4 Funciones Inversas

4.1 Definición de función inversa

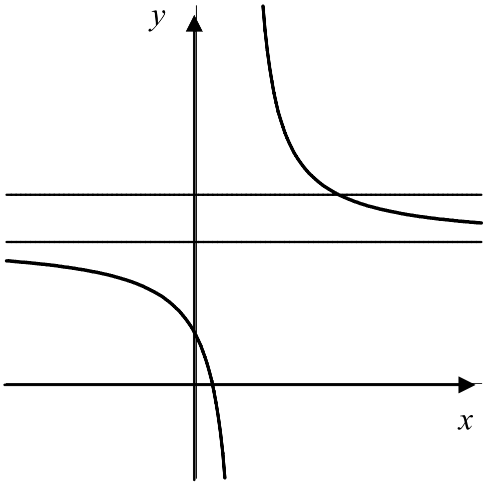
Muchas veces, estando dos variables ligadas por una relación funcional $y = f(x)$, es conveniente explicitar la relación en la variable implícita: $x = g(y)$. Sólo por dar un ejemplo. Sabido que la posición x transcurrido un tiempo t surge de la relación $x = x_0 + vt$, se quiere averiguar cuánto se tardará, bajo las mismas condiciones, en llegar a un punto x partiendo desde x_0. La solución del problema es una función inversa: $t = \frac{x-x_0}{v}$. En este capítulo estudiaremos aspectos generales del proceso de inversión de funciones y su aplicación a las funciones que venimos estudiando y a otras nuevas.

Si se piensa a una función $f : A \to B$ como una acción que transforma los puntos de un conjunto A en puntos de otro conjunto B, será fácil imaginar una acción inversa que los devuelva a su forma original. Para que esa acción inversa esté bien definida también ella como una función, digamos, $g : B \to A$, será necesario que f no haya mezclado puntos. Porque si hay dos puntos distintos, x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$, g no tendrá cómo decidir si $g(y) = x_1$ ó $g(y) = x_2$. Las funciones que no mezclan puntos, es decir que no envían puntos diferentes a la misma imagen, se llaman *inyectivas* o *uno a uno*. Hay un modo de decirlo sin negaciones:

Definición 1: Una función f es *inyectiva* si

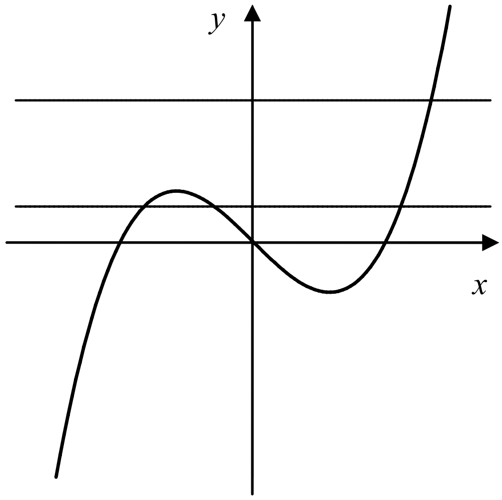
$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2. \tag{1}$$

Si la miramos sobre el gráfico, la condición de inyectividad se manifiesta de la siguiente manera: f es inyectiva si ninguna recta horizontal corta al gráfico en más de un punto. La función . $y = \frac{3x-1}{x-1}$ es inyectiva (fig. 4.1), pero $y = x^3 - x$ no lo es (fig. 4.2).



Función inyectiva: si una recta horizontal corta al gráfico, lo hace en un solo punto.

figura 4.1



Función no inyectiva: existe alguna recta horizontal que corta al gráfico en más de un punto

figura 4.2

Si una función $f : A \to B$ es inyectiva, se puede definir una función g desde su rango que traiga a los puntos de regreso. En efecto, dado $y \in \mathrm{Rg}f$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Pero por la inyectividad ese x es único. Se definirá entonces $g(y) = x$. La función g así definida se llamará la inversa de f. y su dominio será $\mathrm{Rg}f$. Ya que g trae de regreso a x hasta su sitio de partida, aplicar sucesivamente la función y su inversa da un resultado inocuo. Esto es,

$$g \circ f(x) = x \quad \text{y} \quad f \circ g(y) = y \tag{2}$$

Es clara la simetría de roles de f y g. La condición de ser inversa es recíproca.y se caracteriza por las relaciones (2).

Definición 2. Dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son inversas una de la otra si

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= x \quad \text{para } x \in A \text{ y} \\ f \circ g(y) &= y \quad \text{para } y \in B. \end{aligned}$$

Para indicar esta situación se usará la notación $g = f^{-1}$.

Una manera alternativa de expresar el hecho de que g es la inversa de f es la siguiente:

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = g(y). \tag{3}$$

Ejemplos.

1. La función $f(x) = x^3$ es inyectiva y admite una inversa: $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$\sqrt[3]{x^3} = x, \qquad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

2. La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Cualquier recta horizontal $y = r$ con $r > 0$ corta a la parábola $y = x^2$ en dos puntos. Sin embargo se habla de la raíz cuadrada de x si $x \geq 0$. Lo que ocurre es que la restricción de f al intervalo $[0, +\infty)$ sí es inyectiva y $g(x) = \sqrt{x}$ es su inversa:

$$\sqrt{x^2} = x, \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \qquad x \geq 0.$$

Decir "f es inyectiva en A" es más cómodo que decir "la restricción de f al conjunto A es inyectiva".

Definición 1 bis. La función f es inyectiva en el conjunto A si

$$[x_1, x_2 \in A \ \wedge \ f(x_1) = f(x_2)] \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Entonces, dada una función cualquiera, buscando un adecuado subconjunto del dominio donde ella sea inyectiva, se puede obtener una inversa.

