Práctico 4: Funciones inversas

1. Averiguar acerca de la inyectividad de las siguientes funciones en sus dominios naturales:

   1.- $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$

   2.- $y = x^3 + ax + b$ con $a > 0$

   3.- $y = x^3 + ax + b$ con $a < 0$

   4.- $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

   5.- $y = \sin x$ 6.- $y = \tan x$

2. Elegir un intervalo donde la función dada sea inyectiva.

   1) $y = x^2 - 4x + 4$ 2) $y = \sin x$

   3) $y = \cos x$ 4) $y = \tan x$

3. A continuación se da una serie de pares $f - I$ función-intervalo. Probar que cada función f es inyectiva en el intervalo I y hallar el dominio de la inversa de $f|_I$.

   1.- $3x - x^3$ en $[-1, 1]$ 2.- $x^3 - 3x$ en $[-1, 1]$

   3.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $[5, +\infty)$ 4.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $(3, 5]$

   5.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $[1, 3)$ 6.- $\frac{x^2-5}{x-3}$ en $(-\infty, 1]$

   7.- $\tan x$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. Mostrar una función monótona en un intervalo que no sea inyectiva. Una inyectiva que no sea monótona. Una función monótona pero no estrictamente...¿Puede ser inyectiva?

5. Hallar inversas de las siguientes funciones. Esto es:

   - Si es inyectiva encontrar el rango y una expresión para su inversa.
   - Si no es inyectiva encontrar un subdominio de inyectividad y resolver como en el punto anterior para la restricción.

   1.- $y = \frac{3x+2}{x+1}$ 2.- $y = x^r, r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$

   3.- $x = \sin(\theta - \theta_0)$ 4.- $y = x + \frac{1}{x}$

(a) Calcular arco seno y arco coseno de los siguientes números:

$$0; \pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Calcular arco tangente de los siguientes números:

$$0; \pm 1; \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm\sqrt{3}.$$

6. Calcular:

$$1.\text{- } \arcsin\left(\sin \tfrac{3\pi}{4}\right) \qquad 2.\text{- } \arccos\left(\cos \tfrac{3\pi}{2}\right) \qquad 3.\text{- } \arctan\left(\tan \tfrac{2\pi}{3}\right)$$

7. Trazar gráficos aproximados de $y = \arccos x$ y de $y = \arctan x$.

8. Calcular:

   (a) $\cos(\arcsin x)$.

   (b) $\cos(\arctan x)$. Sugerencia. Usar el ejercicio 52.2 del capítulo 1.

9. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

$$\text{a) } \arctan\sqrt{x} \qquad \text{b) } \arcsin x + \arccos x$$

$$\text{c) } x \arcsin x \qquad \text{d) } \arctan(\sin 2x)$$

10. Calcular

$$\tfrac{d}{dx} \arcsin x\Big|_{x=0} \qquad \tfrac{d}{dx} \arcsin x\Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tfrac{d}{dx} \arccos x\Big|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \tfrac{d}{dx} \arctan x\Big|_{x=\sqrt{3}}$$

11. Un aeroplano a una altura de 1400 m vuela horizontal y directamente alejándose de un observador. Cuando el ángulo de elevación es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo está decreciendo a razón de 0.05 rad/seg. ¿Con qué rapidez está volando el aeroplano es ese instante?.

12. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$1)\ \arctan e^x \qquad 2)\ e^{\sin 2x} \qquad 3)\ 1/e^x \qquad 4)\ e^{e^x}$$

$$5)\ \tan(e^x) \qquad 6)\ 1/(\sin e^x) \qquad 7)\ e^{\tan x} \qquad 8)\ \arcsin(e^x + x)$$

13. Hallar la ecuación de la recta tangente de

$$1)\ y = e^{2x},\ \text{en}\ x = 1 \qquad 2)\ y = x^2 e^{-2x},\ \text{en}\ x = 1$$

   (a) Trazar las gráficas de $y = 2^x$ y de $y = 3^x$ en un mismo esquema.

(b) Trazar las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Sugerencia: Observar que $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ y usar una reflexión sobre el ejercicio anterior.

14. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = e^x$ en el punto (x_0, e^{x_0}). Encontrar el valor x_0 que hace que esa recta tangente pase por el origen.

15. **Ejercicio 14:** Probar las siguientes desigualdades, validas para $x > 0$.

$$1)\ 1 < e^x \qquad 2)\ 1 + x < e^x \qquad 3)\ 1 + x + \tfrac{x^2}{2} < e^x$$

Utilizar estas desigualdades para probar que $e > 2,5$.

