1 Precálculo

Existe un criterio para identificar los números reales con los puntos de una recta. El procedimiento para producir tal identificación comienza por asignar sendos puntos a los números 0 y 1. Este primer paso convierte a la recta en una recta ordenada: el sentido de avance desde el 0 hacia el 1 es considerado el sentido positivo. En las representaciones gráficas que hacemos de esta recta, a la que llamaremos *recta real*, es costumbre poner el 0 a la izquierda del 1. Usando el segmento $[0, 1]$ como unidad de distancia, se ubican en la recta los números naturales en su orden:

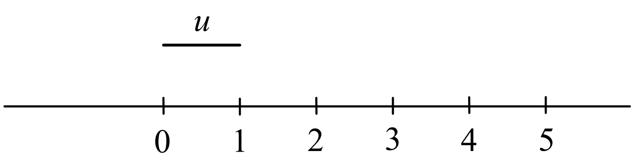


figura 1.1

A continuación, se ubican los números positivos cuya expresión decimal tiene un solo dígito a la derecha del punto([1]). Se divide en diez partes iguales el segmento posterior a la parte entera y se ubica el número en la marca indicada por el decimal. Por ejemplo, el punto asignado al número 21.3 es el que se ve en el siguiente gráfico:

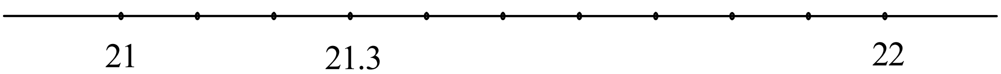


figura 1.2

Siguiendo el mismo procedimiento se representan todos los números positivos con expresión decimal finita. el número 21.348([2]), por ejemplo, se insertará en la octava marca del segmento $(21.34\ ,\ 21.35)$, después de dividirlo en diez partes iguales.

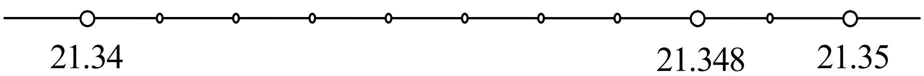


figura 1.3

---

[1] Usaremos el punto, como en inglés, en vez de la coma española, para señalar el final de la parte entera, para estar de acuerdo con la notación habitual en calculadoras y ordenadores.

[2] Cabe recordar que si se adoptó el criterio de preferir siempre la expresión decimal infinita para evitar la doble representación decimal de un mismo número, 21.348 se escribirá 21.347999.......

Para los números positivos con expresión decimal infinita, el procedimiento es también infinito. Dado un número $a = a_0.a_1...a_n.....$ con a_0 un entero no negativo y ,cada a_j un entero no negativo entre 0 y 9 (o sea un dígito), la sucesión acotada de puntos en la recta correspondientes a los números

$$a_0, \quad a_0.a_1, \quad a_0.a_1a_2 \quad a_0.a_1a_2a_3 \quad a_0.a_1a_2a_3a_4..........,$$

representados por el procedimiento finito ya descripto, convergerá hacia un punto que representará al número a. Finalmemte, los números negativos se representan a la izquierda del origen (esto es del 0) en forma simétrica respecto de su recíproco, que es positivo.

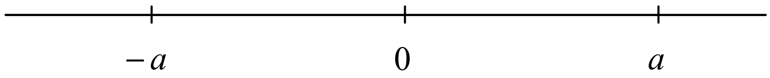


figura 1.4

Con esta asignación (que, insistimos, supone la elección de dos puntos de la recta para ubicar los números 0 y 1) la recta real y el conjunto de los números reales quedan identificados. Para nosotros serán la misma cosa y la representaremos con el símbolo $\mathbb{R}$.

Ya ubicados los números reales en la recta, para interpretar en contexto geométrico las operaciones de suma y producto, es conveniente pensar a cada número como un *vector libre* con origen en cero que señala al punto correspondiente de la recta.

La suma se efectúa trasladando el origen del segundo vector al extremo del primero. el extremo del segundo trasladado señala el punto que corresponde a la suma:

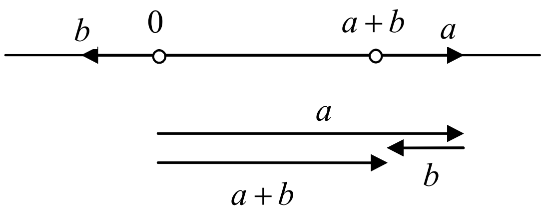


figura 1.5

Multiplicar por un número positivo significa cambiar la escala del vector multiplicado, expandiendo o contrayendo lo que el factor indica. Multiplicar por -1 significa invertir la orientación. Las multiplicaciones por números negativos se obtienen componiendo las dos acciones anteriores.

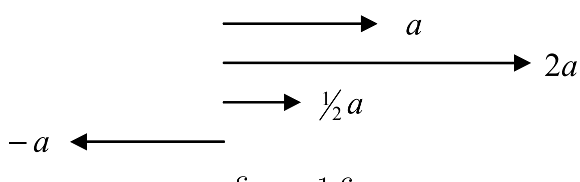


figura 1.6

Para la resta, es mejor pensar así: $b-a$ es un número que sumado con a da b $(a+(b-a) = b)$. Luego, como vector, puesto su origen en el extremo de a debe pinchar a b.

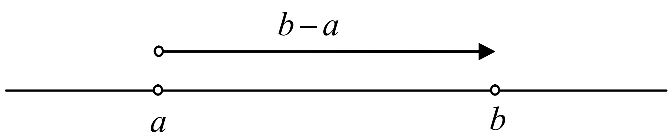


figura 1.7

Ejercicio 1: Representar en la recta real los siguientes números:

$$0.7, \quad 1.45 \quad -0,3, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}.$$

1.1 Desigualdades

Dados dos números reales no negativos y conocidas las expresiones decimales que los representan, es fácil saber cuál es más grande. Basta con saber comparar los dígitos; se comparan las expresiones decimales comenzando desde la parte entera hasta dónde dejen de coincidir y en esa posición el dígito de alguno será mayor que el del otro: ése es el mayor. Lo ilustramos con un par de ejemplos:

$$5 > 3.475 \qquad 2.34567 < 2.34576.$$

La única excepción proviene de la doble representación de algunos números: $0.3999.... = 0.34$.

Si pensamos ahora en la representación de los números en la recta real descripta en la sección anterior, el criterio de comparación se traduce en que $a < b$ exactamente cuando a precede a b en el sentido de orientación positivo de la recta; es decir, cuando a *está a la izquierda de* b. Y este criterio permanece válido cuando se comparan números cualesquiera (positivos o negativos). Pensamos que es la mejor manera para imaginar la relación $<$

Ejercicio 2: Ordenar las siguientes series de números.
1.- 0.45 ; -1.3 ; $\frac{1}{3}$; 0.33 ; $-1.2999...$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$.
2.- 3.141592 ; 3.141593 ; $3,141592666...$; π ; $-\sqrt{2}$; -1.41 ; $-\frac{142}{100}$.

La relación " $<$ ", definida en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, tiene las siguientes propiedaes fundamentales:

1. Tricotomía.- Para $a, b \in \mathbb{R}$, ocurre una y sólo una de las tres posibilidades siguientes: $a < b$, $a = b$, $b < a$.
2. Transitiva.- $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
3. Consistencia con la suma.- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4. Consistencia con el producto.- $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$

De estas cuatro propiedades fundamentales se deducen muchas otras. Las más importantes se proponen como ejercicio más abajo. Advertimos antes que usaremos distintas formas que involucran a la relación " $<$ ". Se dice $a > b$ por $b < a$. Además, $a \leq b$ significa $a < b \vee a = b$. Se escribe $a < b < c$ por $a < b \wedge b < c$. En cambio la expresión $a < b > c$ no tiene sentido.

Ejercicio 3: Demostrar las siguientes proposiciones:

5. $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

6. $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

7. $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

8. $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

9. $a, b, c, d > 0 \wedge a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd$

10. $a, b > 0 \wedge a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \wedge \sqrt{a} < \sqrt{b}$

11. $0 < 1$

Las desigaldades son proposiciones, Hacen una afirmación acerca de sus miembros. Cuando incluyen una variable, son proposiciones abiertas que se llaman *inecuaciones*. La solución de una inecuación es un conjunto: el conjunto de todos los números que puestos en el lugar de la variable hacen verdadera la desigualdad.

Ejemplos:

1. $x < 3$ es una inecuación. su solución es el conjunto $S = \{x : x < 3\}$, una semirrecta cuya representación gráfica es la siguiente

figura 1.8

2. $x \geq 2$ es otra inecuación cuyo conjunto solución es $S = \{x : x \geq 2\}$. Otra semirrecta:

figura 1.9

El paréntesis "redondo" en el dibujo, señala que la semirrecta graficada no incluye el extremo 3. En el otro gráfico, el paréntesis "cuadrado" indica que el 2 sí está incluido. Esto está en consonancia con las próximas definiciones.

Un signo "=" precedido por ":" significa que el miembro de la izquierda es una nueva denominación para el miembro de la derecha, cuyo sentido ya es conocido. Esto es una *definición*. Por ejemplo:

Si $a < b$, se define el intervalo abierto $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ Los intervalos cerrados y los mixtos se definen, similarmente, por:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\,, \qquad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Los símbolos ∞ y $-\infty$ se aceptan como extremos de intervalos para denotar las semirrectas:

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$
$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$$

Ejercicios:

4. Graficar los intervalos $I_1 = \left[\sqrt{2}, \pi\right)$; $I_2 = \left(\frac{7}{5}, 3.5\right)$
Hallar $I_1 \cap I_2$

5. Consideremos los intervalos $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (0, 1)$, $I_4 = (1, \infty)$. Dado un número a en uno de estos intervalos I_i encuentre a cuál intervalo I_j pertenecerá $\frac{1}{a}$.

Las propiedades de tipo algebraico de las desigualdades (1 a 10), permiten resolver inecuaciones y la notación de intervalos da una herramienta cómoda para expresar sus soluciones y graficarlas.

Ejemplos:

3. Consideremos la inecuación $2 - 5x > 3$. Tal como ocurre con las ecuaciones, la propiedad 3 justifica los "pasajes de términos". La inecuación original es equivalente a esta otra: $-1 > 5x$. ¿Se puede hacer pasajes de factores?. Sólo cuando son positivos. Se usa la regla 4. Multiplicando por $\frac{1}{5}$ que es **positivo**, la inecuación se transforma en $-\frac{1}{5} > x$. Como de $-\frac{1}{5} > x$ se vuelve a $-1 > 5x$ multiplicando por 5, las inecuaciones son equivalentes. Luego,
$$2 - 5x > 3 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5}.$$
Esta inecuación ya está resuelta. El conjunto solución es $S = \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$.

4. Para resolver la inecuación $(x + 2)(x + 4) < 0$, un camino posible es resolver primero $(x + 2)(x + 4) > 0$ y después pensar. La propiedad 8 nos permite decir que
$$(x + 2)(x + 4) > 0 \Leftrightarrow [x + 2 > 0 \wedge x + 4 > 0] \vee [x + 2 < 0 \wedge x + 4 < 0]$$
Resolviendo cada inecuación por separado, tenemos que
$$(x + 2)(x + 4) > 0 \Leftrightarrow [x > -2 \wedge x > -4] \vee [x < -2 \wedge x < -4]$$
Ahora cada corchete se resuelve por separado. Para que x sea solución de dos ecuaciones, debe estar en la intersección de los conjuntos solución de ambas. Por ejemplo: $x > -2 \wedge x > -4 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty) \cap (-4, \infty) = (-2, \infty)$. Esto es,
$$(x + 2)(x + 4) > 0 \Leftrightarrow x > -2 \vee x < -4$$
Si agregamos los puntos donde la expresión se anula, que son -2 y -4,
$$\begin{aligned} (x + 2)(x + 4) &\geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \vee x \leq -4 \Leftrightarrow \\ x &\in (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty) \end{aligned}$$
Por último, se observa que la propiedad 1 (tricotomía) asegura que
$$(x + 2)(x + 4) < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 4) \ngeq 0$$
Por lo tanto, el conjunto solución se encuentra tomando el complemento de la solución de la inecuación negada:
$$S = \{(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)\}^c = (-4, -2)$$

5. Un método alternativo para analizar el signo del producto $(x+2)(x+4)$ en función de los valores de la variable x es analizar cada factor y luego usar la "regla de los signos"

		-4		-2	
$(x+2)$	$- - - -$	$-$	$- - - - - - - - - - - - -$	0	$+ + + + +$
$(x+4)$	$- - - -$	0	$+ + + + + + + + + + + + +$	$+$	$+ + + + + +$
$(x+2)(x+4)$	$+ +$	0	$- - - - - - - - - - - - -$	0	$+ + + + +$

figura 1.10

Como se ve, resulta negativo en el intervalo $(-4,-2)$, confirmando el resultado del ejemplo 2.