Teorema 1. Si f es inyectiva en el conjunto A, su restricción $f|_A$ tiene una inversa $g : f(A) \to A$. Es decir, una función g con dominio en $f(A)$ tal que

$$g(f(x)) = x, \quad \text{para } \ x \in A \ \text{ y } \ f(g(x)) = x, \quad \text{para } \ x \in g(A).$$

Veremos a continuación algunos criterios para encontrar subdominios de inyectividad.

Una función estrictamente monótona es inyectiva: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. En efecto, si fuera $x_1 \neq x_2$, habría entre ellos una desigualdad que, siendo f estrictamente monótona, conservaría o invertiría, pero no convertiría en igualdad.

De modo que los intervalos de monotonía que aprendimos a calcular en el capítulo 3 son buenos subdominios de inyectividad que permitirán encontrar funciones inversas parciales. La figura 4.1. muestra el gráfico de una función inyectiva en $\mathbb{R} - \{1\}$ que no es monótona en ese conjunto. Pero si el conjunto es un intervalo y la función es continua, la monotonía estricta es también condición necesaria para la inyectividad. La idea de la demostración es simple: si una función continua sube y baja dentro de un intervalo, como por Bolzano toma todos los valores intermedios, deberá pasar dos veces por el mismo punto. Escribir una prueba exhaustiva es más complicado y se deja como ejercicio (ejercicio 37).

Teorema 2. Una función continua es inyectiva en un intervalo si y sólo si es estrictamente monótona en él.

Por supuesto, las funciones y los dominios que más nos interesan son las continuas y los intervalos. Por lo tanto el criterio de monotonía toma mucho valor a la luz del teorema 2.

Dada una función continua y encontrado un intervalo A de monotonía estricta (o sea de inyectividad), nos interesará conocer el dominio de la función inversa de la restricción $f|_A$. El teorema 1 dice que ese dominio es $f(A)$. Pero el teorema de Bolzano - Weierstrass (teor. 3 del capítulo 3), asegura que en estas condiciones $f(A)$ es un intervalo. Siendo f monótona, los extremos del intervalo $f(A)$ serán las imágenes de los extremos del intervalo A. En el mismo orde si f es creciente, o invertidos si f es decreciente.

Teorema 3. Si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona entonces existe su inversa f^{-1} con dominio en el intervalo $[f(a), f(b)]^*$.

Si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona y además $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ entonces existe f^{-1} con dominio en el intervalo $[f(a), \pm\infty)^*$.

Análogo resultado vale cuando el límite infinito se produce en el extremo izquierdo del intervalo o en ambos.

Demostración: Sólo habría que probar la segunda afirmación (la primera está en el párrafo que precede al teorema). Si, por ejemplo, f es estrictamente creciente en $[a, b)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$, no cabe duda de que $\mathrm{Rg} f \subset [f(a), +\infty)$, porque no puede ser $f(x) < f(a)$ para un $x \geq a$. La inclusión inversa $[f(a), +\infty) \subset \mathrm{Rg} f$ está probada en el ejemplo 2 de la sección 3.4.■

Ejercicios.

1. Averiguar acerca de la inyectividad de las siguientes funciones en sus dominios naturales:

   1.- $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$

   2.- $y = x^3 + ax + b$ con $a > 0$

   3.- $y = x^3 + ax + b$ con $a < 0$

   4.- $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

   5.- $y = \sin x$ 6.- $y = \tan x$

2. Elegir un intervalo donde la función dada sea inyectiva.

   1) $y = x^2 - 4x + 4$ 2) $y = \sin x$

   3) $y = \cos x$ 4) $y = \tan x$

3. A continuación se da una serie de pares $f - I$ función-intervalo. Probar que cada función f es inyectiva en el intervalo I y hallar el dominio de la inversa de $f|_I$.

   1.- $3x - x^3$ en $[-1, 1]$ 2.- $x^3 - 3x$ en $[-1, 1]$

   3.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $[5, +\infty)$ 4.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $(3, 5]$

   5.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $[1, 3)$ 6.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $(-\infty, 1]$

   7.- $\tan x$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. Mostrar una función monótona en un intervalo que no sea inyectiva. Una inyectiva que no sea monótona. Una función monótona pero no estrictamente...¿Puede ser inyectiva?

Es interesante ver la relación existente entre los gráficos de un par f, g de funciones inversas. Si uno acepta que la variable independiente de la función g se mueva por el eje de ordenadas y la dependiente por el de absisas, el mismo gráfico de f sirve de gráfico a g. Pero ese no es el caso. Queremos ver el gráfico de g en el mismo sistema de coordenadas que el de f. O sea: un punto $(a, b) \in Gr\ g$ si y sólo si $b = g(a)$. Entonces, de acuerdo con la relación (3),

$$(a, b) \in Gr\ g \Longleftrightarrow b = g(a) \Longleftrightarrow a = f(b) \Longleftrightarrow (b, a) \in Gr\ f.$$

Esto significa, de acuerdo con lo señalado en el apartado "simetrías" de la sección 1.3. que $Gr\ f$ y $Gr\ f^{-1}$ son conjuntos simétricos respecto de la diagonal d.