16. Probar que $\ln\frac{u}{v} = \ln u - \ln v$

17. Calcular $\frac{d}{dx}\ln|x|$

18. Trazar las gráficas de $y = \ln x$ y de $y = x - 1$ en un mismo esquema.

19. Se sabe que la función $y = a^x$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$. Encontrar k en función de a.

20. Encontrar una expresión para $\log_a x$ en función de $\ln x$ y de $\ln a$. (Sugerencia: partir de la identidad $a^{\log_a x} = x$ y aplicar $\ln$ miembro a miembro).

21. Calcular $\frac{d}{dx}\log_a x$.

22. Graficar, en un mismo esquema, $\log_2 x$, $\log_3 x$ y $\ln x$.

23. Probar que $\ln x < x - 1$ para todo $x > 0$.

24. Despejar x en las siguientes ecuaciones:

$$a)\ 2^x = 8 \qquad b)\ 3 \cdot 2^x = e^5$$

$$c)\ 10e^{\frac{x}{2}} = 2 \qquad d)\ \log(x + 5) = 3$$

25. Resolver los siguientes problemas:

$$a) \begin{cases} f'(x) = 3f(x) \\ f(0) = 2 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} f'(x) = \frac{2}{3}f(x) \\ f(\ln 8) = 16 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} f'(x) = -2f(x) \\ f'(0) = 4 \end{cases} \qquad d) \begin{cases} 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Los procesos de desintegración de sustancias radiactivas, si $f(t)$ representa la masa de la sustancia en el instante t, obedecen a la ecuación diferencial $f'(t) = Kf(t)$, para alguna constante $K < 0$.

26. Sea $f(t) = 10e^{Kt}$ para alguna constante K. Hallar K sabiendo que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

27. $f(t) = Ce^{2t}$. $f(2) = 5$. Calcular C.

28. En un millón de años, un gramo de radio se redujo a 01 gramo. ¿Cuál es la fórmula que da la razón de desintegración?

29. El azucar se disuelve en el agua a razón proporcional a la cantidad aún no disuelta. Si 13,6 kgr se reducen a 4,5 kgr en 4 horas ¿Cuándo se disolverá el 95% del azúcar?

    Los procesos de crecimiento no inhibido de poblaciones responden también a la ecuación diferencial $f'(t) = Kf(t)$, ahora con la constante $K > 0$. Aquí $f(t)$ es el tamaño de la población en el instante t.

30. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que $1.000.000$ de bacterias aumenten a $10.000.000$, si tardan 12 minutos en aumentar a $2.000.000$?

Ejercicios complementarios

31. En cada uno de los siguientes ejercicios, restringir el dominio de f a un intervalo de modo que la función inversa g esté definida en un intervalo que contenga al punto indicado, y hallar la derivada de la función inversa en el punto indicado.

a) $f(x) = x^3 + 1$.	Hallar $g'(2)$
b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$	Hallar $g'(6)$
c) $f(x) = \sin 2x$	Hallar $g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
d) $f(x) = 5x^2 + 1$.	Hallar $g'(11)$

32. Probar que:

    (a) $\Psi \circ \Phi$ inyectiva $\Longrightarrow$ Φ inyectiva.

    (b) $\Psi \circ \Phi$ sobreyectiva $\Longrightarrow$ Ψ sobreyectiva.
    ($f : A \to B$ es sobreyectiva si $\text{Rg } f = B$)

33. Sean $\Phi : A \to B$ y $\Psi : B \to A$ dos funciones tales que $\Psi \circ \Phi = id_A$ ($id_A(x) = x$, $\forall x \in A$. Es la función *identidad*). Probar que las siguientes tres proposiciones son equivalentes:

    (a) $\Phi \circ \Psi = id_B$ (esto es, $\Psi = \Phi^{-1}$).

    (b) Ψ es inyectiva.

    (c) Φ es sobreyectiva.

34. Probar que la inversa de una función creciente es creciente.

35. Este ejercicio constituye una demostración de que una función inyectiva y continua en un intervalo debe ser estrictamente monótona.

    (a) si en el intervalo hay tres puntos $a < b < c$ tales que $f(a) \leq f(b) \geq f(c)$ o bien $f(a) \geq f(b) \leq f(c)$ entonces f no es inyectiva (Usar el teorema de Bolzano).

(b) Dado cualquier punto a en el interior del intervalo, se da una de las dos circunstancias siguientes:

i. $[x < a \Rightarrow f(x) < f(a)] \wedge [x > a \Rightarrow f(x) > f(a)]$

ii. $[x < a \Rightarrow f(x) > f(a)] \wedge [x > a \Rightarrow f(x) < f(a)]$.

(c) En el caso **(b) i.** f es creciente y en el caso **(b) ii.** f es decreciente. Por ejemplo en el caso **i.**, habrá que demostrar que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Para ello se deberán analizar todos los casos $x < y < a, x < a < y, a < x < y$,dos de ellos a la luz del resultado (a).