eventos en 12 segundos, probablemente mediante la reacción $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. No hubo correlación clara entre energía y tiempo de llegada. No obstante, un análisis cuidadoso de ese experimento estableció un límite superior aproximado a la masa del antineutrino electrón en alrededor de 4 eV/c^2. Los resultados más recientes que se mencionan líneas arriba son mucho más definitivos, pues ofrecen evidencia de que la masa es mucho más pequeña, y que *no es cero*.

43–6 Clasificación de las partículas

En las décadas posteriores al descubrimiento del mesón π a finales de la década de 1940, se descubrieron cientos de otras partículas subnucleares. Una forma de ordenar las partículas en categorías es de acuerdo con sus interacciones, pues no todas las partículas interactúan mediante las cuatro fuerzas conocidas en la naturaleza (aunque todas interactúan por medio de la gravedad). La tabla 43-2 (en la siguiente página) menciona algunas de las partículas más comunes clasificadas de esta forma junto con muchas de sus propiedades. En la parte superior de la tabla 43-2 están las llamadas partículas "fundamentales", que se cree no tienen estructura interna. Debajo de ellas están algunas de las partículas "compuestas" que están constituidas de quarks, de acuerdo con el modelo estándar.

Las partículas fundamentales incluyen los **bosones de norma** (llamados así en referencia a la teoría que los describe, la "teoría de norma"), que incluye gluones, fotones y las partículas W y Z; éstas son las partículas que median las interacciones fuerte, electromagnética y débil, respectivamente. También son fundamentales los **leptones**, que son partículas que no interactúan mediante la fuerza fuerte, pero sí interactúan mediante la fuerza nuclear débil. Los leptones que conducen carga eléctrica también interactúan mediante la fuerza electromagnética. Los leptones incluyen el electrón, el muón y el tau, y tres tipos de neutrino: el neutrino electrón (ν_e), el neutrino muón (ν_μ) y el neutrino tau (ν_τ). Cada uno tiene una antipartícula.

TABLA 43–2 Partículas (seleccionadas)[†]

Categoría	Fuerzas implicadas	Nombre de partícula	Símbolo	Anti-partícula	Espín	Masa (MeV/c^2)	B	L_e	L_μ	L_τ	S	Vida media (s)	Principales modos de decaimiento
							[las antipartículas tienen signo opuesto]						
Fundamental													
Bosones de norma (portadores de fuerza)	fuerte	Gluones	g	Mismo	1	0	0	0	0	0	0	Estable	
	em	Fotón	γ	Mismo	1	0	0	0	0	0	0	Estable	
	débil	W	W^+	W^-	1	80.40×10^3	0	0	0	0	0	$\approx 10^{-24}$	$e\nu_e$, $\mu\nu_\mu$, $\tau\nu_\tau$, hadrones
	débil, em	Z	Z^0	Mismo	1	91.19×10^3	0	0	0	0	0	$\approx 10^{-24}$	e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, hadrones
Leptones	débil, em[‡]	Electrón	e^-	e^+	$\frac{1}{2}$	0.511	0	+1	0	0	0	Estable	
		Neutrino (e)	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$\frac{1}{2}$	0 (<0.14 eV)[‡]	0	+1	0	0	0	Estable	
		Muón	μ^-	μ^+	$\frac{1}{2}$	105.7	0	0	+1	0	0	2.20×10^{-6}	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$
		Neutrino (μ)	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	$\frac{1}{2}$	0 (<0.14 eV)[‡]	0	0	+1	0	0	Estable	
		Tau	τ^-	τ^+	$\frac{1}{2}$	1777	0	0	0	+1	0	2.91×10^{-13}	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, hadrones $+\nu_\tau$
		Neutrino (τ)	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	$\frac{1}{2}$	0 (<0.14 eV)[‡]	0	0	0	+1	0	Estable	
Hadrones (compuestos), seleccionados													
Mesones (quark–antiquark)	fuerte, em, débil	Pión	π^+	π^-	0	139.6	0	0	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$
			π^0	Mismo	0	135.0	0	0	0	0	0	0.84×10^{-16}	2γ
		Kaón	K^+	K^-	0	493.7	0	0	0	0	+1	1.24×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$, $\pi^+\pi^0$
			K^0_S	$\overline{K}^0_S$	0	497.7	0	0	0	0	+1	0.89×10^{-10}	$\pi^+\pi^-$, $2\pi^0$
			K^0_L	$\overline{K}^0_L$	0	497.7	0	0	0	0	+1	5.17×10^{-8}	$\pi^\pm e^\mp(\bar{\nu}_e)$, $\pi^\pm\mu^\mp(\bar{\nu}_\mu)$, 3π
		Eta	η^0	Mismo	0	547.5	0	0	0	0	0	$\approx 10^{-18}$	2γ, $3\pi^0$, $\pi^+\pi^-\pi^0$
		Rho	ρ^0	Mismo	1	775	0	0	0	0	0	$\approx 10^{-23}$	$\pi^+\pi^-$, $2\pi^0$
			ρ^+	ρ^-	1	775	0	0	0	0	0	$\approx 10^{-23}$	$\pi^+\pi^0$
		y otros											
Bariones (3 quarks)	fuerte	Protón	p	$\bar{p}$	$\frac{1}{2}$	938.3	+1	0	0	0	0	Estable	
	em, débil	Neutrón	n	$\bar{n}$	$\frac{1}{2}$	939.6	+1	0	0	0	0	886	$pe^-\bar{\nu}_e$
		Lambda	Λ^0	$\overline{\Lambda}^0$	$\frac{1}{2}$	1115.7	+1	0	0	0	−1	2.63×10^{-10}	$p\pi^-$, $n\pi^0$
		Sigma	Σ^+	$\overline{\Sigma}^-$	$\frac{1}{2}$	1189.4	+1	0	0	0	−1	0.80×10^{-10}	$p\pi^0$, $n\pi^+$
			Σ^0	$\overline{\Sigma}^0$	$\frac{1}{2}$	1192.6	+1	0	0	0	−1	7.4×10^{-20}	$\Lambda^0\gamma$
			Σ^-	$\overline{\Sigma}^+$	$\frac{1}{2}$	1197.4	+1	0	0	0	−1	1.48×10^{-10}	$n\pi^-$
		Xi	Ξ^0	$\overline{\Xi}^0$	$\frac{1}{2}$	1314.8	+1	0	0	0	−2	2.90×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^0$
			Ξ^-	Ξ^+	$\frac{1}{2}$	1321.3	+1	0	0	0	−2	1.64×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^-$
		Omega	Ω^-	Ω^+	$\frac{3}{2}$	1672.5	+1	0	0	0	−3	0.82×10^{-10}	$\Xi^0\pi^-$, Λ^0K^-, $\Xi^-\pi^0$
		y otros											

[†]Véase también la tabla 43-4 para partículas con encanto y fondo o belleza. *S* en esta tabla significa "extrañeza" (por el inglés "strangeness"; véase la sección 43-8). Más detalles en línea en: pdg.lbl.gov.

[‡]Los neutrinos participan sólo en la interacción débil. Los límites superiores experimentales sobre las masas del neutrino se indican entre paréntesis, como se obtuvieron principalmente a partir de la estudio WMAP (capítulo 44). La detección de las oscilaciones de neutrino sugieren que al menos un tipo de neutrino tiene una masa distinta de cero mayor que 0.04 eV.

La segunda categoría de partículas en la tabla 43-2 es la de los **hadrones**, que son partículas compuestas, como se estudiará dentro de poco. Los hadrones son aquellas partículas que interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte. Por lo tanto, se dice que son **partículas que interactúan fuertemente**. También interactúan mediante las otras fuerzas, pero la fuerza fuerte predomina a distancias cortas. Los hadrones incluyen protones, neutrones, piones y un gran número de otras partículas. Se dividen en dos subgrupos: **bariones**, que son aquellas partículas que tienen número bariónico +1 (o −1 en el caso de sus antipartículas) y, como se verá, están constituidos de tres quarks; y los **mesones**, que tienen número bariónico = 0, y están constituidos de un quark y un antiquark.

En la tabla 43-2 se incluyen sólo algunos de los cientos de hadrones (una verdadera "colección"). Note que todos los bariones Λ, Σ, Ξ, y Ω decaen a bariones de masa más ligera y con el tiempo a un protón o neutrón. Todos estos procesos conservan número bariónico. Puesto que no hay partículas más ligeras que el protón con $B = +1$, si el número bariónico se conserva estrictamente, el protón en sí no puede decaer y es estable. (Pero véase la sección 43-11.) Advierta que la tabla 43-2 indica la *vida media* (τ) de cada partícula (como se hace en física de partículas), no el periodo de desintegración ($T_{\frac{1}{2}}$). Recuerde que difieren en un factor 0.693: $\tau = T_{\frac{1}{2}}/\ln 2 = T_{\frac{1}{2}}/0.693$, ecuación 41-9. El término **tiempo de vida** en física de partículas significa la vida media aritmética τ.

Los números bariónico y leptónico (B, L_e, L_μ, L_τ), así como la extrañeza S (sección 43-8), como se indican en la tabla 43-2 son para partículas; sus antipartículas tienen signo opuesto para estos números.

EJEMPLO 43–7 **Decaimiento de barión.** Demuestre que los modos de decaimiento del barión Σ^+ dados en la tabla 43-2 no violan las leyes de conservación que hemos estudiado hasta ahora: energía, carga, número bariónico, números leptónicos.

PLANTEAMIENTO La tabla 43-2 muestra dos posibles modos de decaimiento, *a*) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$, *b*) $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$. Verificamos cada uno para conservación de la energía, de carga y de número bariónico. Todas las partículas tienen números leptónicos iguales a cero.

SOLUCIÓN *a*) Energía: para $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ el cambio en masa-energía es

$$\begin{aligned}\Delta M &= m_\Sigma c^2 - m_p c^2 - m_{\pi^0} c^2 \\ &= 1189.4\,\text{MeV}/c^2 - 938.3\,\text{MeV}/c^2 - 135.0\,\text{MeV}/c^2 = +116.1\,\text{MeV}/c^2,\end{aligned}$$

de manera que la energía se puede conservar con las partículas resultantes que tienen energía cinética.
Carga: $+e = +e + 0$, de manera que la carga se conserva.
Número bariónico: $+1 = +1 + 0$, de manera que el número bariónico se conserva.
b) Energía: para $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$, el cambio masa-energía es

$$\begin{aligned}\Delta M &= m_\Sigma c^2 - m_n c^2 - m_{\pi^+} c^2 \\ &= 1189.4\,\text{MeV}/c^2 - 939.6\,\text{MeV}/c^2 - 139.6\,\text{MeV}/c^2 = 110.2\,\text{MeV}/c^2.\end{aligned}$$

Esta reacción libera 110.2 Mev de energía como energía cinética de los productos.
Carga: $+e = 0 + e$, así que la carga se conserva.
Número bariónico: $+1 = +1 + 0$, de manera que el número bariónico se conserva.

43–7 Estabilidad de las partículas y resonancias

Muchas partículas que se mencionan en la tabla 43-2 son inestables. El tiempo de vida de una partícula inestable depende de cuál fuerza es más activa para provocar el decaimiento. Cuando una fuerza más fuerte influye en un decaimiento, éste ocurre más rápidamente. Los decaimientos causados por la fuerza débil por lo general tienen tiempos de vida de 10^{-13} s o más (W y Z son excepciones). Los decaimientos por medio de la fuerza electromagnética tienen tiempos de vida mucho más cortos, por lo general de aproximadamente 10^{-16} a 10^{-19} s, y normalmente implican un γ (fotón). Las partículas inestables que se mencionan en la tabla 43-2 decaen ya sea mediante la interacción débil o la electromagnética.

Se conocen muchas partículas que decaen por medio de la interacción fuerte, con tiempos de vida muy cortos, por lo general de aproximadamente 10^{-23} s. Sus tiempos de vida son tan cortos que no viajan muy lejos para ser detectadas antes de decaer. La existencia de tales partículas de vida corta se infiere a partir de sus productos de decaimiento. Considere la primera de tales partículas descubiertas (por Fermi), empleando un haz de partículas π^+ con cantidades variables de energía que se dirige a través de un blanco de hidrógeno (protones). En la figura 43-14 se presenta la gráfica del número de

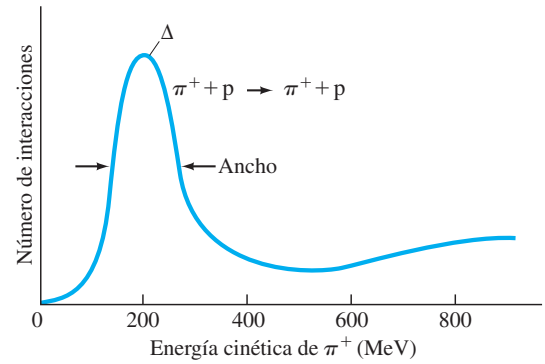


FIGURA 43–14 Número de partículas π^+ dispersadas mediante un blanco de protones como función de la energía cinética π^+ incidente. La forma de la resonancia representa la formación de una partícula de vida corta, la Δ, que tiene una carga en este caso de $+2e$ (Δ^{++}).

interacciones (dispersión de π^+) contra la energía cinética del pión. El gran número de interacciones alrededor de 200 MeV condujo a Fermi a concluir que el π^+ y el protón se combinaban momentáneamente para formar una partícula de vida corta antes de separarse de nuevo, o al menos para resonar en conjunto durante un corto tiempo. De hecho, el pico marcado en la figura 43-14 recuerda una curva de resonancia (véanse las figuras 14-23, 14-26 y 30-22) y a esta nueva "partícula", ahora llamada Δ, se le conoce como una **resonancia**. Se han encontrado cientos de otras resonancias y se consideran como estados excitados de partículas con masa más ligera, como el nucleón.

El **ancho** de una resonancia, en la figura 43-14 el ancho completo del pico Δ a la mitad de su altura es del orden de 100 MeV, es una interesante aplicación del principio de incertidumbre. Si una partícula sólo vive 10^{-23} s, entonces su masa (es decir, su energía en reposo) será incierta por una cantidad

$$\Delta E \approx h/(2\pi\,\Delta t)$$
$$\approx (6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})/(6)(10^{-23}\,\mathrm{s}) \approx 10^{-11}\,\mathrm{J} \approx 100\,\mathrm{MeV},$$

que es lo que se observó. En realidad, las vidas de $\approx 10^{-23}$ s para tales resonancias se infieren mediante el proceso inverso: a partir de un ancho medido de ≈ 100 MeV.

43–8 ¿Partículas extrañas? ¿Encanto? Hacia un nuevo modelo

A principios de la década de 1950, se observó que las partículas K, Λ y Σ recientemente descubiertas se comportaban de manera más bien extraña en dos formas. Primero, siempre se producían en pares. Por ejemplo, la reacción

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + \Lambda^0$$

ocurría con alta probabilidad, pero nunca se observó la ocurrencia de la reacción similar $\pi^- + \mathrm{p} \nrightarrow \mathrm{K}^0 + \mathrm{n}$, aun cuando no viola ninguna ley de conservación conocida. La segunda característica de estas **partículas extrañas**, como se les llamó, fue que se producían mediante la interacción fuerte (esto es, a una elevada tasa de interacción), pero no decaían a una tasa rápida característica de la interacción fuerte (aun cuando decaían en partículas de fuerte interacción).

Para explicar estas observaciones, se introdujeron un nuevo número cuántico, **extrañeza**, y una nueva ley de conservación, la **conservación de la extrañeza**. Al asignar los números de extrañeza (S) que se indican en la tabla 43-2, se explicaba la producción de partículas extrañas en pares. A las antipartículas se les asignó extrañeza opuesta a partir de sus partículas. Por ejemplo, en la reacción $\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + \Lambda^0$, el estado inicial tiene extrañeza $S = 0 + 0 = 0$, y el estado final tiene $S = +1 - 1 = 0$, de manera que la extrañeza se conserva. Pero para $\pi^- + \mathrm{p} \nrightarrow \mathrm{K}^0 + \mathrm{n}$, el estado inicial tiene $S = 0$ y el estado final tiene $S = +1 + 0 = +1$, de manera que la extrañeza no se conserva y esta reacción no se observa.

⚠ CUIDADO
Cantidades que se conservan parcialmente

Para explicar el decaimiento de las partículas extrañas, se supone que la extrañeza se conserva en la interacción fuerte, pero *no se conserva en la interacción débil*. En consecuencia, por conservación de la extrañeza, las partículas extrañas tienen prohibido decaer a partículas no extrañas de masa inferior mediante la interacción fuerte, pero podrían decaer mediante la interacción débil en los tiempos de vida más largos observados de 10^{-10} a 10^{-8} s.

La conservación de la extrañeza fue el primer ejemplo de una cantidad *que se conserva parcialmente*. En este caso, la cantidad extrañeza se conserva mediante interacciones fuertes, pero no por interacciones débiles.

EJEMPLO CONCEPTUAL 43–8 **Adivine cuál partícula falta.** Con las leyes de conservación en interacciones de partículas, determine las posibilidades para la partícula faltante en la reacción

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + ?$$

además de $\mathrm{K}^0 + \Lambda^0$ que se mencionaron anteriormente.

RESPUESTA Escribimos las ecuaciones para los números que se conservan en esta reacción, con B, L_e, S y Q como incógnitas cuya determinación revelará cuál sería la posible partícula:

Número bariónico: $0 + 1 = 0 + B$
Número leptónico: $0 + 0 = 0 + L_e$
Carga: $-1 + 1 = 0 + Q$
Extrañeza: $0 + 0 = 1 + S$.

La partícula producto desconocida deberá tener estas características:

$$B = +1 \qquad L_e = 0 \qquad Q = 0 \qquad S = -1.$$

Además de Λ^0, una partícula sigma neutra, Σ^0, también es congruente con estos números.

En la siguiente sección se estudiará otra cantidad que se conserva de manera parcial, a la que se le dio el nombre de **encanto**. El descubrimiento en 1974 de una partícula con encanto ayudó a solidificar una nueva teoría que implica a los quarks, que ahora se estudiará.

43–9 Quarks

Todas las partículas, excepto los bosones de norma (sección 43-6), son leptones o hadrones. Una diferencia entre estos dos grupos es que los hadrones interactúan por medio de la interacción fuerte, mientras que los leptones no lo hacen así.

Existe otra diferencia importante. Los seis leptones $(e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ se consideran como partículas verdaderamente fundamentales porque no muestran alguna estructura interna y no tienen tamaño medible. (Los intentos por determinar el tamaño de los leptones pusieron un límite superior de aproximadamente 10^{-18} m.) Por otra parte, existen cientos de hadrones, y los experimentos indican que tienen una estructura interna.

En 1963 M. Gell-Mann y G. Zweig propusieron que ninguno de los hadrones, ni siquiera los protones y neutrones, eran verdaderamente fundamentales, sino que, en vez de ello, estaban constituidos por combinaciones de tres entidades puntuales más fundamentales llamadas (un tanto caprichosamente) **quarks**.[†] En la actualidad, la teoría del quark es bien aceptada, y los quarks se consideran partículas verdaderamente fundamentales, como los leptones. Los tres quarks originalmente propuestos se designaron como u, d, s y tienen los nombres **arriba** (up), **abajo** (down) y **extraño** (strange). La teoría actual reconoce seis quarks, tal como hay seis leptones, con base en una supuesta simetría en la naturaleza. Los otros tres quarks se llaman **encanto**, **fondo o belleza** y **cima o verdad**. Los nombres también se aplican a nuevas propiedades de cada uno (números cuánticos *c*, *b*, *t*, por las iniciales de *charm*, *bottom* y *top*, que significan encanto, fondo y cima, respectivamente) que distinguen a los nuevos quarks de los anteriores (véase la tabla 43-3) y que (al igual que la extrañeza) se conservan en interacciones fuertes, pero no en las débiles.

[†]Gell-Mann eligió la palabra de una frase en el libro *Finnegans Wake* de James Joyce.

TABLA 43–3 Propiedades de los quarks (los antiquarks tienen signo opuesto *Q, B, S, c, t, b*)

Quarks								
Nombre	**Símbolo**	**Masa (MeV/c^2)**	**Carga *Q***	**Número bariónico *B***	**Extrañeza *S***	**Encanto *c***	**Fondo o belleza *b***	**Cima o verdad *t***
Arriba	u	2	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Abajo	d	5	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Extraño	s	95	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	−1	0	0	0
Encanto	c	1250	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	+1	0	0
Fondo o belleza	b	4200	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	−1	0
Cima o verdad	t	173,000	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	+1

TABLA 43–4 Lista parcial de hadrones pesados, con encanto y fondo o belleza ($L_e = L_\mu = L_\tau = 0$)

Categoría	Partícula	Anti-partícula	Espín	Masa (MeV/c^2)	Número bariónico B	Extrañeza S	Encanto c	Fondo o belleza b	Vida media (s)	Principales modos de decaimiento
Mesones	D^+	D^-	0	1869.4	0	0	+1	0	10.6×10^{-13}	K + otros, e + otros
	D^0	$\overline{D}^0$	0	1864.5	0	0	+1	0	4.1×10^{-13}	K + otros, μ ó e + otros
	D_S^+	D_S^-	0	1968	0	+1	+1	0	5.0×10^{-13}	K + otros
	J/ψ (3097)	Mismo	1	3096.9	0	0	0	0	$\approx 10^{-20}$	Hadrones, e^+e^-, $\mu^+\mu^-$
	Υ (9460)	Mismo	1	9460	0	0	0	0	$\approx 10^{-20}$	Hadrones, $\mu^+\mu^-$, e^+e^-, $\tau^+\tau^-$
	B^-	B^+	0	5279	0	0	0	−1	1.6×10^{-12}	D^0 + otros
	B^0	$\overline{B}^0$	0	5279	0	0	0	−1	1.5×10^{-12}	D^0 + otros
Bariones	Λ_c^+	Λ_c^-	$\frac{1}{2}$	2286	+1	0	+1	0	2.0×10^{-13}	Hadrones (por ejemplo, Λ + otros)
	Σ_c^{++}	Σ_c^{--}	$\frac{1}{2}$	2454	+1	0	+1	0	$\approx 10^{-21}$	$\Lambda_c^+\pi^+$
	Σ_c^+	Σ_c^-	$\frac{1}{2}$	2453	+1	0	+1	0	$\approx 10^{-21}$	$\Lambda_c^+\pi^0$
	Σ_c^0	$\overline{\Sigma}_c^0$	$\frac{1}{2}$	2454	+1	0	+1	0	$\approx 10^{-21}$	$\Lambda_c^+\pi^-$

Todos los quarks tienen espín $\frac{1}{2}$ y una carga eléctrica ya sea de $+\frac{2}{3}e$ o $-\frac{1}{3}e$ (esto es, una fracción de lo que anteriormente se consideraba la carga más pequeña e). Los antiquarks tienen signo opuesto de carga eléctrica Q, número bariónico B, extrañeza S, encanto c, belleza b y verdad t . En la tabla 43-3 se mencionan otras propiedades de los quarks.

Todos los hadrones se consideran como constituidos por combinaciones de quarks (más los gluones que los mantienen unidos) y sus propiedades se describen al observar su contenido de quarks. Los mesones consisten en un par quark-antiquark. Pro ejemplo, un mesón π^+ es una combinación $u\bar{d}$: Note que para el par $u\bar{d}$ (tabla 43-3), $Q = \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = +1e$, $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$, $S = 0 + 0 = 0$, como debe ser para un π^+; y un $K^+ = u\bar{s}$, con $Q = +1$, $B = 0$, $S = +1$.

Los bariones, por otra parte, consisten en tres quarks. Por ejemplo, un neutrón es n = ddu, mientras que un antiprotón es $\bar{p} = \bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$. Véase la figura 43-15. Todas las partículas extrañas contienen un quark s ó $\bar{s}$ mientras que las partículas encantadas contienen un quark c o $\bar{c}$. En la tabla 43-4 se mencionan algunos de estos hadrones.

Después de que se propuso la teoría de los quarks, los físicos comenzaron a buscar estas partículas con carga fraccional, pero la detección directa no ha tenido éxito. Los modelos actuales sugieren que los quarks podrían estar tan firmemente enlazados que es posible que no existan de manera individual en el estado libre. Pero las observaciones de electrones de muy alta energía dispersados a partir de protones sugieren que los protones, de hecho, están conformados por partículas constituyentes.

En la actualidad, se considera que las verdaderas **partículas elementales** son los seis quarks, los seis leptones y los bosones de norma que conducen las fuerzas fundamentales. Véase la tabla 43-5, donde los quarks y los leptones se ordenan en tres "familias" o "generaciones". La materia ordinaria (átomos hechos de protones, neutrones y electrones) se incluye en la "primera generación". Se piensa que los otros existieron en los inicios del Universo, y actualmente sólo se ven mediante poderosos aceleradores o en rayos cósmicos. Todos los cientos de hadrones se pueden explicar mediante combinaciones de los seis quarks y los seis antiquarks.

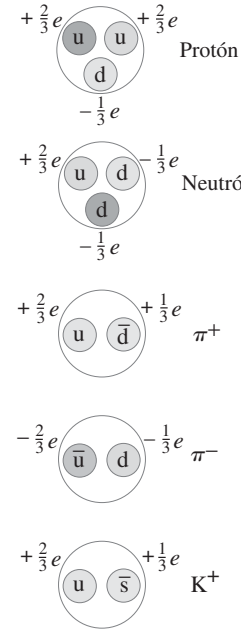
EJERCICIO D Regrese a las preguntas de inicio de capítulo, página 1164, y respóndalas de nuevo ahora. Trate de explicar por qué quizá usted las respondió de manera diferente la primera vez.

TABLA 43–5 Las partículas fundamentales† como se ven hoy

Bosones de norma	Fuerza		Primera generación	Segunda generación	Tercera generación
Gluones	Fuerte	Quarks	u, d	s, c	b, t
$W^\pm, Z_0$	Débil	Leptones	e, ν_e	μ, ν_μ	τ, ν_τ
γ(fotón)	EM				

†Tanto los quarks como los leptones se ordenan en tres generaciones.

FIGURA 43–15 Composiciones de quarks para varias partículas. (Véase el pliego a color al final del libro).



EJEMPLO CONCEPTUAL 43–9 **Combinaciones de quarks.** Determine el número bariónico, la carga y la extrañeza de las siguientes combinaciones de quarks e identifique la partícula hadrón que se constituye con estas combinaciones de quarks: *a*) udd, *b*) $u\bar{u}$, (*c*) uss, *d*) sdd y *e*) $b\bar{u}$.

RESPUESTA Con base en la tabla 43-3 determine las propiedades de los quarks, luego utilice la tabla 43-2 o la 43-4 para encontrar la partícula que tiene estas propiedades.

a) udd tiene

$$\begin{aligned} Q &= +\tfrac{2}{3}e - \tfrac{1}{3}e - \tfrac{1}{3}e = 0, \\ B &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = 1, \\ S &= 0 + 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

así como $c = 0$, belleza $= 0$, verdad $= 0$. El único barión ($B = +1$) que tiene $Q = 0$, $S = 0$, etcétera, es el neutrón (tabla 43-2).

b) $u\bar{u}$ tiene $Q = \frac{2}{3}e - \frac{2}{3}e = 0$, $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$, y todos los otros números cuánticos $= 0$. Suena como un π^0 ($d\bar{d}$ también da un π^0).

c) uss tiene $Q = 0$, $B = +1$, $S = -2$, otros $= 0$. Éste es un Ξ^0.

d) sdd tiene $Q = -1$, $B = +1$, $S = -1$, de manera que debe ser un Σ^-.

e) bu tiene $Q = -1$, $B = 0$, $S = 0$, $c = 0$, belleza $= -1$, verdad $= 0$. Éste debe ser un mesón B^- (tabla 43-4).

EJERCICIO E ¿Cuál es la composición de quarks de un mesón K^-?

43–10 El "modelo estándar": Cromodinámica cuántica (QCD) y la teoría electrodébil

No mucho tiempo después de que se propuso la teoría de los quarks, se sugirió que éstos tenían otra propiedad (o cualidad) llamada **color**, o "carga de color" (análoga a la carga eléctrica). La distinción entre los seis tipos de quarks (u, d, s, c, b, t) se designó como **sabor**. De acuerdo con la teoría, cada uno de los sabores de quark puede tener tres colores, por lo general designados rojo, verde y azul. (Éstos son los tres colores primarios que, cuando se suman en cantidades adecuadas, como en una pantalla de televisión, producen blanco). Advierta que los términos "color" y "sabor" no tienen nada que ver con los sentidos, sino que son meramente caprichosos, como otros nombres —como el de encanto— en este nuevo campo. (Sin embargo, en la figura 43-15 sí se "colorearon" los quarks; véase el pliego a color al final del libro.) Los antiquarks tienen colores antirrojo, antiverde y antiazul. Los bariones están constituidos por tres quarks, uno de cada color. Los mesones consisten en un par quark-antiquark de un color particular y su anticolor. Por consiguiente, bariones y mesones son incoloros o blancos.

Originalmente, la idea del color del quark se propuso para preservar el principio de exclusión de Pauli (sección 39-4). No todas las partículas obedecen el principio de exclusión. Las que lo hacen, como electrones, protones y neutrones, se llaman **fermiones**. Las que no lo obedecen se llaman **bosones**. Estas dos categorías se distinguen también por su espín (sección 39-2): los bosones tienen espín entero (0, 1, 2, etcétera), mientras que los fermiones tienen espín de medio entero, por lo general $\frac{1}{2}$ como en el caso de electrones y nucleones, pero otros fermiones tienen espín $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etcétera. La materia se constituye principalmente de fermiones, pero los portadores de las fuerzas (γ, W, Z y gluones) son todos bosones. Los quarks son fermiones (tienen espín $\frac{1}{2}$) y, por lo tanto, deben obedecer el principio de exclusión. Aunque para tres bariones particulares (uuu, ddd y sss) los tres quarks tendrían los mismos números cuánticos, y al menos dos quarks tendrían su espín en la misma dirección (pues sólo hay dos elecciones, espín hacia arriba $\left[m_s = +\frac{1}{2}\right]$ o espín hacia abajo $\left[m_s = -\frac{1}{2}\right]$). Esto parecería violar el principio de exclusión; pero si los quarks tienen un número cuántico adicional (color), que es diferente para cada quark, esto serviría para distinguirlos y permitir que el principio de exclusión se cumpla. Aunque el color de quark, y el resultante aumento triple en el número de quarks, originalmente fue una idea *ad hoc*, también sirvió para hacer que la teoría tuviera mayor concordancia con los experimentos, como los de predecir el tiempo de vida correcto del mesón π^0 y la tasa medida de producción de hadrones en las colisiones e^+e^- observadas en los aceleradores. La idea de color pronto se convirtió en una característica central de la teoría, pues determina la fuerza de enlace que mantiene unidos a los quarks en un hadrón.

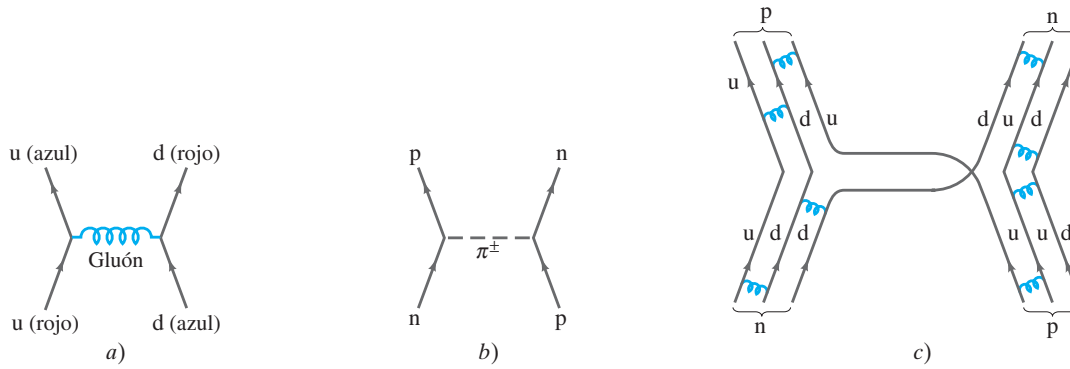


FIGURA 43–16 *a*) La fuerza entre dos quarks que los mantiene unidos como parte de un protón, por ejemplo, es conducida por un gluón, que en este caso implica un cambio en color. *b*) Interacción fuerte $n + p \rightarrow n + p$ con el intercambio de un mesón π con carga (+ o −, dependiendo de si se considera en movimiento hacia la izquierda o hacia la derecha). *c*) Representación de quarks de la misma interacción $n + p \rightarrow n + p$. Las espirales entre quarks representan intercambios de gluón que mantienen unidos a los hadrones. (El mesón de intercambio se puede considerar como $\bar{u}d$ emitido por el n y absorbido por el p, o como $u\bar{d}$ emitido por p y absorbido por n, porque un quark u (o d) que va hacia la izquierda en el diagrama es equivalente a un $\bar{u}$ (o $\bar{d}$) que va hacia la derecha).

Se supone que cada quark porta una *carga de color*, análoga a la carga eléctrica, y la fuerza fuerte entre quarks se conoce como **fuerza de color**. Esta teoría de la fuerza fuerte se llama **cromodinámica cuántica** (*croma* = color en griego), o **QCD** (por las siglas de *quantum chromodynamics*), para indicar que la fuerza actúa entre cargas de color (y no entre cargas eléctricas, por ejemplo). La fuerza fuerte entre dos hadrones se considera como una fuerza entre los quarks que los constituyen, como se sugiere en la figura 43-16. Las partículas que transmiten la fuerza de color (análoga a los fotones para la fuerza EM) se llaman **gluones** (por la palabra en inglés "glue", que significa pegamento). Se incluyen en las tablas 43-2 y 43-5. Existen ocho gluones, de acuerdo con la teoría, todos sin masa y todos con carga de color.†

Tal vez usted se pregunte qué ocurriría si intentáramos ver un solo quark con color, llegando a las profundidades de un hadrón para extraer un solo quark. Los quarks están tan firmemente enlazados a otros quarks que extraer uno requeriría una tremenda cantidad de energía, tanta que sería suficiente para crear más quarks ($E = mc^2$). De hecho, tales experimentos se llevan a cabo en los modernos colisionadores de partículas y todo lo que se obtiene son más hadrones (pares quark-antiquark, o tripletes, que se observan como mesones o bariones), pero nunca un quark aislado. Esta propiedad de los quarks, que siempre se enlazan en grupos que no tienen color, se llama **confinamiento**.

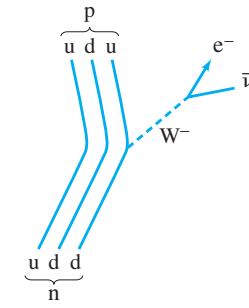
La fuerza de color tiene la interesante propiedad de que, conforme dos quarks se aproximan mucho uno hacia el otro (de manera equivalente, tienen alta energía), la fuerza entre ellos se reduce. Este aspecto se conoce como **libertad asintótica**.

Como hemos visto, la fuerza débil se considera mediada por las partículas W^+, W^- y Z^0. Actúa entre las "cargas débiles" que tiene cada partícula. En consecuencia, cada partícula elemental puede tener carga eléctrica, carga débil, carga de color y masa gravitacional, aunque una o más de éstas podrían ser cero. Por ejemplo, todos los leptones tienen una carga de color igual a cero, así que no interactúan mediante la fuerza fuerte.

EJEMPLO CONCEPTUAL 43–10 **Decaimiento beta.** Dibuje un diagrama de Feynmann que muestre lo que ocurre en un decaimiento beta utilizando quarks.

RESPUESTA El decaimiento beta es resultado de la interacción débil, y el mediador es una partícula $W^{\pm}$ o una Z^0. Lo que ocurre, en parte, es que un neutrón (quarks udd) decae en un protón (uud). Aparentemente un quark d (carga $-\frac{1}{3}e$) se convierte en un quark u (carga $+\frac{2}{3}e$). Conservación de carga significa que un quark d emitió una partícula con carga negativa, a saber, una W^-. Dado que un electrón y un antineutrino aparecen en el estado final, deben provenir del decaimiento del W^- virtual, como se muestra en la figura 43-17.

FIGURA 43–17 Representación de quarks del diagrama de Feynmann para decaimiento β de un neutrón en un protón.



†Compare con la interacción EM, donde el fotón no tiene carga eléctrica. Puesto que los gluones tienen carga de color, podrían atraerse mutuamente y formar partículas compuestas (los fotones no pueden). En la actualidad se buscan tales "glueballs" (bolas de pegamento).

Para resumir, el modelo estándar dice que las verdaderas partículas fundamentales (tabla 43-5) son los leptones, los quarks y los bosones de norma (fotón, W y Z, y los gluones). El fotón, los leptones, y las partículas W^+, W^- y Z^0 se han observado en experimentos. Pero hasta el momento sólo se han observado combinaciones de quarks (bariones y mesones), y parece probable que los quarks libres y los gluones sean inobservables.

Un aspecto importante del trabajo teórico es el intento por encontrar una base **unificada** para las diferentes fuerzas en la naturaleza. Éste fue un ferviente deseo de Einstein, que nunca pudo satisfacer. S. Weinberg, S. Glashow y A. Salam propusieron en la década de 1960 una llamada **teoría de norma** que unifica las interacciones débil y electromagnética. En esta **teoría electrodébil**, las fuerzas débil y electromagnética se ven como dos manifestaciones diferentes de una sola interacción más fundamental, la *electrodébil*. La teoría electrodébil ha tenido muchos éxitos, incluida la predicción de las partículas $W^{\pm}$ como portadoras de la fuerza débil, con masas de $80.38 \pm 0.02\ \text{GeV}/c^2$ en excelente concordancia con los valores medidos de $80.403 \pm 0.029\ \text{GeV}/c^2$ (y similar exactitud para la Z^0).

La combinación de la teoría electrodébil más QCD para la interacción fuerte con frecuencia se conoce en la actualidad como **modelo estándar**.

EJEMPLO 43–11 ESTIMACIÓN **Rango de la fuerza débil.** La fuerza nuclear débil es de muy corto alcance, lo que significa que sólo actúa sobre una distancia muy corta. Estime su rango empleando las masas (tabla 43-2) de $W^{\pm}$ y Z: $m \approx 80$ o $90\ \text{GeV}/c^2 \approx 10^2\ \text{GeV}/c^2$.

PLANTEAMIENTO Suponemos que las partículas de intercambio $W^{\pm}$ o Z^0 pueden existir durante un tiempo Δt dado por el principio de incertidumbre, $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$, donde $\Delta E \approx mc^2$ es la energía necesaria para crear la partícula virtual ($W^{\pm}$, Z) que conduce la fuerza débil.

SOLUCIÓN Sea Δx la distancia que puede recorrer la partícula virtual W o Z antes de que se reabsorba dentro del tiempo $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$. Para encontrar un límite superior sobre Δx, y por lo tanto el rango máximo de la fuerza débil, dejamos que W o Z viajen cerca de la rapidez de la luz, de manera que $\Delta x \lesssim c\,\Delta t$. Al recordar que $1\ \text{GeV} = 1.6 \times 10^{-10}\ \text{J}$, entonces

$$\Delta x \lesssim c\,\Delta t \approx \frac{c\hbar}{\Delta E} \approx \frac{(3 \times 10^8\ \text{m/s})(10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})}{(10^2\ \text{GeV})(1.6 \times 10^{-10}\ \text{J/GeV})} \approx 10^{-18}\ \text{m}.$$

De hecho, éste es un rango muy pequeño.

NOTA Compare esto con la fuerza electromagnética cuyo rango es infinito ($1/r^2$ nunca se vuelve cero para cualquier r finito), lo cual tiene sentido porque la masa de su partícula virtual de intercambio, el fotón, es cero (en el denominador de la ecuación anterior).

En la sección 43-2 se hizo un cálculo similar para la fuerza fuerte, y se estimó la masa del mesón π como partícula de intercambio entre nucleones, con base en el rango aparente de 10^{-15} m (tamaño de núcleos). Éste es sólo un aspecto de la fuerza fuerte. En la visión más profunda, esto es, la fuerza de color entre quarks dentro de un nucleón, los gluones tienen masa cero, lo que implica (véase la fórmula anterior en el ejemplo 43-11) un rango infinito. Podría esperarse un rango de aproximadamente 10^{-15} m; pero de acuerdo con el modelo estándar, la fuerza de color es débil a distancias muy cortas y aumenta considerablemente con la distancia (lo que causa confinamiento de quarks). Por consiguiente, su rango podría ser infinito.

Los teóricos se preguntan por qué W y Z tienen masas tan grandes en lugar de no tener masa, como el fotón. La teoría electrodébil sugiere una explicación mediante un hipotético **campo de Higgs** y su partícula, el **bosón de Higgs**, que interactúa con W y Z para "frenarlas". Al verse forzadas a viajar más lentamente que la rapidez de la luz, deberían tener masa ($m = 0$ sólo si $v = c$). De hecho, se cree que el Higgs permea el vacío ("espacio vacío") y quizá confiere masa a todas las partículas con masa al frenarlas. La búsqueda del bosón de Higgs será una prioridad para los físicos de partículas elementales que realicen experimentos en el Gran Colisionador de Hadrones del CERN (sección 43-1). Hasta el momento, la investigación sugiere que la masa del Higgs es mayor que $115\ \text{GeV}/c^2$, aunque se espera tenga una masa no mayor de $1\ \text{TeV}/c^2$. Habrá que estar pendientes de ello.

43–11 Teorías de la gran unificación

El modelo estándar, a pesar de todo su éxito, no puede explicar algunos temas importantes, como por qué la carga en el electrón tiene *exactamente* la misma magnitud que la carga del protón. Esto es crucial, porque si las magnitudes de carga fueran apenas ligeramente diferentes, los átomos no serían neutros y las grandes fuerzas eléctricas resultantes seguramente habrían impedido toda posibilidad de vida. De hecho, el modelo estándar ahora se considera como una aproximación de baja energía de una teoría más completa.

Con el éxito de la teoría electrodébil unificada, los teóricos intentan incorporarla, junto con la QCD, para la fuerza fuerte (de color), en una llamada **teoría de la gran unificación** (TGU).

Una de esas teorías de la gran unificación ha trabajado con las fuerzas electromagnética, débil y fuerte en la que sólo hay una clase de partícula (leptones y quarks pertenecen a la misma familia y son capaces de cambiar libremente de un tipo al otro) y las tres fuerzas son diferentes aspectos de una sola fuerza fundamental. Sin embargo, se predice que la unidad sólo ocurrirá a una escala menor a aproximadamente 10^{-31} m, lo que corresponde a una energía de partícula de alrededor de 10^{16} GeV. Si dos partículas elementales (leptones o quarks) se aproximan una hacia otra dentro de esta **escala de unificación**, la distinción aparentemente fundamental entre ellas no existiría a este nivel, y un quark fácilmente podría transformarse en un leptón, o viceversa. Los números bariónico y leptónico no se conservarían. Las fuerzas débil, electromagnética y fuerte (de color) se mezclarían en una fuerza de una sola intensidad.

Lo que ocurre entre la distancia de unificación de 10^{-31} m y las distancias más normales (que son mayores) se conoce como **rompimiento de simetría**. Como analogía, considere un átomo de un cristal. Dentro del átomo hay mucha simetría: en las regiones más internas la nube de electrones tiene simetría esférica (capítulo 39). Más lejos, esta simetría se rompe: las nubes de electrones se distribuyen preferentemente a lo largo de las líneas (enlaces) que unen los átomos en el cristal. En forma similar, a 10^{-31} m, se teoriza que la fuerza entre partículas elementales es una sola fuerza, es simétrica y no singulariza un tipo de "carga" sobre otro. Pero a distancias mayores, esa simetría se rompe y se observan tres fuerzas diferentes. (En el "modelo estándar" de interacciones electrodébiles, sección 43-10, el rompimiento de simetría entre las interacciones electromagnética y débil ocurre aproximadamente a 10^{-18} m).

EJEMPLO CONCEPTUAL 43–12 **Simetría.** La mesa en la figura 43-18 tiene cuatro servicios idénticos disponibles. Cuatro personas se sientan a comer. Describa la simetría de esta mesa y qué le sucede cuando alguien comienza a comer.

RESPUESTA La mesa tiene varios tipos de simetría. Es simétrica a rotaciones de 90º: esto es, la mesa parecerá la misma si todos los comensales se recorren una silla hacia la izquierda o hacia la derecha. También es simétrica en dirección norte-sur y este-oeste, de manera que si los comensales cambian de lugar con quien está enfrente, la forma como se ve la mesa no resulta afectada. Tampoco importa si cualquiera de ellos toma el tenedor a la izquierda del plato o el tenedor a la derecha. Pero una vez que la primera persona toma un tenedor, se impone la opción para todo el resto de la mesa. La simetría se *rompe*. La simetría fundamental todavía está ahí (los vasos aún se podrían elegir de cualquier forma), pero se tiene que hacer alguna elección y en ese momento la simetría de los comensales se rompe.

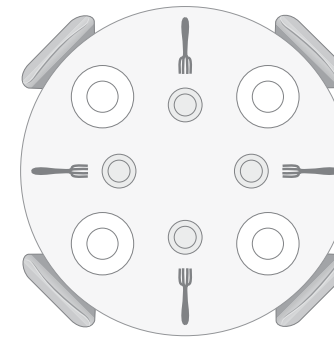


FIGURA 43–18 Simetría en torno a una mesa. Ejemplo 43-12.

Otro ejemplo de rompimiento de simetría es un lápiz colocado verticalmente sobre su punta antes de caer. Al estar en posición vertical, parece igual desde cualquier dirección horizontal. Desde arriba, es un pequeño círculo. Pero cuando cae a la mesa, apunta en una dirección particular: la simetría se rompe.

Decaimiento de protones

Puesto que la unificación se considera que ocurre a distancias tan pequeñas y enormes energías, la teoría es difícil de poner a prueba de manera experimental. Pero no es del todo imposible. Una predicción comprobable es la idea de que el protón puede decaer (mediante, por ejemplo, $p \rightarrow \pi^0 + e^+$) y violar la conservación del número bariónico. Esto podría ocurrir si dos quarks se aproximan a menos de 10^{-31} m uno de otro. Pero es muy improbable a temperatura y energía normales, así que el decaimiento de un protón sólo puede ser un proceso improbable. En la forma más simple de la TGU, la

estimación teórica de la vida media del protón para el modo de decaimiento $p \rightarrow \pi^0 + e^+$ es aproximadamente 10^{31} años, y ahora está dentro del terreno de lo verificable.[†] Los decaimientos de protón todavía no se han visto, y los experimentos colocan el límite inferior de la vida media del protón para el modo anterior en alrededor de 10^{33} años, un poco mayor que esta predicción. Esto parece ser una desilusión, pero por otra parte supone un reto. De hecho, este resultado no afecta a las TGU más complejas.

EJEMPLO 43–13 ESTIMACIÓN **Decaimiento de protón.** Un experimento usa 3300 toneladas de agua con la esperanza de ver un decaimiento de protón del tipo $p \rightarrow \pi^0 + e^+$. Si el experimento se realiza durante 4 años sin detectar un decaimiento, estime el límite inferior de la vida media del protón.

PLANTEAMIENTO Al igual que sucede con el decaimiento radiactivo, el número de decaimientos es proporcional al número de especies precursoras (N), el intervalo de tiempo (Δt) y la constante de decaimiento (λ) que se relaciona con la vida media τ mediante (véanse las ecuaciones 41-4 y 41-9a):

$$\Delta N = -\lambda N \, \Delta t = -\frac{N \, \Delta t}{\tau}.$$

SOLUCIÓN Al tratar sólo con magnitudes, despejamos τ:

$$\tau = \frac{N \, \Delta t}{\Delta N}.$$

Por lo tanto, para $\Delta N < 1$ durante el ensayo de cuatro años,

$$\tau > N\,(4 \text{ años}),$$

donde N es el número de protones en 3300 toneladas de agua. Para determinar N, note que cada molécula de H_2O contiene $2 + 8 = 10$ protones. Así que un mol de agua (18 g, 6×10^{23} moléculas) contiene $10 \times 6 \times 10^{23}$ protones en 18 g de agua, o aproximadamente 3×10^{26} protones por kilogramo. Una tonelada es 10^3 kg, así que la cámara contiene $(3 \times 10^{26}$ kg$)(3 \times 10^{26}$ protones/kg$) \approx 1 \times 10^{33}$. Entonces la estimación para un límite inferior de la vida media del protón es $\tau > (10^{33})(4 \text{ años}) \approx 4 \times 10^{33}$ años.

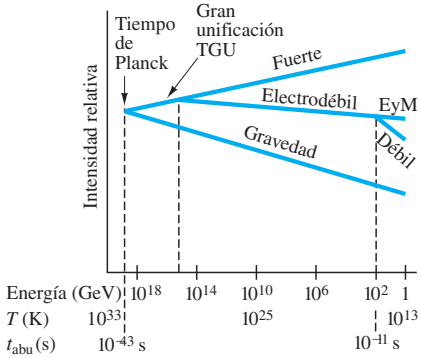


FIGURA 43–19 Gráfica de tiempo y energía de las cuatro fuerzas fundamentales, unificada al tiempo de Planck, y cómo se condensa cada una. El símbolo t_{abu} significa tiempo después (*after*) del nacimiento (*birth*) del universo. Note que la energía de partícula típica (y la temperatura promedio del Universo) disminuye hacia la derecha, conforme aumenta el tiempo después de la Gran Explosión. En el siguiente capítulo se estudiará la Gran Explosión.

TGU y cosmología

Una interesante predicción de las teorías de la unificación se relaciona con la cosmología (capítulo 44). Se cree que durante los primeros 10^{-35} s después de la Gran Explosión (Big Bang) que, de acuerdo con la teoría, creó el Universo, la temperatura fue tan extremadamente alta que las partículas tenían energías correspondientes a la escala de unificación. Entonces el número bariónico no se habría conservado, lo que tal vez permitió un desequilibrio que podría explicar el predominio observado de la materia ($B > 0$) sobre la antimateria ($B < 0$) en el Universo. El hecho de que estemos rodeados por materia, sin antimateria significativa a la vista, se considera un problema en búsqueda de una explicación (que no brinda el modelo estándar). Véase también el capítulo 44. A esto se le llama el **problema materia-antimateria**. Para comprenderlo tal vez habría que recurrir a fenómenos aún sin descubrir, quizá relacionados con quarks o neutrinos, o el bosón de Higgs o la supersimetría (próxima sección).

Este último ejemplo es interesante, porque ilustra una profunda conexión entre investigaciones en cualquier extremo de la escala de tamaño: teorías acerca de los objetos más pequeños (partículas elementales) que tienen una fuerte relación con la comprensión del Universo a gran escala. En el siguiente capítulo se tratará esto con más detalle.

La figura 43-19 es un diagrama que indica cómo se "condensaron" las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza (se rompió una simetría) conforme transcurrió el tiempo después de la Gran Explosión (capítulo 44), y cómo disminuyó la temperatura media del Universo y la energía de partícula típica.

[†]Esto es mucho mayor que la edad del Universo ($\approx 14 \times 10^9$ años). Pero no es necesario esperar 10^{31} años para verlo. En vez de ello se puede esperar un decaimiento entre 10^{31} protones durante un año (véanse las ecuaciones 41-4 y 41-9a, $\Delta N = \lambda N \, \Delta t = N \, \Delta t/\tau$).

43–12 Cuerdas y supersimetría

Hemos visto que el modelo estándar es incapaz de enfrentar importantes temas experimentales, y que los teóricos atacan el problema como experimentadores en busca de nuevos datos, partículas y conceptos.

Aun más ambiciosos que las teorías de la gran unificación son los intentos por incorporar también la gravedad, que, por lo tanto, reunirían a las cuatro fuerzas en la naturaleza en una sola teoría. (Tales teorías a veces se conocen engañosamente como **teorías del todo**). Existen teorías consistentes que intentan unificar las cuatro fuerzas llamadas **teorías de cuerdas**, en las que cada partícula fundamental (tabla 43-5) se imagina no como un punto, sino como una cuerda unidimensional, de quizá 10^{-35} m de largo, que vibra en un patrón de onda estacionaria particular. (Podríamos decir que cada partícula es una nota diferente sobre una pequeña cuerda estirada). Las teorías más complejas proponen las entidades fundamentales como **branas** multidimensionales (el vocablo *brana* proviene de membranas bidimensionales).

Una idea relacionada que también va más allá del modelo estándar es la **supersimetría**, que aplicada a las cuerdas se conoce como **teoría de supercuerdas**. La supersimetría, que desarrollaron Bruno Zumino (n. 1923) y Julius Wess (1934-2007), predice que existen interacciones que transformarían fermiones en bosones y viceversa, y que cada fermión conocido tendría un compañero bosón supersimétrico de la misma masa. Así, para cada quark (un fermión), habría un **squark** (un *bosón*) o quark "supersimétrico". Para cada leptón habría un **sleptón**. Del mismo modo, para cada bosón conocido (fotones y gluones, por ejemplo), habría un fermión supersimétrico (**fotinos** y **gluinos**). La supersimetría también predice que un *gravitón*, que transmite la fuerza de gravedad, tiene un compañero, el **gravitino**. Las partículas supersimétricas en ocasiones se llaman "SUSY" (por *supersymmetric* en inglés) para abreviar, y son candidatas para la "materia oscura" del Universo (que se estudia en el capítulo 44). Pero, ¿por qué no se ha detectado esta "parte perdida" del Universo? La mejor suposición es que las partículas supersimétricas pueden ser más pesadas que sus contrapartes convencionales, tal vez demasiado pesadas para producirse en los aceleradores actuales. Una búsqueda de partículas supersimétricas ya está en la agenda de trabajo del Gran Colisionador de Hadrones del CERN.

Las versiones de la supersimetría predicen otras propiedades interesantes, por ejemplo, que el espacio tiene 11 dimensiones, pero 7 de ellas están "enrolladas" de manera que normalmente sólo se aprecian las cuatro dimensiones del espacio-tiempo. Los científicos quisieran saber si existen dimensiones adicionales y cuántas son, además de cómo y por qué se esconden. Esperan tener algunas respuestas a partir del nuevo LHC y del futuro ILC (sección 43-1).

El mundo de las partículas elementales está abierto a nuevos panoramas. Lo que ocurra en el futuro promete ser emocionante.

Resumen

Los **aceleradores de partículas** se usan para acelerar partículas con carga, como electrones y protones, a muy alta energía. Las partículas de alta energía tienen longitud de onda corta y, por lo tanto, se pueden usar para sondear la estructura de la materia con más detalle (a distancias muy pequeñas). La alta energía cinética también permite la creación de nuevas partículas a través de colisiones (mediante $E = mc^2$).

Los **ciclotrones** y **sincrotrones** usan un campo magnético para mantener las partículas en una trayectoria circular y acelerarlas a intervalos mediante alto voltaje. Los **aceleradores lineales** aceleran partículas a lo largo de una línea. Los **haces colisionantes** permiten mayor energía de interacción.

Una **antipartícula** tiene la misma masa que una partícula, pero carga opuesta. Otras propiedades también son opuestas: por ejemplo, el antiprotón tiene **número bariónico** (número de nucleón) opuesto ($B = -1$) al del protón ($B = +1$).

En todas las reacciones nucleares y de partículas se cumplen las siguientes leyes de conservación: cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular, masa-energía, carga eléctrica, número bariónico y **números leptónicos**.

Ciertas partículas tienen una propiedad llamada **extrañeza**, que se conserva mediante la fuerza fuerte, pero no por la fuerza débil. Las propiedades **encanto**, **belleza** y **verdad** también se conservan mediante la fuerza fuerte, pero no por la fuerza débil.

Así como se puede decir que la fuerza electromagnética se debe a un intercambio de fotones, la fuerza nuclear fuerte es transportada por los **gluones** sin masa. Las partículas W y Z conducen la fuerza débil. Estos portadores de fuerza fundamental (fotón, W y Z, gluones) se llaman **bosones de norma**.

Otras partículas se pueden clasificar ya sea como *leptones* o como *hadrones*. Los **leptones** participan sólo en las interacciones gravitacional, débil y electromagnética. Los **hadrones**, que en la actualidad se consideran constituidos por **quarks**, participan en las cuatro interacciones, incluida la interacción fuerte. Los hadrones se clasifican en **mesones**, con número bariónico cero, y **bariones**, con número bariónico distinto de cero.

Todas las partículas, excepto los fotones, electrones, neutrinos y protones, decaen con vidas medias medibles que varían de 10^{-25} a 10^{3} s. La vida media depende de cuál fuerza es predominante. Los decaimientos débiles por lo general tienen vidas medias mayores que aproximadamente 10^{-13} s. Los decaimientos electromagnéticos generalmente tienen vidas medias del orden de 10^{-16} a 10^{-19} s. Las partículas con vidas más cortas, llamadas **resonancias**, decaen mediante la interacción fuerte y por lo general viven sólo durante aproximadamente 10^{-23} s.

El modelo estándar actual de las partículas elementales considera a los **quarks** como los bloques constructores básicos de los hadrones. Los seis "sabores" de quark se llaman **arriba**, **abajo**, **extraño**, **encanto**, **fondo o belleza** y **cima o verdad**. Se espera que haya el mismo número de quarks que de leptones (seis de cada uno) y que quarks y leptones sean las verdaderas partículas elementales junto con los bosones de norma (γ, W, Z, gluones). Se dice que los quarks tienen **color** y, de acuerdo con la **cromodinámica cuántica** (QCD), la fuerza de color fuerte actúa entre sus cargas de color y se transmite mediante **gluones**. La **teoría electrodébil** ve a las fuerzas débil y electromagnética como dos aspectos de una sola interacción fundamental. La QCD más la teoría electrodébil se conocen como **modelo estándar**.

Las **teorías de la gran unificación** de las fuerzas sugieren que, a distancia muy corta (10^{-31} m) y energía muy alta, las fuerzas débil, electromagnética y fuerte aparecen como una sola fuerza, y que la diferencia fundamental entre quarks y leptones desaparece.

De acuerdo con la **teoría de cuerdas**, las partículas fundamentales podrían ser pequeñas cuerdas, de 10^{-35} m de largo, que se distinguen mediante su patrón de onda estacionaria. La **supersimetría** sostiene que cada fermión (o bosón) tiene un compañero bosón (o fermión) correspondiente.

Preguntas

1. Indique una reacción entre dos nucleones, similar a la ecuación 43-4, que pueda producir un π^-.
2. Si un protón se desplaza a rapidez muy alta, de manera que su energía cinética es mucho mayor que su energía en reposo (mc^2), ¿podría decaer mediante $p \rightarrow n + \pi^+$?
3. ¿En qué consistiría un "antiátomo", formado por las antipartículas de los constituyentes de los átomos normales? ¿Qué ocurriría si *antimateria*, hecha de tales antiátomos, entrara en contacto con el mundo de materia normal?
4. ¿Qué partícula en un decaimiento señala la interacción electromagnética?
5. *a*) ¿La presencia de un neutrino entre los productos de decaimiento de una partícula necesariamente significa que el decaimiento ocurre mediante la interacción débil? *b*) ¿Todos los decaimientos mediante la interacción débil producen un neutrino? Explique.
6. ¿Por qué un neutrón decae mediante la interacción débil aun cuando el neutrón y uno de sus productos de decaimiento (protón) interactúan fuertemente?
7. ¿En cuál de las cuatro interacciones (fuerte, electromagnética, débil, gravitacional) toma parte un electrón? ¿Un neutrino? ¿Un protón?
8. Compruebe que la carga y el número bariónico se conservan en cada uno de los decaimientos de la tabla 43-2.
9. ¿Cuál de los decaimientos de partícula que se mencionan en la tabla 43-2 ocurre mediante la interacción electromagnética?
10. ¿Cuál de los decaimientos de partícula que se mencionan en la tabla 43-2 ocurre por la interacción débil?
11. El barión Δ tiene espín $\frac{3}{2}$, número bariónico 1 y carga $Q = +2$, $+1$, 0 o -1. ¿Por qué no hay estado de carga $Q = -2$?
12. ¿Cuál de los decaimientos de partícula en la tabla 43-4 ocurre mediante la interacción electromagnética?
13. ¿Cuál de los decaimientos de partícula en la tabla 43-4 ocurre mediante la interacción débil?
14. Los quarks tienen espín $\frac{1}{2}$. ¿Cómo explica el hecho de que los bariones tengan espín $\frac{1}{2}$ ó $\frac{3}{2}$, y los mesones tengan espín 0 o 1?
15. Suponga que hay un tipo de "neutrinito" que no tiene masa, no tiene carga de color ni carga eléctrica, y que no siente la fuerza débil. ¿Podría decir que esta partícula incluso existe?
16. ¿Es posible que una partícula sea tanto *a*) leptón como barión? *b*) ¿Barión y hadrón? *c*) ¿Mesón y quark? *d*) ¿Hadrón y leptón? Explique.
17. Con base en las ideas de la cromodinámica cuántica, ¿sería posible encontrar partículas constituidas con dos quarks y ningún antiquark? ¿Y dos quarks y dos antiquarks?
18. ¿Por qué los neutrones pueden decaer cuando son libres, pero no cuando están dentro de un núcleo estable?
19. ¿Es posible la reacción $e^- + p \rightarrow n + \bar{\nu}_e$? Explique.
20. Ocasionalmente, Λ decaerá mediante la siguiente reacción: $\Lambda^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$. ¿Cuál de las cuatro fuerzas en la naturaleza es responsable de este decaimiento? ¿Cómo lo sabe?

Problemas

43–1 Partículas y aceleradores

1. (I) ¿Cuál es la energía total de un protón cuya energía cinética es 4.65 GeV?
2. (I) Calcule la longitud de onda de electrones de 28 GeV.
3. (I) ¿Qué intensidad de campo magnético se usa en un ciclotrón donde los protones realizan 3.1×10^7 revoluciones por segundo?
4. (I) ¿Cuál es el tiempo para una revolución completa de un protón de muy alta energía en el acelerador Fermilab de 1.0 km de radio?
5. (I) Si partículas α se aceleran mediante el ciclotrón del ejemplo 43-2, ¿cuál debe ser la frecuencia del voltaje aplicado a las "des"?
6. (II) *a*) Si el ciclotrón del ejemplo 43-2 acelera partículas α, ¿qué energía máxima podría lograr? ¿Cuál sería su rapidez? *b*) Repita el cálculo para deuterones ($^2_1$H). *c*) En cada caso, ¿qué frecuencia de voltaje se requiere?
7. (II) ¿Qué es mejor para conocer detalles del núcleo: partículas alfa de 25 MeV o protones de 25 MeV? Compare cada una de sus longitudes de onda con el tamaño de un nucleón en un núcleo.
8. (II) ¿Qué intensidad de campo magnético se necesita en el sincrotrón Fermilab de 1.0 km de radio para protones de 1 TeV?
9. (II) ¿Qué campo magnético se requiere para los protones de 7.0 TeV en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) de 4.25 km de radio?
10. (II) Un ciclotrón con un radio de 1.0 m acelerará deuterones ($^2_1$H) a una energía de 12 MeV. *a*) ¿Cuál es el campo magnético requerido? *b*) ¿Qué frecuencia se necesita para el voltaje entre las "des"? *c*) Si la diferencia de potencial entre las "des" promedia 22 kV, ¿cuántas revoluciones darán las partículas antes de salir? *d*) ¿Cuánto tiempo tarda un deuterón en ir desde el inicio hasta la salida? *e*) Estime cuánto recorre durante este tiempo.
11. (II) ¿Cuál es la longitud de onda (= tamaño mínimo resoluble) de protones de 7.0 TeV?
12. (II) El Tevatrón Fermilab de 1.0 km de radio tarda aproximadamente 20 segundos en llevar las energías de los protones almacenados de 150 GeV a 1.0 TeV. La aceleración se realiza una vez por vuelta. Estime la energía impartida a los protones en cada vuelta. (Puede suponer que la rapidez de los protones en esencia es c todo el tiempo).
13. (II) Demuestre que la energía de una partícula (carga e) en un sincrotrón, en el límite relativista ($v \approx c$), está dada por E (en eV) = Brc, donde B es el campo magnético y r es el radio de la órbita (unidades del SI).

43–2 a 43–6 Interacciones de partículas, intercambio de partículas

14. (I) ¿Aproximadamente cuánta energía se libera cuando una Λ^0 decae a $n + \pi^0$? (Véase la tabla 43-2).

15. (I) ¿Cuánta energía se libera en el decaimiento

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu?$$

Véase la tabla 43-2.

16. (I) Estime el rango de la fuerza fuerte si la partícula mediadora fuera un kaón en lugar de un pión.

17. (I) ¿Cuánta energía se requiere para producir un par neutrón-antineutrón?

18. (II) Determine la energía que se libera cuando Σ^0 decae a Λ^0 y luego a un protón.

19. (II) Dos protones se dirigen uno hacia otro con igual rapidez. ¿Qué energía cinética mínima debe tener cada uno si en el proceso se debe crear un mesón π^0? (Véase la tabla 43-2).

20. (II) ¿Qué energía cinética mínima debe tener cada uno de dos neutrones, si viajan con la misma rapidez uno hacia otro, chocan y producen un par K^+K^- además de ellos mismos? (Véase la tabla 43-2.)

21. (II) Para el decaimiento $K^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e$, determine la máxima energía cinética de *a*) el positrón y *b*) el π^-. Suponga que K^0 está en reposo.

22. (II) ¿Cuáles son las longitudes de onda de los dos fotones que se producen cuando se aniquilan un protón y un antiprotón en reposo?

23. (II) La Λ^0 no puede decaer mediante las siguientes reacciones. ¿Cuáles leyes de conservación se violan en cada una de las reacciones?

a) $\Lambda^0 \not\rightarrow n + \pi^-$

b) $\Lambda^0 \not\rightarrow p + K^-$

c) $\Lambda^0 \not\rightarrow \pi^+ + \pi^-$

24. (II) Para el decaimiento $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, calcule *a*) el valor Q (energía liberada) y *b*) la energía cinética de p y π^-, suponiendo que Λ^0 decae desde el reposo. (Use fórmulas relativistas).

25. (II) *a*) Demuestre, mediante conservación de cantidad de movimiento y de energía, que es imposible que un electrón aislado irradie únicamente un fotón. *b*) Con este resultado en mente, ¿cómo podría defender el diagrama de intercambio de fotones de la figura 43-8?

26. (II) ¿Cuáles serían las longitudes de onda de los dos fotones que se producen cuando un electrón y un positrón, cada uno con 420 keV de energía cinética, se aniquilan en una colisión frontal?

27. (II) En el raro decaimiento $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$, ¿cuál es la energía cinética del positrón? Suponga decaimientos π^+ desde el reposo.

28. (II) ¿Cuáles de las siguientes reacciones y decaimientos son posibles? Para aquellos que son prohibidos, explique cuáles leyes se violan.

a) $\pi^- + p \rightarrow n + \eta^0$

b) $\pi^+ + p \rightarrow n + \pi^0$

c) $\pi^+ + p \rightarrow p + e^+$

d) $p \rightarrow e^+ + \nu_e$

e) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu$

f) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$

29. (II) Calcule la energía cinética de cada uno de los dos productos en el decaimiento $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$. Suponga que Ξ^- decae desde el reposo.

30. (II) Es posible producir antiprotones cuando un protón con suficiente energía choca con un protón estacionario. ¿Cuál de las siguientes reacciones no ocurrirá incluso si hay suficiente energía?

$$p + p \rightarrow p + \bar{p}$$
$$p + p \rightarrow p + p + \bar{p}$$
$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$
$$p + p \rightarrow p + e^+ + e^+ + \bar{p}$$

31. (III) Calcule la máxima energía cinética del electrón cuando un muón decae desde el reposo mediante $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. [*Sugerencia:* ¿En qué dirección se mueven los dos neutrinos en relación con el electrón para impartir a este último la máxima energía cinética? Tanto la energía como la cantidad de movimiento se conservan; use fórmulas relativistas].

32. (III) ¿Se produciría un mesón π^+ si un protón de 110 MeV choca con un protón en reposo? ¿Qué energía cinética mínima debe tener el protón entrante?

43–7 a 43–11 Resonancias, modelo estándar, quarks, QCD, TGU

33. (I) La vida media de la partícula Σ^0 es 7×10^{-20} s. ¿Cuál es la incertidumbre en su energía en reposo? Exprese su respuesta en MeV.

34. (I) El ancho medido del mesón ψ (3686) es aproximadamente 300 keV. Estime su vida media.

35. (I) El ancho medido del mesón J/ψ es 88 keV. Estime su vida media.

36. (I) El mesón B^- es una combinación $b\bar{u}$ de quarks. *a*) Demuestre que esto es consistente para todos los números cuánticos. *b*) ¿Cuáles son las combinaciones de quarks par B^+, B^0, $\bar{B}^0$?

37. (I) ¿Cuál es el ancho de energía (o incertidumbre) de *a*) η^0 y *b*) ρ^+? Consulte la tabla 43-2.