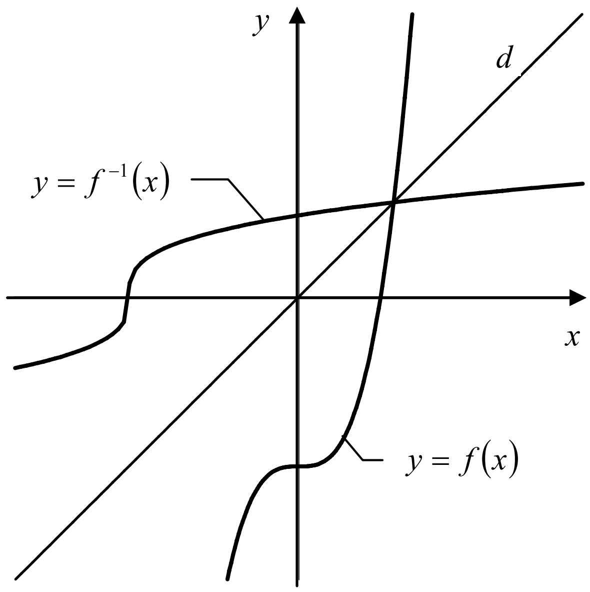


figura 4.3

Con respecto al problema de encontrar explícitamente una fórmula para la función inversa de una dada función f, nótese que resolverlo es resolver una ecuación. Es "despejar" x en la relación $y = f(x)$. Y esto sólo se podrá hacer en algunos casos. En otros, el teorema 3. es un teorema de existencia de la función inversa, la cual, por cierto, es única. Eso nos permite ponerle nombre y saber sus propiedades, pero no tenemos en general una expresión sencilla para ella con operaciones algebraicas sobre funciones conocidas. Calcularemos sus valores con calculadoras u ordenadores.

Ejemplos:

1. Las *funciones homográficas*
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{4}$$
con $ad - cb \neq 0$, tienen inversa. A pesar de no ser monótonas, son inyectivas en su dominio $(\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\})$. La inversa está definida en $\mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ y es fácil obtener una expresión para ella despejando x en (4)
$$f^{-1}(y) = \frac{-dy + b}{cy - a}.$$

2. Como ya se dijo en el ejemplo 3 de la sección 3.4, las potencias $n-$ésimas $f(x) = x^n$ son continuas y crecientes en $[0, +\infty)$ y, de acuerdo con el teorema 3, tienen una inversa $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Las inversas de funciones crecientes son crecientes (Ejercicio 36) así como las composiciones. Lo mismo vale para las decrecientes. De manera que las funciones potenciales con exponente racional tienen inversa en $(0, +\infty)$: Si el exponente es positivo por estrictamente crecientes y si es negativo por estrictamente decrecientes. La inversa de $x^{\frac{m}{n}}$ es $x^{\frac{n}{m}}$.

3. Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente no son inyectivas y hay que elegir intervalos de monotonía para tener una inversa.

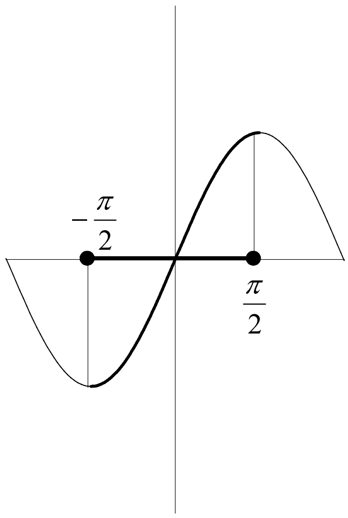


fig. 4.4.a. $y = \sin x$

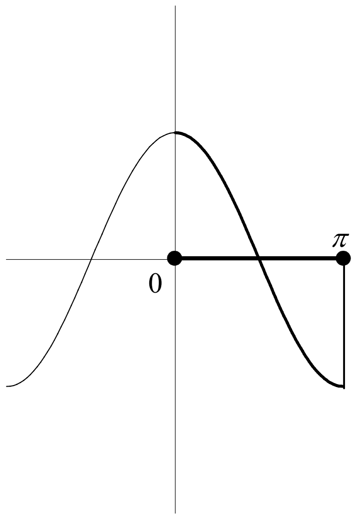


fig. 4.4.b. $y = \cos x$

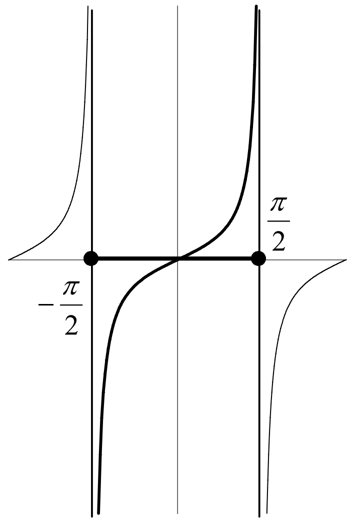


fig. 4.4.c. $y = \tan x$

Para el seno se elige el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donde la función es estrictamente creciente. Como $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, resulta $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Entonces, existe una función

$$\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

tal que

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(\sin x) &= x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin\left(\sin^{-1}(x)\right) &= x, & -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Es costumbre llamar a esta función indistintamente $\sin^{-1}$ o arcsin (arco seno). Su gráfica se muestra en la figura 4.5., junto con la del seno para observar la simetría respecto de la diagonal

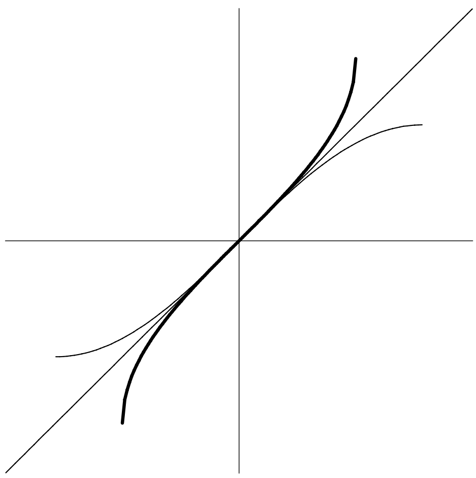


fig 4.5. $\sin x$ y $\arcsin x$

Con similar criterio se definen las funciones

$$\begin{aligned} \arccos &: [-1, 1] \to [0, \pi], \\ \arctan &: (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

inversas, respectivamente, del coseno y la tangente, caracterizadas por las relaciones

$$\arccos(\cos x) = x,\ 0 \le x \le \pi. \qquad \cos(\arccos x) = x,\ -1 \le x \le 1. \tag{7a}$$

$$\arctan(\tan x) = x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \qquad \tan(\arctan x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \tag{7b}$$