Ejercicio 6: Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $3x-1<4$ 2) $2-3x>6$

3) $(x+1)(x-2)<0$ 4) $(x-1)(x+1)>0$

5) $(x-5)^4(x+10)\leq 0$

Advertencia: Si se multiplica miembro a miembro una desigualdad por una expresión que contiene a la incógnita, no se podrá saber si esa expresión es positiva o negativa (porque eso depende del valor desconocido de la incógnita) y por lo tanto no se sabe si el sentido de la desigualdad permanece o se invierte.

Ejemplo 6: Consideremos la inecuación

$$\frac{1}{x-3}\leq 2.$$

Lo primero es determinar el dominio de definición de la inecuación. Las expresiones involucradas sólo tienen sentido para $x\neq 3$. Por lo tanto nos mantendremos en ese supuesto. De acuerdo con la advertencia no multiplicamos por $(x-3)$. Es conveniente llevar la inecuación a la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0 \quad (ó\ \geq)$$

$$\frac{1}{x-3}\leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-2\leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x+6}{x-3}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-7}{x-3}\geq 0.$$

Usando ahora el método sinóptico,

		3		$7/2$	
$(2x-7)$	$- - - - - - - -$	$-$	$- - - - - - -$	0	$+ + + + +$
$(x-3)$	$- - - - - - - -$	0	$+ + + + + + + +$	$+$	$+ + + + + +$
$(2x-7)/(x-3)$	$+ + + + +$	$\otimes$	$- - - - - - -$	0	$+ + + + +$

figura 1.11

Se concluye que $\frac{2x-7}{x-3} \geq 0$, y por lo tanto $\frac{1}{x-3} \leq 2$, para $x \in (-\infty, 3) \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

Ejercicio 7: Resolver las siguientes inecuaciones

1) $1 + \frac{1}{x} > 0$ 2) $\frac{x^2-5}{x-2} \leq 4$

3) $\frac{2}{x-1} < 3$ 4) $\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} < 0$

El primer recuerdo que tenemos del *valor absoluto* involucra a una maestra diciendo que un número se compone de dos elementos: su signo y su valor absoluto. Si es positivo el signo es "+" y no se pone, y si es negativo el signo es "$-$". Si seguimos esa instrucción obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Para } a &\geq 0, a = |a| \\ \text{Para } a &< 0, a = -|a| \end{aligned}$$

En esa definición se construía el número entero a partir de dos elementos ya existentes. Aquí, en cambiom damos como preexistente el número y queremos definir el *valor absoluto.* De modo que aceptaremos la definición de la maestra pero dándola vuelta:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Nótese que $|a| \geq 0$ siempre,.y sólo es 0 para $a = 0$. $|a|$ mide la distancia, en la recta real, desde el punto a hasta el 0. En la interpretación vectorial, $|a|$ es la longitud del vector a.

Si $x \geq 0$, existe un único número real *no negativo* cuyo cuadrado es x. Ese número es $\sqrt{x}$. Considerando $x = a^2$, se ve que $|a|$ verifica las propiedades que caracterizan a $\sqrt{a^2}$: Por una parte, $|a| \geq 0$ siempre, y por otra, como $|a| = a$ o bien $|a| = -a$, en cualquiera de los dos casos

$$|a|^2 = a^2 \text{ o bien } |a|^2 = (-a)(-a) = a^2.$$

En consecuencia

$$\sqrt[2]{a^2} = |a|, \tag{1}$$

refutando el viejo error de que índices y potencias se simplifican dando $\sqrt[2]{a^2} = a$. La identidad (1) es una expresión más compacta que podría haberse tomado como definición de *valor absoluto.* De hecho funcionará como una herramienta más cómoda que la definición en algunos casos. Por ejemplo,

$$|-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|\,,$$

sin necesidad de considerar casos.

Como $b-a$ es un vector que va desde a hasta b, su longitud $|b-a| = |a-b|$ mide la distancia entre estos dos puntos.

Ejercicios:

8. Escribir expresiones equivalentes sin usar valor absoluto

1) $\lvert 4-8\rvert$	2) $\lvert 4\rvert + \lvert -8\rvert$
3) $\lvert \frac{1}{2} - 0.5\rvert$	4) $\lvert 5-x\rvert$, donde $x > 5$
5) $\lvert 3-\pi\rvert$	5) $\lvert a-b\rvert$, donde $a < b$

9. Para las siguientes afirmaciones, pruebe las verdaderas y dé contraejemplos de las falsas.

1) $a < b \Rightarrow \lvert a\rvert < \lvert b\rvert$	2) $\lvert a+b\rvert = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
3) $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\,\lvert b\rvert$	4) $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$
5) $-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$	

La siguiente es una propiedad fundamental del valor absoluto.

Teorema 1.- Si $r > 0$, $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

Demostración: Supongamos primero que $|x| \leq r$. se deduce que entonces es $-r \leq -|x|$. Si miramos el ejercicio 9.5, vemos que $-|x| \leq x \leq |x|$. Combinando con las dos desigualdades anteriores se tiene que $-r \leq x \leq r$.

Supongamos ahora que $-r \leq x \leq r$. Entonces $x \leq r$ (1) y además $-r \leq x$ implica $-x \leq r$ (2). Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x \leq r$ por (1). Si en cambio $x < 0$, entonces $|x| = -x \leq r$ por (2).$\blacksquare$

Ejemplos: El teorema da la herramienta fundamental para resolver inecuaciones con valor absoluto.

7. $|x-3| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-3 < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 7$. $S = (-1, 7)$. Geométricamente, la inecuación dice: la distancia de x a 3 es menor que 4. La solución es un intervalo abierto de radio 4 alrededor de 3.

8. $|-2x+1| > 5 \Leftrightarrow |2x-1| > 5 \Leftrightarrow$No $|2x-1| \leq 5$
$|2x-1| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -6 \leq 2x \leq 11 \Leftrightarrow$(porque $2 > 0$) $-3 \leq x \leq \frac{11}{2}$. Luego $S' = \left[-3, \frac{11}{2}\right]$. En consecuencia, la solución de la inecuación original se obtiene tomando el complemento: $S = \left[-3, \frac{11}{2}\right]^c = (-\infty, -3) \cup \left(\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

9. Inecuaciones del tipo $|z| < -2$ ó $|z| > -1$ son triviales. El valor absoluto de un número nunca es menor que un número negativo y siempre es mayor. Las soluciones de las dos inecuaciones dadas son, respectivamente, $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

Ejercicios:

10. Resolver las siguientes inecuaciones.

1) $\|2x+1\| \leq 1$	3) $\|-3x+8\| \geq 5$
2) $\|x-5\| > 2$	4) $\|-3x+8\| < 5$

11. Resolver las siguientes inecuaciones

$$1) \quad |x-1| \leq \frac{1}{2}x+2 \qquad\qquad 2) \quad |x-40| < |x-50|$$

Nota: En 1), observe que $\frac{1}{2}x+2$ no puede ser negativo. Y si es no negativo, es de aplicación el teorema 1. En 2), considerando $r = |x-50|$, otra vez el teorma 1 convierte la inecuación en dos del tipo de la primera parte. Pero nótese también que una adecuada interpretación geométrica resuelve el problema de manera trivial: La inecuación 2) dice que x está más cerca de 40 que de 50. Cabe de paso recordar a aquella ingeniosa señora que, bien pasados los 50 años, decía, sin mentir, que ella estaba más cerca de los 50 que de los 40.

Dos desigualdades son de gran importancia. Se las conoce como desigualdades triangulares.

Teorema 2.- Para x y y números reales, $|x+y| \leq |x|+|y|$ y $|x-y| \geq ||x|-|y||$.

Demostración: La primera desigualdad se demuestra usando el teorema 1. Hay que verificar que

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|. \tag{2}$$

Pero esto es fácil usando los resultados de dos ejercicios anteriores. 9.5 asegura que

$$-|x| \leq x \leq |x| \wedge -|y| \leq y \leq |y|$$

y 3.6 permite sumar las dos desigualdades para obtener (2).

La segunda desigualdad también se prueba usando el teorema 1. Haciendo jugar a $|x-y|$ el papel de r, se debe probar dos desigualdades:

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|. \tag{3}$$

La segunda de estas dos requiere de un pequeño truco:

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|,$$

usndo la primera parte del teorema, ya probada. Restando $|y|$ se obtiene $|x|-|y| \leq |x-y|$. Exponer la prueba de la primera desigualdad en (2) nos da un poco de pudor, pero es así: Ya probada la segunda, debemos admitir que ella también vale cambiando los roles de x y y. En tal caso, se tiene que

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y| .$$

Si ahora se multiplica por -1, se invierte la desigualdad y se obtiene el resultado ■

El nombre "desigualdades triangulares, proviene de la interpretación vectorial de suma y resta, junto con un teorema de la Geometría: "En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia".

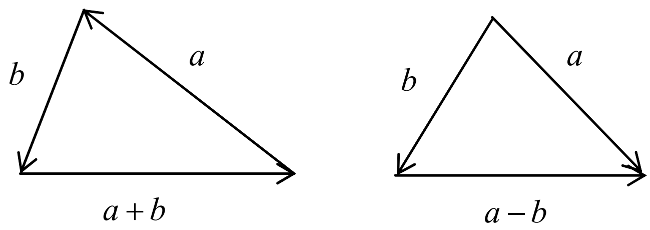


figura 1.12

1.2 Funciones

Una función es una ley que hace corresponder a cada elemento de un conjunto, llamado *dominio*, un único elemento de otro conjunto, que llamaremos *codominio.* Aunque digamos "otro" conjunto, bien podría tratarse del mismo. En particular, por ahora sólo estamos interesados en funciones cuyo dominio es un subconjunto de la recta real y su codominio es también $\mathbb{R}$ (o un subconjunto de $\mathbb{R}$). La ley que establece la correspondencia podrá venir expresda de diversas maneras, aunque lo habitual es que a cada elemento del dominio, que en nuestro caso es un número, se le asocie otro número que se obtiene a través de un cálculo. Algunos ejemplos serán más claros que mil palabras.

Ejemplos:

1. A cada número asociarle su cuadrado.

2. Dado un número se le hace corresponder ese mismo número multiplicado por 3 incrementado en 5 unidades.

3. A la temperatura en grados Celcius medida en ciertas circunstancias le hacemos corresponder su valor en grados Farenheit.

4. A la altura medida en metros de una torre se le asocia el tiempo en segundos que tarda en llegar al suelo un objeto que se deja caer desde ella.

5. A cada número natural entre 2 y 12 le asociamos la probabilidad de obtenerlo haciendo rodar dos dados.

La Matemática ha creado gran cantidad de lenguaje para manejar estas ideas. El truco más común es usar *variables*, que son letras que representan objetos genéricos del dominio y del codominio. La variable que representa al objeto del dominio se llama *independiente.* Sobre ella se realiza la operación que dicta la función y el resultado pasa a ser el valor que toma la variable del codominio, llamada entonces *dependiente.* En este lenguaje, las funciones de los ejemplos anteriores se describen de la siguiente manera:

1. $x \mapsto y = x^2$
2. $x \mapsto y = 3x + 5$
3. $T_C \mapsto T_F = 1.8T_C + 32$
4. $h \mapsto t = \sqrt{\frac{2}{g}h}$, donde $g = 9.8$ es la aceleración de la gravedad.
5. Aquí no hay una fórmula pero, como el dominio es finito, se puede dar una tabla:

$$\begin{array}{cccccccccccc} n: & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ p: & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$$

(Adviértase que la suma de los 11 valores tomados por p es 1).

