

Práctico 2

Modelado de Sistemas Físicos y Función de Transferencia

Parte 3:

Modelado en Frecuencia de Sistemas Electromecánicos Motor de Corriente Continua CC

Objetivos:

- Familiarizarse con los aspectos generales de sistemas físicos híbridos, en los cuales intervienen variables y parámetros eléctricos y mecánicos. Relacionar ecuaciones y modelos de sistemas eléctricos con ecuaciones y modelos de sistemas mecánicos, en una misma ecuación o por medio de un sistema de ecuaciones que represente la dinámica del sistema.
- Introducir el motor de Corriente Continua como un componente particular de sistemas electromecánicos de gran importancia para la teoría de control.
- Deducir la Función de Transferencia del motor de CC, observando algunos detalles importantes de su topología.
- Resolver problemas mostrando algunos aspectos de importancia de los motores de CC en la práctica.
- Simular la dinámica de funcionamiento del Motor de CC, ingresando la Función de Transferencia obtenida en **MATLAB** o **SIMULINK**, utilizando datos numéricos de una máquina eléctrica real.

1.- Introducción:

Sistemas Electromecánicos:

Los sistemas electromecánicos son sistemas físicos en los cuales intervienen variables y parámetros eléctricos y mecánicos relacionados entre sí a través de los principios que rigen el funcionamiento del propio sistema.

En la práctica, una gran variedad de sistemas de automatización responden a aplicaciones de sistemas electromecánicos, tales como robots, sistemas de posicionamiento, sistemas de control de velocidad, etc...

Un elemento típico que permite transformar variables eléctricas en mecánicas, a través de la generación de torques y fuerzas, es el motor eléctrico.

Existen diversas clases de motores eléctricos clasificados en función de sus principios de accionamiento y características constructivas, pero en modo general se puede definir a un motor eléctrico como un sistema cuyo principio de funcionamiento le permite transformar variables eléctricas en variables mecánicas de alguna clase, permitiendo convertir potencia o energía eléctrica en mecánica.

Como elemento de transducción, es interesante entonces encontrar la Función de Transferencia que vincula la variable eléctrica que se puede identificar como entrada, con la variable mecánica identificada como salida. El conocimiento de esta Función de Transferencia permitirá entonces estudiar el sistema Motor Eléctrico desde el punto de vista del Control Automático, determinando las principales características de su comportamiento dinámico y determinando luego las principales modificaciones que deben introducirse para lograr que el sistema responda a los requerimientos impuestos por cada aplicación.

Motor de Corriente Continua CC o Corriente Directa CD:

Como caso de interés, se estudiará el Motor de Corriente Continua, debido a que es uno de los sistemas electromecánicos rotacionales más fácilmente modelizable como sistema lineal.

El Motor de Corriente Continua (CC o CD), es básicamente un transductor de par o torque que convierte energía eléctrica en energía mecánica. El par motriz desarrollado en el eje del motor es proporcional a variables electromagnéticas de la máquina tales como Flujo de Campo Magnético Φ y corriente de armadura o de rotor del propio motor I_a . Esta relación está fundamentada por la fuerza que aparece sobre un conductor por el cual circula una corriente eléctrica, cuando el mismo se encuentra colocado en un campo magnético.

La siguiente figura muestra esquemáticamente un Motor de Corriente Continua, con sus diferentes partes constitutivas:

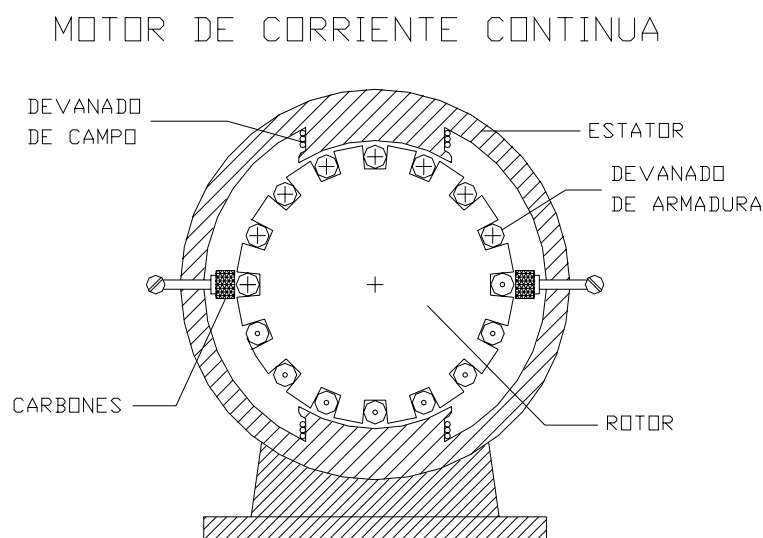


Diagrama equivalente de un Motor de Corriente Continua:

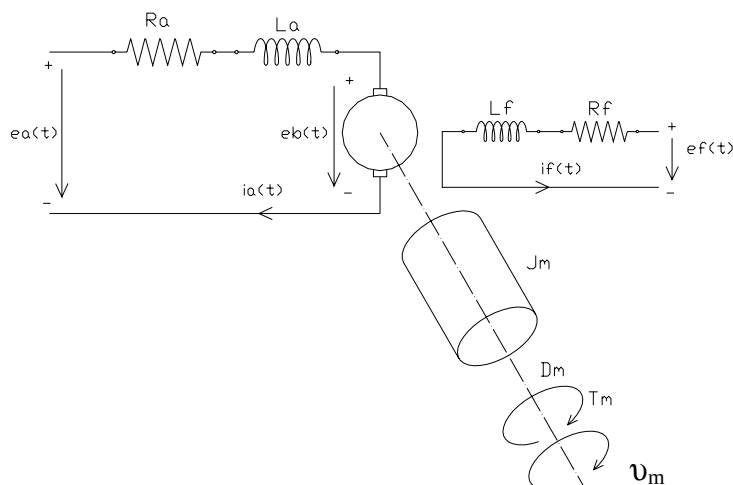
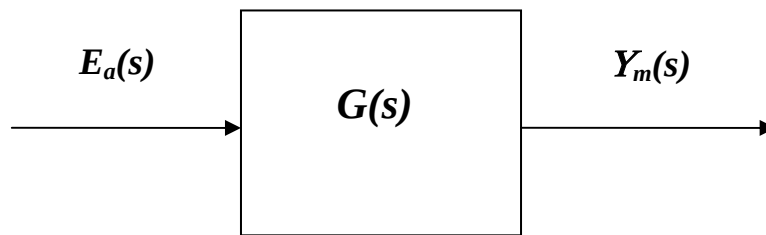
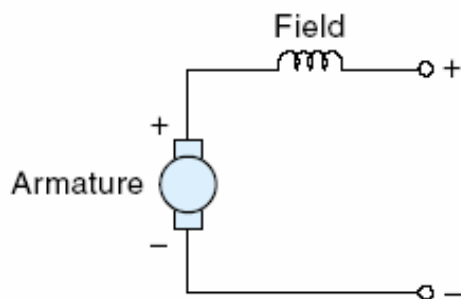


Diagrama de Bloques General de un Motor de CD:

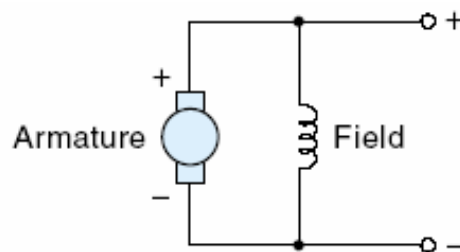


Configuraciones Eléctricas de un Motor de Corriente Continua:

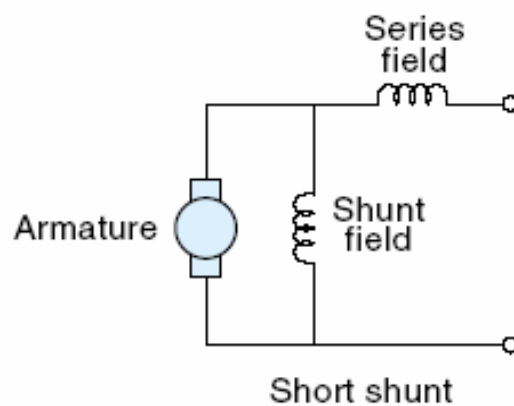
La siguiente figura ilustra las diferentes maneras en que puede conectarse un Motor de Corriente Directa y las posibles formas de controlar la máquina eléctrica.



