Labelled Transition Systems

Alejandro Sánchez

Departamento de Informática
Universidad Nacional de San Luis

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Tucumán
14-15 Junio

Contenidos

Labelled Transition Systems (LTSs)

- Características principales
- Relaciones

Modelar, analizar y verificar sistemas reactivos

Sistema reactivo

Un sistema que computa
al reaccionar a estímulos de su ambiente

- Observación $\equiv$ interacción
- Comportamiento $\equiv$ registro estructurado de interacciones
- El comportamiento es determinado por la interacción y movilidad de procesos que no terminan, y evolucionan concurrentemente

Contrasta con sistemas secuenciales, que reciben una entrada, computan una salida, y terminan

Ejemplos de sistemas reactivos

- Sistemas operativos
- Protocolos de comunicación,
  como los usados por un servicio web
- Programas de control,
  como el de un elevador
- Software ejecutando en sistemas embebidos,
  como el de teléfonos móviles

Action

Las *actions* son el ingrediente fundamental de los LTSs

Características

- Representa un evento
- Observable
- Atómica
- Puede tener parámetros

Ejemplos
Un sistema abstracto: *a, b, c*
Un reloj alarma: *set, reset, alarm*
Un reloj alarma con repeticiones de alarma: *set(n), reset, alarm*

Definición de *Labelled Transition System*

Labelled Transition System (LTS)

Un LTS es una tupla $A = \langle S, Act, \rightarrow, s, \downarrow \rangle$ donde:

- S es un conjunto de estados
- Act es un conjunto de acciones
- $\rightarrow \subseteq S \times Act \times S$ es la relación de transición
- s es el estado inicial
- $\downarrow \subseteq S$ es el conjunto de estados terminales

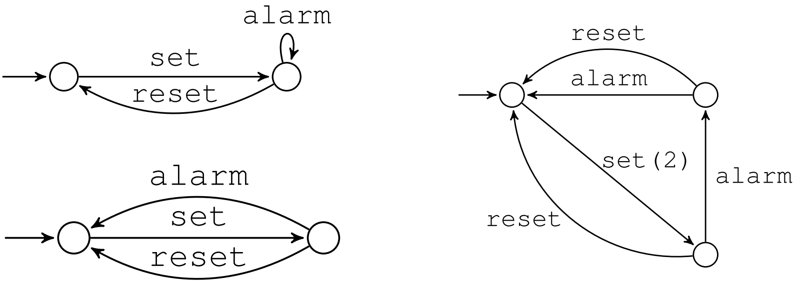
Notación

$\downarrow s_1 \equiv s_1 \in \downarrow$

$s_i \xrightarrow{a} s_j \equiv (s_i, a, s_j) \in \rightarrow$

Ejemplos LTS: Relojes alarma

¿En qué se diferencian?



Reachability

(Accesibilidad)

Reachability

La relación de *reachability*, $\rightarrow^* \subseteq S \times Act \times S$, se define inductivamente:

- $s \xrightarrow{\epsilon}{}^{*} s$, para cada $s \in S$, donde $\epsilon \in Act^*$ denota una palabra vacía
- si $s \xrightarrow{a} s''$ y $s'' \xrightarrow{\sigma}{}^{*} s'$, entonces $s \xrightarrow{a\sigma}{}^{*} s'$, para $a \in Act$ y $\sigma \in Act^*$

$t \in S$ es accesible (*reachable*) desde $s \in S$ si hay una palabra $\sigma \in Act^*$ tal que $s \xrightarrow{\sigma}{}^{*} t$

Sistemas

Sistemas

Dado un LTS $A = \langle S, Act, \rightarrow, s, \downarrow \rangle$, cada $s_i \in S$ determina un sistema sobre todos los estados accesibles desde s_i y las restricciones dadas por $\rightarrow$ y $\downarrow$

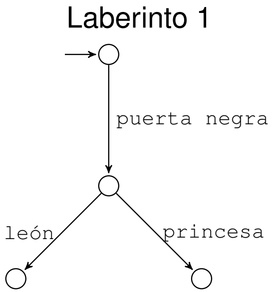
Clasificación de LTSs

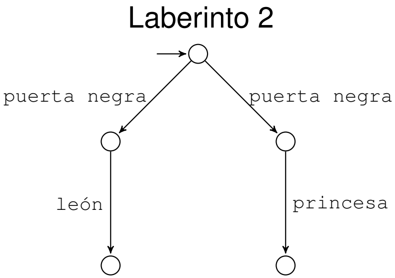
- determinístico
- no determinístico
- finito
- imagen finita (*image finite*)
- ...