Pero para el futuro manejo de este nuevo concepto será insuficiente aún esta descripción. Se pondrá nombre a la función y su acción será evocada con ese nombre. Si decidimos llamar f a la función del ejemplo 1, llamaremos $f(x)$ al número que f (o sea la acción de elevar al cuadrado) asocia al número x. Así resulta que $f(x) = x^2$. Por supuesto, los valores que toma la función sobre particulares valores numéricos, se obtienen reemplazando la variable por el valor numérico: $f(4) = 4^2 = 16$. Nótese que f y $f(x)$ son objetos de distinta naturaleza. El primero es una función (una acción) y el segundo representa a un número. Sin embargo es usual confundir todo y decir, por ejemplo:

$$\text{Consideremos la función } y = f(x) = x^2,$$

sin que nadie se confunda por ello.

El dominio de una función f será denotado $\mathrm{Dom}(f)$. Si $B \subset \mathrm{Dom}(f)$, la imagen de B por f es el conjunto $f(B) := \{f(x) : x \in B\}$. Si se toma $A = \mathrm{Dom}(f)$, $f(A)$ es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la función. Se lo llama el *rango* o la *imagen* de f y se lo denota $\mathrm{Rg}(f)$. La expresión

$$f : A \to B$$

significará que:

1. f es una función
2. A es el dominio de f
3. $\mathrm{Rg}(f) \subset B$.

Ejercicios:

12. Sea $g(x) = |x| - x$. Calcule $g(1), g(-1), g(-54)$
13. ¿Para qué números se podría definir una función f mediante la formula $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$? ¿Cúal es el valor de esta función para $x = 5$?
14. ¿Para qué números se podría definir f mediante la formula $f(x) = \sqrt[3]{x}$? ¿Cuánto vale $f(27)$?

15. ¿Para qué números se podría definir una función f mediante la fórmula $f(x) = \sqrt[4]{x}$? ¿Cuánto vale $f(16)$?

16. La relación entre la temperatura del aire T (en ^oF) y la altitud h (altura en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal. Cuando la temperatura a nivel del mar es de 60^o, un incremento de 5000 pies en la altitud disminuye aproximadamente en 18^o la temperatura.

    1. Expresar T en terminos de h.

    2. Calcular la temperatura del aire a una altitud de 1500 pies.

17. La ley de Boyle dice "la presión de un gas en un recipiente es inversamente proporcional a su volumen". Escriba esta ley expresando a la temperatura como una funcioón del volumen.

18. Determinar el dominio de definición de la función f en cada caso:

    (a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$
    (b) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$
    (c) $f(x) = \sqrt{4-x}$

19. Se dice que una función es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x. Se dice que es una función impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x. Determinar si las funciones siguientes son impares, pares o ni una cosa ni la otra

    1) $f(x) = x$ 2) $f(x) = x^2$

    3) $f(x) = x^3$ 4) $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

    5) $f(x) = x + x^2$ 6) $f(x) = \frac{2}{x-3}$

Operaciones con funciones

Las operaciones aritméticas realizadas con los números resultantes de aplicar funciones, se pueden pensar como operaciones aritméticas hechas con las funciones. Los monomios $3x^4$ y $-2x$ son dos funciones: $f : x \mapsto 3x^4$ y $g : x \mapsto -2x$. El polinomio $3x^4 - 2x$, suma de los dos monomios, será considerado la suma de las funciones f y g. Esta es una nueva función y recibe el nombre $f + g$. Para ser concretos, la función $f + g$ se define por:

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x).$$

O bien

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x). \tag{4}$$

Aunque usemos el mismo símbolo, el lector debería notar la sutil diferencia: En el miembro de la izquierda el + es una suma de funciones. En el miembro de la derecha el + es una suma de números. La operación entre números ya existía. La operación entre funciones la acabamos de definir. Con respecto al dominio de la función suma, es claro que $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

De idéntica manera se definen operaciones con funciones para cada operación con números

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \tag{5}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \tag{6}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{7}$$

$\mathrm{Dom}(f-g) = \mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$. $\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) : g(x) \neq 0\}$.

Si esto le parece una tontería, tiene usted razón. Pero usar este procedimiento nos dará algunas facilidades de lenguaje que no queremos desaprovechar. Lo que sí es una idea importante es la operación de *composición de funciones* Esta operación consiste en aplicar dos funciones sucesivamente, una después de la otra.

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

Esta operación no es conmutativa. Importa en qué orden se componen las funciones. Cuál actúa primero y cuál después. El símbolo usado es $\circ$:

$$g \circ f(x) := g(f(x)) \tag{8}$$

Se escribe a la derecha (o sea más cerca de la variable) la función que actúa primero. Es fácil ver que

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}.$$

Ejemplos:

6. Si $f(x) = x + 3$ y $g(y) = y^2$,

$$g \circ f(x) = (x+3)^2, \qquad f \circ g(y) = y^2 + 3.$$

El artificio de usar distintos nombres para las variables, permite ver la composición como un reemplazo:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ z = g(y) \end{array}\right\} \qquad z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = g(y) \\ z = f(x) \end{array}\right\} \qquad z = f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y),$$

pero uno debería poder manejar la composición con cualquier nombre de variables.

7. Sean ahora

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-3}, \qquad g(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{2x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)+2}{2\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)-1} = \\ &= \frac{\frac{3x+6+2(2x-3)}{2x-3}}{\frac{2x+4-(2x-3)}{2x-3}} = \frac{3x+6+4x-6}{2x+4-2x+3} = \frac{7x}{7} = x. \end{aligned}$$

Invitamos al lector a calcular $f \circ g$

Ejercicios:

20. Calcular $f+g,\ f-g,\ fg$ y $\frac{f}{g}$ para las siguientes funciones. En todos los casos calcular el dominio de la nueva función.

    a) $f(x)=x+2,\quad g(t)=\sqrt{t^2-4}$ b) $f(x)=\sqrt{x}-2,\quad g(x)=x-4$

21. En los siguientes casos calcular $f\circ g,\ g\circ f$ y los dominios de f,g y ambas composiciones.

    a) $f(x)=\sqrt{x-1},\quad g(x)=x^2$ b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

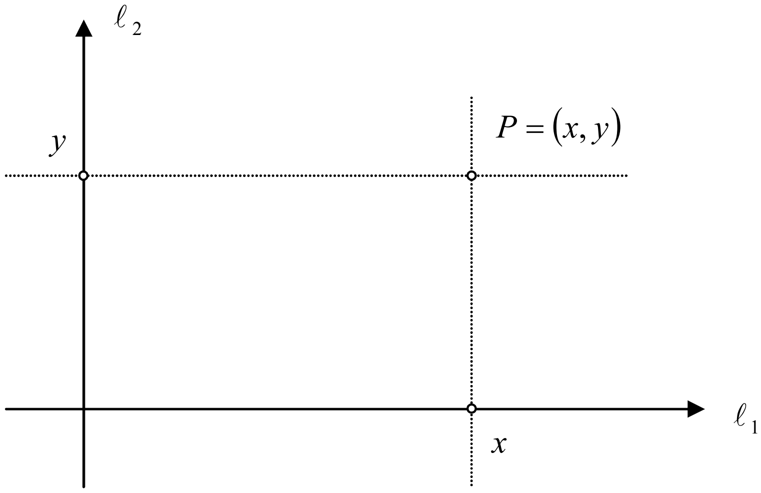
22. Escribir la función $f(x)=\left|2x^2-3\right|+1$ como composición de dos, de tres y de cuatro funciones.

1.3 Gráficos

Así como se estableció un sistema de coordenadas en la recta que permitió describirla a través de los números reales, se puede poner un sistema de coordenadas en el plano. El procedimiento es el siguiente: Tómense dos rectas, l_1 y l_2, que se intersequen en un punto. Dótese a ambas rectas de sendos sistemas de coordenadas con el 0 en el punto de intersección (*origen*). Dado un punto cualquiera P del plano:

1. La recta que pasa por P y es paralela a l_2 corta a l_1 en un único punto que tendrá una coordenada, digamos, x.
2. La recta que pasa por P y es paralela a l_1 corta a l_2 en un único punto que tendrá una coordenada, digamos, y.
3. Identificamos al punto P con el *par ordenado* (x,y).

Los pares ordenados de números reales (ordenados significa que importa cuál va primero y cuál segundo) forman un conjunto que se denota $\mathbb{R}^2$. Establecido un sistema de coordenadas, el plano queda identificado con $\mathbb{R}^2$.



Nosotros usaremos los *ejes coordenados* (las rectas l_1 y l_2) perpendiculares. Los ejes dividen al plano en cuatro sectores llamados *cuadrantes.* Estos se ordenan tomando como primero al determinado por los *semiejes positivos* y continuando con los siguientes según se gira alrededor del origenen el sentido de las agujas del reloj.

Si los ejes coordenados fueron tomados perpendiculares, la distancia entre dos puntos del plano se calcula usando el teorema de Pitágoras:

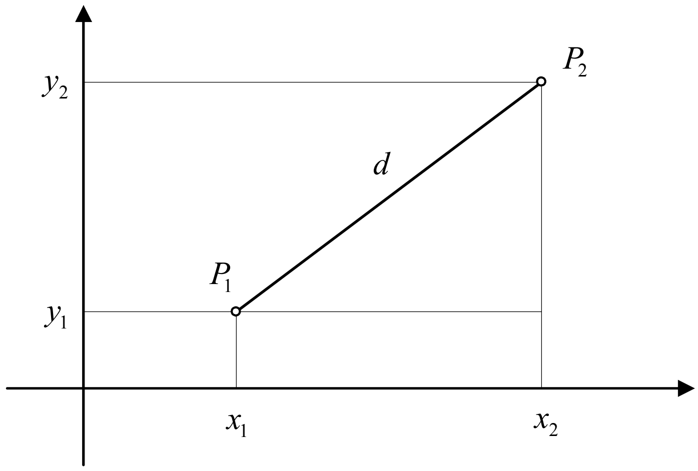


figura 1.14

$$d = dist\,(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{9}$$

Ejercicios:

23. Localizar los puntos siguientes: $(-1, 1); (0, 5); (-5, -2); (1, 0)$.

24. Localizar los puntos siguientes $(\frac{1}{2}, 3); (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}); (\frac{4}{3}, 2); (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

25. (a) Sean (x, y) las coordenadasde un punto en el segundo cuadrante. ¿ Es x positivo o negativo ? ¿Es y positivo, o negativo?

    (b) Sean (x, y) las coordenadas de un punto en el tercer cuadrante.¿Es x positivo, o negativo? ¿Es y positivo, o negativo?

26. (a) Localizar los puntos $(1.2, -2.3); (1.7, 3)$ y calcular su distancia

    (b) Localizar los puntos $(-2.5, \frac{1}{3}); (-3.5, \frac{5}{4})$ y calcular su distancia.

    (c) Localizar los puntos $\left(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y calcular su distancia.