38. (II) ¿Cuáles de los siguientes decaimientos son posibles? Para aquellos que son prohibidos, explique cuáles leyes se violan.

a) $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$

b) $\Omega^- \rightarrow \Sigma^0 + \pi^- + \nu$

c) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma + \gamma$

39. (II) ¿Cuáles combinaciones de quarks producen *a*) un barión Ξ^0 un barión Ξ^-?

40. (II) ¿Cuáles son las combinaciones de quark que pueden formar *a*) un neutrón, *b*) un antineutrón, *c*) una Λ^0, *d*) una $\bar{\Sigma}^0$?

41. (II) ¿Qué partículas producen las siguientes combinaciones de quarks: *a*) uud, *b*) $\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{s}$, *c*) $\bar{u}s$, *d*) $d\bar{u}$, *e*) $\bar{c}s$?

42. (II) ¿Cuál es la combinación de quarks necesaria para producir un mesón D^0 ($Q = B = S = 0, c = +1$)?

43. (II) El mesón D_S^+ tiene $S = c = +1, B = 0$. ¿Qué combinación de quarks lo produciría?

44. (II) Dibuje un posible diagrama de Feynman empleando quarks (como en la figura 43-16c) para la reacción $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$.

45. (II) Dibuje un diagrama de Feynman para la reacción $n + \nu_\mu \rightarrow p + \mu^-$.

Problemas generales

46. Los tiempos de vida media que se mencionan en la tabla 43-2 están en términos de *tiempo propio*, medido en un marco de referencia donde la partícula está en reposo. Si un leptón tau se crea con una energía cinética de 950 MeV, ¿de qué longitud sería su trayectoria, medida en el laboratorio, en promedio, ignorando cualquier colisión?

47. Suponga que hay 5.0×10^{13} protones de 1.0 TeV almacenados en el anillo de 1.0 km de radio del Tevatrón. *a*) ¿Cuánta corriente (en amperes) transporta este haz? *b*) ¿Con qué rapidez tendría que desplazarse un automóvil de 1500 kg para portar la misma energía cinética que este haz?

48. *a*) ¿Cuánta energía se libera cuando un electrón y un positrón se aniquilan mutuamente? *b*) ¿Cuánta energía se libera cuando un protón y un antiprotón se aniquilan mutuamente? (Todas las partículas tienen $K \approx 0$.)

49. En el Tevatrón de 1.0 km de radio del Fermilab se inyectan protones con una energía de 150 GeV. Si se aceleran mediante 2.5 MV cada revolución, ¿cuánto recorren y aproximadamente cuánto tardan en alcanzar 1.0 TeV?

50. ¿Cuáles de las siguientes reacciones son posibles y mediante cuál interacción podrían ocurrir? En el caso de aquellas que son prohibidas, explique por qué.

a) $\pi^- + p \rightarrow K^0 + p + \pi^0$

b) $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$

c) $K^+ + n \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0 + \gamma$

d) $K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^+$

e) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$

51. ¿Cuáles de las siguientes reacciones son posibles y mediante cuál interacción podrían ocurrir? En el caso de aquellas que son prohibidas, explique por qué.

a) $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$

b) $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$

c) $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + \pi^0$

d) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$

e) $\pi^- + p \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

52. Un modo de decaimiento para un π^+ es $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. ¿Cuál sería el decaimiento equivalente para un π^-? Revise las leyes de conservación.

53. El rompimiento de simetría ocurre en la teoría electrodébil aproximadamente a 10^{-18} m. Demuestre que esto corresponde a una energía que está en el orden de la masa de la $W^{\pm}$.

54. Calcule el valor Q para cada una de las reacciones, ecuación 43-4, para producir un pión.

55. ¿Cuántos fermiones fundamentales hay en una molécula de agua?

56. La masa de un π^0 se puede medir al observar la reacción $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ en energía cinética π^- incidente muy baja (suponga que es cero). Se observa que el neutrón se emite con una energía cinética de 0.60 MeV. Con base en la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, determine la masa de π^0.

57. *a*) Demuestre que la llamada distancia de unificación de 10^{-31} m en la teoría de la gran unificación es equivalente a una energía de aproximadamente 10^{16} GeV. Use el principio de incertidumbre y también la fórmula de la longitud de onda de De Broglie, y explique cómo se aplican. *b*) Calcule la temperatura correspondiente a 10^{16} GeV.

58. Calcule el valor Q para la reacción $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$, cuando piones negativos inciden sobre protones estacionarios. Estime la energía cinética mínima necesaria del pión para producir esta reacción. [*Sugerencia:* Suponga que Λ^0 y K^0 se desplazan con la misma velocidad.]

59. Un protón y un antiprotón se aniquilan mutuamente en reposo y producen dos piones, π^- y π^+. ¿Cuál es la energía cinética de cada pión?

60. Para la reacción $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$, donde uno de los protones iniciales está en reposo, use fórmulas relativistas para demostrar que la energía umbral es $6m_pc^2$, igual a tres veces la magnitud del valor Q de la reacción, donde m_p es la masa del protón. [*Sugerencia:* Suponga que todas las partículas finales tienen la misma velocidad.]

61. ¿Cuál es la energía total de un protón cuya energía cinética es 15 GeV? ¿Cuál es su longitud de onda?

62. ¿Aproximadamente a qué energía cinética (en eV) la energía en reposo de un protón se puede ignorar cuando se calcula su longitud de onda, si la longitud de onda estará dentro del 1.0% de su valor verdadero? ¿Cuáles son la longitud de onda y la rapidez del protón correspondientes?

63. Use el modelo de quarks para describir la reacción

$$\bar{p} + n \rightarrow \pi^- + \pi^0.$$

64. Identifique la partícula faltante en las siguientes reacciones.

a) $p + p \rightarrow p + n + \pi^+ + ?$

b) $p + ? \rightarrow n + \mu^+$

65. ¿Qué fracción de la rapidez de la luz c es la rapidez de un protón de 7.0 TeV?

66. Una partícula en reposo, con una energía en reposo de mc^2, decae en dos fragmentos con energías en reposo de m_1c^2 y m_2c^2. Demuestre que la energía cinética del fragmento 1 es

$$K_1 = \frac{1}{2mc^2}[(mc^2 - m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2].$$

*Problemas numéricos/por computadora

***67.** (II) En un experimento de física de partículas para determinar el tiempo de vida media de los muones, éstos se hacen entrar a un centelleador y se observa que decaen. Los estudiantes muestrearon los tiempos de vida individuales de los muones que decaen dentro de un intervalo de tiempo entre 1 μs y 10 μs después de detenerse en el centelleador. Se supone que los muones obedecen la ley de decaimiento radiactivo $R = R_0 e^{-t/\tau}$ donde R_0 es la actividad desconocida en $t = 0$ y R es la actividad (conteos/μs) en el tiempo t. He aquí sus datos:

Tiempo (μs)	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
$R(t)$	55	35	23	18	12	5

Elabore una gráfica de ln (R/R_0) contra tiempo t (μs), y a partir del mejor ajuste de la gráfica a una línea recta encuentre la vida media τ. El valor aceptado de la vida media del muón es $\tau = 2.19703\ \mu s \pm 0.00004\ \mu s$. ¿Cuál es el error porcentual del resultado de los estudiantes con respecto al valor aceptado?

Respuestas a los ejercicios

A: 1.24×10^{-18} m $= 1.24$ am.

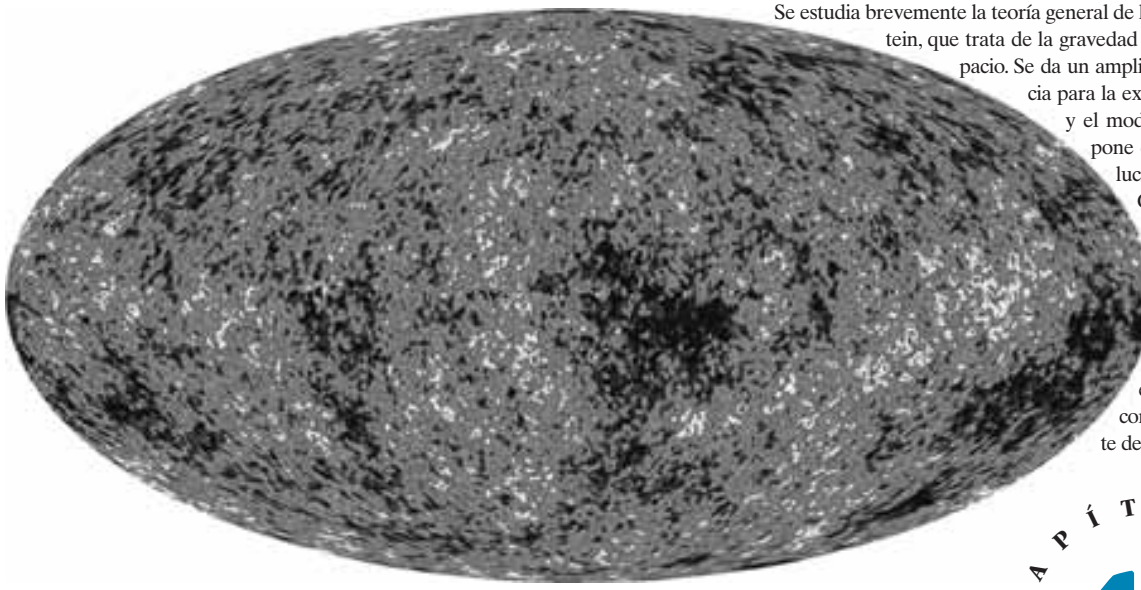
B: $\approx 2 \times 10^3$ m/0.1 m $\approx 10^4$.

C: *a*).

D: *c*); *d*).

E: $s\bar{u}$.

Este mapa de todo el cielo (de la sonda WMAP) tiene código de color para representar ligeras variaciones de temperatura en la radiación del fondo de microondas de 2.7 kelvin casi perfectamente uniforme que llega a la Tierra desde todas direcciones en el cielo. Esta última versión (2006) ofrece información detallada acerca de los orígenes del Universo y sus estructuras. Las pequeñas variaciones de temperatura, rojo ligeramente más caliente, azul ligeramente más azul (en el orden de 1 parte en 10^4) son "fluctuaciones cuánticas" que son las semillas a partir de las cuales, con el tiempo, se formaron las galaxias y los cúmulos de galaxias. (Véase el pliego a color al final del libro.)



En este capítulo, para discutir la naturaleza del Universo como se entiende en la actualidad, se examinan las últimas teorías acerca de cómo se forman y evolucionan las estrellas y galaxias, incluido el papel de la nucleosíntesis. Se estudia brevemente la teoría general de la relatividad de Einstein, que trata de la gravedad y la curvatura del espacio. Se da un amplio vistazo a la evidencia para la expansión del Universo y el modelo estándar que supone que el Universo evolucionó a partir de una Gran Explosión inicial. Finalmente, se puntualizan algunos problemas sin resolver, incluida la naturaleza de la materia oscura y la energía oscura que constituye la mayor parte del Universo.

CAPÍTULO 44

Astrofísica y cosmología

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Hasta hace poco, los astrónomos esperaban que la tasa de expansión del Universo disminuyera. ¿Por qué?

a) Por la fricción.
b) Por la segunda ley de la termodinámica.
c) Por la gravedad.
d) Por la fuerza electromagnética.

En el capítulo anterior se estudiaron los objetos más pequeños en el Universo: las partículas elementales. Ahora se dará un salto hacia los objetos más grandes en el Universo: estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Estos reinos extremos, partículas elementales y el cosmos, están entre los temas más intrigantes y excitantes de la ciencia. Y, sorprendentemente, estos dos reinos extremos se relacionan en una forma fundamental, como ya se sugirió en el capítulo 43.

El uso de las técnicas e ideas de la física para estudiar los cielos con frecuencia se conoce como **astrofísica**. Fundamental para la comprensión teórica presente del Universo (o cosmos) es la *teoría general de la relatividad* de Einstein que representa la comprensión más completa de la gravitación. Muchos otros aspectos de la física están implicados, desde el electromagnetismo y la termodinámica a la física atómica y nuclear, así como las partículas elementales. La relatividad general sirve también como el cimiento para la **cosmología** moderna, que es el estudio del Universo como un todo. La cosmología se dedica especialmente a la búsqueda de un marco teórico para comprender el Universo observado, su origen y su futuro. Las preguntas que plantea la cosmología son profundas y difíciles; las posibles respuestas extienden la imaginación. Son

CONTENIDO

44–1 Estrellas y galaxias
44–2 Evolución estelar: nucleosíntesis, y nacimiento y muerte de las estrellas
44–3 Mediciones de distancia
44–4 Relatividad general: Gravedad y curvatura del espacio
44–5 El Universo en expansión: Corrimiento al rojo y ley de Hubble
44–6 La Gran Explosión (Big Bang) y la radiación cósmica de fondo
44–7 El modelo cosmológico estándar: Historia temprana del Universo
44–8 Inflación: Explicación de la naturaleza plana, la uniformidad y la estructura
44–9 Materia oscura y energía oscura
44–10 Estructura a gran escala del Universo
44–11 Finalmente…

preguntas como: ¿El Universo siempre ha existido o tuvo un comienzo en el tiempo? Cualquier alternativa es difícil de imaginar: tanto la idea de que el tiempo va hacia atrás indefinidamente hacia el pasado, como la idea de un momento real cuando comenzó el Universo (y en este último caso, ¿qué había antes?). ¿Y qué hay acerca del tamaño del Universo? ¿Tiene tamaño infinito? Es difícil de imaginar el infinito. ¿O tiene tamaño finito? Esto también es difícil de imaginar, porque si el Universo es finito, no tiene sentido preguntar qué hay más allá, porque el Universo es todo lo que hay.

En los últimos años, ocurrió tanto progreso en astrofísica y cosmología, que muchos científicos llaman al trabajo reciente una "época dorada" de la cosmología. Nuestra inspección será cualitativa; sin embargo, se tocarán las principales ideas. Comencemos, pues, con una mirada a lo que se puede ver más allá de la Tierra.

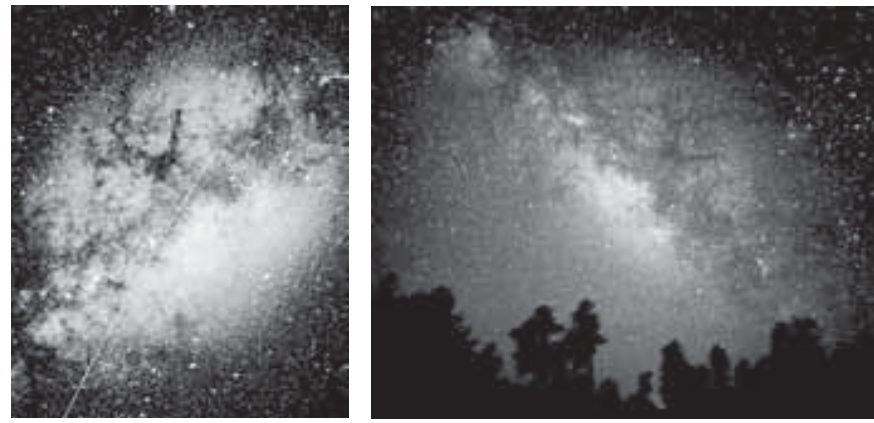
44–1 Estrellas y galaxias

De acuerdo con los antiguos, los astros, excepto por los pocos que parecían moverse en relación con los otros (los planetas), estaban fijos en una esfera que llegaba más allá del último planeta. El Universo estaba cuidadosamente autocontenido, y nosotros en la Tierra estábamos en su centro o cerca de él. Pero en los siglos posteriores a las primeras observaciones telescópicas que hizo Galileo del cielo nocturno en 1610, la visión del Universo cambió drásticamente. Los humanos ya no se colocaban en el centro, y el Universo se vio como enormemente más grande. Las distancias implicadas son tan grandes que se les especifica en términos del tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia dada: por ejemplo, 1 segundo luz $= (3.0 \times 10^8\,\text{m/s})(1.0\,\text{s}) = 3.0 \times 10^8\,\text{m} = 300{,}000\,\text{km}$; 1 minuto luz $= 18 \times 10^6$ km; y 1 **año luz** es

$$\begin{aligned} 1\text{ año luz} &= (2.998 \times 10^8\,\text{m/s})(3.156 \times 10^7\,\text{s/año}) \\ &= 9.46 \times 10^{15}\,\text{m} \approx 10^{13}\,\text{km}. \end{aligned}$$

Para especificar distancias hacia el Sol y la Luna por lo general se usan metros o kilómetros, pero se les podría especificar en términos de luz. La distancia entre la Tierra y la Luna es de 384,000 km, que es 1.28 segundos luz. La distancia entre la Tierra y el Sol es 1.50×10^{11} m, o 150,000,000 km; esto es igual a 8.3 minutos luz. Lejos en el Sistema Solar, Plutón está aproximadamente a 6×10^9 km del Sol, o 6×10^{-4} años luz. La estrella más cercana a la Tierra, después del Sol, es Proxima Centauri, ubicada a 4.3 años luz de distancia.

En una noche clara sin Luna, se pueden ver miles de estrellas con grados variables de brillo, así como la larga franja nubosa conocida como Vía Láctea (figura 44-1). Galileo fue el primero en observar, con su telescopio, que la Vía Láctea se compone de incontables estrellas individuales. Siglo y medio más tarde (alrededor de 1750), Thomas Wright sugirió que la Vía Láctea era un disco plano de estrellas que se extiende a grandes distancias en un plano, a lo que se llama **galaxia** (término griego que significa "vía láctea").



a) *b*)

FIGURA 44–1 Secciones de la Vía Láctea. En *a*) la delgada línea es el rastro de un satélite artificial de la Tierra en esta larga exposición de tiempo. El área diagonal oscura se debe a que el polvo absorbe luz visible, lo que bloquea la vista. En *b*) la vista es hacia el centro de la galaxia; fotografía tomada en verano desde Arizona. (Véase el pliego a color al final del libro.)

La Vía Láctea tiene un diámetro de casi 100,000 años luz y un grosor de aproximadamente 2000 años luz. Tiene un "núcleo" central protuberante y brazos en espiral (figura 44-2). El Sol, que es una estrella como muchas otras, se ubica casi a la mitad desde el centro galáctico hacia el borde, a unos 26,000 al del centro. Nuestra galaxia contiene aproximadamente 100 mil millones (10^{11}) de estrellas. El Sol completa su órbita en torno al centro de la galaxia aproximadamente una vez cada 250 millones de años, de manera que su rapidez es de alrededor de 200 km/s en relación con el centro de la galaxia. La masa total de todas las estrellas en nuestra galaxia se estima en aproximadamente 3×10^{41} kg, que es materia ordinaria. Además, hay fuerte evidencia de que la galaxia está rodeada por un "halo" invisible de "materia oscura", que se estudiará en la sección 44-9.

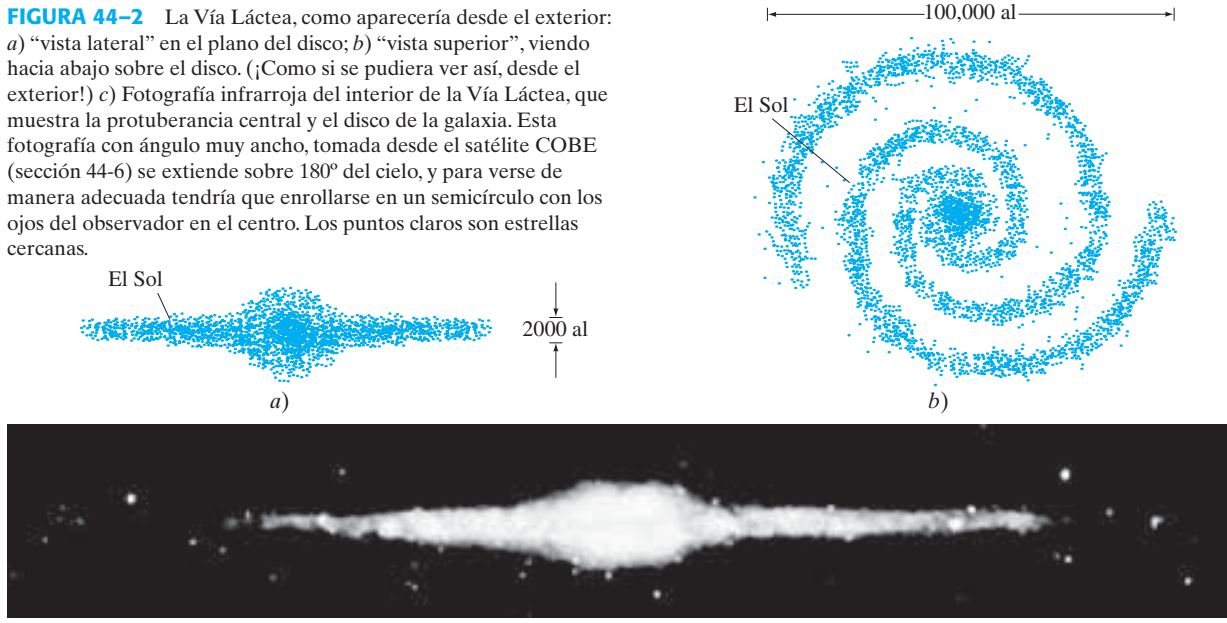


FIGURA 44–2 La Vía Láctea, como aparecería desde el exterior: *a*) "vista lateral" en el plano del disco; *b*) "vista superior", viendo hacia abajo sobre el disco. (¡Como si se pudiera ver así, desde el exterior!) *c*) Fotografía infrarroja del interior de la Vía Láctea, que muestra la protuberancia central y el disco de la galaxia. Esta fotografía con ángulo muy ancho, tomada desde el satélite COBE (sección 44-6) se extiende sobre 180° del cielo, y para verse de manera adecuada tendría que enrollarse en un semicírculo con los ojos del observador en el centro. Los puntos claros son estrellas cercanas.

EJEMPLO 44–1 ESTIMACIÓN **Masa de nuestra galaxia.** Estime la masa total de la Vía Láctea con los datos orbitales anteriores para el Sol en torno al centro de la galaxia. Suponga que la mayor parte de la masa de la galaxia se concentra cerca de su centro.

PLANTEAMIENTO Suponemos que el Sol (incluido el Sistema Solar) tiene masa total m y se mueve en una órbita circular en torno al centro de la galaxia (masa total M) y que la masa M se puede considerar como ubicada en el centro de la galaxia. Luego aplique la segunda ley de Newton, $F = ma$, con a como la aceleración centrípeta, $a = v^2/r$, y F la ley de gravitación universal (capítulo 6).

SOLUCIÓN El Sol y el Sistema Solar orbitan el centro de la galaxia, de acuerdo con las mejores mediciones mencionadas anteriormente, con una rapidez aproximada de $v = 200$ km/s a una distancia del centro de la galaxia de aproximadamente $r = 26\,000$ años luz. Empleamos la segunda ley de Newton:

$$F = ma$$
$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

donde M es la masa de la galaxia y m es la masa del Sol y el Sistema Solar. Al resolver esto se obtiene

$$M = \frac{rv^2}{G} \approx \frac{(26{,}000 \text{ años luz})(10^{16} \text{ m/años luz})(2 \times 10^5 \text{ m/s})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2} \approx 2 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

NOTA En términos de *números* de estrellas, si son como el Sol ($m = 2.0 \times 10^{30}$ kg), habría alrededor de $(2 \times 10^{41} \text{ kg})/(2 \times 10^{30} \text{ kg}) \approx 10^{11}$ o en el orden de 100 mil millones de estrellas.

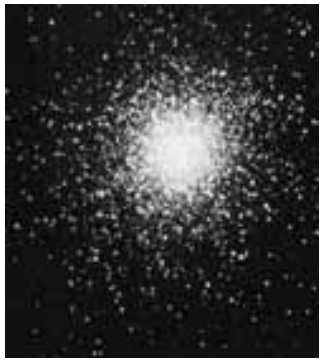


FIGURA 44–3 Este cúmulo estelar globular se localiza en la constelación Hércules. (Véase el pliego a color al final del libro.)

FIGURA 44–4 Esta nebulosa gaseosa, que se encuentra en la constelación Carina, está a aproximadamente 9000 años luz de la Tierra. (Véase el pliego a color al final del libro.)

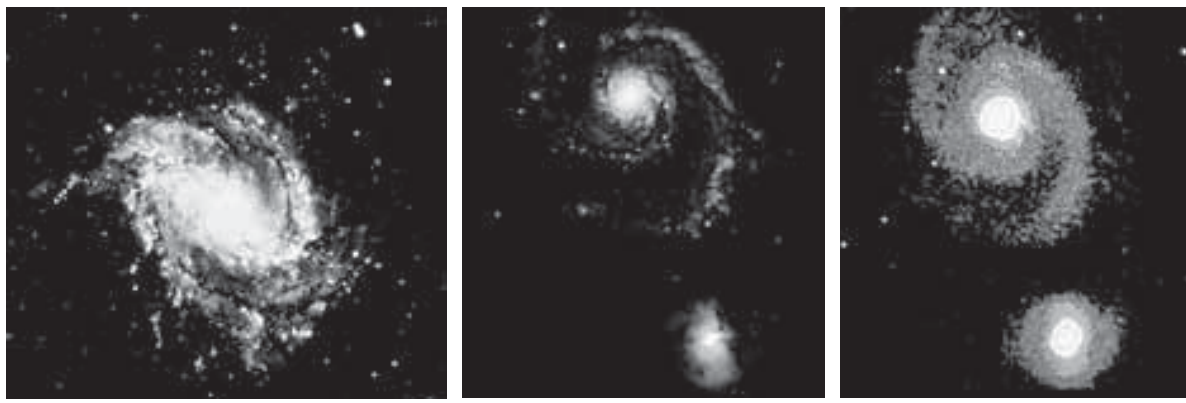
Además de estrellas tanto dentro como afuera de la Vía Láctea, por el telescopio se pueden ver muchos parches nubosos apenas perceptibles en el cielo conocidos alguna vez como "nebulosas" (vocablo tomado del latín *nebulae* que significa "nubes"). Algunas de éstas, como las que están en las constelaciones Andrómeda y Orión, en realidad se pueden distinguir a simple vista en una noche despejada. Algunas son **cúmulos estelares** (figura 44-3), grupos de estrellas tan numerosos que parecen una nube. Otras son nubes brillantes de gas o polvo (figura 44-4), para las cuales ahora se reserva la palabra **nebulosa**. Las más fascinantes son las que pertenecen a una tercera categoría: con frecuencia tienen formas elípticas bastante regulares y parecen estar a una gran distancia más allá de la galaxia. Emmanuel Kant (alrededor de 1755) parece haber sido el primero en sugerir que las nebulosas en realidad podrían ser discos circulares, pero que parecían elípticos porque se les vía en ángulo, y apenas son perceptibles porque están muy distantes. Al principio no se aceptaba de manera general que estos objetos fueran **extragalácticos**, esto es, que estuvieran afuera de la galaxia. Los telescopios muy grandes, construidos en el siglo XX, revelaron que estrellas individuales podían distinguirse dentro de estos objetos extragalácticos y que muchos contienen brazos espirales. Edwin Hubble (1889-1953) realizó buena parte de este trabajo de observación en la década de 1920, con el telescopio[†] de 2.5 m del monte Wilson cerca de Los Ángeles, California, entonces el más grande del mundo. Hubble demostró que estos objetos, de hecho, eran extragalácticos en virtud de sus grandes distancias. La distancia a la galaxia cercana más grande,[‡] Andrómeda, es de más de 2 millones de años luz, una distancia 20 veces mayor que el diámetro de nuestra galaxia. Parece lógico que estas nebulosas sean **galaxias** similares a la Vía Láctea. En la actualidad se cree que hay aproximadamente 10^{11} galaxias en el Universo observable; esto es, hay aproximadamente tantas galaxias como estrellas en una galaxia. Véase la figura 44-5.

Muchas galaxias tienden a agruparse en **cúmulos de galaxias** que se mantienen unidas mediante su atracción gravitacional mutua. En cada cúmulo puede haber desde unas cuantas galaxias hasta miles de ellas. Más aún, los cúmulos mismos parecen estar organizados en agregados incluso más grandes: cúmulos de cúmulos de galaxias, o **su-**

[†]2.5 m se refieren al diámetro del espejo objetivo curvo. Cuanto más grande sea el espejo, más luz colecta (mayor intensidad) y menos difracción hay (y, por lo tanto, hay mejor resolución), así que se pueden ver más estrellas y más tenues. Véanse los capítulos 33 y 35. Hasta hace poco se usaban películas o placas fotográficas para tomar largas exposiciones de tiempo. Ahora se dispone de grandes sensores CCD o CMOS de estado sólido (sección 33-5) que contienen cientos de millones de pixeles (en comparación con 10 millones de pixeles en una cámara digital de buena calidad).

[‡]Las *nubes magallánicas* están mucho más cerca que Andrómeda, pero son pequeñas y por lo general se consideran pequeñas galaxias satélite de la Vía Láctea.

FIGURA 44–5 Fotografías de galaxias. *a*) Galaxia espiral en la constelación Hidra. *b*) Dos galaxias: la más grande y más asombrosa se conoce como galaxia Remolino. *c*) Imagen infrarroja (con "falso" color) de las mismas galaxias que en *b*); aquí los brazos de la espiral aparentan tener más sustancia que en la fotografía de luz visible *b*); los diferentes colores corresponden a diferentes intensidades luminosas. (Véase el pliego a color al final del libro.) La luz visible se dispersa y se absorbe mediante polvo interestelar mucho más que la infrarroja, de manera que la infrarroja proporciona una imagen más nítida.



a) *b*) *c*)

percúmulos. Las galaxias detectables más alejadas están a más de 10^{10} años luz de distancia. Véase la tabla 44-1.

TABLA 44–1 Distancias astronómicas

Objeto	Distancia aproximada desde la tierra (en años luz)
Luna	4×10^{-8}
Sol	1.6×10^{-5}
Tamaño del Sistema Solar (distancia a Plutón)	6×10^{-4}
Estrella más cercana (Proxima Centauri)	4.3
Centro de la Vía Láctea	2.6×10^{4}
Galaxia grande más cercana	2.4×10^{6}
Galaxias más lejanas	10^{10}

EJEMPLO CONCEPTUAL 44–2 **Un vistazo al pasado.** Los astrónomos con frecuencia piensan que sus telescopios son máquinas del tiempo, pues les permiten mirar hacia atrás, a los orígenes del Universo. ¿Qué tan remotamente observan en el pasado?

RESPUESTA La distancia en años luz revela cuánto tiempo en años ha recorrido la luz para llegar a un observador, de manera que la tabla 44-1 indica también qué tan atrás en el tiempo es posible mirar. Por ejemplo, si en el presente se ve a Proxima Centauri estallar en una supernova, entonces ese hecho realmente ocurrió hace 4.3 años. Las galaxias más distantes emitieron la luz que hoy vemos hace aproximadamente 10^{10} años. Se ven como eran entonces, hace 10^{10} años, o aproximadamente 10^{9} años después de que el Universo nació con la Gran Explosión.

EJERCICIO A Suponga que se pudiera colocar un gran espejo a 1 año luz de distancia de nosotros. ¿Qué veríamos en este espejo si diera de frente a la Tierra? ¿De cuándo procede de esa imagen? (A esto se le puede llamar "máquina del tiempo".)

Además de las estrellas, cúmulos de estrellas, galaxias y cúmulos y supercúmulos de galaxias, el Universo contiene muchos otros objetos interesantes. Entre ellos están las estrellas conocidas como *gigantes rojas*, *enanas blancas*, *estrellas de neutrones*, estrellas que explotan llamadas *novas* y *supernovas*, y *agujeros negros* cuya gravedad es tan fuerte que ni siquiera la luz logra escapar de ellos. Además, hay radiación electromagnética que llega a la Tierra pero que no emana de los objetos puntuales brillantes que se llaman estrellas: particularmente importante es la radiación del fondo de microondas que llega de manera casi uniforme desde todas direcciones en el Universo. Se estudiarán todos estos fenómenos.

Finalmente, hay *núcleos galácticos activos* (AGN, por las siglas de *active galactic nuclei*), que son fuentes puntuales muy luminosas en los centros de galaxias distantes. Los ejemplos más interesantes de AGN son los *quásares* ("objetos cuasiestelares" o QSO), que son tan luminosos que la luz estelar circundante de la galaxia se pierde. Se considera que su luminosidad proviene de materia que cae en un agujero negro gigante en el centro de una galaxia.

44–2 Evolución estelar: Nucleosíntesis, y nacimiento y muerte de las estrellas

Las estrellas parecen invariables. Noche tras noche el cielo nocturno no revela variaciones. De hecho, en una escala de tiempo humana, la enorme mayoría de las estrellas cambian muy poco (excepto por las novas, supernovas y ciertas estrellas variables). Aunque las estrellas *parecen* fijas unas en relación con otras, muchas se mueven lo suficiente para que el movimiento se detecte. La rapidez de las estrellas en relación con estrellas vecinas puede ser de cientos de km/s, pero a sus grandes distancias de la Tierra, este movimiento sólo se detecta mediante cuidadosas mediciones. Más aún, hay un gran rango de brillo entre las estrellas. Las diferencias en brillo se deben tanto a diferencias en la tasa a la que las estrellas emiten energía como a sus diversas distancias de la Tierra.

Luminosidad y brillo de las estrellas

Un parámetro útil para una estrella o galaxia es su **luminosidad intrínseca**, L (o simplemente **luminosidad**), que se refiere a la potencia total irradiada en watts. También es importante el **brillo aparente**, b, que se define como la potencia a través de una unidad de área en la Tierra perpendicular a la trayectoria de la luz. Puesto que la energía se conserva, y si se ignora cualquier absorción en el espacio, la potencia total emitida L cuando llega a una distancia d desde la estrella se distribuirá sobre la superficie de una esfera cuya área es $4\pi d^2$. Si d es la distancia desde la estrella a la Tierra, entonces L debe ser igual a $4\pi d^2$ por b (potencia por unidad de área en la Tierra). Esto es,

$$b = \frac{L}{4\pi d^2}. \qquad \textbf{(44–1)}$$

EJEMPLO 44–3 **Brillo aparente.** Suponga que una estrella particular tiene luminosidad intrínseca igual a la del Sol, pero está a 10 años luz de la Tierra. ¿En qué factor aparecerá más tenue que el Sol?

PLANTEAMIENTO La luminosidad L es la misma para ambas estrellas, de manera que el brillo aparente sólo depende de sus distancias relativas. Empleamos la ley del cuadrado inverso como se establece en la ecuación 44-1 para determinar el brillo relativo.

SOLUCIÓN Con la ley del cuadrado inverso, la estrella parece más tenue por un factor

$$\frac{b_{\text{estrella}}}{b_{\text{Sol}}} = \frac{d_{\text{Sol}}^2}{d_{\text{estrella}}^2} = \frac{(1.5 \times 10^8\,\text{km})^2}{(10\ \text{años luz})^2(10^{13}\,\text{km/años luz})^2} \approx 2 \times 10^{-12}.$$

El estudio cuidadoso de las estrellas cercanas indica que la luminosidad para la mayoría de las estrellas depende de la masa: *cuanto más masiva sea la estrella, mayor es su luminosidad*.† De hecho, se puede esperar que las estrellas más masivas tengan temperatura y presión de núcleo más altas para contrarrestar la mayor atracción gravitacional, y que, por consiguiente, sean más luminosas. Otro parámetro importante de una estrella es su temperatura superficial, que puede determinarse a partir del espectro de frecuencias electromagnéticas que emite (las estrellas son "buenos" cuerpos negros; véase la sección 37-1). Como se vio en el capítulo 37, conforme la temperatura de un cuerpo aumenta, el espectro se corre desde las frecuencias predominantemente más bajas (y longitudes de onda más largas, como el rojo) hacia las frecuencias más altas (y longitudes de onda más cortas, como el azul). De manera cuantitativa, la relación está dada por la ley de Wien (ecuación 37-1): la longitud de onda pico λ_P en el espectro de luz emitido por un cuerpo negro (con frecuencia las estrellas se aproximan como cuerpos negros) es inversamente proporcional a su temperatura Kelvin T; esto es, $\lambda_P T = 2.90 \times 10^{-3}$ m·K. Las temperaturas superficiales de las estrellas generalmente varían desde unos 3000 K (rojizo) a aproximadamente 50,000 K (UV).

EJEMPLO 44–4 **Determinación de la temperatura y el tamaño de una estrella.** Suponga que las distancias a la Tierra de dos estrellas cercanas se pueden estimar razonablemente, y que su brillo aparente medido sugiere que las dos estrellas tienen aproximadamente la misma luminosidad L. El espectro de una de las estrellas registra un máximo alrededor de 700 nm (de manera que es rojiza). El espectro de la otra tiene un máximo alrededor de 350 nm (azulosa). Use la ley de Wien (ecuación 37-1) y la ecuación de Stefan-Boltzmann (sección 19-10) para determinar *a*) la temperatura superficial de cada estrella y *b*) por cuánto excede la estrella más grande a la otra.

PLANTEAMIENTO Determinamos la temperatura superficial T de cada estrella con la ley de Wien y la longitud de onda pico de cada estrella. Luego, con la ecuación de Stefan-Boltzmann (salida de potencia o luminosidad $\propto AT^4$, donde A = área superficial del emisor), podemos encontrar la razón de áreas superficiales y los tamaños relativos de las dos estrellas.

SOLUCIÓN *a*) La ley de Wien (ecuación 37-1) establece que $\lambda_P T = 2.90 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}$. De manera que la temperatura de la estrella rojiza es

$$T_r = \frac{2.90 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{700 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 4140\,\text{K}.$$

La temperatura de la estrella azulosa será el doble, puesto que su longitud de onda pico es la mitad (350 nm contra 700 nm):

$$T_b = 8280\,\text{K}.$$

b) La ecuación de Stefan-Boltzmann, ecuación 19-17, afirma que la potencia irradiada *por unidad de área* de superficie desde un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura Kelvin, T^4. La temperatura de la estrella azulosa es el doble que la de la estrella rojiza, de manera que la azulosa debe irradiar $(2^4) = 16$ veces más energía por unidad de área. Pero se indica que tienen la misma luminosidad (la misma salida de potencia total); así que el área superficial de la estrella azul debe ser $\frac{1}{16}$ del área superficial de la roja. El área superficial de una esfera es $4\pi r^2$, de manera que el radio de la estrella rojiza es $\sqrt{16} = 4$ veces mayor que el radio de la estrella azulosa (o $4^3 = 64$ veces el volumen).

†Se aplica a estrellas de "secuencia principal" (véase la siguiente página). La masa de una estrella se puede determinar al observar sus efectos gravitacionales. Muchas estrellas son parte de un cúmulo, siendo la más simple una estrella binaria en la que dos estrellas orbitan una alrededor de la otra, lo que permite determinar sus masas empleando la mecánica rotacional.

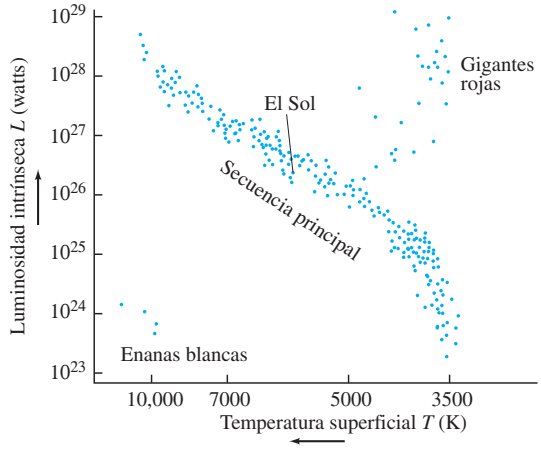


FIGURA 44–6 El diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R) es una gráfica logarítmica de luminosidad contra temperatura superficial T de estrellas (observe que T aumenta hacia la izquierda).

Diagrama H-R

Un importante descubrimiento astronómico, hecho alrededor de 1900, fue que, para la mayoría de las estrellas, el color se relaciona con la luminosidad intrínseca y, por lo tanto, con la masa. Una forma útil de presentar esta relación es mediante el llamado diagrama Hertzsprung-Russell (H-R). En el diagrama H-R, el eje horizontal representa la temperatura superficial T mientras que el eje vertical es la luminosidad L; cada estrella se representa mediante un punto sobre el diagrama, figura 44-6. La mayoría de las estrellas caen a lo largo de la banda diagonal llamada **secuencia principal**. A partir de la esquina inferior derecha se encuentran las estrellas más frías, de color rojizo; son las menos luminosas y, por lo tanto, con menor masa. Más lejos hacia arriba a la izquierda se encuentran estrellas más calientes y más luminosas que son blanquecinas, como el Sol. Todavía más lejos hacia arriba se encuentran estrellas aún más masivas y más luminosas, de color azuloso. Las estrellas que caen sobre esta banda diagonal se llaman *estrellas de secuencia principal*. También existen estrellas que caen fuera de la secuencia principal. Arriba y a la derecha se encuentran estrellas extremadamente grandes, con altas luminosidades pero con baja temperatura de color (rojizo): éstas se llaman **gigantes rojas**. Abajo a la izquierda, existen unas cuantas estrellas de baja luminosidad pero con alta temperatura: son las **enanas blancas**.

EJEMPLO 44–5 ESTIMACIÓN **Determinación de la distancia a una estrella usando el diagrama H-R y color.** Suponga que el estudio detallado de cierta estrella sugiere que lo más probable es que encaje en la secuencia principal de un diagrama H-R. Su brillo aparente medido es $b = 1.0 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ y la longitud de onda pico de su espectro es $\lambda_P \approx 600$ nm. Estime su distancia a la Tierra.

PLANTEAMIENTO Podemos determinar la temperatura a partir de la ley de Wien, ecuación 37-1. Estimamos la luminosidad para una estrella de secuencia principal con el diagrama H-R de la figura 44-6 y luego determinamos la distancia usando la relación entre brillo y luminosidad, ecuación 44-1.

SOLUCIÓN La temperatura de la estrella, a partir de la ley de Wien (ecuación 37-1), es

$$T \approx \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{600 \times 10^{-9}\ \text{m}} \approx 4800\ \text{K}.$$

Una estrella en la secuencia principal de un diagrama H-R a esta temperatura tiene luminosidad intrínseca de aproximadamente $L \approx 1 \times 10^{26}$ W, que se lee a partir de la figura 44-6. Así, de acuerdo con la ecuación 44-1,

$$d = \sqrt{\frac{L}{4\pi b}} \approx \sqrt{\frac{1 \times 10^{26}\ \text{W}}{4(3.14)(1.0 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2)}} \approx 3 \times 10^{18}\ \text{m}.$$

Su distancia desde la Tierra en años luz es

$$d = \frac{3 \times 10^{18}\ \text{m}}{10^{16}\ \text{m/años luz}} \approx 300\ \text{años luz}.$$

EJERCICIO B Estime la distancia a una estrella de secuencia principal de 6000 K, con un brillo aparente de $2.0 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$.

Evolución estelar; nucleosíntesis

¿Por qué existen diferentes tipos de estrellas, como gigantes rojas y enanas blancas, así como estrellas de secuencia principal? ¿Desde el comienzo todas nacieron de esta forma? ¿O cada tipo diferente puede representar una diferente edad en el ciclo de vida de una estrella? Los astrónomos y astrofísicos de hoy creen que esto último es el caso. Sin embargo, note que en realidad no se puede seguir más que una minúscula parte del ciclo de vida de cualquier estrella dada, pues éstas tienen vidas enormemente mayores en comparación con las de los seres humanos, en el orden de millones o miles de millones de años. No obstante, sigamos el proceso de **evolución estelar** desde el nacimiento hasta la muerte de una estrella, de acuerdo con la reconstrucción teórica que hacen los astrofísicos en la actualidad.

Se cree que las estrellas nacen cuando nubes gaseosas (principalmente de hidrógeno) se contraen debido al tirón gravitacional. Una enorme nube de gas puede fragmentarse en numerosas masas que se contraen, y cada masa se centra en una área donde la densidad sólo era ligeramente mayor que la de los puntos cercanos. Una vez que se forman tales "glóbulos", la gravedad haría que cada una se contraiga hacia su centro de masa. Conforme las partículas de tal *protoestrella* se aceleran hacia dentro, su energía cinética aumenta. Cuando la energía cinética es suficientemente alta, la repulsión de Coulomb entre las cargas positivas no es suficientemente fuerte como para mantener separados los núcleos de hidrógeno, y puede ocurrir fusión nuclear.

En una estrella como el Sol, la fusión del hidrógeno (en ocasiones conocida como "combustión"[†]) ocurre mediante el *ciclo protón-protón* (sección 42-4, ecuaciones 42-7), en la que cuatro protones se fusionan para formar un núcleo de ${}^4_2\text{He}$ con la liberación de rayos γ, positrones y neutrinos: $4\,{}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2\,e^+ + 2\nu_e + 2\gamma$. Estas reacciones requieren una temperatura de alrededor de 10^7 K, que corresponde a una energía cinética promedio ($\approx kT$) de aproximadamente 1 keV (ecuación 18-4). En las estrellas más masivas, el ciclo de carbono produce el mismo efecto neto: cuatro ${}^1_1\text{H}$ producen un ${}^4_2\text{He}$; véase la sección 42-4. Las reacciones de fusión tienen lugar principalmente en el núcleo de una estrella, donde T puede estar en el orden de 10^7 a 10^8 K. (La temperatura superficial es mucho menor, en el orden de algunos miles de kelvin.) La enorme liberación de energía en estas reacciones de fusión produce una presión hacia fuera suficiente para detener la contracción gravitacional hacia dentro. La protoestrella, ahora en realidad una *estrella* joven, se estabiliza en la secuencia principal. El lugar exacto donde la estrella cae a lo largo de la secuencia principal depende de su masa. Cuanto más masiva sea una estrella, más alejada (hacia la izquierda) caerá en el diagrama H-R de la figura 44-6. El Sol requirió quizá 30 millones de años para llegar a la secuencia principal, y se espera que permanezca ahí alrededor de 10 mil millones de años (10^{10} años). Aunque la mayoría de las estrellas tienen miles de millones de años de antigüedad, hay fuerte evidencia de que en este momento realmente nacen estrellas. Las estrellas más masivas tienen vidas más cortas, porque son más calientes y la repulsión de Coulomb es más fácil de superar, de manera que agotan su combustible más rápido. Si el Sol permanece en la secuencia principal durante 10^{10} años, una estrella diez veces más masiva puede residir ahí durante solamente 10^7 años.

Conforme el hidrógeno se fusiona para formar helio, el helio que se forma es más denso y tiende a acumularse en el núcleo central donde se formó. Conforme el núcleo de helio crece, el hidrógeno continúa fusionándose en un cascarón alrededor de él: véase la figura 44-7. Cuando se consume mucho del hidrógeno dentro del núcleo, la producción de energía disminuye en el centro y ya no es suficiente para evitar que las enormes fuerzas gravitacionales nuevamente hagan que el núcleo se contraiga y se caliente. Entonces el hidrógeno en el cascarón alrededor del núcleo se fusiona aún más intensamente debido a este aumento en temperatura, lo que permite que la envoltura exterior de la estrella se expanda y se enfríe. La temperatura de la superficie, reducida en consecuencia, produce un espectro de luz que alcanza su máximo en longitudes de onda más largas (tonalidad rojiza).

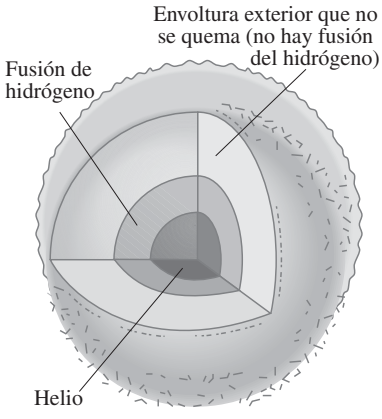


FIGURA 44–7 Cascarón de hidrógeno en "combustión" (se fusiona para convertirse en helio) que rodea al núcleo donde gravita el helio recién formado.

[†]La palabra "combustión" se pone entre comillas porque estas reacciones de fusión de alta temperatura ocurren mediante un proceso *nuclear* y no se debe confundir con la combustión ordinaria (de papel, madera o carbón, por ejemplo) en el aire, la cual es una reacción *química* que ocurre al nivel *atómico* (y a una temperatura mucho más baja).

Para este momento, la estrella deja la secuencia principal. Se vuelve más roja y, conforme crece en tamaño, se vuelve más luminosa. De manera que tendrá que moverse hacia la derecha y hacia arriba sobre el diagrama H-R, como se muestra en la figura 44-8. Conforme se mueve hacia arriba, entra a la etapa de **gigante roja**. Así, la teoría explica el origen de las gigantes rojas como un paso natural en la evolución de una estrella. El Sol, por ejemplo, ha estado en la secuencia principal durante aproximadamente 4,500 millones de años. Probablemente permanecerá ahí otros 4 o 5 mil millones de años. Cuando el Sol salga de la secuencia principal, se espera que crezca en diámetro (conforme se convierte en gigante roja) por un factor de 100 o más, y posiblemente engullirá planetas interiores como Mercurio.

Si la estrella es como el Sol, o más grande, puede ocurrir más fusión. Conforme se expande la envoltura exterior de la estrella, su núcleo continúa encogiéndose y calentándose. Cuando la temperatura alcanza aproximadamente 10^8 K, incluso los núcleos de helio, a pesar de su mayor carga y, por consiguiente, mayor repulsión eléctrica, pueden acercarse entre sí lo suficiente como para experimentar fusión. Las reacciones son

$$\begin{aligned} {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} &\rightarrow {}^8_4\text{Be} \\ {}^4_2\text{He} + {}^8_4\text{Be} &\rightarrow {}^{12}_6\text{C} \end{aligned} \qquad \textbf{(44–2)}$$

con la emisión de dos rayos γ. Estas dos reacciones deben ocurrir en rápida sucesión (porque el ${}^8_4$Be es muy inestable), y el efecto neto es

$$3\,{}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C}. \qquad (Q = 7.3\,\text{MeV})$$

Esta fusión de helio causa un cambio en la estrella que se mueve rápidamente hacia la "rama horizontal" en el diagrama H-R (figura 44-8). Son posibles más reacciones de fusión, con ${}^4_2$He que se funde con ${}^{12}_6$C para formar ${}^{16}_8$O. En las estrellas más masivas, se pueden formar elementos con Z más grande como ${}^{20}_{10}$Ne o ${}^{24}_{12}$Mg. Este proceso de crear núcleos más pesados a partir de unos más ligeros (o por absorción de neutrones que tiende a ocurrir a Z más altos) se llama **nucleosíntesis**.

El destino final de una estrella depende de su masa. Las estrellas pueden perder masa conforme partes de su envoltura exterior salen hacia el espacio. Las estrellas que nacen con una masa menor que aproximadamente 8 (o quizá 10) masas solares que con el tiempo terminan con una masa residual menor que aproximadamente 1.4 masas solares, lo que se conoce como **límite de Chandrasekhar**. Para ellas, no es posible obtener más energía de fusión. El núcleo de tales estrellas de "masa baja" (masa original $\lesssim$ 8-10 masas solares) se contrae bajo la acción de la gravedad; la envoltura exterior se expande de nuevo y la estrella se convierte en una gigante roja incluso más grande. Con el tiempo, las capas exteriores escapan hacia el espacio, el núcleo se contrae, la estrella se enfría y por lo general sigue la ruta punteada que se indica en la figura 44-8, y se dirige hacia abajo para convertirse en una **enana blanca**. Una enana blanca con una masa residual igual a la del Sol tendría aproximadamente el tamaño de la Tierra. Una enana blanca se contrae hasta el punto donde las nubes de electrones comienzan a traslaparse, pero ya no más porque, por el principio de exclusión de Pauli, no es posible que dos electrones estén en el mismo estado cuántico. Esta presión de **degeneración electrónica** impide que el colapso de la estrella continúe. Una enana blanca continúa perdiendo energía interna por radiación, disminuye en temperatura y se vuelve más tenue hasta que ya no brilla más. Entonces se convierte en un trozo oscuro frío de material extremadamente denso.

Se considera que las estrellas cuya masa residual es mayor que el límite de Chandrasekhar de 1.4 masas solares (masa original mayor que aproximadamente 8 a 10 masas solares) siguen un escenario muy diferente. Una estrella con esta gran masa puede contraerse bajo la acción de la gravedad y calentarse todavía más. En el rango de $T = (2.5\text{-}5) \times 10^9$ K, se pueden formar núcleos tan pesados como ${}^{56}_{26}$Fe y ${}^{56}_{28}$Ni. Pero aquí termina la formación por fusión de núcleos pesados a partir de otros más ligeros. Como se vio en la figura 41-1, la energía de enlace promedio por nucleón comienza a disminuir para A mayor que aproximadamente 60. Más fusiones *requerirían* energía, antes que liberarla.

Se cree que los elementos más pesados que el Ni se forman principalmente mediante captura de neutrones, en particular en estrellas que estallan llamadas **supernovas**. Gran número de neutrones libres, que resultan de reacciones nucleares, se encuentran dentro de estas estrellas enormemente evolucionadas y fácilmente pueden combinarse con un núcleo de ${}^{56}_{26}$Fe por ejemplo, para formar (si se capturan tres) ${}^{59}_{26}$Fe, que decae a ${}^{59}_{27}$Co. El ${}^{59}_{27}$Co puede capturar neutrones, que también se vuelve rico en neutrones y decae por β^- hacia el siguiente elemento con Z más alto, y así hasta los elementos de mayor Z.

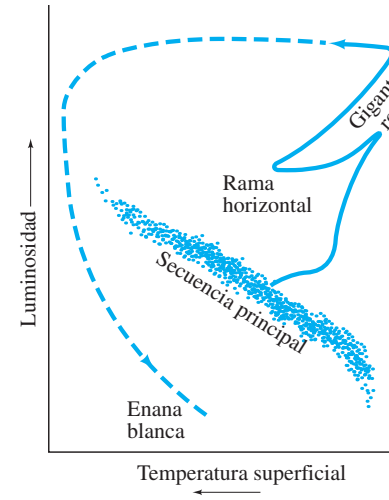


FIGURA 44–8 "Ruta" evolutiva de una estrella como el Sol, representada en un diagrama H-R.

Aunque a estas temperaturas extremadamente elevadas, muy por encima de 10^9 K, la energía cinética de los núcleos es tan alta que la fusión de elementos más pesados que el hierro todavía es posible aun cuando las reacciones requieran entrada de energía. Pero las colisiones de alta energía también pueden provocar el rompimiento de los núcleos de hierro y níquel para obtener núcleos de He, y finalmente protones y neutrones:

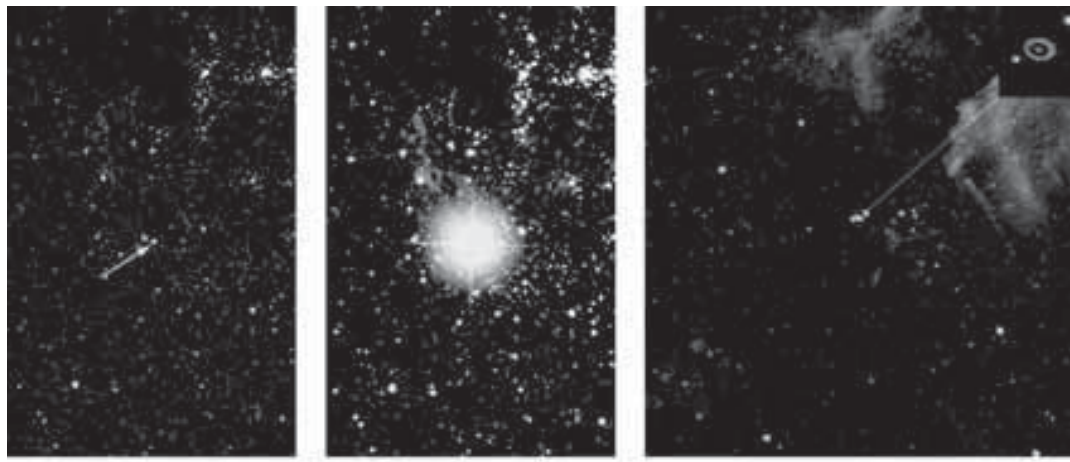
$$^{56}_{26}\text{Fe} \rightarrow 13\,^{4}_{2}\text{He} + 4\text{n}$$
$$^{4}_{2}\text{He} \rightarrow 2\text{p} + 2\text{n}.$$

Estas reacciones requieren energía (son endotérmicas), pero a temperatura y presión extremadamente altas como ésas existe mucha energía disponible, suficiente incluso para forzar la unión de electrones y protones para formar neutrones en **decaimiento β inverso**:

$$\text{e}^- + \text{p} \rightarrow \text{n} + \nu.$$

Como resultado de estas reacciones, la presión en el núcleo cae precipitadamente. Conforme el núcleo colapsa bajo las enormes fuerzas gravitacionales, la tremenda masa en esencia se convierte en un núcleo enorme constituido casi exclusivamente de neutrones. El tamaño de la estrella ya no está limitado por el principio de exclusión aplicado a electrones, sino por presión de **degeneración neutrónica**, y la estrella se contrae con rapidez para formar una **estrella de neutrones** sumamente densa. El núcleo de una estrella de neutrones se contrae hasta el punto en el que todos los neutrones están tan juntos como lo están en un núcleo atómico. Esto es, la densidad de una estrella de neutrones está en el orden de 10^{14} veces mayor que en el caso de los sólidos y líquidos en la Tierra. Una taza de tal materia densa pesaría miles de millones de toneladas. Una estrella de neutrones con una masa 1.5 veces la del Sol tendría un diámetro de sólo alrededor de 20 km. (Compare esto con una enana blanca con 1 masa solar cuyo diámetro sería $\approx 10^4$ km, como ya se mencionó.)

La contracción del núcleo de una estrella masiva significaría una gran reducción en energía potencial gravitacional. De alguna manera tendría que liberarse esta energía. De hecho, en la década de 1930 se sugirió que el colapso final del núcleo en una estrella de neutrones podría acompañarse con una explosión catastrófica (una *supernova*; véase la página anterior) cuya tremenda energía virtualmente podría formar todos los elementos de la tabla periódica y hacer estallar toda la envoltura exterior de la estrella (figura 44-9), dispersando su contenido en el espacio interestelar. La presencia de elementos pesados en la Tierra y el Sistema Solar sugiere que este último se formó a partir de desechos de tales explosiones de supernovas.



a) *b*) *c*)

FIGURA 44–9 La estrella que se indica mediante la flecha en *a*) estalló en 1987 como una supernova (SN1987a), como se muestra en *b*). La mancha brillante en *b*) no representa el tamaño físico. El inciso *c*) es una fotografía que se tomó algunos años después, la cual muestra las ondas de choque que se expanden desde el lugar donde estaba la SN1987a (ampliado en la esquina). El inciso *c*) se amplificó en relación con *a*) y *b*). (Véase el pliego a color al final del libro).

Si la masa final de una estrella de neutrones es menor que aproximadamente dos o tres masas solares, se cree que su evolución posterior se parece a la de una enana blanca. Si la masa es mayor que esto, la estrella colapsa bajo la acción de la gravedad, y supera incluso el principio de exclusión del neutrón. Entonces la gravedad sería tan fuerte que incluso la luz emitida por la estrella no podría escapar, se regresaría en virtud de la fuerza de gravedad. Como ninguna radiación podría escapar de tal estrella, no se le podría ver: sería negra. Un objeto puede pasar junto a ella y desviarse por su campo gravitacional, pero si se acerca demasiado lo engulliría y nunca podría escapar. Éste es un **agujero negro**.

Novas y supernovas

Las **novas** (el término *nova* significa *nuevo* en latín) son estrellas más débiles que súbitamente aumentan su brillo hasta por un factor de 10^4 y duran de uno a dos meses antes de apagarse. Se considera que las novas son enanas blancas apenas perceptibles que atraen masa de una compañera cercana (constituyen un sistema *binario*), como se ilustra en la figura 44-10. La masa de hidrógeno capturada súbitamente se fusiona para convertirse en helio a una elevada tasa durante algunas semanas. Muchas novas (o quizá todas) son *recurrentes*: recuperan su brillo años después.

Las **supernovas** también son breves eventos explosivos, pero liberan millones de veces más energía que las novas: son hasta 10^{10} veces más luminosas que el Sol. El nivel máximo de brillo puede superar el de toda la galaxia en la que se ubiquen, pero dura sólo unos cuantos días o semanas. Lentamente se apagan a lo largo de algunos meses. Muchas supernovas se forman mediante colapso del núcleo para convertirse en una estrella de neutrones, como se describió anteriormente. Véase la figura 44-9.

Las **supernovas tipo Ia** son diferentes. Todas parecen tener casi la misma luminosidad. Se cree que son estrellas binarias, una de las cuales es una enana blanca que atrae masa de su compañera, en forma muy parecida a una nova, figura 44-10. La masa es mayor y, conforme se captura masa y la masa total se aproxima al límite de Chandrasekhar de 1.4 masas solares, estalla como una supernova al experimentar una titánica explosión termonuclear, una cadena incontrolada de reacciones nucleares. Lo que queda es una estrella de neutrones o (si la masa es suficientemente grande) un agujero negro.

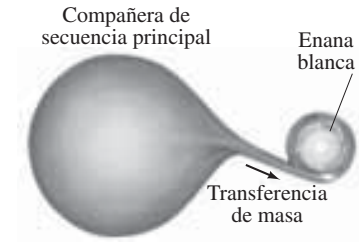


FIGURA 44–10 Modelo hipotético de una estrella nova y una supernova tipo Ia, que muestra cómo una enana blanca podría obtener masa a partir de su compañera normal.

44–3 Mediciones de distancia

Ya se habló acerca de las enormes distancias que separan a los objetos en el Universo. ¿Pero cómo se miden estas distancias? Una técnica básica emplea geometría simple para medir el **paralaje** de una estrella. Por paralaje se entiende el movimiento aparente de una estrella —contra el fondo de estrellas mucho más distantes—, que se debe al movimiento de la Tierra en torno al Sol. Como se muestra en la figura 44-11, el ángulo de visión de una estrella en relación con el plano de órbita de la Tierra (ángulo θ) se puede determinar en diferentes momentos del año. Puesto que se conoce la distancia d de la Tierra al Sol, es posible reconstruir los triángulos rectos que se ilustran en la figura 44-11 y así determinar† la distancia D hasta la estrella.

†Ésta es, en esencia, la forma como se determina la altura de las montañas, mediante "triangulación". Véase el ejemplo 1-7.

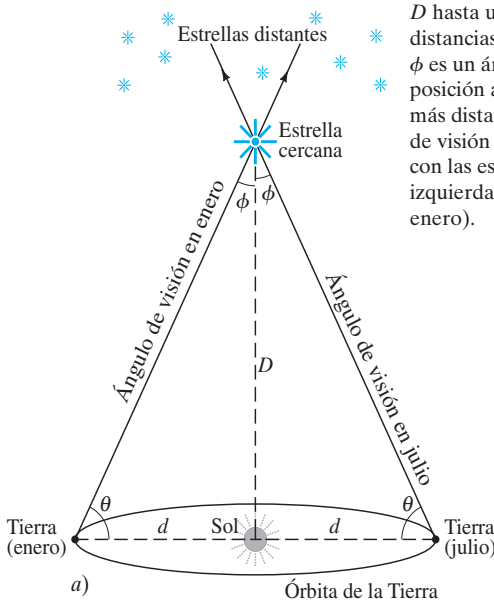


FIGURA 44–11 *a*) Ejemplo sencillo para determinar la distancia D hasta una estrella relativamente cercana utilizando paralaje. Las distancias horizontales están enormemente exageradas; en realidad ϕ es un ángulo muy pequeño. *b*) Diagrama del cielo que muestra la posición aparente de la estrella "cercana" en relación con estrellas más distantes, en dos momentos diferentes (enero y julio). El ángulo de visión en enero coloca a la estrella más a la derecha en relación con las estrellas distantes, mientras que en julio está más hacia la izquierda (el círculo con línea punteada señala la ubicación en enero).

EJEMPLO 44–6 ESTIMACIÓN Determinación de la distancia a una estrella usando paralaje. Estime la distancia D a una estrella, si el ángulo θ en la figura 44-11 se mide en 89.99994°.

PLANTEAMIENTO A partir de trigonometría, $\tan\phi = d/D$ en la figura 44-11. La distancia entre el Sol y la Tierra es $d = 1.5 \times 10^8$ km.

SOLUCIÓN El ángulo $\phi = 90° - 89.99994° = 0.00006°$, o aproximadamente 1.0×10^{-6} radianes. Podemos considerar que $\tan\phi \approx \phi$, pues ϕ es muy pequeño. Se despeja D en $\tan\phi = d/D$. La distancia D hasta la estrella es

$$D = \frac{d}{\tan\phi} \approx \frac{d}{\phi} = \frac{1.5 \times 10^8\,\text{km}}{1.0 \times 10^{-6}\,\text{rad}} = 1.5 \times 10^{14}\,\text{km},$$

o aproximadamente 15 años luz.

Las distancias a las estrellas con frecuencia se especifican en términos de ángulo de paralaje (ϕ en la figura 44-11a) dado en segundos de arco: 1 segundo (1″) es $\frac{1}{60}$ de un minuto (1′) de arco, que es $\frac{1}{60}$ de un grado, de manera que $1'' = \frac{1}{3600}$ de un grado. Entonces la distancia se especifica en **parsecs** (pc) (que significa ángulo de *par*alaje en *seg*undos de arco): $D = 1/\phi$ con ϕ en segundos de arco. En el ejemplo 44-6, $\phi = (6 \times 10^{-5})°(3600) = 0.22''$ de arco, así que se diría que la estrella está a una distancia de $1/0.22'' = 4.5$ pc. Un parsec está dado por [recuerde que $D = d/\phi$, y la distancia entre la Tierra y el Sol (figura 44-11a) se establece como $d = 1.496 \times 10^{11}$ m]:

$$1\,\text{pc} = \frac{d}{1''} = \frac{1.496 \times 10^{11}\,\text{m}}{(1'')\left(\frac{1'}{60''}\right)\left(\frac{1°}{60'}\right)\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{360°}\right)} = 3.086 \times 10^{16}\,\text{m}$$

$$1\,\text{pc} = (3.086 \times 10^{16}\,\text{m})\left(\frac{1\ \text{año luz}}{9.46 \times 10^{15}\,\text{m}}\right) = 3.26\ \text{años luz}.$$

El paralaje permite determinar la distancia hasta estrellas tan lejanas como 100 años luz (≈30 parsecs) desde la Tierra, y quizá 5 o 10 veces más lejanas desde una nave espacial en órbita. Más allá de esa distancia, los ángulos de paralaje son muy pequeños para medirse. En el caso de distancias mayores, se deben emplear técnicas más sutiles. Es posible comparar el brillo aparente de dos estrellas, o galaxias, y usar la ley del cuadrado inverso (el brillo aparente disminuye como el cuadrado de la distancia) para estimar sus distancias relativas. Sin embargo, esta técnica no es muy precisa, porque no se espera que dos estrellas, o dos galaxias, tengan la misma luminosidad intrínseca. Cuando se comparan galaxias, quizás una mejor estimación suponga que las estrellas más brillantes en todas las galaxias (o las galaxias más brillantes en cúmulos de galaxias) son similares y que tienen aproximadamente la misma luminosidad intrínseca. En consecuencia, su *brillo aparente* sería una medida de la distancia que las separa de la Tierra.

Otra técnica utiliza el diagrama H-R. La medición de la temperatura superficial de una estrella (a partir de su espectro) la coloca en cierto punto (dentro del 20%) sobre el diagrama H-R, suponiendo que es una estrella de secuencia principal, y entonces su luminosidad se puede estimar en el eje vertical (figura 44-6). Su brillo aparente y la ecuación 44-1 indican su distancia aproximada; véase el ejemplo 44-5.

Una mejor estimación proviene de comparar *estrellas variables*, en especial *variables Cefeidas*, cuya luminosidad varía en el tiempo con un periodo que, según las investigaciones, se relaciona con su luminosidad promedio. De esta forma, a partir de su periodo y brillo aparente se obtiene su distancia.

Las distancias más grandes se estiman al comparar el brillo aparente de supernovas tipo Ia (SNIa). Las supernovas tipo Ia tienen todas un origen similar (como se describe en la página anterior, figura 44-10) y se espera que su breve ráfaga explosiva de luz sea casi de la misma luminosidad. Por eso, en ocasiones se les conoce como "velas patrón", ya que son el mejor patrón para fuentes luminosas.

Otra técnica importante para estimar la distancia de estrellas muy distantes es a partir del "corrimiento al rojo" en los espectros de líneas de elementos y compuestos. El corrimiento al rojo se relaciona con la expansión del Universo, como se estudiará en la sección 44-5. Es útil para ubicar objetos más alejados que 10^7 a 10^8 años luz.