(a) Series Motor Circuit



(b) Shunt Motor Circuit



(c) Compound Motor Circuit

Modelo Matemático del Motor de CD con Excitación Independiente:

De acuerdo al principio de funcionamiento y a los detalles constructivos de una máquina eléctrica de CC, el Torque generado por la misma es directamente proporcional a la corriente que circula por la armadura de la misma y al flujo magnético generado por el inductor, como muestra la siguiente expresión:

$$T(t) = \left(\frac{p}{a} \right) \cdot \frac{Z_a}{2\pi} \cdot \Phi(t) \cdot i_a(t) = K_t \cdot i_a(t)$$

donde:

p : número de pares de Polos de la máquina

a : número de pares de circuitos paralelos de la armadura

Z_a : número total de conductores en la armadura

La constante de proporcionalidad K_t , se denomina “Constante de Par del Motor”, y depende de las características constructivas de la máquina y del flujo magnético generado por el campo del inductor.

Como los conductores de la armadura se mueven cortando las líneas de campo magnético, aparece en bornes de la armadura una *fem* inducida, denominada “fem contraelectromotiz” que es directamente proporcional a la velocidad angular del rotor, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$e_b(t) = Z_a \cdot \frac{\omega(t)}{2\pi} \cdot \Phi(t) = K_b \cdot \omega(t)$$

donde:

ω : velocidad angular del rotor [rad/seg[]]

Z_a : número total de conductores en la armadura

Si se analiza la malla eléctrica formada por el circuito equivalente de la armadura, se obtiene:

$$e_b(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + e_b$$
$$\Rightarrow R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + e_b = e_b(t)$$

Analizando el sistema desde el punto de vista mecánico, se cumplirá la siguiente ecuación diferencial en la cual intervendrán los parámetros mecánicos del rotor del motor, ya que hasta este momento no se ha considerado ninguna carga acoplada al eje del mismo:

$$J_m \cdot \frac{d^2 \theta(t)}{dt} + D_m \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = T(t)$$

Reuniendo las cuatro expresiones que regulan el funcionamiento de la máquina eléctrica, aplicándoles la transformada de **Laplace** se obtiene:

$$[L_a \cdot s + R_a] \cdot I_a(s) + E_b(s) = E_a(s)$$

$$s \cdot [J_m \cdot s + D_m] \cdot \Theta(s) = K_t \cdot I_a(s)$$

$$s \cdot K_b \cdot \Theta(s) = E_b(s)$$

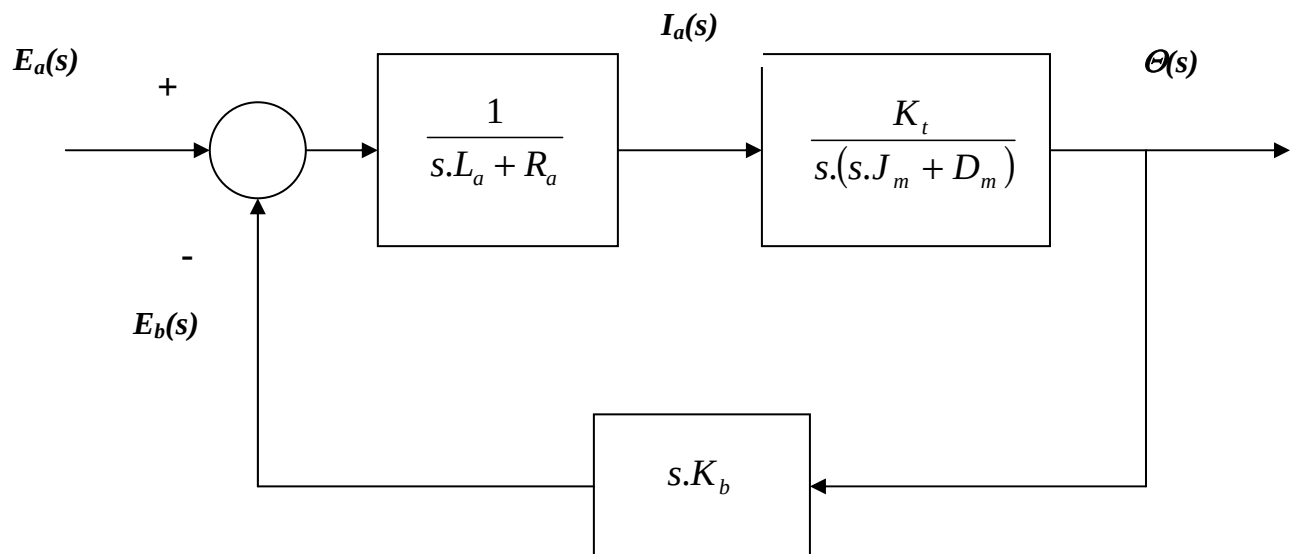
Trabajando las Ecuaciones por sustitución, puede obtenerse la siguiente Función de Transferencia:

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t / (R_a \cdot J_m)}{s \cdot \left[\left(s \cdot \frac{L_a}{R_a} + 1 \right) \left(s + \frac{D_m}{J_m} \right) + \frac{K_t \cdot K_b}{R_a \cdot J_m} \right]}$$

Si se supone cierta la relación $\frac{L_a}{R_a} \ll 1$, la Función de Transferencia se simplifica, quedando:

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t / (R_a \cdot J_m)}{s \cdot \left[s + \frac{1}{J_m} \left(D_m + \frac{K_t \cdot K_b}{R_a} \right) \right]}$$

Si se representa la Función de Transferencia por medio de un diagrama en bloques, considerando que la ecuación de la “fem contraelectromotriz” puede interpretarse como una realimentación interna del sistema, se obtiene:



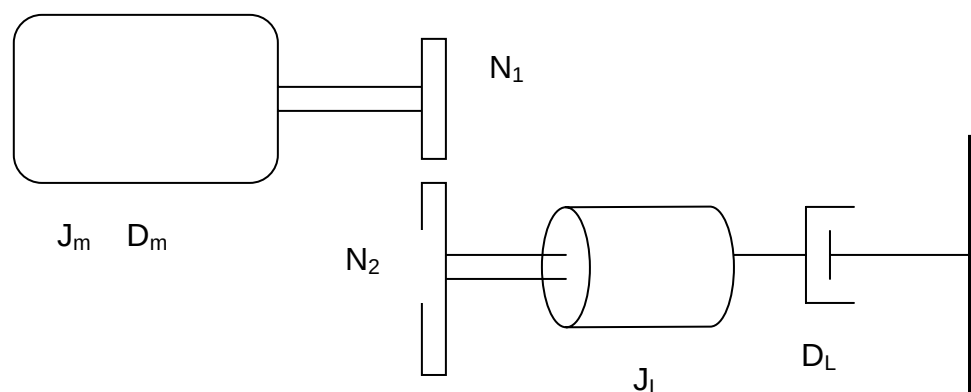
Es importante notar que aunque un motor de CC es en sí mismo un sistema en Lazo Abierto, las ecuaciones y el diagrama en bloques permiten observar que contiene en forma intrínseca un lazo de realimentación negativo producido por la existencia de la fuerza contraelectromotriz que depende de la velocidad con signo cambiado.

Físicamente esta fuerza contraelectromotriz actúa como una “fricción eléctrica” que tiende a mejorar la estabilidad del motor y en general del sistema completo.