4. Valores exactos de las funciones trigonométricas inversas se obtienen en los mismos casos en que razonamentos geométricos permitieron calcular valores exactos de las funciones trigonométricas (ejercicio 40 del capítulo 1). Para valores aproximados se usa la calculadora. Y muchas veces, no se trata de calcular. Las funciones trigonométricas inversas se definen por las relaciones (5)-(7) y esa es la herramienta que se debe usar. Por ejemplo, calcular $\sin(\arccos x)$, para $-1 \le x \le 1$. Como $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$, $\sin\theta \ge 0$ y, en consecuencia, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$. Entonces

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-[\cos(\arccos x)]^2} = \sqrt{1-x^2}.$$

5. En la misma línea del ejemplo anterior, supongamos ahora que debemos simplificar la expresión $\arccos(\sin\theta)$, para $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Buscamos alguna identidad que transforme a $\sin\theta$ en un coseno. Por ejemplo, $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. Ahora, usando (7),

$$\arccos(\sin\theta) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\theta,$$

si es que $0 \le \frac{\pi}{2}-\theta \le \pi$, condición que equivale a $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Ejercicios.

5. Hallar inversas de las siguientes funciones. Esto es:

- Si es inyectiva encontrar el rango y una expresión para su inversa.
- Si no es inyectiva encontrar un subdominio de inyectividad y resolver como en el punto anterior para la restricción.

1.- $y = \frac{3x+2}{x+1}$	2.- $y = x^r, r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$
3.- $x = \sin(\theta - \theta_0)$	4.- $y = x + \frac{1}{x}$

6. (a) Calcular arco seno y arco coseno de los siguientes números:

$$0; \pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Calcular arco tangente de los siguientes números:

$$0; \pm1; \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm\sqrt{3}.$$

7. Calcular:

1.- $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ 2.- $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$ 3.- $\arctan\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$

8. Trazar gráficos aproximados de $y = \arccos x$ y de $y = \arctan x$.

9. Calcular:

   (a) $\cos(\arcsin x)$.

   (b) $\cos(\arctan x)$. Sugerencia. Usar el ejercicio 52.2 del capítulo 1.

4.2 Derivada de la función inversa

La continuidad de una función se refleja en su gráfico, que se puede dibujar "de un solo trazo". La derivabilidad, también se refleja en el gráfico, que acepta tangente no vertical en cada punto. Si una función admite inversa en un intervalo, siendo que el gráfico de la inversa es la reflexión de su gráfico sobre la diagonal, esta inversa tendrá las propiedades de continuidad y derivabilidad de la función original .Salvo que hubiera una tangente horizontal, que con la reflexión se convertiría en vertical. Una función f derivable en un intervalo no podrá tener inversa sin ser estrictamente monótona (teorema 2) y, en este caso, será $f' \geq 0$ o $f' \leq 0$ en todo el intervalo. Si queremos que la inversa mantenga derivada finita, deberemos excluir la posibilidad $f' = 0$. En consecuencia, nuestro conocimiento acerca de la regularidad de la función inversa se compendia en el siguiente enunciado.

Teorema 4. Si la función continua f en el intervalo $[a, b]$ admite una inversa g, la función g es continua en su dominio $[f(a), f(b)]^*$. Si f es derivable en (a, b) con f' estrictamente positiva o estrictamente negativa en todo el intervalo, entonces existe la inversa g que también resulta derivable en $(f(a), f(b))^*$.

Para el cálculo de la derivada de la inversa, se acude a la regla de la cadena. Como f y g son inversas, $f(g(y)) = y$. Derivando respecto de y,

$$f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1,$$

de donde

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \tag{8}$$

Ejemplos.

1. Retomando el ejemplo 2 de la sección 4.1. aplicamos (8) con $f(x) = x^n$, $g(y) = \sqrt[n]{y}$

$$\frac{d}{dy}\sqrt[n]{y} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}$$

Es decir,

$$\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

2. De acuerdo con el resultado anterior y volviendo a usar la regla de la cadena,

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{d}{dx}\left((x^m)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot mx^{m-1} = \frac{m}{n}x^{m\left(\frac{1}{n}-1\right)+(m-1)}.$$

   Y como

$$m\left(\frac{1}{n}-1\right)+(m-1) = \frac{m}{n} - m + m - 1 = \frac{m}{n} - 1,$$

   resulta

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.$$

   Esto es, la regla conocida para exponentes enteros,

$$\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}$$

   es válida también para exponentes racionales.

3. La función *arco coseno.* Restringiéndose al intervalo $(0, \pi)$ la función $\cos$ tiene derivada negativa. Su inversa $\arccos$ es derivable en $(-1, 1)$. Aplicando la regla de la cadena en (7),

$$\frac{d}{dx}\cos(\arccos x) = 1 \Longrightarrow -\sin(\arccos x)\frac{d}{dx}\arccos x = 1.$$

   De acuerdo con el cálculo efectuado en el ejemplo 4 de la sección anterior, entonces,

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{9}$$

4. La función *arco seno*. Restringiéndose al intervalo $(-\pi, \pi)$ la función $\sin$ tiene derivada positiva. Se deduce que su inversa, $\arcsin$, es derivable en $(-1, 1)$. Aplicando la regla de la cadena a la identidad (5)

$$\frac{d}{dx}\sin(\arcsin x) = 1 \Rightarrow \cos(\arcsin x) \cdot \frac{d}{dx}\arcsin x = 1$$

   Usando que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. (ver ejercicio 8.a.),

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{10}$$

5. La función *arco tangente*. La función $\tan$ tiene derivada positiva en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Su inversa, arctan, es derivable en $(-\infty, +\infty)$ Derivando con la regla de la cadena en (7),

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot \frac{d}{dx}\arctan x = 1$$

   Para continuar, se debe recordar que $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (ejercicio 8.b.). Por lo tanto, $\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} = 1 + x^2$. Luego,

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \tag{11}$$

Ejercicios.

10. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

a) $\arctan\sqrt{x}$ b) $\arcsin x + \arccos x$

c) $x \arcsin x$ d) $\arctan(\sin 2x)$

11. Calcular

$\frac{d}{dx}\arcsin x\Big|_{x=0}$ $\frac{d}{dx}\arcsin x\Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos x\Big|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\frac{d}{dx}\arctan x\Big|_{x=\sqrt{3}}$

12. Un aeroplano a una altura de 1400 m vuela horizontal y directamente alejándose de un observador. Cuando el ángulo de elevación es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo está decreciendo a razón de 0.05 rad/seg. ¿Con qué rapidez está volando el aeroplano es ese instante?.

4.3 Función Exponencial

Dado un número real $a > 0$, conocemos el significado de la expresión a^x si x es un número racional. Es decir, la función $x \mapsto a^x$ está definida para $x \in \mathbb{Q}$. Usando que todo número real se puede aproximar por sucesiones de racionales, un procedimiento de paso al límite permite extender la función $x \mapsto a^x$ a todos los valores reales de la variable x. Tal construcción sería poco interesante actualmente. Además, en otro capítulo, presentaremos un camino alternativo para la definición de potencias de exponente real. De modo que por ahora aceptaremos que existe una función $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ dada por $f(x) = a^x$, y que goza de las propiedades que iremos enunciando. Ellas son, en general, la extensión de las propiedades ya conocidas para potencias de exponente racional.

1) $a^{x+y} = a^x.a^y$

2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, coincidiendo con la definición anterior.

3) $(a^x)^y = a^{x.y}$.

Señalamos que de 2) se desprende que $a^0 = 1$ y que $a^1 = a$, dos datos útiles para graficar $y = a^x$.

Estudiemos la diferenciabilidad de f.

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

La existencia de este ultimo límite es la cuarta propiedad que admitiremos sin demostración:

4) Existe $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = C_a$.

Nótese que $C_a = \frac{d}{dx}a^x\big|_{x=0}$. Admitida la diferenciabilidad en el origen, entonces, queda probada la diferenciabilidad en todo punto

$$\frac{d}{dx}a^x = C_a a^x. \tag{12}$$

Para exponentes racionales positivos es sabido que (ver ejemplo 2 en la sección 4.1.)

$$1 < a < b \Rightarrow 1 < a^h < b^h, \qquad h > 0, h \in \mathbb{Q}.$$

Luego,

$$0 < \frac{a^h - 1}{h} < \frac{b^h - 1}{h}$$

Dejando tender h hacia 0^+ a través de los racionales, se concluye de 4) que

$$0 < C_a < C_b.$$

De $C_a > 0$ y $\frac{d}{dx}a^x = C_a a^x$, se deduce que a^x es creciente. Y de $C_a < C_b$ sigue que la derivada en el origen de la función exponencial es más grande cuando mayor es la base a. Si calculamos la derivada segunda, $\frac{d^2}{dx^2}a^x = C_a^2 a^x$, vemos que a^x es convexa. Luego (ejercicio 30, cap.3)

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

Además,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} a^x} = 0.$$

Con estos elementos, se puede trazar la gráfica de $y = a^x$. Lo hacemos para $a = 2$ y $a = 3$.

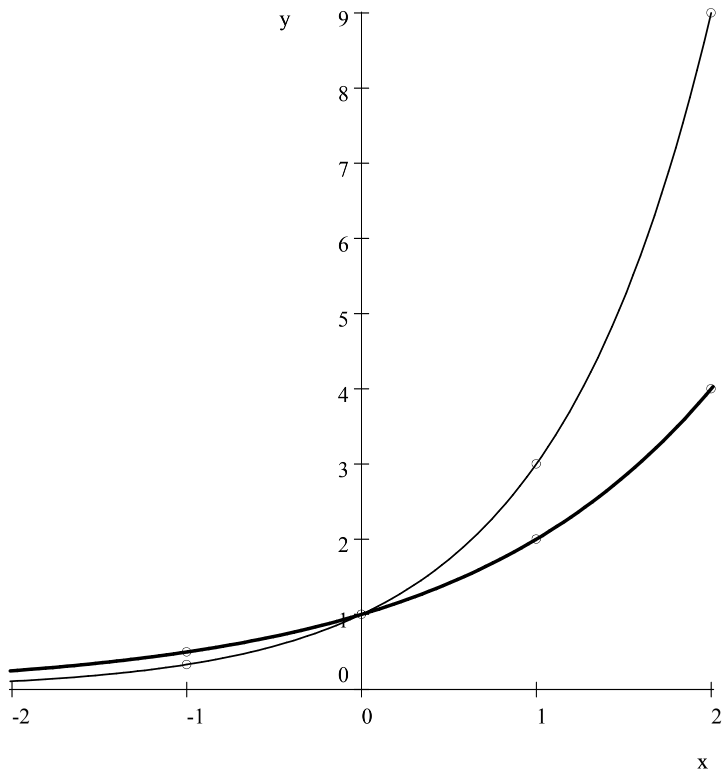


fig. 4.6.

En la próxima sección se verá un método que permita calcular los valores de cualquier función exponencial a^x conocidos los de otra, b^x. Hemos visto que, si $a < b$, resulta

$C_a < C_b$.. A las exponenciales a^x con $a < 1$ corresponden valores de $C_a < 0$. El valor $C_a = 0$ correspondería a la exponencial impropia 1^x, que es una constante.