Conforme se observa cada vez más lejos, las técnicas de medición son menos confiables, de manera que cada vez hay más incertidumbre en las mediciones de grandes distancias.

44–4 Relatividad general: Gravedad y curvatura del espacio

Como hemos visto, la fuerza de gravedad desempeña un importante papel en los procesos que ocurren en las estrellas. La gravedad también es importante para la evolución del Universo como un todo. Las razones por las que la gravedad desempeña un papel dominante en el Universo —a diferencia de las otras tres fuerzas que, junto con la gravedad, constituyen las cuatro fuerzas de la naturaleza— son: **1.** es de largo alcance y **2.** siempre ejerce atracción. Las fuerzas nucleares fuerte y débil sólo actúan sobre distancias muy cortas, en el orden del tamaño de un núcleo; en consecuencia, no actúan sobre distancias astronómicas (actúan entre núcleos y nucleones en las estrellas para producir reacciones nucleares). La fuerza electromagnética, como la gravedad, actúa a través de grandes distancias, pero puede ser de atracción o de repulsión. Y puesto que el Universo no parece contener grandes áreas de carga eléctrica neta, no ocurre una gran fuerza neta. Pero la gravedad actúa como una fuerza de atracción entre *todas* las masas, y en el Universo existen grandes acumulaciones de masa de un solo "signo" (no + y −, como con la carga eléctrica). Einstein modificó la descripción que hizo Newton de la fuerza de gravedad en su ley de gravitación universal. En su teoría general de la relatividad, Einstein desarrolló una teoría de gravedad que ahora constituye la base de la dinámica cosmológica.

En la *teoría especial de la relatividad* (capítulo 36), Einstein concluyó que no hay forma de que un observador determine si un marco de referencia dado está en reposo o se mueve con velocidad constante en línea recta. Por ende, las leyes de la física deben ser las mismas en diferentes marcos de referencia inerciales. ¿Pero qué sucede en el caso más general del movimiento donde los marcos de referencia pueden *acelerar*?

Einstein consideró el problema de los marcos de referencia acelerados en su **teoría general de la relatividad** y en ella también desarrolló una teoría de la gravedad. Las matemáticas de la relatividad general son complejas, de manera que en este texto la discusión se hará en términos cualitativos.

Comencemos con el **principio de equivalencia** de Einstein, el cual afirma que

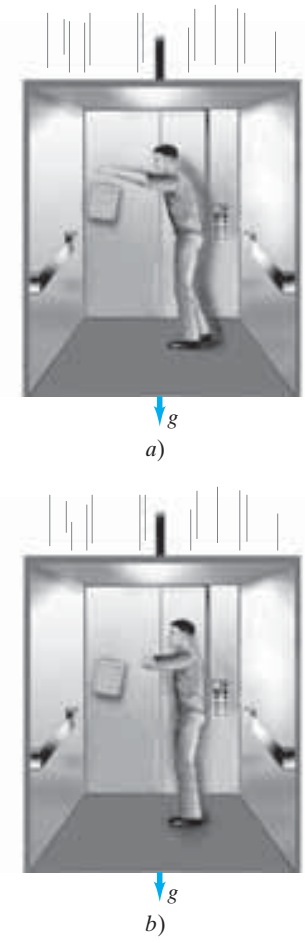
> **no se puede realizar experimento alguno que pueda distinguir entre un campo gravitacional uniforme y una aceleración uniforme equivalente.**

Si los observadores sienten que están en aceleración (como en un vehículo que aumenta su rapidez en torno a una curva pronunciada), no podrán probar mediante un experimento que, de hecho, simplemente experimentan el tirón de un campo gravitacional. Por el contrario, podrían pensar que reciben un tirón de la gravedad cuando de hecho experimentan una aceleración que no tiene nada que ver con la gravedad.

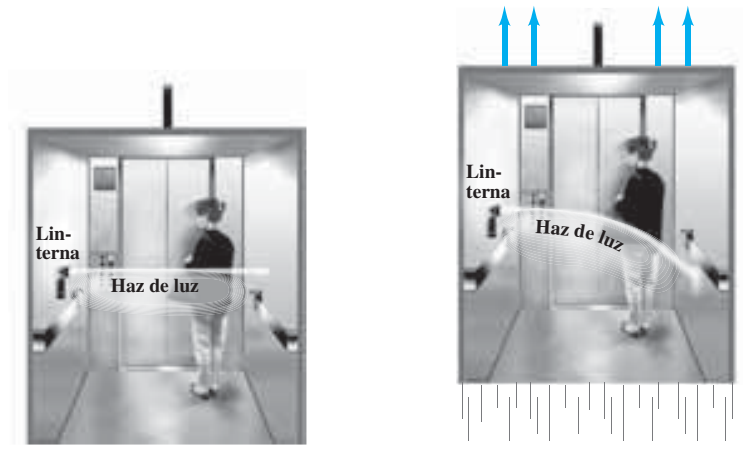
Como experimento mental, considere a una persona en un elevador que cae libremente cerca de la superficie de la Tierra. Si el observador sostiene un libro y lo suelta, ¿qué ocurriría? La gravedad tiraría de éste hacia abajo, hacia la Tierra, pero a la misma tasa ($g = 9.8\ \text{m/s}^2$) a la que la persona y el elevador caen. De manera que el libro flotaría justo junto a la mano de la persona (figura 44-12). El efecto es exactamente el mismo que si este marco de referencia estuviera en reposo y *no* actuara fuerza alguna. Por otra parte, si el elevador estuviera afuera en el espacio, donde el campo gravitacional en esencia es cero, el libro liberado flotaría, tal como lo hace en la figura 44-12. A continuación, si el elevador (afuera en el espacio) acelera hacia arriba con una aceleración de $9.8\ \text{m/s}^2$, el libro, como lo ve el observador, caería hacia el suelo con una aceleración de $9.8\ \text{m/s}^2$, tal como si cayera debido a la gravedad en la superficie de la Tierra. De acuerdo con el principio de equivalencia, el observador no podría determinar si el libro cayó porque el elevador aceleraba hacia arriba, o porque un campo gravitacional actuaba hacia abajo mientras el elevador estaba en reposo. Las dos descripciones son equivalentes.

El principio de equivalencia se relaciona con el concepto de que existen dos tipos de masa. La segunda ley de Newton, $F = ma$, usa **masa inercial**. Se puede decir que la masa inercial representa "resistencia" a cualquier tipo de fuerza. El segundo tipo de masa es la **masa gravitacional**. Cuando un objeto atrae a otro mediante la fuerza gravitacional (ley de gravitación universal de Newton, $F = Gm_1m_2/r^2$, capítulo 6), la intensidad de la fuerza es proporcional al producto de las *masas gravitacionales* de los dos objetos. Esto es similar a la ley de Coulomb para la fuerza eléctrica entre dos objetos,

FIGURA 44–12 En un elevador que cae libremente bajo la acción de la gravedad, *a*) una persona libera un libro; *b*) el libro liberado flota junto a la mano del propietario. El inciso *b*) ilustra una escena pocos momentos después de *a*).



que es proporcional al producto de sus cargas eléctricas. La carga eléctrica sobre un objeto no se relaciona con su masa inercial; así que, ¿por qué se esperaría que la masa gravitacional de un objeto (llámela carga gravitacional si lo desea) se relacionara con su masa inercial? Todo el tiempo se supuso que eran lo mismo. ¿Por qué? Porque ningún experimento, ni siquiera de alta precisión, ha podido discernir alguna diferencia mensurable entre masa inercial y masa gravitacional. (Por ejemplo, en ausencia de resistencia del aire, todos los objetos caen con la misma aceleración, g, sobre la Tierra.) Ésta es otra forma de enunciar el principio de equivalencia: *la masa gravitacional es equivalente a la masa inercial*.



a) *b*)

FIGURA 44–13 *a*) Haz de luz que pasa en línea recta a través de un elevador que no acelera. *b*) El haz de luz se dobla (exagerado) en un elevador en aceleración cuya rapidez aumenta en la dirección hacia arriba. Ambas vistas son como las percibe un observador externo en un marco de referencia inercial.

El principio de equivalencia permite demostrar que la luz debe desviarse debido a la fuerza gravitacional de un objeto masivo. Considere otro experimento mental, en el que un elevador está en espacio libre donde virtualmente no actúa la gravedad. Si una linterna sujeta al costado del elevador emite un haz de luz, el haz viajará en línea recta a través del elevador y formará una mancha en el lado opuesto si el elevador está en reposo o en movimiento con velocidad constante (figura 44-13a). Si en vez de ello el elevador acelera hacia arriba, como en la figura 44-13b, el haz de luz viajaría en línea recta a través en un marco de referencia en reposo. Sin embargo, en el elevador que se mueve hacia arriba, se observa que el haz se curva hacia abajo. ¿Por qué? Porque durante el tiempo en que la luz viaja de un lado del elevador al otro, el elevador se mueve hacia arriba con una rapidez vertical que aumenta en relación con la luz. A continuación, note que, de acuerdo con el principio de equivalencia, un marco de referencia que acelera hacia arriba es equivalente a un campo gravitacional que actúa hacia abajo. Por lo tanto, la trayectoria curva de la luz en la figura 44-13b se puede representar como debida al efecto de un campo gravitacional. De esta forma, a partir del principio de equivalencia, ¡se espera que la gravedad ejerza una fuerza sobre un haz de luz y que lo desvíe de su trayectoria en línea recta!

El hecho de que la gravedad afecte a la luz es una importante predicción de la teoría general de la relatividad de Einstein. Y se puede poner a prueba. La cantidad que el haz de luz se desvía de una trayectoria en línea recta debe ser pequeña aun cuando pase por un objeto masivo. (Por ejemplo, se predice que la luz cerca de la superficie de la Tierra, después de recorrer 1 km, caerá sólo aproximadamente 10^{-10} m, que es igual al diámetro de un pequeño átomo y no es detectable.) El objeto más masivo cerca de la Tierra es el Sol, y se calculó que la luz de una estrella distante se desviaría 1.75″ de arco (una desviación pequeña pero detectable) conforme pasara cerca del borde del Sol (figura 44-14). Sin embargo, tal medición sólo se podría realizar durante un eclipse total de Sol, de manera que el enorme brillo del Sol no oscureciera la luz estelar que pasaría cerca de su borde. Un oportuno eclipse ocurrió en 1919, y los científicos viajaron al Atlántico sur para observarlo. En esa ocasión, las fotografías de las estrellas alrede-

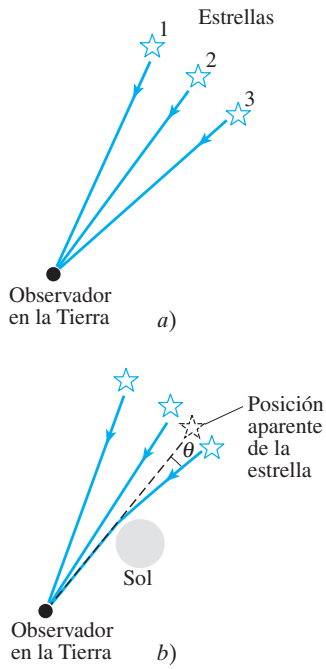
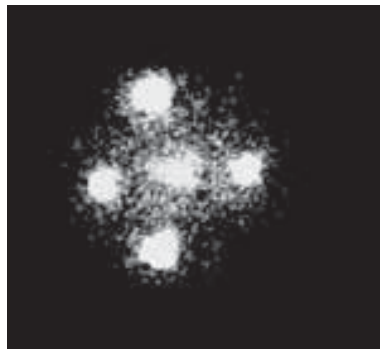
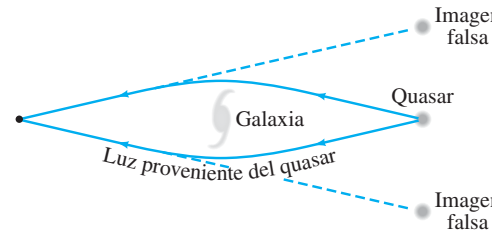


FIGURA 44–14 *a*) Tres estrellas en el cielo observadas desde la Tierra. *b*) Si la luz de una de estas estrellas pasa muy cerca del Sol, cuya gravedad desviará los rayos, la estrella parecerá estar a mayor altura de lo que en realidad está (siga el rayo hacia atrás).





a) *b*)

FIGURA 44–15 *a*) Fotografía del Telescopio Espacial Hubble de la llamada "cruz de Einstein", que se cree representa "lentes gravitacionales": la mancha central es una galaxia relativamente cercana, mientras que las otras cuatro manchas se consideran imágenes de un solo quasar *detrás* de la galaxia. *b*) Diagrama que muestra cómo la galaxia podría desviar la luz proveniente del quasar detrás de ella para producir las cuatro imágenes. Véase también la figura 44-14. [Si la forma de la galaxia cercana y el quasar distante fueran esferas perfectas, se esperaría que la "imagen" del quasar distante fuera un anillo circular o halo en lugar de las cuatro imágenes separadas que se ven aquí. Tal anillo se llama "anillo de Einstein".]

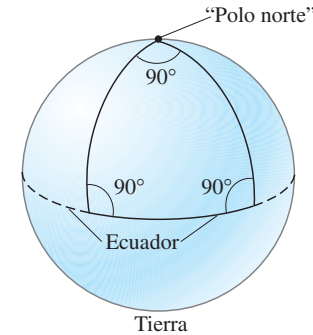
dor del Sol revelaron corrimientos, en concordancia con la predicción de Einstein. Otro ejemplo son los lentes gravitacionales, como se muestra en la figura 44-15.

Fermat demostró que los fenómenos ópticos, incluidos reflexión, refracción y efectos de lentes, se pueden deducir a partir de un principio simple: la luz que viaja entre dos puntos sigue la trayectoria más corta en el espacio. Por ende, si la gravedad curva la trayectoria de la luz, entonces la gravedad debe curvar el espacio en sí. Esto es, *el espacio en sí se puede curvar*, y la masa gravitacional es la que causa la curvatura. De hecho, la curvatura del espacio, o mejor dicho del espacio-tiempo tetradimensional, es un aspecto básico de la Relatividad General de Einstein (RG).

¿Qué se entiende por **espacio curvo**? Para comprender esto, recuerde que el método normal de ver el mundo es a través de la geometría plana euclidiana. En la geometría euclidiana, existen muchos axiomas y teoremas que se dan por hecho, como el que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180º. Los matemáticos también han imaginado geometrías no euclidianas, que implican espacio curvo. Es bastante difícil imaginar espacio curvo tridimensional, y todavía más imaginar el espacio-tiempo curvo tetradimensional. Así que se intentará comprender la idea de espacio curvo empleando superficies bidimensionales.

Considere, por ejemplo, la superficie bidimensional de una esfera. Claramente es curva, figura 44-16, al menos para quienes la ven desde el exterior, desde el mundo tridimensional. Pero, ¿cómo hipotéticas criaturas bidimensionales determinarían si su espacio bidimensional es plano o curvo? Una forma sería medir la suma de los ángulos de un triángulo. Si la superficie es un plano, la suma de los ángulos es 180º, como se aprende en geometría plana. Pero si el espacio es curvo, y se construye un triángulo suficientemente grande, la suma de los ángulos *no* será 180º. Para construir un triángulo sobre una superficie curva, por ejemplo, la esfera de la figura 44-16, debemos usar el equivalente de una línea recta: esto es, la distancia más corta entre dos puntos, que se llama **geodésica**. En una esfera, una geodésica es un arco de un gran círculo (un arco en un plano que pasa a través del centro de la esfera) como el ecuador y las líneas de la coordenada de longitud o meridianos de la Tierra. Considere, por ejemplo, el gran triángulo de la figura 44-16: sus lados son dos líneas que van desde el polo norte hasta el ecuador, y el tercer lado es una sección del ecuador, como se observa. Las dos líneas de la coordenada de longitud forman ángulos de 90º con el ecuador (observe un globo terráqueo para ver esto más claramente). Forman un ángulo en el polo norte, que podría ser de 90º como se muestra; la suma de estos ángulos es $90° + 90° + 90° = 270°$. Éste claramente *no* es un espacio euclidiano. Sin embargo, note que, si el triángulo es pequeño en comparación con el radio de la esfera, los ángulos sumarán casi 180º y el triángulo (y el espacio) parecerá plano.

FIGURA 44–16 En una superficie bidimensional curva, la suma de los ángulos de un triángulo puede no ser 180º.



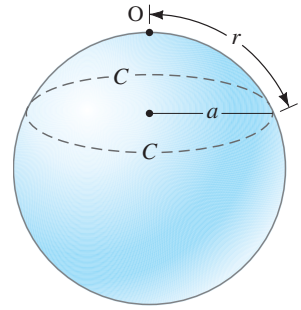


FIGURA 44–17 En una superficie esférica (un mundo bidimensional) se dibuja un círculo (línea punteada) con circunferencia C en torno al punto O como el centro. El radio del círculo (no de la esfera) es la distancia r a lo largo de la superficie. (Note que en la vista tridimensional se puede decir que $C = 2\pi a$. Puesto que $r > a$, entonces $C < 2\pi r$.)

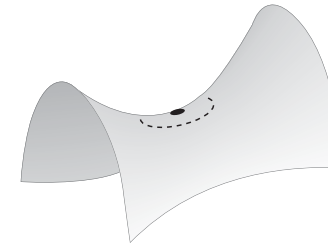


FIGURA 44–18 Ejemplo de una superficie bidimensional con curvatura negativa.

Otra forma de poner a prueba la curvatura del espacio es medir el radio r y la circunferencia C de un gran círculo. Sobre una superficie plana, $C = 2\pi r$. Pero sobre una superficie esférica bidimensional, C es *menor* que $2\pi r$, como se aprecia en la figura 44-17. La proporcionalidad entre C y r es *menor* que 2π. Se dice que tal superficie tiene *curvatura positiva*. En la superficie con forma de silla de montar de la figura 44-18, la circunferencia de un círculo es mayor que $2\pi r$ y la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180º. Se dice que tal superficie tiene *curvatura negativa*.

Curvatura del Universo

¿Y qué sucede en el caso del Universo? A gran escala (no sólo cerca de una gran masa), ¿cuál es la curvatura global del Universo? ¿Tiene curvatura positiva, curvatura negativa o es plano (curvatura cero)? Los humanos percibimos nuestro mundo como euclidiano (plano), pero no se puede excluir la posibilidad de que el espacio tenga una curvatura tan ligera que normalmente no se le aprecie. Ésta es una pregunta crucial en cosmología y sólo se puede responder mediante experimentación precisa.

Si el Universo tuviera una curvatura positiva, sería *cerrado* o *finito* en volumen. Esto *no* significaría que las estrellas y galaxias se extenderían hasta cierta frontera, más allá de la cual habría espacio vacío. No hay frontera o borde en tal Universo. El Universo es todo lo que hay. Si una partícula se moviera en línea recta en una dirección particular, con el tiempo regresaría al punto de partida, acaso eones de tiempo más tarde.

Por otra parte, si la curvatura del espacio fuera cero o negativa, sería *abierto*. Podría continuar por siempre. Un Universo abierto podría ser *infinito*; pero de acuerdo con investigación reciente, esto no necesariamente tendría que ser así.

En la actualidad hay evidencia muy fuerte de que el Universo a gran escala está muy cerca de ser plano. De hecho, está tan cerca de ser plano que no es posible decir si tiene curvatura ligeramente positiva o ligeramente negativa.

Agujeros negros

De acuerdo con la teoría de Einstein, el espacio-tiempo es curvo cerca de los objetos masivos. Se podría pensar que el espacio es como una delgada hoja de caucho: si un objeto pesado cuelga de él, se curva como se muestra en la figura 44-19. El peso corresponde a una enorme masa que hace que el espacio (¡el espacio en sí!) se curve. Por eso, en la teoría de Einstein[†] no se habla de la "fuerza" de gravedad que actúa sobre los objetos. En vez de ello, se dice que los objetos y los rayos de luz se mueven como lo hacen porque el espacio-tiempo es curvo. Un objeto que parte del reposo o que se mueve lentamente cerca de la gran masa de la figura 44-19 seguiría una geodésica (el equivalente de una línea recta en geometría plana) hacia esa gran masa.

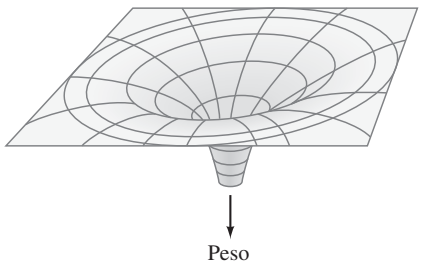


FIGURA 44–19 Analogía de hoja de caucho para visualizar el espacio-tiempo curvo por la materia.

[†]Alexander Pope (1688-1744) escribió un epitafio para Newton:

"La naturaleza y las leyes de la naturaleza se ocultaban en la noche.
Dios dijo, *¡Sea Newton!*, y todo fue luz".

Sir John Squire (1884-1958), quizás incómodo con los profundos pensamientos de Einstein, agregó:

"Pero esto no duró. El Diablo gritó, *¡Ah!*
¡Sea Einstein!, y restauró el statu quo".

La curvatura extrema del espacio-tiempo que se ilustra en la figura 44-19 se podría formar mediante un **agujero negro**. Un agujero negro, como se mencionó en la sección 44-2, es tan denso que ni siquiera la luz puede escapar de él. Para convertirse en agujero negro, un objeto de masa M debe experimentar **colapso gravitacional**, y contraerse mediante autoatracción gravitacional a menos de un radio llamado **radio de Schwarzschild**:

$$R = \frac{2GM}{c^2},$$

donde G es la constante gravitacional y c la rapidez de la luz. Si un objeto colapsa hasta dentro de este radio, la relatividad general predice que rápidamente ($\approx 10^{-5}$ s) colapsará a un punto en $r = 0$, formando una singularidad infinitamente densa. Sin embargo, esta predicción es incierta, porque en este ámbito es necesario combinar mecánica cuántica con gravedad, una unificación de teorías que aún no se logra (sección 43-12).

EJERCICIO C ¿Cuál es el radio de Schwartzschild para un objeto con 2 masas solares?

El radio de Schwartzschild también representa el horizonte de eventos de un agujero negro. Por **horizonte de eventos** se entiende la superficie más allá de la cual ninguna señal emitida puede llegar a la Tierra, y por ende no es posible recibir información de los hechos que ocurren más allá de esa superficie. Conforme una estrella colapsa hacia un agujero negro, la gravedad atrae cada vez con más fuerza la luz que emite, pero todavía se le puede ver. Una vez que la materia rebasa el horizonte de eventos, la luz emitida no puede escapar, sino que se regresa por acción de la gravedad.

Todo lo que se puede conocer acerca de un agujero negro es su masa, su cantidad de movimiento angular (podría haber agujeros negros giratorios) y su carga eléctrica. Ninguna otra información, ningún detalle de su estructura o del tipo de materia de la que está formado se puede conocer porque ninguna información logra escapar.

¿Cómo se observan los agujeros negros? Es imposible verlos porque ninguna luz escapa de ellos. Serían objetos negros contra un cielo negro. Pero ejercen una fuerza gravitacional sobre los objetos cercanos. El agujero negro que se cree está en el centro de la Vía Láctea ($M \approx 2 \times 10^6\ M_{\text{Sol}}$) se descubrió al examinar el movimiento de la materia en sus alrededores. Otra técnica es examinar estrellas que parecen moverse como si fueran un miembro de un *sistema binario* (dos estrellas que giran en torno a su centro de masa común), pero sin un compañero visible. Si la estrella no vista es un agujero negro, se esperaría que atrajera material gaseoso de su compañera visible (como en la figura 44-10). Conforme esta materia se aproxima al agujero negro, se aceleraría enormemente y debería emitir rayos X de un tipo característico antes de sucumbir dentro del horizonte de eventos. Tales rayos X, más la estimación de una masa suficientemente elevada a partir del movimiento rotacional, dan evidencia para inferir la existencia de un agujero negro. Uno de los muchos candidatos para un agujero negro está en el sistema de estrellas binarias Cisne X-1 (Cygnus X-1). Se cree que el centro de la mayoría de las galaxias está ocupado por un agujero negro con una masa de 10^6 a 10^9 veces la masa de una estrella común como el Sol.

EJERCICIO D Un agujero negro tiene un radio R. Su masa es proporcional a *a*) R, *b*) R^2, *c*) R^3. Justifique su respuesta.

44–5 El Universo en expansión: Corrimiento al rojo y ley de Hubble

En la sección 44-2 se describió cómo las estrellas individuales evolucionan desde su nacimiento hasta su muerte como enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. ¿Pero qué sucede con el Universo como un todo: es estático o cambia? Uno de los descubrimientos científicos más importantes del siglo XX fue que las galaxias distantes se alejan rápidamente de la Tierra, y que, cuanto más lejos están, con mayor rapidez se alejan. La forma como los astrónomos llegaron a esta asombrosa idea y qué significa para la historia pasada del Universo, así como para su futuro, ocuparán el resto del libro.

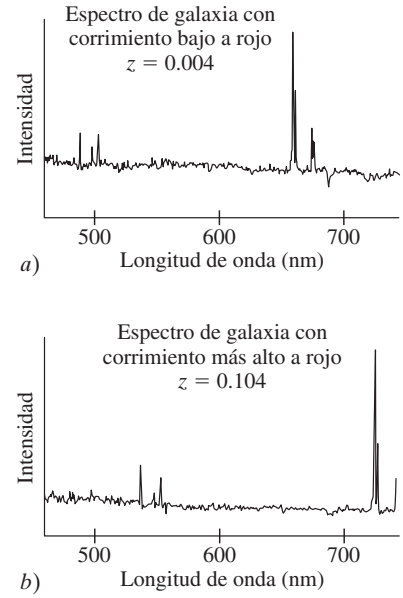


FIGURA 44–20 Átomos y moléculas emiten y absorben luz de frecuencias particulares dependiendo del espaciamiento de sus niveles de energía, como se vio en los capítulos 37 a 40. *a*) Espectro de luz recibido de una galaxia con movimiento relativamente lento. *b*) Espectro de una galaxia que se aleja de la Tierra con una rapidez mucho mayor. Note cómo los picos (o líneas) en el espectro se movieron hacia longitudes de onda más largas. El corrimiento hacia el rojo es $z = (\lambda_{obs} - \lambda_{reposo})/\lambda_{reposo}$.

Fue Edwin Hubble quien, en 1929, planteó por primera vez que el Universo está en expansión. Esta idea se basó en mediciones de distancia de galaxias (sección 44-3) y la determinación de sus velocidades mediante el corrimiento Doppler de las líneas espectrales en la luz que se recibía de ellas (figura 44-20). En el capítulo 16 se vio cómo la frecuencia del sonido es más alta y la longitud de onda más corta si la fuente y el observador se desplazan uno hacia el otro. Si la fuente se aleja del observador, la frecuencia es más baja y la longitud de onda más larga. El **efecto Doppler** también ocurre para la luz, y en la sección 36-12 (ecuación 36-15) se vio que, de acuerdo con la relatividad especial, el corrimiento Doppler está dado por

$$\lambda_{obs} = \lambda_{reposo}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \qquad \left[\begin{array}{l}\text{fuente y observador}\\ \text{se alejan entre sí}\end{array}\right] \qquad \textbf{(44–3)}$$

donde λ_{reposo} es la longitud de onda emitida como se ve en un marco de referencia en reposo con respecto a la fuente, y λ_{obs} es la longitud de onda observada en un marco en movimiento con velocidad v que se aleja de la fuente a lo largo de la línea de visión. (Para movimiento relativo de uno *hacia* el otro, $v < 0$ en esta fórmula.) Cuando una fuente distante emite luz de una longitud de onda particular, y la fuente se aleja de un observador en la Tierra, la longitud de onda parece más larga al observador: el color de la luz (si es visible) se corre hacia el extremo rojo del espectro visible, un efecto conocido como **corrimiento hacia el rojo**. (Si la fuente se mueve hacia el observador, el color se corre hacia el azul, el cual tiene una longitud de onda más corta.)

En los espectros de las estrellas en otras galaxias, se observa que las líneas corresponden a líneas en los espectros conocidos de átomos particulares (véanse la sección 37-10 y las figuras 35-22 y 37-20). Lo que Hubble descubrió fue que las líneas que se ven en los espectros de las galaxias distantes por lo general *corrían hacia el rojo*, y que la cantidad de corrimiento parecía ser aproximadamente proporcional a la distancia de la galaxia desde la Tierra. Esto es, la velocidad v de una galaxia que se aleja de la Tierra es proporcional a su distancia d desde la Tierra:

LEY DE HUBBLE

$$v = Hd. \qquad \textbf{(44–4)}$$

Ésta es la **ley de Hubble**, una de las ideas fundamentales en astronomía. La constante H se llama **parámetro de Hubble**.

El valor de H era incierto en más de un 20% hasta hace poco, y se creía que estaba entre 50 y 80 km/s/Mpc. Pero mediciones recientes ubican su valor con mayor exactitud en

$$H = 71\ \text{km/s/Mpc}$$

(esto es, 71 km/s por megaparsec de distancia). La incertidumbre actual es de alrededor del 5%, o ±4 km/s/Mpc. Si se usan años luz para distancia, entonces $H = 22$ km/s por millón de años luz de distancia:

$$H = 22\ \text{km/s/Millones de años luz}$$

con una incertidumbre estimada de ±1 km/s/Millones de años luz.

Orígenes del corrimiento hacia el rojo

Las galaxias muy cercanas a la Tierra parecen moverse de manera aleatoria en relación con nuestro planeta: algunas se mueven hacia la Tierra (corrimiento al azul), otras se alejan de ella (corrimiento hacia el rojo); sus rapideces están en el orden de $0.001c$. Pero, en el caso de galaxias más distantes, la velocidad de recesión es mucho mayor que la velocidad del movimiento aleatorio local y, por lo tanto, es dominante y la ley de Hubble (ecuación 44.4) se cumple muy bien. Las galaxias más distantes tienen velocidad de recesión más alta y un mayor corrimiento hacia el rojo, el cual se llama **corrimiento hacia el rojo cosmológico**. En la actualidad ese corrimiento al rojo se interpreta como debido a la *expansión del espacio* mismo. La longitud de onda emitida originalmente λ_{reposo} se puede considerar como estirada (se hace más larga) junto con el espacio en expansión que la rodea, como se sugiere en la figura 44-21. Aunque Hubble consideró al corrimiento al rojo como un corrimiento Doppler, ahora se le entiende en este sentido de espacio en expansión.

A diferencia del corrimiento al rojo cosmológico, que se debe a la expansión del espacio en sí, el *corrimiento al rojo Doppler* ordinario se debe al movimiento relativo del emisor y el observador en un espacio que se puede considerar fijo sobre el intervalo de tiempo de observación.

Existe una tercera forma de producir un corrimiento al rojo, que se menciona para completar el tema: un **corrimiento al rojo gravitacional**. La luz que sale de una estrella masiva gana energía potencial gravitacional (como una piedra que se lanza hacia arriba desde la Tierra). De manera que la energía cinética de cada fotón, hf, se debe volver menor (para conservar energía). Una frecuencia f menor significa una longitud de onda más larga λ $(= c/f)$, que es un corrimiento al rojo.

La cantidad de un corrimiento al rojo se especifica mediante el **parámetro de corrimiento al rojo**, z, que se define como

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{reposo}}}{\lambda_{\text{reposo}}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{reposo}}}, \qquad \textbf{(44–5a)}$$

donde λ_{reposo} es una longitud de onda como la ve un observador en reposo en relación con la fuente, y λ_{obs} es la longitud de onda medida por un observador en movimiento. La ecuación 44-5a también se puede escribir como

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{reposo}}} - 1 \qquad \textbf{(44–5b)}$$

y

$$z + 1 = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{reposo}}}. \qquad \textbf{(44–5c)}$$

En el caso de rapidez baja, no cercana a la rapidez de la luz $(v \lesssim 0.1\,c)$, la fórmula de Dopler (ecuación 44-3) se puede usar para demostrar (problema 29) que z es proporcional a la rapidez de la fuente hacia o desde el observador:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{reposo}}}{\lambda_{\text{reposo}}} \approx \frac{v}{c}. \qquad [v \ll c] \quad \textbf{(44–6)}$$

Pero los corrimientos hacia el rojo no siempre son pequeños, en cuyo caso la aproximación de la ecuación 44-6 no es válida. Los telescopios modernos por lo general observan galaxias con $z \approx 5$ (figura 44-22); para galaxias con z grande, ni siquiera la ecuación 44-3 se aplica porque el corrimiento hacia el rojo se debe a la expansión del espacio (corrimiento hacia el rojo cosmológico), no al efecto Doppler.

Factor de escala

La expansión del espacio se puede describir como un simple escalamiento de la distancia común entre dos puntos u objetos en el Universo. Si dos galaxias distantes está a una distancia d_0 en algún momento inicial, entonces un tiempo t posterior estarán separadas por una mayor distancia $d(t)$. El **factor de escala** es el mismo para la luz, que se expresa en la ecuación 44-5a. Esto es,

$$\frac{d(t) - d_0}{d_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = z$$

o

$$\frac{d(t)}{d_0} = 1 + z.$$

De esta forma, por ejemplo, si una galaxia tiene $z = 3$, entonces el factor de escala ahora es $(1 + 3) = 4$ veces mayor que cuando la luz se emitió desde esa galaxia. Esto es, la distancia promedio entre las galaxias se volvió 4 veces mayor. Por lo tanto, el factor por el que aumenta la longitud de onda desde que se emitió nos indica en qué factor aumentó en tamaño el Universo (o la distancia común entre los objetos).

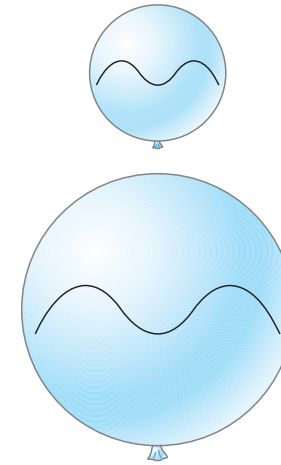
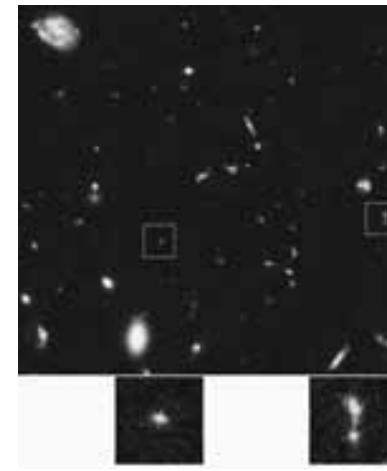


FIGURA 44–21 Modelo simplificado de un Universo bidimensional, imaginado como un globo. Conforme el globo se infla (= Universo en expansión), la longitud de onda de una onda sobre su superficie se hace más larga.

FIGURA 44–22 Fotografía de Campo Hubble Ultra Profundo que muestra qué puede estar entre las galaxias más distantes de la Tierra (pequeños puntos rojos, que se destacan mediante cuadrados), con $z \approx 5$ o 6, que existían cuando el Universo sólo tenía aproximadamente 800 millones de años de antigüedad. Las dos galaxias distantes en esta fotografía se muestran agrandadas abajo. (Véase el pliego a color al final del libro).



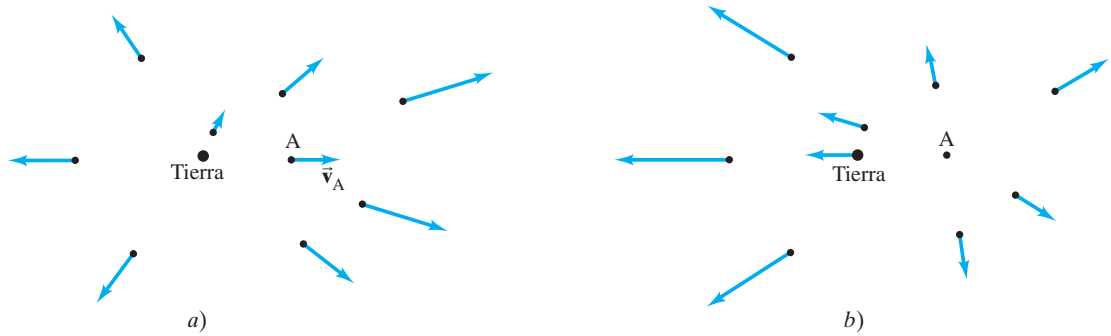


FIGURA 44–23 La expansión del Universo parece igual desde cualquier punto en el Universo. Si un observador está en la Tierra, como se muestra en el inciso *a*), o en el punto A [que está en reposo en el marco de referencia que se representa en *b*)], todas las otras galaxias parecen alejarse de él.

Expansión y el principio cosmológico

¿Qué significa que las galaxias distantes se alejen del observador, y con rapidez cada vez mayor cuanto más lejos están de él? Parece sugerir algún tipo de expansión explosiva que comenzó en algún tiempo muy distante en el pasado. Y a primera vista parece que uno está en medio de todo. Pero no lo está. La expansión parece igual desde cualquier otro punto en el Universo. Para entender por qué, observe la figura 44-23. En la figura 44-23a se tiene la vista desde la Tierra (o desde la Vía Láctea). Las velocidades de las galaxias vecinas se indican mediante flechas, que apuntan alejándose de uno, y las flechas son más largas para las galaxias más distantes de uno. Pero, ¿y si estuviéramos en la galaxia marcada A en la figura 44-23a? Desde la Tierra, la galaxia A parece moverse hacia la derecha con una velocidad, llamémosla $\vec{\mathbf{v}}_A$, representada mediante la flecha que apunta hacia la derecha. Si estuviéramos *en* la galaxia A, la Tierra parecería moverse hacia la izquierda con velocidad $-\vec{\mathbf{v}}_A$. Para determinar las velocidades de las otras galaxias en relación con A, sume vectorialmente el vector de velocidad, $-\vec{\mathbf{v}}_A$, a todas las flechas de velocidad que se muestran en la figura 44-23a. Esto produce la figura 44-23b, donde claramente se ve que el Universo se expande alejándose también de la galaxia A; y las velocidades de las galaxias que retroceden desde A son proporcionales a su distancia actual desde A. El Universo se ve bastante igual desde diferentes puntos.

Así, la expansión del Universo se puede enunciar del modo siguiente: todas las galaxias se alejan *unas de otras* a una tasa promedio de aproximadamente 22 km/s por millón de años luz de distancia entre ellas. Las ramificaciones de esta idea son profundas y se les discutirá en un momento.

Una suposición básica en cosmología es que, a gran escala, el Universo parecería el mismo para observadores en diferentes lugares al mismo tiempo. En otras palabras, el Universo es tanto *isotrópico* (parece igual en todas direcciones) como *homogéneo* (parecería igual si nos ubicáramos en cualquier lugar, por ejemplo, en otra galaxia). Esta suposición se llama el **principio cosmológico**. A una escala local, por ejemplo, en el Sistema Solar o dentro de nuestra galaxia, este principio claramente no se aplica (el cielo parece distinto en diferentes direcciones). Pero desde hace mucho se cree que es válido si se mira a una escala suficientemente grande, de manera que la densidad de población promedio de las galaxias y cúmulos de galaxias debe ser igual en diferentes áreas del cielo. Esto parece ser válido a distancias más grandes que aproximadamente 200 Mpc (700 millones de años luz). La expansión del Universo (figura 44-23) es congruente con el principio cosmológico; y la casi uniformidad de la radiación cósmica de fondo (que se estudiará en la sección 44-6) lo apoya. Otra forma de enunciar el principio cosmológico es decir que *el lugar de la humanidad en el Universo no es especial.*

La expansión del Universo, como la describe la ley de Hubble, sugiere con insistencia que las galaxias debieron estar más juntas en el pasado de lo que están ahora. Esta es, de hecho, la base de la teoría de la Gran Explosión (*Big Bang*) del origen del Universo, que representa al Universo como una expansión sin descanso que comenzó a partir de un momento en el que había mucho calor y gran compresión. Dentro de poco se analizará la Gran Explosión con detalle, pero primero veamos lo que se puede decir acerca de la edad del Universo.

Una forma de estimar la edad del Universo se basa en el parámetro de Hubble. Con $H \approx 22$ km/s por 10^6 años luz, el tiempo que se requiere para que las galaxias lleguen a sus separaciones presentes sería aproximadamente (comenzando con $v = d/t$ y con la ley de Hubble, ecuación 44-4),

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{Hd} = \frac{1}{H} \approx \frac{(10^6 \text{ años luz})(0.95 \times 10^{13} \text{ km/años luz})}{(22 \text{ km/s})(3.16 \times 10^7 \text{ s/años})} \approx 14 \times 10^9 \text{ años},$$

o 14 mil millones de años. La edad del Universo que se calcula de esta forma se llama *tiempo de expansión característico* o "edad de Hubble". Es tan sólo una estimación y supone que la tasa de expansión del Universo era constante (en la actualidad hay bastante certeza de que esto no es cierto). Las mejores mediciones actuales indican que la edad del Universo es de 13.7×10^9 años, en notable concordancia con la estimación de la edad que hizo Hubble.

*Modelo de estado estable

Antes de explicar la Gran Explosión en detalle, mencionaremos una alternativa a la Gran Explosión, el **modelo de estado estable**, que supone que el Universo es infinitamente antiguo y, en promedio, parece el mismo ahora de lo que fue siempre. (Esta supuesta uniformidad en el tiempo, así como en el espacio, se llamó *principio cosmológico perfecto*.) De acuerdo con el modelo de estado estable, en el Universo como un todo no ha ocurrido ningún cambio a gran escala, en particular ninguna Gran Explosión. Para mantener esta visión ante la recesión de las galaxias unas de otras, la materia se debe crear de manera continua para mantener la suposición de la uniformidad. La tasa de creación de masa requerida es muy pequeña, aproximadamente un nucleón por metro cúbico cada 10^9 años.

El modelo de estado estable representó una saludable competencia para el modelo de la Gran Explosión a mediados del siglo XX. Pero el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo (siguiente sección), así como otras observaciones del Universo, hicieron que el modelo de la Gran Explosión se aceptara de manera universal.

44–6 La Gran Explosión (Big Bang) y la radiación cósmica de fondo

La expansión del Universo sugiere que los objetos en el Universo alguna vez estuvieron mucho más cercanos entre sí de lo que están ahora. Ésta es la base de la idea de que el Universo comenzó hace aproximadamente 14 mil millones de años como una expansión desde un estado de muy alta densidad y temperatura conocido afectuosamente como **la Gran Explosión (o Big Bang)**.

El nacimiento del Universo no fue exactamente una explosión, porque una explosión expulsa trozos hacia el espacio circundante. En vez de ello, la Gran Explosión fue el comienzo de una expansión del espacio en sí. El Universo observable era muy pequeño al principio y desde entonces se expande. El pequeño Universo inicial de materia extremadamente densa no se considera como una masa concentrada en medio de un espacio mucho más grande alrededor de ella. El pequeño pero denso Universo inicial era el Universo entero. No habría nada más. Cuando se dice que el Universo alguna vez fue más pequeño de lo que es ahora, se entiende que la separación promedio entre los objetos (como las galaxias) era menor. Se cree que el Universo tenía extensión infinita entonces, y todavía la tiene (sólo que es más grande). Sin embargo, el Universo observable es finito.

Una gran pieza de evidencia que apoya a la Gran Explosión es la radiación cósmica de fondo en la región de microondas, a veces también llamada radiación del **fondo cósmico de microondas** (o radiación CMB, por las siglas de *cosmic microwave background*) cuyo descubrimiento se produjo del modo siguiente.

En 1964 Arno Penzias y Robert Wilson apuntaron su radiotelescopio (un dispositivo con una gran antena para detectar ondas de radio) hacia el cielo nocturno (figura 44-24). Con él detectaron emisión de amplia dispersión y se convencieron de que provenía del exterior de la galaxia. Realizaron mediciones precisas a una longitud de onda $\lambda = 7.35$ cm, en la región de microondas del espectro electromagnético (figura 31-12). Inicialmente se descubrió que la intensidad de esta radiación no variaba de día o de noche ni tampoco con la época del año, ni dependía de la dirección. Provenía de todas direcciones en el Universo con igual intensidad, hasta una precisión mayor que el 1%. Sólo se podía concluir que esta radiación provenía del Universo como un todo.

FIGURA 44–24 Arno Penzias (izquierda) y Robert Wilson, y detrás de ellos su gran antena.

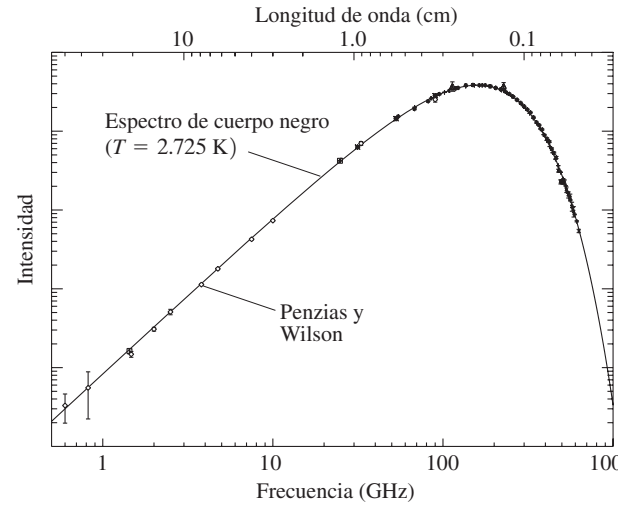


FIGURA 44–25 Espectro de la radiación cósmica de fondo, que muestra la curva de cuerpo negro y mediciones experimentales incluidas en la frecuencia detectada por Penzias y Wilson. (Gracias a G. F. Smoot y D. Scott. Las barras verticales representan la incertidumbre experimental más reciente en una medición.)

FIGURA 44–26 Los científicos del COBE, John Mather (izquierda, científico jefe y responsable de la medición de la forma de cuerpo negro del espectro) y George Smoot (investigador jefe para el experimento de anisotropía) aparecen aquí durante la celebración de su Premio Nobel en diciembre de 2006, otorgado por su descubrimiento del espectro y la anisotropía del CMB con el instrumento del COBE.

Ellos midieron esta radiación cósmica de fondo en $\lambda = 7.35$ cm, que corresponde a la región de microondas, y su intensidad corresponde a radiación de cuerpo negro (véase la sección 37-1) a una temperatura aproximada de 3 K. Cuando el satélite COBE (Cosmic Background Explorer, explorador de la radiación cósmica de fondo) midió radiación a otras longitudes de onda, se descubrió que las intensidades caían en una curva de cuerpo negro casi perfecta, como se observa en la figura 44-25, lo que corresponde a una temperatura de 2.725 K ($\pm$ 0.002 K).

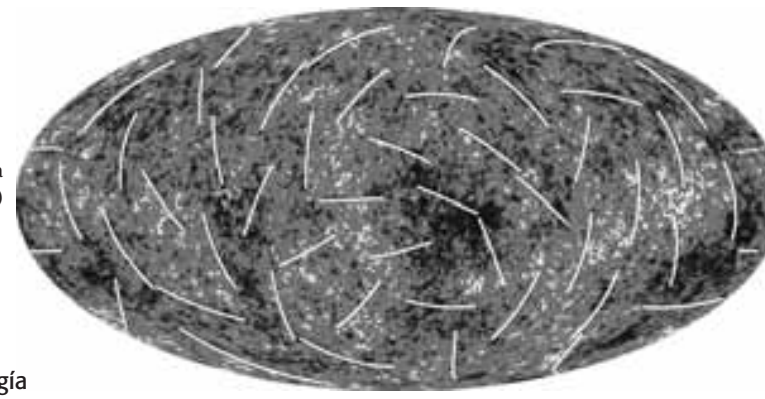
La notable uniformidad de la radiación cósmica de fondo estuvo en concordancia con el principio cosmológico. Pero los teóricos creyeron que eran necesarias algunas pequeñas variaciones en la homogeneidad, o "anisotropías", en el CMB que darían las "semillas" a partir de las cuales pudo comenzar la formación de las galaxias. De hecho se encontraron pequeñas áreas de densidad ligeramente más alta, que se habrían contraído bajo la acción de la gravedad para formar estrellas y galaxias. Estas pequeñas variaciones de homogeneidad en densidad y temperatura se detectaron primero mediante el experimento del satélite COBE en 1992, que dirigieron John Mather y George Smoot (figura 44-26).

Este descubrimiento de la **anisotropía** del CMB figura, junto con el descubrimiento del CMB en sí, en la historia de la cosmología. Fue la culminación de décadas de investigación por pioneros como Paul Richards y David Wilkinson. Experimentos posteriores con mayor detalle culminaron en 2003 con los resultados de la sonda de anisotropía de microondas Wilkinson (WMAP, (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Observe la figura 44-27, que presenta los resultados más recientes (2006).

El CMB aporta fuerte evidencia que apoya la Gran Explosión, y ofrece información acerca de las condiciones en el Universo primigenio. De hecho, a finales de la década de 1940, George Gamow y sus colaboradores calcularon que un origen como la Gran Explosión del Universo generaría tal radiación de fondo de microondas.

Para entender por qué, veamos cómo pudo haber sido una Gran Explosión. (En la actualidad generalmente se usa el término "Gran Explosión" para referirse al *proceso*, que comienza con el nacimiento del Universo y continúa a través de su expansión posterior.) La temperatura debió ser extremadamente elevada al principio, tanto que no podría haber átomo alguno en las primeras etapas del Universo. En vez de ello, el Uni-

FIGURA 44–27 Mediciones de la radiación cósmica de fondo sobre todo el cielo, con código de color para representar diferencias en temperatura desde el promedio de 2.725 K: la escala de color varía de $+200$ μK (rojo) hasta -200 μK (azul oscuro), que representan manchas ligeramente más calientes y más frías (asociadas con variaciones en la densidad). (Véase el pliego a color al final del libro.) Los resultados son del satélite WMAP en 2006: la resolución angular es de 0.2°. Las líneas blancas se agregaron para mostrar la dirección de polarización medida de la luz primigenia, que brinda mayores pistas del Universo temprano.



verso habría consistido exclusivamente en radiación (fotones) y un plasma de electrones cargados y otras partículas elementales. El Universo habría sido opaco: los fotones en un sentido "atrapados", recorrían distancias muy cortas antes de dispersarse de nuevo, principalmente por electrones. De hecho, los detalles de la radiación del fondo de microondas es fuerte evidencia de que la materia y la radiación alguna vez estuvieron en equilibrio a una temperatura muy alta. Conforme el Universo se expandió, la energía se dispersó sobre un volumen cada vez más grande y la temperatura disminuyó. Sólo cuando la temperatura había disminuido a alrededor de 3000 K, unos 380,000 años después, los núcleos y electrones se pudieron combinar para formar átomos. Con la desaparición de electrones libres, conforme se combinaban con núcleos para formar átomos, la radiación se liberaría: **se desacopló** de la materia, como se dice. El Universo se volvió *transparente* porque los fotones ahora eran libres para viajar en línea recta casi sin impedimento a través del Universo.

Es esta radiación, de 380,000 años después del nacimiento del Universo, la que ahora se ve como CMB. Conforme el Universo se expandió, las longitudes de onda de la radiación se alargaron y, por ende, el corrimiento hacia el rojo se dio hacia longitudes de onda más largas que corresponden a temperaturas más bajas (recuerde la ley de Wien, $\lambda_P T$ = constante, sección 37-1), hasta llegar a la radiación de fondo de 2.7 K que se observa en la actualidad.

Una mirada hacia atrás a la Gran Explosión: Tiempo retrospectivo

La figura 44-28 ilustra el punto de vista de un observador en la Tierra, que se asoma en todas direcciones en busca de la Gran Explosión y del breve periodo (380,000 años de duración) cuando la radiación estaba atrapada en el plasma primigenio (indicado en forma de banda). El tiempo que la luz tarda en llegar a la Tierra desde un evento se llama **tiempo retrospectivo**. El cuadro de "acercamiento" en la figura 44-28 muestra un fotón que se dispersa repetidamente dentro de este plasma primigenio y luego sale del plasma en línea recta. Sin importar en cuál dirección se observe, la visión del Universo inicial se bloquea por este muro de plasma. Es como intentar ver a través de una niebla muy espesa o en la superficie del Sol; sólo se puede ver su superficie, llamada **superficie de última dispersión**, pero no dentro de ella. Las longitudes de onda desde ahí tienen corrimiento al rojo $z \approx 1100$. El tiempo $\Delta t'$ en la figura 44-28 es el tiempo retrospectivo (no el tiempo real que transcurre hacia delante).

Recuerde que cuando se observa un objeto lejano, se le ve como era entonces, cuando la luz se emitió, no como aparecería hoy.

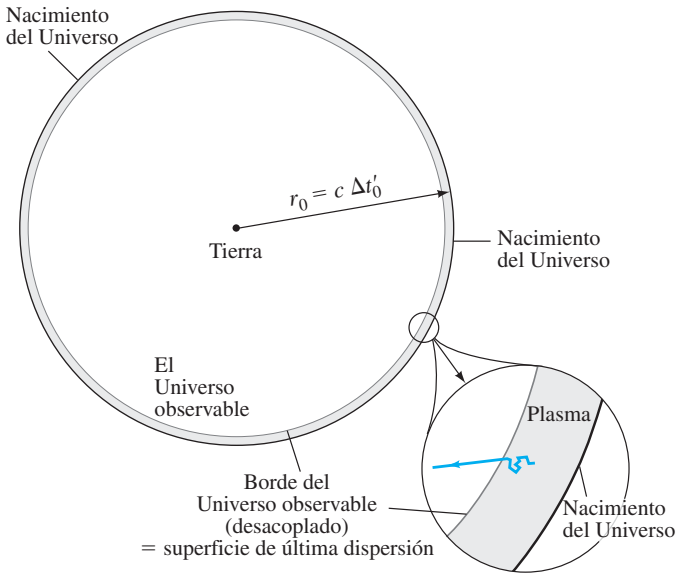


FIGURA 44–28 Cuando se observa desde la Tierra, se mira hacia atrás en el tiempo. Cualquier otro observador en el Universo vería más o menos lo mismo. Cuanto más alejado esté el objeto de un observador, más tiempo hace que la luz salió de él. No podemos ver tan lejos como la Gran Explosión; sólo se puede ver hasta la "superficie de la última dispersión", que irradió el CMB. La imagen en la esquina inferior derecha representa los 380,000 años iniciales del Universo, cuando era opaco: se muestra un fotón que se dispersó muchas veces y luego (al desacoplarse, 380,000 años después del nacimiento del Universo) quedó libre para viajar en línea recta. Si este fotón no se dirigiera hacia el observador cuando se "liberó", muchos otros lo harían. No se muestran las galaxias, sino que este diagrama se concentra cerca de la Tierra porque las galaxias fueron de creación relativamente reciente. *Nota:* Este diagrama no es un mapa normal. Los mapas muestran una sección del mundo como se podría ver *en un tiempo dado*. Este diagrama muestra espacio (como un mapa), pero cada punto *no* está en el mismo tiempo. La luz que proviene de un punto a una distancia r de la Tierra tarda un tiempo $\Delta t' = r/c$ en llegar a nuestro planeta, y por ende revela un evento que tuvo lugar hace mucho tiempo, un tiempo $\Delta t' = r/c$ en el pasado, al que llamamos su "tiempo retrospectivo". El Universo comenzó hace $\Delta t'_0 = 13.7$ Giga-años.

El Universo observable

La figura 44-28 entraña cierto riesgo: no es una imagen del Universo en un instante dado, sino que tiene la intención de sugerir cómo vemos en todas direcciones desde nuestro punto de observación (la Tierra, o cerca de ella). Tenga cuidado y no piense que el nacimiento del Universo tuvo lugar en un círculo o una esfera que rodea a la Tierra, como si la figura 44-28 fuera una fotografía tomada en un momento dado. Lo que la figura 44-28 muestra es lo que se puede ver, el *Universo observable*. Mejor aún, muestra *lo más* que se puede ver.

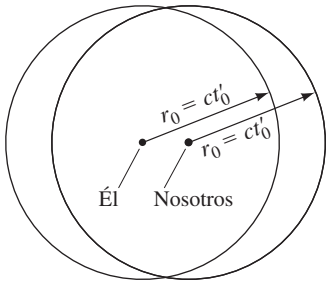


FIGURA 44–29 Dos observadores, en galaxias enormemente separadas, tienen diferentes horizontes y diferentes Universos observables.

Sin duda seríamos arrogantes al creer que es posible ver todo el Universo. De hecho, las teorías suponen que es imposible ver todo, que **todo el Universo** es más grande que el **Universo observable**, el cual es una esfera de radio $r_0 = ct_0$ con centro en el observador, donde t_0 es la edad del Universo. Nunca se puede ver más atrás del tiempo que tarda la luz en llegar a uno.

Considere, por ejemplo, que hay un observador en otra galaxia, muy lejana de usted, ubicada a la izquierda del punto de observación en la figura 44-28. Ese observador ni siquiera habría visto todavía la luz que llega desde el extremo derecho del círculo grande en la figura 44-28 que usted ve: tardaría algo de tiempo para que la luz llegara a él. Pero ese observador ya habrá visto, hace algún tiempo, la luz que viene desde la izquierda que usted ve ahora. De hecho, su Universo observable, superpuesto con el de usted, se sugiere mediante la figura 44-29.

El borde del Universo observable se llama **horizonte**. En principio, podríamos ver tan lejos como el horizonte, pero no más allá. Un observador en otra galaxia, lejos de usted, tendrá un horizonte diferente.

44–7 El modelo cosmológico estándar: Historia temprana del Universo

En los últimos 20 años se desarrolló una teoría convincente del origen y la evolución del Universo, que ahora se llama **modelo cosmológico estándar** o (en ocasiones) *modelo de concordancia*. Parte de esta teoría se basa en recientes avances teóricos y experimentales en física de partículas elementales, y parte en las observaciones del Universo, incluidas las de los satélites COBE y WMAP. De hecho, la cosmología y la física de partículas elementales se han nutrido de forma recíproca en sorprendente medida.

Remontémonos al principio de los tiempos, tan cerca como sea posible de la Gran Explosión, y sigamos un escenario de modelo estándar de acontecimientos conforme el Universo se expandió y enfrió después de la Gran Explosión. Al principio se habla de intervalos de tiempo extremadamente pequeños, así como de temperaturas extremadamente altas, más allá de cualquier objeto en el Universo actual. La figura 44-30 es una representación gráfica comprimida de los acontecimientos y será útil consultarla conforme avancemos.

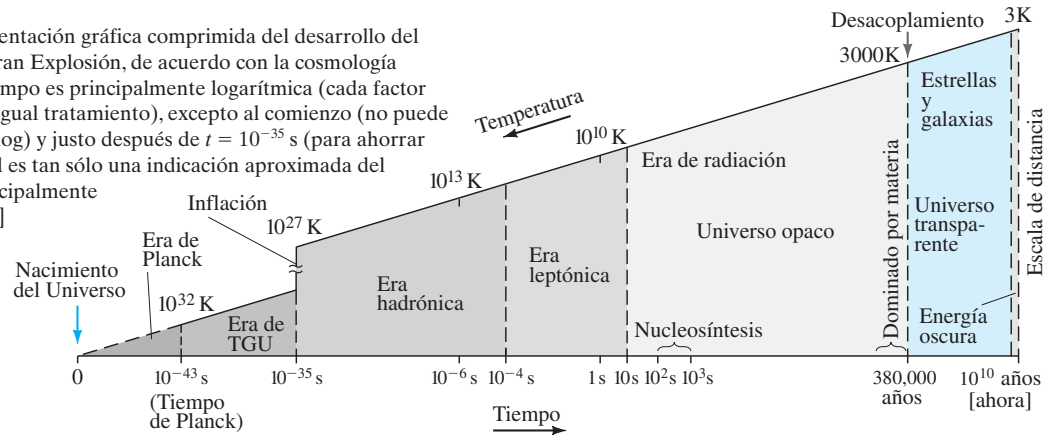


FIGURA 44–30 Representación gráfica comprimida del desarrollo del Universo después de la Gran Explosión, de acuerdo con la cosmología moderna. [La escala de tiempo es principalmente logarítmica (cada factor de 10 en el tiempo recibe igual tratamiento), excepto al comienzo (no puede haber $t = 0$ en una escala log) y justo después de $t = 10^{-35}$ s (para ahorrar espacio). La altura vertical es tan sólo una indicación aproximada del tamaño del Universo, principalmente para sugerir su expansión.]

La historia

Comenzaremos en un tiempo apenas una minúscula fracción de segundo después del nacimiento del Universo, 10^{-43} s. Este tiempo a veces se conoce como **tiempo de Planck**, que es un valor determinado por las constantes fundamentales. Se relaciona con la *longitud de Planck* λ_P que se obtuvo en el capítulo 1 (ejemplo 1-10) mediante análisis dimensional: $\lambda_P = \sqrt{Gh/c^3} \approx 4 \times 10^{-35}$ m. El tiempo de Planck es el tiempo que tarda la luz en recorrer la longitud de Planck: $t_p = \lambda_p/c \approx (4 \times 10^{-35}\ \text{m})/(3 \times 10^8\ \text{m/s}) \approx 10^{-43}$ s. Éste es un tiempo inimaginablemente corto, y las predicciones pueden ser tan sólo especulativas. Antes de ello, no es posible decir nada porque no se tiene una teoría de gravedad cuántica que se necesitaría para las increíblemente altas densidades y temperaturas durante esta "era de Planck". Se cree que quizá tan temprano como 10^{-43} s, las cuatro fuerzas de la naturaleza estaban unificadas: sólo existía una

fuerza (capítulo 43, figura 43-19). La temperatura habría sido aproximadamente de 10^{32} K, que corresponde a partículas en movimiento aleatorio con una energía cinética promedio K de 10^{19} GeV (véase la ecuación 18-4):

$$K \approx kT \approx \frac{(1.4 \times 10^{-23}\,\text{J/K})(10^{32}\,\text{K})}{1.6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}} \approx 10^{28}\,\text{eV} = 10^{19}\,\text{GeV}.$$

(Note que el factor $\frac{3}{2}$ en la ecuación 18-4 generalmente se ignora en cálculos de tal orden de magnitud.) Se cree que en $t = 10^{-43}$ s ocurrió una "transición de fase" durante la cual la fuerza gravitacional, en efecto, se "condensó" como una fuerza separada. Ésta y posteriores transiciones de fase son análogas a las transiciones de fase que experimenta el agua conforme se enfría desde un estado gaseoso, se condensa en un líquido y, con mayor enfriamiento, se congela para convertirse en hielo.[†] La *simetría* de las cuatro fuerzas se rompió, pero las fuerzas fuerte, débil y electromagnética todavía estaban unificadas, y el Universo entró en la **era de la gran unificación** (TGU, véase el capítulo 43). No había distinción entre quarks y leptones; los números bariónico y leptónico no se conservaban. Muy poco tiempo después, conforme el Universo se expandió considerablemente y la temperatura disminuyó a alrededor de 10^{27} K, hubo otra transición de fase y la fuerza fuerte se separó aproximadamente 10^{-35} s después de la Gran Explosión. Ahora el Universo estaba lleno con una "sopa" de leptones y quarks. Los quarks inicialmente estaban libres, pero pronto comenzaron a "condensarse" en partículas más normales: nucleones y los otros hadrones y sus antipartículas. Con este **confinamiento de quarks** el Universo entró a la **era hadrónica**.

Aproximadamente por ese tiempo, cuando el Universo sólo tenía 10^{-35} s de edad, habría ocurrido algo extraño, de acuerdo con los teóricos. Una brillante idea, propuesta alrededor de 1980, sugiere que el Universo experimentó una increíble expansión exponencial, y aumentó en tamaño por un factor de 10^{40} o tal vez mucho más, en una pequeña fracción de segundo, quizá 10^{-35} s. La utilidad de este **escenario inflacionario** es que resolvía grandes problemas con los modelos de la Gran Explosión anteriores, como la explicación de por qué el Universo es plano, así como el equilibrio térmico para obtener el CMB casi uniforme, como se discute más adelante.

Después del muy breve periodo inflacionario, el Universo se asentó en su expansión más regular. El Universo ahora era una "sopa" de leptones y hadrones. Se puede considerar esta "sopa" como un plasma de partículas y antipartículas, así como de fotones —todos en números aproximadamente iguales—, que chocaban frecuentemente unos con otros e intercambiaban energía.

Para cuando el Universo tenía sólo un microsegundo (10^{-6} s) de edad, se había enfriado aproximadamente a 10^{13} K, que corresponde a una energía cinética promedio de 1 GeV, y la gran mayoría de los hadrones desaparecieron. Para ver por qué, vamos a enfocarnos en los hadrones más conocidos: nucleones y sus antipartículas. Cuando la energía cinética promedio de las partículas era un poco mayor que 1 GeV, protones, neutrones y sus antipartículas se creaban de manera continua a partir de las energías de las colisiones que implicaban fotones y otras partículas, como

$$\begin{aligned}\text{fotones} &\rightarrow \text{p} + \bar{\text{p}} \\ &\rightarrow \text{n} + \bar{\text{n}}.\end{aligned}$$

Pero igualmente rápido, partículas y antipartículas se aniquilaban: por ejemplo

$$\text{p} + \bar{\text{p}} \rightarrow \text{fotones o leptones.}$$

De manera que los procesos de creación y aniquilación de nucleones estaban en equilibrio. El número de nucleones y antinucleones era alto, aproximadamente había tantos como electrones, positrones o fotones. Pero conforme el Universo se expandió y enfrió, y la energía cinética promedio de las partículas cayó por debajo de 1 GeV, que es la energía mínima necesaria en una colisión común para crear nucleones y antinucleones (aproximadamente 940 MeV cada uno), el proceso de creación de nucleones no podía continuar. Sin embargo, el proceso de aniquilación podía continuar, y los antinucleones aniquilaban nucleones, hasta que casi no quedaron nucleones. Pero no se redujeron a cero. De algún modo es necesario explicar el mundo de materia actual (nucleones y electrones) con muy poca antimateria a la vista.

[†]Es interesante hacer notar que la historia de los orígenes aquí tiene cierto parecido con las antiguas explicaciones que mencionan "vacío", "páramo sin forma" (o "la oscuridad sobre la profundidad"), "abismo", "dividir las aguas" (¿posiblemente una transición de fase?), por no mencionar la súbita aparición de la luz.

Para explicar el mundo de la materia, podemos suponer que anteriormente en el Universo, quizás alrededor de 10^{-35} s después de la Gran Explosión, se formó un ligero exceso de quarks con respecto a los antiquarks.[†] Esto habría dado por resultado un ligero exceso de nucleones sobre antinucleones. Y son estos nucleones "sobrantes" de los que están hechas las cosas actuales. El exceso de nucleones sobre los antinucleones probablemente fue de una parte en 10^9. Durante la era hadrónica, debieron existir tantos nucleones como fotones. Así, después de que terminó, los nucleones "sobrantes" existían aproximadamente en razón de un nucleón por 10^9 fotones, y esta proporción persiste hasta la época actual. En consecuencia, protones, neutrones y todas las otras partículas más pesadas se redujeron tremendamente en número unos 10^{-6} s después de la Gran Explosión. Los hadrones más ligeros, los piones, pronto desaparecieron, alrededor de 10^{-4} s después de la Gran Explosión; puesto que son los hadrones con masa más ligera (140 MeV), fueron los últimos hadrones en crearse conforme la temperatura (y la energía cinética promedio) disminuía. Las partículas más ligeras, incluyendo electrones y neutrinos, fueron la forma dominante de materia, y el Universo entró en la **era leptónica**.

Para cuando transcurrió el primer segundo completo (¡sin duda el segundo más colmado de acontecimientos en la historia!), el Universo se había enfriado alrededor de 10 mil millones de grados, 10^{10} K. La energía cinética promedio era de aproximadamente 1 MeV. Sin embargo, ésta fue energía suficiente para crear electrones y positrones, así como para equilibrar sus reacciones de aniquilación, pues sus masas corresponden a aproximadamente 0.5 MeV. De manera que había más o menos tantos e^+ y e^- como fotones. Pero dentro de algunos segundos más, la temperatura cayó lo suficiente como para que e^+ y e^- ya no se pudieran formar. Continuó la aniquilación ($e^+ + e^- \rightarrow$ fotones). Y, al igual que sucedió antes con los nucleones, los electrones y los positrones desaparecieron del Universo, excepto por un ligero exceso de electrones sobre positrones (que más tarde se unieron con núcleos para formar átomos). De esta forma, alrededor de $t = 10$ s después de la Gran Explosión, el Universo entró en la **era de la radiación** (figura 44-30). Sus principales constituyentes fueron fotones y neutrinos. Pero los neutrinos, que sólo participan en la fuerza débil, rara vez interactuaban. Así que el Universo, que hasta entonces experimentaba cantidades significativas de energía en materia y en radiación, ahora quedó **dominado por radiación**: en la radiación se contenía mucha más energía que en la materia, una situación que duraría más de 50,000 años.