Clasificación de LTSs: Ejemplo

Determinístico vs. no determinístico

(o por que a veces el príncipe encantador fracasa)





Lenguajes regulares

comportamiento *automaton* finito $\equiv$ lenguaje aceptado

Un autómata finito definido a partir de la sintaxis

$$E ::= \epsilon \mid a \mid E + E \mid EE \mid E^*$$

genera un lenguaje regular

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &\triangleq L_1 \cup L_2 \\ E_1 E_2 &\triangleq \{ab \mid a \in L_1 \wedge b \in L_2\} \\ E^* &\triangleq \{\epsilon\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \ldots \end{aligned}$$

Requerimientos para modelar sistemas reactivos

- Varios puntos de interacción, en contraste con una función
- Distinguir un final normal de uno anómalo (*deadlock*)
- El lenguaje aceptado no distingue al no determinismo (al príncipe encantador le gustaría poder distinguir a la hora de elegir un laberinto)
- Los estados recorridos en una ejecución son relevantes

Equivalencia de Comportamientos

¿Cuándo dos sistemas tienen el mismo comportamiento?

Cuando la diferencia de comportamiento
no puede ser observada

¿Cómo se observa el comportamiento?

Hay muchas formas,
veremos dos

Trace equivalence: Definición

Trace equivalence

Dado un LTS $A = \langle S, Act, \rightarrow, s, \downarrow \rangle$, el conjunto de *traces* $Tr(t)$ de un estado $t \in S$ es el conjunto mínimo que:

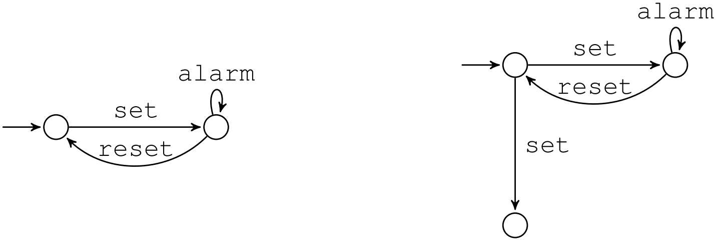
- $\epsilon \in Tr(t)$
- $\surd \in Tr(t)$
- si $\exists\ t' \in S$ tal que $t \xrightarrow{a} t'$ y $\sigma \in Tr(t'), \Rightarrow a\sigma \in Tr(t)$

con ϵ una palabra vacía y $\surd$ indicando terminación.
Dos estados $s, t \in S$ son *trace equivalent* si $Tr(s) = Tr(t)$.
Dos LTSs son *trace equivalent* si sus estados iniciales lo son.

Dos sistemas son equivalentes si las mismas secuencias de acciones pueden ejecutarse desde sus estados iniciales

Utilidad

Apropiado cuando uno no puede interactuar con el sistema ni distinguir un sistema lento de uno que se encuentra detenido



No distingue entre estos dos sistemas.
Tampoco entre los laberintos del príncipe encantador.

Simulation

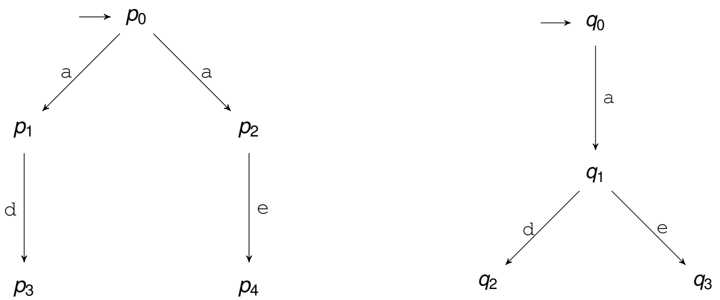
Simulation

Dados $\langle S_1, Act, \rightarrow_1, s_1, \downarrow_1 \rangle$ y $\langle S_2, Act, \rightarrow_2, s_2, \downarrow_2 \rangle$, la relación $R \subseteq S_1 \times S_2$ es una *simulation* si y solo si $\forall \langle p, q \rangle \in R$ y $a \in Act$

- $p \downarrow_1 \Rightarrow q \downarrow_2$
- $p \xrightarrow{a}_1 p' \Rightarrow \langle \exists q' : q' \in S_2 : q \xrightarrow{a}_2 q' \wedge \langle p', q' \rangle \in R \rangle$

Un estado p simula un estado q si cada transición desde p es correspondida por una transición desde q y esta capacidad se mantiene en todo estado accesible desde p.