Por la convexidad de la función a^x, se pueden deducir un par de acotaciones rápidas para C_2 y C_3. Si ℓ es la recta tangente en 0, sabemos que $\ell(x) < a^x$ para $x \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} a &= 2: \quad \ell(1) = C_2 + 1 < 2 = 2^1 \Longrightarrow C_2 < 1 \\ a &= 3: \quad \ell\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}C_3 + 1 < \frac{1}{\sqrt[8]{3}} = 3^{-\frac{1}{8}} \Longrightarrow C_3 > 8\left(1 - \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right) \backsimeq 1.026 > 1 \end{aligned}$$

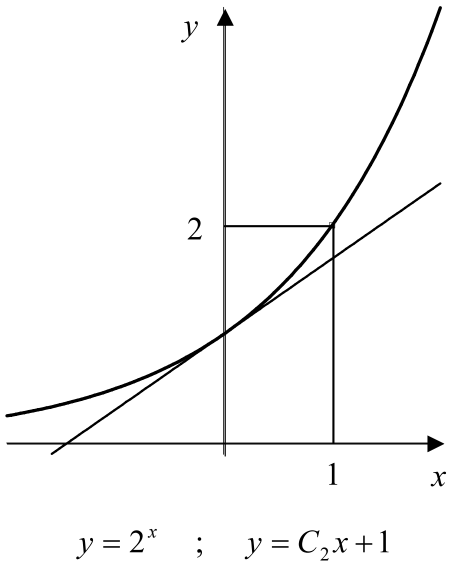


fig. 4.7

Si C_a crece con a, y $C_2 < 1 < C_3$, es de esperar que haya algún número,digamos e, entre 2 y 3 tal que $C_e = 1$. En efecto así es, y esa será nuestra quinta suposición:

5) Existe un número real e tal que $C_e = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Esto implica que

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \qquad \left.\frac{d}{dx}e^x\right|_{x=0} = 1 \tag{13}$$

El lector puede buscar el número e en su calculadora y comprobar que $e \cong 2.72$.

La función e^x es la exponencial natural y se denota también $e^x = \exp x$. En general se trata de referir a ella todos los asuntos atinentes a funciones exponenciales. Resumimos sus propiedades para tenerlas a la mano:

1. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
2. $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$
3. $e^0 = 1$
4. $\exp$ es una función infinitamente diferenciable. $\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$.
5. $\exp$ es creciente y convexa.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$

Ejercicios.

13. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$1)\ \arctan e^x \qquad 2)\ e^{\sin 2x} \qquad 3)\ 1/e^x \qquad 4)\ e^{e^x}$$

$$5)\ \tan(e^x) \qquad 6)\ 1/(\sin e^x) \qquad 7)\ e^{\tan x} \qquad 8)\ \arcsin(e^x + x)$$

14. Hallar la ecuación de la recta tangente de

$$1)\ \ y = e^{2x},\ \text{en}\ \ x = 1 \qquad 2)\ \ y = x^2 e^{-2x},\ \text{en}\ \ x = 1$$

15 (a) Trazar las gráficas de $y = 2^x$ y de $y = 3^x$ en un mismo esquema.
(b) Trazar las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Sugerencia: Observar que $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ y usar una reflexión sobre el ejercicio anterior.

16. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = e^x$ en el punto (x_0, e^{x_0}). Encontrar el valor x_0 que hace que esa recta tangente pase por el origen.

17. **Ejercicio 14:** Probar las siguientes desigualdades, validas para $x > 0$.

$$1)\ \ 1 < e^x \qquad 2)\ \ 1 + x < e^x \qquad 3)\ \ 1 + x + \tfrac{x^2}{2} < e^x$$

Utilizar estas desigualdades para probar que $e > 2,5$.

4.4 Función Logarítmica

Como $\exp : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$ es estrictamente creciente y diferenciable, tiene una inversa que llamaremos *logaritmo natural*

$$\ln : (0, \infty) \to (-\infty, \infty),$$

también estrictamente creciente y diferenciable. caracterizada por:

$$e^{\ln x} = x, \qquad 0 < x < +\infty \tag{14a}$$
$$\ln e^x = x, \qquad -\infty < x < +\infty \tag{14b}$$

La inyectividad del logaritmo y de la exponencial, combinadas con (14) son la herramienta para probar propiedades que el logaritmo hereda de su inversa. Esto se hace bajo el principio

$$A = B \Leftrightarrow e^A = e^B \Leftrightarrow \ln A = \ln B,$$

usando lo que más convenga en cada caso. Por ejemplo, para probar que

$$\ln uv = \ln u + \ln v,$$

conviene probar que

$$e^{\ln uv} = e^{\ln u + \ln v},$$

que es equivalente. Ahora bien: $e^{\text{ln}uv} = uv$ por (14a), mientras que $e^{\text{ln}u+\text{ln}v} = e^{\text{ln}u} \cdot e^{\text{ln}v} = uv$, nuevamente por (14a).

De manera similar,

$$\text{ln}u^v = v\text{ln}u$$

pues

$$\exp \text{ln}u^v = u^v \quad \text{mientras} \quad e^{v\text{ln}u} = \left(e^{\text{ln}u}\right)^v = u^v.$$

La derivada de ln, sabido que existe, se calcula, por ejemplo, derivando ambos miembros de (14a) con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}e^{\text{ln}x} = \frac{dx}{dx} \Rightarrow e^{\text{ln}x}\text{ln}'x = 1 \Rightarrow \text{ln}'x = \frac{1}{e^{\text{ln}x}} = \frac{1}{x}$$

En particular, $\text{ln}'1 = 1$. Con respecto a la segunda derivada, $\frac{d^2}{dx^2}\text{ln}x = -\frac{1}{x^2} < 0$. ln es cóncava.

Más propiedades:

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \Rightarrow \text{ln}1 = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} e^x &= 0 \Rightarrow \lim_{x\to0+} \text{ln}x = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^x &= \infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \text{ln}x = \infty \end{aligned}$$

Con estos datos es fácil trazar un gráfico aproximado de $y = \text{ln}x$ que, por otra parte, será la reflexión del gráfico de $y = e^x$ respecto de la "diagonal" $y = x$.