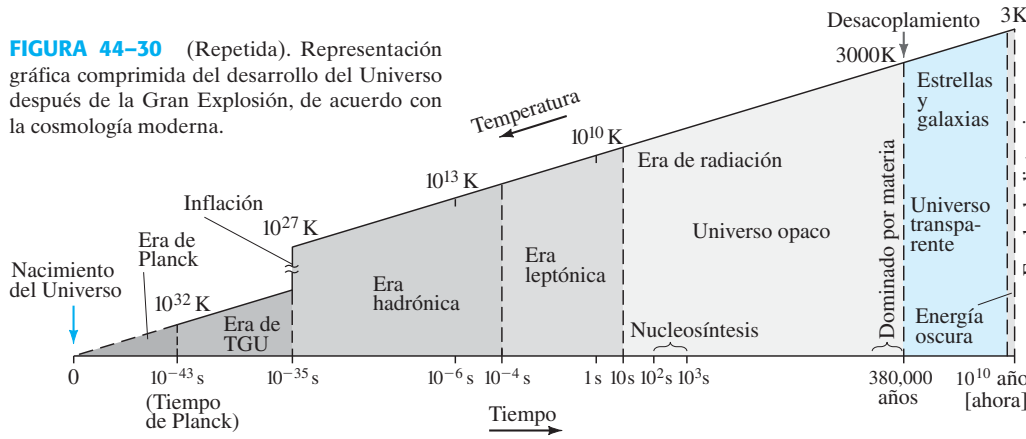


FIGURA 44–30 (Repetida). Representación gráfica comprimida del desarrollo del Universo después de la Gran Explosión, de acuerdo con la cosmología moderna.

Mientras tanto, durante los siguientes pocos minutos, tuvieron lugar acontecimientos cruciales. Al comenzar aproximadamente los minutos 2 o 3 después de la Gran Explosión, comenzó a ocurrir la fusión nuclear. La temperatura había disminuido a aproximadamente 10^9 K, lo que corresponde a una energía cinética promedio $\bar{K} \approx 100$ keV, donde los nucleones podían chocar entre sí y fusionarse (sección 42-4), pero ahora suficientemente fríos de manera que los núcleos recién formados no se romperían inmediatamente por colisiones posteriores. Se constituyeron deuterio, helio y cantidades muy pequeñas de núcleos de litio. Pero el Universo se enfriaba muy rápidamente, y no se formaron núcleos más grandes. Después de sólo algunos minutos, probablemente incluso ni siquiera un cuarto de hora después de la Gran Explosión, la temperatura cayó lo suficiente como para que se detuviera la nucleosíntesis, que se reanudaría millones de años después (en las estrellas). En consecuencia, después de más o menos el primer cuarto de hora del Universo, la materia consistía principalmente en

[†]Por qué pudo ocurrir esto es una pregunta para la cual en la actualidad se busca una respuesta.

núcleos solos de hidrógeno (alrededor del 75%) y helio (aproximadamente el 25%)[†] y electrones. Pero continuó dominando la radiación (los fotones).

La historia casi está completa. Se cree que el siguiente acontecimiento importante ocurrió 380,000 años después. El Universo se expandió a más o menos $\frac{1}{1000}$ de su escala actual, y la temperatura bajó a alrededor de 3000 K. La energía cinética promedio de núcleos, electrones y fotones era menor que un electrón-volt. Puesto que las energías de ionización de los átomos están en el orden de eV, entonces, conforme la temperatura cayó por debajo de este punto, los electrones podían orbitar los núcleos solos y permanecer ahí (sin ser expulsados por colisiones), lo que en consecuencia formó átomos. Este periodo se llama con frecuencia época de **recombinación** (un nombre inadecuado, pues nunca antes los electrones se habían combinado con núcleos para formar átomos). Con la desaparición de los electrones libres y el nacimiento de los átomos, los fotones, que continuamente se dispersaban a partir de los electrones libres, ahora tuvieron libertad para dispersarse a lo largo del Universo. Como se mencionó en la sección anterior, se dice que los fotones quedaron **desacoplados** de la materia. Por ende, en la *recombinación* ocurrió *desacoplamiento*. La energía total contenida en la radiación había disminuido (lo que alargó la longitud de onda conforme el Universo se expandía), y aproximadamente en $t = 56{,}000$ años (incluso antes del desacoplamiento) la energía total contenida en la materia se volvió dominante sobre la radiación. Se dice que el Universo quedó **dominado por la materia** (como se observa en la figura 44-30). Conforme el Universo continuó expandiéndose, la radiación electromagnética se enfrió aún más, hasta llegar a 2.7 K en la actualidad, lo que formó la radiación cósmica de fondo que se detecta desde todas partes en el Universo.

Después del nacimiento de los átomos, estrellas y galaxias pudieron comenzar a formarse: mediante autogravitación en torno a concentraciones de masa (variaciones de homogeneidad). Las estrellas comenzaron a formarse aproximadamente 200 millones de años después de la Gran Explosión, las galaxias después de casi 10^9 años. El Universo continuó evolucionando hasta la actualidad, unos 14 mil millones de años después de que comenzó.

* * *

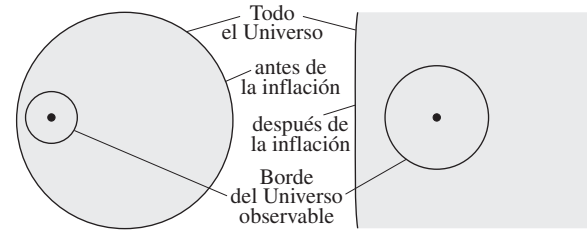
No es posible decir que este escenario, al igual que sucede con otros modelos científicos, esté "probado". Sin embargo, este modelo es notablemente efectivo para explicar la evolución del Universo donde vivimos y hace predicciones que se pueden poner a prueba contra la siguiente generación de observaciones.

Un gran acontecimiento, y algo que sólo se descubrió muy recientemente, es que, cuando el Universo tenía más de la mitad de su edad actual (aproximadamente hace 5 Giga-años), su expansión comenzó a acelerarse. Ésta fue una gran sorpresa, porque se suponía que la expansión del Universo se frenaría en virtud de la atracción gravitacional de todos los objetos entre sí. Otro gran descubrimiento reciente es que la materia ordinaria constituye muy poco de la masa-energía total del Universo ($\approx 5\%$). En vez de ello, como se discute en la sección 44-9, los principales contribuyentes a la densidad de energía del Universo son la *materia oscura* y la *energía oscura*. A la derecha de la figura 44-30 hay una angosta tira vertical que representa los últimos 5 mil millones de años del Universo, durante los cuales parece dominar la *materia oscura*.

44–8 Inflación: Explicación de la naturaleza plana, la uniformidad y la estructura

La idea de que el Universo experimentó un periodo de inflación exponencial temprano en su vida y de que se expandió por un factor de 10^{40} o más (sección anterior), la planteó por primera ocasión Alan Guth en 1981. Desde entonces se han propuesto modelos mucho más complejos. La energía requerida para esta expansión desbocada pudo liberarse cuando la fuerza electrodébil se separó de la fuerza fuerte (fin de la era TGU), figura 43-19). Hasta el momento, la evidencia para la inflación es indirecta; aunque es una característica de la mayoría de los modelos cosmológicos viables, porque es capaz de ofrecer explicaciones naturales para muchas características notables del Universo.

[†]Esta predicción del modelo estándar de un 25% de producción primordial de helio concuerda con lo que se observa en la actualidad, el Universo *sí* contiene alrededor de un 25% de He, y es una evidencia fuerte en apoyo del modelo estándar de la Gran Explosión. Más aún, la teoría dice que la abundancia de un 25% de He es completamente congruente con la existencia de tres tipos de neutrino, que es el número que se observa. Y establece un límite superior de cuatro para el número máximo de posibles tipos de neutrinos. Éste es un ejemplo sorprendente de la excitante interfaz entre la física de partículas y la cosmología.



a) Antes de la inflación *b*) Después de la inflación

FIGURA 44–31 *a*) Modelo bidimensional simple de todo el Universo; el Universo observable se sugiere mediante el pequeño círculo con centro en la Tierra (representada como un punto). *b*) El borde del Universo en esencia es plano después de una expansión de 10^{40} veces durante la inflación.

Naturaleza plana

Antes que todo, las mejores mediciones sugieren que el Universo es plano; esto es, tiene curvatura cero. Como científicos, sería deseable tener alguna razón para este notable resultado. Para ver cómo la inflación explica la naturaleza plana, considere un modelo bidimensional simple del Universo (como se hizo anteriormente en las figuras 44-16 y 44-21). Un círculo sobre la superficie de este Universo bidimensional (una esfera, figura 44-31) representa el Universo *observable* como lo ve un observador en el centro del círculo. Una posible hipótesis es que la inflación ocurrió durante un intervalo de tiempo que muy aproximadamente duplicó la edad del Universo, digamos, de $t = 1 \times 10^{-35}$ s hasta $t = 2 \times 10^{-35}$ s. El tamaño del Universo observable ($r = ct$) habría aumentado por un factor de dos durante la inflación, mientras que el radio de curvatura de todo el Universo aumentó por un enorme factor de 10^{40} o más. En consecuencia, el borde de la esfera bidimensional que representa a todo el Universo parecería plano con un alto grado de precisión, figura 44-31b. Incluso si el tiempo de inflación fuera un factor de 10 o 100 (en lugar de 2), el factor de expansión de 10^{40} o más habría borrado cualquier posibilidad de observar algo más que un Universo plano.

Uniformidad del CMB

La inflación también explica por qué el CMB es tan uniforme. Sin inflación, el pequeño Universo en $t = 10^{-35}$ s era muy grande como para que todas sus partes estuvieran en contacto hasta alcanzar la misma temperatura (la información no puede viajar más rápido que c). Imagine un Universo de aproximadamente 1 cm de diámetro en $t = 10^{-36}$ s, como plantea la teoría original de la Gran Explosión. En este tiempo de 10^{-36} s, la luz podría recorrer $d = ct = (3 \times 10^8 \text{ m/s})(10^{-36} \text{ s}) = 10^{-27}$ m, una distancia muy pequeña para que lados opuestos de un Universo de 1 cm de ancho estuvieran en comunicación. Pero si el Universo hubiera sido 10^{40} veces más pequeño ($= 10^{-42}$ m), como propone el modelo de inflación, podría haber estado en contacto y equilibrio térmico para producir el CMB que se observa casi uniforme.La inflación, al hacer al Universo temprano muy pequeño, aseguró que todas las partes pudieran haber estado en equilibrio térmico; y después de la inflación el Universo podría ser suficientemente grande para dar por resultado el Universo observable de hoy.

Semillas de galaxias, fluctuaciones, monopolos magnéticos

La inflación también brinda una pista de cómo surgió la estructura actual del Universo (galaxias y cúmulos de galaxias). Anteriormente se vio que, de acuerdo con el principio de incertidumbre, la energía puede no conservarse por una cantidad ΔE durante un tiempo $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$. Las fuerzas, ya sea electromagnéticas o de otro tipo, pueden experimentar tales pequeñas **fluctuaciones cuánticas** de acuerdo con la teoría cuántica, pero son tan pequeñas que no son detectables a menos que se amplifiquen de alguna manera. Esto es lo que pudo haber hecho la inflación: amplificar esas fluctuaciones quizá 10^{40} veces en tamaño, lo que produciría las irregularidades de densidad que se ven en la radiación cósmica de fondo (WMAP, figura 44-27). Esto sería muy bueno, pues las variaciones de densidad que se ven en el CMB son lo que se cree fueron las semillas que más tarde se unieron bajo la acción de la gravedad en galaxias y cúmulos de galaxias, incluidas sus subestructuras (estrellas y planetas) y los modelos coinciden con los datos extremadamente bien.

En ocasiones se dice que las fluctuaciones cuánticas ocurrieron en el **estado vacío** o energía de vacío. Esto sería posible porque el vacío ya no se considera como tal, como se estudió en la sección 43-3 en relación con los positrones y un mar de electrones de energía negativa. De hecho, se cree que el vacío está lleno con campos y partículas que ocupan todos los estados de energía negativa posibles. Además, las partículas de intercambio virtuales que conducen las fuerzas, como se estudió en el capítulo 43, pudieron abandonar sus breves estados virtuales para volverse reales como resultado de la amplificación de 10^{40} veces del espacio (de acuerdo con la inflación) y el breve tiempo durante el cual ocurrió ($\Delta t = \hbar/\Delta E$).

La inflación ayuda también con el enigma de por qué nunca se han observado los **monopolos magnéticos**, aunque al principio bien pudieron producirse polos magnéticos aislados de manera cuantiosa. Después de la inflación, se habrían alejado tanto que nunca nos hemos encontrado con uno.

Algunos teóricos propusieron que la inflación pudo no haber ocurrido en todo el Universo. Tal vez sólo algunas regiones de ese pequeño Universo primigenio se volvieron inestables (quizá fue una fluctuación cuántica) y se inflaron en "burbujas" cósmicas. Si así fue, estaríamos viviendo en una de las burbujas. El Universo afuera de la burbuja sería irremediablemente **inobservable** para la humanidad.

La inflación puede resolver problemas sorprendentes, pero necesita confirmarse y es posible que se necesite nueva física sólo para entender cómo ocurrió la inflación.

44–9 Materia oscura y energía oscura

De acuerdo con el modelo estándar de la Gran Explosión, el Universo evoluciona y cambia. Se crean estrellas individuales, que evolucionan y luego mueren para convertirse en enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. Al mismo tiempo, el Universo como un todo se expande. Una pregunta importante es si el Universo continuará expandiéndose por siempre. Hasta finales de la década de 1990, el Universo se consideraba dominado por materia que interactúa mediante gravedad, y esta cuestión se vinculó con la curvatura del espacio-tiempo (sección 44-4). Si el Universo tuviera curvatura *negativa*, su expansión nunca se detendría, si bien la tasa de expansión disminuiría debido a la atracción gravitacional de sus partes. Tal Universo sería *abierto* e infinito. Si el Universo es *plano* (sin curvatura), también sería abierto e infinito, pero su expansión lentamente tendería a una tasa cero. Finalmente, si el Universo tuviera curvatura *positiva*, sería *cerrado* y finito; el efecto de la gravedad sería suficientemente fuerte como para que, con el tiempo, la expansión se detuviera y el Universo comenzara a contraerse para colapsar de nuevo en sí mismo en una **gran implosión** (también conocida como el *big crunch*).

EJERCICIO E Regrese a la pregunta de apertura del capítulo, página 1193, y respóndala de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Densidad crítica

De acuerdo con el escenario anterior (que no incluye inflación o la recientemente descubierta aceleración del Universo), el destino del Universo dependería de la densidad masa-energía promedio en el Universo. Para una densidad de masa promedio mayor que un valor crítico conocido como **densidad crítica**, que se estima en alrededor de

$$\rho_c \approx 10^{-26}\,\text{kg/m}^3$$

(esto es, algunos nucleones/m^3 en promedio a lo largo del Universo), la gravedad evitaría que la expansión continuara por siempre. Con el tiempo (si $\rho > \rho_c$) la gravedad conduciría al Universo de regreso en una gran implosión y el espacio-tiempo tendría una curvatura positiva. Si, en vez de ello, la densidad real fuera igual a la densidad crítica, $\rho = \rho_c$, el Universo sería plano y abierto. Si la densidad real fuera menor que la densidad crítica, $\rho < \rho_c$, el Universo tendría curvatura negativa. Véase la figura 44-32. En la actualidad se cree que el Universo está muy cerca de ser plano. Pero evidencia reciente sugiere que el Universo se expande a una tasa *acelerada*, como se discute a continuación.

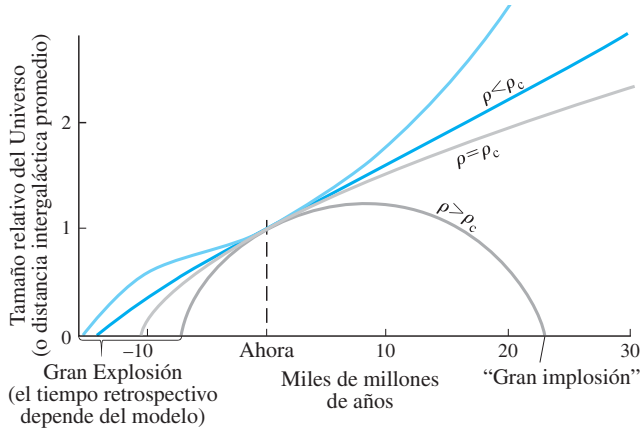


FIGURA 44–32 Tres futuras posibilidades para el Universo, dependiendo de la densidad ρ de la materia ordinaria, más una cuarta posibilidad que incluye energía oscura. Advierta que todas las curvas se eligieron para tener la misma pendiente ($= H$, el parámetro de Hubble) justo ahora. Al mirar hacia atrás en el tiempo, la Gran Explosión ocurre donde cada curva toca el eje horizontal (tiempo).

EJEMPLO 44–7 ESTIMACIÓN **Densidad crítica del Universo.** Con base en la conservación de energía y la velocidad de escape (sección 8-7), estime la densidad crítica del Universo.

PLANTEAMIENTO A la densidad crítica, ρ_c, cualquier galaxia dada de masa m apenas podrá "escapar" de nuestra galaxia. Como se vio en la sección 8-7, el escape apenas podría ocurrir si la energía total E de la galaxia satisface

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0.$$

Aquí, R es la distancia de esa galaxia m desde la Tierra. La masa total M que tira de m hacia dentro se aproxima como la masa total dentro de una esfera de radio R alrededor de nosotros (Apéndice D). Si suponemos que la densidad de las galaxias es aproximadamente constante, entonces $M = \frac{4}{3}\pi\rho_c R^3$.

SOLUCIÓN Al sustituir esta M en la ecuación anterior, y establecer que $v = HR$ (ley de Hubble, ecuación 44-4), se obtiene

$$\frac{GM}{R} = \tfrac{1}{2}v^2$$

o

$$\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi\rho_c R^3\right)}{R} = \tfrac{1}{2}(HR)^2.$$

Despejamos ρ_c:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx \frac{3\left[(22\text{ km/s/Millones de años luz})(1\text{ Millón de año luz}/10^{19}\text{ km})\right]^2}{8(3.14)(6.67\times10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)}$$
$$\approx 10^{-26}\text{ kg/m}^3.$$

Materia oscura

Los análisis del WMAP y otros experimentos convencieron a los científicos de que el Universo es plano y de que $\rho = \rho_c$. Pero esta ρ no puede ser sólo materia bariónica normal (los átomos son 99.9% bariones —protones y neutrones— por peso). Estos experimentos recientes ubican la cantidad de materia bariónica normal en el Universo en sólo aproximadamente el 5% de la densidad crítica. ¿A qué corresponde el otro 95%? Hay fuerte evidencia para una cantidad significativa de materia no luminosa en el Universo, conocida como **materia oscura**, la cual normalmente actúa bajo la acción de la gravedad, pero que no absorbe ni irradia luz. Por ejemplo, las observaciones de la rotación de las galaxias sugieren que éstas giran como si tuvieran considerablemente más masa de la que se puede ver. Recuerde del capítulo 6 (ecuación 6-5) que para un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra (masa M)

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

Y, por lo tanto, $v = \sqrt{GM/r}$. Si aplicamos esta ecuación a las estrellas en una galaxia, vemos que su rapidez depende de la masa galáctica. Las observaciones indican que las estrellas más alejadas del centro galáctico giran mucho más rápido que lo esperado si sólo se presenta el tirón de la materia visible, lo que sugiere una gran cantidad de materia invisible. De igual modo, observaciones del movimiento de las galaxias dentro de los cúmulos también sugieren que tienen considerablemente más masa que la que se puede ver. Sin materia oscura, las galaxias y estrellas probablemente no se habrían formado y no existirían; parecería que mantiene unido al Universo. Pero, ¿qué puede ser esta materia no luminosa en el Universo? No se sabe todavía, aunque se espera descubrirlo pronto. No puede estar hecha de materia ordinaria (bariónica), así que debe consistir en algún otro tipo de partícula elemental, tal vez creada en un tiempo muy temprano. Tal vez es una partícula supersimétrica (sección 43-12), acaso la más ligera de todas. Los científicos están ansiosos esperando detalles tanto de los aceleradores de partículas como del cosmos.

La materia oscura constituye aproximadamente el 20% de la masa-energía del Universo, de acuerdo con las observaciones y los modelos más recientes. Por lo tanto, la masa-energía total es 20% materia oscura más 5% bariones para un total de aproximadamente el 25%, que no lleva ρ a ρ_c. ¿En qué consiste el otro 75%? Tampoco se tiene seguridad acerca de ello, pero se le dio un nombre: "energía oscura".

Energía oscura: Aceleración cósmica

En 1998, poco antes de iniciar un nuevo milenio, los cosmólogos recibieron una enorme sorpresa. Se suponía que la gravedad era la fuerza predominante a gran escala en el Universo, y se creía que la expansión del Universo debía frenarse en el tiempo porque la gravedad actúa como una fuerza de atracción entre objetos. Pero las mediciones de supernovas tipo IA (SNIa, las cuales son el mejor patrón para las fuentes luminosas o velas patrón; véase la sección 44-3) inesperadamente mostraron que las SNIa muy distantes (con z elevado) eran más tenues de lo esperado. Esto es, dada su gran distancia d, determinada a partir de su poco brillo, su rapidez v, determinada a partir de las mediciones de z, era menor de lo esperado de acuerdo con la ley de Hubble. Este resultado sugiere que las galaxias más cercanas se mueven alejándose de nosotros relativamente más rápido que las más distantes, lo que significa que la expansión del Universo en épocas más recientes se ha acelerado. Esta **aceleración** en la expansión del Universo (en lugar de la esperada desaceleración debida a atracción gravitacional entre masas) parece haber comenzado hace aproximadamente 5 mil millones de años (5 Giga-años, lo que representaría de 8 a 9 Giga-años después de la Gran Explosión).

¿Qué podría causar que el Universo se acelere en su expansión, en contra de la fuerza de atracción de la gravedad? ¿Acaso nuestra comprensión de la gravedad necesita revisarse? No se conocen las respuestas a estas preguntas. Muchos científicos afirman que la energía oscura es el misterio más grande que enfrenta la ciencia física de hoy. Existen muchas especulaciones. Pero de algún modo parece tener un efecto *de repulsión* de gran alcance sobre el espacio, como una gravedad negativa, que hace que los objetos aceleren para alejarse unos de otros cada vez más rápido. Sea lo que fuere, se le dio el nombre de **energía oscura**.

Una idea al respecto es una especie de campo cuántico al que se le dio el nombre de **quintaesencia**. Otra posibilidad sugiere una energía latente en el espacio en sí (**energía de vacío**) y se relaciona con un aspecto de la relatividad general conocido como **constante cosmológica** (símbolo Λ). Cuando Einstein desarrolló sus ecuaciones, descubrió que no ofrecían soluciones para un Universo estático. En aquellos días (1917) se creía que el Universo era estático: invariable y eterno. Einstein agregó una constante arbitraria a sus ecuaciones con la finalidad de dar soluciones para un Universo estático. Una década después, cuando Hubble mostró un Universo en expansión, Einstein descartó su constante cosmológica por considerarla innecesaria ($\Lambda = 0$). Pero en la actualidad, las mediciones son congruentes con una energía oscura que se debe a una constante cosmológica distinta de cero, aunque se necesitan más mediciones para percibir diferencias sutiles entre las teorías.

Existe creciente evidencia de que los efectos de alguna forma de energía oscura son muy reales. Las observaciones de CMB, supernovas y estructura a gran escala (sección 44-10) concuerdan bien con las teorías y los modelos computacionales cuando se considera que la energía oscura es proveedora del 75% de la masa-energía en el Universo, y cuando la densidad de masa-energía total es igual a la densidad crítica ρ_c.

La mejor estimación actual de cómo se distribuye la masa-energía en el Universo es aproximadamente (figura 44-33):

75% energía oscura

25% materia, sujeta a la fuerza gravitacional conocida.

De este 25%, aproximadamente

20% es materia oscura

5% lo constituyen bariones (de lo que están hechos los átomos); de este 5% sólo $\frac{1}{10}$ es materia fácilmente visible: estrellas y galaxias (esto es, el 0.5% del total); los otros $\frac{9}{10}$ de la materia ordinaria, que no es visible, es principalmente plasma gaseoso.

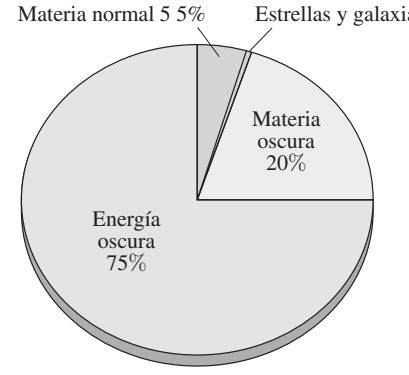


FIGURA 44–33 Porciones de masa-energía total en el Universo.

Es notable que sólo el 0.5% de toda la masa-energía del Universo sea visible como estrellas y galaxias.

La idea de que el Universo está dominado por formas completamente desconocidas de energía parece extraña. No obstante, la habilidad del modelo actual para explicar con precisión observaciones de la anisotropía del CMB, la expansión cósmica y la estructura a gran escala (próxima sección) presenta un caso convincente.

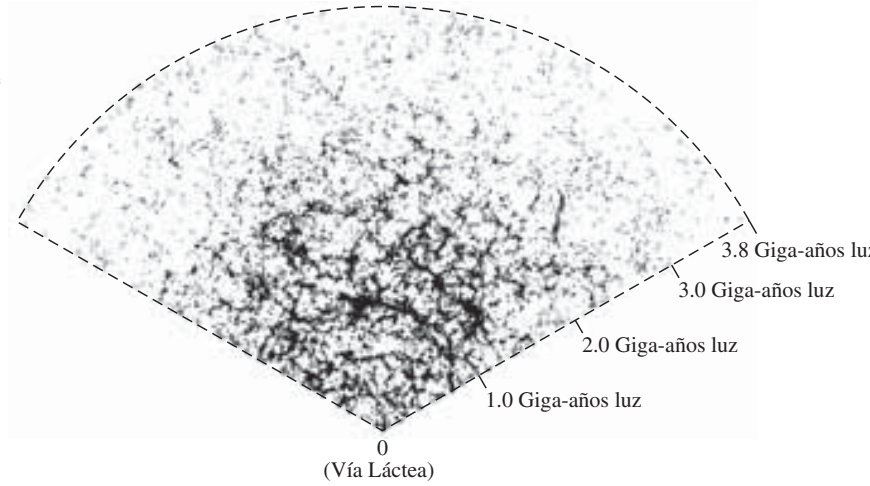


FIGURA 44–34 Distribución de unas 55,000 galaxias en un arco de 2.5° a través de casi la mitad del cielo sobre el ecuador, según mediciones del Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Cada punto representa una galaxia. La distancia desde la Tierra se obtiene a partir del corrimiento al rojo y la ley de Hubble, y está dada en unidades de 10^9 años luz (Giga-años luz). A distancias más grandes, menos galaxias son suficientemente brillantes para detectarse, por lo que pareciera que hay una disminución de galaxias. El punto 0 representa la Tierra, el punto de observación. Note las "paredes" y "vacíos" de galaxias.

44–10 Estructura a gran escala del Universo

Las hermosas imágenes del cielo de la sonda WMAP (figura 44-27 y fotografía de apertura del capítulo) revelan pequeñas pero significativas variaciones de homogeneidad en la temperatura del CMB. Estas anisotropías reflejan compresiones y expansiones en el plasma primordial justo después del desacoplamiento, a partir del cual se formaron estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. El análisis de las irregularidades en el CMB empleando simulaciones de computadoras gigantescas predice una distribución de galaxias a gran escala, muy similar a lo que se ve en la actualidad (figura 44-34). Estas simulaciones tienen gran éxito si contienen energía oscura y materia oscura; y la materia oscura necesita estar *fría* (lo que significa baja rapidez; piense en la ecuación 18-4, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$ donde T es temperatura) y no "caliente" como los neutrinos que se mueven con la rapidez de la luz o cercana a ésta. De hecho, el **modelo cosmológico** moderno se llama modelo **ΛCDM**, donde lambda (Λ) representa la constante cosmológica y CDM es **materia oscura fría** (por las siglas de *cold dark matter*).

Los cosmólogos obtuvieron sustancial confianza en este modelo cosmológico a partir de un ajuste preciso entre observaciones y teoría. También pueden extraer valores muy exactos para parámetros cosmológicos que anteriormente sólo se conocían con escasa exactitud. El CMB es un observable cosmológico tan importante que se dedica un gran esfuerzo por extraer toda la información que contiene. Una nueva generación de experimentos en tierra, globos y satélites observarán el CMB con mayor resolución y sensibilidad. Tales experimentos permiten detectar la interacción de las **ondas de gravedad** (producto del periodo inflacionario) con el CMB y, de esta forma, obtener evidencia directa de la inflación cósmica, así como información acerca de la física de partículas elementales a energías mucho más allá del ámbito de los aceleradores fabricados por el hombre.

44–11 Finalmente . . .

Cuando observamos el cielo nocturno, vemos estrellas; y con los mejores telescopios, es posible ver galaxias y los exóticos objetos que se estudiaron anteriormente, incluidas las extrañas supernovas. Pero incluso con los mejores instrumentos no podemos ver los procesos que ocurren en el interior de las estrellas y supernovas sobre los que se han formulado hipótesis (y en los que se cree). El conocimiento humano depende de científicos brillantes que encuentran teorías viables y modelos verificables. Depende de complicados modelos de computadora cuyos parámetros varían hasta que los resultados se comparan favorablemente con las observaciones y los análisis de la sonda WMAP y otros experimentos. Y ahora se tiene una idea sorprendentemente precisa acerca de algunos aspectos del Universo: es plano, tiene aproximadamente 14 mil millones de años de edad, contiene sólo un 5% de materia bariónica "normal" (para átomos), etcétera.

Las preguntas planteadas por la cosmología son difíciles y profundas, y pueden parecer alejadas de la "realidad" cotidiana. Siempre se puede decir: "el Sol brilla, va a seguir alumbrándonos durante un tiempo inimaginablemente largo y todo está bien". No obstante, las preguntas de la cosmología son profundas y fascinan al intelecto humano.

Un aspecto especialmente intrigante es el siguiente: se han realizado cálculos acerca de la formación y evolución del Universo que de forma deliberada variaron los valores (sólo ligeramente) de ciertas constantes físicas fundamentales. ¿El resultado? Un Universo en el cual la vida, como se conoce, no podría existir. [Por ejemplo, si la diferencia en masa entre protón y neutrón fuera cero, o pequeña (menor que la masa del electrón, 0.511 MeV/c^2), no habría átomos: los protones capturarían electrones para nunca más liberarlos.] Tales resultados contribuyen a una idea filosófica llamada **principio antrópico**, que afirma que si el Universo fuera apenas un poco diferente de lo que es, la humanidad no podría estar aquí. Los físicos intentan descubrir si existen algunas leyes fundamentes no descubiertas que determinaron tales condiciones que permitieron la existencia del *Homo sapiens*. Un poeta diría que el Universo está exquisitamente sintonizado, casi como si se acomodara a la humanidad.

Resumen

El cielo nocturno contiene miríadas de estrellas, incluidas las de la Vía Láctea, que es una "vista lateral" de nuestra **galaxia** vista a lo largo del plano del disco. Nuestra galaxia incluye más de 10^{11} estrellas. Más allá de la Vía Láctea hay miles de millones de otras galaxias.

Las distancias astronómicas se miden en **años luz** (1 año luz $\approx 10^{13}$ km). La estrella más cercana está aproximadamente a 4 años luz de distancia y la galaxia grande más cercana está a 2 millones de años luz de distancia. El disco de nuestra galaxia tiene un diámetro de aproximadamente 100,000 años luz. Con frecuencia, las distancias se especifican en **parsecs**, donde 1 parsec = 3.26 años luz.

Se cree que las estrellas iniciaron su vida como masas de gas (protoestrellas) que colapsaron, formadas principalmente por hidrógeno. Conforme se contraen, se calientan (la energía potencial se transforma en energía cinética). Cuando la temperatura alcanza aproximadamente 10 millones de grados, se inicia un proceso de fusión nuclear y se forman elementos más pesados (**nucleosíntesis**), sobre todo helio en una primera instancia. La energía liberada durante estas reacciones calienta el gas de manera que su presión hacia fuera se equilibra con la fuerza gravitacional hacia dentro, y la estrella joven se estabiliza como una estrella de **secuencia principal**. La gran luminosidad de las estrellas proviene de la energía liberada durante estas reacciones termonucleares. Después de miles de millones de años, conforme el helio se concentra en el núcleo y el hidrógeno se agota, el núcleo se contrae y se calienta aún más. La envoltura se expande y se enfría, y la estrella se convierte en una **gigante roja** (de mayor diámetro y de color rojizo).

La siguiente etapa de evolución estelar depende de la masa de la estrella, la cual pierde buena parte de su masa original conforme su envoltura exterior escapa al espacio. Las estrellas de masa residual menor que aproximadamente 1.4 masas solares se enfrían aún más y se convierten en **enanas blancas**, que con el tiempo languidecen y se extinguen por completo. Las estrellas más pesadas se contraen aún más debido a su mayor gravedad: la densidad se aproxima a la densidad nuclear, la enorme presión fuerza a los electrones a combinarse con protones para formar neutrones, y la estrella se convierte en esencia en un enorme núcleo de neutrones. Ésta es una **estrella de neutrones** y se cree que la energía liberada por el colapso final de su núcleo produce explosiones **supernova**. Si la estrella es muy masiva, puede contraerse aún más y formar un **agujero negro**, que es tan denso que ninguna materia, ni siquiera la luz, puede escapar de ella.

En la **teoría general de la relatividad**, el **principio de equivalencia** afirma que un observador no puede distinguir la aceleración de un campo gravitacional. Dicho de otra forma, las masas gravitacional e inercial son iguales. La teoría predice que la gravedad desvía los rayos de luz hasta un grado que concuerda con los experimentos. La gravedad se trata como una curvatura en espacio y tiempo, donde la curvatura es mayor cerca de objetos masivos. El Universo como un todo puede ser curvo. Con suficiente masa, la curvatura del Universo sería positiva, y el Universo sería *cerrado* y *finito*; de otro modo, sería *abierto* e *infinito*. En la actualidad se cree que el Universo es **plano**.

Las galaxias distantes manifiestan un **corrimiento hacia el rojo** en sus líneas espectrales, que originalmente se interpretó como corrimiento Doppler. El Universo parece **expandirse**, pues sus galaxias se alejan rápidamente unas de otras con rapidez (v) proporcional a la distancia (d) entre ellas:

$$v = Hd, \qquad \textbf{(44–4)}$$

que se conoce como **ley de Hubble** (H es el **parámetro de Hubble**). Esta expansión del Universo sugiere un origen explosivo, la Gran Explosión (o Big Bang), que ocurrió hace aproximadamente 13,700 millones de años. No es como una explosión ordinaria, sino más bien una expansión del espacio en sí.

El **principio cosmológico** supone que el Universo, a gran escala, es homogéneo e isotrópico.

Importante evidencia para el modelo de la Gran Explosión del Universo fue el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo, a veces llamada radiación del **fondo cósmico de microondas** (o radiación CMB), que conforma una curva de radiación de cuerpo negro a una temperatura de 2.725 K.

El **modelo estándar** de la Gran Explosión describe un posible escenario de cómo se desarrolló el Universo conforme se expandía y enfriaba después de aquel instante. A partir de los 10^{-43} segundos después de la Gran Explosión, de acuerdo con este modelo, hubo una serie de **transiciones de fase** durante las cuales las fuerzas de la naturaleza previamente unificadas se separaron una a una. El **escenario inflacionario** supone que durante una de estas transiciones de fase, el Universo experimentó una breve pero rápida expansión exponencial. Hasta alrededor de 10^{-35} s, no hubo distinción entre quarks y leptones. Poco después, los quarks se **confinaron** en hadrones (la **era hadrónica**). Aproximadamente 10^{-4} s después de la Gran Explosión, la mayoría de los hadrones desaparecieron, al combinarse con anti-hadrones, lo que produjo fotones, leptones y energía; esto dejó principalmente fotones y leptones con libertad para moverse, lo que dio inicio a la **era leptónica**. Para cuando el Universo tenía alrededor de 10 s de edad, la mayoría de los electrones también desaparecieron, al combinarse con sus antipartículas; el Universo estuvo **dominado por la radiación**. Un par de minutos después comenzó la nucleosíntesis, pero sólo duró algunos minutos. Luego transcurrieron casi 400,000 años antes de que el Universo se enfriara lo suficiente para que los electrones se combinaran con núcleos para formar átomos (**recombinación**). Los fotones, hasta entonces dispersados de manera continua a partir de los electrones libres, ahora podían moverse libremente: se **desacoplaron** de la materia y el Universo se volvió transparente. La radiación de fondo se expandió y se enfrió tanto que su energía total se volvió menor que la energía en la materia, y el **dominio de la materia** aumentó sobre la radiación. Luego se formaron estrellas y galaxias, lo que produjo un Universo no muy diferente al actual, unos 14 mil millones de años después.

Observaciones recientes indican que el Universo es plano, que contiene un tipo todavía desconocido de **materia oscura** y que está dominado por una misteriosa **energía oscura** que ejerce una especie de gravedad negativa que hace que la expansión del Universo se acelere. Las aportaciones totales de materia bariónica (normal), materia oscura y energía oscura se suman a la **densidad crítica**.

Preguntas

1. En alguna ocasión se consideró que la Vía Láctea era "turbia" o "lechosa", pero ahora se considera constituida de fuentes puntuales. Explique.
2. Una estrella está en equilibrio cuando irradia en su superficie toda la energía generada en su núcleo. ¿Qué ocurre cuando comienza a generar más energía de la que irradia? ¿Menos energía? Explique.
3. Describa una estrella gigante roja. Mencione algunas de sus propiedades.
4. Seleccione un punto en el diagrama H-R. Marque varias direcciones que se alejen desde este punto. Ahora describa los cambios que tendrían lugar en una estrella que se mueve en cada una de estas direcciones.
5. ¿El diagrama H-R revela algo acerca del núcleo de una estrella?
6. ¿Por qué algunas estrellas terminan como enanas blancas y otras como estrellas de neutrones o agujeros negros?
7. ¿Puede decir, al mirar la población en el diagrama H-R, que las estrellas más calientes de secuencia principal tienen vidas más cortas? Explique.
8. Si usted fuera a medir paralajes de estrella desde la Luna y no desde la Tierra, ¿qué correcciones tendría que hacer? ¿Qué cambios ocurrirían si se midieran paralajes desde Marte?
9. Las estrellas *variables Cefeidas* cambian en luminosidad en un periodo de muchos días. Se sabe que el periodo tiene una relación definida con la luminosidad intrínseca de la estrella. ¿Cómo se podrían usar estas estrellas para medir la distancia a las galaxias?
10. ¿Qué es una geodésica? ¿Cuál es su papel en relatividad general?
11. Si se descubriera que el corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales de las galaxias se debe a algo más que expansión, ¿cómo cambiaría la visión del Universo? ¿Habría evidencia conflictiva? Discuta.
12. Todas las galaxias parecen moverse alejándose de la Tierra. Por lo tanto, ¿la Tierra está en el centro del Universo? Explique.
13. Si usted se ubica en una galaxia cerca de la frontera del Universo observable, ¿las galaxias en la dirección de la Vía Láctea parecerían acercarse a usted o alejarse de usted? Explique.
14. Compare una explosión en la Tierra con la Gran Explosión. Considere preguntas tales como: ¿los desechos se dispersarían con mayor rapidez para partículas más distantes, como en la Gran Explosión? ¿Los desechos llegarían al reposo? ¿A qué tipo de Universo correspondería esto, abierto o cerrado?
15. Si nada, ni siquiera la luz, escapa de un agujero negro, ¿cómo se puede decir si hay uno ahí?
16. ¿Qué masa dará un radio de Schwarzschild igual al del átomo de hidrógeno en su estado fundamental?
17. La edad de la Tierra con frecuencia se cita como aproximadamente 4 mil millones de años. Localice ese momento en la figura 44-30. La humanidad ha vivido en la Tierra por aproximadamente un millón de años. ¿Dónde está esto en la figura 44-30?
18. Explique qué es la radiación cósmica de fondo de 2.7 K. ¿De dónde viene? ¿Por qué su temperatura ahora es tan baja?
19. ¿Por qué los átomos, en oposición a los núcleos aislados, sólo pudieron existir cientos de miles de años después de la Gran Explosión?
20. *a*) ¿Por qué las supernovas de tipo Ia son tan útiles para determinar las distancias de las galaxias? *b*) ¿Cómo se miden actualmente sus distancias?
21. Explique por qué la radiación cósmica de fondo (radiación CMB) no debe ser la de un cuerpo negro perfecto. (Las desviaciones de un espectro de cuerpo negro son ligeramente menores que una parte en 10^4).
22. ¿En qué circunstancias el Universo terminaría por colapsar sobre sí mismo?
23. Cuando se formaron por primera vez núcleos estables, más o menos 3 minutos después de la Gran Explosión, había casi 7 veces más protones que neutrones. Explique cómo condujo esto a una razón de la masa del hidrógeno a la masa del helio, de 3:1. Esto es aproximadamente la razón existente que se observa en el Universo.
24. *a*) ¿Por qué los astrónomos esperaban que la tasa de expansión del Universo disminuyera (se desacelerara) con el tiempo? *b*) ¿Cómo, en principio, los astrónomos esperaban determinar si el Universo solía expandirse más rápido de lo que lo hace ahora?

Problemas

44–1 a 44–3 Estrellas, galaxias, evolución estelar, distancias

1. (I) El ángulo de paralaje de una estrella es 0.00029º. ¿A qué distancia está la estrella?
2. (I) Una estrella muestra un paralaje de 0.27 segundos de arco. ¿A qué distancia está?
3. (I) ¿Cuál es el ángulo de paralaje de una estrella que está a 65 años luz de distancia? ¿Cuántos parsecs es esto?
4. (I) Una estrella está a 56 pc de distancia. ¿Cuál es su ángulo de paralaje? Exprese su respuesta en *a*) segundos de arco y *b*) grados.
5. (I) Si una estrella está al doble de distancia de la Tierra que una segunda estrella, ¿el ángulo de paralaje de la estrella más alejada será mayor o menor que el de la estrella más cercana? ¿En qué factor?
6. (II) Una estrella está a 85 pc de distancia. ¿Cuánto tarda su luz en llegar a la Tierra?
7. (II) ¿Cuál es el brillo relativo del Sol, visto desde Júpiter, en comparación con su brillo desde la Tierra? (Júpiter está 5.2 veces más lejos del Sol que la Tierra).
8. (II) Anteriormente se vio (capítulo 19) que la tasa de energía que llega a la Tierra desde el Sol (la "constante solar") es aproximadamente 1.3×10^3 W/m^2. ¿Cuál es *a*) el brillo aparente *b* del Sol y *b*) la luminosidad intrínseca *L* del Sol?
9. (II) Cuando el Sol se convierta en gigante roja, ¿cuál será su densidad promedio si se expande hasta la órbita de Mercurio (6×10^{10} m, desde el Sol)?
10. (II) Estime el ancho angular que subtendería nuestra galaxia si se observa desde la galaxia más cercana a la Tierra (tabla 44-1). Compare con el ancho angular de la Luna desde la Tierra.
11. (II) Calcule los valores *Q* para las reacciones de combustión de He de la ecuación 44-2. (La masa del $^8_4$Be muy inestable es 8.005305 u),
12. (II) Cuando el Sol se convierta en una enana blanca, se espera que tenga aproximadamente el tamaño de la Luna. ¿Qué ancho angular subtendería desde la actual distancia a la Tierra?
13. (II) Calcule la densidad de una enana blanca cuya masa es igual a la del Sol y cuyo radio es igual al de la Tierra. ¿Cuántas veces más grande que la densidad de la Tierra es esto?

14. (II) Una estrella de neutrones cuya masa es 1.5 masas solares tiene una radio de aproximadamente 11 km. Calcule su densidad promedio y compárela con la de una enana blanca (problema 13) y con la de materia nuclear.

15. (III) Se cree que las estrellas ubicadas en cierto cúmulo están aproximadamente a la misma distancia de la Tierra. Dos de tales estrellas tienen espectros que alcanzan su máximo en $\lambda_1 = 470$ nm y $\lambda_2 = 720$ nm, y la razón de sus brillos aparentes es $b_1/b_2 = 0.091$. Estime sus tamaños relativos (dada la razón de sus diámetros) con la ley de Wien y la ecuación de Stefan-Boltzmann, ecuación 19-17.

16. (III) Suponga que dos estrellas tienen el mismo brillo aparente b y se cree que tienen la misma masa. El espectro de una estrella alcanza su máximo en 750 nm, mientras que el de la otra lo alcanza en 450 nm. Use la ley de Wien y la ecuación de Stefan-Boltzmann (ecuación 19-17) para estimar sus distancias relativas a la Tierra.

44–4 Relatividad general, gravedad y espacio curvo

17. (I) Demuestre que el radio de Schwarzschild para una estrella con masa igual a la de la Tierra es 8.9 mm.

18. (II) ¿Cuál es el radio de Schwarzschild para una galaxia común (como la Vía Láctea)?

19. (II) ¿Cuál es la máxima suma de los ángulos para un triángulo sobre una esfera?

20. (II) Calcule la velocidad de escape, de acuerdo con la mecánica newtoniana, de un objeto que colapsó a su radio de Schwarzschild.

21. (II) ¿Cuál es la desviación aparente de un haz de luz en un elevador (figura 44-13) que tiene 2.4 m de ancho, si el elevador acelera hacia abajo a 9.8 m/s^2?

44–5 Corrimiento hacia el rojo, ley de Hubble

22. (I) El corrimiento hacia el rojo de una galaxia indica una velocidad de 1850 km/s. ¿A qué distancia se encuentra?

23. (I) Si una galaxia viaja alejándose de la Tierra al 1.5% de la rapidez de la luz, ¿aproximadamente a qué distancia se encuentra?

24. (II) Una galaxia se mueve alejándose de la Tierra. La línea "azul" de hidrógeno en 434 nm, emitida desde la galaxia, se mide en la Tierra en 455 nm. *a*) ¿Con qué rapidez se mueve la galaxia? *b*) ¿A qué distancia está de la Tierra?

25. (II) Estime el corrimiento de la longitud de onda para la línea de 656 nm en la serie de Balmer del hidrógeno emitido desde una galaxia cuya distancia desde la Tierra es *a*) 7.0×10^6 años luz, *b*) 7.0×10^7 años luz.

26. (II) Si una línea de absorción de calcio normalmente se encuentra a una longitud de onda de 393.4 nm en un gas de laboratorio, y usted la mide en 423.4 nm en el espectro de una galaxia, ¿cuál es la distancia aproximada a la galaxia?

27. (II) ¿Cuál es la rapidez de una galaxia con $z = 0.060$?

28. (II) ¿Cuál sería el parámetro de corrimiento hacia el rojo z para una galaxia que se aleja de la Tierra con $v = 0.075c$?

29. (II) A partir de la ecuación 44-3, demuestre que el corrimiento Doppler en longitud de onda es $\Delta\lambda/\lambda_{\text{reposo}} \approx v/c$ (ecuación 44-6) para $v \ll c$. [*Sugerencia:* Use el desarrollo binomial].

30. (II) Los radiotelescopios se diseñan para observar ondas de 21 cm emitidas por gas hidrógeno atómico. Una señal proveniente de una galaxia distante que emite ondas de radio tiene una longitud de onda que es 0.10 cm más larga que la longitud de onda normal de 21 cm. Estime la distancia a esta galaxia.

44–6 a 44–8 La Gran Explosión, CMB y expansión del Universo

31. (I) Calcule la longitud de onda en el punto máximo de la distribución de radiación de cuerpo negro a 2.7 K, con la ley de Wien.

32. (II) Calcule la longitud de onda pico del CMB 1.0 s después del nacimiento del Universo. ¿En qué parte del espectro EM se encuentra esta radiación?

33. (II) La densidad crítica para la finalización del Universo es $\rho_c \approx 10^{-26}$ kg/m^3. Establezca ρ_c en términos del número promedio de nucleones por metro cúbico.

34. (II) Se cree que el factor de escala del Universo (distancia promedio entre galaxias) en cualquier tiempo dado es inversamente proporcional a la temperatura absoluta. Estime el tamaño del Universo, en comparación con la actualidad, en *a*) $t = 10^6$ años, *b*) $t = 1$ s, *c*) $t = 10^{-6}$ s, y *d*) $t = 10^{-35}$ s.

35. (II) ¿Aproximadamente en qué tiempo el Universo se enfrió por debajo de la temperatura umbral para producir *a*) kaones ($M \approx 500$ MeV/c^2), *b*) Y ($M \approx 9500$ MeV/c^2), y *c*) muones ($M \approx 100$ MeV/c^2)?

44–9 Materia oscura, energía oscura

36. (II) Sólo alrededor del 5% de la energía en el Universo está compuesta de materia bariónica. *a*) Estime la densidad promedio de la materia bariónica en el Universo observable con un radio de 14 mil millones de años luz que contiene 10^{11} galaxias, cada una con aproximadamente 10^{11} estrellas como el Sol. *b*) Estime la densidad de la materia oscura en el Universo.

Problemas generales

37. La evolución de las estrellas, como se estudió en la sección 44-2, puede conducir a una enana blanca, una estrella de neutrones o incluso un agujero negro, dependiendo de la masa. *a*) Con referencia a las secciones 44-2 y 44-4, proporcione el radio de: **i.** una enana blanca de 1 masa solar, **ii.** una estrella de neutrones de 1.5 masas solares y **iii.** un agujero negro de 3 masas solares. *b*) Exprese estos tres radios como razones (r_i:r_{ii}:r_{iii}).

38. Con base en la conservación de cantidad de movimiento angular, estime la velocidad angular de una estrella de neutrones que colapsó a un diámetro de 16 km, a partir de una estrella cuyo radio era igual al del Sol (7×10^8 m). Suponga que su masa es 1.5 veces la del Sol y que gira (como el Sol) aproximadamente una vez al mes.

39. ¿En qué factor cambia la energía cinética rotacional cuando la estrella del problema 38 colapsa a una estrella de neutrones?

40. Suponga que las estrellas más cercanas a la Tierra tienen una luminosidad intrínseca más o menos igual a la del Sol. Sin embargo, su brillo aparente es aproximadamente 10^{11} veces más tenue que el del Sol. A partir de esto, estime la distancia a las estrellas más cercanas. (Newton hizo este cálculo, aunque cometió un error numérico de un factor de 100).

41. Suponga que tres estrellas de secuencia principal pueden experimentar los tres cambios que se representan mediante las tres flechas, A, B y C, en el diagrama H-R de la figura 44-35. Para cada caso, describa los cambios en temperatura, luminosidad intrínseca y tamaño.

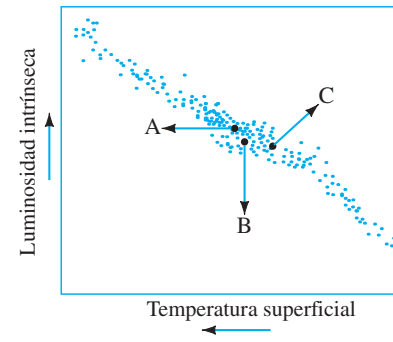


FIGURA 44–35 Problema 41.

42. Cierto pulsar, que se cree es una estrella de neutrones con masa 1.5 veces la del Sol, con 16 km de diámetro, se observa que tiene una rapidez de rotación de 1.0 rev/s. Si pierde energía cinética rotacional a la tasa de 1 parte en 10^9 por día, que se transforma toda en radiación, ¿cuál es la salida de potencia de la estrella?

43. La galaxia grande más cercana a la Vía Láctea está aproximadamente a 2×10^6 años luz de distancia. Si ambas galaxias tienen una masa de 3×10^{41} kg, ¿con qué fuerza gravitacional cada galaxia atrae a la otra?

44. Estime qué masa de neutrino (en eV/c^2) suministraría la densidad crítica para cerrar el Universo. Suponga que la densidad del neutrino es, al igual que la de los fotones, aproximadamente 10^9 veces la de los nucleones, y que los nucleones constituyen sólo *a*) el 2% de la masa necesaria o *b*) el 5% de la masa necesaria.

45. Dos estrellas, cuyos espectros alcanzan sus puntos máximos en 660 nm y 480 nm, respectivamente, se encuentran ambas en la secuencia principal. Con base en la ley de Wien, la ecuación de Stefan-Boltzmann y el diagrama H-R (figura 44-6), estime la razón de sus diámetros.

46. *a*) Para medir las distancias con paralaje a 100 parsecs, ¿qué resolución angular mínima (en grados) se necesita? *b*) ¿Qué diámetro de espejo o lente se necesitaría?

47. ¿Cuál es la temperatura que corresponde a colisiones de 1.96 TeV en el colisionador Fermilab? ¿A qué era en la historia cosmológica corresponde esto? [*Sugerencia:* Consulte la figura 44-30.]

48. Los astrónomos midieron la rotación del gas alrededor de un posible agujero negro supermasivo de aproximadamente 2 mil millones de masas solares en el centro de una galaxia. Si el radio desde el centro galáctico hasta las nubes de gas es de 68 años luz, estime el valor medido de z.

49. En las etapas finales de la evolución estelar, una estrella (si es suficientemente masiva) comenzará a fusionar núcleos de carbono para formar, por ejemplo, magnesio:

$$^{12}_{6}\text{C} + {}^{12}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg} + \gamma.$$

a) ¿Cuánta energía se libera en esta reacción (véase el Apéndice F)? *b*) ¿Cuánta energía cinética debe tener cada núcleo de carbono (suponga que tienen la misma) en una colisión frontal, si apenas se "tocan" (use la ecuación 41-1), de manera que la fuerza fuerte pueda entrar en juego? *c*) ¿A qué temperatura corresponde esta energía cinética?

50. Considere la reacción

$$^{16}_{8}\text{O} + {}^{16}_{8}\text{O} \rightarrow {}^{28}_{14}\text{Si} + {}^{4}_{2}\text{He},$$

y responda las mismas preguntas que en el problema 49.

51. Determine el radio de Schwartzshild con la teoría gravitacional semi-clásica (newtoniana), calculando el radio mínimo R para una esfera de masa M tal que un fotón pueda escapar de la superficie. (La relatividad general da $R = 2GM/c^2$.)

52. ¿Qué tan grande sería el Sol si su densidad se igualara con la densidad crítica del Universo, $\rho_c \approx 10^{-26}$ kg/m^3? Exprese su respuesta en años luz y compare con la distancia entre la Tierra y el Sol y con el diámetro de la Vía Láctea.

53. El Gran Colisionador de Hadrones en Ginebra, Suiza, puede hacer chocar dos haces de protones a una energía de 14 TeV. Estime el tiempo después de la Gran Explosión que representa esta energía.

54. *a*) Con base en la relatividad especial y la ley de gravitación de Newton, demuestre que un fotón de masa $m = E/c^2$ que apenas roza al Sol se desviará por un ángulo $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = \frac{2GM}{c^2R}$$

donde G es la constante gravitacional, R y M son el radio y la masa del Sol, respectivamente, y c es la rapidez de la luz. *b*) Ponga valores y demuestre que $\Delta\theta = 0.87''$. (La relatividad general predice un ángulo el doble de grande, 1.74″.)

55. Los astrónomos usan una escala de **magnitud aparente** (m) para describir el brillo aparente. Usan una escala logarítmica, donde un número mayor corresponde a una estrella menos brillante. (Por ejemplo, el Sol tiene magnitud −27, mientras que la mayoría de las estrellas tienen magnitudes positivas). En esta escala, un cambio de +5 en magnitud aparente corresponde a una disminución en brillo aparente por un factor de 100. Si Venus tiene una magnitud aparente de −4.4, mientras que Sirio tiene una magnitud aparente de −1.4, ¿cuál es más brillante? ¿Cuál es la razón del brillo aparente de estos dos objetos?

56. Mediante el siguiente método, estime el radio de una enana blanca cuya masa es igual a la del Sol, suponiendo que existen N nucleones y $\frac{1}{2}N$ electrones (¿por qué $\frac{1}{2}$?): *a*) Con base en la estadística de Fermi-Dirac (sección 40-6), demuestre que la energía total de todos los electrones es

$$E_e = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}N\right)\frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{2V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

[*Sugerencia:* Véanse las ecuaciones 40-12 y 40-13; suponga que los electrones llenan los niveles de energía desde 0 hasta la energía de Fermi]. *b*) Los nucleones contribuyen con la energía total principalmente mediante la fuerza gravitacional (note que la energía de Fermi para nucleones es despreciable en comparación con la de los electrones; ¿por qué?). Use una forma gravitacional de la ley de Gauss para demostrar que la energía potencial gravitacional total de una esfera uniforme de radio R es

$$-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

al considerar la energía potencial de un cascarón esférico de radio r debida sólo a la masa dentro de éste (¿por qué?) e integre desde $r = 0$ hasta $r = R$. (Véase también el Apéndice D.) *c*) Escriba la energía total como una suma de estos dos términos y establezca que $dE/dR = 0$ para encontrar el radio de equilibrio, y evalúelo para una masa igual a la del Sol (2.0×10^{30} kg).

57. Determine el radio de una estrella de neutrones empleando el mismo argumento que en el problema 56, pero sólo para N neutrones. Demuestre que el radio de una estrella de neutrones, de 1.5 masas solares, es de alrededor de 11 km.

58. Use *análisis dimensional* con las constantes fundamentales c, G y $\hbar$ para estimar el valor del llamado *tiempo de Planck*. Se cree que la física, como se conoce ahora, no puede decir nada acerca del Universo antes de este tiempo.

Respuestas a los ejercicios

A: A nosotros mismos, hace 2 años.

B: 600 años luz (al estimar L a partir de la figura 44-6 como $L \approx 8 \times 10^{26}$ W; note que, en escala log, 6000 K está más cerca de 7000 K que de 5000 K).

C: 6 km.

D: *a*); no es el R^3 habitual, sino R; véase la fórmula para el radio de Schwartzschild.

E: *c*).

APÉNDICE

A Fórmulas matemáticas

A–1 Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$

entonces $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A–2 Expansión binomial

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$(x + y)^n = x^n\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = x^n\left(1 + n\frac{y}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{y^2}{x^2} + \cdots\right)$$

A–3 Otras expansiones

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2}{15}\theta^5 + \cdots \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

En general: $$f(x) = f(0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

A–4 Exponentes

$$(a^n)(a^m) = a^{n+m} \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$(a^n)(b^n) = (ab)^n \qquad a^n a^{-n} = a^0 = 1$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

A–5 Áreas y volúmenes

Objeto	Área superficial	Volumen
Círculo, radio r	πr^2	—
Esfera, radio r	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Cilindro circular recto, radio r, altura h	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
Cono circular recto, radio r, altura h	$\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$

A–6 Geometría plana

1. *Ángulos iguales:*

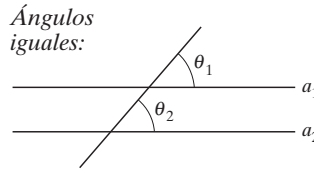


FIGURA A–1 Si la línea a_1 es paralela a la línea a_2, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

2. *Ángulos iguales:*

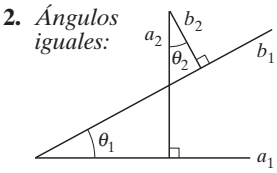


FIGURA A–2 Si $a_1 \perp a_2$ y $b_1 \perp b_2$, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

3. La suma de los ángulos en cualquier triángulo plano es 180°.

4. *Teorema de Pitágoras:*

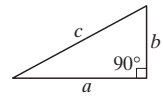


FIGURA A–3

En cualquier triángulo recto (un ángulo = 90°) de lados a, b y c:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

donde c es la longitud de la hipotenusa (opuesta al ángulo de 90°).

5. *Triángulos similares:* Se dice que dos triángulos son similares si sus tres ángulos son iguales (en la figura A-4, $\theta_1 = \phi_1, \theta_2 = \phi_2, \theta_3 = \phi_3$). Los triángulos similares pueden tener diferentes tamaños y diferentes orientaciones.

a) Dos triángulos son similares si dos de sus ángulos son iguales. (De esto se deduce que los terceros ángulos también deben ser iguales, porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180°).

b) Las razones de los lados correspondientes de dos triángulos similares son iguales (figura A-4):

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

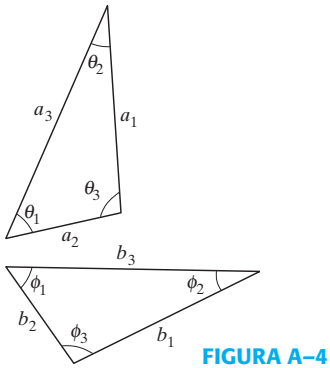


FIGURA A–4

6. *Triángulos congruentes:* Dos triángulos son congruentes si uno se puede colocar exactamente encima del otro. Esto es, son triángulos similares y tienen el mismo tamaño. Dos triángulos son congruentes si se cumple alguno de los siguientes enunciados:

a) Los tres lados correspondientes son iguales.

b) Dos lados y el ángulo entre ellos son iguales ("lado-ángulo-lado").

c) Dos ángulos y el lado entre ellos son iguales ("ángulo-lado-ángulo").

A–7 Logaritmos

Los logaritmos se definen en la forma siguiente:

$$\text{si} \quad y = A^x, \quad \text{entonces} \quad x = \log_A y.$$

Esto es, el logaritmo de un número y a la base A es aquel número que, como exponente de A, permite obtener el número y. Para **logaritmos comunes**, la base es 10, de manera que

$$\text{si} \quad y = 10^x, \quad \text{entonces} \quad x = \log y.$$

El subíndice 10 en $\log_{10}$ por lo general se omite cuando se trata con logaritmos comunes. Otra base importante es la base exponencial $e = 2.718\ldots$, un número natural. Tales logaritmos se llaman **logaritmos naturales** y se escriben ln. Por lo tanto,

$$\text{si} \quad y = e^x, \quad \text{entonces} \quad x = \ln y.$$

Para cualquier número y, los dos tipos de logaritmo se relacionan mediante

$$\ln y = 2.3026 \log y.$$

Algunas reglas simples para logaritmos son las siguientes:

$$\log(ab) = \log a + \log b, \qquad \textbf{(i)}$$

que es cierto porque, si $a = 10^n$ y $b = 10^m$, entonces $ab = 10^{n+m}$. A partir de la definición de logaritmo, $\log a = n$, $\log b = m$, y $\log (ab) = n + m$; por lo tanto, $\log(ab) = n + m = \log a + \log b$. En forma similar, se puede demostrar que

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \qquad \textbf{(ii)}$$

y

$$\log a^n = n \log a. \qquad \textbf{(iii)}$$

Estas tres reglas se aplican a cualquier tipo de logaritmo.

Si no tiene una calculadora que calcule logaritmos, puede usar fácilmente una **tabla de logaritmos**, como la pequeña que se muestra aquí (tabla A-1): el número N cuyo logaritmo se busca está dado con dos dígitos. El primer dígito está en la columna vertical a la izquierda, el segundo dígito está en la hilera horizontal a lo largo de la parte superior. Por ejemplo, la tabla A-1 dice que log 1.0 = 0.000, log 1.1 = 0.041 y log 4.1 = 0.613. La tabla A-1 no incluye el punto decimal. La tabla da los logaritmos para números entre 1.0 y 9.9. Para números más grandes o más pequeños, se emplea la regla (i) anterior, $\log(ab) = \log a + \log b$. Por ejemplo, $\log(380) = \log(3.8 \times 10^2) = \log(3.8) + \log(10^2)$. De la tabla, log 3.8 = 0.580; y a partir de la regla (iii) anterior, $\log(10^2) = 2\log(10) = 2$, pues $\log(10) = 1$. [Esto se deduce de la definición de logaritmo: si $10 = 10^1$, entonces $1 = \log(10)$.] Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\log(380) &= \log(3.8) + \log(10^2)\\ &= 0.580 + 2\\ &= 2.580.\end{aligned}$$

De igual modo,

$$\begin{aligned}\log(0.081) &= \log(8.1) + \log(10^{-2})\\ &= 0.908 - 2 = -1.092.\end{aligned}$$

El proceso inverso para encontrar el número N cuyo logaritmo es, digamos, 2.670, se llama "sacar el **antilogaritmo**". Para hacerlo, separe el número 2.670 en dos partes de acuerdo con el punto decimal:

$$\begin{aligned}\log N = 2.670 &= 2 + 0.670\\ &= \log 10^2 + 0.670.\end{aligned}$$

Ahora observe la tabla A-1 para ver cuál número tiene su logaritmo igual a 0.670; ninguno lo tiene, así que se debe **interpolar**: vemos que log 4.6 = 0.663 y log 4.7 = 0.672. Así que el número que se quiere está entre 4.6 y 4.7, y más cerca del último por $\frac{7}{9}$. Aproximadamente, se puede decir que log 4.68 = 0.670. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\log N &= 2 + 0.670\\ &= \log(10^2) + \log(4.68) = \log(4.68 \times 10^2),\end{aligned}$$

así que $N = 4.68 \times 10^2 = 468$.

Si el logaritmo dado es negativo, por ejemplo, −2.180, se procede del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\log N = -2.180 &= -3 + 0.820\\ &= \log 10^{-3} + \log 6.6 = \log 6.6 \times 10^{-3},\end{aligned}$$

así que $N = 6.6 \times 10^{-3}$. Note que al logaritmo dado se agregó el siguiente entero más grande (3 en este caso) de manera que se obtuviera un entero, más un número decimal entre 0 y 1.0 cuyo antilogaritmo se puede buscar en la tabla.

TABLA A–1 Tabla abreviada de una tabla de logaritmos comunes

N	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898
8	903	908	914	919	924	929	935	940	944	949
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996

A–8 Vectores

La *suma vectorial* se estudió en las secciones 3-2 a 3-5.
La *multiplicación vectorial* se estudió en las secciones 3-3, 7-2 y 11-2.

A–9 Funciones e identidades trigonométricas

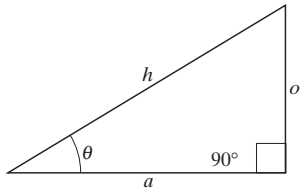


FIGURA A–5

Las funciones trigonométricas se definen del modo siguiente (véase la figura A-5, o = cateto opuesto, a = cateto adyacente, h = hipotenusa. Los valores están en la tabla A-2):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{o}{h} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{h}{o}$$

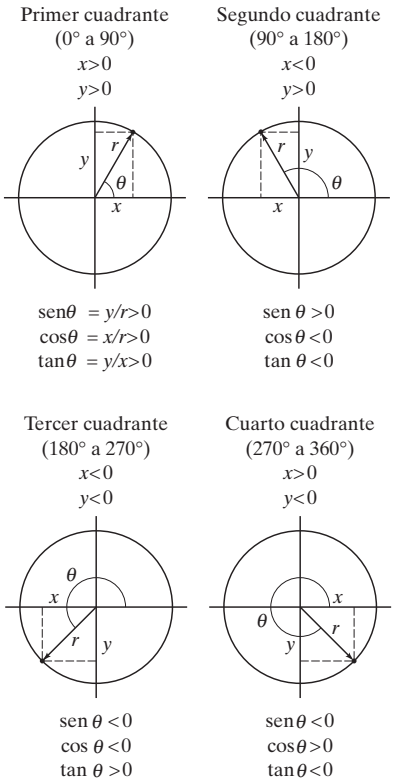
$$\cos\theta = \frac{a}{h} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{h}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{o}{a} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{a}{o}$$

y recuerde que

$$a^2 + o^2 = h^2 \qquad \text{[teorema de Pitágoras].}$$

FIGURA A–6



La figura A-6 muestra los signos (+ ó −) que toman el coseno, el seno y la tangente para ángulos θ en los cuatro cuadrantes (0° a 360°). Note que los ángulos se miden en sentido antihorario desde el eje x, como se muestra; los ángulos negativos se miden desde *abajo* del eje x, en sentido horario: por ejemplo, $-30° = +330°$, y así sucesivamente.

Las siguientes son algunas identidades útiles entre las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1, \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$$

$$\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

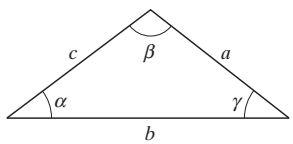
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \quad \tan\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A \pm B}{2}\right)\cos\left(\frac{A \mp B}{2}\right).$$

FIGURA A–7



Para cualquier triángulo (véase la figura A-7):

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \text{[ley de senos]}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad \text{[ley de cosenos]}$$

Los valores de seno, coseno y tangente aparecen en la tabla A-2.