El *gráfico* o la gráfica de una función es un esquema suficiente para describirla que además facilita comprender sus reglas de comportamiento, cuando las hay. Si tomamos el quinto ejemplo, referido a las probabilidades con dos dados, tratándose de un dominio finito y, consecuentemente, una cantidad finita de valores posibles para la variable dependiente, se puede hacer una tabla de doble entrada mostrando cuál de los posibles valores toma la función en cada punto del dominio:

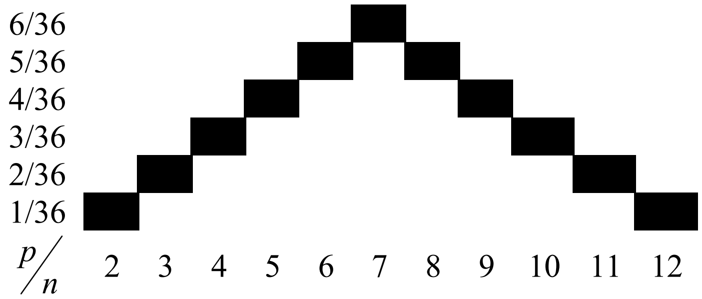


figura 1.15

En este esquema se ve con mayor claridad cómo la probabilidad de ocurrencia aumenta hacia los valores centrales (7) y disminuye hacia los periféricos (2 y 12). La misma técnica de graficación se puede usar para dominios continuos (intervalos). Al fin, el sistema de coordenadas recién introducido para el plano, no es otra cosa que una tabla de doble entrada continua. Si $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$ se define el *gráfico* de f por:

$$Gr\,(f) := \{(x, f\,(x)) : x \in A\}\,.$$

O bien

$$Gr\,(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f\,(x)\right\}. \qquad (10)$$

Visto así, de las dos condiciones que debe cumplir un punto (x, y) para pertenecer al gráfico, la primera es una formalidad. La esencial es la segunda: $y = f\,(x)$, que es una ecuación con dos variables. Muchas curvas hay en el plano descriptas por ecuaciones con dos variables que no representan el gráfico de una función. Una curva en el plano es el gráfico de una función cuando ninguna recta vertical la corta en más de un punto.

Ejemplos:

1. Pocas veces podemos llevar a la realidad del papel el gráfico exacto de una función. Habitualmente se tiene un dibujo aproximadodo. El método más rudimentario consiste en ubicar algunos puntos e imaginar el resto, con los mejores motivos que se pueda. Para la función $y = x^2$ del primer ejemplo de la serie anterior, ubicamos algunos puntos con una "tabla de valores"

$$\begin{array}{cccccccc} x: & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \\ y: & 4 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 4 \end{array}$$

Esto significa que los puntos $(-2, 4), (-1, 1), ..., (2, 4)$, pertenecen al gráfico. Se los representa en un plano coordenado y se imagina el resto de la curva .$y = x^2$. En este caso, se sabe que la ecuación $y = x^2$ representa una parábola, y esa información se tiene en cuenta para dibujar la curva.

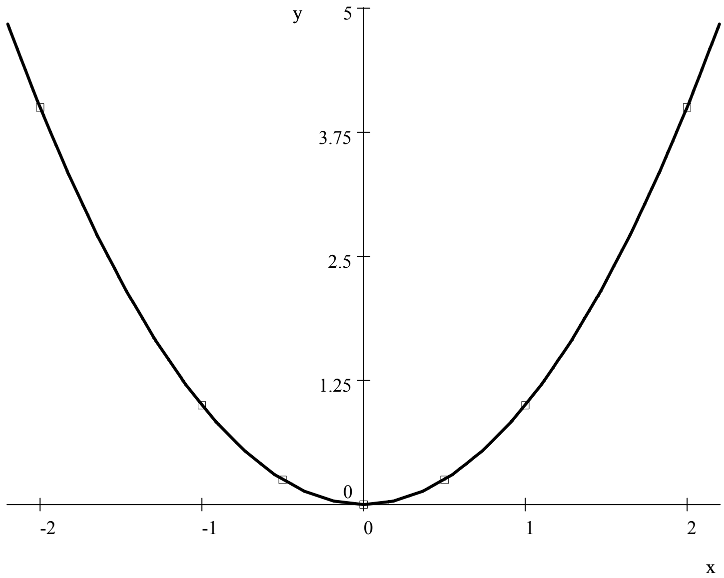


figura 1.16

2. En el segundo ejemplo de la serie tenemos la función $y = 3x + 5$. Este es uno de los pocos casos en que el gráfico se podrá dibujar con exactitud (dentro de los límites que el dibujo impone), pues la ecuación representa una recta, que se determina con dos puntos y se dibuja con una regla. Una breve tabla de valores provee los dos puntos:

x	0	-2
y	5	-1

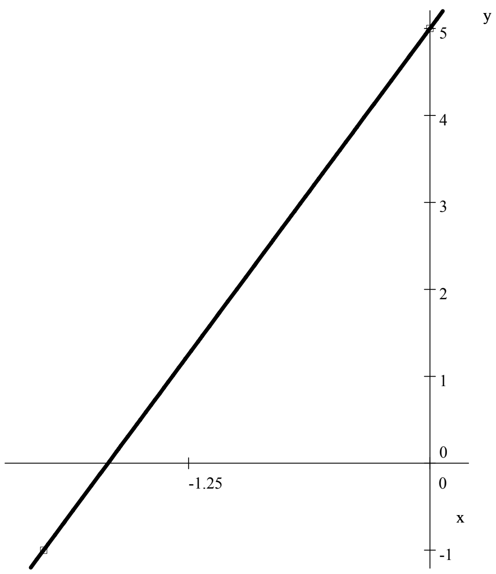


figura 1.17

3. Un círculo de centro O y radio r es el conjunto de puntos cuya distancia a O es r. Elllos deben satisfacer entonces la condición

$$dist\left[(x,y),(0,0)\right] = r.$$

Si esta condición se expresa usando la fórmula de la distancia (9), se obtiene la ecuación $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, o, lo que es equivalente,

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{11}$$

La curva descripta por esta ecuación no es el gráfico de una función. Existen rectas verticales que la cortan en más de un punto.

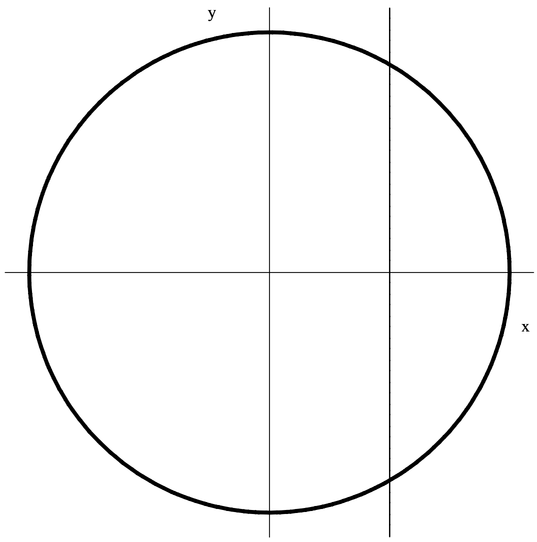


figura 1.18

Ejercicios:

27. Trazar las gráficas de las funciones siguientes:

1. $f(x) = -3x + 2$

2. $g(x) = x^3$

3. $h(x) = \frac{1}{x+2}$

28. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ definida por las condiciones:

1. $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. $f(x) = 1$ si $x > 0$.

2. $f(x) = x^2$ si $x < 0$. $f(x) = x$ si $x \geq 0$

3. $f(x) = |x| + x$ si $-1 \leq x \leq 1$. $f(x) = 3$ si $x > 1$[$f(x)$ no está definida para otros valores de x.]

4. $f(x) = x^3$ si $x \leq 0$. $f(x) = 1$ si $0 < x < 2$.$f(x) = x^2$ si $x \geq 2$.

5. $f(x) = x$ si $0 < x \leq 1$. $f(x) = x - 1$ si $1 < x \leq 2$. ¿Cómo expresaría la idea de continuar definiendo f de manera similar en los siguientes intervalos $2 < x \leq 3$, $3 < x \leq 4$...etc.?

29. Trazar las gráficas de $y = x^n$ y de $y = x^{\frac{1}{n}}$ para $n = 1, 2, 3, 4, ...$

Hay dos operaciones frecuentes sobre las variables de una función que la modifican sin alterar demasiado el gráfico: las traslaciones y los cambios de escala. En la práctica, estas modificaciones pueden provenir del cambio de unidades con que se mide la variable física. Ambas operaciones se puedes realizar sobre la variable independiente o sobre el resultado de la función (variable dependiente). Nos interesa estudiar el efecto sobre la gráfica cuando se realizan estas operaciones.

Algunos movimientos del plano

Traslaciones. Si $a \in \mathbb{R}$, una *traslación horizontal* de magnitud a desplaza a un punto (x, y) del plano horizontalmente en la distancia y sentido que (el vector) a indica:

$$T_a^{\rightarrow} : (x, y) \mapsto (x + a, y) .$$

La traslación $T_a^{\rightarrow}$ aplicada a un conjunto, desplaza todos sus puntos para obtener un conjunto congruente al original a una distancia $|a|$ hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo del signo (positivo o negativo) de a.

$T_a^{\rightarrow}(C) = \{(x + a, y) : (x, y) \in C\}$. O, dicho de otro modo, $(x, y) \in T_a^{\rightarrow}(C) \Leftrightarrow (x - a, y) \in C$.

Análogamente, se tienen *traslaciones verticales*. $T_b^{\uparrow}(x, y) = (x, y + b)$,
$T_b^{\uparrow}(C) = \{(x, y + b) : (x, y) \in C\}$. $(x, y) \in T_b^{\uparrow}(C) \Leftrightarrow (x, y - b) \in C$.

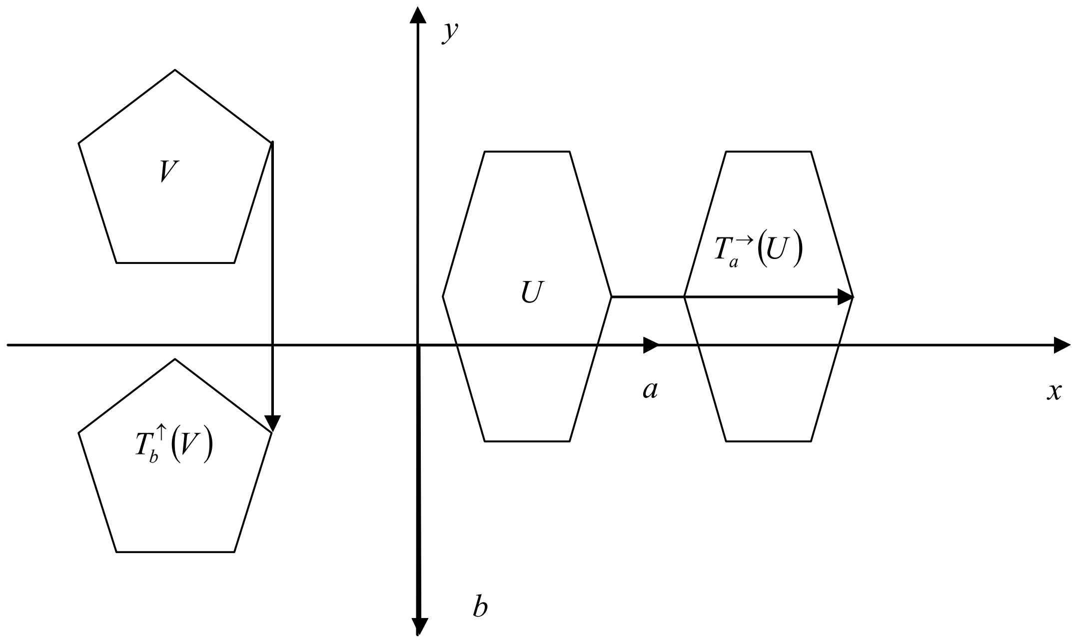


figura 1.19

Cambios de escala. Un cambio de escala horizontal de magnitud $\lambda > 0$, dilata o contrae el plano, según sea $\lambda > 1$ ó $\lambda < 1$, en sentido horizontal, manteniendo en su sitio el eje "$x = 0$".

$$S_\lambda^{\rightarrow} : (x, y) \mapsto (\lambda x, y)$$

Los cambios de escala verticales son del tipo:

$$S_\mu^{\uparrow} : (x, y) \mapsto (x, \mu y) .$$

Dejan fijo el eje horizontal "$y = 0$".