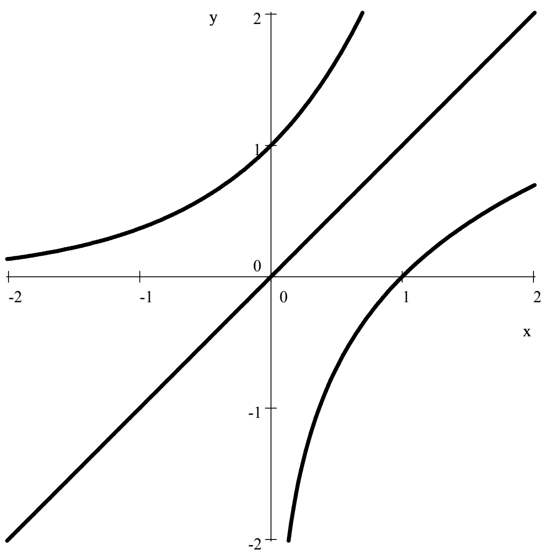


fig. 4.8

Recordando que $\text{ln}y$ sólo está definido para valores positivos de y, si $f(x) > 0$ para todo x, se puede hacer la composición y derivar

$$\frac{d}{dx}\text{ln}(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Esta observación vanal es muy útil en situaciones como la siguiente.

En muchos procesos hay una variable cuya razón de cambio en un instante dado es proporcional al valor de la variable en ese instante (tamaño de una colonia de microorganismos, masa de una sustancia radioactiva). Esto da origen a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \text{o bien} \quad f'(x) = kf(x)$$

Para encontrar una solución, si $f > 0$, resulta

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k \quad \text{ó, lo que es lo mismo,} \quad \frac{d}{dx}\ln f(x) = k.$$

Si esto ocurre en un intervalo, el teorema de unicidad asegura que existe una constante c tal que

$$\ln f(x) = kx + c.$$

Tomando exp en ambos miembros,

$$f(x) = e^{kx+c} = e^{c}.e^{kx} = Ce^{kx},$$

llamando $C = e^{c}$. Veremos que la suposición $f > 0$ es innecesaria.

Teorema 5. Si f satisface en un intervalo la ecuación diferencial

$$f'(x) = kf(x),$$

entonces existe una constante C tal que

$$f(x) = Ce^{kx}$$

en ese intervalo.

Demostración. Consideramos la función $g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}}$. Diferenciando,

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{kx} - kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}} = \frac{1}{e^{kx}}\left[f'(x) - kf(x)\right] = 0.$$

Luego g es constante en el intervalo. Esto es, existe C tal que $\frac{f(x)}{e^{kx}} = C$, o sea, $f(x) = Ce^{kx}$ ■

La reducción de funciones exponenciales de base positiva (distinta de1) cualquiera a la exponencial natural se hace con ayuda del logaritmo. Si $a > 0$,

$$a^{x} = \exp\left(\ln a^{x}\right) = e^{x\ln a}.$$

Es conveniente pensar que nunca se habló antes de la exponencial de base a y que esta es su definición. Podríamos entonces calcular su derivada

$$\frac{d}{dx}a^{x} = e^{x\ln a}\ln a = a^{x}\ln a.$$

Con esto venimos a descubrir que, el misterioso límite que daba la derivada de la exponencial de base a en el origen no es otra cosa que el logaritmo de a.

$$C_a = \left.\frac{d}{dx}a^{x}\right|_{x=0} = \ln a.$$

Ejercicios.

18. Probar que $\ln\frac{u}{v} = \ln u - \ln v$

19. Calcular $\frac{d}{dx}\ln|x|$

20. Trazar las gráficas de $y = \ln x$ y de $y = x - 1$ en un mismo esquema.

21. Se sabe que la función $y = a^x$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$. Encontrar k en función de a.

22. Encontrar una expresión para $\log_a x$ en función de $\ln x$ y de $\ln a$. (Sugerencia: partir de la identidad $a^{\log_a x} = x$ y aplicar $\ln$ miembro a miembro).

23. Calcular $\frac{d}{dx} \log_a x$.

24. Graficar, en un mismo esquema, $\log_2 x$, $\log_3 x$ y $\ln x$.

25. Probar que $\ln x < x - 1$ para todo $x > 0$.

26. Despejar x en las siguientes ecuaciones:

a) $2^x = 8$ b) $3 \cdot 2^x = e^5$

c) $10e^{\frac{x}{2}} = 2$ d) $\log(x+5) = 3$

27. Resolver los siguientes problemas:

a) $\begin{cases} f'(x) = 3f(x) \\ f(0) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2}{3}f(x) \\ f(\ln 8) = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f'(x) = -2f(x) \\ f'(0) = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Los procesos de desintegración de sustancias radiactivas, si $f(t)$ representa la masa de la sustancia en el instante t, obedecen a la ecuación diferencial $f'(t) = Kf(t)$, para alguna constante $K < 0$.

28. Sea $f(t) = 10e^{Kt}$ para alguna constante K. Hallar K sabiendo que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

29. $f(t) = Ce^{2t}$. $f(2) = 5$. Calcular C.

30. En un millón de años, un gramo de radio se redujo a 01 gramo. ¿Cuál es la fórmula que da la razón de desintegración?

31. El azucar se disuelve en el agua a razón proporcional a la cantidad aún no disuelta. Si 13,6 kgr se reducen a 4,5 kgr en 4 horas ¿Cuándo se disolverá el 95% del azúcar?

Los procesos de crecimiento no inhibido de poblaciones responden también a la ecuación diferencial $f'(t) = Kf(t)$, ahora con la constante $K > 0$. Aquí $f(t)$ es el tamaño de la población en el instante t.

32. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que 1.000.000 de bacterias aumenten a 10.000.000, si tardan 12 minutos en aumentar a 2.000.000?