Simulation: Ejemplo



$$R = \langle (p_0, q_0), (p_1, q_1), (p_2, q_1), (p_3, q_2), (p_4, q_3) \rangle$$

Similarity

Similarity

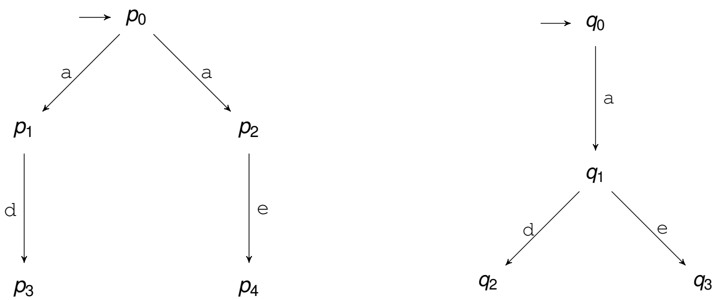
$$p \lesssim q \equiv \langle \exists R : R \text{ is a simulation } \wedge \langle p, q \rangle \in R \rangle$$

Es una relación de preorden (reflexiva y transitiva)

Similarity como la simulación más grande.

$$\lesssim \triangleq \bigcup\{R \mid R \text{ es simulation}\}$$

Similarity: Ejemplo



$$p_0 \lesssim q_0$$

Bisimulation

Bisimulation

Dados $\langle S_1, Act, \rightarrow_1, s_1, \downarrow_1\rangle$ y $\langle S_2, Act, \rightarrow_2, s_2, \downarrow_2\rangle$, la relación $R \subseteq S_1 \times S_2$ es una *bisimulation* si y solo si R y R° son *simulations*, *i.e.*,

- $p \downarrow_1 \Leftrightarrow q \downarrow_2$
- $p \xrightarrow{a}_1 p' \Rightarrow \langle \exists q' : q' \in S_2 : q \xrightarrow{a}_2 q' \wedge \langle p', q'\rangle \in R\rangle$
- $q \xrightarrow{a}_2 q' \Rightarrow \langle \exists p' : p' \in S_1 : p \xrightarrow{a}_1 p' \wedge \langle p', q'\rangle \in R\rangle$

Si dos procesos son *bisimulation equivalent*
no se pueden distinguir por ninguna forma
de observación de comportamiento realística.
Pueden considerarse iguales

Bisimilarity

Bisimilarity

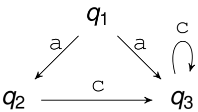
$$p \sim q \equiv \langle \exists R : R \text{ is a bisimulation } \wedge \langle p, q \rangle \in R \rangle$$

Es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica, transitiva).

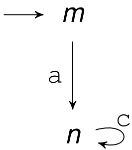
Bisimilarity como la bisimulación más grande.

$$\sim \triangleq \bigcup \{ R \mid R \text{ es bisimulation} \}$$

Bisimulation: Ejemplo



$$p_0 \sim q_0$$



Bisimulation: Ejemplo laberinto

$$q_0 \not\sim p_0$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & p_0 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "a"] & \\ p_1 \arrow[d, "d"'] & & p_2 \arrow[d, "e"] \\ p_3 & & p_4 \end{tikzcd}$$

$$p_0 \lesssim q_0$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & q_0 \arrow[d, "a"] & \\ & q_1 \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "e"] & \\ q_2 & & q_3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & q_0 \arrow[d, "a"] & \\ & q_1 \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "e"] & \\ q_2 & & q_3 \end{tikzcd}$$

$$q_0 \not\lesssim p_0$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & p_0 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "a"] & \\ p_1 \arrow[d, "d"'] & & p_2 \arrow[d, "e"] \\ p_3 & & p_4 \end{tikzcd}$$

Ejercicio

Suponga un LTS dado por la relación

$$\{(1,a,2),(1,a,3),(2,a,3),(2,b,1),\\ (3,a,3),(3,b,1),(4,a,5),(5,a,5),\\ (5,b,6),(6,a,5),(7,a,8),(8,a,8),(8,b,7)\}$$

Probar o refutar que $1 \sim 4 \sim 6 \sim 7$.