Aplicar a un conjunto estos cambios de escala, significa aplicárselos a cada uno de sus puntos:

$$\begin{aligned} S_\lambda^{\rightarrow}(C) &= \{(\lambda x, y) : (x, y) \in C\}, \\ S_\mu^{\uparrow}(C) &= \{(x, \mu y) : (x, y) \in C\}. \end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\begin{aligned} (x, y) &\in S_\lambda^{\rightarrow}(C) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\lambda}, y\right) \in C, \\ (x, y) &\in S_\mu^{\uparrow}(C) \Leftrightarrow \left(x, \frac{y}{\mu}\right) \in C. \end{aligned}$$

Simetrías. Dos puntos $(x, y), (x', y')$ son simétricos respecto de un centro de simetría (a, b), si este último es el punto medio del segmento que los une. Esto ocurre cuando $(x' - a, y' - b) = (a - x, b - x)$. En particular, dos puntos $(x, y), (x', y')$ son simétricos respecto del origen de coordenadas cuando $(x', y') = (-x, -y)$.

Dos puntos son simétricos respecto de una recta si el segmento que los une es perpendicular a la recta, la cual lo corta en su punto medio. El punto simétrico de (x, y) respecto del eje "x" es $(x, -y)$. El simétrico de (x, y) respecto del eje "y" es $(-x, y)$. Llamaremos d (por diagonal) a la recta bisectriz del primer y tercer cuadrantes, cuya ecuación es $y = x$. El punto simétrico de (x, y) respecto de la recta d es (y, x).

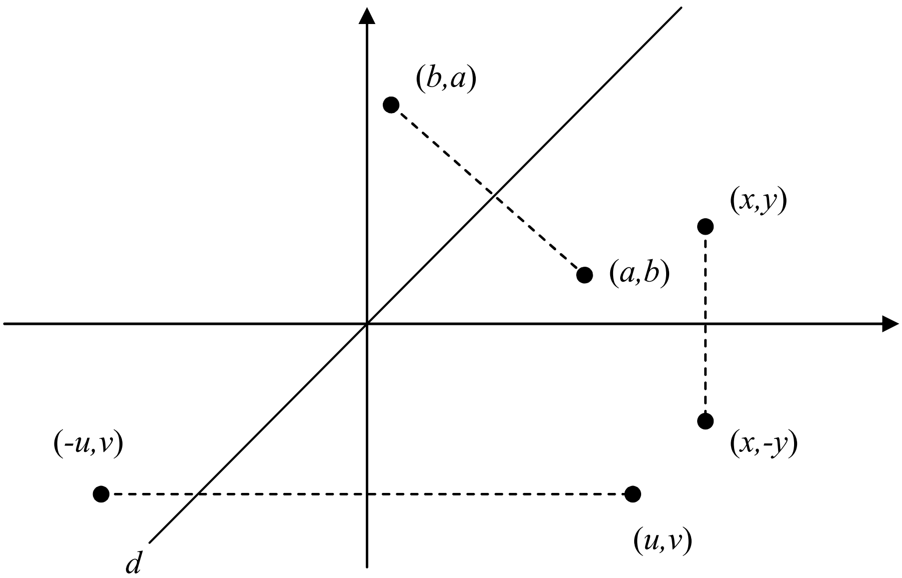


figura 1.20

Ejercicios:

30. Hallar y graficar

$$\begin{array}{ll} T_2^{\rightarrow}(1, 3) & T_{-\frac{1}{2}}^{\rightarrow}\left(\frac{3}{2}, -2\right) \\ T_{-3}^{\uparrow}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & T_{\frac{1}{3}}^{\uparrow}\left(1, -\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

31. Sea C el cuadrado de vértices $(1,1),(3,1),(3,3)$ y $(1,3)$. Hallar los vértices y graficar los cuadrados $T_1^{\rightarrow}(C)$ y $T_{-2}^{\uparrow}[T_1^{\rightarrow}(C)]$.

32. Hallar y graficar $S_2^{\rightarrow}(C)$ y $S_{\frac{1}{2}}^{\uparrow}[S_2^{\rightarrow}(C)]$ para el cuadrado C de vértices $(2,-2),(2,1),(1,1)$ y $(1,-2)$

33. (a) Hallar el punto simétrico de $(-1,-2)$ respecto de $(0,0)$.
    (b) Hallar el punto simétrico de $(-1,-2)$ respecto de $(1,0)$.
    (c) Hallar el centro de simetría de los puntos $(1,5)$ y $(3,1)$.
    (d) Hallar el centro de simetría de los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2).
    (e) ¿Respecto de qué recta son simétricos los puntos $(1,5)$ y $(3,1)$?
    (f) Hallar y graficar el simétrico respecto de la diagonal d del triángulo de vértices $(4,-1),(6,1)$ y $(1,2)$.

Modificaciones de gráficas de funciones

Traslaciones. Conocido el gráfico de la función f, consideremos la función $g(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$.

$(x,y) \in Gr(g) \Leftrightarrow y = g(x) = f(x-a) \Leftrightarrow (x-a,y) \in Gr(f)$. Pero hemos visto que $(x-a,y) \in Gr(f)$ es equivalente a $(x,y) \in T_a^{\rightarrow}(Gr(f.))$ De modo que $Gr(g)$ es la $a-$traslación horizontal de $Gr(f)$.

Si en cambio $g(x) = f(x)+b$, entonces $(x,y) \in Gr(g) \Leftrightarrow y = f(x)+b \Leftrightarrow y-b = f(x) \Leftrightarrow (x,y-b) \in Gr(f)$. Esto es, $Gr(g) = T_b^{\uparrow}(Gr(f))$. La $b-$traslación vertical de $Gr(f)$.

Ejemplo 11: Conocemos el gráfico de la función $f(x) = x^2$, que es una parábola con vértice en el origen. El gráfico de $g(x) = (x-3)^2$, es entonces una parábola igual pero con vértice en $(3,0)$. Sea ahora $h(x) = (x-3)^2 - 4$. su gráfico será una $(-4)-$traslación vertical del gráfico de g: una parábola con vértice en $(3,-4)$.

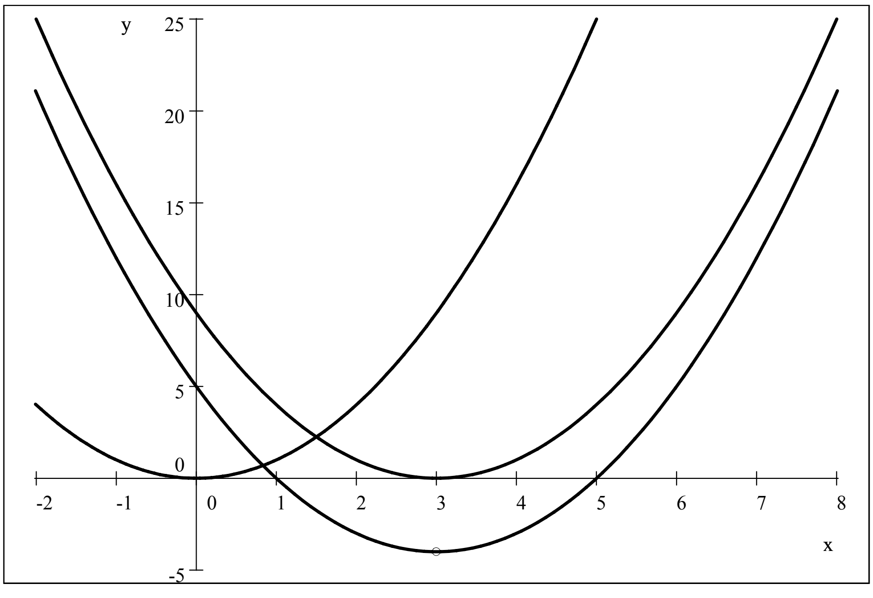


figura 1.21

Cambios de escala. Nuevamante partimos de una función f con gráfico conocido y definimos $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, con $\lambda > 0$. $(x,y) \in Gr(g) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow y = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\lambda}, y\right) \in Gr(f) \Leftrightarrow (x,y) \in S_{\lambda}^{\rightarrow}[Gr(f)]$. Esto es, $Gr(g) = S_{\lambda}^{\rightarrow}[Gr(f)]$.

Análogamente, si $g(x) = \mu f(x)$, entonces $Gr(g) = S_{\mu}^{\uparrow}[Gr(f)]$.

Ejemplos:

4. Consideremos la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $y = \sqrt{1-x^2}$. Sea $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$. $g : [-3,3] \to \mathbb{R}$.. Buscando la semejanza de g con f, encontramos con simples cálculos que $g(x) = \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} = f\left(\frac{x}{3}\right)$. De modo que el gráfico de g se obtiene con una dilatación horizontal de razón 3 del gráfico de f.

5. Tratemos de graficar la función

$$h(x) = 2\sqrt{1-\frac{(x-4)^2}{9}}.$$

Consideramos primero $g(x) = 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}$. Entonces $h(x) = g(x-4)$, de modo que el gráfico de h es una $4-$traslación horizontal del de g. Por su parte, $g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$, con $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Por lo tanto su gráfico se obtiene de dilatar con razón 3 en sentido horizontal y razón 2 en sentido vertical al gráfico de f.

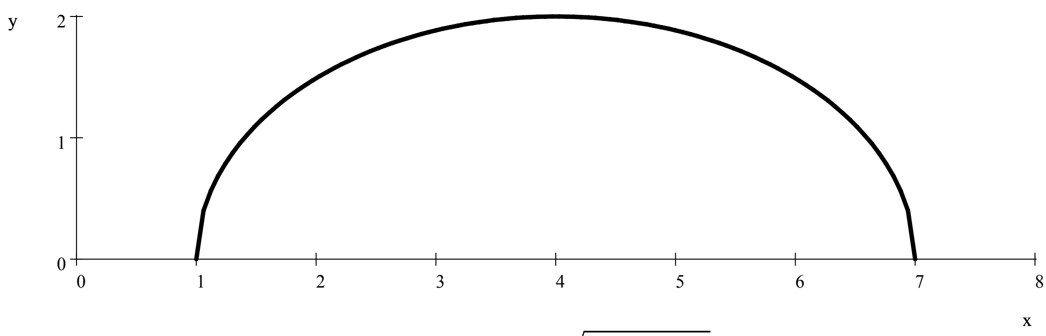


figura 1.22 $\quad 2\sqrt{1-\frac{(x-4)^2}{9}}$

Simetrías. Si $g(x) = f(-x)$, $(x,y) \in Gr(g) \Longleftrightarrow y = f(-x) \Longleftrightarrow (-x,y) \in Gr(f)$. Como $(-x,y)$ es el punto simétrico de (x,y) respecto del eje de ordenadas, el gráfico de g y el gráfico de f son simétricos respecto del eje vertical. Análogamente, El gráfico de $y = -f(x)$ y el de $y = f(x)$ son simétricos respecto del eje de absisas.

El gráfico de $|f(x)|$ se obtiene del de f reflejando sobre ele eje horizontal la parte del gráfico de f que vive debajo de éste, mientras se deja inalterada la otre parte.