TABLA A–2 Tabla trigonométrica: Valores numéricos de sen, cos, tan

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno	Coseno	Tangente	Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno	Coseno	Tangente
0°	0.000	0.000	1.000	0.000					
1°	0.017	0.017	1.000	0.017	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
2°	0.035	0.035	0.999	0.035	47°	0.820	0.731	0.682	1.072
3°	0.052	0.052	0.999	0.052	48°	0.838	0.743	0.669	1.111
4°	0.070	0.070	0.998	0.070	49°	0.855	0.755	0.656	1.150
5°	0.087	0.087	0.996	0.087	50°	0.873	0.766	0.643	1.192
6°	0.105	0.105	0.995	0.105	51°	0.890	0.777	0.629	1.235
7°	0.122	0.122	0.993	0.123	52°	0.908	0.788	0.616	1.280
8°	0.140	0.139	0.990	0.141	53°	0.925	0.799	0.602	1.327
9°	0.157	0.156	0.988	0.158	54°	0.942	0.809	0.588	1.376
10°	0.175	0.174	0.985	0.176	55°	0.960	0.819	0.574	1.428
11°	0.192	0.191	0.982	0.194	56°	0.977	0.829	0.559	1.483
12°	0.209	0.208	0.978	0.213	57°	0.995	0.839	0.545	1.540
13°	0.227	0.225	0.974	0.231	58°	1.012	0.848	0.530	1.600
14°	0.244	0.242	0.970	0.249	59°	1.030	0.857	0.515	1.664
15°	0.262	0.259	0.966	0.268	60°	1.047	0.866	0.500	1.732
16°	0.279	0.276	0.961	0.287	61°	1.065	0.875	0.485	1.804
17°	0.297	0.292	0.956	0.306	62°	1.082	0.883	0.469	1.881
18°	0.314	0.309	0.951	0.325	63°	1.100	0.891	0.454	1.963
19°	0.332	0.326	0.946	0.344	64°	1.117	0.899	0.438	2.050
20°	0.349	0.342	0.940	0.364	65°	1.134	0.906	0.423	2.145
21°	0.367	0.358	0.934	0.384	66°	1.152	0.914	0.407	2.246
22°	0.384	0.375	0.927	0.404	67°	1.169	0.921	0.391	2.356
23°	0.401	0.391	0.921	0.424	68°	1.187	0.927	0.375	2.475
24°	0.419	0.407	0.914	0.445	69°	1.204	0.934	0.358	2.605
25°	0.436	0.423	0.906	0.466	70°	1.222	0.940	0.342	2.747
26°	0.454	0.438	0.899	0.488	71°	1.239	0.946	0.326	2.904
27°	0.471	0.454	0.891	0.510	72°	1.257	0.951	0.309	3.078
28°	0.489	0.469	0.883	0.532	73°	1.274	0.956	0.292	3.271
29°	0.506	0.485	0.875	0.554	74°	1.292	0.961	0.276	3.487
30°	0.524	0.500	0.866	0.577	75°	1.309	0.966	0.259	3.732
31°	0.541	0.515	0.857	0.601	76°	1.326	0.970	0.242	4.011
32°	0.559	0.530	0.848	0.625	77°	1.344	0.974	0.225	4.331
33°	0.576	0.545	0.839	0.649	78°	1.361	0.978	0.208	4.705
34°	0.593	0.559	0.829	0.675	79°	1.379	0.982	0.191	5.145
35°	0.611	0.574	0.819	0.700	80°	1.396	0.985	0.174	5.671
36°	0.628	0.588	0.809	0.727	81°	1.414	0.988	0.156	6.314
37°	0.646	0.602	0.799	0.754	82°	1.431	0.990	0.139	7.115
38°	0.663	0.616	0.788	0.781	83°	1.449	0.993	0.122	8.144
39°	0.681	0.629	0.777	0.810	84°	1.466	0.995	0.105	9.514
40°	0.698	0.643	0.766	0.839	85°	1.484	0.996	0.087	11.43
41°	0.716	0.656	0.755	0.869	86°	1.501	0.998	0.070	14.301
42°	0.733	0.669	0.743	0.900	87°	1.518	0.999	0.052	19.081
43°	0.750	0.682	0.731	0.933	88°	1.536	0.999	0.035	28.636
44°	0.768	0.695	0.719	0.966	89°	1.553	1.000	0.017	57.290
45°	0.785	0.707	0.707	1.000	90°	1.571	1.000	0.000	∞

APÉNDICE

B Derivadas e integrales

B–1 Derivadas: Reglas generales

(Véase también la sección 2-3).

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{df}{dx} \qquad (a = \text{constante})$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(y)] = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} \qquad \text{[regla de la cadena]}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad \text{si } \frac{dy}{dx} \neq 0.$$

B–2 Derivadas: Funciones particulares

$$\frac{da}{dx} = 0 \qquad (a = \text{constante})$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}\tan ax = a\sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

B–3 Integrales indefinidas: Reglas generales

(Véase también la sección 7-3).

$$\int dx = x$$

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a = \text{constante})$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \text{(integración por partes: véase también B-6)}$$

B–4 Integrales indefinidas: Funciones particulares

(Se puede agregar una constante arbitraria al lado derecho de cada ecuación.)

$$\int a\,dx = ax \qquad (a = \text{constante})$$

$$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} \qquad (m \neq -1)$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{si } x^2 \leq a^2$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax + 1)$$

$$\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right) \qquad (x^2 > a^2)$$

$$= -\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a + x}{a - x}\right) \qquad (x^2 < a^2)$$

B–5 Algunas integrales definidas

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{16a^3}}$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

B–6 Integración por partes

En ocasiones una integral difícil se puede simplificar mediante la elección cuidadosa de las funciones u y v en la identidad:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad \text{[Integración por partes]}$$

Esta identidad se deduce a partir de la propiedad de las derivadas

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

como diferenciales: $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

Por ejemplo, $\int xe^{-x}\,dx$ se puede integrar al elegir $u = x$ y $dv = e^{-x}\,dx$ en la anterior ecuación de "integración por partes":

$$\int xe^{-x}\,dx = (x)(-e^{-x}) + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}.$$

APÉNDICE C

Más acerca del análisis dimensional

Un uso importante del análisis dimensional (sección 1-7) es obtener la *forma* de una ecuación; es decir, cómo una cantidad depende de otras. Para tener un ejemplo concreto, intente encontrar una expresión para el periodo T de un péndulo simple. Primero, intente averiguar de qué podría depender T y haga una lista de esas variables. Puede depender de su longitud ℓ, de la masa m de la pesa del péndulo, del ángulo de balanceo θ y de la aceleración debida a la gravedad g. También puede depender de la resistencia del aire (se usaría la viscosidad del aire), el tirón gravitacional de la Luna, etcétera; pero la experiencia cotidiana sugiere que la gravedad de la Tierra es la principal fuerza implicada, de manera que se ignoran las otras fuerzas posibles. Así pues, supongamos que T es una función de ℓ, m, θ y g, y que cada uno de estos factores está presente a alguna potencia:

$$T = C\ell^w m^x \theta^y g^z.$$

C es una constante adimensional, y ω, x, y y z son exponentes que se quieren determinar. Ahora escribimos la ecuación dimensional (sección 1-7) para esta relación:

$$[T] = [L]^w[M]^x[L/T^2]^z.$$

Puesto que θ no tiene dimensiones (un radián es una longitud dividida por una longitud; véase la ecuación 10-1a), no aparece. Simplificamos y obtenemos

$$[T] = [L]^{w+z}[M]^x[T]^{-2z}$$

Para tener consistencia dimensional, debemos tener

$$\begin{aligned} 1 &= -2z \\ 0 &= w + z \\ 0 &= x. \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones se encuentra que $z = -\frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{2}$, y $x = 0$. Por tanto, la ecuación deseada debe ser

$$T = C\sqrt{\ell/g}\, f(\theta), \qquad \textbf{(C–1)}$$

donde $f(\theta)$ es alguna función de θ que no se puede determinar empleando esta técnica. Tampoco se puede determinar de esta forma la constante adimensional C. (Para obtener C y f, tendría que hacerse un análisis como el del capítulo 14 que usa las leyes de Newton, lo que revela que $C = 2\pi$ y $f \approx 1$ para θ pequeño.) Pero observe *lo que se encontró* usando sólo la consistencia dimensional. Se obtuvo la forma de la expresión que relaciona el periodo de un péndulo simple con las principales variables de la situación, ℓ y g (véase la ecuación 14-12c), y se vio que no depende de la masa m.

¿Cómo se hizo esto? ¿Y qué tan útil es esta técnica? Básicamente, tuvimos que usar la intuición acerca de cuáles variables eran importantes y cuáles no lo eran. Esto no siempre es fácil y con frecuencia requiere mucha intuición. El resultado final en el ejemplo se podía obtener a partir de las leyes de Newton, como en el capítulo 14. Pero en muchas situaciones físicas, no se puede realizar tal deducción a partir de otras leyes. En tales situaciones, el análisis dimensional es una poderosa herramienta.

Al final, cualquier expresión deducida empleando el análisis dimensional (o por cualquier otro medio) se debe cotejar con los experimentos. Por ejemplo, en la deducción de la ecuación C-1, se pueden comparar los periodos de dos péndulos de diferentes longitudes, ℓ_1 y ℓ_2, cuyas amplitudes (θ) sean iguales. Así, con la ecuación C-1, se tendría

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{C\sqrt{\ell_1/g}\, f(\theta)}{C\sqrt{\ell_2/g}\, f(\theta)} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}.$$

Puesto que C y $f(\theta)$ son iguales para ambos péndulos, se cancelan, así que experimentalmente se puede determinar si la razón de los periodos varía como la razón de las raíces cuadradas de las longitudes. Esta comparación con el experimento comprueba la deducción, al menos en parte; C y $f(\theta)$ se podrían determinar mediante experimentos posteriores.

APÉNDICE D

Fuerza gravitacional debida a una distribución esférica de masa

En el capítulo 6 se afirmó que la fuerza gravitacional ejercida por o sobre una esfera uniforme actúa como si toda la masa de la esfera se concentrara en su centro, si el otro objeto (que ejerce o siente la fuerza) está afuera de la esfera. En otras palabras, la fuerza gravitacional que una esfera uniforme ejerce sobre una partícula que se encuentra afuera de ella es

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \qquad [m \text{ afuera de esfera de masa } M]$$

donde m es la masa de la partícula, M la masa de la esfera y r la distancia de m desde el centro de la esfera. Ahora se deducirá este resultado. Se usarán los conceptos de cantidades infinitesimalmente pequeñas e integración.

Primero considere un cascarón esférico uniforme muy delgado (como un balón de básquetbol de pared delgada) de masa M cuyo grosor t es pequeño en comparación con su radio R (figura D-1). La fuerza sobre una partícula de masa m a una distancia r desde el centro del cascarón se puede calcular como la suma vectorial de las fuerzas debidas a todas las partículas del cascarón. Imagine el cascarón dividido en delgadas (infinitesimales) tiras circulares de forma que todos los puntos sobre una tira sean equidistantes a la partícula m. Una de estas tiras circulares, marcada como AB, se muestra en la figura D-1. Tiene ancho $R\,d\theta$, grosor t y un radio R sen θ. La fuerza sobre la partícula m debida a un pequeño trozo de la tira en el punto A se representa mediante el vector $\vec{\mathbf{F}}_A$ que se muestra. La fuerza debida a un pequeño trozo de la tira en el punto B, que es diametralmente opuesto a A, es la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_B$. Considere que los dos trozos en A y B tienen igual masa, así que $F_A = F_B$. Las componentes horizontales de $\vec{\mathbf{F}}_A$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$ son, cada una, igual a

$$F_A \cos\phi$$

y apuntan hacia el centro del cascarón. Las componentes verticales de $\vec{\mathbf{F}}_A$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$ son de igual magnitud y apuntan en sentidos opuestos, así que se cancelan. Como para cada punto en la tira hay un punto correspondiente diametralmente opuesto (como con A y B), se ve que la fuerza neta debida a toda la tira apunta hacia el centro del cascarón. Su magnitud será

$$dF = G\frac{m\,dM}{\ell^2}\cos\phi,$$

donde dM es la masa de toda la tira circular y ℓ es la distancia desde todos los puntos en la tira hasta m, como se muestra. Se escribe dM en términos de la densidad ρ; por densidad se entiende la masa por unidad de volumen (sección 13-2). Por lo tanto, $dM = \rho\,dV$, donde dV es el volumen de la tira y es igual a $(2\pi R \text{ sen } \theta)(t)(R\,d\theta)$. Entonces la fuerza dF debida a la tira circular que se muestra es

$$dF = G\frac{m\rho 2\pi R^2 t \text{ sen } \theta\, d\theta}{\ell^2}\cos\phi. \qquad \textbf{(D–1)}$$

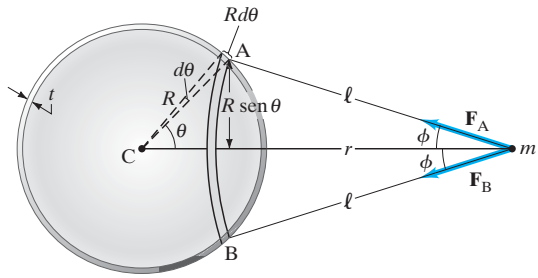


FIGURA D–1 Cálculo de la fuerza gravitacional sobre una partícula de masa m debida a un cascarón esférico uniforme de radio R y masa M.

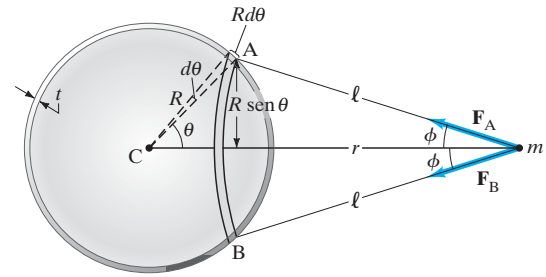


FIGURA D–1 (repetida)
Cálculo de la fuerza gravitacional sobre una partícula de masa m debida a un cascarón esférico uniforme de radio R y masa M.

Para obtener la fuerza total F que ejerce todo el cascarón sobre la partícula m, debemos integrar sobre todas las tiras circulares; esto es, se integra

$$dF = G\frac{m\rho 2\pi R^2 t \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\ell^2}\cos\phi \qquad \textbf{(D–1)}$$

desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 180°$. Pero la expresión para dF contiene ℓ y ϕ, que son funciones de θ. A partir de la figura D-1 se puede ver que

$$\ell\cos\phi = r - R\cos\theta.$$

Más aún, se puede escribir la ley de cosenos para el triángulo CmA:

$$\cos\theta = \frac{r^2 + R^2 - \ell^2}{2rR}. \qquad \textbf{(D–2)}$$

Con estas dos expresiones, las tres variables (ℓ, θ, ϕ) se pueden reducir a una sola, que será ℓ. Con la ecuación D-2 se hacen dos cosas: **1.** se pone en la ecuación anterior para $\ell\cos\phi$:

$$\cos\phi = \frac{1}{\ell}(r - R\cos\theta) = \frac{r^2 + \ell^2 - R^2}{2r\ell}.$$

y **2.** se saca la diferencial de ambos lados de la ecuación D-2 (porque sen $\theta\, d\theta$ aparece en la expresión para dF, ecuación D-1), al considerar que r y R son constantes cuando se suman sobre las tiras:

$$-\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{2\ell\, d\ell}{2rR} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\ell\, d\ell}{rR}.$$

Esto se inserta en la ecuación D-1 para dF y se encuentra

$$dF = Gm\rho\pi t\frac{R}{r^2}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\ell^2}\right)d\ell.$$

Ahora se integra para obtener la fuerza neta sobre el cascarón delgado de radio R. Para integrar sobre todas las tiras ($\theta = 0°$ a $180°$), se debe ir de $\ell = r - R$ a $\ell = r + R$ (véase la figura D-1). Por lo tanto,

$$F = Gm\rho\pi t\frac{R}{r^2}\left[\ell - \frac{r^2 - R^2}{\ell}\right]_{\ell=r-R}^{\ell=r+R}$$
$$= Gm\rho\pi t\frac{R}{r^2}(4R).$$

El volumen V del cascarón esférico es su área ($4\pi R^2$) por el grosor t. Por lo tanto, la masa $M = \rho V = \rho 4\pi R^2 t$ y finalmente

$$F = G\frac{mM}{r^2}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{partícula de masa } m \text{ afuera de un delgado}\\ \text{cascarón esférico uniforme de masa } M\end{array}\right]$$

Este resultado indica la fuerza que ejerce un delgado cascarón sobre una partícula de masa m a una distancia r del centro del cascarón, y *afuera* del cascarón. Se ve que la fuerza es la misma que la que existe entre m y una partícula de masa M en el centro del cascarón. En otras palabras, para propósitos de calcular la fuerza gravitacional ejercida sobre o por un cascarón esférico uniforme, se puede considerar que toda su masa se concentra en su centro.

Lo que se dedujo para un cascarón también se cumple para una esfera sólida, pues una esfera sólida se puede considerar como constituida por muchos cascarones concéntricos, desde $R = 0$ hasta $R = R_0$, donde R_0 es el radio de la esfera sólida. ¿Por qué? Porque si cada cascarón tiene masa dM, para cada cascarón se escribe $dF = Gm\, dM/r^2$,

donde r es la distancia desde el centro C hasta la masa m y es la misma para todos los cascarones. Así, la fuerza total es igual a la suma o integral sobre dM, que da la masa total M. Por lo tanto, el resultado

$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad \left[\begin{array}{c}\text{partícula de masa } m \text{ afuera de}\\ \text{una esfera sólida de masa } M\end{array}\right] \quad \textbf{(D–3)}$$

es válido para una esfera sólida de masa M, incluso si la densidad varía con la distancia a partir del centro. (No es válida si la densidad varía dentro de cada cascarón; esto es, no depende sólo de R.) Por lo tanto, se puede considerar que la fuerza gravitacional ejercida sobre o por objetos esféricos, incluidos objetos casi esféricos como la Tierra, el Sol y la Luna, actúa como si los objetos fueran partículas puntuales.

Este resultado, ecuación D-3, es verdadero sólo si la masa m está afuera de la esfera. Ahora consideremos una masa puntual m que se ubica adentro del cascarón esférico de la figura D-1. Aquí, r sería menor que R, y la integración sobre ℓ sería desde $\ell = R - r$ hasta $\ell = R + r$, así que

$$\left[\ell - \frac{r^2 - R^2}{\ell}\right]_{R-r}^{R+r} = 0.$$

Por lo tanto, la fuerza sobre cualquier masa dentro del cascarón sería cero. Este resultado tiene particular importancia para la fuerza electrostática, que también es una ley de cuadrado inverso. Para la situación gravitacional, se ve que, en puntos dentro de una esfera sólida, por ejemplo, 1000 km por debajo de la superficie de la Tierra, sólo la masa hasta ese radio contribuye a la fuerza neta. Los cascarones exteriores más allá del punto en cuestión no aportan ningún efecto gravitacional neto.

Los resultados aquí obtenidos también se pueden alcanzar usando la analogía gravitacional de la ley de Gauss para electrostática (capítulo 22).

APÉNDICE

E Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en otra forma que con frecuencia es más conveniente que las ecuaciones 31-5. Este material por lo general se cubre en cursos más avanzados y aquí se incluye simplemente como complemento.

Se citan dos teoremas, sin prueba, que se deducen en textos de análisis vectorial. El primero se llama **teorema de Gauss** o **teorema de la divergencia**. Relaciona la integral sobre una superficie de cualquier función vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ con una integral de volumen sobre el volumen encerrado por la superficie:

$$\oint_{\text{Área } A} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\text{Volumen } V} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}}\, dV.$$

El operador $\vec{\nabla}$ es el **operador nabla** (también llamado operador del), que en coordenadas cartesianas se define como

$$\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

La cantidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

se llama la **divergencia** de $\vec{\mathbf{F}}$. El segundo teorema es el **teorema de Stokes**, y relaciona una integral de línea alrededor de una trayectoria cerrada con una integral de superficie sobre cualquier superficie encerrada por esa trayectoria:

$$\oint_{\text{Línea}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{Área } A} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

La cantidad $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}$ se llama **rotacional** de $\vec{\mathbf{F}}$. (Véase la sección 11-2 acerca del producto vectorial).

Ahora se usarán estos dos teoremas para obtener la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre. Aplicamos el teorema de Gauss a la ecuación 31-5a (ley de Gauss):

$$\oint_A \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}\, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ahora la carga Q se puede expresar como una integral de volumen sobre la densidad de carga ρ: $Q = \int \rho\, dV$. De esta forma,

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}\, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho\, dV.$$

Ambos lados contienen integrales de volumen sobre el mismo volumen, y para que esto sea cierto sobre *cualquier* volumen, sea cual fuere su tamaño o forma, los integrandos deben ser iguales:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \qquad \textbf{(E–1)}$$

Ésta es la forma diferencial de la ley de Gauss. La segunda de las ecuaciones de Maxwell, $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0$, se trata de la misma forma y se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \qquad \textbf{(E–2)}$$

A continuación, se aplica el teorema de Stokes a la tercera de las ecuaciones de Maxwell,

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Puesto que el flujo magnético $\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$, se tiene

$$\int \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

donde se usa la derivada parcial, $\partial\vec{\mathbf{B}}/\partial t$, pues B también puede depender de la posición. Éstas son integrales de superficie sobre la misma área, y para que sea cierto sobre cualquier área, incluso una muy pequeña, se debe tener

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}. \qquad \textbf{(E–3)}$$

Ésta es la tercera de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Finalmente, para la última de las ecuaciones de Maxwell,

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

se aplica el teorema de Stokes y se escribe $\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$:

$$\int \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

La corriente de conducción I se puede escribir en términos de la densidad de corriente $\vec{\mathbf{j}}$, empleando la ecuación 25-12:

$$I = \int \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

De esta forma, la cuarta ecuación de Maxwell se convierte en:

$$\int \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \mu_0 \int \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

Para que esto sea cierto sobre cualquier área A, sea cual fuere su tamaño o forma, los integrandos en cada lado de la ecuación deben ser iguales:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}. \qquad \textbf{(E–4)}$$

Las ecuaciones E-1, 2, 3 y 4 son las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para espacio libre. Se resumen en la tabla E-1.

TABLA E–1 Ecuaciones de Maxwell en espacio libre†

Forma integral	Forma diferencial
$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0$	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$
$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$
$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$

† $\vec{\boldsymbol{\nabla}}$ representa al *operador nabla* $\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}$ en coordenadas cartesianas.

APÉNDICE F

Isótopos seleccionados

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica†	(6) % de abundancia (o modo de decaimiento‡ radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
0	(Neutrón)	*n*	1	1.008665	β^-	10.23 min
1	Hidrógeno	H	1	1.007825	99.9885%	
	Deuterio	d o D	2	2.014102	0.0115%	
	Tritio	t o T	3	3.016049	β^-	12.312 años
2	Helio	He	3	3.016029	0.000137%	
			4	4.002603	99.999863%	
3	Litio	Li	6	6.015123	7.59%	
			7	7.016005	92.41%	
4	Berilio	Be	7	7.016930	CE, γ	53.22 días
			9	9.012182	100%	
5	Boro	B	10	10.012937	19.9%	
			11	11.009305	80.1%	
6	Carbono	C	11	11.011434	β^+, CE	20.370 min
			12	12.000000	98.93%	
			13	13.003355	1.07%	
			14	14.003242	β^-	5730 años
7	Nitrógeno	N	13	13.005739	β^+, CE	9.9670 min
			14	14.003074	99.632%	
			15	15.000109	0.368%	
8	Oxígeno	O	15	15.003066	β^+, CE	122.5 s
			16	15.994915	99.757%	
			18	17.999161	0.205%	
9	Flúor	F	19	18.998403	100%	
10	Neón	Ne	20	19.992440	90.48%	
			22	21.991385	9.25%	
11	Sodio	Na	22	21.994436	β^+, CE, γ	2.6027 años
			23	22.989769	100%	
			24	23.990963	β^-, γ	14.9574 h
12	Magnesio	Mg	24	23.985042	78.99%	
13	Aluminio	Al	27	26.981539	100%	
14	Silicio	Si	28	27.976927	92.2297%	
			31	30.975363	β^-, γ	157.3 min
15	Fósforo	P	31	30.973762	100%	
			32	31.973907	β^-	14.284 días

† Las masas en la columna (5) son las del átomo neutro, incluidos los Z electrones

‡ Capítulo 41; CE = captura de electrón.

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica	(6) % de abundancia (o modo de decaimiento radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
16	Azufre	S	32	31.972071	94.9%	
			35	34.969032	β^-	87.32 días
17	Cloro	Cl	35	34.968853	75.78%	
			37	36.965903	24.22%	
18	Argón	Ar	40	39.962383	99.600%	
19	Potasio	K	39	38.963707	93.258%	
			40	39.963998	0.0117%	
					β^-, CE, γ, β^+	1.265×10^9 años
20	Calcio	Ca	40	39.962591	96.94%	
21	Escandio	Sc	45	44.955912	100%	
22	Titanio	Ti	48	47.947946	73.72%	
23	Vanadio	V	51	50.943960	99.750%	
24	Cromo	Cr	52	51.940508	83.789%	
25	Manganeso	Mn	55	54.938045	100%	
26	Hierro	Fe	56	55.934938	91.75%	
27	Cobalto	Co	59	58.933195	100%	
			60	59.933817	β^-, γ	5.27110 años
28	Níquel	Ni	58	57.935343	68.077%	
			60	59.930786	26.223%	
29	Cobre	Cu	63	62.929598	69.17%	
			65	64.927790	30.83%	
30	Cinc	Zn	64	63.929142	48.6%	
			66	65.926033	27.9%	
31	Galio	Ga	69	68.925574	60.108%	
32	Germanio	Ge	72	71.922076	27.5%	
			74	73.921178	36.3%	
33	Arsénico	As	75	74.921596	100%	
34	Selenio	Se	80	79.916521	49.6%	
35	Bromo	Br	79	78.918337	50.69%	
36	Kriptón	Kr	84	83.911507	57.00%	
37	Rubidio	Rb	85	84.911790	72.17%	
38	Estroncio	Sr	86	85.909260	9.86%	
			88	87.905612	82.58%	
			90	89.907738	β^-	28.80 años
39	Itrio	Y	89	88.905848	100%	
40	Zirconio	Zr	90	89.904704	51.4%	
41	Niobio	Nb	93	92.906378	100%	
42	Molibdeno	Mo	98	97.905408	24.1%	
43	Tecnecio	Tc	98	97.907216	β^-, γ	4.2×10^6 años
44	Rutenio	Ru	102	101.904349	31.55%	
45	Rodio	Rh	103	102.905504	100%	
46	Paladio	Pd	106	105.903486	27.33%	
47	Plata	Ag	107	106.905097	51.839%	
			109	108.904752	48.161%	
48	Cadmio	Cd	114	113.903359	28.7%	
49	Indio	In	115	114.903878	95.71%; β^-	4.41×10^{14} años
50	Estaño	Sn	120	119.902195	32.58%	
51	Antimonio	Sb	121	120.903816	57.21%	

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica	(6) % de abundancia (o modo de decaimiento radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
52	Telurio	Te	130	129.906224	34.1%; $\beta^-\beta^-$	$>9.7 \times 10^{22}$ años
53	Yodo	I	127	126.904473	100%	
			131	130.906125	β^-, γ	8.0233 días
54	Xenón	Xe	132	131.904154	26.89%	
			136	135.907219	8.87%; $\beta^-\beta^-$	$> 8.5 \times 10^{21}$
55	Cesio	Cs	133	132.905452	100%	
56	Bario	Ba	137	136.905827	11.232%	
			138	137.905247	71.70%	
57	Lantano	La	139	138.906353	99.910%	
58	Cerio	Ce	140	139.905439	88.45%	
59	Praseodimio	Pr	141	140.907653	100%	
60	Neodimio	Nd	142	141.907723	27.2%	
61	Prometio	Pm	145	144.912749	CE, α	17.7 años
62	Samario	Sm	152	151.919732	26.75%	
63	Europio	Eu	153	152.921230	52.19%	
64	Gadolinio	Gd	158	157.924104	24.84%	
65	Terbio	Tb	159	158.925347	100%	
66	Disprosio	Dy	164	163.929175	28.2%	
67	Holmio	Ho	165	164.930322	100%	
68	Erbio	Er	166	165.930293	33.6%	
69	Tulio	Tm	169	168.934213	100%	
70	Iterbio	Yb	174	173.938862	31.8%	
71	Lutecio	Lu	175	174.940772	97.41%	
72	Hafnio	Hf	180	179.946550	35.08%	
73	Tántalo	Ta	181	180.947996	99.988%	
74	Tungsteno (wolframio)	W	184	183.950931	30.64%; α	$> 8.9 \times 10^{21}$
75	Renio	Re	187	186.955753	62.60%; β^-	4.35×10^{10} años
76	Osmio	Os	191	190.960930	β^-, γ	15.4 días
			192	191.961481	40.78%	
77	Iridio	Ir	191	190.960594	37.3%	
			193	192.962926	62.7%	
78	Platino	Pt	195	194.964791	33.832%	
79	Oro	Au	197	196.966569	100%	
80	Mercurio	Hg	199	198.968280	16.87%	
			202	201.970643	29.9%	
81	Talio	Tl	205	204.974428	70.476%	
82	Plomo	Pb	206	205.974465	24.1%	
			207	206.975897	22.1%	
			208	207.976652	52.4%	
			210	209.984188	β^-, γ, α	22.23 años
			211	210.988737	β^-, γ	36.1 min
			212	211.991898	β^-, γ	10.64 h
			214	213.999805	β^-, γ	26.8 min
83	Bismuto	Bi	209	208.980399	100%	
			211	210.987269	α, γ, β^-	2.14 min
84	Polonio	Po	210	209.982874	α, γ, CE	138.376 días
			214	213.995201	α, γ	162.3 μs
85	Astatino	At	218	218.008694	α, β^-	1.4 s

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica	(6) % de abundancia (o modo de decaimiento radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
86	Radón	Rn	222	222.017578	α, γ	3.8232 días
87	Francio	Fr	223	223.019736	β^-, γ, α	22.00 min
88	Radio	Ra	226	226.025410	α, γ	1600 años
89	Actinio	Ac	227	227.027752	β^-, γ, α	21.772 años
90	Torio	Th	228	228.028741	α, γ	698.60 días
			232	232.038055	100%; α, γ	1.405×10^{10} años
91	Protactinio	Pa	231	231.035884	α, γ	3.276×10^4 años
92	Uranio	U	232	232.037156	α, γ	68.9 años
			233	233.039635	α, γ	1.592×10^5 años
			235	235.043930	0.720%; α, γ	7.04×10^8 años
			236	236.045568	α, γ	2.342×10^7 años
			238	238.050788	99.274%; α, γ	4.468×10^9 años
			239	239.054293	β^-, γ	23.46 min
93	Neptunio	Np	237	237.048173	α, γ	2.144×10^6 años
			239	239.052939	β^-, γ	2.356 días
94	Plutonio	Pu	239	239.052163	α, γ	24,100 años
			244	244.064204	α	8.00×10^7 años
95	Americio	Am	243	243.061381	α, γ	7370 años
96	Curio	Cm	247	247.070354	α, γ	1.56×10^7 años
97	Berkelio	Bk	247	247.070307	α, γ	1380 años
98	Californio	Cf	251	251.079587	α, γ	898 años
99	Einsteinio	Es	252	252.082980	α, CE, γ	471.7 días
100	Fermio	Fm	257	257.095105	α, γ	100.5 días
101	Mendelevio	Md	258	258.098431	α, γ	51.5 días
102	Nobelio	No	259	259.10103	α,CE	58 min
103	Lawrencio	Lr	262	262.10963	α, CE, fisión	≈4 h
104	Rutherfordio	Rf	263	263.11255	fisión	10 min
105	Dubnio	Db	262	262.11408	α, fisión, CE	35 s
106	Seaborgio	Sg	266	266.12210	α, fisión	≈21 s
107	Bohrio	Bh	264	264.12460	α	≈0.44 s
108	Hasio	Hs	269	269.13406	α	≈10 s
109	Meitnerio	Mt	268	268.13870	α	21 ms
110	Darmstadtio	Ds	271	271.14606	α	≈70 ms
111	Roentgenio	Rg	272	272.15360	α	3.8 ms
112		Uub	277	277.16394	α	≈0.7 ms

Se ha reportado evidencia preliminar (sin confirmar) para los elementos 113, 114, 115, 116 y 118.

Respuestas a problemas con número impar

CAPÍTULO 21

1. 2.7×10^{-3} N.

3. 7200 N.

5. $(4.9 \times 10^{-14})\%$.

7. 4.88 cm.

9. -5.8×10^{8} C, 0.

11. *a)* $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}Q_T$;

b) $q_1 = 0, q_2 = Q_T$.

13. $F_1 = 0.53$ N a 265°,
$F_2 = 0.33$ N a 112°,
$F_3 = 0.26$ N a 53°.

15. $F = 2.96 \times 10^{7}$ N, alejándose del centro del cuadrado

17. 1.0×10^{12} electrones.

19. *a)* $\pi\sqrt{\dfrac{md^3}{kQq}}$;

b) 0.2 ps.

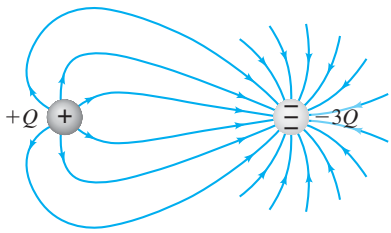
21. 3.08×10^{-16} N hacia el oeste.

23. 1.10×10^{7} N/C hacia arriba.

25. $(172\,\hat{\mathbf{j}})$ N/C.

27. 1.01×10^{14} m/s^2, es opuesta al campo.

29.



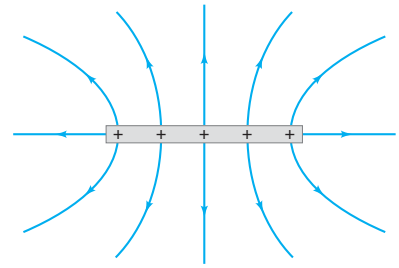
31. $(-4.7 \times 10^{11}\,\hat{\mathbf{i}})$ N/C
$-(1.6 \times 10^{11}\,\hat{\mathbf{j}})$ N/C;
o
5.0×10^{11} N/C a 199°.

33. $E = 2.60 \times 10^{4}$ N/C, alejándose del centro.

35. $\dfrac{4kQxa}{(x^2 - a^2)^2}$, a la izquierda

37. $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}}$, $\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$.

39.



41. $\frac{1}{4}$.

43. *a)* $\dfrac{Qy}{2\pi\varepsilon_0(y^2 + \ell^2)^{3/2}}$.

45. 1.8×10^{6} N/C, alejándose del alambre.

47. $\dfrac{8\lambda\ell z}{\pi\varepsilon_0(\ell^2 + 4z^2)\sqrt{4z^2 + 2\ell^2}}$, vertical.

49. $-\dfrac{2\lambda \operatorname{sen}\theta_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{\mathbf{i}}$.

51. *a)* $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x(x^2 + \ell^2)^{1/2}} \times (\ell\hat{\mathbf{i}} + [x - (x^2 + \ell^2)^{1/2}]\hat{\mathbf{j}})$.

53. $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x(x + \ell)}$.

55. $\dfrac{Q(x\hat{\mathbf{i}} - \frac{2a}{\pi}\hat{\mathbf{j}})}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + a^2)^{3/2}}$.

57. *a)* $(-3.5 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2)\,\hat{\mathbf{i}}$
$-(1.41 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2)\,\hat{\mathbf{j}}$;

b) 166° en sentido antihorario con respecto a la dirección inicial.

59. −23°.

61. *b)* $2\pi\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 mR^3}{qQ}}$.

63. *a)* 3.4×10^{-20} C;

b) no;

c) 8.5×10^{-26} m·N;

d) 2.5×10^{-26} J.

65. *a)* θ muy pequeño;

b) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{pE}{I}}$.

67. *a)* En la dirección del dipolo.

69. 3.5×10^{9} C.

71. 6.8×10^{5} C, negativo.

73. 1.0×10^{7} electrones.

75. 5.71×10^{13} C.

77. 1.6 m desde Q_2, 3.6 m desde Q_1.

79. $\dfrac{1.08 \times 10^{7}}{[3.00 - \cos(13.9t)]^2}$ N/C (hacia arriba).

81. 5×10^{-9} C.

83. 8.0×10^{-9} C.

85. 18°.

87. $E_A = 3.4 \times 10^{4}$ N/C, a la derecha;
$E_B = 2.3 \times 10^{4}$ N/C, a la izquierda;
$E_C = 5.6 \times 10^{3}$ N/C, a la derecha:
$E_D = 3.4 \times 10^{3}$ N/C, a la izquierda.

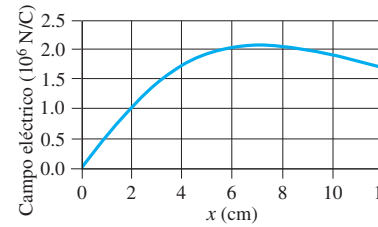
89. -7.66×10^{-6} C, inestable.

91. *a)* 9.18×10^{6} N/C, hacia abajo;

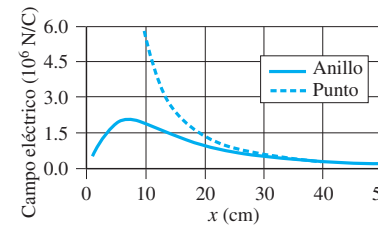
b) 1.63×10^{-4} C/m^2.

93. *a)* $\dfrac{a}{\sqrt{2}} = 7.07$ cm;

b) sí;



c) y *d)*



e) 37 cm.

CAPÍTULO 22

1. *a)* 31 N·m^2/C;

b) 22 N·m^2/C;

c) 0.

3. *a)* 0;

b) 0, 0, 0, 0, $E_0\ell^2$, $-E_0\ell^2$.

5. 1.63×10^{-8} C.

7. *a)* -1.1×10^{5} N·m^2/C;

b) 0.

9. -8.3×10^{-7} C.

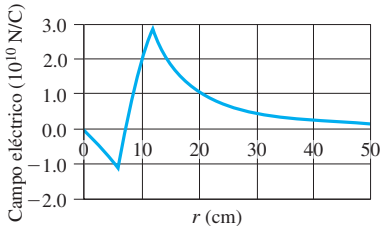
11. 4.3×10^{-5} C/m.

13. -8.52×10^{-11} C.

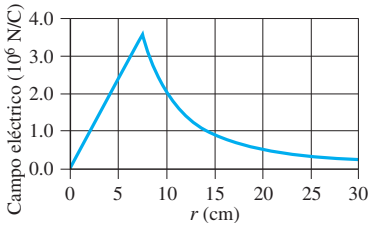
15. *a)* -2.6×10^{4} N/C (hacia el alambre);

b) -8.6×10^{4} N/C (hacia el alambre).

17. *a*) $-(1.9 \times 10^{11}\ \text{N/C}\cdot\text{m})r$;
b) $-(1.1 \times 10^{8}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C})/r^2 + (3.0 \times 10^{11}\ \text{N/C}\cdot\text{m})r$;
c) $(4.1 \times 10^{8}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C})/r^2$;
d) sí.



19.



21. *a*) 5.5×10^{7} N/C (hacia afuera);
b) 0;
c) 5.5×10^{5} N/C (hacia afuera).

23. *a*) $-8.00\ \mu$C;
b) $+1.90\ \mu$C.

25. *a*) 0;
b) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (hacia afuera, si ambas placas son positivas);
c) igual

27. *a*) 0;
b) $\dfrac{r_1^2\sigma_1}{\varepsilon_0 r^2}$;
c) $\dfrac{(r_1^2\sigma_1 + r_2^2\sigma_2)}{\varepsilon_0 r^2}$;
d) $\sigma_1 = -\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2\sigma_2$;
e) $\sigma_1 = 0$, o colocar $Q = -4\pi\sigma_1 r_1^2$ dentro de r_1.

29. *a*) 0;
b) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_0^3 - r_1^3}\right)\left(\dfrac{r^3 - r_1^3}{r^2}\right)$;
c) $\dfrac{kQ}{r^2}$.

31. *a*) $-q$;
b) $Q + q$;
c) $\dfrac{kq}{r^2}$;
d) 0;
e) $\dfrac{k(q+Q)}{r^2}$.

33. *a*) $\dfrac{\sigma R_0}{\varepsilon_0 R}$, radialmente hacia afuera;
b) 0;
c) igual para $R > R_0$ si $\lambda = 2\pi R_0\sigma$.

35. *a*) 0;
b) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{(Q/\ell)}{r}$;
c) 0;
d) $\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q}{\ell}\right)$.

37. *a*) 1.9×10^{7} m/s;
b) 5.5×10^{5} m/s.

39. *a*) $\dfrac{\rho_E r}{3\varepsilon_0}$;
b) $\dfrac{\rho_E r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}$;
c) 0;
d) $\left(\dfrac{\rho_E r_0^3}{3\varepsilon_0} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\dfrac{1}{r^2}$.

41. *a*) 0;
b) $\dfrac{Q}{2500\pi\varepsilon_0 R_0^2}$.

43. *a*) $\dfrac{\rho_E d}{2\varepsilon_0}$ alejándose de la superficie.

45. *a*) 13 N (de atracción);
b) 0.064 J.

47. *a*) 0;
b) $-\dfrac{\rho_0(d-x)}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}$;
c) $-\dfrac{\rho_0(d+x)}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}$.

49. $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{r_0^4}$, radialmente hacia afuera.

51. $\Phi = \oint\vec{\mathbf{g}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = -4\pi GM_{\text{enc}}$.

53. $a\ell^3\varepsilon_0$.

55. 475 N·m²/C, 475 N·m²/C.

57. *a*) 0;
b) $E_{\text{máx}} = \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0 r_0^2}$, $E_{\text{mín}} = \dfrac{Q}{25\pi\varepsilon_0 r_0^2}$;
c) no;
d) no.

59. *a*) 1.1×10^{-19} C;
b) 3.5×10^{11} N/C.

61. *a*) $\dfrac{\rho_E r_0}{6\varepsilon_0}$, a la derecha;
b) $\dfrac{17}{54}\dfrac{\rho_E r_0}{\varepsilon_0}$, a la izquierda.

63. *a*) 0;
b) 5.65×10^{5} N/C, a la derecha;
c) 5.65×10^{5} N/C, a la derecha;
d) -5.00×10^{-6} C/m³;
e) $+5.00 \times 10^{-6}$ C/m³.

65. *a*) Sobre la superficie interior del cascarón.
b) $r < 0.10$ m, $E = \left(\dfrac{2.7 \times 10^{4}}{r^2}\right)$ N/C;
$r > 0.10$ m, $E = 0$.

67. $-46\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$, -4.0×10^{-10} C.

CAPÍTULO 23

1. –0.71 V.

3. 3280 V, la placa B tiene un mayor potencial.

5. 30 m.

7. 1.4 μC.

9. 1.2 cm, 46 nC.

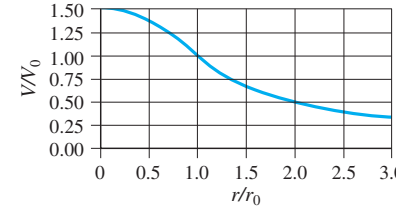
11. *a*) 0;
b) −29.4 V;
c) −29.4 V.

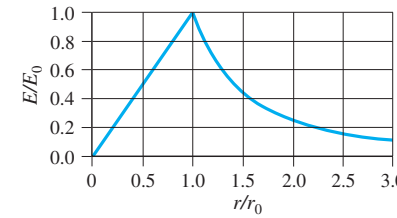
13. *a*) -9.6×10^{8} V;
b) 9.6×10^{8} V.

15. *a*) Son iguales;
b) $Q\left(\dfrac{r_2}{r_1 + r_2}\right)$.

17. *a*) 10–20 kV;
b) 30 μC/m².

19. *a*) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$;
b) $\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_0}\left(3 - \dfrac{r^2}{r_0^2}\right)$;
c) Sea $V_0 = V$ a $r = r_0$, y $E_0 = E$ a $r = r_0$:





21. $\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_0^2}{4} - \dfrac{r^2}{6} + \dfrac{r^4}{20r_0^2}\right)$.

23. *a*) $\dfrac{R_0\sigma}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{R_0}{R}\right) + V_0$;
b) V_0;
c) no, del inciso *a*) $V \to -\infty$ debido a la longitud del alambre.

25. *a*) 29 V;
b) -4.6×10^{-18} J.

27. 0.34 J.

29. 4.2 MV.

31. 9.64×10^5 m/s.

33. *a*) 0;

b) $E_x = 0$,

$E_y = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$, parece un dipolo.

35. $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R_2^2+x^2}-\sqrt{R_1^2+x^2}\right)$.

37. 29 m/s.

39. $\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\ell}\ln\left(\dfrac{x+\ell}{x-\ell}\right)$.

41. $\dfrac{a}{6\varepsilon_0}(R^2-2x^2)\sqrt{R^2+x^2}+\dfrac{a|x|^3}{3\varepsilon_0}$.

43. 2 mm.

45. *a*) 2.6 mV;

b) 1.8 mV;

c) −1.8 mV.

49. -7.1×10^{-11} C/m^2 sobre la placa $x = 0$. 7.1×10^{-11} C/m^2 sobre otra placa.

51. $(-2.5y + 3.5yz)\hat{\mathbf{i}} + (-2y - 2.5x + 3.5xz)\hat{\mathbf{j}} + (3.5xy)\hat{\mathbf{k}}$.

53. *a*) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{y\sqrt{\ell^2+y^2}}\right)\hat{\mathbf{j}}$;

b) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x^2-\ell^2}\right)\hat{\mathbf{i}}$.

55. −62.5 kV.

57. 1.3 eV.

59. *a*) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_1Q_2}{r_{12}}+\dfrac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\dfrac{Q_1Q_4}{r_{14}}+\dfrac{Q_2Q_3}{r_{23}}+\dfrac{Q_2Q_4}{r_{24}}+\dfrac{Q_3Q_4}{r_{34}}\right)$;

b) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_1Q_2}{r_{12}}+\dfrac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\dfrac{Q_1Q_4}{r_{14}}+\dfrac{Q_1Q_5}{r_{15}}+\dfrac{Q_2Q_3}{r_{23}}+\dfrac{Q_2Q_4}{r_{24}}+\dfrac{Q_2Q_5}{r_{25}}+\dfrac{Q_3Q_4}{r_{34}}+\dfrac{Q_3Q_5}{r_{35}}+\dfrac{Q_4Q_5}{r_{45}}\right)$.

61. *a*) 1.33 keV;

b) $v_e/v_p = 42.8$.

63. 250 MeV, igual orden de magnitud que los valores observados.

65. 1.11×10^5 m/s, 3.5×10^5 m/s.

67. 0.26 MV/m.

69. 600 V.

71. 1.5 J.

73. Sí, 2.0 pV.

75. 1.03×10^6 m/s.

77. $-\dfrac{\sqrt{3}Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}, \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0\ell}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}-2\right), -\dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0\ell}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

79. *a*) 1.2 MV;

b) 1.8 kg.

81. *a*) $\dfrac{\rho_E(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r}$;

b) $\dfrac{\rho_E}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_2^2}{2}-\dfrac{r^2}{6}-\dfrac{r_1^3}{3r}\right)$;

c) $\dfrac{\rho_E}{2\varepsilon_0}(r_2^2-r_1^2)$; sí.

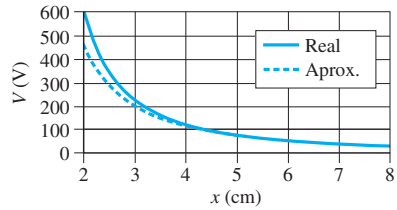
83. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$, radialmente hacia afuera.

85. *a*) 23 kV;

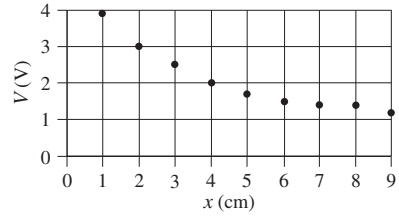
b) $\dfrac{4Bx\hat{\mathbf{i}}}{(x^2+R^2)^3}$;

c) $(2.3 \times 10^5\ \text{N/C})\hat{\mathbf{i}}$.

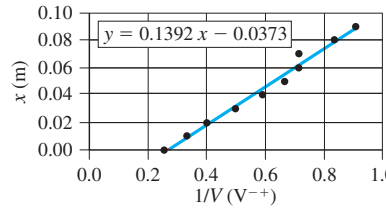
87. *a*) y *b*)



89. *a*) Carga puntual;



b) 1.5×10^{-11} C;



c) $x = -3.7$ cm.

CAPÍTULO 24

1. 3.0 μF.

3. 3.1 pF.

5. 56 μF.

7. 1.1 C.

9. 83 días.

11. 130 m^2.

13. 7.10×10^{-4} F.

15. 18 nC.

17. 5.8×10^4 V/m.

19. *a*) $0.22\ \mu\text{m} \le x \le 220\ \mu\text{m}$;

b) $\dfrac{x^2\,\Delta C}{\varepsilon_0 A}$;

c) 0.01%, 10%.

21. 3600 pF, sí.

23. 1.5 μF en serie con la combinación en paralelo de 2.0 μF y 3.0 μF, 2.8 V.

25. Sume 11 μF conectados en paralelo.

27. $C_{\text{máx}} = 1.94 \times 10^{-8}$ F, todos en paralelo, $C_{\text{mín}} = 1.8 \times 10^{-9}$ F, todos en serie.

29. *a*) $\frac{3}{5}C$;

b) $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{5}CV$, $Q_3 = \frac{2}{5}CV$, $Q_4 = \frac{3}{5}CV$, $V_1 = V_2 = \frac{1}{5}V$, $V_3 = \frac{2}{5}V$, $V_4 = \frac{3}{5}V$.

31. $Q_1 = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}V_0$, $Q_2 = \dfrac{C_2^2}{C_1+C_2}V_0$.

33. *a*) $Q_1 = 23\ \mu\text{C}$, $Q_2 = Q_4 = 46\ \mu\text{C}$;

b) $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 2.9$ V;

c) 5.8 V.

35. 2.4 μF.

37. *a*) $C_1 + \dfrac{C_2C_3}{C_2+C_3}$;

b) $Q_1 = 8.40 \times 10^{-4}$ C, $Q_2 = Q_3 = 2.80 \times 10^{-4}$ C.

39. $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}\left(1-\dfrac{\theta\sqrt{A}}{2d}\right)$.

41. 6.8×10^{-3} J.

43. 2.0×10^3 J.

45. 1.70×10^{-3} J.

47. *a*) $\dfrac{U_f}{U_i} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3R_a}{R_b}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_a}{R_b}\right)} > 1$, trabajo realizado para agrandar el cilindro;

b) $\dfrac{U_f}{U_i} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{R_a}{R_b}\right)}{\ln\left(\dfrac{3R_a}{R_b}\right)} < 1$, carga movida a batería.

49. *a*) $-\dfrac{\varepsilon_0 A\ell V_0^2}{2d(d-\ell)}$;

b) $\dfrac{\varepsilon_0 A\ell V_0^2}{2(d-\ell)^2}$.

53. 2200 baterías, no

55. 1.1×10^{-4} J.

57. *a*) $0.32\ \mu m^2$;

b) 59 megabytes.

59. $\dfrac{\varepsilon_0 A}{2d}(K_1 + K_2)$.

61. $\dfrac{\varepsilon_0 A K_1 K_2}{(d_1 K_2 + d_2 K_1)}$.

63. *a*) $\dfrac{\varepsilon_0 \ell^2}{d}\left[1 + (K-1)\dfrac{x}{\ell}\right]$;

b) $\dfrac{V_0^2 \varepsilon_0 \ell^2}{2d}\left[1 + (K-1)\dfrac{x}{\ell}\right]$;

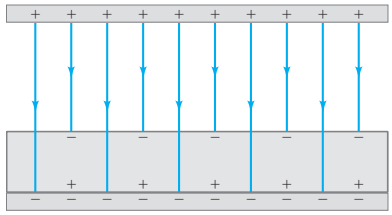
c) $\dfrac{V_0^2 \varepsilon_0 \ell}{2d}(K-1)$, a la izquierda

67. $\dfrac{\varepsilon_0 A}{d - \ell + \dfrac{\ell}{K}}$.

69. $E_{\text{aire}} = 2.69 \times 10^4$ V/m,

$E_{\text{vidrio}} = 4.64 \times 10^3$ V/m,

$Q_{\text{libre}} = 0.345\ \mu$C, $Q_{\text{ind}} = 0.286\ \mu$C.



71. 43 μF.

73. 15 V.

75. 840 V.

77. 3.76×10^{-9} F, 0.221 m^2.

79. $\dfrac{1}{2K}$, trabajo realizado por el campo eléctrico, $\dfrac{1}{K}$.

81. 1.2.

83. *a*) 25 J;

b) 940 kW.

85. *a*) Paralelo;

b) 7.7 pF a 35 pF.

87. 5.15 pF.

89. $Q_1 = 11\ \mu$C, $Q_2 = 13\ \mu$C,

$Q_3 = 13\ \mu$C, $V_1 = 11$ V,

$V_2 = 6.3$ V, $V_3 = 5.2$ V.

91. $\dfrac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 A}$.

93. 9×10^{-16} m, no.

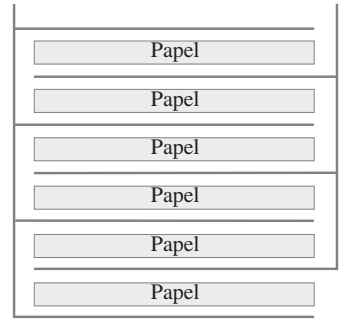
95. *a*) 0.27 μC, 15 kV/m, 5.9 nF, 6.0 μJ;

b) 0.85 μC, 15 kV/m, 19 nF, 19 μJ.

97. *a*) 32 nF;

b) 14 μC;

c) 7.0 mm;



d) 450 V.

CAPÍTULO 25

1. 8.13×10^{18} electrones/s.

3. 5.5×10^{-11} A.

5. *a*) 28 A;

b) 8.4×10^4 C.

7. 1.1×10^{21} electrones/min.

9. *a*) $2.0 \times 10^1\ \Omega$;

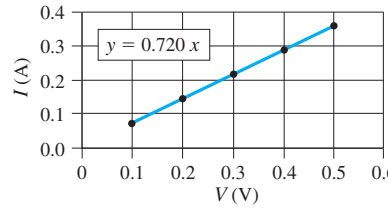
b) 430 J.

11. 0.47 mm.

13. 0.64.

15. *a*) Pendiente $= 1/R$, ordenada al origen $= 0$;

b) sí, $R = 1.39\ \Omega$;



c) $1.0 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot$m, nicromo.

17. A 1/5.0 de su longitud, 2.0 Ω, 8.0 Ω.

19. 2400°C.

21. $\sqrt{2}$.

23. 44.1°C.

25. Un cuarto del original.

27. $\dfrac{1}{4\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$.

29. *a*) 0.14 Ω;

b) 0.60 A;

c) $V_{\text{Al}} = 52$ mV, $V_{\text{Cu}} = 33$ mV.

31. 0.81 W.

33. 29 V.

35. *b*) Tan grande como sea posible.

37. *a*) 0.83 A;

b) 140 Ω.

39. 0.055 kWh, 7.9 centavos/mes.

41. 0.90 kWh $= 3.2 \times 10^6$ J.

43. 24 bombillas.

45. 11 kW.

47. 0.15 kg/s $= 150$ mL/s.

49. 0.12 A.

51. *a*) ∞;

b) 96 Ω.

53. *a*) 930 V;

b) 3.9 A.

55. *a*) 1.3 kW;

b) máx $= 2.6$ kW, mín $= 0$.

57. *a*) 5.1×10^{-10} m/s;

b) 6.9 A/m^2;

c) 1.2×10^{-7} V/m.

59. 2.5 A/m^2, hacia el norte.

61. 35 m/s, tiempo de retraso del estímulo a la acción.

63. 11 horas.

65. 1.8 m, generaría 540 W de calor y podría iniciar un incendio.

67. 0.16 S.

69. *a*) \$35/mes;

b) 1300 kg/año.

71. *a*) −19% de cambio;

b) el cambio porcentual sería ligeramente menor.

73. *a*) 190 Ω;

b) 15 Ω.

75. *a*) 1500 W;

b) 12 A.

77. 2:1.

79. *a*) 21 Ω;

b) 2.0×10^1 s.

c) 0.17 centavos.

81. 36.0 m, 0.248 mm.

83. *a*) 1200 W;

b) 100 W.

85. 1.4×10^{12} protones.

87. *a*) 3.1 kW;

b) 24 W;

c) 15 W;

d) 38 centavos/mes.

89. *a*) \$55/kWh;

b) \$280/kWh, las pilas D y AA son, respectivamente, 550× y 2800× más caras.

91. $1.34 \times 10^{-4}\ \Omega$.

93. $\dfrac{4\ell\rho}{ab\pi}$.

95. $f = 1 - \dfrac{V}{V_0}$.

CAPÍTULO 26

1. *a*) 5.93 V;
b) 5.99 V.

3. 0.060 Ω.

5. 9.3 V.

7. *a*) 2.60 kΩ;
b) 270 Ω.

9. Conecte nueve resistores de 1.0 Ω en serie con la batería; luego conecte el circuito de voltaje de salida a través de cuatro resistores consecutivos.

11. 0.3 Ω.

13. 450 Ω, 0.024.

15. Suelde un resistor de 1.6 kΩ en paralelo con el resistor de 480 Ω.

17. 120 Ω.

19. $\frac{13}{8}R$.

21. $R = r$.

23. *a*) $V_{\text{izquierda}}$ disminuye,
V_{medio} aumenta,
$V_{\text{derecha}} = 0$;
b) $I_{\text{izquierda}}$ disminuye,
I_{media} aumenta,
$I_{\text{derecha}} = 0$;
c) voltaje terminal aumenta;
d) 8.5 V;
e) 8.6 V.

25. *a*) V_1 y V_2 aumentan, V_3 y V_4 disminuyen;
b) I_1 e I_2 aumentan, I_3 e I_4 disminuyen;
c) aumenta;
d) antes: $I_1 = 117$ mA, $I_2 = 0$, $I_3 = I_4 = 59$ mA;
después: $I_1 = 132$ mA, $I_2 = I_3 = I_4 = 44$ mA, sí.

27. 0.38 A.

29. 0.

31. *a*) 29 V;
b) 43 V, 73 V.

33. $I_1 = 0.68$ A a la izquierda, $I_2 = 0.33$ A a la izquierda.

37. 0.70 A.

39. 0.17 A.

41. *a*) $\dfrac{R(5R' + 3R)}{8(R' + R)}$;
b) $\dfrac{R}{2}$.

43. 1 – 15 MΩ.

45. 5.0 ms.

47. 44 s.

49. *a*) $I_1 = \dfrac{2\mathscr{E}}{3R}$, $I_2 = I_3 = \dfrac{\mathscr{E}}{3R}$;
b) $I_1 = I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{2R}$, $I_3 = 0$;
c) $\dfrac{\mathscr{E}}{2}$.

51. *a*) 8.0 V;
b) 14 V;
c) 8.0 V;
d) 4.8 μC.

53. 29 μA.

55. *a*) Coloque en paralelo con resistor en derivación de 0.22 mΩ;
b) coloque en serie con resistor de 45 kΩ.

57. 100 kΩ.

59. $V_{44} = 24$ V, $V_{27} = 15$ V; −15%, −15%.

61. 0.960 mA, 4.8 V.

63. 12 V.

65. Conecte un resistor de 9.0 kΩ en serie con cuerpo humano y batería.

67. 2.5 V, 117 V.

69. 92 kΩ.

71. *a*) $\dfrac{R_2R_3}{R_1}$;
b) 121 Ω.

73. El voltaje en terminales de pila de mercurio (3.99 V) está más cerca de 4.0 V que el voltaje en terminales de pila seca (3.84 V).

75. 150 pilas, 0.54 m^2, conecte en serie; conecte cuatro de tales conjuntos en paralelo con 600 pilas en total y obtenga 120 V.

77. Corriente en sentido antihorario: −24 V, corriente en sentido horario: +48 V.

79. 10.7 V.

83. 9.0 Ω.

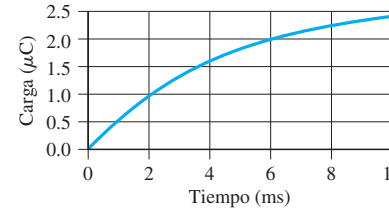
85. *b*) 1.39 V;
c) 0.42 mV;
d) no se necesita corriente de la batería "operativa" para "impulsar" el galvanómetro.

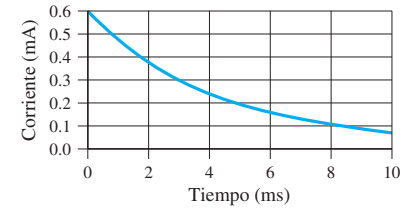
87. 1.0 mV, 2.0 mV, 4.0 mV, 10.0 mV.

89. *a*) 6.8 V, 15 μC;
b) 48 μs.

91. 200 MΩ.

93. 4.5 ms.





CAPÍTULO 27

1. *a*) 8.5 N/m;
b) 4.9 N/m.

3. 2.6×10^{-4} N.

5. *a*) Polo sur;
b) 3.41 A;
c) 7.39×10^{-2} N.

7. 2.13 N, 41.8° debajo del eje *y* negativo

9. $(-2IrB_0 \operatorname{sen}\theta_0)\hat{\mathbf{j}}$.

13. 6.3×10^{-14} N, norte.

15. 1.8 T.

17. *a*) hacia abajo;
b) hacia la página;
c) hacia la derecha.

19. *a*) 0.031 m;
b) 3.8×10^{-7} s.

23. 1.8 m.

25. $(0.78\hat{\mathbf{i}} - 1.0\hat{\mathbf{j}} + 0.1\hat{\mathbf{k}}) \times 10^{-15}$ N.

27. $L_{\text{final}} = \frac{1}{2}L_{\text{inicial}}$.

29. *a*) Negativa;
b) $qB_0\left(\dfrac{\ell^2 + d^2}{2d}\right)$.

31. 1.3×10^8 m/s, sí.

33. *a*) 45°;
b) 2.3×10^{-3} m.

35. *a*) $2NIAB$;
b) 0.

37. *a*) 4.85×10^{-5} m·N;
b) el norte.

39. *a*) $(-4.3\,\hat{\mathbf{k}})$ A·m^2;
b) $(2.6\hat{\mathbf{i}} - 2.4\hat{\mathbf{j}})$ m·N;
c) −2.8 J.

41. 12%.

43. 39 μA.

45. 6 electrones.

47. *b*) 0.05 nm, aproximadamente $\frac{1}{6}$ el tamaño de un átomo metálico común;
c) 10 mV.

49. 0.820 T.

51. 70 u, 72 u, 73 u y 74 u.

53. 1.5 mm, 1.5 mm, 0.77 mm, 0.77 mm.

55. ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

57. 2.4 T, hacia arriba

59. *a*) $\dfrac{IBd}{m}t$;
b) $\left(\dfrac{IBd}{m} - \mu_k g\right)t$;
c) hacia el este.

61. 1.1×10^{-6} m/s, hacia el oeste.

63. $3.8 \times 10^{-4}\ \mathrm{m \cdot N}$.

65. $\pi\left[\dfrac{mb(3a+b)}{3NIBa(a+b)}\right]^{1/2}$.

67. No entran al segundo tubo, 12°.

69. 1.1 A, hacia abajo.

71. 7.3×10^{-3} T.

73. -6.9×10^{-20} J.

75. 0.083 N, al norte y 68° arriba de la horizontal.

77. *a*) Hacia abajo;
b) 28 mT;
c) 0.12 T.

CAPÍTULO 28

1. 0.37 mT, 7.4 veces mayor.

3. 0.15 N, hacia otro alambre.

7. 0.12 mT, 82° arriba directamente a la derecha.

9. 3.8×10^{-5} T, 17° bajo la horizontal al norte.

11. *a*) $(2.0 \times 10^{-5})(25 - I)$ T;
b) $(2.0 \times 10^{-5})(25 + I)$ T.

15. Alambre más cercano: 0.050 N/m, de atracción; alambre más alejado: 0.025 N/m, de repulsión.

17. 17 A, hacia abajo.

19. $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{d-2x}{x(d-x)}\right)\hat{\mathbf{j}}$.

21. 46.6 μT.

23. *b*) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}$, sí, parece B desde un alambre recto y largo.

25. 0.160 A.

27. *a*) 5.3 mT;
b) 3.2 mT;
c) 1.8 mT.

29. *a*) 0.554 m;
b) 10.5 mT.

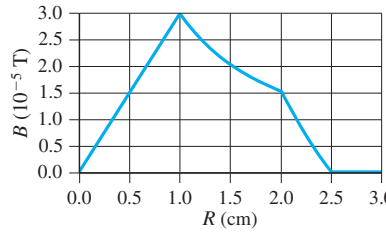
31. *a*) $\dfrac{\mu_0 I_0 R}{2\pi R_1^2}$;

b) $\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi R}$;

c) $\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi R}\left(\dfrac{R_3^2 - R^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$;

d) 0;

e)



33. 3.6×10^{-6} T.

35. $0.075\,\mu_0 I/R$.

37. *a*) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$, hacia la página;

b) $\dfrac{\pi I(R_1^2 + R_2^2)}{2}$, hacia la página.

39. *a*) $\dfrac{Q\omega R^2}{4}\hat{\mathbf{i}}$;

b) $\dfrac{\mu_0 Q\omega}{2\pi R^2}\left(\dfrac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 2x\right)\hat{\mathbf{i}}$;

c) sí.

41. *b*) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi y}\left(\dfrac{d}{\sqrt{d^2 + y^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$.

43. *a*) $\dfrac{n\mu_0 I \tan(\pi/n)}{2\pi R}$, hacia la página.

45. $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy} + \dfrac{\sqrt{y^2+(b-x)^2}}{(b-x)y} + \dfrac{\sqrt{(a-y)^2+(b-x)^2}}{(a-y)(b-x)} + \dfrac{\sqrt{(a-y)^2+x^2}}{x(a-y)}\right]$, hacia afuera de la página.

47. *a*) $16\ \mathrm{A \cdot m^2}$;
b) $13\ \mathrm{m \cdot N}$.

49. 2.4 T.

51. $(\vec{\mathbf{F}}/\ell)_M = 6.3 \times 10^{-4}$ N/m a 90°,
$(\vec{\mathbf{F}}/\ell)_N = 3.7 \times 10^{-4}$ N/m a 300°,
$(\vec{\mathbf{F}}/\ell)_P = 3.7 \times 10^{-4}$ N/m a 240°.

53. 170 A.

55. *a*) 2.7×10^{-6} T;
b) 5.3×10^{-6} T;
c) no, ningún tipo de relación con la tercera ley de Newton;
d) ambos 1.1×10^{-5} N/m, sí, se cumple la tercera ley de Newton.

57. $\dfrac{\mu_0 tj}{2}$, a la izquierda arriba de la hoja (con corriente que va hacia usted).

61. *a*) $\dfrac{N\mu_0 IR^2}{2} \times \left(\dfrac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{(R^2+(x-R)^2)^{3/2}}\right)$;

b) 4.5 mT.

63. 3×10^9 A.

65. *a*) 46 vueltas;
b) 0.83 mT;
c) no.

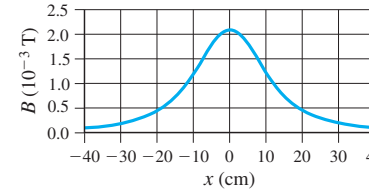
67. $\dfrac{\mu_0 I\sqrt{5}}{2\pi a}$, hacia la página.

69. 0.10 N, al sur.

71. $\frac{2}{3}$.

73. *c*) 1.5 A.

75.



CAPÍTULO 29

1. −460 V.

3. En sentido antihorario.

5. 1.2 mm/s.

7. *a*) 0.010 Wb;
b) 55°;
c) 5.8 mWb.

9. En sentido antihorario.

11. *a*) En sentido horario;
b) 43 mV;
c) 17 mA.

13. *a*) 8.1 mJ;
b) 4.2×10^{-3} C°.

15. *a*) 0.15 A;
b) 1.4 mW.

17. 8.81 C.

19. 21 μJ.

21. 23 mV, 26 mV.

23. *a*) 0;
b) 0.99 A, en sentido antihorario.

25. *a*) $\dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)$;

b) $\dfrac{\mu_0 Ia^2v}{2\pi b(a+b)}$;

c) en sentido horario;

d) $\dfrac{\mu_0^2 I^2 a^4 v}{4\pi^2 b^2 (a+b)^2 R}$.

27. 1.0 m/s.

29. *a*) 0.11 V;

b) 4.1 mA;

c) 0.36 mN.

31. 0.39 m/s.