4.5 Complementos

Ejercicios

33. En cada uno de los siguientes ejercicios, restringir el dominio de f a un intervalo de modo que la función inversa g esté definida en un intervalo que contenga al punto indicado, y hallar la derivada de la función inversa en el punto indicado.

a) $f(x) = x^3 + 1.$	Hallar $g'(2)$
b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$	Hallar $g'(6)$
c) $f(x) = \sin 2x$	Hallar $g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
d) $f(x) = 5x^2 + 1.$	Hallar $g'(11)$

34. Probar que:

(a) $\Psi \circ \Phi$ inyectiva $\Longrightarrow$ Φ inyectiva.

(b) $\Psi \circ \Phi$ sobreyectiva $\Longrightarrow$ Ψ sobreyectiva.
($f : A \to B$ es sobreyectiva si $\operatorname{Rg} f = B$)

35. Sean $\Phi : A \to B$ y $\Psi : B \to A$ dos funciones tales que $\Psi \circ \Phi = id_A$ ($id_A(x) = x$, $\forall x \in A$. Es la función *identidad*). Probar que las siguientes tres proposiciones son equivalentes:

(a) $\Phi \circ \Psi = id_B$ (esto es, $\Psi = \Phi^{-1}$).

(b) Ψ es inyectiva.

(c) Φ es sobreyectiva.

36. Probar que la inversa de una función creciente es creciente.

*37. Este ejercicio constituye una demostración de que una función inyectiva y continua en un intervalo debe ser estrictamente monótona.

(a) si en el intervalo hay tres puntos $a < b < c$ tales que $f(a) \leq f(b) \geq f(c)$ o bien $f(a) \geq f(b) \leq f(c)$ entonces f no es inyectiva (Usar el teorema de Bolzano).

(b) Dado cualquier punto a en el interior del intervalo, se da una de las dos circunstancias siguientes:

i. $[x < a \Rightarrow f(x) < f(a)] \wedge [x > a \Rightarrow f(x) > f(a)]$

ii. $[x < a \Rightarrow f(x) > f(a)] \wedge [x > a \Rightarrow f(x) < f(a)]$.

(c) En el caso **(b) i.** f es creciente y en el caso **(b) ii.** f es decreciente. Por ejemplo en el caso **i.**, habrá que demostrar que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Para ello se deberán analizar todos los casos $x < y < a, x < a < y, a < x < y$,dos de ellos a la luz del resultado (a).

Notas

1. **Continuidad de la inversa.** Si la función continua f tiene inversa en un intervalo I, que es lo mismo que decir que es inyectiva, ella es estrictamente monótona (ejercicio 37) y también lo será entonces su inversa (ejercicio 36). Por lo tanto, la inversa $f^{-1} = g$ sólo podría tener discontinuidades de salto (7^a propiedad del límite, notas al final del capítulo 3). Entonces, suponiendo por ejemplo que f y g son estrictamente crecientes, si g no fuera continua, debería existir un punto $c \in J = f(I)$ en el cual uno de los dos límites laterales no coincide con el valor de la función. El razonamiento en ambos casos es igual, de modo que supondremos que $\ell = \lim_{y \to c^-} g(y) < g(c)$ (ejercicio **27.b.** en cap. 3). Entonces, la función g no toma valores en el intervalo no vacío $[\ell, g(c))$. En efecto, de acuerdo con el ejercicio **27.c.** del capítulo 3, para $y < c$ es $g(y) < \ell$; y por la mera monotonía, para $y \geq c$ resulta $g(y) \geq g(c)$. De modo que, por una parte, $[\ell, g(c)) \subset I$, mientras que por otra $[\ell, g(c)) \cap g(J) = \varnothing$, siendo $g(J) = I$. Esto es una contradicción.

2. **Derivabilidad de la inversa.** Un teorema formal sobre derivabilidad de la función inversa debería intentar cubrir la situación más amplia posible, no poner hipótesis de más. Pero por lo menos habrá que asegurarse de que f tenga inversa y sea derivable en un intervalo I. Si es derivable, f será automáticamente continua y, entonces (nota 1) será estrictamente monótona. Como f' no deberá anularse porque entonces la tangente de la inversa sería vertical, siendo f monótona f' deberá tener signo constante en I. El lector podrá encontrar teoremas aparentemente más generales, pero no cubren más casos que el siguiente enunciado:

   Una función f derivable en un intervalo I tiene inversa si y sólo si $f' > 0$ (ó $f' < 0$) en I. En ese caso, si llamamos g a la inversa, ella es derivable en $J = f(I)$ y

   $$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

   Ya sabemos por la nota 1 que g es continua. Sólo falta calcular su derivada. Para ello se ha de considerar el límite del cocinte incremental

   $$\lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k}. \tag{15}$$

   Llamando $x := g(y)$ y $h := g(y+k) - g(y)$, el numerador en (15) se convierte en h mientras que el denominador se calcula fácilmente en el nuevo lenguaje:

   $$\begin{aligned} x &= g(y) \Rightarrow y = f(x), \\ h &= g(y+k) - g(y) \Rightarrow g(y+k) = x + h \Rightarrow y + k = f(x+h) \\ k &= y + k - k = f(x+h) - f(x). \end{aligned}$$

   De modo que (15) se transforma en

   $$\lim_{k \to 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)}. \tag{16}$$

   Ahora bien, como f es inyectiva, $f(x+h) - f(x)$ sólo se anula para $h = 0$. De modo que la función

   $$h \mapsto \frac{h}{f(x+h) - f(x)}$$

   es continua y vale $\frac{1}{f'(x)}$ en $h = 0$. Por otra parte, la continuidad de g, que ya conocemos, asegura que

   $$\lim_{k \to 0} h = \lim_{k \to 0} [g(y+k) - g(y)] = 0.$$

Entonces, de acuerdo con la propiedad **6** del límite,

$$\lim_{k\to 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$