Ejemplo 6: Sobre la base del gráfico conocido de $f(x) = \frac{1}{x}$, buscaremos un gráfico aproximado de $g(x) = \left|\frac{3x-12}{x-3}\right| - 2$. el procedimiento pasa por efectuar la división entera: $3x - 12 = (x-3) \cdot 3 - 3$, de donde se deduce

$$\frac{3x-12}{x-3} = -\frac{3}{x-3} + 3$$

La gráfica buscada se construye entonces a partir de la gráfica de $\frac{1}{x}$, a través de $T_3^{\rightarrow}, S_3^{\uparrow}$, reflexión sobre eje x, $T_3^{\uparrow}$, reflexión parcial y $T_{-2}^{\uparrow}$ siguiendo los pasos:

$$\frac{1}{x} \mapsto \frac{1}{x-3} \mapsto \frac{3}{x-3} \mapsto -\frac{3}{x-3} \mapsto -\frac{3}{x-3}+3 \mapsto \left|-\frac{3}{x-3}+3\right| \mapsto \left|-\frac{3}{x-3}+3\right|-2$$

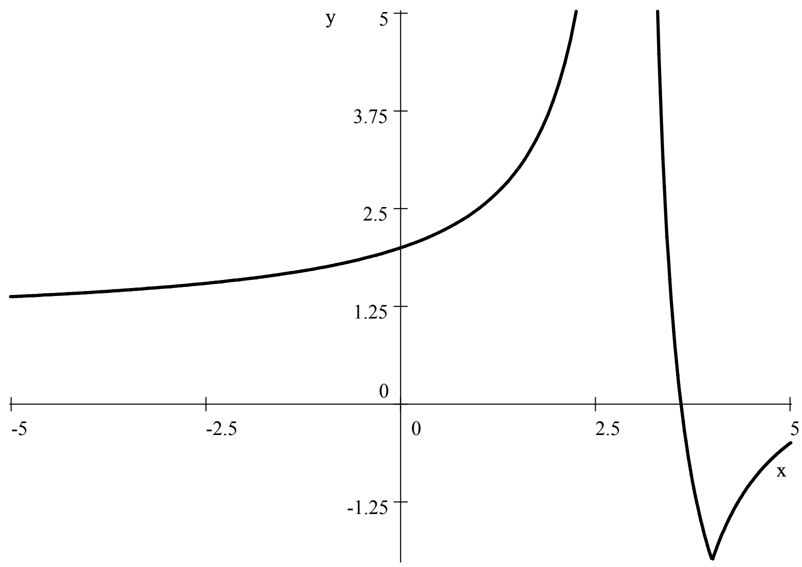


figura 1.23

Ejercicio 34: Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \sqrt{x}$. trazar para cada una de ellas la gráfica de:

a) $f(x-1)$, b) $f(x+3)$, c) $f(x)-2$, d) $3f(x)$, e) $\frac{1}{2}f(x)$, f) $f(2x)$ g) $|f(x)|$, h)$-2f(x)$, i) $f(-x)$

Curvas en forma implícita

Tal vez llame la atención que en las traslaciones y redimensionamientos horizontales, el modificante aparece en la expresión de la función afectado por operación inversa (resta o división) mientras que en las verticales lo hace en directa (suma o producto):

$$f(x-a), \; f\left(\frac{x}{\lambda}\right), \text{ contra } f(x)+b, \mu f(x).$$

Bastará igualar las expresiones a y y pasar los modificantes al otro miembro, de modo que actúen sobre la variable que están modificando, para que la asimetría desaparezca:

$$y = f(x-a), y = f\left(\frac{x}{\lambda}\right), \text{ y también } y-b = f(x), \frac{y}{\mu} = f(x).$$

Estas expresiones son ecuaciones de dos variables y sus soluciones curvas en el plano. Son casos particulares de una forma más general de describir curvas planas usando funciones de dos variables, que se llama forma *implícita.* En forma implícita se incorporan otras curvas que no son gráficos de funciones, como circunferencias, elipses e hipérbolas de asíntotas oblicuas. Para ellas son también válidas las modificaciones arriba descriptas, de modo que un cuadro sinóptico para el caso general podrá ser usado también en el caso particular.

acción sobre la ecuación	**efecto sobre la gráfica**
$F(x-a,y)=0$	mover a unidades horizontalmente
$F(x,y-b)$	mover b unidades verticalmente
$F\left(\frac{x}{\lambda},y\right),\ \lambda>0$	extender-comprimir horizontalmente con factor λ
$F\left(x,\frac{y}{\lambda}\right),\ \lambda>0$	extender-comprimir verticalmente con factor λ
$F(-x,y)$	reflejar sobre el eje vertical
$F(x,-y)$	reflejar sobre el eje horizontal

(12)

Ejemplos:

7. Tomamos el círculo unidad C, cuya ecuación (implícita) es $x^2+y^2=1$, y lo trasladamos dos veces: $C'=T_1^{\rightarrow}T_1^{\uparrow}(C)$. La ecuación es

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

Luego expandimos en ambos ejes: $C''=S_3^{\rightarrow}S_2^{\uparrow}(C')$, que da la ecuación

$$\left[\frac{x}{3}-1\right]^2+\left[\frac{y}{2}-1\right]^2=1$$

O bien,

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$

Una elipsa de semiejes 3 y 2 con centro en $(3,2)$.

8. Ahora partimos del mismo círculo pero dilatamos primero para convertirlo en una elipse de semiejes 3 y 2: $C'=S_3^{\rightarrow}S_2^{\uparrow}(C)$. En un segundo paso trasladamos 1 y 1: $C''=T_1^{\rightarrow}T_1^{\uparrow}(C')$. Obtenemos otra elipse diferente

$$C':\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\qquad C'':\ \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

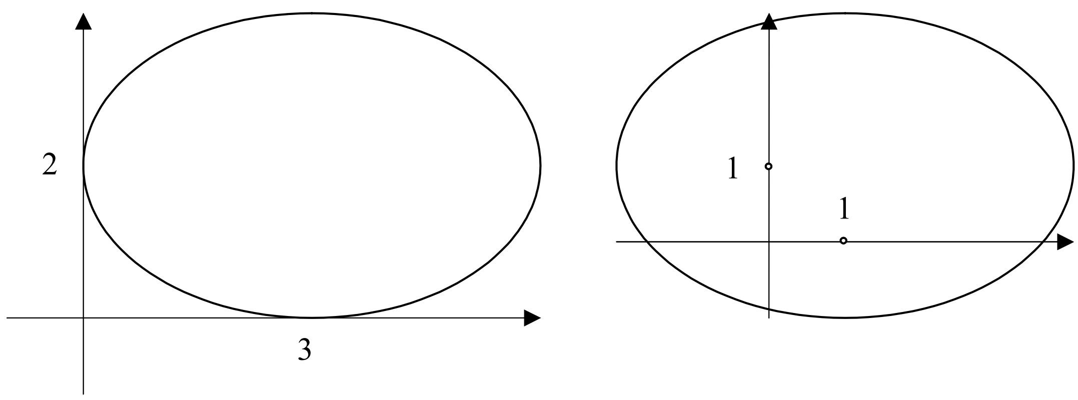


figura 1.24

Ejercicios:

35. Hallar la ecuación de un círculo con centro en $\left(-\frac{1}{2},3\right)$ y radio 9.25. ¿Pertenece el origen de coordenadas a ese círculo?

36. Trazar la gráfica de la elipse

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Dar las coordenadas de los cuatro vérices.

37. Trazar la gráfica de la siguiente ecuación:

$$x^2+\frac{(y-1)^2}{4}=4.$$

Curvas en forma paramétrica

Dadas dos funciones definidas en un intervalo, digamos $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, queda definida una *curva paramétrica* en el plano $\mathbb{R}^2$ por $\{(x,y): x=f(t)\,,\ y=g(t)\,,\ t\in[a,b]\}$. Tenemos entonces tres maneras de describir curvas en el plano: como gráfico de función, implícitamente por medio de una ecuación y paramétricamente. Muchas veces la misma curva se puede describir de las tres maneras. Por ejemplo, el gráfico de la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2$ se puede descibir con la ecuación $y-x^2=0$, $0\le x\le 1$ o bien, paramétricamente, por

$$\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t^2 \end{array}\right. ,0\le t\le 1.$$

En cada caso se elegirá la manera más conveniente. Para el círculo "$x^2+y^2=1$", en cambio, no hay descripción como gráfico de función. Sí veremos presentaciones paramétricas de esta curva al estudiar funciones trigonométricas.

Ejercicios:

38. Graficar las siguientes curvas paramétricas:

$$1)\left\{\begin{array}{l} x=2t \\ y=4-t^2 \end{array}\right. ,0\le t\le 2 \quad 2)\left\{\begin{array}{l} x=10t \\ y=-5t^2+2t \end{array}\right. ,0\le t\le 2$$

39. Dar una parametrización del segmento que une los puntos $(2,1)$ y $(4,-2)$

1.4 Funciones Trigonométricas

Angulos

Un ángulo (orientado) es un par ordenado de semirectas de origen común en el plano $\mathbb{R}^2$.

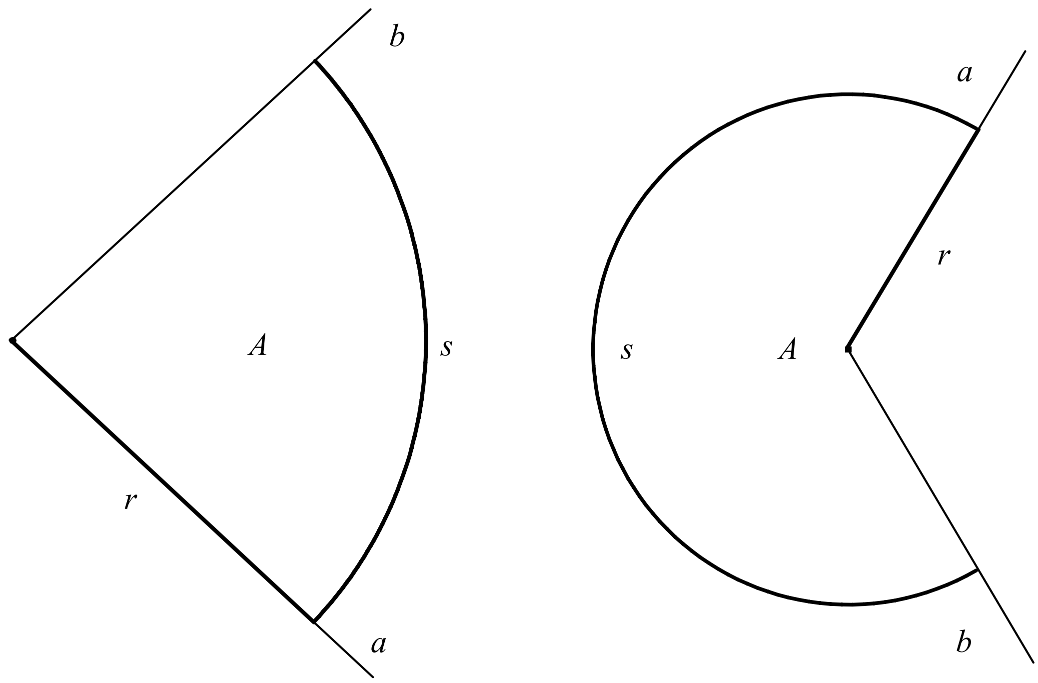


figura 1.25

Dado el *ángulo* determinado por las semirrectas a y b, si se toma cualquier círculo con centro en el vértice del ángulo, digamos uno de radio r, queda determinado un *arco* γ comprendido entre las semirectas a y b, recorriendo el círculo en contra de las agujas del reloj (o sea dejando a la izquierda el disco interior al círculo). Entre los lados del ángulo y el arco se encierra un *sector circular.* En lo que sigue, consideraremos fijado un ángulo y trataremos de definir su medida y relacionarla con la longitud s del arco γ y el área A del sector circular.

Conocidos métodos geométricos permiten trazar la bisectriz de un ángulo y dividirlo en dos. Iterando el procedimiento es posible, para cada $n \in \mathbb{N}$, subdividir el ángulo en 2^n ángulos congruentes. Consideramos ahora los 2^n triángulos inscriptos en los 2^n sectores que la subdivisión determina. ellos serán 2^n triángulos isósceles congruentes con bases de cierta longitud b_n y alturas de cierta longitud h_n.

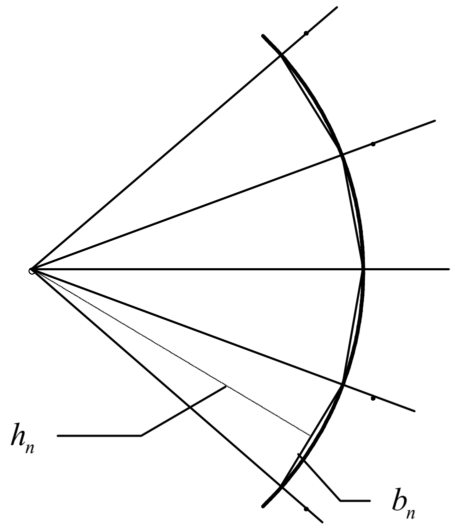


figura 1.26

Por cierto estas medidas dependen del radio: $b_n = b_n(r)$ y $h_n = h_n(r)$. Pero ya que los triángulos obtenidos variando el radio son semejantes, el cociente $b_n(r)/r$ no depende de r. La longitud de la poligonal inscripta en la circunferencia, determinada por la subdivisión, mide $2^n b_n$. La longitud $s(r)$ del arco de circunferencia es el límite de la longitud de la poligonal cuando el número n de iteraciones tiende a infinito:

$$s = \lim_{n\to\infty} 2^n b_n \tag{13}$$

Gracias a que $b_n(r)/r$ no depende de r, tampoco lo hace $2^n b_n(r)/r$. En consecuencia,

$$\theta := \frac{s(r)}{r} = \lim_n \frac{2^n b_n(r)}{r} \tag{14}$$

es independiente de r. Este número es la medida (en radianes)[3] del ángulo que estamos considerando.