33. *a*) Sí;

b) $v_0\, e^{-B^2\ell^2 t/mR}$.

35. *a*) $\dfrac{v\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)$;

b) $-\dfrac{v\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)$.

37. 57.2 espiras.

41. 150 V.

43. 13 A.

45. *a*) 2.4 kV;

b) 190 V.

47. 50, 4.8 V.

49. *a*) De subida;

b) 3.5.

51. *a*) R;

b) $\left(\dfrac{N_P}{N_S}\right)^2 R$.

53. 98 kW.

55. *b*) En sentido horario;

c) aumenta.

57. *a*) $\dfrac{IR}{\ell}$;

b) $\dfrac{\mathscr{E}_0}{\ell}\, e^{-B^2\ell^2 t/mR}$.

59. 10.1 mJ.

61. 0.6 nC.

63. *a*) 41 kV;

b) 31 MW;

c) 0.88 MW;

d) 3.0×10^7 W.

65. *a*) De bajada;

b) 2.9 A;

c) 0.29 A;

d) 4.1 Ω.

67. 46 mA, de izquierda a derecha a través del resistor.

69. 2.3×10^{17} electrones.

71. *a*) 25 A;

b) 98 V;

c) 600 W;

d) 81%.

73. $\frac{1}{2}B\omega\ell^2$.

77. $B\omega R$, radialmente hacia el eje.

79. *a*) $\dfrac{\pi d^2 B^2 \ell v}{16\rho}$;

b) $16\rho\rho_m g/B^2$;

c) 3.7 cm/s.

CAPÍTULO 30

1. *a*) 31.0 mH;

b) 3.79 V.

3. $\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 A_2 \operatorname{sen}\theta}{\ell}$.

5. 12 V.

7. 0.566 H.

9. 11.3 V.

11. 46 m, 21 km, 0.70 kΩ.

15. 18.9 J.

17. 1.06×10^{-3} J/m^3.

19. $\dfrac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}, \dfrac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$.

21. $\dfrac{\mu_0 I^2}{16\pi}$.

23. 3.5 constantes de tiempo.

25. *a*) $\dfrac{LV_0^2}{2R^2}(1-e^{-t/\tau})^2$;

b) 7.6 constantes de tiempo.

27. *b*) 6600 V.

29. $(12\text{ V})e^{-t/8.2\,\mu s}$, 0, 12 V.

31. *a*) 0.16 nF;

b) 62 μH.

33. *c*) $(2 \times 10^{-4})\%$.

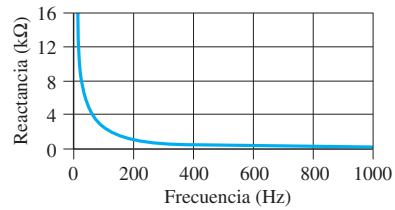
35. *a*) $\dfrac{Q_0}{\sqrt{2}}$;

b) $\frac{1}{8}T$.

37. $\dfrac{L}{R}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = (0.29)\dfrac{L}{R}$.

39. 3300 Hz.

41.



43. *a*) $R + R'$;

b) R'.

45. *a*) 2800 Ω;

b) 660 Hz, 11 A.

47. 2190 W.

49. *a*) 0.40 kΩ;

b) 75 Ω.

51. 1600 Hz.

53. 240 Hz, voltajes fuera de fase.

55. *a*) 0.124 A;

b) 5.02°;

c) 14.8 W;

d) 0.120 kV, 10.5 V.

57. 7.8 μF.

59. $I_0 V_0 \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$.

61. 130 Ω, 0.91.

63. 265 Hz, 324 W.

65. *b*) 130 Ω.

67. *a*) $\dfrac{V_0^2 R}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2\right]}$;

b) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$;

c) $\dfrac{R}{L}$.

69. 37 espiras.

71. *a*) 0.040 H;

b) 28 mA;

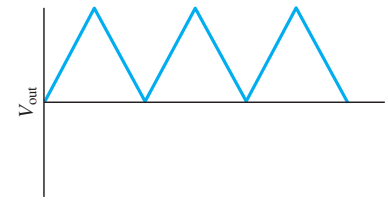
c) 16 μJ.

73. 2.4 mA, 0, 2.4 mA.

77. *a*) $\dfrac{Q_0^2}{2C}e^{-Rt/L}$;

b) $\dfrac{dU}{dt} = -I^2 R$.

79.



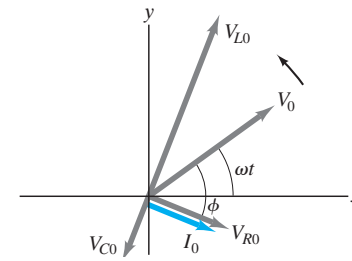
81. *a*) 0;

b) 0, 90° fuera de fase.

83. 2.2 kHz.

85. 69 mH, 18 Ω.

89. *a*)



b) $\dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\operatorname{sen}(\omega t-\phi)$,

$\phi = \tan^{-1}\dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$.

91. *a*) $\left(\dfrac{V_{20}}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \frac{1}{2}\pi)$;

b) $\left(\dfrac{V_{20}}{\omega^2 LC - 1}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \pi)$;

c) $\dfrac{1}{\omega^2 LC}$;

d) $V_{1\,\text{afuera}} = V_1$.

93. *a*) $\dfrac{V_0}{R}\operatorname{sen}\omega t$;

b) $\dfrac{V_0}{X_L}\operatorname{sen}(\omega t - \frac{1}{2}\pi)$;

c) $\dfrac{V_0}{X_C}\operatorname{sen}(\omega t + \frac{1}{2}\pi)$

d) $\dfrac{V_0}{R}\sqrt{1+\left(R\omega C - \dfrac{R}{\omega L}\right)^2}\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$,

$\phi = \tan^{-1}\left(R\omega C - \dfrac{R}{\omega L}\right)$;

e) $\dfrac{R}{\sqrt{1 + \left(R\omega C - \dfrac{R}{\omega L}\right)^2}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(R\omega C - \dfrac{R}{\omega L}\right)^2}}$.

95. 0.14 H.

97. 54 mH, 22 Ω.

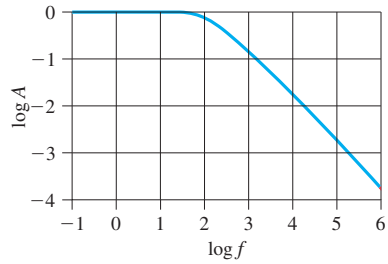
99. $\sqrt{6.0}\, f_0 = 2.4 f_0$.

101. *a*) 7.1 kHz, V_{rms};

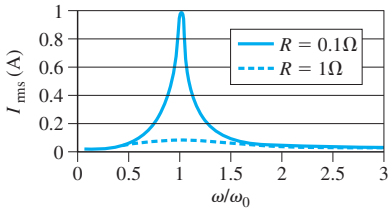
b) 0.90.

103. *b*) Para $f \to 0$ $A \to 1$;
para $f \to \infty$, $A \to 0$;

c) f es en s^{-1}:



105.



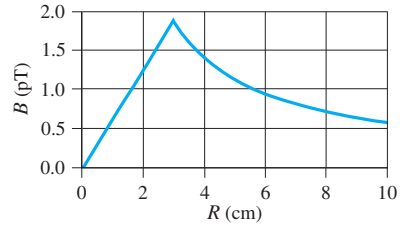
CAPÍTULO 31

1. 110 kV/m·s.

3. 1.2×10^{15} V/m·s.

7. *b*) Con R en metros, para $R \le R_0$,
$B_0 = (6.3 \times 10^{-11}\ \text{T/m})R$;
para $R > R_0$, $B_0 = \dfrac{5.7 \times 10^{-14}\ \text{T}\cdot\text{m}}{R}$.

c)



9. 3.75 V/m.

11. *a*) $-\hat{\mathbf{k}}$;

b) $\dfrac{E_0}{c}$, $-\hat{\mathbf{j}}$.

13. 2.00×10^{10} Hz.

15. 5.00×10^2 s = 8.33 min.

17. *a*) 3.00×10^5 m;

b) 34.1 cm;

c) no.

19. *a*) 261 s;

b) 1260 s.

21. 3.4 krad/s.

23. 2.77×10^7 s.

25. 4.8 W/m², 42 V/m.

27. 4.50 μJ.

29. 3.80×10^{26} W.

31. *a*) 5 cm², sí;

b) 20 m², sí;

c) 100 m², no.

33. *a*) 2×10^8 años luz;

b) 2000 veces mayor.

35. 8×10^6 m/s².

37. 27 m².

39. 16 cm.

41. 3.5 nH a 5.3 nH.

43. 6.25×10^{-4} V/m;
1.04×10^{-9} W/m².

45. 3 m.

47. 1.35 s.

49. 34 V/m, 0.11 μT.

51. Abajo, 2.2 μT, 650 V/m.

53. *a*) 0.18 nJ;

b) 8.7 μV/m, 2.9×10^{-14} T.

57. 4×10^{10} W.

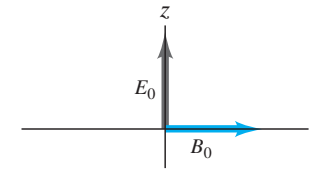
59. 5 nodos, 6.1 cm.

61. *a*) $+x$;

b) $\beta = \alpha c$;

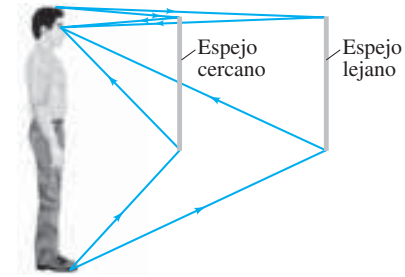
c) $\dfrac{E_0}{c}e^{-(\alpha x - \beta t)^2}$.

63. *d*) Tanto $\vec{\mathbf{E}}$ como $\vec{\mathbf{B}}$ giran en sentido antihorario.



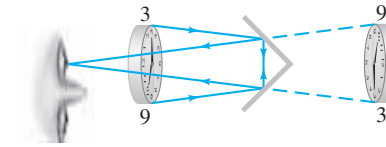
CAPÍTULO 32

1.



3. 7°.

7.



9. 37.6 cm.

11. 1.0 m.

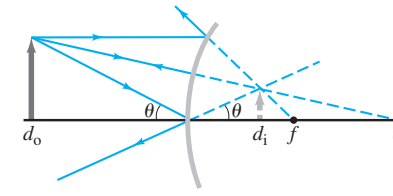
13. 2.1 cm detrás de la superficie frontal de la esfera; virtual, derecha.

15. Cóncavo, 5.3 cm.

17. −6.0 m.

19. Convexo, −32.0 cm.

21.



23. −3.9 m.

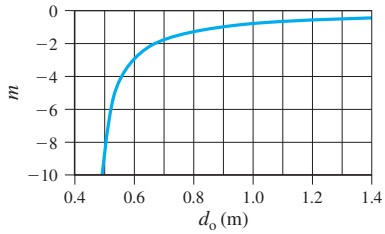
25. *a*) Convexo;

b) 20 cm detrás del espejo;

c) −91 cm;

d) −1.8 m.

27. *b*)



c) 0.90 m;

d) justo después del punto focal.

31. Porque la imagen está invertida.

33. *a*) 2.21×10^8 m/s;

b) 1.99×10^8 m/s;

c) 1.97×10^8 m/s.

35. 8.33 min.

37. 3 m.

39. 35°.

41. 38.6°.

43. 2.6 cm.

45. 4.4 m.

47. 3.2 mm.

49. 38.9°.

53. 0.22°.

55. 0.80°.

57. 33.3°, diamante.

59. 82.1 cm.

61. $n \geq 1.5$.

63. *a*) 2.3 μs;

b) 17 ns.

65. $n \geq 1.72$.

67. 17.3 cm.

71. 0.25 m, 0.50 m.

73. *a*) 3.0 m, 4.4 m, 7.4 m;

b) hacia, alejándose, hacia.

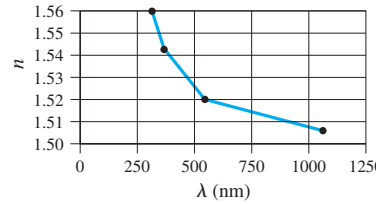
75. 3.80 m.

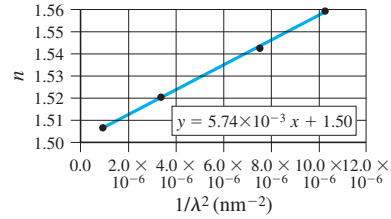
77. 31 cm para la imagen real, 15 cm para la imagen virtual.

83. $\dfrac{d}{n-1}$.

85. La luz se reflejaría por completo internamente sólo si $\theta_i \leq 32.5°$.

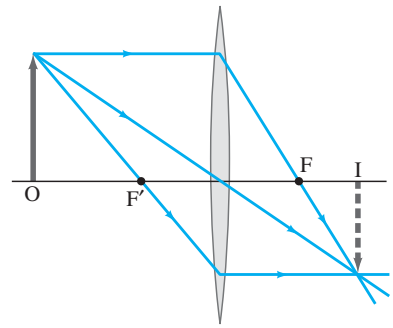
87. $A = 1.5005$, $B = 5740\ \text{nm}^2$.





CAPÍTULO 33

1. *a*)



b) 508 mm.

3. *a*) 4.26 D, convergente;

b) −14.8 cm, divergente;

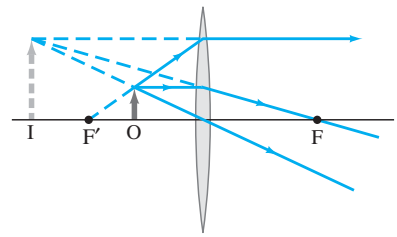
5. *a*) 106 mm;

b) 109 mm;

c) 117 mm;

d) un objeto a 0.513 m de distancia.

7. *a*) Virtual, derecha, amplificada;



b) convergente;

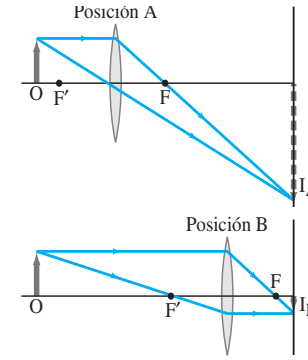
c) 6.7 D.

9. *a*) 0.02 m;

b) 0.004 m.

11. 50 cm.

13. 21.3 cm, 64.7 cm.



15. *c*) Real, derecha; *d*) real, derecha.

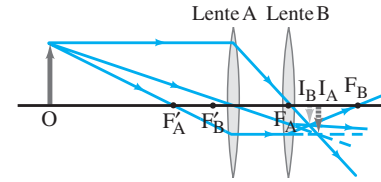
17. 0.107 m, 2.2 m.

19. *b*) 182 cm; *c*) 182 cm.

21. 18.5 cm más allá de la segunda lente, −0.651×.

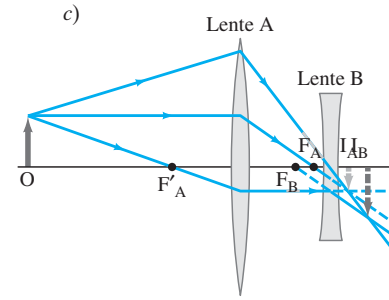
23. *a*) 7.14 cm más allá de la segunda lente,

b) −0.357×; *c*)

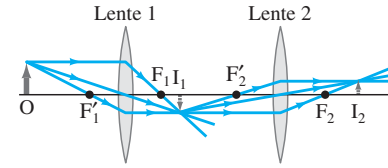


25. *a*) 0.10 m a la derecha de la lente divergente; *b*) −1.0×;

c)



27. *a*) 30 cm más allá de la segunda lente, la mitad de tamaño del objeto;



b) 29 cm más allá de la segunda lente, 0.46 veces el tamaño del objeto.

29. 1.54.

31. 8.6 cm.

33. 34 cm.

35. $f/2.8$.

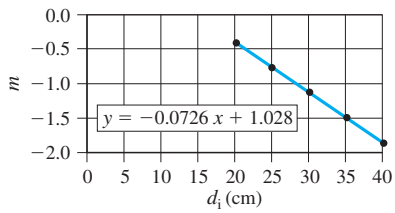
37. $\frac{1}{6}$ s.

39. 41 mm.

41. +2.5 D.

43. 41 cm, sí.

45. *a*) −1.3 D;
b) 37 cm.
47. −24.8 cm.
49. 18.4 cm, 1.00 m.
51. 6.6 cm.
53. *a*) 13 cm;
b) 8.3 cm.
55. *a*) −234 cm;
b) 4.17×.
57. *a*) −66 cm;
b) 3.0×.
59. 4 cm, hacia.
61. 2.5 cm, 91 cm.
63. −26×.
65. 16×.
67. 3.7 m, 7.4 m.
69. −9×.
71. 8.0×.
73. 1.6 cm.
75. *a*) 754×;
b) 1.92 cm, 0.307 cm;
c) 0.312 cm.
77. *a*) 0.85 cm;
b) 250×.
79. 410×, 25×.
81. 79.4 cm, 75.5 cm.
83. 6.450 m $\leq d_0 \leq \infty$.
85. 116 mm, 232 mm.
87. −19.0 cm.
89. 3.1 cm, 25 cm.
91. *a*) 0.26 mm;
b) 0.47 mm;
c) 1.3 mm;
d) 0.56×, 2.7×.
93. 20.0 cm.
95. 47 m.
97. 2.8×, 3.9×, persona con ojo normal.
99. 1.0×.
101. +3.4 D.
103. −19×.
105. *a*) 28.6 cm;
b) 120 cm;
c) 15 cm.
107. −6.2 cm.
109. *a*) $-1/f$, 1;
b) 14 cm, sí, ordenada al origen



c) $f = -1/\text{pendiente}$.

CAPÍTULO 34

3. 3.9 μm.
5. 0.2 mm.
7. 660 nm.
9. 3.5 cm.
11. Invertida, comienza con línea oscura central, y en cada lugar donde antes había una franja brillante ahora hay una franja oscura y viceversa.
13. 2.7 mm.
15. 2.94 mm.
17. $\frac{1}{4}$.
21. $I_0\left[\dfrac{3 + 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{2\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)}{3 + 2\sqrt{2}}\right]$.
23. 634 nm.
25. *a*) 180 nm;
b) 361 nm, 541 nm.
27. *b*) 290 nm.
29. 8.68 μm.
31. 113 nm, 225 nm.
35. 1.32.
37. *c*) 571 nm.
39. 0.191 mm.
41. 80.1 μm.
43. 0.3 mm.
45. *a*) 17 lm/W;
b) 160 lámparas.
47. *a*) Constructiva;
b) destructiva.
49. 440 nm.
51. $I_0 \cos^2\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$.
53. *a*) 81.5 nm;
b) 0.130 μm.
55. $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\theta_i \pm \dfrac{m\lambda}{d}\right)$.
57. 340 nm, 170 nm.
59. Constructiva: 90º, 270º; destructiva: 0º, 180º; exactamente intercambiada.
61. 240 nm.
63. 0.20 km.
65. 126 nm.

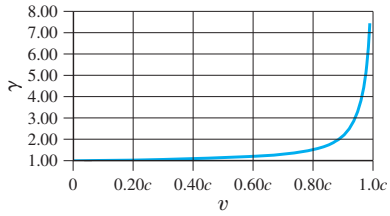
CAPÍTULO 35

1. 37.3 mrad = 2.13°.
3. 2.35 m.
5. El patrón entero se corre, con máximo central a 23º con la normal.
7. 4.8 cm.
9. 953 nm.
11. *a*) 63°;
b) 30°.
13. 0.15.
15. $d = 5D$.
17. 265 franjas.
19. *a*) 1.9 cm;
b) 12 cm.
21. 0.255.
23. *a*) $I_\theta = I_0\left(\dfrac{1 + 2\cos\delta}{3}\right)^2$.
25. 1.5×10^{11} m.
27. 1.0×10^4 m.
29. 730 líneas/mm, 88 líneas/mm.
31. 0.40 μm, 0.50 μm, 0.52 μm, 0.62 μm.
33. Dos órdenes completos, más parte de un tercer orden.
35. 556 nm.
37. 24°.
39. $\lambda_2 > 600$ nm se traslapa con $\lambda_3 < 467$ nm.
41. $\lambda_1 = 614$ nm, $\lambda_2 = 899$ nm.
43. 7 cm, 35 cm, segundo orden.
45. *c*) −32°, 0.9°.
47. *a*) 16,000 y 32,000;
b) 26 pm, 13 pm.
49. 14.0°.
51. No.
53. 45°.
55. 61.2°.
57. *a*) 35.3°;
b) 63.4°.
59. 36.9°, menor que ambos ángulos.
61. $I = \dfrac{I_0}{4}\operatorname{sen}^2(2\theta)$, 45°.
63. 28.8 μm.
65. 580 nm.
67. 0.6 m.
69. 658 nm, 853 líneas/cm.
71. *a*) 18 km;
b) 23″, distorsiones atmosféricas lo empeoran.
73. 5.79×10^5 líneas/m.
75. 36.9°.
77. *a*) 60°;
b) 71.6°;
c) 84.3°.
79. 0.4 m.
81. 0.245 nm.
83. 110 m.
85. −0.17 mm.
87. Use 24 polarizadores, cada uno girado 3.75º con respecto al eje anterior.

CAPÍTULO 36

1. 72.5 m.

3. 1.00, 1.00, 1.01, 1.02, 1.05, 1.09, 1.15, 1.25, 1.40, 1.67, 2.29, 7.09.



5. 2.42×10^8 m/s.

7. 27 años.

9. $(6.97 \times 10^{-8})\%$.

11. *a*) $0.141c$;
b) $0.140c$.

13. *a*) 3.4 años;
b) 7.4 años.

15. $0.894c$.

17. Base: 0.30ℓ; lados: 1.94ℓ

19. $0.65c$.

21. *a*) (820 m, 20 m, 0);
b) (2280 m, 20 m, 0).

23. *a*) $0.88c$;
b) $-0.88c$.

25. *a*) $0.97c$;
b) $0.55c$.

27. $0.93c$ a 35°.

29. *a*) $\ell_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}$;

b) $\tan^{-1}\left[\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right]$.

31. $t'_B - t'_A = -\dfrac{v\ell}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$,

B se enciende primero.

33. No es posible en el marco de referencia del niño.

35. *a*) −0.5%;
b) −20%.

37. $0.95c$.

39. 8.20×10^{-14} J, 0.511 MeV.

41. 900 kg.

43. 1.00 MeV/c^2, o 1.78×10^{-30} kg.

45. 9.0×10^{13} J, 9.2×10^9 kg.

47. $0.866c$.

49. 1670 MeV, 2440 MeV/c.

51. $0.470c$.

53. $0.32c$.

55. $0.866c$, $0.745c$.

57. *a*) 2.5×10^{19} J;
b) −2.4%.

59. 237.04832 u.

61. 240 MeV.

65. 230 MHz.

67. *a*) 1.00×10^2 km/h;
b) 67 Hz.

69. 75 μs.

71. 8.0×10^{-8} s.

73. *a*) $0.067c$;
b) $0.070c$.

75. *a*) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{c^2}{v^2} - 1}$;

c) $\tan^{-1}\dfrac{c}{v}$, $u = \sqrt{c^2 + v^2}$.

77. *a*) 0.77 m/s;
b) 0.21 m.

79. 1.022 MeV.

83. *a*) 4×10^9 kg/s;
b) 4×10^7 años;
c) 1×10^{13} años.

85. 28.32 MeV.

87. *a*) 2.86×10^{-18} kg·m/s;
b) 0;
c) 3.31×10^{-17} kg·m/s.

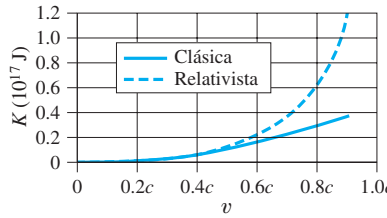
89. 3×10^7 kg.

91. $0.987c$.

93. 5.3×10^{21} J, 53 veces mayor

95. *a*) 6.5 años;
b) 2.3 años luz.

99.



CAPÍTULO 37

1. *a*) 10.6 μm, infrarrojo lejano;
b) 829 nm, infrarrojo;
c) 0.69 mm, microonda;
d) 1.06 mm, microonda.

3. 5.4×10^{-20} J, 0.34 eV.

5. *b*) 6.62×10^{-34} J·s.

7. $2.7 \times 10^{-19}\ \text{J} < E < 4.9 \times 10^{-19}$ J, $1.7\ \text{eV} < E < 3.0$ eV.

9. 2×10^{13} Hz, 1×10^{-5} m.

11. 7.2×10^{14} Hz.

13. 3.05×10^{-27} m.

15. Cobre y hierro

17. 0.55 eV.

19. 2.66 eV.

21. 3.56 eV.

23. *a*) 1.66 eV;
b) 3.03 eV.

25. *a*) 1.66 eV;
b) 3.03 eV.

27. 0.004, o 0.4%.

29. *a*) 2.43 pm;
b) 1.32 fm.

31. *a*) 8.8×10^{-6};
b) 0.049.

33. *a*) 229 eV;
b) 0.165 nm.

35. 1.65 MeV.

37. 212 MeV, 5.86 fm.

39. 1.772 MeV, 702 fm.

41. 4.7 pm.

43. 4.0 pm.

45. 1840.

47. *a*) 1.1×10^{-24} kg·m/s;
b) 1.2×10^6 m/s;
c) 4.2 V.

51. 590 m/s.

53. 20.9 pm.

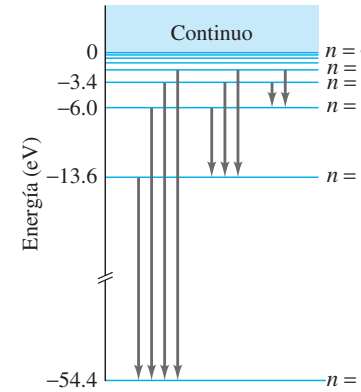
55. 1.51 eV

57. 122 eV.

59. 91.4 nm.

61. 37.0 nm.

63.



65. −27.2 eV, 13.6 eV.

67. Sí: $v = 7 \times 10^{-3}\,c$; $1/\gamma = 0.99997$.

69. 97.23 nm, 102.6 nm, 121.5 nm, 486.2 nm, 656.3 nm, 1875 nm.

71. Sí.

73. 3.28×10^{15} Hz.

75. 5.3×10^{26} fotones/s.

77. 6.2×10^{18} fotones/s.

79. 0.244 MeV para ambos.

81. 28 fm.

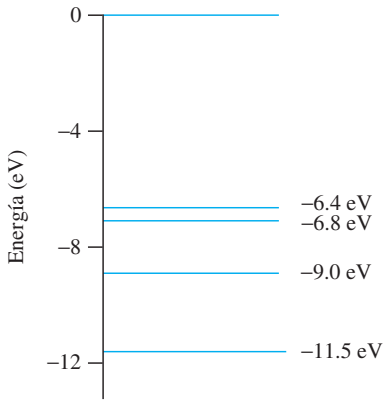
83. 4.4×10^{-40}, sí.

85. 2.25 V.

87. 9.0 N.

89. 1.2 nm.

91. *a*)



b) Estado fundamental, 0.4 eV, 2.2 eV, 2.5 eV, 2.6 eV, 4.7 eV, 5.1 eV.

93. *a*) $E_n = -\dfrac{2.84 \times 10^{165}\ \text{J}}{n^2}$, $r_n = n^2(5.17 \times 10^{-129}\ \text{m})$;

b) no, porque $n \approx 10^{68}$, de manera que $\Delta n = 1$ es despreciable en comparación con n.

95. 1.0×10^{-8} N.

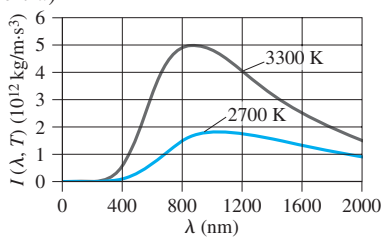
97. *a*) $\sqrt{\dfrac{Gh}{c^5}}$; *b*) 1.34×10^{-43} s;

c) $\sqrt{\dfrac{Gh}{c^3}}$; *d*) 4.05×10^{-35} m.

99. *a*) 6.0×10^{-3} m/s;

b) 1.2×10^{-7} K.

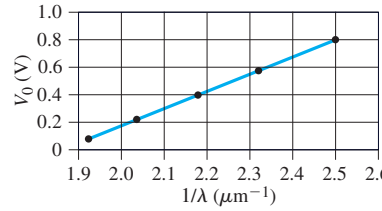
101. *a*)



b) 4.8 veces más intenso

103. *a*) $\dfrac{hc}{e}$, $-\dfrac{W_0}{e}$;

b)



c) 1.2×10^{-6} V·m, −2.31 V;

d) 2.31 eV;

e) 6.63×10^{-34} J·s.

CAPÍTULO 38

1. 2.8×10^{-7} m.

3. 5.3×10^{-11} m.

5. 4500 m/s.

7. 1.0×10^{-14}.

9. $\Delta x_{\text{electrón}} \geq 1.4 \times 10^{-3}$ m, $\Delta x_{\text{pelota de béisbol}} \geq 9.3 \times 10^{-33}$ m, $\dfrac{\Delta x_{\text{electrón}}}{\Delta x_{\text{pelota de béisbol}}} = 1.5 \times 10^{29}$.

11. 1.3×10^{-54} kg.

13. *a*) 10^{-7} eV;

b) $1/10^8$;

c) 100 nm, 10^{-6} nm.

19. *a*) $A\,\text{sen}[(2.6 \times 10^9\ \text{m}^{-1})x] + B\cos[(2.6 \times 10^9\ \text{m}^{-1})x]$;

b) $A\,\text{sen}[(4.7 \times 10^{12}\ \text{m}^{-1})x] + B\cos[(4.7 \times 10^{12}\ \text{m}^{-1})x]$.

21. 1.8×10^6 m/s.

23. *a*) 46 nm;

b) 0.20 nm.

25. $\Delta p\ \Delta x \approx h$, lo que es congruente con el principio de incertidumbre.

27. $n = 1$: 0.094 eV, $(1.0\ \text{nm}^{-1/2})\,\text{sen}[(1.6\ \text{nm}^{-1})x]$;
$n = 2$: 0.38 eV, $(1.0\ \text{nm}^{-1/2})\,\text{sen}[(3.1\ \text{nm}^{-1})x]$;
$n = 3$: 0.85 eV, $(1.0\ \text{nm}^{-1/2})\,\text{sen}[(4.7\ \text{nm}^{-1})x]$;
$n = 4$: 1.5 eV, $(1.0\ \text{nm}^{-1/2})\,\text{sen}[(6.3\ \text{nm}^{-1})x]$.

29. *a*) 940 MeV;

b) 0.51 MeV;

c) 0.51 MeV.

31. *a*) 4.0×10^{-19} eV;

b) 2×10^8;

c) 1.4×10^{-10} eV.

33. *n* impar:

$$\psi = [(-1)^{(n-1)/2}]\sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

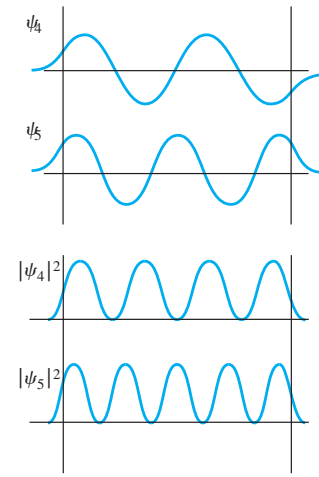
$$E_n = \frac{n^2h^2}{8m\ell^2};$$

n par:

$$\psi = [(-1)^{n/2}]\sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8m\ell^2}.$$

35.



37. 0.020 nm.

39. 17 eV.

41. *a*) 6.1%;

b) 93.9%.

43. *a*) disminuye 12%;

b) disminuye 6.2%.

45. *a*) 32 MeV;

b) 57 fm;

c) 1.4×10^7 m/s, 8.6×10^{20} Hz, 7×10^9 años.

47. 14 MeV.

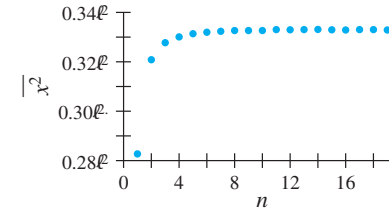
49. 25 nm.

51. $\Delta x = r_1$ (el radio de Bohr).

53. 0.23 MeV, 3.3×10^6 m/s.

55. disminuye 27%.

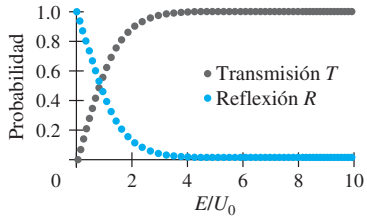
57.



59. *a*) $\Delta\phi > 0$ de manera que $\phi \neq 0$ exactamente;

b) 4 s.

61. *a)*



b) 10%: $E/U_0 = 0.146$;
20%: $E/U_0 = 0.294$;
50%: $E/U_0 = 0.787$;
80%: $E/U_0 = 1.56$.

CAPÍTULO 39

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. 18 estados, $(3, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $(3, 0, 0, +\frac{1}{2})$, $(3, 1, -1, -\frac{1}{2})$, $(3, 1, -1, +\frac{1}{2})$, $(3, 1, 0, -\frac{1}{2})$, $(3, 1, 0, +\frac{1}{2})$, $(3, 1, 1, -\frac{1}{2})$, $(3, 1, 1, +\frac{1}{2})$, $(3, 2, -2, -\frac{1}{2})$, $(3, 2, -2, +\frac{1}{2})$, $(3, 2, -1, -\frac{1}{2})$, $(3, 2, -1, +\frac{1}{2})$, $(3, 2, 0, -\frac{1}{2})$, $(3, 2, 0, +\frac{1}{2})$, $(3, 2, 1, -\frac{1}{2})$, $(3, 2, 1, +\frac{1}{2})$, $(3, 2, 2, -\frac{1}{2})$, $(3, 2, 2, +\frac{1}{2})$.

5. $n \geq 6$; $m_\ell = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$.

7. *a)* 7;
b) −0.278 eV;
c) 4.72×10^{-34} J·s, 4;
d) −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4.

11. $n \geq 7$, $\ell = 6$, $m_\ell = 2$.

13. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-1.5}$;
b) $\dfrac{1}{\pi r_0^3} e^{-3}$;
c) $\dfrac{4}{r_0} e^{-3}$.

15. 1.85.

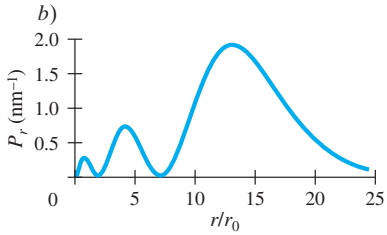
17. *a)* $1.3r_0$;
b) $2.7r_0$;
c) $4.2r_0$.

21. $\dfrac{r^4}{24r_0^5} e^{-r/r_0}$.

23. 1.1%.

27. *a)* $\dfrac{4r^2}{27r_0^3}\left(1 - \dfrac{2r}{3r_0} + \dfrac{2r^2}{27r_0^2}\right)e^{-2r/3r_0}$;

b)



c) $13.1r_0$.

29. *a)* $(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $(1, 0, 0, +\frac{1}{2})$, $(2, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $(2, 0, 0, +\frac{1}{2})$, $(2, 1, -1, -\frac{1}{2})$, $(2, 1, -1, +\frac{1}{2})$;
b) $(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $(1, 0, 0, +\frac{1}{2})$, $(2, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $(2, 0, 0, +\frac{1}{2})$, $(2, 1, -1, -\frac{1}{2})$, $(2, 1, -1, +\frac{1}{2})$, $(2, 1, 0, -\frac{1}{2})$, $(2, 1, 0, +\frac{1}{2})$, $(2, 1, 1, -\frac{1}{2})$, $(2, 1, 1, +\frac{1}{2})$, $(3, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $(3, 0, 0, +\frac{1}{2})$, $(3, 1, -1, -\frac{1}{2})$.

31. $n = 3$, $\ell = 2$.

33. *a)* $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2$;
b) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^1$;
c) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6 5f^3 6d^1 7s^2$.

35. 5.75×10^{-13} m, 115 keV.

39. 0.0383 nm, 1 nm.

41. 0.194 nm.

43. Cromo.

47. 2.9×10^{-4} eV.

49. *a)* 0.38 mm; *b)* 0.19 mm.

51. *a)* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; *b)* $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$; *c)* $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$;
d) $4p$: $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$, $\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$; $4f$: $\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$, $\frac{\sqrt{63}}{2}\hbar$; $3d$: $\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$, $\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$.

53. *a)* 0.4 T;
b) 0.5 T.

55. 4.7×10^{-4} rad; *a)* 180 m;
b) 1.8×10^5 m.

57. 634 nm.

59. 3.7×10^4 K.

61. *a)* 1.56;
b) 1.36×10^{-10} m.

63. *a)* $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$;
b) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^4$;
c) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^1 5s^2$.

65. *a)* 2.5×10^{74};
b) 5.1×10^{74}.

67. $5.24r_0$.

69. *a)* 45°, 90°, 135°;
b) 35.3°, 65.9°, 90°, 114.1°, 144.7°;
c) 30°, 54.7°, 73.2°, 90°, 106.8°, 125.3°, 150°;
d) 5.71°, 0.0573°, sí.

71. *b)* $\overline{K} = -\frac{1}{2}\overline{U}$.

73. *a)* prohibida; *b)* permitida;
c) prohibida; *d)* prohibida;
e) permitida

75. 4, berilio.

77. *a)* 3×10^{-171}, 1×10^{-202};
b) 1×10^{-8}, 6×10^{-10};
c) 7×10^{15}, 4×10^{14};
d) 4×10^{22} fotones/s, 7×10^{23} fotones/s.

CAPÍTULO 40

1. 5.1 eV.

3. 4.7 eV.

5. 1.28 eV.

9. *a)* 18.59 u;
b) 8.00 u;
c) 0.9801 u.

11. 1.10×10^{-10} m.

13. *a)* 1.5×10^{-2} eV, 0.082 mm;
b) 3.0×10^{-2} eV, 0.041 mm;
c) 4.6×10^{-2} eV, 0.027 mm.

15. *a)* 6.86 u;
b) 1850 N/m, $k_{CO}/k_{H_2} = 3.4$.

17. 2.36×10^{-10} m.

19. $m_1 x_1 = m_2 x_2$.

21. 0.2826 nm.

23. 0.34 nm.

25. *b)* −6.9 eV;
c) −11 eV;
d) −2.8%.

27. 9.0×10^{20}.

29. *a)* 6.96 eV;
b) 6.89 eV.

31. 1.6%.

33. 3.2 eV, 1.1×10^6 m/s.

39. *a)* $\dfrac{h^2 N^2}{32m\ell^2}$;
b) $\dfrac{h^2 (N+1)}{8m\ell^2}$;
c) $\dfrac{4}{N}$.

43. 1.09 μm.

45. *a)* $2N$;
b) $6N$;
c) $6N$;
d) $2N(2\ell + 1)$.

47. 4×10^6.

49. 1.8 eV.

51. 8.6 mA.

53. *a)* 1.7 mA; *b)* 3.4 mA.

55. *a)* 35 mA; *b)* 70 mA.

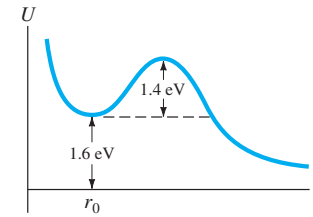
57. 3700 Ω.

59. 0.21 mA.

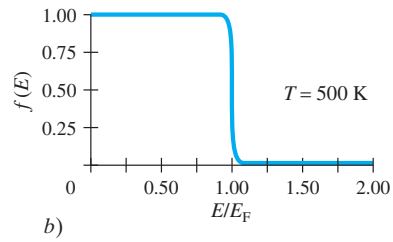
61. $I_B + I_C = I_E$.

63. *a)* 3.1×10^4 K;
b) 930 K.

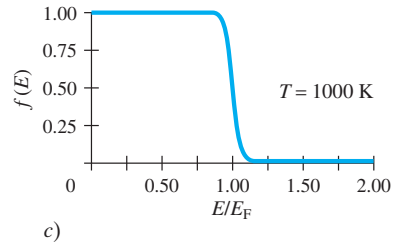
65.



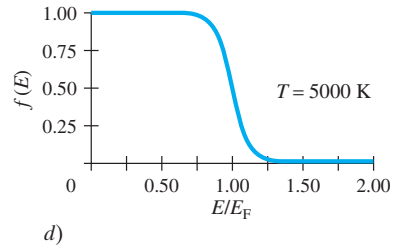
67. *a*) 0.9801 u;
b) 482 N/m, $k_{HCl}/k_{H_2} = 0.88$.
71. Sí, 1.09 μm.
73. 1100 J/mol.
75. 5.50 eV.
77. 3×10^{25}.
79. 6.47×10^{-4} eV.
81. 1.1 eV.
83. *a*) 0.094 eV; *b*) 0.63 nm.
85. *a*) $150\ \text{V} \leq V \leq 486\ \text{V}$;
b) $3.16\ \text{k}\Omega \leq R_{\text{recarga}} < \infty$.
87. *a*)



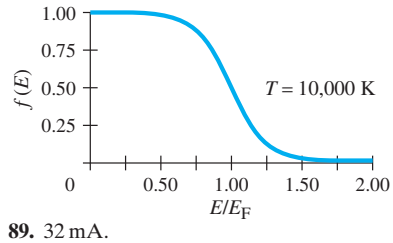
b)



c)



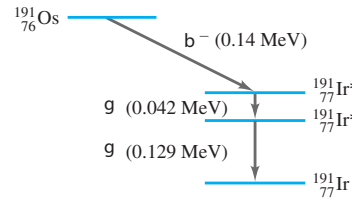
d)



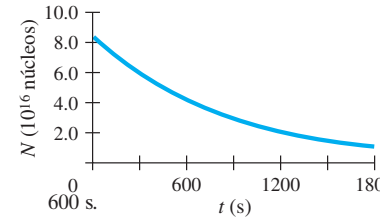
89. 32 mA.

CAPÍTULO 41

1. 0.149 u.
3. 0.85%.
5. 3727 MeV/c^2.
7. *b*) 180 m; *c*) 2.58×10^{-10} m.
9. 30 MeV.
11. 6×10^{26} nucleones, no, la masa de todos los nucleones es aproximadamente la misma.
13. 550 MeV.
15. 7.94 MeV.
17. $^{23}_{11}$Na: 8.11 MeV/nucleón;
$^{24}_{11}$Na: 8.06 MeV/nucleón.
19. *b*) Sí, la energía de enlace es positiva.
21. 0.782 MeV.
23. 2.6×10^{-12} m.
25. *a*) β^-;
b) $^{24}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg} + \beta^- + \bar{\nu}$, 5.52 MeV.
27. *a*) $^{234}_{90}$Th; *b*) 234.04367 u.
29. 0.078 MeV.
31. *a*) $^{32}_{16}$S;
b) 31.97207 u.
33. 0.862 MeV.
35. 0.9612 MeV, 0.9612 MeV, 0, 0.
37. 5.31 MeV.
39. *a*) 1.5×10^{-10} años^{-1};
b) 6.0 h.
41. 0.16.
43. 0.015625.
45. 6.9×10^{19} núcleos.
47. *a*) 3.59×10^{12} decaimientos/s;
b) 3.58×10^{12} decaimientos/s;
c) 9.51×10^{7} decaimientos/s.
49. 0.76 g.
51. 2.30×10^{-11} g.
53. 4.3 min.
55. 2.98×10^{-2} g.
57. 35.4 d.
59. $^{228}_{88}$Ra, $^{228}_{89}$Ac, $^{228}_{90}$Th, $^{224}_{88}$Ra, $^{220}_{86}$Rn; $^{231}_{90}$Th, $^{231}_{91}$Pa, $^{227}_{89}$Ac, $^{227}_{90}$Th, $^{223}_{88}$Ra.
61. $N_D = N_0(1 - e^{-\lambda t})$.
63. 2.3×10^4 años.
65. 41 años.
69. $6.64T_{1/2}$.
71. *b*) 98.2%.
73. 1 MeV.
75. *a*) $^{191}_{77}$Ir;
b)



c) El estado excitado más alto.
77. 550 MeV, 2.5×10^{12} J.
79. 2.243 MeV.
81. *a*) 2.4×10^5 años;
b) ningún cambio significativo, la edad máxima está en el orden de 10^5 años.
83. 5.49×10^{-4}.
85. *a*) 1.6%;
b) 0.66%.
87. 1.3×10^{21} años.
89. 8.33×10^{16} núcleos,



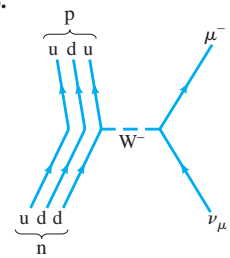
CAPÍTULO 42

1. $^{28}_{13}$Al, β^-, $^{28}_{14}$Si.
3. Sí, porque $Q = 4.807$ MeV.
5. Se liberan 5.701 MeV.
7. *a*) Sí;
b) 20.8 MeV.
9. 4.730 MeV.
11. $\text{n} + {}^{14}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\text{C} + \text{p}$, 0.626 MeV.
13. *a*) El He toma un neutrón de C;
b) $^{11}_{6}$C;
c) 1.856 MeV, exotérmica.
15. 18.000938 u.
17. 0.671 MeV.
19. $\pi(R_1 + R_2)^2$.
21. 10 cm.
23. 173.3 MeV.
25. 6×10^{18} fisiones/s.
27. 0.34 g.
29. 5×10^{-5} kg.
31. 25 colisiones.
33. 0.11.
35. 3000 eV.
39. *a*) 5.98×10^{23} MeV/g,
4.83×10^{23} MeV/g,
2.10×10^{24} MeV/g;
b) 5.13×10^{23} MeV/g; la ecuación 42.9a da aproximadamente un 17% más energía por gramo, la 42-9b da aproximadamente un 6% menos, y la 42-9c da aproximadamente 4× más.
41. 0.35 g.
43. 6100 kg/h.
45. 2.46×10^9 J, 50 veces más que la gasolina.
47. *b*) 26.73 MeV;
c) 1.943 MeV, 2.218 MeV, 7.551 MeV, 7.296 MeV, 2.752 MeV, 4.966 MeV;
d) mayor repulsión de Coulomb para superar.
49. 4.0 grays.
51. 220 rads.

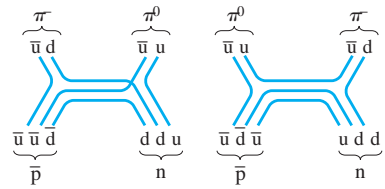
53. 280 conteos/s.
55. 1.6 días.
57. *a*) $^{131}_{53}\mathrm{I} \rightarrow {}^{131}_{54}\mathrm{Xe} + \beta^- + \bar{\nu}$;
b) 31 días;
c) 8×10^{-12} kg.
59. 8.3×10^{-7} Gy/día.
61. *a*) $^{218}_{84}\mathrm{Po}$;
b) radiactivo, decaimiento alfa y beta, 3.1 min;
c) químicamente reactivo;
d) 9.1×10^6 Bq, 4.0×10^4 Bq.
63. 7.041 m, onda de radio.
65. *a*) $^{12}_{6}\mathrm{C}$;
b) 5.701 MeV.
67. 1.0043 : 1.
69. 6.5×10^{-2} rem/año.
71. 4.4 m.
73. *a*) 920 kg;
b) 3×10^6 Ci.
75. *a*) 3.7×10^{26} W;
b) 3.5×10^{38} protones/s;
c) 1.1×10^{11} años.
77. 8×10^{12} J.
79. *a*) 3700 decaimientos/s;
b) 4.8×10^{-4} Sv/año, sí (el 13% de la tasa del entorno).
81. 7.274 MeV.
83. 79 años.
85. 2 mCi.

CAPÍTULO 43

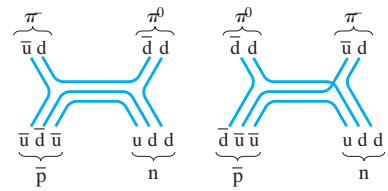
1. 5.59 GeV.
3. 2.0 T.
5. 13 MHz.
7. Partículas alfa, $\lambda_\alpha \approx d_{\text{nucleón}}$, $\lambda_\mathrm{p} \approx 2d_{\text{nucleón}}$.
9. 5.5 T.
11. 1.8×10^{-19} m.
15. 33.9 MeV.
17. 1879.2 MeV.
19. 67.5 MeV.
21. *a*) 178.5 MeV;
b) 128.6 MeV.
23. *a*) Carga, extrañeza;
b) energía;
c) número bariónico, extrañeza, espín.
25. *b*) El fotón existe durante un tiempo tan corto que el principio de incertidumbre permite que la energía no se conserve durante el intercambio.
27. 69.3 MeV.
29. $K_{\Lambda^0} = 8.6$ MeV, $K_{\pi^-} = 57.4$ MeV.
31. 52.3 MeV.
33. 9 keV.
35. 7.5×10^{-21} s.
37. *a*) 700 eV;
b) 70 MeV.
39. *a*) uss;
b) dss.
41. *a*) Protón;
b) $\overline{\Sigma}^-$;
c) K^-;
d) π^-;
e) D_S^-.
43. $\mathrm{c\bar{s}}$.
45.



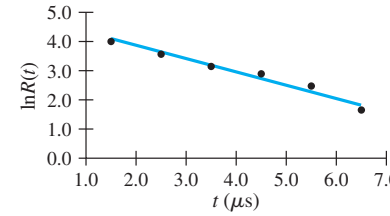
47. *a*) 0.38 A;
b) 1.0×10^2 m/s.
49. 2.1×10^9 m, 7.1 s.
51. *a*) posible, interacción fuerte;
b) posible, interacción fuerte;
c) posible, interacción fuerte;
d) no es posible, no se conserva la carga;
e) posible, interacción débil.
55. 64.
57. *b*) 10^{29} K.
59. 798.7 MeV, 798.7 MeV.
61. 16 GeV, 7.8×10^{-17} m.
63. Algunas posibilidades:



[véase el ejemplo 43-9b]



65. $v/c = 1 - (9.0 \times 10^9)$.
67.



2.3 μs, 3.1%.

CAPÍTULO 44

1. 3.1 años luz.
3. 0.050″, 20 pc.
5. Menor que, un factor de 2.
7. 0.037.
9. 2×10^{-3} kg/m^3.
11. −0.092 MeV, 7.366 MeV.
13. 1.83×10^9 kg/m^3, 3.33×10^5 veces.
15. $D_1/D_2 = 0.15$.
19. 540°.
21. 3.1×10^{-16} m.
23. 200 millones de años luz.
25. *a*) 656 nm;
b) 659 nm.
27. 0.0589 *c*.
31. 1.1×10^{-3} m.
33. 6 nucleones/m^3.
35. *a*) 10^{-5} s;
b) 10^{-7} s;
c) 10^{-4} s.
37. *a*) 6380 km, 20 km, 8.85 km;
b) 700 : 2 : 1.
39. 8×10^9.
41. A: aumenta la temperatura, la luminosidad permanece igual y el tamaño disminuye;
B: la temperatura permanece igual, y la luminosidad y el tamaño disminuyen;
C: la temperatura disminuye, y la luminosidad y el tamaño aumentan.
43. 2×10^{28} N.
45. $d_{480}/d_{660} = 1.7$.
47. 2×10^{16} K, era hadrónica.
49. *a*) 13.93 MeV;
b) 4.7 MeV;
c) 5.5×10^{10} K.
51. $R_{\text{mín}} = GM/c^2$.
53. $\approx 10^{-15}$ s.
55. Venus, $b_{\text{Venus}}/b_{\text{Sirio}} = 16$.
57. $\dfrac{h^2}{4m_\mathrm{n}^{8/3}\,GM^{1/3}}\left(\dfrac{9}{4\pi^2}\right)^{2/3}$.

Índice

Nota: La abreviatura *defn* significa que la página citada da la definición del término; *np* significa que la referencia está en una nota a pie de página; *pr* significa que se encuentra en un problema o pregunta; *ss* significa "también en las páginas siguientes".

A

A (número de masa atómica), 1105
Aberración(es)
  cromática, 889*np*, 892, 932
  de lentes, 891-92, 929, 931
  esférica, 843, 857, 891, 892, 929, 932
  monocromática, 892
Abundancias, naturales, 1105
Aceleración cósmica, 1223
Acelerador(es)
  de alta energía, 1165-71
  de partículas, 1165-71
  lineal, 1169
    Stanford (SLAC), 985*pr*
Acomodación del ojo, 883
Actínidos, 1054
Actividad, 1118
  de fuente, 1147
  vida media y, 1120
Adaptación de impedancia, 802-3
ADN, 581-82, 936, 939, 1077-80, 1147, 1152
ADP, 1076-77
Agua
  choque eléctrico y, 693
  molécula del, 1074, 1075
  momento dipolar del, 617
  naturaleza polar del, 561, 579, 617, 1074
  pesada, 1138
Agujeros negros, 1197, 1202, 1203, 1208-9, 1221, 1228*pr*
Aislantes o no conductores, 561, 638-42, 658
  eléctricos, 561, 658, 1091-92
  térmicos, 1091-92
Alambre(s)
  conectado a tierra, 693, 694
  de bocina, 659
  neutro, 694
Alarmas antirrobos, 992
Alfabeto griego: guarda frontal
Altavoces, 720-21, 799
Alternadores, 768
Aminoácidos, 1079
Amortiguamiento magnético, 778*pr*
Ampere (A) (unidad), 654, 736
  definición operativa de, 736
Ampère, André, 654, 737
Amperímetro(s), 695-97, 721
  digital, 695, 697
Amplificación
  angular, 886
  convenciones de signos para, 845-46, 849, 871
  de combinación de lentes, 874-75
  de espejo, 845
  de lente(s), 871
    de aumento, 885-87
  de microscopio, 890-91, 932, 933, 1000
  de telescopio, 888, 931
  lateral, 845-46, 871
  poder de, 886
    total, 888 (*véase también* Potencia eléctrica)
  útil, 932-33, 1000
Amplificador(es), 1097
  simple, 866, 885-87
Amplitud(es)
  de onda, 1019
  modulada (AM), 830
Análisis
  de activación del neutrón, 1163*pr*
  dimensional, 1015*pr*, 1228*pr*, A-8
Analizador (de luz polarizada), 941
Analogía de rampa frente a escalera, 989
Ancho(s)
  de pico, de rejilla de difracción, 937-38
  de resonancia, 1181
Anderson, Carl, 1174
Andrómeda, 1196
Angstrom (Å) (unidad), 852*np*
Ángulo(s)
  crítico, 854
  de Brewster, 943, 949*pr*
  de fase, 800
  de incidencia, 838, 850
  del horizonte, 709
  de polarización, 943-44
  de reflexión, 838
  de refracción, 850
  ley de Brewster y, 943, 949*pr*
  sólido, 915*np*
Anillo(s)
  de almacenamiento, 1169
  de Einstein, 1207
  de Newton, 910-11
Aniquilación (e^-e^+, partícula-antipartícula), 996, 1175, 1217
Anisotropía de CMB, 1214, 1220, 1224
Ánodo, 620
Antena(s), 812, 817, 824, 831, 909
  dipolo, 817-18
  satelital, 831
Anteojos, 883-85
  para el Sol, polarizados, 941, 942
Anticodón, 1079
Antilogaritmo, A-3
Antimateria, 1175, 1188, 1190*pr* (*véase también* Antipartícula)
Antineutrino, 1115-16, 1179
Antineutrón, 1175
Antipartícula, 1116, 1174-76, 1179 (*véase también* Antimateria)
Antiprotón, 1164, 1174-75
Antiquark, 1179, 1183
Año luz (unidad), 1194
Aparato no óhmico, 656
Aperturas circulares, 929-31
Arago, F., 922
Arcoíris, 853
Área, A-1, guarda posterior
Arecibo, 931
Armadura, 720, 766
ARN, 1079-80
  de transferencia (ARNt), 1079-80
  mensajero (ARNm), 1079-80
ARNm, 1079-80

ARNt, 1079-80
Arranque sin batería, 687
Artificio(s)
de imagen, 878
digital, 878
Asistente digital personal del bolsillo (PDA), 647*pr*
Astigmatismo, 884, 892, 892*np*
Astrofísica, 1193-1225
Atardeceres, 945
Atlas, 1170
Atmósfera, dispersión de la luz por la, 945
Átomo(s), 1000-1 (*véase también* Estructura atómica)
cantidad de movimiento angular en los, 1004, 1046-49, 1057-60
como nube, 1045
complejos, 1052-56
de hidrógeno, 1002-10, 1045-51
espectro de 936, 1002-3
mecánica cuántica del, 1045-51
momento magnético de, 719
poblaciones en, 1070*pr*
teoría de Bohr de, 1003-9
distribuciones de probabilidad en, 1045, 1049-51
energía de enlace en, 1006
energía de ionización en, 1006-8
hidrogenoides, 1004*np*, 1008, 1010
hipótesis de De Broglie y, 1009-10
mecánica cuántica de, 1044-65
modelo
de Bohr de, 1003-9
vectorial de, 1069*pr*
neutro, 1106
niveles de energía en, 1003-9, 1046-47, 1052-53, 1054-55
retícula cristalina de, 1085
ATP, 1076-77
Aurora boreal, 717
Autoinductancia, 788-89
Automóvil(es)
carga de batería de un, 686-7
eléctrico, 675*pr*
luces de freno del, 1096
Autorradiografía, 1152
Axón, 669-70

B

Balanza de torsión, 563
Balmer, J. J., 1002
Banda(s)
de conducción, 1091-92
de energía, 1090-92
de valencia, 1091-92
Barión, 1179-80, 1183, 1184, 1222
teoría de quarks y, 1183, 1184
Barn (*bn*) (unidad), 1136
Barra(s)
de control, 1139
de iluminación, 612
Barrera
de Coulomb, 1038, 1113, 1200
penetración de, 1036-39, 1113
Base(s)
de transistor, 1097
nucleótido, 581, 1078
Batería(s), 609, 652-53, 655, 658, 678
cargadores, inductivos, 780*pr*
de automóviles, carga de, 678*np*, 686-87
eléctrica, 609, 652-53, 655, 658, 678
voltaica, 652
Becquerel (Bq) (unidad), 1147
Becquerel, Henri, 1110
Béisbol, 1023
Betatrón, 782*pr*
Bethe, Hans, 1143
Big crunch, gran implosión, 1220, 1221
Binoculares, 855, 889
Biología
de la radiación, 1150-52
molecular, fuerza eléctrica en, 581-82, 1077-80
Biot, Jean Baptiste, 743
Bits, 775
Blindaje eléctrico, 577, 740
Bobina(s) (*véase también* Inductor)
de desviación magnética, 621
de exploración, 783*pr*
exploradora, 783*pr*
Helmholtz, 756*pr*
primaria, 770
secundaria, 770
Bohr, Niels, 997, 1003-4, 1009, 1017, 1024-25, 1115
Bomba(s)
atómica, 1141, 1144
de fisión, 1141
de fusión, 1144
de hidrógeno, 1141, 1144
Bombeo
electromagnético, 726*pr*
óptico, 1062
Bombilla(s), 651, 653, 656, 657, 660, 704*pr*, 773, 915, 991
de tres intensidades, 704*pr*
fluorescente, 1060
balastro, 773
Born, Max, 1017, 1019
Bose, Satyendranath, 1053
Bosón(es), 1053, 1087*np*, 1178, 1179, 1183-86
de Higgs, 1186
de norma, 1165, 1178-79, 1183-85
Botella magnética, 1145
Bragg, W. L., 939, 1017
Branas, 1189
Brecha(s)
de energía (brecha de banda), 1091-92
de energía prohibida, 1091
Bremsstrahlung, 1056
Brewster, D., 943, 949*pr*
Brillo aparente, 1197-98
Broglie, Louis de, 997, 1009
Broncoscopio, 856
Brújula magnética, 707-8, 709
BSCCO, 669
Bujía, 785
Burbujas de jabón, 900, 909, 912-13

C

ca trifásica, 803
Cabeza lectura/escritura, 775
Cable
blindado, 740, 789, 825
coaxial, 740, 789, 825
Caída de voltaje, 684 (*véase también* Voltaje)
Caja
de Faraday, 577
rígida, 1030-34
partícula en, 1030-34
Calorímetro, 1124, 1125
Cámara
de arrastre por alambre, 1125, 1164
de burbujas, 1125, 1174
de niebla, 1125
digital y película, 878-82
gamma, 1152
réflex de una sola lente (SLR), 882
SLR, 882
Campo(s)
cercano, 818

conservativo, 775
y no conservativo, 775
de Higgs, 1186
de radiación, 818
eléctrico, 568-83, 591-600, 610-12, 617-19, 775
cálculo de, 568-75, 595-600, 610-11, 617-19
conductores y, 577, 655*np*
de y por dipolo, 579-80
dentro de un alambre, 668
distribuciones continuas de carga, 572-75
en dieléctrico, 639-40
en onda EM, 817-18
energía almacenada en, 637-38
ley de Gauss y, 591-600
movimiento de partícula cargada en, 578-79
producido por campo magnético variable, 759-60, 773-75
que produce un campo magnético, 813-16
relación con potencial eléctrico, 610-12, 617-19
en partículas elementales, 1171
gravitacional, 576, 1205-9
Hubble ultra profundo, 1211
lejano, 818
magnético, 707-17, 733-50
de alambre recto, 711-12, 734-35
de espira circular, 744-45
definición de, 708
de la Tierra, 709
de solenoide, 741-42
determinación de, 712-13, 738-45
de toroide, 742
dirección del, 708, 710, 716
energía almacenada en un, 790
fuentes de, 733-51
histéresis, 748-49
movimiento de partícula cargada en un, 714-17
producido por campo eléctrico variable, 813-16
producido por corriente eléctrica, 710, 741-42, 743-46 (*véase también* Ley de Ampère)
que induce fem, 759-73
que produce campo eléctrico y corriente, 773-75
uniforme, 709
no conservativo, 775
poloidal, 1145
toroidal, 1145
vectorial, 575
Cáncer, 1147, 1150-51, 1166
Candela (cd) (unidad), 915
Cantidad(es)
complejas, 1019*np*, 1025*np*, 1028
conservación de, lineal, 1175-76
de fotón, 993
de movimiento angular, 1003
de espín, 1047
en átomos, 1004, 1046-49, 1057-60
conservación, ley de la, 1117
nuclear total, 1107
cuantizada en átomos, 1046-47
cuantizada en moléculas, 1080-81
nuclear, 1107
orbital, en átomos, 1046-47, 1059-60
principio de incertidumbre y, 1023
total, 1059
incertidumbre en medición de, 1021
invariante, 977
relación de fuerza a, 972, 974
relativista, 971-73, 977, 978
deducción de, 972-73
Cañón de electrones, 621
Capa dipolo, 669
Capacidad, 629-42, 670
Capacitancia, 629-42
de axón, 670
Capacitor(es), 628-42, 1098
carga de, 813-15
en circuitos, 633-35, 687-92, 798-99
como filtros, 798-99
con R o L, 687-92, 793*ss*
energía almacenada en, 636-38
en serie y paralelo, 633-35
reactancia de, 798-99
usos de, 799
Capas esféricas de la Tierra, A-9-A-11.
Captura
de electrón, 1116
K, 1116
Carácter iónico parcial, 1074
Carbono, energía en, contra uranio, 1140
Carga(s)
débil, 1185
de color, 1184-85
de prueba, 568
de una batería, 678*np*, 686-87
eléctrica, 560*ss*
conservación de, 560, 1117, 1175
cuantización de, 564
de electrón, 564
de prueba, 568
distribuciones continuas de carga, 572-75
elemental, 564
en átomo, 561
enlazada y libre, 641
inducida, 562-63, 641
ley de Coulomb y, 563-67
libre, 641
movimiento de, en campo eléctrico, 578-79
movimiento de, en campo magnético, 714-17
negativa (*defn*), 560, 655
positiva (*defn*), 560
puntual (*defn*), 565
tipos de, 560
elemental, 564
libre, 641
ligada, 641
puntual (*defn*), 565
potencial de, 612-15
Cargador de baterías inductivo, 780*pr*
Catalejo, 889
Catalizadores, 1077
Cátodo, 620
CCD, dispositivo de carga acoplada, 878
cd (*defn*), 664
CD, 920*pr*, 935, 1063
Celda solar, 1096
Célula
biológica
energía en, 1077
captura de radiación por, 1147
eléctrica, 653, 687
Centelleador(es), 1124, 1125, 1152
líquidos, 1125
Centro Europeo para Investigación Nuclear (CERN), 1168, 1169, 1186
Centros de protón, 1151
CERN, 1168, 1169, 1186

Ciclo(s)
CNO, 1143, 1161*pr*
de carbono (CNO), 1143, 1161*pr*
protón-protón, 1142-43, 1200
Ciclotrón, 731*pr*, 1166-67
Cielo azul, 945
Cinta y discos magnéticos, 775
Circuito(s)
abierto, 654
completo, 654
de ca, 664-65, 677*np*, 790-803
de cd, 677-97
de fotocelda, 990, 992
digital, 1097
domésticos, 662-63
eléctrico(s), 654-5, 662-5, 677-97, 790-803
abierto, 654
adaptación de impedancia de, 802-3
ca, 64-5, 677*np*, 796-803
capacitores en, 633-35, 687-92, 798*ss*
cd, 677-97
completa, 654
constantes de tiempo de, 688, 791
digital, 1097
en paralelo, 633, 663, 680
en serie, 634, 679
inducido, 758-76, 785*ss*
integrado, 1098
LC, 793-96
LR, 790-92
LRC, 795-803
RC, 687-92
rectificador, 1096
reglas de Kirchhoff, 683-86
resonante, 802
electrónicos, 1095-98
en serie, 634, 679
integrados, 1098
LC, 793-96
LR, 790-92
LRC, 795-96, 799-801
paralelos, 633, 663, 680
puente, 704*pr*
RC, 687-92
Círculo(s) de confusión, 880, 881
Cirugía láser, 1064
Clasificación de partículas, 1178-80
Clausura de plantas de energía nuclear, 1140
Cloruro de sodio, enlaces en el, 1073, 1075-76, 1085
CMB, 1193, 1213-15, 1219, 1220, 1224
CMOS, semiconductores de metal óxido complementario, 647*pr*, 878
COBE, 1214
Código(S)
genético, 1079
de barras, 1063
Coeficiente
de reflexión, 1037, 1043*pr*
de temperatura de resistividad, 658, 659-60
de transmisión, 1037, 1143*pr*
Coherencia, 906
Colapso gravitacional, 1209
Colector (de transistor), 1097
Colisión protón-antiprotón, 1164
Colisionador Lineal Internacional (ILC), 1170
Colonoscopio, 856
Color(es)
del cielo, 945
de estrella, 988, 1199
de luz relacionada con frecuencia y longitud de onda, 852-4, 903, 906, 912
de nube, 945
de quarks, 1184-85
en cámara digital, 878
Combustión (= fusión), 1200*np*
Compartir electrones, 1072
Complementariedad, principio de, 997
Compton, A. H., 994, 1017, 1138
Compuerta, 1097
Computadora(s)
disco duro, 775
discos para, 775
impresoras y, 582-83
información digital y, 775
memoria de, 644*pr*
monitor de, 621, 943
teclado de, 631
Comunicación inalámbrica, 812, 829-32
Condición(es)
cuántica de Bohr, 1004, 1010
de frontera, 1030, 1035
de normalización, 1026-27, 1029*np*, 1031-34
Conducción
carga por, 562-63
eléctrica, 561, 651-97
en sistema nervioso, 669-70
Conductancia, 675*pr*
Conductividad
eléctrica, 659, 668
en sistema nervioso, 669-70
Conductor(es)
carga de, 1094
de fase, 693, 694
eléctrico, 561, 577, 654*ss*
teoría cuántica de, 1091-92
Conexión a tierra, 562, 655
Conferencia Solvay, 1017
Configuración electrónica, 1053-54
Confinamiento
de quarks, 1185, 1217
en fusión, 1145-46
inercial, 1145, 1146
magnético, 1145
Conmutador, 720
Conos, 882
Conservación de energía, ley de, 1026, 1112, 1115, 1117, 1176
Constante(s)
cosmológica, 1223, 1224
de decaimiento, 1117-18
radiactivo, 1117-18
de estructura fina, 1060
de fase, 1028*np*, 1030
de Hubble, 1210
de Madelung, 1085-86
de normalización, 1032
de Planck, 989, 1022
de Rydberg, 1002, 1007
de tiempo, 688, 791, 1119
dieléctrica, 638
fundamentales: segunda de forros
valores de: segunda de forros
Contador(es), 1124-25
de centelleo, 1124
Geiger, 627*pr*, 1124
Contra
fem (fuerza contraelectromotriz), 768-69
torca, 769
Contracción de la longitud, 964-67, 970
Convenciones de signo (óptica geométrica), 845-46, 849, 871
Conversión interna, 1117
Convertidor digital a analógico (DAC), 706*pr*