Problemas Propuestos:

1) La siguiente figura representa una implementación real, en la cual un motor de CC mueve una carga mecánica con parámetros de Momento de Inercia J_L y Coeficiente de amortiguamiento D_L , a través de una caja reductora de velocidad con relación de transmisión conocida N_1/N_2 .

Expresa la Función de Transferencia del sistema completo, incluyendo los parámetros mecánicos del motor y de la carga.



2) Determinar la ecuación que vincula el Par del motor con la velocidad de giro del rotor y graficar la misma para diferentes valores de la tensión de excitación $e_a(t)$

3) Suponiendo que un motor eléctrico de CC debe mover una carga mecánica que presenta un torque resistente $T_L(t)$, realizar las modificaciones necesarias en el diagrama de bloques de la Función de Transferencia, de forma tal que contemple la existencia de dicho torque.

4) Utilizando los datos del Motor C del Apéndice A, introducir la Función de Transferencia en SIMULINK, suponiendo que el motor no tiene carga acoplada al eje.

Considerar la constante de Torque K_t y la constante de fem contraelectromotriz K_b iguales a 1.

Considerar además $D_m = 0,5 \text{ Nw.m s/rad}$

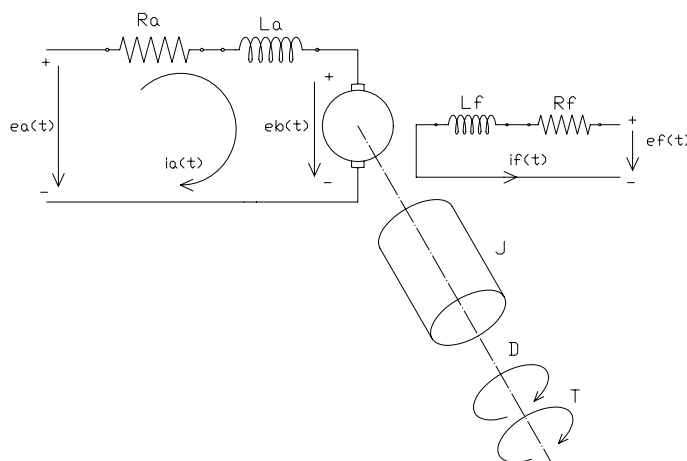
Simular para los siguiente dos casos:

a) Para $J_m = 1 \text{ Kg.m}^2$

b) Para $J_m = 0,05 \text{ Kg.m}^2$

5) Suponiendo que se tiene un Motor de CC controlado a través de su armadura, encontrar la relación $\frac{K_b}{K_t}$, como también las unidades de dicho cociente.

6) Determinar la Función de Transferencia $\frac{\Theta(s)}{E_a(s)}$ del sistema electromecánico motor de CC controlado a través de su armadura, representado en la siguiente figura.



Considerar los siguientes valores numéricos y aproximaciones:

$L_a = \text{despreciable}$

$J = 2,59 \times 10^{-4} \text{ Nw.m}^2$

$D = 3 \times 10^{-3} \text{ Nw.m.s/rad}$

Para calcular los parámetros del motor, considerar los siguientes ensayos realizados sobre la máquina:

a) Ensayo a rotor bloqueado:

$$e_a = 26 \text{ V}$$
$$T_s = 10 \text{ Nw.m}$$

b) Ensayo en vacío

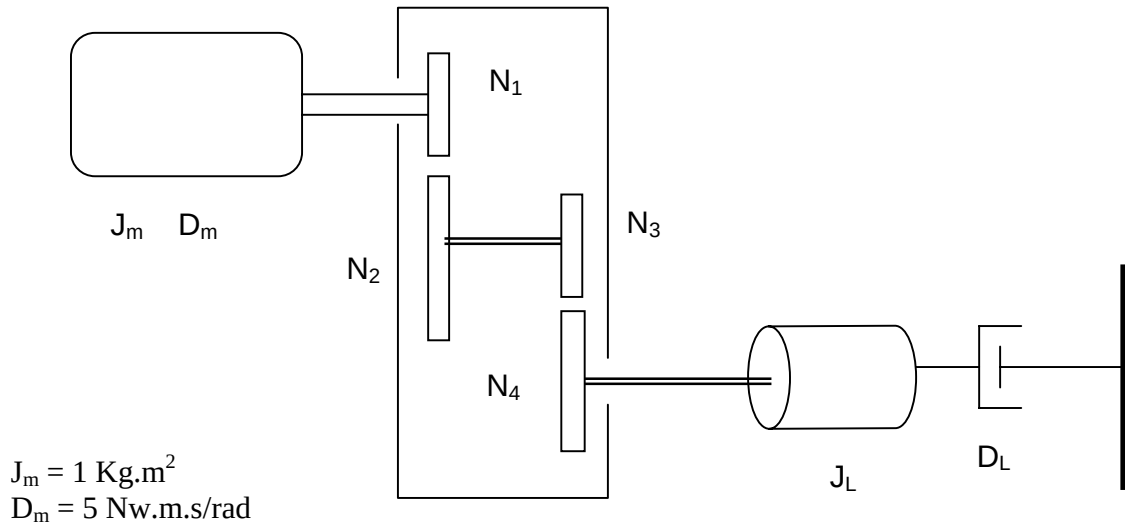
$$e_a = 26 \text{ V}$$
$$\omega_0 = 520 \text{ rad/seg}$$

7) Encontrar la Función de Transferencia $G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_a(s)}$, del siguiente sistema

electromecánico compuesto por un motor de CC controlado por armadura y un acoplamiento a una carga a través de una caja de reducción cuyas relaciones de transmisión se conocen.

La curva “Par vs. Velocidad” del Motor, está dada por la relación:

$$T_m = -8.\omega_m + 200, \text{ para } e_a = 100 \text{ V}$$



$$J_m = 1 \text{ Kg.m}^2$$

$$D_m = 5 \text{ Nw.m.s/rad}$$

$$N_1 = 20$$

$$N_2 = 100$$

$$N_3 = 25$$

$$N_4 = 100$$

$$J_L = 400 \text{ Kg.m}^2$$

$$D_L = 800 \text{ Nw.m.s/rad}$$

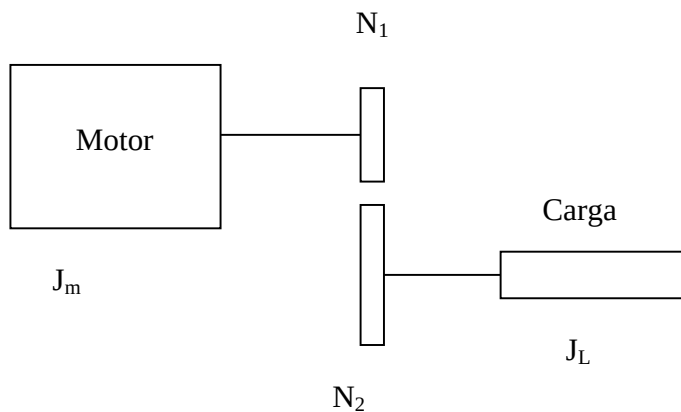
Notas:

Despreciar los momentos de inercia correspondiente a ejes y engranajes de la caja de transmisión.

Despreciar el valor de L_a

8) La siguiente figura muestra un motor acoplado a una carga inercial a través de un tren de engranajes cuya relación de transmisión es $n = N_1/N_2$

Determine cuál será la relación de transmisión óptima para que la aceleración que el motor imprime a la carga sea máxima.



9) Prob n° 42 – Norman Nise (pág 121)

10) Prob n° 44 – Norman Nise (pág 121)

11) Prob n° 45 – Norman Nise (pág 122)

Bibliografía:

- “Sistemas de Control para Ingeniería”- Norman Nise (Editorial CECSA)
- “Ingeniería de Control”-Katsuhiko Ogata (Editorial Prentice Hall)
- “Sistemas de Control Moderno” – Richard Dorf y Robert Bishop (Edit. Prentice Hall)

Apéndice A: Datos de Parámetros de Motores de CC