Tenemos entonces, dados el ángulo y el radio, una primera relación entre ángulo, radio y longitud del arco sustentado:

$$s = \theta r \tag{15}$$

Ahora, con respecto al área, cada uno de los triángulos anteriormente considerados tiene área $b_n h_n/2$. Su unión es un polígono de área $2^n b_n h_n/2$ que tiende a llenar, cuando n crece, el área A del sector. Esto es,

$$A = \lim_n \frac{2^n b_n}{2} h_n = \frac{1}{2} \lim_n 2^n b_n \lim_n h_n$$

El primer límite sabemos que vale θr (por (14)) y el segundo, obviamente vale r. De manera que

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2 \tag{16}$$

[3]El cociente entre dos longitudes da una medida adimensional, sin unidades. Se usa, sin embargo la unidad radián, que se abrevia rad, para aumentar la confusión. Subrayamos de paso que las igualdades (7) y (8) sólo valen para θ en radianes

Un ángulo llano tiene por lados semirectas opuestas. Es el único que cambiando el orden de los lados no cambia su medida. La medida de un ángulo llano es lo que se define como el número π. Así es que un semicírculo de radio r mide πr y el área del disco de igual radio es πr^2.

También resulta de esta definición de π la equivalencia entre los dos sistemas de medición de ángulos:

$$\begin{aligned} \pi\,\mathrm{rad} &= 180^o \\ 1\mathrm{rad} &= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\mathrm{o}} \\ 1^o &= \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Las longitudes de dos ciudades sobre el ecuador terrestre difieren en 12^o15'. ¿Cuál es la distancia terrestre que las separa?. Un dato adicional es necesario: el radio ecuatorial de la Tierra, que es de 6378 km.

Por las fórmulas de conversión, se deduce que el ángulo desde el centro terrestre que separa a las dos ciudades es de $12.25 \cdot \frac{\pi}{180}$rad, cuyo valor aproximado es de 0.2138028, medido en radianes. Ahora es de aplicación la fórmula (15), que relaciona ángulo, radio y longitud de arco:

$$s = \theta r \cong 0.2138028 \cdot 6378 \cong 1363$$

Por supuesto, la distancia hallada está medida en kilómetros.

Funciones

Un ángulo se dice que está en *posición estándar* cuando su primer lado coincide con el semieje positivo de absisas.

Dado un número real θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, existe un único ángulo en posición estándar cuya medida es θ. El segundo lado o lado libre de este ángulo, cortará al *círculo unidad* (círculo de radio 1 con centro en el origen de coordenadas) en un punto de coordenadas (x, y). El arco de círculo unidad desde $(1, 0)$ hasta (x, y) mide θ. Se definen las funciones *seno* y *coseno* usando estas coordenadas:

$$\cos\theta := x, \qquad \sin\theta := y \tag{17}$$

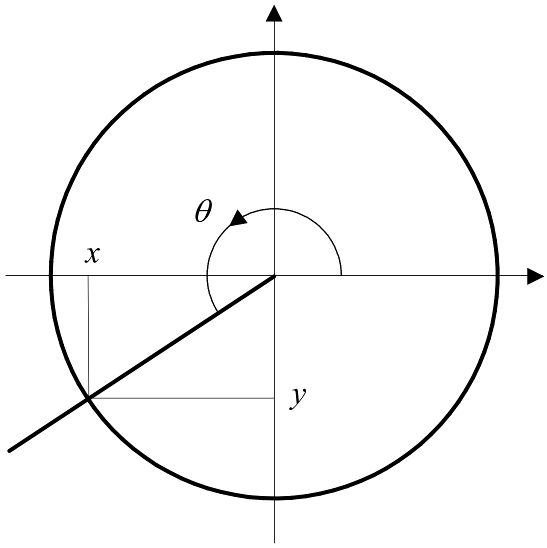


figura 1.27

Siendo $\cos\theta$ y $\sin\theta$ las coordenadas de un punto sobre el círculo unidad, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, la satisfacen:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{18}$$

Ejemplo 2: El ángulo recto, siendo la mitad del llano, que mide π, mide $\frac{\pi}{2}$. El punto que le corresponde sobre el círculo unidad es el $(0, 1)$. En consecuencia, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Ejercicios

40. Completar la siguiente tabla de valores exactos (sin calculadora)

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\cos\theta$			0					
$\sin\theta$			1					

41. Probar que para ángulos del primer cuadrante $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

42. Calcular sin y cos de $\frac{\pi}{6}$ y de $\frac{\pi}{3}$

43. Hallar los siguientes valores

$1.\ \sin\frac{2\pi}{3}$ $\quad 2.\ \sin(\pi - \frac{\pi}{6})$ $\quad 3.\ \cos(\pi + \frac{\pi}{6})$

$4.\ \cos(2\pi - \frac{\pi}{6})$ $\quad 5.\ \cos\frac{5\pi}{4}$ $\quad 6.\ \cos(\pi + \frac{2\pi}{6})$

44. Las coordenadas de Gob. Ing. Virasoro, en la provincia de Corrientes, son $28^o\,S$, $54^o\,W$. La localidad Los Amores, en la provincia de Santa Fe, se ubica también en los $28^o\ S$ de latitud, pero a $60^o\,W$ de longitud. Si el radio de la tierra es de $6375\,km$, calcular la distancia entre ambas localidades medida sobre la superficie de la tierra.

La función *tangente* se define a partir de las funciones seno y coseno. Para $0 \leq \theta < 2\pi$, si $\cos\theta \neq 0$, se define $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Hay una manera de relacionar la tangente con las coordenadas de un punto, sobre un gráfico que incluye al círculo unidad, tal como se hizo para el seno y el coseno. Esta relación explica el nombre de de la función, ya que el punto se encuentra sobre la recta tangente al círculo unidad por el punto $(1, 0)$.

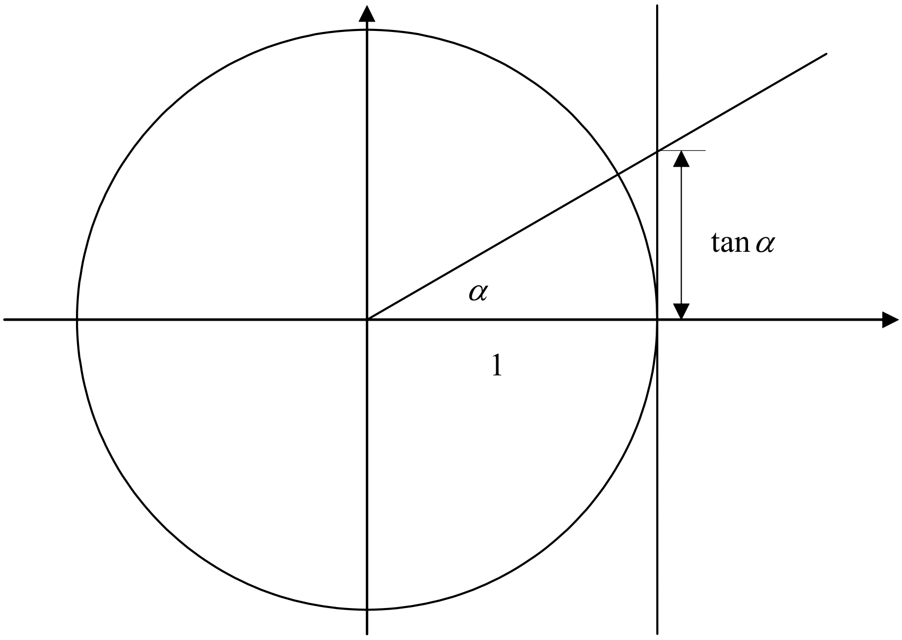


figura 1.28

La definición de las funciones trigonométricas se puede extender a valores fuera del intervalo $[0, 2\pi)$. Los intervalos de la forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$, son disjuntos dos a dos y cubren toda la recta real. Dado un número real x él está en uno y sólo uno de estos intervalos. Es decir, existe un único entero k tal que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)$. Entonces $\overline{x} = x - 2k\pi \in [0, 2\pi)$ y está perfectamente determinado por x.

El representante $\overline{x}$ de x en el intervalo $[0, 2\pi)$ se corresponde con la idea geométrica de considerar ángulos de más de un giro o ángulos que giran en el sentido de las agujas del reloj (negativos). Si partiendo desde el semieje positivo de absisas giramos $2\pi + \frac{\pi}{2}$ radianes, por ejemplo, el lado libre se sitúa en el semieje positivo de ordenadas, como lo hace el ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Un giro de $-\frac{\pi}{2}$ equivale a uno de $3\frac{\pi}{2}$. Se puede entonces definir

$$\sin x = \sin\overline{x}, \quad \cos x = \cos\overline{x}, \quad \tan x = \tan\overline{x}.$$

Con esta definición es claro que las funciones trigonométricas resultan $2\pi-$*periódicas*, esto es: $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, de donde claramente se infiere que $f(x + 2n\pi) = f(x)$, para $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios:

45. Probar las siguientes identidades de las funciones trigonométricas:

1) $\cos(-x) = \cos x$	2) $\sin(-x) = -\sin x$
3) $\tan(-x) = -\tan x$	4) $\sin(x + \pi) = -\sin x$
5) $\cos(x + \pi) = -\cos x$	6) $\tan(x + \pi) = \tan x$

46. Hallar los valores siguientes:

1). $\tan\frac{\pi}{4}$	2). $\tan\frac{2\pi}{6}$	3). $\tan\frac{5\pi}{4}$
4). $\tan(2\pi-\frac{\pi}{4})$	5). $\sin\frac{7\pi}{6}$	6). $\cos\frac{7\pi}{6}$
7). $\cos\frac{2\pi}{3}$	8). $\cos\frac{-\pi}{6}$	9). $\cos\frac{-5\pi}{6}$
	10). $\cos\frac{-\pi}{3}$	

47. Trazar las gráficas de las siguientes funciones

1). $y=\sin 2x$	2). $y=\cos 3x$	3). $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$
4). $y=\sin\frac{x}{2}$	5). $\cos(x-\frac{\pi}{6})$	6). $y=-2+\cos(x-1)$

48. Trazar las gráficas de las funciones

$$y=\sin\frac{1}{x}, y=x\sin\frac{1}{x}, y=x^2\sin\frac{1}{x}.$$

49. Trazar las siguientes curvas definidas paramétricamente:

$$1)\left\{\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array}\right. ,0\leq t\leq 2\pi \qquad 2)\left\{\begin{array}{l} x=2\cos 2t \\ y=2\sin 2t \end{array}\right. ,0\leq t\leq \pi$$

$$3)\left\{\begin{array}{l} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{array}\right. ,0\leq t\leq 2\pi \qquad 4)\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\cos t \\ y=3\sin t \end{array}\right. ,0\leq t\leq 2\pi$$

Las "fórmulas de adición" admiten una demostración sencilla, basada en el cálculo de la distancia entre dos puntos y nuestra definición de las funciones trigonométricas.

Teorema 3:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Demostración. Haremos el cálculo de $\cos(\alpha-\beta)$ para $0<\beta<\alpha<2\pi$. Si en un mismo esquema representamos al círculo unidad y los ángulos α,β y $\alpha-\beta$ en posición estándar, quedan determinados en las intersecciones sendos puntos P_3, P_2

y P_1, a los que agregamos $P_0 = (1, 0)$ (ver fig.)