Corazón
desfibrilador, 638, 648*pr*, 692
marcapasos, 692, 787
Córnea, 883
Corriente(s)
alterna (ca), 664-65, 677*np*, 796-803
convencional (*defn*), 655
cuadrática media (*rms*), 664-65
de conducción (*defn*), 816
de desplazamiento, 816
de fuga, 694
de sensibilidad, escala completa, 695
directa (cd), 664 (*véase también* Corriente eléctrica)
eléctrica, 651, 654-58, 662-69, 683*ss* (*véase también* Circuitos eléctricos)
alterna (ca), 664, 65, 677*np*, 697-803
campo magnético que produce, 710-13, 746
conducción (*defn*), 816
convencional, 655
de fuga, 694
densidad de, 666-68
desplazamiento de, 816
directa (cd) (*defn*), 664
fuerza magnética sobre, 710-19
inducida, 759
ley de Ohm y, 655-58
parásita, 770
pico, 664
producida por campo magnético, 759-60
riesgos de, 692-94
rms, 664-65
vista microscópica de, 666-68
inducida, 758-76, 785*ss*
parásitas (eléctricas), 770
pico, 664
Corrimiento(s)
al azul, 1211
al rojo, 979, 1204, 1210-11, 1215
cosmológico, 1211
gravitacional, 1211
Compton, 994
deducción del, 995
de fase, 911, 913, 914
de franjas, 956
químico, 1157
Cortocircuito, 663
Cosmología, 1188, 1193-1225
Coulomb, Charles, 563
Coulomb (C) (unidad), 564, 737
definición operativa de, 737
Crick, F., 939
Cristal líquido, 943-44
Cristalino, 883
normal, 882
Cristalografía, 939
de rayos X, 939
Criterio
de Lawson, 1145
de Rayleigh, 930
Cromodinámica cuántica (QCD), 1173, 1184-87
CRT, tubo de rayos catódicos, 620-21, 723, 831
Cruz de Einstein, 1207
Cuadrupolo eléctrico, 589*pr*
Cuantización
de cantidad de movimiento angular, 1004, 1046-47
de carga eléctrica, 564
de energía, 989, 1003-9, 1031
del espacio, 1047
Cuanto de energía, 989
Cuerpo negro, 988
Cúmulo(s)
de estrellas, 1196
de galaxias, 1196, 1220, 1224
Curie (Ci) (unidad), 1147
Curie, Marie, 1017, 1110
Curie, Pierre, 750, 1110
Curvas exponenciales, 688-90, 791, 1118-19
Curvatura(s)
de campo, 892
del espacio, 1207-9, 1220-22
del Universo (espacio-tiempo), 1207-9, 1220-21
negativa, 1208, 1221
positiva, 1208, 1221
Cygnus X-1, 1209
Chadwick, James, 1105, 1162*pr*
Chamberlain, Owen, 1175
Chernobyl, 1139
Chip de computadora, 1071, 1094, 1098
Choque eléctrico, 692-94

D

DAC, convertidor digital analógico, 706*pr*
Daño biológico por radiación, 1146-47
Davisson, C. J., 998
De Broglie, longitud de onda de, 997-98, 1009-10, 1019, 1025, 1165-66
aplicada a átomos, 1009-10
De Broglie, Louis, 997, 1009, 1017, 1018
Debye (unidad), 617
Decaimiento, 1110
alfa, 1038, 1111-14, 1117
beta, 1111, 1114-16, 1117, 1121, 1185, 1202
de partículas elementales, 1175-86
de protones, 1179, 1187-88
exponencial, 688-90, 791, 1118-19
gamma, 1111, 1116-17
inverso, 1202
nuclear, 976
radiactivo, 1110-26
tasa de, 1118-20
tipos de, radiactivo, 1111, 1117
y tunelamiento, 1038, 113
Declinación magnética, 709
Defectos del ojo, 883-85, 892
Degeneración
de electrón, 1201
del neutrón, 1202
Dendritas, 669
Densidad(es)
crítica del Universo, 1221-22
de carga, 596
de corriente, 666-68
de energía
en campo eléctrico, 638, 639
en campo magnético, 790, 826
de estados, 1087-90
ocupados, 1088
del Universo, 1221-22
de probabilidad (distribución de probabilidad)
en átomos, 1019, 1028, 1031, 1036, 1045, 1048-49, 1051
en moléculas, 1072-74
superficial de carga, 641
Derivadas, A-6, guarda posterior
Descarga(s)
de capacitor, 690-91
de corona, 612, 645*pr*
Descubrimiento en ciencia, 722
Desechos radiactivos, 1139-41
Desfibrilador, corazón, 638, 692*np*
Desintegración, 1110

Desmagnetización, 749
Demodulador, 830-1
Desplazamiento de onda, 1019
Detección de radiación, 1124-26, 1149
Detector(es)
  colisionador en Fermilab (CDF), 1125
  de humo, 1114
  de metales, 770
  de partículas, 1096, 1124-25, 1164, 1170
    y radiación, 1124-26
  de rayos gamma colimados, 1152
  semiconductor, 1125
  UA1, 1173
Determinismo, 1024-25
Deuterio, 1105, 1132, 1138, 1142-45
Deuterón, 1132
Devanado(s), 720
  no inductivo, 788
Diagrama(s)
  de fasores, 800, 907, 925, 937
    circuitos de ca, 800
    interferencia y difracción de la luz, 907, 925, 937
  de Feynman, 1172, 1185
  de Hertzprung-Russell, 1199, 1204
  de rayos, 844, 849, 871
  H-R, 1199, 1204
  para resolución de problemas, 571, 849, 871
  potencial, energía, 1074-77
Diamagnetismo, 749-50
Diamante, 855
Dieléctricos, 638-40
  descripción molecular de los, 640-42
Diferencia de potencial, eléctrico, 608*ss* (*véase también* Potencial eléctrico; Voltaje)
Difracción, 901, 921-39, 1062
  como límite a la resolución, 929-33
  de electrones, 998-9
  de Fraunhofer, 922*np*
  de Fresnel, 922*np*
  de luz, 901, 921-39
  de rayos X, 938-39
  de una sola rendija, 922-27
  distinción con interferencia, 929
  en experimento de doble rendija, 927-29
  mediante una sola rendija, 922-27
  por abertura circular, 929-30
Dilatación del tiempo, 960-64, 970
Dínamo, 766-68
Dinodos, 1124
Diodo(s), 1038, 1095-96, 1125
  con polarización
    directa, 1095
    inversa, 1095
  de unión *pn*, 1094-97, 1125
  emisor de luz (LED), 1096
  foto-, 992, 1096
  láseres, semiconductor, 1063
  semiconductores, 1094-96
  túnel, 1038
  Zener, 1095
Dioptría (D) (unidad), 868
Dipolo(s)
  eléctrico, 576, 579-80, 617, 641
  magnéticos y momentos dipolares magnéticos, 718-19, 745, 1057-59
  momentos dipolares
    de átomos, 1057-60
    de núcleos, 1107
    eléctrico, 576, 579-80, 617, 641
    magnético, 718-19, 745
Dirac, P. A. M., 1017, 1047, 1087*np*, 1174
Disco(s)
  Airy, 929
  compactos, 920*pr*, 935, 1063
Dispersión, 853
  de Bragg de rayos X, 1065
  de rayos X, 994-95
    de Bragg, 1065
  de la luz, 945
  elástica, 1135
  inelástica, 1135
Dispositivo(s)
  de carga acoplada (CCD), 878
  electrónicos, 1093-98
  no lineal, 1096
  no óhmico, 656
  termonucleares, 1144
Distancia(s)
  astronómica, 1194, 1197, 1199, 1203-4
  de equilibrio, 1077, 1099*pr*
  de imagen, 840, 845, 857, 870-71
  de objeto, 840, 845, 857, 870-71
  de unificación, 1192*pr*
  focal, 842-43, 848, 867-68, 875, 876-77, 882, 883
    de espejo esférico, 842-43, 848
    de lente, 867-68, 875, 876-77, 882, 883
  relatividad de la, 964-70
Distorsión
  de barril, 892
  de cojín, 892
  por lentes, 892
Distribución
  de Boltzmann, 1061
  de Maxwell de rapideces moleculares, 1145
  de probabilidad
    en átomos, 1019, 1028, 1031, 1036, 1045, 1048-49, 1051
    en moléculas
    radial, 1049-51
Divergencia, A-12
División de niveles de energía atómicos, 1090, 1156-57
Divisor de haz, 914
Doblete acromático, 892
Dominios magnéticos, 746
Dopado de semiconductores, 1093*ss*
Dosimetría, 1147-50
  de la radiación, 1147-50
Dosímetro
  de película, 1125, 1149
  termoluminiscente (TLD), 1149
Dosis, 1147-50
  absorbida, 1148
  de todo el cuerpo, 1149
  efectiva, 1148
Dualidad onda-partícula, 997-9, 1009-10
  de luz, 997
  de materia, 997-99, 1009-10, 1018-22

E

EBR, 1148
ECG, 609, 621
Ecuación(es)
  de Bragg, 939
  de Dirac, 1174
  de lente delgada, 870-73
  de Lorentz, 717
  de Maxwell, 813, 817, 819-22, 911*np*, 951, 953, 954, 958, 969
    forma diferencial de A-12-A-13
    en espacio libre, A-13
  de onda, 822
    Schrödinger, 1025-36, 1045-46, 1082, 1090

de Schrödinger, 1025-36, 1045-46, 1082, 1090
dependiente del tiempo, 1027-28
independiente del tiempo, 1025-27
unidimensional, 1025-37
de transformador, 771
del espejo, 845-49
del fabricante de lentes, 876-77
Edad de Hubble, 1213
Edison, Thomas, 620
Efectividad biológica relativa (EBR), 1148
Efecto(s)
coma, 892
Compton, 994-95, 996, 1146
Doppler de la luz, 978-80, 1210
fotoeléctrico, 989-92, 996, 1146
Hall, fem Hall, campo hall, sonda Hall, 723-24, 1094
Raman, 1016
Zeeman, 731*pr*, 1047, 1057, 1059
Einstein, Albert, 513, 952, 954, 957-58, 961, 969, 989, 1017, 1141, 1205-8, 1223
Eje(s)
de una lente, 867
principal, 843
Electricidad, 559-836
estática, 559-642
riesgos de la, 692-94
Electrocardiograma (ECG, EKG), 609, 621
Electrodinámica cuántica (QED), 1172
Electrodo, 653
Electroimán, 747
Electrolito, 653
Electrómetro, 563
Electrón(es)
cantidad de movimiento de, 972
carga en, 564, 722-23
como partícula
beta, 1111, 1114
elemental, 1175-76
como rayos catódicos, 620, 721
conducción, 561
definición de, 999
descubrimiento de, 721-23
en experimento de doble rendija, 1019-20
en producción de pares, 996
espín, 746
fotoelectrón, 992
libre(s), 561, 1029, 1086, 1092
longitud de onda de, 998
mar de, 1174
masa de, 723, 1107
medición
de carga en, 723
de *e/m*, 722-23
movimiento de, en campo eléctrico, 578-79
naturaleza ondulatoria de, 1020
nube de, 1045, 1051, 1072-74
rapidez de, 666-68
trayectoria en campo magnético, 715
-volt (eV) (unidad), 619-20, 1107
Electroscopio, 562-63, 652*np*
Electrostática, 560-642
Elementos, 1053-54
calefactor, 665
de transición, 1054
en lentes, 892
compuestas, 892
origen de los, en el Universo, 1201-2
pesados, 1138
producción de, 1201-2
tabla periódica de los, 1053-54, tercera de forros
transmutación de, 1111, 1132-35
transuránicos, 1134
Emisión
estimulada, 1061-64
termoiónica, 620
Emisor (transistor), 1097
Empaquetado de átomos, 1085
Emulsión fotográfica, 1125
Enanas blancas, 1197, 1199, 1201-2, 1228*pr*
Encanto, 1179*np*, 1182-84
Enchufe eléctrico, 693-94
Energía(s), 607*ss*
ATP y, 1076-77
cinética, 974-6
de fotón, 993
energía potencial eléctrica y, 608
relativista, 974-78
conservación de, 1026, 1112, 1115, 1117, 1176
cuantización de, 989, 1003-9, 1031
de activación, 1075, 1077
de cohesión, 1086
de desintegración (*defn*), 1112
de disociación, 1073
de enlace, 985*pr*, 1006, 1072-3, 1075, 1077, 1108-9
de núcleos, 1108-9
en átomos, 1006
en moléculas, 1073, 1075, 1077
en sólidos, 1086
nuclear, 1108-9
por nucleón (*defn*), 1108
total, 985*pr*, 1108
de Fermi, 1087-90, 1092
de ionización, 1006, 1008
de reacción (*dfn*), 1133
desintegración, 1112
disociación de, 1073
en reposo, 974-76, 1023
eléctrica, 607-9, 619-20, 636-38, 660-62
almacenada en capacitor, 636-38
almacenada en campo eléctrico, 637-38
electromagnética, 1168
en ondas EM, 817, 818, 826-27, 1168
en reposo, 974-76, 1023
en vacío, 1223
Fermi, 1087-89, 1092
fotón, 989-93
ionización, 1006, 1008
masa y, 974-78
nuclear, 1131-59
nucleótido, 1078
oscura, 1165, 1175, 1219, 1222, 1223
potencial, 607-10, 619-20, 636-38 (*véase también* Potencial eléctrico)
eléctrica, 607-10, 619-29, 636-38
electrostática, 619-20
en cristal metálico, 1090
en la ecuación de Schrödinger 1027, 1028, 1030-36
para moléculas, 1074-77, 1082, 1085-86
para núcleo, 1038, 1113
para pozo cuadrado y barreras, 1030-36
principio de incertidumbre y, 1022-23, 1036
punto cero, 1031, 1036-37, 1042*pr*, 1083
relativista, 974-78
rotacional, 1080-82, 1084-85

térmica, transformación de energía eléctrica a, 660
trabajo, relación de la, con 978
umbral, 1134, 1163*pr*
vacío, 1223
vibratoria, 1082-85
molecular, 1082-85
Enfermedad por radiación, 1149
Enfoque, de cámara, 879-80
Enlace(s) (*defn*), 1072-73
covalente, 1072-73, 1074, 1085, 1086
de van der Waals, 1077-80, 1086
débil, 1077-80, 1086
dipolo-dipolo, 1077
inducido, 1077
en sólidos, 1085-86
fuerte, 1072-74, 1077-78, 1085-86
hidrógeno, 1077-80
iónicos, 1073, 1075, 1085, 1086
metálico, 1086
molecular, 1071-74
parcialmente iónico y covalente, 1074
químicos, 1072-80
y fuerzas de van der Waals, 1077-80, 1086
Enlazamiento
en moléculas, 1071-74
en sólidos, 1085-86
Enzimas, 1077
Época de recombinación, 1219
Equivalencia, principio de, 1205-6
Era
de la gran unificación, 1217
de la radiación, 1218-19
hadrónica, 1217-18
leptónica, 1216, 1218
Escala de unificación, 1187
Escaneo TC, 1153-54, 1156
Escáner, haz en abanico, 1153-54
Escape termonuclear, 1203
Escenario inflacionario, 1217, 1219-21
Escintilograma, 1152
Escobillas, 720, 766
Espacio(s)
absoluto, 953, 957
curvatura del, 1207-9, 1220-22
euclideano y no euclideano, 1207-8
relatividad del, 964-70
euclideano, 1207-8
no euclideano, 1207-8
-tiempo (4-D), 967, 1207
curvatura del, 1207-9, 1220-21
Espectro(s), 934
atómicos, 1001-3, 1006-8
continuo, 935, 988
de absorción, 936, 1002, 1084
solar, 936, 1002
de bandas, 1080, 1084-85
de emisión, 987-88, 1001-3, 1005-8
atómica, 936, 1001-3, 1006-8
de la luz visible, 852-54
de líneas, 935-36, 1002ss, 1017
de rayos X, 1054-56
electromagnético, 823, 852-54
emitido por objeto caliente, 987-88
líneas de, 935-36, 1002*ss*, 1017
molecular, 1080-85
visible, 852-54
Espectrómetro(s)
de luz, 935-36
de masa (espectrógrafo), 724-25
tipo Bainbridge, 724
Espectroscopio y espectroscopia, 935-36, 948*pr*
Espejismo, 903
Espejo(s), 839-49
aberraciones de los, 889*np*, 891-92,
amplificador, 848
cóncavo, 842, 846-48, 889
convexo, 842, 848-49
de Lloyd, 919*pr*
distancia focal de, 842-43, 848
esféricos, imagen formada por, 842-49, 889, 892
parabólico, 843
plano, 838-42
retrovisor curvo, 849
utilizados en telescopio, 889
Espín
bosón, 1184
electrónico, 746, 1047, 1058-60, 1072
fermión, 1184
hacia abajo, 1047, 1156-57
hacia arriba, 1047, 1156-57
nuclear, 1107
Estabilidad de partículas, 1180-81
Estadística
de Bose-Einstein, 1087*np*
de Fermi-Dirac, 1087-90
Estado(s)
de energía, en átomos, 1003-9
de Rydberg, 1070*pr*
energía, en átomos, 1003-9
estacionarios en el átomo, 1003-10
excitado
de átomo, 996, 1005*ss*
de núcleo, 1116-17
de nucleón, 1181
fundamental del átomo, 1005
ligado(s), 1035
metaestable, 1061, 1117
ocupados, densidad de, 1088
vacío, 1174-75, 1220
Estator, 768
Estéreo, 689, 831*np*
Esterilización, 1151
Estrategias para resolución de problemas, 571, 685, 716, 740, 763, 849, 871, 913
Estrella(s), 1142-43, 1194-1204*ss*
agujeros negros y, 1197, 1202, 11203, 1208-9, 1221, 1228*pr*
color de las, 988, 1199
cúmulos de, 1196
de neutrones, 1100*pr*, 1197, 1202
diagrama H-R, 1199, 1201, 1204
distancia a las, 1203-4
enanas blancas, 1197, 1199, 1201, 1228*pr*
evolución de las (estelar), 1200-3
fuente de energía de las, 1142-43, 1200-2
gigantes rojas, 1197, 1199, 1201
magnitud de las, 1228*pr*
quásares, 1197, 1207 (fig.)
Sol (*véase también* Sol)
supernovas, 1177-78, 1197, 1201-4
temperatura de las, 1198
tipos de, 1197 y *ss*
variables, 1204
Estructura(s)
atómica
modelo de Bohr de, 1003-9, 1017, 1044-46
de átomos complejos, 1052-54
de átomos de hidrógeno, 1054-51
modelo nuclear de la, 1001
modelo planetario de la, 1001
mecánica cuántica de, 1044-65
niveles y subniveles en la, 1053-54
primeros modelos de, 1000-1
del Universo, 1219-20

fina, 1017, 1044, 1047, 1060
nuclear, 1105-7
reticular, 1085, 1093, 1097
Estufa
de inducción, 762
eléctrica, 660
Eta (partícula), 1179
Éter, 954-57
Evento, 958*ss*
Evolución estelar, 1200-3
Exceso de masa (*defn*), 1129*pr*
Expansión(es)
binomial o, A-1, guarda posterior
del Universo, 1209-13, 1221-23
matemáticas, A-1
Experimento(s)
de doble rendija (electrones), 1018, 1019-20
de doble rendija (luz), 903-6
intensidad en patrón, 906-9, 927-29
de la gota de aceite de Millikan, 723
de la gota de aceite, 723
de Michelson y Morley, 954-57
de Stern-Gerlach, 1058-59
de Young de la doble rendija, 903-9, 927-29, 1019-20
mental, 958*ss*
definición de, 958
Exploración TAC (tomografía axial computarizada), 1153-54, 1156
Explorador de fondo cósmico (COBE), 1214
Exponentes, A-1, guarda posterior
Exposímetro (fotográfico), 992
Extensión eléctrica, 663
Extragaláctico (*defn*), 1196
Extrañeza, 1179*np*, 1181-82
conservación de, 1181
Extraterrestres, posible comunicación con, 834*pr*

F

Factor(es)
de Boltzmann, 1061, 1088
de calidad
(QF) de radiación, 1148
(valor Q) de un sistema resonante, 810*pr*
de difracción, 928
de escala del Universo, 1211
de Fermi, 1088
de interferencia, 928
de multiplicación, 1138-39
de potencia (circuito ca), 801
de radiación (QF), 1148
g, 1058
Falla a tierra, 776
Farad (F) (unidad de capacitancia), 629
Faraday, Michael, 568, 758-60
Faros de automóvil, 609, 661, 677
Fase
en circuito de ca, 796-802
de ondas, 904, 910-14, 933
Fechamiento
con carbono, 1104, 1122-24
con tritio, 1129*pr*
geológico, 1123-24
radiactivo, 1122-24
rubidio-estroncio, 1128*pr*
fem, 678-79, 758-66, 767, 768
circuito *RC* con, 689
contra, 768-69
de generador, 766-69
de movimiento, 765-66
en serie, 686-87
y en paralelo, 686-87
fotones y, 1172
fuentes de, 678, 758-68
Hall, 723-24
inducida, 758-69, 789
paralela, 686-87
Femtómetro (fm) (unidad), 1106
Fenómeno de interferencia de onda, 903
Fermi (fm) (unidad), 1106
Fermi, Enrico, 997, 997, 1018, 1053, 1087*np*, 1115, 1134, 1138, 1180-81
Fermilab, 1164, 1168, 1169
Fermiones, 1053, 1087, 1184
Ferromagnetismo y materiales ferromagnéticos, 708, 746-49
Feynman, R., 1172
Fibra óptica, 855-56
Fibrilación ventricular, 638, 692
Filtro(s)
de paso alto, 799, 811*pr*
de paso bajo, 799, 811*pr*
y de paso alto, 799, 810*pr*, 811*pr*
Física
clásica (defn), 952, 1018
de altas energías, 1165-89
de estado sólido, 1085-98
de materia condensada, 1085-98
de partículas 1164-89
elementales, 1164-89
del neutrón, 1134
moderna (*defn*), 952
nuclear, 1104-64
Fisión nuclear, 1136-41
Fitzgerald, G. F., 957
Fluctuaciones cuánticas, 1220
Flujo(s)
eléctrico, 592-93, 814
luminoso, 915
magnético, 760*ss*, 773-75, 816, 820
radiante, 915
Fluorescencia, 1060
Foco, 843
Cassegrain, 889
newtoniano, 889
Fondo radiactivo natural, 1114, 1148
Forma vectorial de la ley de Coulomb, 567
Formación de imágenes
con fines médicos, 1107, 1152-59
mediante resonancia magnética (IRM), 1107, 1158-59
Fórmula(s)
de áreas, A-1, guarda posterior
de Balmer, 1002, 1007
de volumen, A-1, guarda posterior
Fosforescencia, 1061
Fósforo, 1124
Fotino, 1189
Fotocátodo, 1124
Fotocelda, 626*pr*, 990
Fotoconductividad, 582
Fotocopiadora, 569, 582-83
electrostática, 569, 582-83
Fotodiodo, 992, 1096
Fotón(es), 989-97, 1019, 1053, 1165, 1171-72, 1175, 1178-79, 1183, 1217-19
absorción de, 1060-61
cantidad de movimiento del, 993
desacoplado(es) (Universo temprano), 1215, 1219
energía de, 993
fem y, 1172
masa de, 993
mediación de (fuerza), 1172
virtual, 1172

Fotosíntesis, 993
Foucault, J., 902
Fóvea, 882
Fragmentos de fisión, 1136-40
Franjas de interferencia, 904-6, 956, 1065
Franklin, Benjamin, 560, 600
Franklin, Rosalind, 939
Frecuencia(s)
  de ciclotrón, 715, 1167
  de luz, 823, 853, 854
  de portador, 830
  modulada (FM), 830, 831*np*
  resonante, 802
Freno de automóvil, LED para señalar, 1096
Frente de onda, 901
Fresnel, A., 922
Frisch, Otto, 1136
f-stop (*defn*), 879
Fuente
  de fem, 678, 758-68
  de luz incoherente, 906
Fuerza(s), 1173, 1188
  contraelectromotriz, 768-70
    (contra fem), 768-69
  de atracción, 1074-75, 1171
  de color, 1185-86, 1187
  de corto alcance, 1110, 1205
  de gravedad, 1173, 1188, 1189, 1193, 1202, 1205-9, 1221, 1223
  de la naturaleza, base unificada para las, 1186
  de largo alcance, 1110, 1205
  de repulsión, 1074-75, 1171
  de van der Waals, 1077-80, 1086
  eléctrica, 559, 563-67, 717
    e ionización, 1146
    en biología molecular, 581-82, 1077-80
    ley de Coulomb para, 563-67
  electrodébil, 559*np*, 1186-88
  electromagnética, 717, 1118, 1171-73, 1178-79, 1186-88, 1205
  electromotriz (fem), 678-79, 758-67, 768 (*véase también* fem)
  electrostática, 563-67, 581-82, 1077
    definición de, 565
    energía potencial para, 607-8
  gravitacional, 1118, 1173, 1188, 1193, 1202, 1205-9, 1223
    debida a distribución de masa esférica, A-9-A-11
  magnética, 707, 710-19
    sobre cargas eléctricas en movimiento, 714-17
    sobre corriente eléctrica, 710-14, 718-19
  nuclear, 1110, 1115, 1171-89, 1205
    débil, 1110, 1115, 1173-89, 1205
    fuerte, 1110, 1134*np*, 1171-89, 1205
  relación de cantidad de movimiento a, 972, 974
  tipos de, en la naturaleza, 559*np*, 1173, 1188
Función(es)
  de onda, 1018-20, 1025-39
    para átomo H, 1045, 1046, 1049-51, 1072
    para pozo cuadrado, 1030-36
  de probabilidad Fermi-Dirac, 1088, 1092
  de trabajo, 990-91, 1090
  e identidades trigonométricas, A-4-A-5, guarda posterior
Fusible, 662-63
Fusión
  deuterio-tritio (d-t), 1144-45
  d-t (deuterio-tritio), 1144-45
  estelar, 1142-44
  nuclear, 1141-46, 1200-1
    en estrellas, 1142-44, 1200-1

G

Galaxia(s), 1194-97, 1209-12, 1219, 1220, 1222-24
  agujero negro en el centro de, 1197, 1209
  corrimiento al rojo de 1210-11
  cúmulos de, 1196, 1220, 1224
  en espiral, 1196
  masa de, 1195
  origen de las 1220, 1224
  Remolino, 1196
  supercúmulos de, 1196-97
Galileo, 825, 839, 887, 887*np*, 952, 968, 1194
Galvani, Luigi, 652
Galvanómetro, 695-96, 721, 783*pr*
  balístico, 783*pr*
Gamow, George, 951, 1214
Ganancia
  de corriente, 1097
  de voltaje (*defn*), 1097
Gas(es)
  de Fermi, 1087
  ideal, 1089
    teoría cinética del, 1089
  nobles, 1054, 1086
Gauss (G) (unidad), 712
Gauss, K. F., 591
Gell-Mann, M., 1182
Generación de potencia, 766-67
Generador(es)
  ca, 766-67
  cd, 767, 768
  eléctrico, 766-68
  fem de, 766-69
  van de Graff, 607, 627*pr*
Geodésica, 1207
Geometría, A-2
  plana, A-2
Germanio, 1093
Germer, L. H., 998
GFCI, interruptores de circuito de falla a tierra, 694, 776
Gigantes rojas, 1197, 1199, 1201
Glaser, D. A., 1125
Glashow, S., 1186
Globo de plasma, 810*pr*
Glueballs (bolas de pegamento), 1185*np*
Gluino, 1189
Gluones, 1165, 1173, 1178, 1179, 1183, 1184-86
GPS, sistema de posicionamiento global, 964
Grabadora de cinta, 749, 775
Gradiente de potencial eléctrico, 618
Gran
  Colisionador de Hadrones (LHC), 1168-70, 1189
  implosión, big crunch, 1220, 1221
Gravedad, 1173, 1188, 1193, 1202, 1223
  curvatura del espacio y, 1205-9
  efecto sobre la luz, 1206-7, 1209
  fuerza de, 1173, 1188, 1189, 1193, 1202, 1205-9, 1221, 1223
Gravitación universal, ley de la, 564, 1205
Gravitino, 1189
Gravitón, 1173, 1189
Gray (Gy) (unidad), 1148
Grimaldi, F., 901, 906

Groves, Leslie, 1141
GSM, 832
Guth, A., 1219

H

Hadrones, 1179, 1182-85, 1217
Hahn, Otto, 1136
Halógenos, 1054
Hall, E. H., 723
Haz(ces)
  colimado, 1152*np*, 1153
  colisionante(s), 1169-71
  en abanico, en escáner, 1153-54
h-barra, 1022, 1048
Heisenberg, W., 987, 1017, 1018
Helio, 1052, 1108, 1111, 1133, 1142
  evolución estelar y, 1200-1
  producción primordial de, 1218, 1218*np*
Henry (H) (unidad), 786
Henry, Joseph, 758
Hertz, Heinrich, 823
Hipermetropía, 883, 884
Hipótesis cuántica de Planck, 988-89
Hiroshima, 1141
Histéresis, 748-49
  circuito de, 748
Holograma
  de luz blanca, 1065
  de volumen, 1065
  holografía y, 1064-65
Homogéneo (Universo), 1212
Hooke, Robert, 910*np*
Horizonte, 1216
  de eventos, 1209
HST (*véase también* Telescopio Espacial Hubble)
Hubble, Edwin, 979, 1196, 1210
Hueco(s)
  en semiconductores, 1091-94, 1097
  positivos, 1093
Huygens, C., 901

I

Idénticos (electrones), 1053
Ignición
  de automóvil, 609, 772
  de fusión, 1145
Iluminación de estado sólido, 1096
Iluminancia, 915
Ilusión óptica, 851, 903
Imagen(es)
  como pequeño patrón de difracción, 929-39
  de falso color, 1154
  escaneo TAC, 1153-54, 1156
  formada por
    espejo esférico, 842-49, 889
    espejo plano, 838-41
    lentes, 867*ss*
  IRM, 1107, 1158-59
  PET y SPECT, 1156
  por resonancia magnética, IRM, 1107, 1158-59
  real, 804, 844, 869
  RMN, 1107, 1156-59
  virtual, 840, 870
  visión de, 847, 848, 869
Imán(es), 707-9, 746-47
  dominios de, 746
  electro-, 747
  permanente, 746
  superconductor, 747
Impedancia, 798, 800-3
Impresora(s)
  de inyección de tinta, 583
  láser, 583
Incertidumbre (en mediciones), 1020-23
Incidencia, ángulo de, 838, 850
Inclinación, ángulo de, 709
Índice de refracción, 850
  dependencia de la longitud de onda (dispersión), 853
  en ley de Snell, 851
Inducción
  carga mediante, 562-63
  electromagnética, 758*ss*
  estufa de, 762
  ley de Faraday de, 760-61, 773-74, 817
  magnética, 710 (*véase también* Campo magnético)
Inductancia, 786-89
  auto-, 788-89
  de cable coaxial, 789
  en circuitos de ca, 790-803
  mutua, 786-87
Inductor(es), 788, 1098
  en circuitos, 790-803
  energía almacenada en, 790
  reactancia de, 797
Información
  analógica, 775
  digital, 775
Instrumentos ópticos, 878-92, 914, 929-38
Integración por partes, 1034, 1050, A-6, A-7
Integral(es), A-6, A-7, A-12, A-13, guarda posterior
  definida, A-7
  de superficie, A-13
  de volumen, A-12
  indefinida, A-6-A-7
Intensidad
  de luz, 915, 1019
  de onda, 826-27, 906-9, 924-29
  de vector de Poynting, 827
  en interferencia y patrones de difracción, 906-9, 924-28
  luminosa, 915
Interacción(es)
  de fotones, 996
  de partículas, 1175*ss*
  espín-órbita, 1047, 1060
Intercambio(s)
  de fotón, 1171-73
  de mesón, 1172-73
  de partículas, 1171-73, 1185
Interferencia(s), 903-14
  constructiva, 904, 913, 914, 1072
  de electrones, 1019-20, 1072
  de ondas de luz, 903-14, 928-29
  de película delgada, 909-14
  destructiva, 904, 913, 914, 1072
  distinción con difracción, 929
  fenómeno de, ondulatoria, 903
  por películas delgadas, 909-14
Interferómetro(s), 914, 954-57
  de Michelson, 914, 954-57
Interpolación, A-3
Interpretación de Copenhagen de la mecánica cuántica, 1024
Interruptor(es) de circuito
  de falla a tierra (GFCI), 694, 776
  magnético (disyuntores), 662-63, 694, 747, 776
Intervalo espacio-tiempo, 967
Inversión de población, 1062-63
Ion (*defn*), 561
Iris, 882
IRM, imágenes por resonancia magnética, 1107, 1158-59
Isótopo(s), 725, 1105-6, 1110-11
  de hidrógeno, 1105
  en medicina, 1151-52

tabla de, A-14-A-17
vida media de, 1119*np*, 1129*pr*
Isotrópico (Universo), 1212
ITER, 1131, 1146

J

J (cantidad de movimiento angular total), 1059
Jeans, J., 988
Jets (chorros de partículas), 1164
Joule (j) (unidad), 619, 620, 661
Joyce, James, 1182*np*
Joyero, lupa de, 887
Júpiter, lunas de, 825, 887

K

Kant, Emmanuel, 1196
Kaón, 1179, 1181
Kepler, Johannes, 887*np*
Kilowatt-hora (kWh) (unidad), 661
Kirchhoff, G. R., 683

L

Laboratorio de Física de Plasma de Princeton (PPPL), 1146
Laboratorio de Los Álamos, 1141
Lambda (partícula), 1179, 1181
Land, Edwin, 940
Lantánidos, 1054
Láser(es), 1061-64
cirugía y uso de, 1064
continuo, 1063
de colorante, 1063
de diodo semiconductor, 1063
de estado sólido de tierra rara, 1063
de gas, 1063
de rubí, 1062
de unión, 1063
helio-neón, 1062
pulsátil, 1063
químicos, 1063
Laue, Max von, 939
Lawrence, E. O., 1166
Lawson, J. D., 1145
LCD, pantalla de cristal líquido, 620, 831, 878*np*, 943-44
LED, diodo emisor de luz, 1096
Lente(s), 866-92
acromática, 892
amplificación de, 871
anteojos y, 883-85
cilíndrica, 884
combinación de, 874-75
compuesta, 892
convergente, 866ss
corrección de color de, 892
correctiva(s), 883-85
correctora de color, 892
de aumento, 866, 885-87
de contacto, 885
delgada (*defn*), 867
delgada, 867-77 y ss
distancia focal de, 867, 868, 875, 877
divergente, 867*ss*
eje de, 867
esférica, 858
gran angular, 882, 892
gravitacionales, 1206-7
magnética, 1000
negativa, 871
normal, 882
objetivo, 888, 889, 890, 932
ocular, 888, 890
potencia de (dioptrías), 868
positiva, 871
recubrimiento de, 913-14
resolución de, 881, 929-32
telefoto, 882
zoom, 882, 883
Leptón tau, 1176, 1178, 1179, 1183
Leptones, 1165, 1171, 1175-76, 1178, 1179, 1182-83, 1185-87, 1189, 1217
Ley(es)
de Ampère, 737-43, 813-17
de Biot-Savart, 743-45
de conservación
de cantidad de movimiento, 1175-76
de carga eléctrica, 560, 1117, 1175
de energía, 1026, 1112, 1115, 1117, 1176
de extrañeza, 1181
de número bariónico, 1175, 1187, 1217
de número leptónico, 1175-76, 1187, 1217
de número nucleónico, 1117, 1175-76, 1180
en física nuclear y de partículas, 1117, 1175
en interacciones de partículas elementales, 1172, 1175-76
en procesos nucleares, 1115
violación aparente de las, en decaimiento beta, 1115
de Coulomb, 563-67, 593-94, 600, 817, 1076
forma vectorial de la, 567
de cuadrado inverso, 563-4
de Curie, 750
de decaimiento radiactivo, 1118, 1119
de desplazamiento de Wien, 988, 1198
de Gauss, 591-600
para magnetismo, 816, 817
de gravitación universal de Newton, 564, 1205
de Hubble, 1210, 1213, 1223
de inducción de Faraday, 760-61, 773-74, 817
de Lenz, 761-64
de Newton del movimiento, 972, 1018, 1024, 1025
de Ohm, 655-58, 668, 680, 685
de Snell, 851-52, 856, 876, 902
ecuación o, de Stefan-Boltzmann, 1198
LHC, Gran Colisionador de Hadrones, 1168-70, 1189
Libertad asintótica, 1185
Límite(s)
de Chandrasekhar, 1201
de difracción de resolución de lentes, 929-30
Limpiador de aire, electrostático, 645*pr*
Limpiaparabrisas, 691
Línea(s)
de absorción, 936, 1002, 1081, 1084-85
de campo
eléctrico, 575-76, 616
magnético, 708
de fuerza, 575-76, 708
de transmisión, 772-73, 825
equipotenciales, 616-17
K, 1056
Linterna, 652-57
Logaritmo(s), A-2-A-3, guarda posterior
comunes, A-2-A-3
naturales, A-2

Longitud(es)
de enlace, 1077, 1099*pr*
de onda
absorción de, 1008
como límite de resolución, 932, 1165-66
Compton, 994
de corte, 1055-56
de De Broglie, 997-98, 1009-10, 1019, 1025, 1165-66
de partículas materiales, 997-9, 1009-10
dependiente de índice de refracción, 853, 902
de Planck, 1216
estándar, 914
propia, 965
relatividad de, 964-70
Lorentz, H. A., 957, 1017
Lumen (lm) (unidad), 915
Luminosidad
estrellas y galaxias y, 1197, 1204
intrínseca, 1197, 1204
Luna, 1194
Lupa de joyero, 887
Luz, 823, 825-6, 837-946 (*véase también* Difracción; Intensidad; Interferencia; Reflexión; Refracción)
blanca, 852-54
coherente, 906, 1061, 1064
color de, y longitud de onda, 852-54, 903, 906, 912
como onda electromagnética, 823-26
como partículas, 902, 989-97
corrimiento Doppler para la, 978-80, 1210
del cielo, 945
desviación gravitacional de, 1206-7, 1209
dispersión de la, 853, 945
dualidad onda-partícula de la , 997
espectrómetro y, 935-36
frecuencias de, 823, 853, 854
fuentes
coherentes de, 906
incoherentes de, 906
infrarroja (IR), 823, 824, 852, 936, 948*pr*
intensidad de, 915, 1019
linealmente polarizada, 940*ss*
longitudes de onda de la, 823, 852-54, 903, 906, 912
modelo de rayos de, 838ss, 867*ss*
monocromática (*defn*), 903
no polarizada (*defn*), 941
onda de, tunelamiento de, 1038
plano-polarizada, 940
polarizada, 940-43, 949*pr*
rapidez de la, 822, 825-26, 850, 902, 953, 957, 975
reflexión total interna de la, 1038
teoría
fotónica (partícula) de la, 989-97
ondulatoria de la, 900-45
tubería de, 855
ultravioleta (UV), 823, 824, 852
UV, 823, 824, 852
visible, 823, 852-54
longitudes de onda de la, 823, 852-54

M

Magnéticos, polos, 707-9
de Tierra, 709
Magnetismo, 707-90
Magnetón
de Bohr, 1057, 1107
nuclear, 1107
Magnitud aparente de estrella, 1228*pr*
Majorana, Ettore, 1177*np*
Mancha o disco de difracción, 929-30
Mapa topográfico, 617
Máquina térmica, 1139
Mar de electrones, 1174
Marcapasos electrónicos, 692, 787
Marco(s) de referencia
inercial, 952*ss*
equivalencia de, 952-53, 957
transformaciones entre, 968-71
no inercial, 952
privilegiado de Maxwell, 953-54
transformaciones entre, 968-71
Marconi, Guglielmo, 829
Masa(s)
atómica, 1024-27
crítica, 1138-41
de electrón, 723, 1107
de fotón, 993
de galaxia, 1195
de neutrinos, 1177-78
-energía, distribución en el Universo de la, 1221-23
en la teoría de la relatividad, 974
en reposo, 974
gravitacional, 1205-6
contra inercial, 1205-6
inercial, 1205-6
luminosidad y, 1198
nuclear, 1105 y *ss*
reducida, 1081
relativista, 974
Materia
anti-, 1175, 1188, 1190*pr*
naturaleza ondulatoria de la, 997-99, 1009-10
oscura, 1165, 1189, 1219, 1222, 1223
Materiales no conductores o aislantes,, 561, 638-42, 658
Mather, John, 1214
Maxwell, James Clerk, 813, 817, 819-20, 822, 823, 953-54
Mecánica cuántica, 1017-98
de átomos, 1044-65
de moléculas y sólidos, 1071-98
interpretación de Copenhagen de la, 1024
no relativista, 1026, 1028
Mediador de fuerzas, 1172
Medicina nuclear, 1150-52
Medición
de carga de electrón, 723
de distancias astronómicas, 1194, 1199, 1203-4
de *e/m*, 722-23
de flujo sanguíneo, electromagnético, 765
de radiación, 1147-50
de rapidez de la luz, 825-26
electromagnética, de flujo sanguíneo, 765
incertidumbre en, 1020-23
precisión de la, 1020-22
Medidor(es)
analógico(s), 695-97, 721
eléctrico(s), 695-97, 721
corrección para resistencia del, 697
Meitner, Lise, 1018, 1136
Memoria(s)
de acceso aleatorio
dinámica (DRAM), 644*pr*, 647*pr*
RAM, 629, 644*pr*

dinámica aleatoria de acceso directo (DRAM), 644*pr*, 647*pr*
Mendeleev, Dmitri, 1053
Mesón(es), 1172, 1173, 1175-76, 1178-79, 1180, 1181, 1183-84, 1185
mu (*véase también* Muón)
pi, 1172-73, 1179, 1180, 1183-85
Metales
alcalinos, 1054
teoría de electrón libre de los, 1086-90
Mho (unidad), 675*pr*
Microampere (μA) (unidad), 654
Micrófono(s)
capacitor de, 699*pr*
condensador de, 699*pr*
magnético, 775
Microonda(s), 824, 1213-14
Microscopio(s), 890-91, 931-33
amplificación de, 890-91, 932, 933, 1000
compuesto, 890-91
de barrido y tunelamiento (STM), 1038-39, 1043*pr*
de fuerza atómica (AFM), 1039
electrónico, 987, 1000, 1021, 1038-39, 1043*pr*
de barrido (SEM), 987, 1000
de transmisión, 1000
fuerza atómica, 1039
poder de resolución del, 932
Michelson, A. A., 826, 914, 954-57
Miliampere (mA) (unidad), 654
Millikan, R. A., 723, 991
Miopía, 883, 884-85
Modelo(s)
atómico
de pudín de pasas, 1001
de Rutherford, 1001
CDM del Universo, 1224
cosmológico, 1216-19, 1224
de Bohr del átomo, 1003-9, 1017, 1044-45, 1046
de concordancia, 1216
de estado estable del Universo, 1213
de gota líquida, 625*pr*, 1136-37
de materia oscura fría (CDM) del Universo, 1224
de rayos de luz, 838*ss*, 867*ss*
estándar
cosmológico, 1216-19
partículas elementales, 1165, 1184-86
vectorial (átomos), 1069*pr*, 1070*pr*
Moderador, 1138-39
Molécula(s), 1071-85
CO, 1082
de hidrógeno, 1072-75, 1080, 1083
diagramas de energía potencial para, 1074-77
enlaces entre, 1071-74, 1077-1080
espectros de, 1080-85
polares, 561, 579, 641, 1073-74
Momento magnético, 718-19, 745
nuclear, 1107
Monopolo magnético, 708, 1221
Morley, E. W., 954-57
Moseley, H. G. J., 1055
Motor(es)
de ca, 720
de cd, 720
eléctrico, 720
fuerza contraelectromotriz en, 768-69
fuerza contraelectromotriz en, 768-69
Movimiento(s), 951-80
de partícula cargada en campo eléctrico, 578-79
leyes de Newton del, 972, 1018, 1024, 1025
ondulatorio (*véase también* Onda(s), Luz)
relativo, 951-80
Mr. Tompkins en el país de las maravillas (Gamow), 951, 982
Multímetro, 695-6
Multiplicadores métricos (SI): guarda frontal
Muón, 1164, 1175-76, 1178-1179
Mutación, 1147

N

Nagasaki, 1141
Naturaleza
ondulatoria
de la materia, 997-99, 1009-10
del electrón, 1020
plana del Universo, 1220
Nebulosas, 1196
Negativo fotográfico, 878*np*
Neptunio, 1134
Neutrino(s), 1114-16, 1165, 1175-79, 1218
electrónico, 1178, 1179
masa de, 1177-78, 1179
muón (muónico), 1178, 1179
tau, 1178, 1179
tipos de, 1175-78
Neutrón(es), 561, 669, 1105, 1165, 1179
demorado, 1139
en reacciones nucleares, 1136-42
papel en la fisión, 1136*ss*
térmico, 1136
Newton, Isaac, 889*np*, 902, 910*np*, 952, 1205, 1208*np*
Nivel(es)
aceptor, 1094
atómicos, 1053
de donador, 1094
de energía
en átomos, 1003-9, 1046-48
en moléculas, 1080-85
en pozo cuadrado, 1031
en sólidos, 1090-91
nuclear, 1116-17
para fluorescencia, 1060
para láseres, 1061-64
de Fermi, 1087-90
donador, 1094
energía (*véase también* Niveles de energía)
Fermi, 1087-90
No conductores o aislantes, materiales, 561, 638-42, 658
Notación espectroscópica, 1059
Nova, 1197, 1203
recurrente, 1203
Nube(s)
de electrones, 1045, 1051, 1072-74
magallánicas, 1196*np*
Núcleo(s), 1105*ss*
compuesto, 1136-37
de reactor, 1139
decaimiento radiactivo del, inestables, 1110-24
estable, 1110
galáctico activo (AGN), 1197
hijo (*defn*), 1111
inestable, 1110*ss*
masas del, 1105-7
modelo de gota líquida del, 625*pr*
padre (*defn*), 1111
tamaño del, 1106
estructura y propiedades del, 1105-7
vidas medias de, 1117-21

Nucleón, 1105, 1165, 1186, 1217-18
Nucleosíntesis, 1200-1, 1218
Núclido (*defn*), 1105
Número(s)
  ASA, 879*np*
  atómico, 1052, 1054-56, 1105
  bariónico, 1175, 1179-80, 1182-83, 1187, 1217
    conservación del, 1175
  cuántico(s), 989, 1004-5, 1031, 1046-49, 1052-53, 1080-85
    de cantidad de movimiento angular rotacional, 1080-81, 1084-85
    de espín, 1047
    magnético, 1046-47, 1057
    orbital, 1046
    principal, 1004ss, 1046-48
    vibratorio, 1083
  de masa, 1105
  atómica, 1105
  de nucleones, conservación del, 1117, 1175-76
  f-stop (*dfn*), 879
  ISO, 879*np*
  leptónico, 1175-77, 1179-80, 1182, 1187
  de tau, 1176-77, 1179, 1183
  electrónico, 1176, 1179, 1183
  muónico, 1176-79, 1183
  neutrónico, 1105

O

Objetos cuasiestelares (QSO), 1197
Observaciones, 952
  e incertidumbre, 1021
Observatorio Yerkes, 888
Occhialini, G., 1173
Ocular, 888
Oersted, H. C., 710
Ohm (Ω) (unidad), 656
Ohm, G. S., 655
Óhmetro, 696, 721
Ojo
  aberraciones del, 892
  acomodación del, 883
  cristalino del, 883
  defectos del, 883-85, 892
  estructura y función del, 882-85
  normal (*defn*), 883
  puntos lejano y cercano del, 883
  resolución del, 930, 932-33
Omega (partícula), 1179
Onda(s), 817*ss*, 823*ss*, 900-45
  amplitud de, 1019
  de gravedad, 1224
  de materia, 997-99, 1009-10, 1019*ss*
  de radio, 823-24, 931
  difracción de, 901, 921-39
  dispersión de, 853
  electromagnéticas (EM), 817-32 (*véase también* Luz)
  EM, 817-32 (*véase también* Luz)
  en fase, 904, 910-14, 933
  frente de, 901
  fuera de fase, 904, 914, 933
  función de, 1018-20, 1025-37, 1045, 1049-51
  gravedad de, 1224
  intensidad de, 826-27
  interferencia de, 903-14
  luz, 821-26, 900-45, 1038 (*véase también* Luz)
  paquete de, 1029
  plana(s), 818, 819, 1028-29
  rapidez de, 819-22 (véase Rapidez de la luz)
  sonora, 824
  transversal(es), onda(s) EM, 819, 940
  tunelamiento y, 1038
Onnes, H. K., 668
Operador gradiente (del), 618*np*
Oppenheimer, J. Robert, 1141
Óptica
  fibra, 855-56
  física, 900-45
  geometría, 838-91
Orden(es)
  de patrón de interferencia o difracción, 904-6, 933-34, 936, 939, 948*pr*
  faltantes, 948*pr*
Orión, 1196
Oscilación(es)
  de sabor, 1177
    de neutrino, 1177
  electromagnética(s), 793-96, 802
  LC, 793-96
Oscilador armónico, 1036, 1042
  simple (OAS), 1036, 1042*pr*
    energía en, 1042*pr*
    vibración molecular como, 1082-83
Osciloscopio, 620, 621
Osteoporosis, diagnóstico de, 995
Óxido de bismuto-estroncio-calcio-cobre (BSCCO), 669

P

Pantalla(s)
  de cristal líquido (LCD), 620, 831, 878*np*, 943-44
  LCD de calculadora, 944
Paquete de onda, 1029
Par partícula-antipartícula, 1175
Paradoja de los gemelos, 963
Paralaje, 1203-4
Paramagnetismo, 749-50
Parámetro
  de corrimiento al rojo, 1211
  de Hubble, 1210, 1213
Parsec (*pc*) (unidad), 1204
Partícula(s)
  alfa (o rayo), 1038, 1111-14
  beta (o rayo), 1111, 1114 (*véase también* Electrón)
  compuestas, 1178, 1179, 1183
  de intercambio (portadoras de fuerza), 1171-73
  delta, 1181
  de Majorana, 1177
  de Yukawa, 1171-73
  elemental(es), 1164-89
  extraña(s), 1181, 1182
  fundamentales, 1178-79, 1183, 1186
  gamma, 1111, 1116-17, 1146, 1171
  J/ψ, 1023, 1183
  K (kaón), 1179, 1181
  libres y ecuación de Schrödinger, 1025-29
  que interactúan fuertemente (*defn*), 1179
  supersimétricas (SUSY), 1189
  virtuales, 1172
  $W^{\pm}$, 1173, 1178-80, 1183, 1185
  Z^0, 1042*pr*, 1173, 1178-80, 1183, 1185
Patrón(es)
  de difracción, 922
    de abertura circular, 929
    de una sola rendija, 922-27
    rayos X y, 938-39
  de interferencia
    doble rendija, 903-9, 1019-20
    rendijas múltiples, 933-36

Pauli, Wolfgang, 1017, 1018, 1052, 1115
Película fotográfica, 878, 879
Penetración de barrera, 1036-39, 1113
Penzias, Arno, 1213-14
Permeabilidad
  magnética, 734, 748
  relativa, 749
Permisividad, 565, 639
TEP, tomografía por emisión de positrones, 1156
Pico de Bragg, 1151
Pie-candela (*defn*), 915*np*
Pila(s)
  eléctrica(s), 653, 678
  seca, 653
Pinzas ópticas, 829
Pión (*véase también* Mesón pi)
Pista sonora, óptica, 992
Pixel, 878, 881, 943-4, 1154
Planck, Max, 989, 1017
Plano(s)
  espejo, 838-42
  focal, 867
  polarización de luz por, 940-44
Planta(s)
  de energía nuclear, 767, 1139-40
  de vapor, 1140
Plasma, 1131, 1145
Plutón, 1194
Plutonio, 1134, 1138, 1140, 1141
Población, inversión de la, 1062-63
Poder
  de amplificación, 886 (*véase también* Amplificación)
    total, 888
  de resolución, 932, 938
Poisson, Siméon, 922
Polarización
  de la luz, 940-44, 949*pr*
    del cielo, 945
    plana, 940-44
    por absorción, 940-42
    por reflexión, 942-43
  y voltaje de polarización, 1095, 1097
Polarizado parcialmente, 945
Polarizador, 941-44
Polaroid, 940-42
Polaroids cruzados, 941-42
Polo(s)
  magnéticos, 707-9
  norte
    de la Tierra, 709
    de un imán, 708
    de la Tierra, 709
  sur
    de la Tierra, 709
    de un imán, 708
Polvo interestelar, 1196
Pope, Alexander, 1208*np*
Portador de fuerza, 1171-73, 1185
Portero automático, 992
Posición
  angular, 1023
  promedio, 1034-35
  incertidumbre en la, 1021-23
Positrón(es), 996, 1116, 1156, 1165, 1174-75
Potencia(s), 660-65, 801
  de recolección de luz, 889
  de una lente, 868
  eléctrica, 660-63
    adaptación de impedancia y, 802-3
    en circuitos ca, 665, 790, 792, 797, 798, 801, 802, 803
    en circuitos domésticos, 662-63
    generación de, 766-68
    transmisión de, 770-73
  nuclear, 1139-41
Potencial (*véase también* Potencial eléctrico)
  de acción, 670
  de Coulomb (*defn*), 613
  de frenado, 990
  de Morse, 1102*pr*
  de reposo, 669-70
  eléctrico, 607-18
    debido a cargas puntuales, 612-15
    de dipolo, 617
    relación con campo eléctrico, 610-12, 617-19
    superficies equipotenciales, 616-17
  gravitacional, 609, 617
Potenciómetro, 705*pr*
Powell, C. F., 1173
Poynting, J. H., 826*np*
Pozo de potencial, 1030-36
  cuadrado, infinitamente profundo, 1030-34
  finito, 1035-36
  infinito, 1030-34
Precipitación radiactiva, 1141
Precipitador, 645*pr*
Presbicia, 883
Presión
  por radiación, 828-29
  solar, 828
Principio(s)
  antrópico, 1225
  cosmológico, 1212
    perfecto, 1213
  de complementariedad, 997
  de correspondencia, 980, 1009, 1018
  de equivalencia, 1205-6
  de exclusión de Pauli, 1052-53, 1072, 1087, 1089, 1184, 1201, 1202
  de Fermat, 864*pr*
  de Huygens, 901-3
  de incertidumbre, 1020-23, 1036, 1072
    de Heisenberg, 1020-23, 1036, 1072
    resonancia de partícula y, 1181
    tunelamiento y, 1113
  de indeterminación, 1021 (*véase también* Principio de incertidumbre)
  de relatividad, 952-53, 957*ss*
  de superposición, 565, 569
  trabajo-energía, 974, 978
Prisma, 852-53
Probabilidad
  en decaimiento nuclear, 1117
  en mecánica cuántica, 1019, 1020, 1024-25, 1033, 1045, 1049-51, 1072-74
Problema
  de neutrino solar, 1177
  materia-antimateria, 1188
Producción de pares, 996
Profundidad
  de alberca, aparente, 852
  de campo, 880
Protección de sobretensión o sobrevoltaje, 792
Proteínas
  forma de las, 1080
  síntesis de, 1079-80
Protoestrella, 1200
Protón, 1105*ss*, 1132, 1141-43, 1151, 1164, 1165, 1179
  decaimiento del, 1179, 1187-88
  vida media del, 1188
Próxima Centauri, 1194
Proyecto Manhattan, 1141

Prueba de armas nucleares, 1141
Psi (en ecuación de Schrödinger, *defn*), 1025-27
Puente(s)
de capacitancia, 646*pr*
de hidrógeno, 581, 1077, 1079
de Wheatstone, 704*pr*
Pulso nervioso, 669-70, 715
Punto(s)
cercano, 883
del ojo, 883
de equilibrio (fusión), 1145
focal, 842-43, 848, 867-68, 883
lejano, 883
del ojo, 883
Pupila, 882

Q

QCD, cromodinámica cuántica, 1174, 1184-87
QF, 1148
Quark(s), 564*np*, 1107, 1165, 1171-73, 1179, 1182-85, 1217-18
abajo (*down*), 1182
arriba (*up*), 1182
cima o verdad, 1164, 1182, 1183
confinamiento de, 1185, 1217
encanto (*charmed*), 1182
extraño (*strange*), 1182
fondo, 1179*np*, 1182-83
Quásares (objetos cuasi-estelares, QSO), 1197, 1207
Quintaesencia, 1223

R

Rad
permitida para el hombre (rem), 1148
unidad, 1148
Radar, 823
Radiación
cósmica de fondo, 1193, 1213-15, 1219, 1220, 1224
anisotropía de, 1214, 1220, 1224
uniformidad de la, 1214, 1220
de cuerpo negro, 987-88, 1198, 1214
de sincrotrón, 1168
electromagnética
EM, 823-24, 852, 936
gamma, 1111, 1116-17, 1146
infrarroja (IR), 823-24, 852, 936
ionizante (defn), 1146
microondas y, 823-24
nuclear
actividad de, 1118, 1120, 1147
alfa, 1111-14, 1117
beta, 1111, 1114-16, 1117, 1202
daño por, 1146-47
detección de, 1124-26, 1149
dosimetría para, 1147-50
exposición humana a la, 1148-50
gamma, 1111, 1116-17, 1146
ionizante (defn), 1146
medición de, 1147-50
tipos de, 1111, 1117
usos médicos de la, 1150-52
rayos X, 823-4, 938-39, 950*pr*, 1056 (*véase también* Rayos X)
ultravioleta (UV), 823-24, 852
Radiactividad, 1104-26
artificial (*defn*), 1111
natural (*defn*), 1111
Radio(s), 829-32
AM, 830
de Bohr, 1005, 1044, 1045, 1049-50
de curvatura (*defn*), 129
del núcleo, 1106
de Schwarzschild, 1209, 1228*pr*
FM, 830-31, 831*np*
nuclear, 1106
Radioisótopo (*defn*), 1111
Radionúclido (*defn*), 1111, 1147
Radiotelescopio, 931
Radón, 1111, 1148, 1150
Raíz cuadrática media, rms
corriente, 664-65
voltaje eficaz, 664-65
RAM (memoria de acceso aleatorio), 629, 644*pr*
Rapidez
de Fermi, 1089
de la luz, 822, 825-26, 850, 902, 953, 957, 975
como rapidez última, 974
constancias de, 957
medición de la, 825-26
de obturador, 879, 881
de ondas EM, 821-22, 825
de película, 879*np*
relativa, 959ss, 968*ss*
última, 974
Rayleigh, Lord, 930, 988
Rayo(s), 838*ss*, 867*ss*
catódicos, 620, 721-22 (*véase también* Electrón)
cósmicos, 1165
de luz, 838*ss*, 867*ss*
gamma, 1111, 1116-17, 1146, 1171
paraxial(es) (*defn*), 843, 1111
X, 823, 824, 938-39, 1054-56, 1117, 1153-54
característicos, 1055
en espectro electromagnético, 823
espectros de, 1054-56
número atómico y, 1054-56
Razón giromagnética, 1058
Reacción(es)
crítica, 1138-41
de neutrón lento, 1133
en cadena, 1137-39, 1141
autosostenida, 1138-41
endoérgica (*defn*), 1133
endotérmica, 1133
exoérgica (*defn*), 1133
exotérmica (*defn*), 1133
nuclear(es), 1132-38
de captura, 1160*pr*
de extracción, 1160*pr*
subcrítica(s), 1139, 1141
supercrítica(s), 1139, 1141
Reactancia, 788, 797, 798
capacitiva, 798-99
inductiva, 797
Reactor(es)
de fusión, 1144-46
de investigación, 1139
de potencia, 1139
de prueba de fusión Tokamak (TFTR), 1145
Experimental Termonuclear Internacional (ITER), 1131, 1146
nuclear(es), 1138-41, 1144-46
reproductor, 1140
Receptores de radio y televisión, 830-31
Rectificación de media onda, 1096
Rectificador(es), 1096, 1099*pr*
de onda completa, 1096, 1099*pr*
tipo puente, 1099*pr*
Recubrimiento
de lentes, 913-14
óptico, 913-14
Reflectores, 865*pr*
Reflexión(es)
ángulo de, 838
cambios de fase durante la, 909-14

de la luz, 837, 838-42
de películas delgadas, 909-14
difusa, 839
especular, 839
ley de, 838
polarización por, 942-43
recubrimiento de lentes y, 913
total interna, 854-56, 1038
Refracción, 850-92, 902-3
ángulo de, 850
de la luz, 850-52, 902-3
en superficie esférica, 856-58
índice de, 850
ley de, 851, 902-3
ley de Snell y, 850-52
por lente delgada, 867-70
Regla(s)
de Kirchhoff, 683-86, 816*np*
regla de los nodos y, 684*ss*
regla de las espiras y, 684*ss*
de la mano derecha, 710, 711, 714, 716, 735, 763
de los nodos, de Kirchhoff, 684*ss*, 816*ss*
de selección, 1048-49, 1080, 1083, 1084
Rejilla(s), 933-38
de difracción, 933-35
poder de resolución de, 937-38
de reflexión, 933
de transmisión, 933ss
Relámpago, 662
Relatividad
galileana-newtoniana, 952-54, 968-69
teoría especial de la, 951-80, 1205
constancia de la rapidez de la luz y, 957
espacio-tiempo tetradimensional y, 967
impacto de la, 980
longitud y, 964-67
masa y, 974
postulados de la, 957-58
relación masa-energía en la, 974-78
simultaneidad en la, 958-59
tiempo y, 959-64, 967
transformación de Lorentz y, 968-71
teoría general de la, 1193, 1205-7
Relevador, 751*pr*
Rem (unidad), 1148
Reproductor(es)
de discos compactos (CD), 1063
de discos de video digital (DVD), 1063
MP3, 677
Resistencia(s)
interna, 678-79
neta, 679
y resistores, 656-58, 661, 769
código de color, 657
con capacitor, 687-92, 795-802
con inductor, 790-92, 795-802
de medidor, 697
en circuito de ca, 796*ss*
en circuito *LRC*, 795-803
en derivación, 695
en serie y paralelo, 679-83
interna, en batería, 678-79
neta, 679
superconductividad y, 668-69
y corrientes eléctricas, 651*ss*
Resistividad, 658-60
coeficiente de temperatura de, 659-60
Resistor, 657
de alambre enrollado, 657
de composición, 657
devanados de alambre, 657
en derivación, 695
Resolución
de aceleradores de alta energía, 1165-66
de lentes, 881, 929-32
de microscopio
electrónico, 1000
óptico, 932-33
de rejilla de difracción, 937-39
de telescopios, 931
del ojo, 930, 932-33
límites de, 929-32
y pixeles, 881
Resonancia
de partículas, 1180-81
en circuitos ca, 802
magnética nuclear, RMN, 1107, 1156-59
partícula elemental, 1180-81
Resultado nulo, 954, 957, 969
Retentividad (magnética), 749
Retícula cristalina, 1085
Retina, 882
Rho (partícula), 1179
Ribosoma, 1079
Richards, P., 1214
Riesgos eléctricos, 692-94
Rigidez dieléctrica, 638
RMN, resonancia magnética nuclear, 1107, 1156-59
rms (raíz cuadrática media)
corriente, 664-65
voltaje eficaz, 664-65
Rocas, fechamiento de las, más antiguas en la Tierra, 1124
Roemer, Ole, 825
Roentgen (R) (unidad), 1148
Roentgen, W. C., 938
Rompimiento de simetría, 1187, 1217
Rotacional, A-12
Rotación molecular, 1080-81, 1083-85
Rotor, 720, 768
Russell, Bertrand, 999
Rutherford, Ernest, 1001, 1106, 1111, 1132, 1163*pr*

S

Sabor (de partículas elementales), 1177, 1184
Salam, A., 1186
Saturación (magnética),748
Savart, Felix, 743
Schrödinger, Erwin, 987, 1017, 1018
SDSS, 1224
Secadora de cabello, 665
Sección
eficaz, 1135-37
del neutrón, 1136
diferencial, 1136
efectiva, 1135
elástica, 1135
total, 1135
Secuencia principal (estrellas), 1199-1201
Segrè, Emilio, 1175
Segunda
ley de movimiento, 953, 972
ley de Newton, 953, 972
Selector de velocidad, 717
SEM, 987, 1000
Semáforo LED, 1096
Semiconductor(es), 561, 658, 1091-98
base, 1097
CMOS, 647*pr*, 878
de metal óxido complementario, CMOS, 647*pr*, 878
de oblea de silicio, 1125
intrínseco(s), 1091, 1093

resistividad de, 658
tipos *n* y *p*, 1093-96
Sensibilidad
a la corriente, 695
de escala completa, 695
de medidores, 696, 697
Señal(es)
de radiofrecuencia (RF), 830, 1157-58
de vuelta, automóvil, 691
RF, 830, 1157-58
Separación de variables, 1027
Serie(s)
de Balmer, 1002, 1007-8
de decaimiento, 1121-22
radiactivo, 1121-22
de Lyman, 1002-3, 1006, 1007, 1054
electroquímicas, 652
de Paschen, 1003, 1006, 1007
Siemens (S) (unidad), 675*pr*
Sievert (Sv) (unidad), 1148
Sigma (partícula), 1179
Signos y símbolos matemáticos: segunda de forros
Silicio, 1091*ss*
Simetría, 563*np*, 565, 571, 572, 573, 579, 580, 593, 595, 596, 597, 598, 600, 635, 637, 713, 738, 739, 740, 742, 743, 744, 774, 813, 815, 819, 847, 877, 907, 972, 997, 1187, 1189, 1217
Simultaneidad, 958-60
Sinapsis, 669
Sincrociclotrón, 1167
Sincrotrón, 1168
Singularidad, 1209
Sismógrafo, 776
Sistema(s)
binario, 1203, 1209
de posicionamiento global (GPS), 964
global para comunicación móvil (GSM), 832
nervioso, conducción eléctrica en el, 669-70
SLAC, Stanford Linear Accelerator Center, 1169
Sleptón, 1189
Sloan Digital Sky Survey (SDSS), 1224
Smoot, George, 1214
SN1987a, 1177, 1202
Snell, W., 851
Sobreexposición, 879
Sol, 1142-43, 1195, 1197-1201
fuente de energía del, 1142-43, 1200
temperatura superficial del, 988
Solenoide, 733, 741-42, 747, 748-49, 788-89
Sólido(s), 1085-93
amorfos, 1085
enlaces en, 185-86
niveles de energía en, 1090-92
teoría de banda de, 1090-92
Sonda Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), 1193, 1214
SPECT, 1156
SPET, 1156
Squark, 1189
Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), 1169
STM, microscopio, 1038-39, 1043*pr*
Strassman, Fritz, 1136
Subexposición, 879
Subniveles atómicos, 1053, 1054
Suma
de velocidades, relativista, 970-71
relativista de velocidades, 970-71
Superconductividad, 668-69
Superconductor(es)
itrio-bario-cobre-oxígeno (YBCO), 668
YBCO, 668
Supercúmulo, 1196-97
Superficie
de última dispersión, 1215
equipotencial, 616-17
Supernova(s), 1177-78, 1197, 1201-4
como fuente de elementos en la Tierra, 1201, 1202
SNIa (tipo Ia), 1203, 1204, 1223
tipo Ia, 1203, 1204, 1223
Superposición, principio de, 565, 569, 1141*pr*
Supersimetría, 1189
Susceptibilidad magnética (*defn*), 749
SUSY (partículas supersimétricas), 1189

T

Tabla
de logaritmos, A-3
periódica, 1053-54, 1105*np*, tercera de forros
trigonométrica, A-5
Tarjeta de crédito, lector de, 776
Tasa de decaimiento nuclear, 1117-21
Teclado de computadora, 631
Tecnecio-99, 1152
Técnica(s)
eco de espín, 1158
de ecopulso, 1158
iterativa, 1155
Teléfono celular, 771, 812, 824, 832
celular CDMA, 832
Telescopio(s), 887-89, 930-31
amplificación de, 888
Arecibo, 931
astronómico, 888-89
espacial, 930, 1207, 1211
Espacial Hubble (HST), 930, 1207, 1211
galileano, 887, 887*np*, 889
Hale, 889
Keck, 889
kepleriano, 887*np*, 888
reflector(es), 888
refractor, 888
resolución de, 930-31
terrestre, 889
Televisión, 621, 830-32, 943-44
por cable, 832
Temperatura(s)
crítica, 668
de Curie, 746, 750
de estrella, 1198
de Fermi, 1102*pr*
de transición, 668
Teorema
de divergencia, A-12
de Gauss, A-12
de Pitágoras, A-2, A-4
de Stokes, A-12-A-13
Teoría(s)
atómica de la materia, 559
cuántica, 952, 987-1010, 1017-98
de átomos, 1003-10, 1044-65
de la luz, 987-97
de radiación de cuerpo negro, 987-88
de bandas de sólidos, 1090-92
y semiconductores dopados, 1094
de Bohr, 1017, 1044-45, 1046
de cuerdas, 1189
de electrón libre de metales, 1086-90

de la electrodinámica cuántica (QED), 1172
de la Gran Explosión (Big Bang), 1188, 1193, 1212-25
de la Gran Unificación (TGU), 1187-88
de las supercuerdas, 1189
de norma, 1186
de radiación de Wien, 988
de Rayleigh-Jeans, 988
del todo, 1189
electrodébil, 1186-88
especial de la relatividad, 951-80, 1205 (*véase también* Relatividad)
fotónica de la luz, 989-97
general de la relatividad, 1193, 1205-7
ondulatoria de la luz, 900-45
Terapia
con protones, 1151
con radiación, 1150-51
Terminales de batería, 653, 655
Termistor, 660
Termómetro de resistencia, 660
Tesla (T) (unidad), 712
Tevatrón, 1168, 1169
TGU (teoría de la gran unificación), 1187-88
Thomson, G. P., 998
Thomson, J. J., 722-23, 998, 999
Three Mile Island, 1139
Tiempo
absoluto, 953
de expansión característico, 1213
de exposición, 879
de Planck, 1015*pr*, 1188, 1216
de reacción 791
de vida, 1179 (*véase también* Vida media)
expansión característica del, 1213
propio, 962, 1191*pr*
relatividad del, 958-64, 967, 968-71
retrospectivo, 1197, 1215
Tierra
campo magnético y polos magnéticos de la, 709
como capas concéntricas, A-9-A-11
rocas y vida temprana de la, 1124
Timbre de puerta, 747
Tokamak, 1145-46
Tomografía, 1153-56
asistida por computadora (TAC), 1153-54, 1156
axial computarizada (TAC), 1153-54, 1156
computarizada, 1153-54, 1156
por emisión de un solo fotón (SPECT), 1156
por emisión, 1156
de positrones (TEP o PET), 1156
de un solo fotón (SPET), 1156
Tóner, 583
Torca
contra, 769
sobre espira de corriente, 718-19
Toroide, 742, 748
Townsend, J. S., 723
Trabajo, para juntar cargas positivas, 613
Trampa atómica, 1013*pr*, 1016*pr*
Transformación(es)
de Lorentz, 969-71
galileana, 968-69
masa-energía, 974-78
Transformador, 770-73, 787
de bajada, 771
de subida, 771
Transición(es)
átomos y moléculas y, permitidas y prohibidas, 1048-49, 1061*np*, 1080-81, 1083, 1084
permitidas, 1048-49, 1080-81, 1083, 1084
prohibidas, 1049, 1061*np*, 1083*np*, 1084
rotacionales, 1080-81
vibratoria, 1082-85
Transistor(es), 1094, 1097-98
pnp, 1097
unión, 1097
npn, 1097
Transmisión
de electricidad, 772-73
de potencia, 770-73
Transmutación de elementos, 1111, 1132-35
Trazado de rayos, 838*ss*, 867*ss*
Trazador(es), 1151-52
radiactivos, 1151-52
Triangulación, 1203*np*
Triángulo sobre superficie curva, 1207
Tritio, 1105, 1129*pr*, 1144-45
Tubo(s)
de descarga, 1002
de gas, 1002
de luz, 855
de neón, 1044
de rayos catódicos (CRT), 610, 620-21, 723, 831
fotomultiplicador (FM), 1124-25
PM, 1124-25
Tunelamiento
a través de una barrera, 1036-39, 1113
de onda de luz, 1038
Turbina, 767

U

Ultracapacitores, 644*pr*
Unidad(es)
de destellos, 691
de flash para cámara, 636
de masa atómica (u), 1106, 1107
derivadas del SI: guarda frontal
electrostática de carga (esu), 564*np*
Uniformidad del CMB, 1220
Unión *pn*, 1063, 1094-96
Universo
completo (todo), 1216
curvatura del, 1207-8, 1220-21
densidad crítica del, 1221-22
dominado por la
materia, 1218-21
radiación, 1218-19
edad del, 1188*np*, 1213
escenario inflacionario del, 1217, 1219-21
expansión del, 1209-13, 1221-23
finito o infinito, 1194, 1208-9, 1213, 1221
futuro del, 1221-23
homogéneo, 1212
isotrópico, 1212
modelo
CDM del, 1224
de estado estable del, 1213
estándar del, 1216-19
no observable, 1221
observable, 1215-16
origen de elementos en el, 1201-2
teoría de la Gran Explosión del, 1188, 1212*ss*
Uranio
en fechamiento, 1121-24
en reactores, 1136-41
enriquecido, 1138
fisión del, 1136-41

V

Valencia, 1054
Valor(es)
  efectivos, 664-65
    energía de desintegración y, 1112
    energía de reacción y, 1133
    factor de calidad de un sistema resonante y, 810*pr*
Variables Cefeidas, 1204, 1226*pr*
Vector(es)
  de magnetización, 750
  de Poynting, 826-27
Vehículo eléctrico, 675*pr*
Vela(s)
  patrón de, 1204
  solar, 829
Velocidad(es)
  de deriva, 666-68, 723, 724
  de escape, 1222
  suma de, 970-71
  suma relativista de, 970-71
Venus, 887
Vía Láctea, 1194-95
Viaje espacial, 963
Vibración
  molecular, 1082-85
Vida
  del mesón, 1023
  media, 1119, 1129*pr*, 1179
  de protón, 1188
Vidrio no reflectante, 913-14
Visión submarina, 885
Volt (V) (unidad), 608
Volta, Alessandro, 608, 629, 652
Voltaje, 607, 608*ss*, 653*ss*, 678*ss*
  campo eléctrico relacionado con, 610-11, 617-19
  cuadrático medio (rms), 664-65
  de frenado, 990
  de línea, 665
  de polarización, 1095
    base, 1097
  de rizado, 1096, 1103*pr*
  de rompimiento, 612
  en diente de sierra, 691
  en terminales, 678-79 (*véase también* Potencial eléctrico)
  Hall, 1094
  medición del, 695-97
  pico, 664
  riesgos del, 692-94
  rms, 664
  rompimiento de, 612
Voltímetro, 695-97, 721
  digital, 695, 697
Volt-ohm-metro/volt-ohm-miliamperímetro (VOM), 696
VOM, 696
Von Laue, Max, 939

W

Watson, J., 939
Weber (Wb) (unidad), 760
Weinberg, S., 1186
Wess, J., 1189
Wien, W., 988
Wilkinson, D., 1214
Wilson, Robert, 1168*np*, 1213-14
WMAP, 1193, 1214
Wright, Thomas, 1194

X

Xerox (*véase también* Fotocopiadora)
Xi (partícula), 1179

Y

Young, Thomas, 903, 906
Yukawa, Hideki, 1171-73

Z

Z (número atómico), 1052, 1054-56, 1105
Zoom
  digital, 882
  óptico, 882
Zumino, B., 1189
Zweig, G., 1182

Créditos de fotografía

Fotografías de portada, comenzando por la foto superior izquierda NASA/John F. Kennedy Space Center; Mahaux Photography/Getty Images, Inc.–Image Bank; The Microwave Sky: NASA/WMAP Science Team; Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica, Florencia, Italia CO-1 © Reuters/Corbis

1-1a Philip H. Coblentz/World Travel Images, Inc. 1-1b Antranig M. Ouzoonian, P.E./Weidlinger Associates, Inc. 1-2 Mary Teresa Giancoli 1-3a/b Douglas C. Giancoli 1-4 Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC 1-5a Oliver Meckes/Ottawa/Photo Researchers, Inc. 1-5b Douglas C. Giancoli 1-6 A. Viansson 1-7a Douglas C. Giancoli 1-8 Larry Voight/Photo Researchers, Inc. 1-13 David Parker/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 1-14 The Image Works CO-2 George D. Lepp/Corbis/Bettmann 2-8 John E. Gilmore III 2-21 SuperStock, Inc. 2-25 Justus Sustermans (1597–1681), "Retrato de Galileo Galilei." Galleria Palatina, Palazzo Pitti, Florencia, Italia. Nimatallah/Art Resource, NY 2-26 © Harold & Esther Edgerton Foundation, 2007, cortesía de Palm Press, Inc. CO-3 Lucas Kane Photography, LLC 3-19 © Berenice Abbott/Commerce Graphics Ltd., Inc. 3-21 Richard Megna/ Fundamental Photographs, NYC 3-30a Don Farrall/PhotoDisc/Getty Images 3-30b Robert Frerck/Stone/Allstock/Getty Images 3-30c Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC CO-4 NASA/Centro Espacial John F. Kennedy 4-1 Daly & Newton/Getty Images 4-4 Bettmann/Corbis 4-5 Gerard Vandystadt/Agence Vandystadt/Photo Researchers, Inc. 4-7 David Jones/Photo Researchers, Inc. 4-10 NASA/Centro Espacial John F. Kennedy 4-29 Lars Ternbald/Amana Japón 4-32 Kathleen Schiaparelli 4-34 Brian Bahr/Allsport Concepts/Getty Images 4-60 Tyler Stableford/The Image Bank/Getty Images CO-5 izquierda, Agence Zoom/ Getty Images; derecha, Grant Faint/Getty Images 5-16c Jay Brousseau 5-22 © Guido Alberto Rossi/TIPS Images 5-42 C. Grzimek/ Tierbild Okapia/Photo Researchers, Inc. 5-45 Photofest 5-49 Daniel L. Feicht/Cedar Point Photo CO-6 Earth Imaging/Stone/ Allstock/Getty Images 6-8 Douglas C. Giancoli 6-10 NASA/Johnson Space Center 6-14 NASA Headquarters 6-15a AP Wide World Photos 6-15b Mickey Pfleger/Lonely Planet Images 6-15c Dave Cannon/Getty Images 6-20 NASA CO-7 Ben Margot/AP Wide World Photos 7-22 U.S. Departamento de Defensa, fotografía de Airman Kristopher Wilson, U.S. Navy 7-27 Columbia Pictures/Phototest CO-8 y 8-10 © Harold & Esther Edgerton Foundation, 2007, cortesía de Palm Press, Inc. 8-11 © 2004 David Madison Sports Images, Inc. 8-15 © naglestock.com/Alamy 8-21 Nick Rowe/PhotoDisc/Getty Images 8-24 M. C. Escher's "Waterfall", Copyright © 2005 The M. C. Escher Company–Holland 8-48 R. Maisonneuve/Publiphoto/Photo Researchers, Inc. 8-49 Bettmann/Corbis CO-9 Richard Megna, Fundamental Photographs, NYC 9-1 Kevin Lamarque/Reuters/ Landov LLC 9-8 Loren M. Winters/Visuals Unlimited 9-11 Comstock Images/Comstock Premium/Alamy Images Royalty Free 9-14 D. J. Johnson 9-17 Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 9-20 Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/ Photo Researchers, Inc. 9-22 Berenice Abbott/Photo Researchers, Inc. CO-10 David R. Frazier/The Image Works 10-8a Mary Teresa Giancoli 10-12a Photoquest, Inc. 10-12b Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 10-31b Richard Megna/ Fundamental Photographs, NYC 10-42 Lynn Images/Davis/Corbis 10-43 Regis Bossu/Sygma/Corbis 10-45 Karl Weatherly/ Photodisc/Getty Images 10-51 Tom Stewart/Bettmann/Corbis CO-11 Kai Pfaffenbach/Reuters Limited 11-27c NOAA/Phil Degginger/ Color-Pic, Inc. 11-28 Stephen Dunn/Getty Images 11-48a Michael Kevin Daly/The Stock Market/Corbis CO-12 Jerry Driendl/ Taxi/Getty Images 12-1 AP Wide World Photos 12-17 Douglas C. Giancoli 12-19a/b Mary Teresa Giancoli 12-22 Grant Smith/ Construction Photography.com 12-30 Esbin/Anderson/Omni-Photo Communications, Inc. 12-32 Douglas C. Giancoli 12-33 Christopher Talbot Frank/© Ambient Images, Inc./Alamy 12-35 Douglas C. Giancoli 12-37 Giovanni Paolo Panini (n. Roma, 1691–1765), "Interior del Panteón, Roma," c. 1734. Óleo sobre tela, colección de Samuel H. Kress. Fotografía ©2001 Board of Trustees, Galería Nacional de Arte, Washington. 1939.1.24.(135)/PA. Fotografía de Richard Carafelli 12-38 © acestock/Alamy 12-48a James Lemass/Index Stock Imagery, Inc. CO-13 Marevision/AGE Fotostock America, Inc. 13-12 Bettmann/Corbis 13-21a/b David C. Hazen, Princeton University y Embry-Riddle Aeronautical University 13-34 Rod Planck/Tom Stack & Associates, Inc. 13-36 Alan Blank/Bruce Coleman Inc. 13-45 Douglas C. Giancoli 13-47 Adam Jones/Photo Researchers, Inc. 13-53 National Oceanic and Atmospheric Administration NOAA CO-14 Ford Motor Company 14-4 Ford Motor Company 14-9 Judith Collins/Alamy Images 14-13 Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC 14-15 Douglas C. Giancoli 14-24 Martin Bough/Fundamental Photographs, NYC 14-25a AP Wide World Photos 14-25b Paul X. Scott/Sygma/Corbis 14-27 Gallant, Andre/Image Bank/Getty Images CO-15a-d Douglas C. Giancoli 15-23a Douglas C. Giancoli 15-29 Martin G. Miller/ Visuals Unlimited 15-31 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 15-39 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC CO-16 Fray Angelico (1387–1455), Ángel tocando el violín. Detalle de altar. Museo de San Marcos, Florencia, Italia. Scala/Art Resource, N.Y. 16-5 Yoav Levy/Phototake, NYC 16-9a Ben Clark/Photonica Amana America, Inc./Getty Images 16-9b Tony Gale/Pictorial Press/Alamy Images 16-10 © Richard Hutchings/Corbis 16-23 Bill Bachmann/PhotoEdit, Inc. 16-24b Settles, Gary S./Photo Researchers, Inc. 16-27 GE Medical Systems/Photo Researchers, Inc. 16-34 Nation Wong/Zefa/Corbis CO-17, izquierda, Niall Edwards/Alamy Images; derecha, Richard Price/Photographer's Choice/Getty Images 17-3 Bob Daemmrich/ Stock Boston 17-4 Franca Principe/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Florencia, Italia 17-6 Leonard Lessin/Peter Arnold, Inc. 17-11 Mark y Audra Gibson Photography 17-15 Leonard Lessin/Peter Arnold, Inc. 17-16 Stockbyte/Getty Images 17-19 © Royalty-Free/Corbis CO-18 © Dave G. Houser/Post-Houserstock/Corbis. Todos los derechos reservados 18-8 Paul Silverman/ Fundamental Photographs, NYC 18-9 Hans Peter Merten/Stone/Allstock/Getty Images 18-14a-c Mary Teresa Giancoli 18-16 Kennan Harvey/Stone/Allstock/Getty Images CO-19 Mike Timo/Stone/Getty Images 19-26a/b Science Photo Library/

Photo Researchers, Inc. 19-28 Phil Degginger/Color-Pic, Inc. 19-36 Taxi/Getty Images CO-20 Frank Herholdt/Stone/Getty Images 20-1a-c Leonard Lessin/Peter Arnold, Inc. 20-15a Corbis Digital Stock 20-15b Warren Gretz/NREL/US DOE/Photo Researchers, Inc. 20-15c Lionel Delevingne/Stock Boston Table 20-2 de arriba hacia abajo © Royalty-Free/Corbis; Billy Hustace/Stone/Allstock/Getty Images; Michael Collier; Inga Spence/Visuals Limited 20-19 Geoff Tompkinson/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.
20-22 Inga Spence/Visuals Unlimited 20-23 Michael Collier CO-21 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 21-39 Michael J. Lutch/Boston, Museum of Science 21-46 Dr. Gopal Murti/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. CO-23 Lester V. Bergman/Corbis 23-19 Douglas C. Giancoli 23-24 Jon Feingersh CO-24 Tom Pantages 24-13 Tom Pantages 24-14 J. Reid/Custom Medical Stock Photo, Inc. CO-25 Mahaux Photography/Image Bank/Getty Images 25-1 J.-L. Charmet/ Photo Researchers, Inc. 25-6a Dave King/Dorling Kindersley Media Library 25-12 Tom Pantages 25-15 Richard Megna/ Fundamental Photographs, NYC 25-16 Mark C. Burnett/Photo Researchers, Inc. 25-18 A&J Verkaik/Bettmann/Corbis
25-33 Alexandra Truitt y Jerry Marshall 25-34 Scott T. Smith/Bettmann/Corbis 25-37 Jim Wehtje/Photodisc/Getty Images CO-26 Dino Vournas/Reuters Ltd. 26-15a Alamy Images 26-22 Charles O'Rear/Corbis 26-25a Photodisc/Getty Images 26-25b William E. Ferguson 26-25c Ed Degginger/Color-Pic, Inc. 26-27a Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC 26-27b Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC CO-27 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 27-1 Michael Newman/ PhotoEdit, Inc. 27-4a Stephen Oliver/Dorling Kindersley Media Library 27-6 Mary Teresa Giancoli 27-8a Richard Megna/ Fundamental Photographs, NYC 27-18 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 27-2b Steven Hausler/Hays Daily News/ AP Wide World Photos CO-28 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 28-24 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 28-32 Clive Streeter/Dorling Kindersley Media Library CO-29 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 29-8 Diva de Provence/ DIVA Induction froid 29-13 Jeff Hunter/Image Bank/Getty Images 29-17 Rick Bowmer/AP Wide World Photos 29-22 Jack Hollingsworth/ Photodisc/Getty Images 29-23 Robert Houser 29-29b Terence Kearey 29-32a Richard Megna/ Fundamental Photographs, NYC 29-32b Christian Botting CO-30 Corbis Royalty Free CO-31 Douglas C. Giancoli
31-1 American Institute of Physics 31-13 The Image Works 31-22 Spencer Grant/PhotoEdit, Inc. 31-25 World Perspectives/Stone/ Allstock/Getty Images CO-32 Douglas C. Giancoli 32-6 Douglas C. Giancoli 32-11a Mary Teresa Giancoli y Suzanne Saylor 32-11b Francesco Campani 32-20 Travel Pix Ltd./Super Stock, Inc. 32-23 Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica, Florencia, Italia
32-27 David Parker/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 32-30b Lewis Kemper/Photolibrary.com 32-35b Mitterer/ Mauritus, GMBH/ Phototake NYC 32-41 Douglas C. Giancoli 32-44 Mary Teresa Giancoli CO-33 Richard Megna/Fundamental Photographers, NYC 33-1 Douglas C. Giancoli 33-2c Douglas C. Giancoli 33-2d Douglas C. Giancoli 33-4 Kari Erik Marttila/Kari Erik Marttila Photography 33-7a Douglas C. Giancoli 33-7b Douglas C. Giancoli 33-13a Scott Dudley 33-13b Scott Dudley
33-21 Mary Teresa Giancoli 33-22a Mary Teresa Giancoli 33-22b Mary Teresa Giancoli 33-35a Franca Principe/Istituto e Museo di Storia della Scienza 33-35b Franca Principe/Istituto e Museo di Storia della Scienza 33-37 Yerkes Observatory 33-38c Sandy Huffaker/ Getty Images 33-38d Roger Ressmeyer/Corbis 33-40b Olympus America Inc. 33-45 Ron Chapple/Ron Chapple Photography 33-49 NOAA Space Environment Center CO-34 Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica, Florencia, Italia 34-4a John M. Duany IV/Fundamental Photographs, NYC 34-9a Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica, Florencia, Italia 34-16a/b/c Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica, Florencia, Italia 34-18b Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica, Florencia, Italia 34-20b/c Bausch & Lomb Inc. 34-22 Kristen Brochmann/Fundamental Photographs, NYC CO-35 Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC
35-2a P. M. Rinard/American Journal of Physics 35-2b Ken Kay/Fundamental Photographs, NYC 35-2c Ken Kay/Fundamental Photographs, NYC 35-11a/b Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 35-12a/b Springer-Verlang GmbH & Co. KG 35-15 Space Telescope Science Institute 35-16 David Parker/Photo Researchers, Inc. 35-20 Spike Mafford/Photodisc/Getty Images 35-22 Wabash Instrument Corp./Fundamental Photographs, NYC 35-27 Burndy Library 35-30 Rosalind Franklin/Photo Researchers, Inc. 35-37 Diane Schiumo/Fundamental Photographs, NYC 35-40a/b Douglas C. Giancoli 35-45 Texas Instruments Inc. CO-36 Cambridge University Press; "The City Blocks Became Still Shorter" fotografía de la página 4 del libro "Mr. Tompkins in Paperback", de George Gamow. Reimpresa con permiso de Cambridge University Press 36-1 Albert Einstein y derechos relacionados TM/© de la Universidad Hebrea de Jerusalén, utilizada bajo licencia. Representos exclusivamente por Corbis Corporation 36-15 Cambridge University Press; "Unbelievably Shortened", fotografía de la página 3 del libro "Mr. Tompkins in Paperback", de George Gamow. Reimpresa con permiso de Cambridge University Press CO-37 P. M. Motta & F. M. Magliocca/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 37-10 Fotografía de Samuel Goudsmit, cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives, colección Goudsmit
37-11 Education Development Center, Inc. 37-15a Lee D. Simon/Science Source/Photo Researchers, Inc. 37-15b Oliver Meckes/ Max Planck Institute Tubingen/Photo Researchers, Inc. 37-19b Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC 37-20 Wabash Instrument Corp./Fundamental Photographs, NYC. CO-38 Institut International de Physique/American Institute of Physics/Emilio Segrè Visual Archives 38-1 Niels Bohr Archive, courtesy AIP Emilio Segrè Visual Archives 38-2 Fotografía de F. D. Rasetti, cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives, colección Segrè 38-4 Advanced Research Laboratory/Hitachi, Ltd. CO-39 © Richard Cummins/Corbis 39-16 Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC 39-23 Yoav Levy/Phototake NYC 39-24b Philippe Plaily/ Photo Researchers, Inc.

CO-40 Intel Corporation Pressroom Photo Archives 40-41 © Alan Schein Photography/CORBIS Todos los derechos reservados CO-41 Reuters Newmedia Inc./Corbis/Bettmann 41-3 French Government Tourist Office 41-8 Enrico Fermi Stamp Design © 2001 United States Postal Service. Todos los derechos reservados. Utilizada con permiso de U.S. Postal Service y Rachel Fermi 41-16 Fermilab Visual Media Services CO-42 ITER International Fusion Energy Organization (IIFEO) 42-7 Archival Photofiles, Special Collections Research Center, University of Chicago Library 42-10 Igor Kostin/Corbis/Sygma 42-11 Novosti/ZUMA Press–Gamma 42-12 Corbis/Bettmann 42-19a Robert Turgeon, Cornell University 42-19b Cortesía de Brookhaven National Laboratory 42-20b Sovereign/Phototake NYC 42-24a Martin M. Rotker 42-24b Scott Camazine/Alamy Images 42-27 ISM/ Phototake NYC 42-31b Southern Illinois University/Peter Arnold, Inc. 42-33 Sovereign/Phototake NYC CO-43 Fermilab/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 43-1 Smithsonian Institution, Science Service Collection, photograph by Watson Davis/ Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory, University of California, Berkeley, cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives, Fermi Film 43-3a/b Fermilab Visual Media Services 43-5 CERN/ Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 43-6 ATLAS Experiment/CERN–European Organization for Nuclear Research 43-10a/b Science Photo Library/Photo Researchers 43-12a Brookhaven National Laboratory 43-13 Lawrence Berkeley National Laboratory CO-44 WMAP Science Team/ NASA 44-1a Space Telescope Science Institute 44-1b Allan Morton/ Dennis Milon/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 44-2c NASA/Johnson Space Center 44-3 U.S. Naval Observatory Photo/NASA 44-4 National Optical Astronomy Observatories 44-5a Reginald J. Dufour, Rice University 44-5b U.S. Naval Observatory 44-5c National Optical Astronomy Observatories 44-9a/b © Anglo-Australian Observatory 44-9c The Hubble Heritage Team (AURA/STScI/ NASA) 44-9c (inserto) STScI/NASA/ Science Source/Photo Researchers, Inc. 44-15a NASA 44-22 NASA, ESA, S. Beckwith (STScI) y el equipo HUDF 44-22 (inserto) NASA, ESA, R. Bouwens y G. Illingworth (University of California, Santa Cruz) 44-24 © Roger Ressmeyer/CORBIS Todos los derechos reservados 44-26 Fredrik Persson/AP Wide World Photos 44-27 NASA/ WMAP Science Team

Tabla de contenido Fotografías p. iii izquierda, © Reuters/Corbis; derecha, Agence Zoom/Getty Images p. iv izquierda, Ben Margot/AP Wide World Photos; derecha, Kai Pfaffenbach/Reuters Limited p. v Jerry Driendl/Taxi/Getty Images p. vi izquierda, Richard Price/Photographer's Choice/Getty Images; derecha, Frank Herholdt/Stone/Getty Images p. viii Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC p. ix izquierda, Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC; derecha, Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica, Florencia, Italia p. x © Richard Cummins/Corbis p. xi izquierda, Fermilab/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; derecha, The Microwave Sky: NASA/WMAP Science Team p. xvii Douglas C. Giancoli

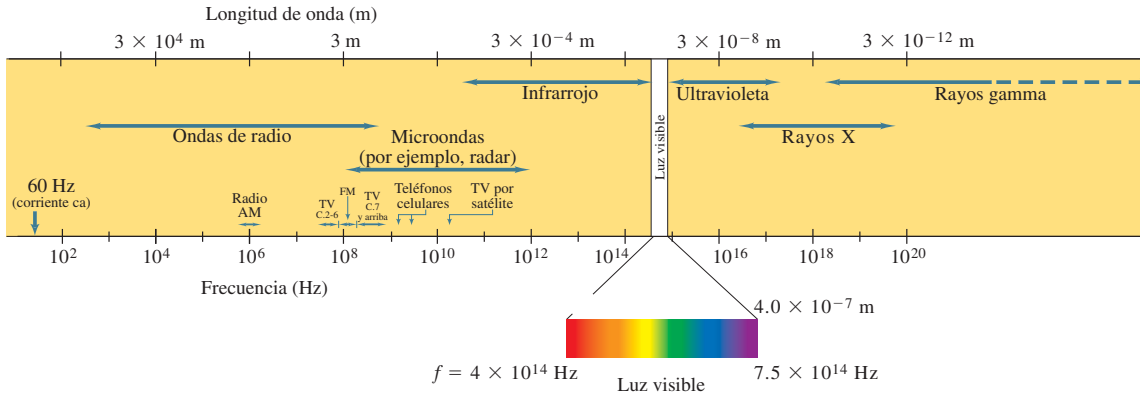


FIGURA 31–12 Espectro electromagnético. (Véase el pliego a color al final del libro).

La reflexión en el agua tranquila, al igual que la de un espejo de vidrio, se puede analizar con el modelo de rayos de luz.

¿Esta fotografía está derecha o invertida? ¿Cómo lo sabe? ¿Cuáles son los indicios? Observe a las personas y la posición del Sol. Los diagramas de rayos, que aprenderá a dibujar en este capítulo, nos ayudarán a encontrar la respuesta. Véase el ejemplo 32-3.

En este primer capítulo acerca de la luz y la óptica, usaremos el modelo de rayos de luz para comprender la formación de imágenes en los espejos, tanto planos como curvos (esféricos). También comenzaremos el estudio de la refracción (cómo se desvían los rayos de luz cuando pasan de un medio a otro), lo que nos prepara para estudiar las lentes en el siguiente capítulo, las cuales son la parte crucial de muchos instrumentos ópticos. (Véase el pliego a color al final del libro).

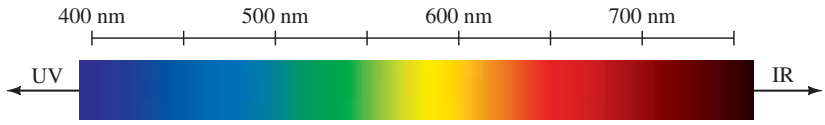


FIGURA 32–26 Espectro de luz visible que indica el intervalo de longitudes de onda para los diversos colores como se ven en el aire. Muchos colores, como el café, no aparecen en el espectro; están hechos de una mezcla de longitudes de onda. (Véase el pliego a color al final del libro).

FIGURA 32–27 La luz blanca que pasa a través de un prisma se descompone en sus colores constituyentes. (Véase el pliego a color al final del libro).

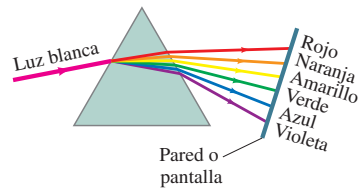


FIGURA 32–29 Luz blanca dispersada por un prisma en el espectro visible. (Véase el pliego a color al final del libro).

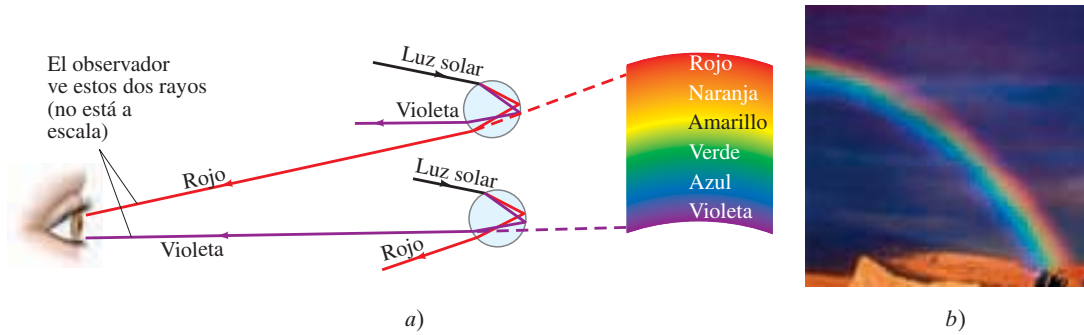


FIGURA 32–30 *a*) Diagrama de rayos que explica cómo se forma *b*) un arcoíris. (Véase el pliego a color al final del libro).

FIGURA 32–41 Pregunta 9. (Véase el pliego a color al final del libro).

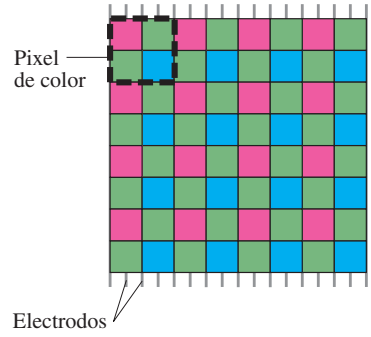


FIGURA 33–19 Porción de un sensor CCD típico. Un grupo cuadrado de cuatro pixeles $\begin{matrix}\text{RG}\\\text{GB}\end{matrix}$ a veces se llama "pixel de color". (Véase el pliego a color al final libro).

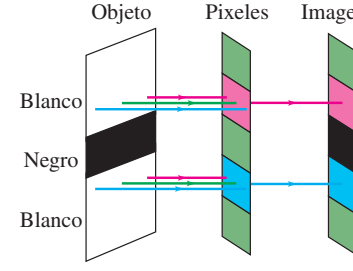
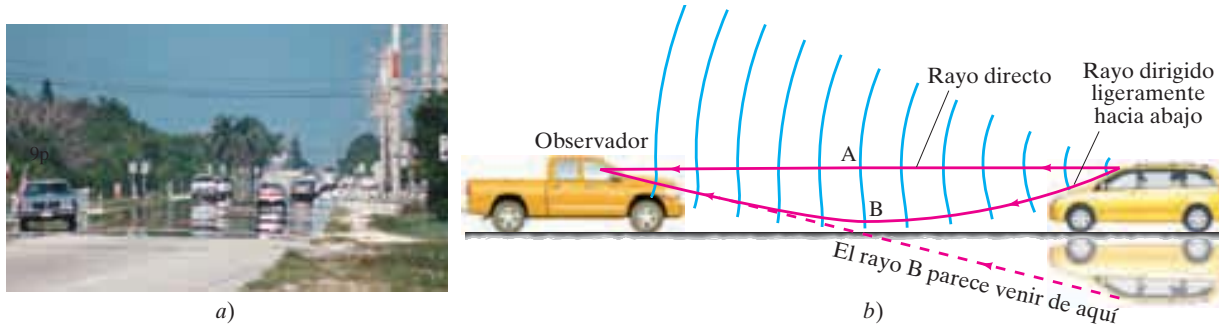


FIGURA 33–20 Suponga que se toma una fotografía que incluye una delgada línea negra (el objeto) sobre un fondo blanco. La *imagen* de esta línea negra tiene un halo coloreado (rojo arriba, azul abajo) debido al ordenamiento en mosaico de los pixeles de filtro de color, como lo muestran los colores transmitidos. La computadora, al promediar, puede minimizar los problemas de color como éste (el verde en la parte superior e inferior de la imagen se promedia con pixeles cercanos para dar blanco o casi blanco) pero, en consecuencia, la imagen se "suaviza" o se vuelve borrosa. Los pixeles de color en capa descritos en el texto evitarían este artificio. (Véase el pliego a color al final libro).



a) *b*)

FIGURA 34–4 *a*) Espejismo en la carretera. *b*) Dibujo (enormemente exagerado) que muestra los frentes de onda y los rayos para explicar los espejismos en las carreteras. Note cómo las secciones de los frentes de onda cerca del suelo se desplazan más rápidamente y, por lo tanto, están más separados. (Véase el pliego a color al final del libro).

Los hermosos colores de la superficie de esta burbuja de jabón se pueden explicar bastante bien mediante la teoría ondulatoria de la luz. Una burbuja de jabón es una película esférica muy delgada llena de aire. La luz que se refleja en las superficies exterior e interior de esta delgada película de agua jabonosa interfieren de manera constructiva para producir los brillantes colores. El color que se ve en un determinado punto depende del grosor de la película de agua jabonosa en ese punto y también del ángulo de visión. Cerca de la parte superior de la burbuja se ve una pequeña área negra rodeada por una área plateada o blanca. El grosor de la burbuja es menor en esa mancha negra, quizá sólo mide unos 30 nm, y es completamente transparente (por eso se ve el fondo negro). (Véase el pliego a color al final del libro).

En este capítulo se estudian aspectos fundamentales de la naturaleza ondulatoria de la luz, incluida la interferencia de dos rendijas y la interferencia en películas delgadas.

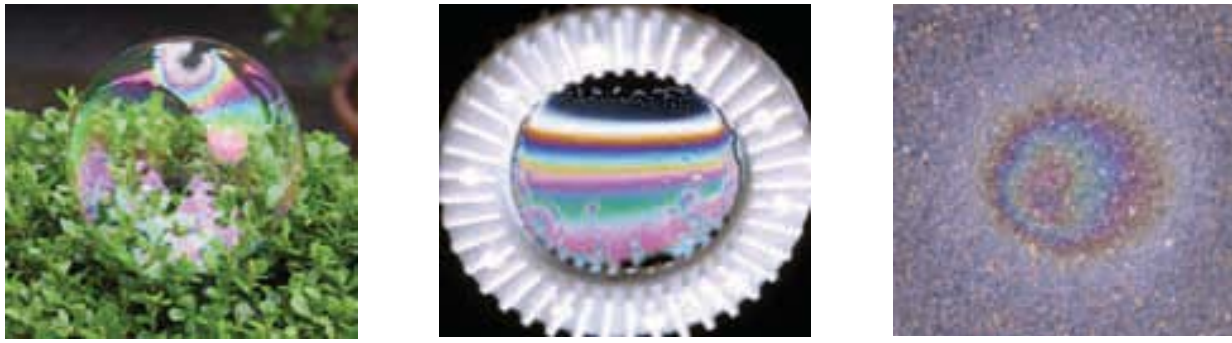


FIGURA 34–16 Patrones de interferencia de película delgada vistos en *a*) una burbuja de jabón, *b*) una película delgada de agua jabonosa y *c*) una delgada capa de aceite en el pavimento mojado. (Véase el pliego a color al final del libro).

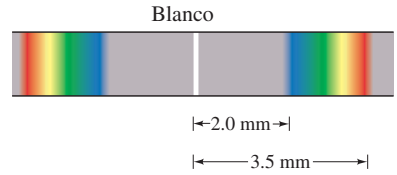


FIGURA 34–11 Las franjas de primer orden son un espectro completo, como un arcoíris. Ejemplo 34-4. (Véase el pliego a color al final del libro).

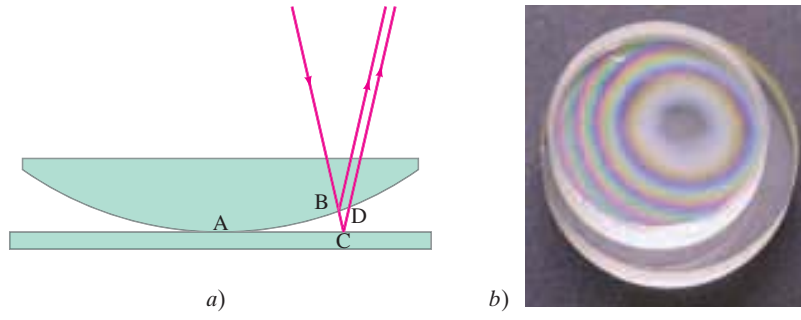


FIGURA 34–18 Anillos de Newton. *a*) Los rayos de luz reflejados en las superficies superior e inferior de la delgada capa de aire pueden interferir. *b*) Fotografía de patrones de interferencia empleando luz blanca. (Véase el pliego a color al final del libro).

FIGURA 34–22 Lente recubierta. Note el color de la luz reflejada de la superficie frontal de la lente. (Véase el pliego a color al final del libro).

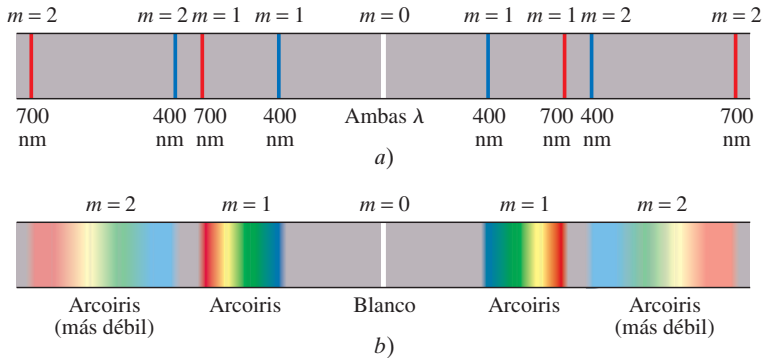


FIGURA 35–19 Espectros producidos por una rejilla: *a*) dos longitudes de onda, 400 nm y 700 nm; *b*) luz blanca. El segundo orden normalmente será más tenue que el primer orden. (No se muestran órdenes superiores). Si el espaciamiento de la rejilla es suficientemente pequeño, el segundo orden así como los órdenes superiores desaparecerán. (Véase el pliego a color al final del libro).

FIGURA 35–20 Disco compacto, ejemplo 35.10. (Véase el pliego a color al final del libro).

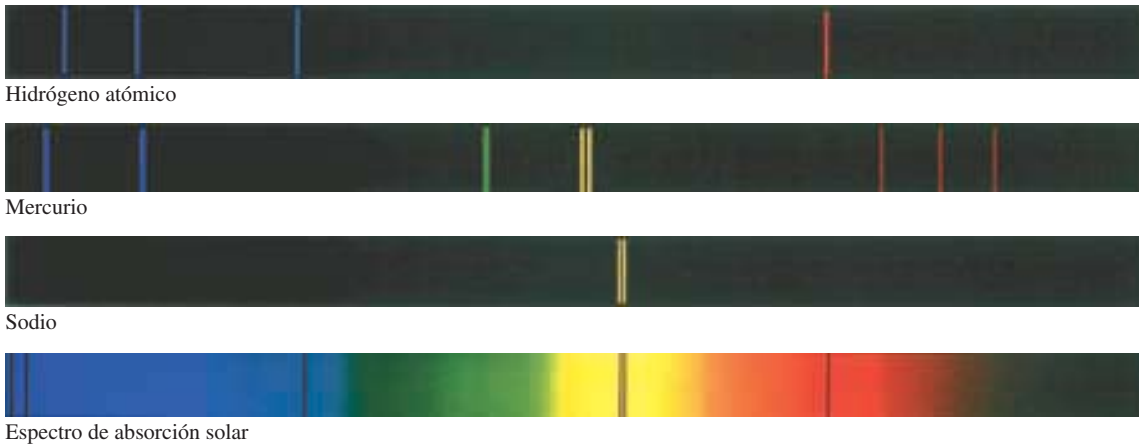
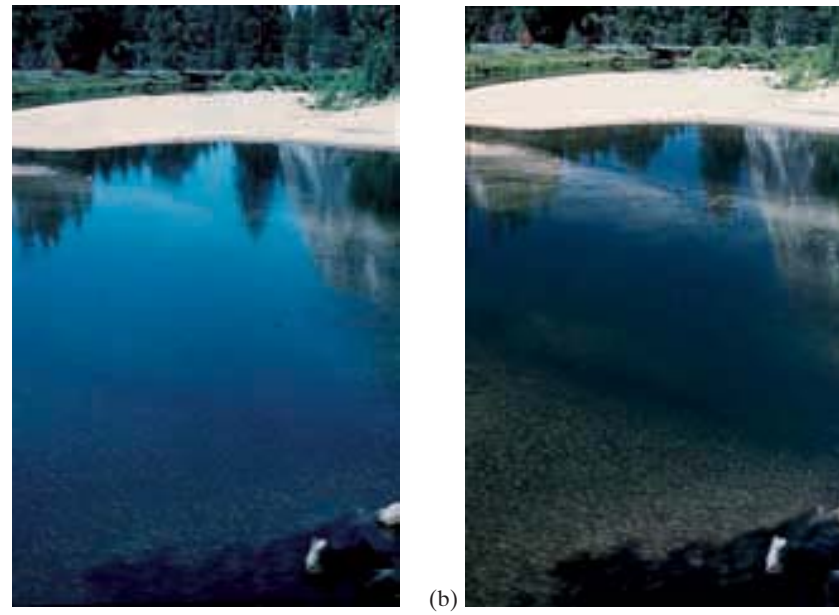


FIGURA 35–22 Espectros de líneas para los gases indicados y el espectro del Sol que muestra líneas de absorción. (Véase el pliego a color al final del libro).

FIGURA 35–40 Fotografías de un río *a*) cuando se permite que toda la luz entre a la lente de la cámara y *b*) utilizando un polarizador. El polarizador se ajusta para absorber la mayor parte de la luz (polarizada) que se refleja en la superficie del agua, lo que permite que la luz más tenue proveniente del fondo del río y cualquier pez que se encuentre ahí se distingan con mayor facilidad. (Véase el pliego a color al final del libro).



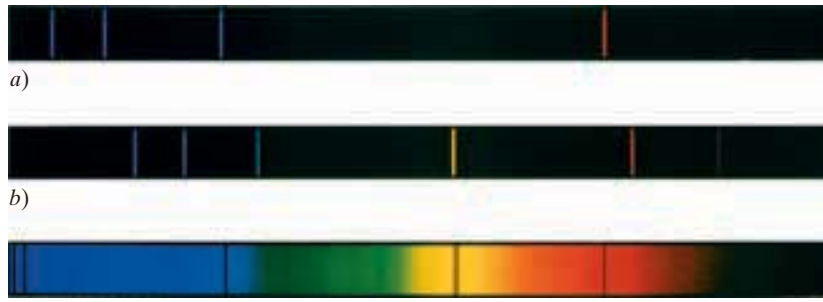
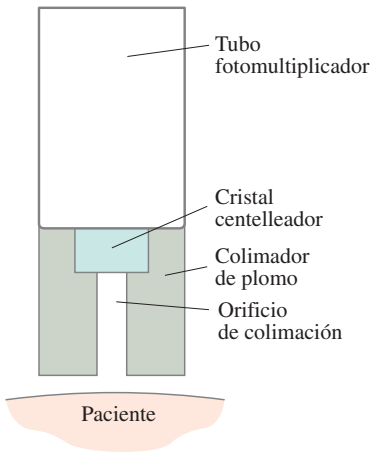
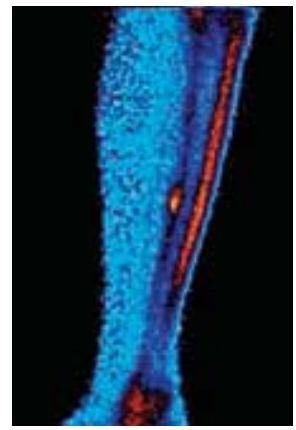


FIGURA 37–20 Espectros de emisión de los gases *a*) hidrógeno atómico, *b*) helio y *c*) espectro de *absorción solar*. (Véase el pliego a color al final del libro).

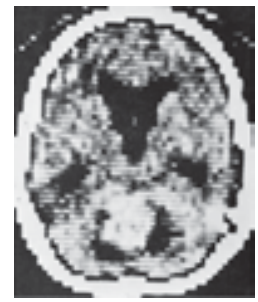


a)

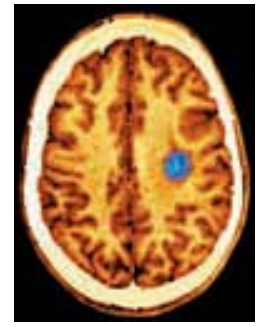


b)

FIGURA 42–20 *a*) Detector de rayos gamma colimados por escaneo (que se mueven) sobre un paciente. El colimador selecciona rayos γ que entran en una línea (casi) recta desde el paciente. Sin el colimador, los rayos γ de todas partes del cuerpo podrían golpear el centelleador, lo que produce una imagen deficiente. Los detectores actuales por lo general tienen muchos tubos colimadores y se llaman *cámaras gamma*. *b*) Imagen de cámara gamma (escintilograma) de una pierna con una fractura por fatiga que detecta los rayos γ del $^{99m}_{43}\text{Tc}$. La imagen es en escala de grises, pero se colorea para tener mayor visibilidad. (Véase pliego a color al final del libro.)



a)



b)

FIGURA 42–24 Dos imágenes TC, con diferentes grados de resolución, que muestran cada una la sección transversal de un cerebro. La fotografía *a*) es de baja resolución. La fotografía *b*) de alta resolución, muestra un tumor cerebral y usa un falso color para resaltarlo. (Véase el pliego a color al final del libro).

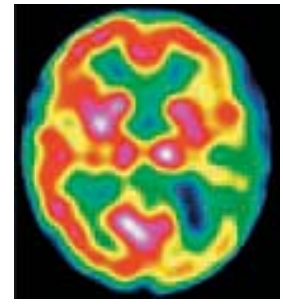
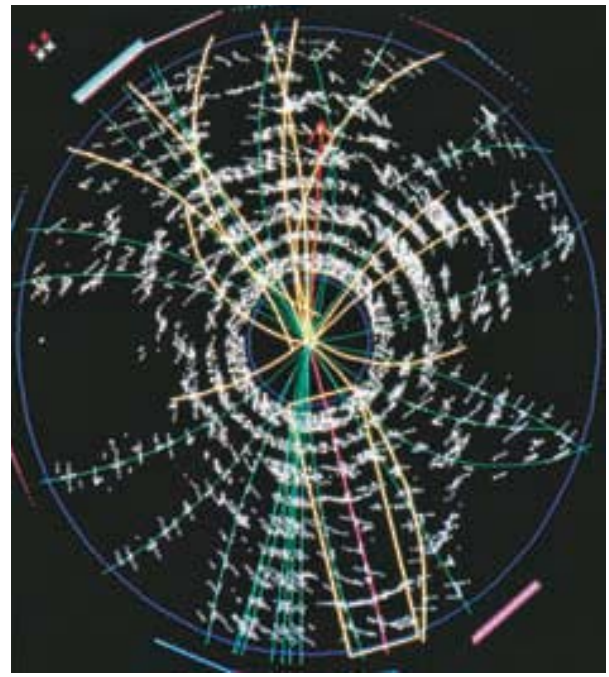


FIGURA 42–27 Escaneo SPECT del cerebro (falso color) con síndrome de Mesulam, marcado con $^{99m}_{43}Tc$. (Véase el pliego a color al final del libro).

FIGURA 42–33 Imagen de RMN (IRM) en falso color de una sección vertical a través de la cabeza, que muestra estructuras en el cerebro normal. (Véase el pliego a color al final del libro.)



Esta reconstrucción generada por computadora de una colisión protón-antiprotón en el Fermilab (figura 43-3) ocurrió a una energía combinada de casi 2 TeV. Es uno de los hechos que dieron evidencia del quark cima (1995). La cámara de arrastre por alambre (sección 41-11) está en un campo magnético, y el radio de curvatura de las trayectorias de la partícula cargada es una medida de la cantidad de movimiento de cada partícula (sección 27-4).

Los puntos blancos representan las señales que se ven en los alambres eléctricos de la cámara de arrastre. Las líneas de color son las trayectorias de las partículas. (Véase el pliego a color al final del libro).

El quark cima o verdad (t) tiene una vida muy breve ($\approx 10^{-23}$ s) para detectarse directamente, así que se buscan sus posibles productos de decaimiento. Los análisis indican la siguiente interacción y los posteriores decaimientos:

$$
\begin{aligned}
p + \bar{p} \longrightarrow\ & t + \bar{t} \\
& \hookrightarrow W^- + \bar{b} \\
& \qquad \hookrightarrow \text{jet} \\
& \qquad \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\
& \hookrightarrow W^+ + b \\
& \qquad \hookrightarrow \text{jet} \\
& \hookrightarrow u + \bar{d} \\
& \qquad \hookrightarrow \text{jet} \\
& \qquad \longrightarrow \text{jet}
\end{aligned}
$$

Las trayectorias en la fotografía incluyen jets (chorros de partículas que se desplazan aproximadamente en la misma dirección) y un muón (μ^-) cuya trayectoria es la rosa que se encierra mediante un rectángulo amarillo para destacarla (véase el pliego a color al final del libro). Después de leer este capítulo, intente dar el nombre de cada símbolo de los que aparecen arriba y comente acerca de si se cumplen todas las leyes de conservación.

a)

b)

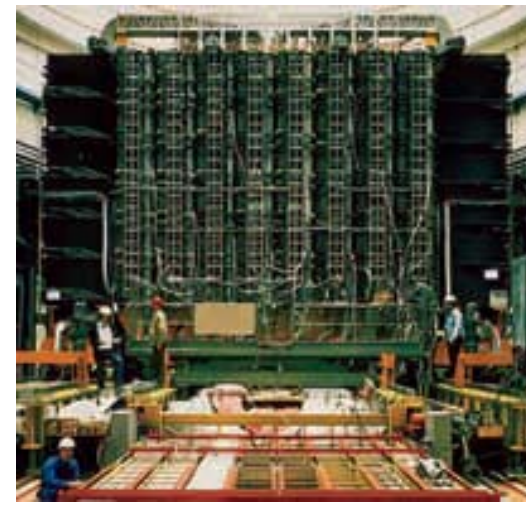


FIGURA 43–10 *a*) Reconstrucción computarizada de un decaimiento de partícula Z en un electrón y un positrón $(Z^0 \rightarrow e^+ + e^-)$ cuyas trayectorias se muestran en blanco (véase el pliego a color al final del libro); la reconstrucción computarizada tuvo lugar en el detector UA1 en el CERN. *b*) Fotografía del detector UA1 en el CERN mientras se construía.

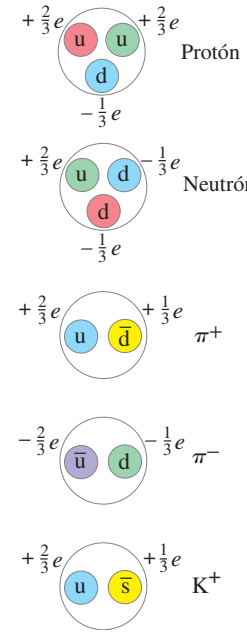
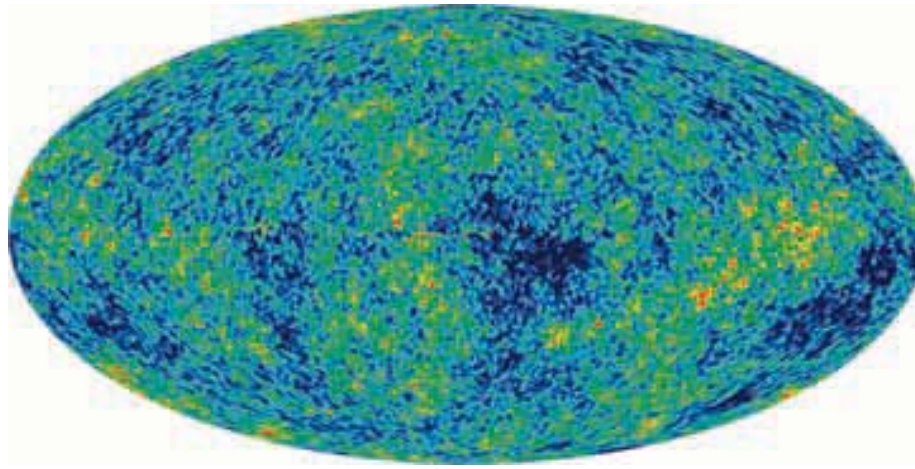


FIGURA 43–15 Composiciones de quarks para varias partículas. (Véase el pliego a color al final del libro).



Este mapa de todo el cielo (de la sonda WMAP) tiene código de color para representar ligeras variaciones de temperatura en la radiación del fondo de microondas de 2.7 kelvin casi perfectamente uniforme que llega a la Tierra desde todas direcciones en el cielo. Esta última versión (2006) ofrece información detallada acerca de los orígenes del Universo y sus estructuras. Las pequeñas variaciones de temperatura, rojo ligeramente más caliente, azul ligeramente más azul (en el orden de 1 parte en 10^4) son "fluctuaciones cuánticas" que son las semillas a partir de las cuales, con el tiempo, se formaron las galaxias y los cúmulos de galaxias. (Véase el pliego a color al final del libro.)

En este capítulo, para discutir la naturaleza del Universo como se entiende en la actualidad, se examinan las últimas teorías acerca de cómo se forman y evolucionan las estrellas y galaxias, incluido el papel de la nucleosíntesis. Se estudia brevemente la teoría general de la relatividad de Einstein, que trata de la gravedad y la curvatura del espacio. Se da un amplio vistazo a la evidencia para la expansión del Universo y el modelo estándar que supone que el Universo evolucionó a partir de una Gran Explosión inicial. Finalmente, se puntualizan algunos problemas sin resolver, incluida la naturaleza de la materia oscura y la energía oscura que constituye la mayor parte del Universo.

a)

b)

FIGURA 44–1 Secciones de la Vía Láctea. En *a*) la delgada línea es el rastro de un satélite artificial de la Tierra en esta larga exposición de tiempo. El área diagonal oscura se debe a que el polvo absorbe luz visible, lo que bloquea la vista. En *b*) la vista es hacia el centro de la galaxia; fotografía tomada en verano desde Arizona. (Véase el pliego a color al final del libro.)

FIGURA 44–3 Este cúmulo estelar globular se localiza en la constelación Hércules. (Véase el pliego a color al final del libro.)

FIGURA 44–4 Esta nebulosa gaseosa, que se encuentra en la constelación Carina, está a aproximadamente 9000 años luz de la Tierra. (Véase el pliego a color al final del libro.)

(a) (b) (c)

FIGURA 44–5 Fotografías de galaxias. *a*) Galaxia espiral en la constelación Hidra. *b*) Dos galaxias: la más grande y más asombrosa se conoce como galaxia Remolino. *c*) Imagen infrarroja (con "falso" color) de las mismas galaxias que en *b*); aquí los brazos de la espiral aparentan tener más sustancia que en la fotografía de luz visible *b*); los diferentes colores corresponden a diferentes intensidades luminosas. (Véase el pliego a color al final del libro.) La luz visible se dispersa y se absorbe mediante polvo interestelar mucho más que la infrarroja, de manera que la infrarroja proporciona una imagen más nítida.

a) *b*) *c*)

FIGURA 44–9 La estrella que se indica mediante la flecha en *a*) estalló en 1987 como una supernova (SN1987a), como se muestra en *b*). La mancha brillante en *b*) no representa el tamaño físico. El inciso *c*) es una fotografía que se tomó algunos años después, la cual muestra las ondas de choque que se expanden desde el lugar donde estaba la SN1987a (ampliado en la esquina). El inciso *c*) se amplificó en relación con *a*) y *b*). (Véase el pliego a color al final del libro).

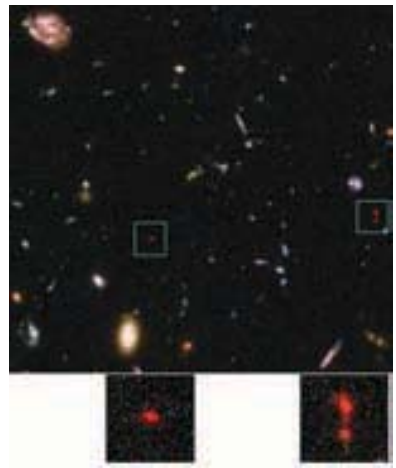


FIGURA 44–22 Fotografía de Campo Hubble Ultra Profundo que muestra qué puede estar entre las galaxias más distantes de la Tierra (pequeños puntos rojos, que se destacan mediante cuadrados), con $z \approx 5$ o 6, que existían cuando el Universo sólo tenía aproximadamente 800 millones de años de antigüedad. Las dos galaxias distantes en esta fotografía se muestran agrandadas abajo. (Véase el pliego a color al final del libro).

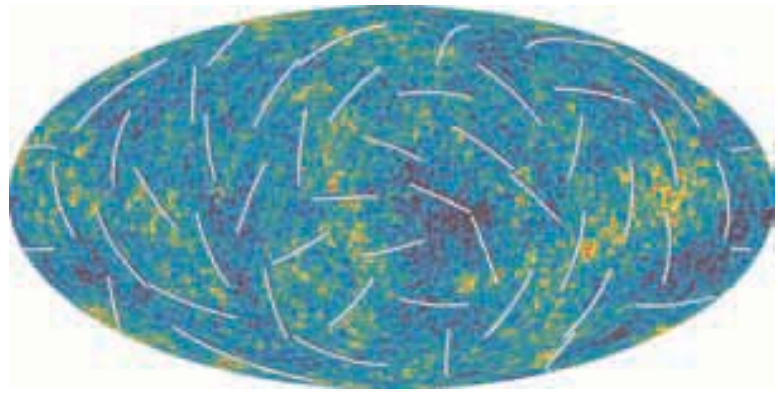
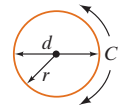


FIGURA 44–27 Mediciones de la radiación cósmica de fondo sobre todo el cielo, con código de color para representar diferencias en temperatura desde el promedio de 2.725 K: la escala de color varía de $+200\ \mu$K (rojo) hasta $-200\ \mu$K (azul oscuro), que representan manchas ligeramente más calientes y más frías (asociadas con variaciones en la densidad). (Véase el pliego a color al final del libro.) Los resultados son del satélite WMAP en 2006: la resolución angular es de 0.2°. Las líneas blancas se agregaron para mostrar la dirección de polarización medida de la luz primigenia, que brinda mayores pistas del Universo temprano.

Fórmulas geométricas útiles-Áreas, volúmenes

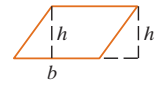
Circunferencia de círculo $C = \pi d = 2\pi r$

Área de círculo $A = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$

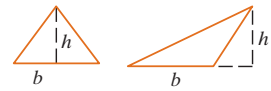


Área de rectángulo $A = \ell w$

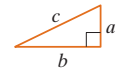
Área de paralelogramo $A = bh$



Área de triángulo $A = \frac{1}{2}hb$

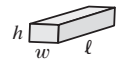


Triángulo recto (Pitágoras) $c^2 = a^2 + b^2$

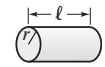


Esfera: área superficial $A = 4\pi r^2$
volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

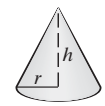
Sólido rectangular: volumen $V = \ell wh$



Cilindro (recto): área superficial $A = 2\pi r\ell + 2\pi r^2$
volumen $V = \pi r^2\ell$



Cono circular recto: área superficial $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$
volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



Exponentes

$(a^n)(a^m) = a^{n+m}$ [Ejemplo: $(a^3)(a^2) = a^5$]

$(a^n)(b^n) = (ab)^n$ [Ejemplo: $(a^3)(b^3) = (ab)^3$]

$(a^n)^m = a^{nm}$ [Ejemplo: $(a^3)^2 = a^6$; Ejemplo: $(a^{\frac{1}{4}})^4 = a$]

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad a^0 = 1$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ $\quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{a}}$

$(a^n)(a^{-m}) = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ [Ex.: $(a^5)(a^{-2}) = a^3$]

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Logaritmos [Apéndice A-7; tabla A-1]

Si $y = 10^x$, entonces $x = \log_{10} y = \log y$.

Si $y = e^x$, entonces $x = \log_e y = \ln y$.

$\log(ab) = \log a + \log b$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

$\log a^n = n \log a$

Algunas derivadas e integrales†

$\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ $\qquad \displaystyle\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$ $\qquad \displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$

$\dfrac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln x$

$\displaystyle\int x^m dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$ $\qquad \displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

† Vea más en el Apéndice B.

Fórmula cuadrática

Ecuación con incógnita x, en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

tiene soluciones

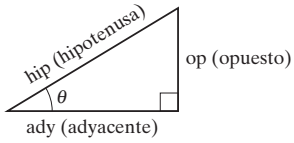
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Expansión binomial

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \cdots \quad [\text{para } x^2 < 1]$$

$$\approx 1 \pm nx \quad [\text{para } x \ll 1]$$

Fórmulas trigonométrica [Apéndice A–9]



$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}}$

$\text{ady}^2 + \text{op}^2 = \text{hip}^2$ (Teorema de Pitágoras)

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = (2\cos^2\theta - 1)$

$\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ $\qquad \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \sqrt{(1 - \cos\theta)/2}$ $\qquad \cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{(1 + \cos\theta)/2}$

$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ [para pequeño $\theta \lesssim 0.2$ rad]

$\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ [para pequeño $\theta \lesssim 0.2$ rad]

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen} B$

$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$

Para cualquier triángulo

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (ley de cosenos)

$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$ (ley de senos)

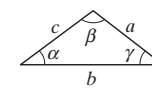


Tabla periódica de los elementos[§]

Grupo I	Grupo II	Elementos de transición										Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo VIII
H 1 1.00794 $1s^1$																	**He** 2 4.002602 $1s^2$
Li 3 6.941 $2s^1$	**Be** 4 9.012182 $2s^2$											**B** 5 10.811 $2p^1$	**C** 6 12.0107 $2p^2$	**N** 7 14.0067 $2p^3$	**O** 8 15.9994 $2p^4$	**F** 9 18.9984032 $2p^5$	**Ne** 10 20.1797 $2p^6$
Na 11 22.98976928 $3s^1$	**Mg** 12 24.3050 $3s^2$											**Al** 13 26.9815386 $3p^1$	**Si** 14 28.0855 $3p^2$	**P** 15 30.973762 $3p^3$	**S** 16 32.065 $3p^4$	**Cl** 17 35.453 $3p^5$	**Ar** 18 39.948 $3p^6$
K 19 39.0983 $4s^1$	**Ca** 20 40.078 $4s^2$	**Sc** 21 44.955912 $3d^14s^2$	**Ti** 22 47.867 $3d^24s^2$	**V** 23 50.9415 $3d^34s^2$	**Cr** 24 51.9961 $3d^54s^1$	**Mn** 25 54.938045 $3d^54s^2$	**Fe** 26 55.845 $3d^64s^2$	**Co** 27 58.933195 $3d^74s^2$	**Ni** 28 58.6934 $3d^84s^2$	**Cu** 29 63.546 $3d^{10}4s^1$	**Zn** 30 65.409 $3d^{10}4s^2$	**Ga** 31 69.723 $4p^1$	**Ge** 32 72.64 $4p^2$	**As** 33 74.92160 $4p^3$	**Se** 34 78.96 $4p^4$	**Br** 35 79.904 $4p^5$	**Kr** 36 83.798 $4p^6$
Rb 37 85.4678 $5s^1$	**Sr** 38 87.62 $5s^2$	**Y** 39 88.90585 $4d^15s^2$	**Zr** 40 91.224 $4d^25s^2$	**Nb** 41 92.90638 $4d^45s^1$	**Mo** 42 95.94 $4d^55s^1$	**Tc** 43 (98) $4d^55s^2$	**Ru** 44 101.07 $4d^75s^1$	**Rh** 45 102.90550 $4d^85s^1$	**Pd** 46 106.42 $4d^{10}5s^0$	**Ag** 47 107.8682 $4d^{10}5s^1$	**Cd** 48 112.411 $4d^{10}5s^2$	**In** 49 114.818 $5p^1$	**Sn** 50 118.710 $5p^2$	**Sb** 51 121.760 $5p^3$	**Te** 52 127.60 $5p^4$	**I** 53 126.90447 $5p^5$	**Xe** 54 131.293 $5p^6$
Cs 55 132.9054519 $6s^1$	**Ba** 56 137.327 $6s^2$	57–71[†]	**Hf** 72 178.49 $5d^26s^2$	**Ta** 73 180.94788 $5d^36s^2$	**W** 74 183.84 $5d^46s^2$	**Re** 75 186.207 $5d^56s^2$	**Os** 76 190.23 $5d^66s^2$	**Ir** 77 192.217 $5d^76s^2$	**Pt** 78 195.084 $5d^96s^1$	**Au** 79 196.966569 $5d^{10}6s^1$	**Hg** 80 200.59 $5d^{10}6s^2$	**Tl** 81 204.3833 $6p^1$	**Pb** 82 207.2 $6p^2$	**Bi** 83 208.98040 $6p^3$	**Po** 84 (209) $6p^4$	**At** 85 (210) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 (226) $7s^2$	89–103[‡]	**Rf** 104 (267) $6d^27s^2$	**Db** 105 (268) $6d^37s^2$	**Sg** 106 (271) $6d^47s^2$	**Bh** 107 (272) $6d^57s^2$	**Hs** 108 (277) $6d^67s^2$	**Mt** 109 (276) $6d^77s^2$	**Ds** 110 (281) $6d^97s^1$	**Rg** 111 (280) $6d^{10}7s^1$	112 (285) $6d^{10}7s^2$						

Símbolo — **Cl** 17 — Número atómico
Masa atómica[§] — 35.453
$3p^5$ — Configuración electrónica (sólo capas exteriores)

[†]Serie lantánidos	**La** 57 138.90547 $5d^16s^2$	**Ce** 58 140.116 $4f^15d^16s^2$	**Pr** 59 140.90765 $4f^35d^06s^2$	**Nd** 60 144.242 $4f^45d^06s^2$	**Pm** 61 (145) $4f^55d^06s^2$	**Sm** 62 150.36 $4f^65d^06s^2$	**Eu** 63 151.964 $4f^75d^06s^2$	**Gd** 64 157.25 $4f^75d^16s^2$	**Tb** 65 158.92535 $4f^95d^06s^2$	**Dy** 66 162.500 $4f^{10}5d^06s^2$	**Ho** 67 164.93032 $4f^{11}5d^06s^2$	**Er** 68 167.259 $4f^{12}5d^06s^2$	**Tm** 69 168.93421 $4f^{13}5d^06s^2$	**Yb** 70 173.04 $4f^{14}5d^06s^2$	**Lu** 71 174.967 $4f^{14}5d^16s^2$
[‡]Serie actínidos	**Ac** 89 (227) $6d^17s^2$	**Th** 90 232.03806 $6d^27s^2$	**Pa** 91 231.03588 $5f^26d^17s^2$	**U** 92 238.0289 $5f^36d^17s^2$	**Np** 93 (237) $5f^46d^17s^2$	**Pu** 94 (244) $5f^66d^07s^2$	**Am** 95 (243) $5f^76d^07s^2$	**Cm** 96 (247) $5f^76d^17s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^96d^07s^2$	**Cf** 98 (251) $5f^{10}6d^07s^2$	**Es** 99 (252) $5f^{11}6d^07s^2$	**Fm** 100 (257) $5f^{12}6d^07s^2$	**Md** 101 (258) $5f^{13}6d^07s^2$	**No** 102 (259) $5f^{14}6d^07s^2$	**Lr** 103 (262) $5f^{14}6d^17s^2$

[§] Valores de masa atómica promediados sobre isótopos en los porcentajes en que ocurren en la superficie de la Tierra. Para muchos elementos inestables, la masa del isótopo conocido de más larga vida se da entre paréntesis. Revisiones 2006. (Véase también el Apéndice F). Se ha reportado evidencia preliminar (no confirmada) para los elementos 113, 114, 115, 116 y 118.