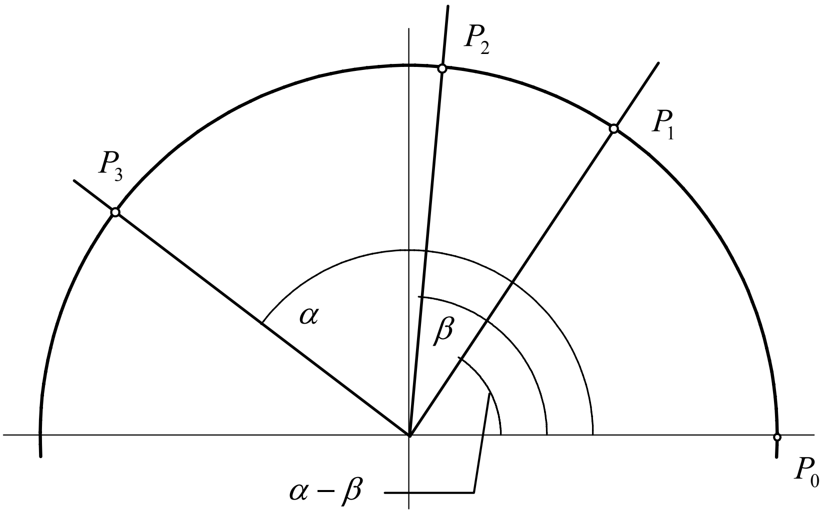


figura 1.29

Como $d(P_0, P_1) = d(P_2, P_3)$, Elevando al cuadrado y haciendo los cálculos con la fórmula (9), se obtiene

$$(x_1 - 1)^2 + y_1^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 .$$

Desarrollando y considerando luego que los puntos P_i están en el círculo unidad y por lo tanto $x_i^2 + y_i^2 = 1$, se obtiene sucesivamente

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + 1 - 2x_1 &= x_3^2 + y_3^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_3x_2 + y_3y_2), \\ 2 - 2x_1 &= 2 - 2(x_3x_2 + y_3y_2), \\ x_1 &= x_3x_2 + y_3y_2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de las funciones seno y coseno, la última igualdad dice que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

La prueba de las otras fórmulas queda a cargo del lector (ver ejercicio **64.**)■

Ejercicios:

50. Probar las siguientes identidades

1. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
4. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
5. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
6. $\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]$
7. $\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]$
8. $\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$

51. Hallar una fórmula para $\sin 3x$ en términos de $\sin x$ y $\cos x$. Análogamente para $\cos 3x$.

52. Probar las siguientes identidades:

$$1)\ \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad 2)\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

(Es suficiente una demostración geométrica para $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$)

1.5 Complementos

Ejercicios

53. Muchas veces queremos decir "todos los puntos entre a y b". Sabemos que se trata de un intervalo, (a,b) o (b,a), según cuál sea el mayor. En estos casos, cuando ignoremos cuál es el mayor, escribiremos $(a,b)^*$. Esto es,

$$(a,b)^* = \begin{cases} (a,b) & \text{si } a < b \\ (b,a) & \text{si } b < a \end{cases},$$

y lo mismo para intervalos cerrados o mixtos. Probar que si I es un intervalo y $x, y \in I$, entonces $[x,y]^* \subset I$

54. Resuelva la desigualdad y exprese en términos de interevalos.

$$1)\ |3-11x| \ge 41 \qquad 2)\ |-4x+1| \le 7$$

$$3)\ \left|\frac{3+2x}{5}\right| > 2 \qquad 4)\ \left|\frac{7-3x}{2}\right| > 1$$

$$5)\ \left|\frac{3}{x-9}\right| > 2 \qquad 6)\ \left|\frac{2+4x}{x+5}\right| \le 10$$

55. Encuentre $f(a), f(-a), -f(a), f(a+h), f(a)+f(h)$ cuando

    (a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$
    (b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

56. Desde un punto P que se encuentra a distancia h de una circunferencia de radio r, se traza una tangente a la circunferencia. Sea y la distancia del punto P al punto de tangencia T.

    (a) Exprese y como función de h (Si C es el centro de la circunferencia, entonces PT es perpendicular a CT.)
    (b) Suponiendo que el radio de la tierra es de 3960 millas, calcule la distancia al horizonte desde un trasbordador que gira a una altura de 200 millas.

57. Un globo esférico se infla con helio. El radio del globo aumenta a razón de $1.5 cm/seg$, expresar el volumen V como una función del tiempo t (en segundos).

58. Determine el dominio de definición de las funciones siguientes.

$$1)\ f(x) = \sqrt{3x-2} \qquad 2)\ f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$$

$$3)\ f(x) = \sqrt{x^2-9} \qquad 4)\ f(x) = \frac{1}{7x+9}$$

$$5)\ f(x) = \frac{x+1}{x^3-9x}$$

59. Calcular la superficie de un cono sin tapa en función del radio r de la base y de la altura h.
Sugerencia: Desarrollado en el plano, el cono es un sector circular cuyo radio coincide con la directriz d de aquél.

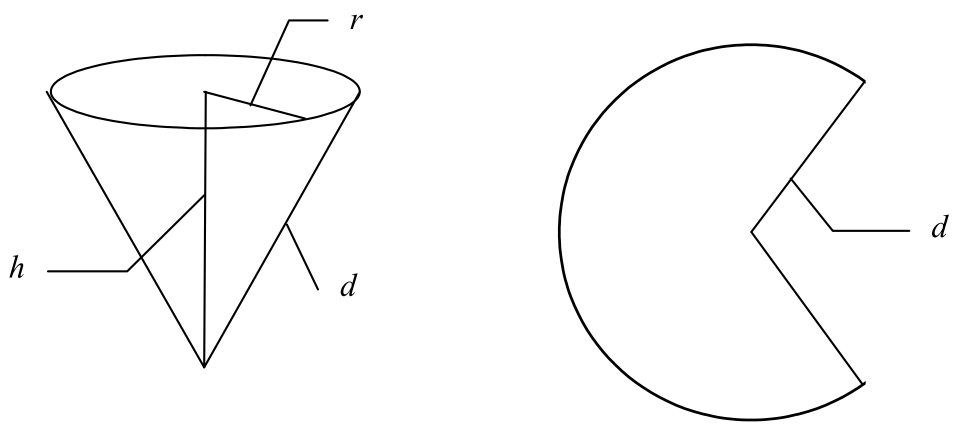
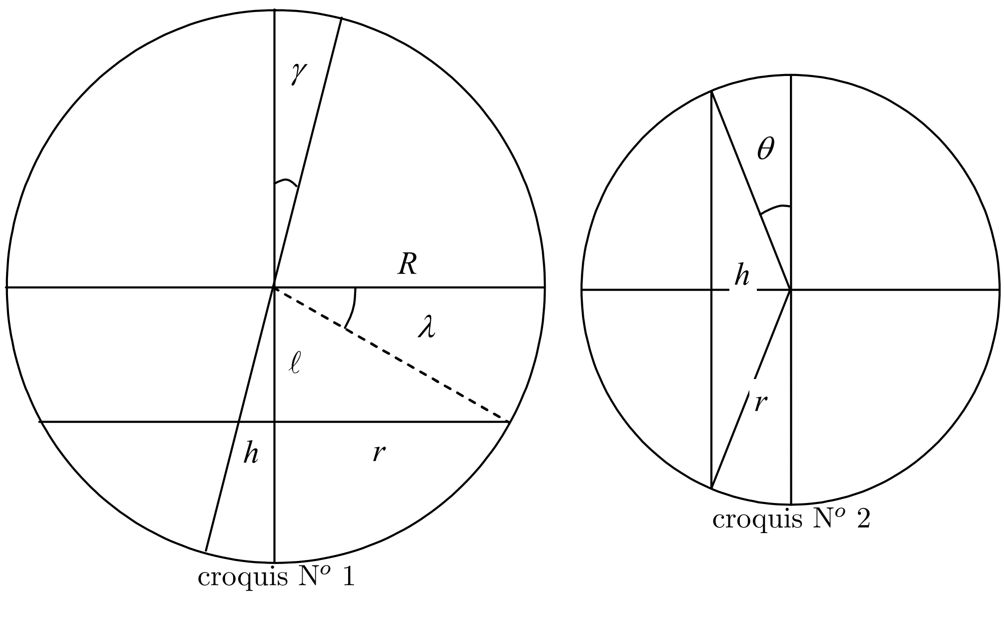


figura 1.30

60. Se sabe que el ángulo γ de inclinación del eje de la Tierra respecto de la perpendicular al plano en que vive su órbita es de $23{,}45^o$. Conocida la latitud λ de una ciudad, se pide calcular la duración de la noche más larga del año en ella. Como ayuda se dispone de los dos croquis siguientes:



La vertical en el croquis 1 es el eje de la tierra. La recta que forma con ella un ángulo γ es la perpendicular al plano orbital. Uno puede imaginar que a su izquierda es de día y a su derecha es de noche. Las líneas horizontales en este croquis son el ecuador y la órbita de la ciudad. R es el radio de la Tierra y r el radio de la órbita, que es función de R y de la latitud λ. Si uno calcula h, se traslada al segundo croquis, donde el círculo representa la órbita de la ciudad, y puede determinar θ. El sector de esa órbita que queda sumido en la noche, corresponde a un ángulo central de $180^o + 2\theta$.

Algunos ejemplos de latitudes:

Buenos Aires	34^o 36'
Bahía Blanca	38^o 43'
San Luis	33^o 18'
Paris	48^o51'
Ushuaia	54^o 48'

61. Desde una altura de $2m$ se lanza horizontalmente un proyectil con una velocidad de $2m/seg$. Dar una descripción paramétrica de la trayectoria. Suponer que la aceleración de la gravedad es de $10m/seg^2$ y recordar que la distancia recorrida en un movimiento uniformemente acelerado viene dada por la fórmula $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Suponer que no hay aire.

62. En el vacío, se dispara un proyectil con un ángulo de 45^o. La velocidad inicial es de $5\sqrt{2}m/seg$. Dar una descripción paramétrica de la trayectoria, bajo las condiciones adicionales del ejercicio anterior.

63. Un hombre dispone de $20m$ de malla de alambre para cercar un jardín rectangular. Sólo debe cercar tres lados porque el cuarto se apoyará contra un muro suficientemente largo. Exprese el área en función del ancho x del jardín y utilice su gráfica para determinar el area máxima que puede proteger.

64. El tiempo total empleado en detener un automóvil desde el momento en que el conductor se da cuenta de un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo transcurrido desde el apercibimiento hasta que se acciona el pedal de freno) y del tiempo del frenado (tiempo que tarda el coche en detenerse desde que se presiona el pedal correspondiente). La tabla que figura a continuación relaciona la distancia d(metros)que recorre hasta detenerse un automóvil que marcha a una velocidad $V(Km/h)$en el instante en que se da cuenta del peligro. Representar gráficamente d en función de V.

Velocidad $V(km/h)$	30	45	60	75	90	105
Distancia $d(m)$	18	30	48	68	97	132

65. Las ciudades de San Luis y Buenos Aires se encuentran a latitud similar, pero sus longitudes son: Buenos Aires 58^o 22'20" W y San Luis 66^o20'12" W. Se quiere calcular la diferencia horaria (solar) entre ambas ciudades.

*66. Se trata de completar la demostración del teorema 3 en la sección 1.4. De modo que sólo se puede usar de ese teorema lo que se probó efectivamente: que para $0 < \beta < \alpha < 2\pi$,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{19}$$

(a) La extensión de la fórmula (19) para cualesquiera valores reales de α y β, se demuestra usando la definición de las funcions trigonométricas para números fuera del intervalo $[0, 2\pi)$ y los resultados del ejercicio **45.** Es un trabajo que no vale la pena.

(b) Probar que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Sugerencia $\alpha+\beta = \alpha-(-\beta)$.

(c) Probar que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ y que $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$. (La primera sigue de (19) y la segunda de la primera).

(d) Probar que $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$. (usar (c)).